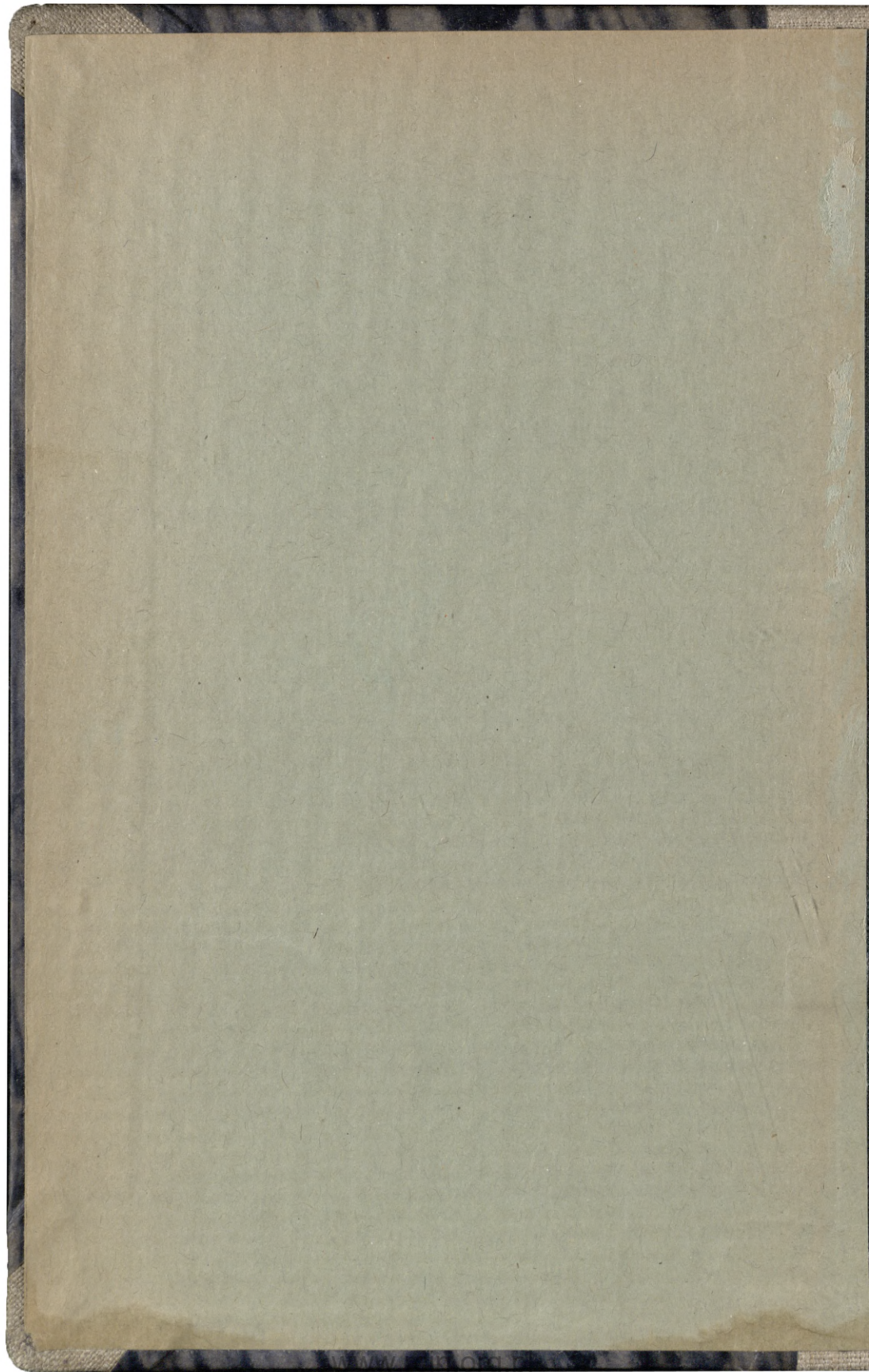


STEINER
SCHROTER

—
THEORIE
DER
KEGELSCHNITTE



Wickham

JACOB STEINER'S
VORLESUNGEN
ÜBER
SYNTHETISCHE GEOMETRIE.

ZWEITER THEIL:
DIE THEORIE DER KEGELSCHNITTE
GESTÜTZT AUF
PROJECTIVE EIGENSCHAFTEN.

DRITTE AUFLAGE.



VERLAG J. NEUBNER.

DIE
THEORIE DER KEGELSCHNITTE

GESTÜTZT AUF
PROJECTIVE EIGENSCHAFTEN.

AUF GRUND VON UNIVERSITÄTSMVORTRÄGEN UND MIT BENUTZUNG
HINTERLASSENER MANUSCRIPTE JACOB STEINER'S

BEARBEITET
VON
HEINRICH SCHRÖTER.

„Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen.“

Steiner.

Dritte Auflage,
DURCHGESEHEN VON **RUDOLF STURM.**

MIT 103 FIGUREN IM TEXT.



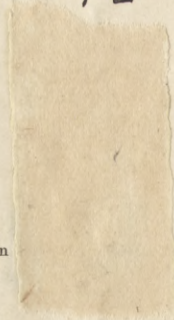
LEIPZIG
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

opis nr 48443

Verfasser und Verleger dieses Werkes behalten sich das Recht der Uebersetzung
in fremde Sprachen vor, und werden ebensowohl den Nachdruck als die un-
befugte Uebersetzung mit allen gesetzlichen Mitteln verfolgen.



7118/2



G. M. II 733

Druck von

resden.

Vorwort zur ersten Auflage.

Das für die synthetische Geometrie bahnbrechende Werk *Jacob Steiner's: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“* (Berlin, 1832) enthält in seiner Vorrede einen vollständigen Plan, nach welchem der berühmte Verfasser die Resultate seiner Forschungen in fünf einander folgenden Theilen niederzulegen gedachte. Von diesen ist nur der erste allerdings wichtigste Theil erschienen, welcher die Principien enthält, auf denen die synthetische Geometrie in ihrem heutigen Standpunkt beruht. Indessen wurde Vieles von dem Inhalt des fünften Theiles, welcher eine „ausführliche und umfassende Behandlung der Curven und Flächen zweiten Grades durch Construction und gestützt auf projectivische Eigenschaften“ enthalten sollte, in den Vorlesungen, welche *Steiner* während einer Reihe von Jahren an der Berliner Universität gehalten hat, vorgetragen; Einiges ist im *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, sowie schon früher in den *Annales de Mathématiques par M. Gergonne* veröffentlicht worden. Jene geistreichen und zur eigenen Forschung anregenden mündlichen Vorträge, denen sich der grosse Geometer mit besonderer Liebe unterzog, kamen indess nur wenigen Jüngern der Wissenschaft zu Gute, und die in diesen Vorlesungen auseinandergesetzten hinsichtlich ihrer Anschaulichkeit und Fruchtbarkeit unübertroffenen synthetischen Methoden und Betrachtungen scheinen nachgerade der Gefahr nahe, vergessen oder von der immer weiter sich ausbreitenden allmächtigen analytischen Methode in den Hintergrund gedrängt zu werden; es erscheint daher als eine Pflicht deutscher Wissenschaft, dies zu verhüten und die Wege, welche der schöpferische Geist des grössten Geometers seiner Zeit den unmittelbaren Schülern zeigte, der Nachwelt zu erhalten, um dadurch den zahlreichen Entdeckungen auf die Spur zu kommen, welche noch heute Räthsel sind für die wissenschaftliche Welt. Hierzu gestattet sich für den Herausgeber noch die besondere Pflicht dankbarer Pietät gegen seinen hochverehrten Lehrer. Im Wintersemester 1852/53 hatte ich das Glück, eine von *Steiner* unter dem Titel: „*Ueber die neueren Methoden der synthetischen*

Geometrie“ angekündigte Universitätsvorlesung zu hören und zugleich durch persönlichen Verkehr mit dem grossen Meister in den Ideengang seiner Schöpfungen eingeführt zu werden. Die damalige, wenn auch mangelhafte, doch sorgfältig ausgearbeitete Nachschrift liegt der heutigen Bearbeitung zu Grunde. Durch die Güte des Herrn Dr. C. F. Geiser, Docenten am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich, welcher als Neffe des verstorbenen *Steiner* testamentarisch mit der Veröffentlichung seines wissenschaftlichen Nachlasses beauftragt ist, wurde mir die Bearbeitung dieses Abschnittes bereitwilligst überlassen und der Theil der hinterlassenen Manuscripte *Steiner's*, welcher sich auf „*die geometrischen Gestalten*“ bezieht, zur Verfügung gestellt; aus diesem reichen Schatze habe ich Alles, was in den vorgeschriebenen Gang der Darstellung gehörte, mit Gewissenhaftigkeit aufgenommen und aus unvollendeten Aufzeichnungen zu ergänzen und herzustellen versucht. Dass es schon früh in *Steiner's* Absicht gelegen hat, diesen auf die Kegelschnitte bezüglichen fünften Abschnitt seines grossen Werkes vollständiger, als es im ersten Theil geschehen konnte, und abweichend von der dortigen Behandlung allein von den Grundprincipien aus darzustellen, zeigt die vollständig erhaltene Einleitung zu einer nicht vollendeten Abhandlung; sie ist in einem Convolut von Papieren unter der Aufschrift „*Aufklärungs-Broschüre 1833/34*“ enthalten und lautet folgendermassen:

„Ueber einige merkwürdige Lehren der neueren synthetischen Geometrie. In dieser Abhandlung werde ich zunächst die Betrachtungen über projectivische Geraden und Strahlbüschel, welche im ersten Theile der von mir verfassten Schrift: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“, enthalten sind, kurz wiederholen und sodann die naturgemässe Erzeugung der Kegelschnitte aus jenen Gebilden ableiten, sowie ferner den Ursprung verschiedener merkwürdiger Eigenschaften, wie z. B. der sogenannten Involution und der *théorie des polaires réciproques* etc. aus denselben nachweisen.

In der genannten Schrift wurden der alt-hergebrachten Weise zu Liebe die Kegelschnitte aus dem Kegel, der einen Kreis zur Basis hat, hergeleitet. Obwohl ich die Unzweckmässigkeit dieses Verfahrens schon damals deutlich fühlte, so glaubte ich doch, um nicht zu sehr von dem gewöhnlichen Gange abzuweichen, demselben folgen zu müssen. Allein der Umstand, dass man gezwungen ist, die Umkehrung eines Satzes zu behaupten (§ 38, II), der sich durch die Elementargeometrie nicht befriedigend beweisen lässt, — nämlich des Satzes, dass jeder Kegel zweiten Grades von

einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden kann — zeigte die Nothwendigkeit, jene Darstellungsweise zu verlassen und eine dem Gegenstande angemessenere aufzufinden. Die hier folgende genügt dieser Forderung im höchsten Grade, indem sie die Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Geraden und Strahlbüschel als eine unmittelbare, systematisch nothwendige offenbart und dieselbe rein synthetisch auf die möglichst einfache Weise bewerkstelligt. Ebenso wird das wahre Wesen der Involution und der *théorie des polaires réciproques* durch besondere Eigenschaften der genannten projectivischen Gebilde geoffenbart, indem ihre nothwendige Entstehung auf überraschende Weise aus diesen Eigenschaften sich nachweisen lässt und zugleich ihr inniger Zusammenhang sich kund giebt, was übrigens in der mehrerwähnten Schrift bereits angedeutet worden (§ 45). Die Schwierigkeit, die hierbei in Rücksicht auf die Kegelschnitte zu überwinden war, bestand darin, *zu beweisen, dass das durch zwei schiefliegende projectivische Geraden hervorgebrachte Erzeugniss identisch sei mit dem Erzeugniss zweier projectivischen Strahlbüschel, die sich in schiefer Lage befinden.* Diese Schwierigkeit ist jetzt nicht nur sehr leicht, sondern ich möchte sagen, sie ist auf die einfachste Weise gehoben, nämlich durch consequentes Festhalten der geringsten Anzahl von Elementen, durch welche die Projectivität jener Gebilde bestimmt wird, und zwar durch diejenigen Elemente, welche sich sowohl in Hinsicht der Gebilde, als in Bezug auf den Kegelschnitt am bemerkbarsten machen. Dadurch können nun zugleich alle übrigen Lehren, welche den Gegenstand des ersten Theiles der genannten Schrift bilden, zweckmässiger entwickelt werden, weil nunmehr die Betrachtungen in der Ebene sich bis zu ihrer Vollendung ausführen lassen, ohne dass es nöthig wird, das Büschel im Raume*, das ihr entgegensteht, zu Hülfe zu nehmen. Die Eigenschaften des letzteren lassen sich dann umgekehrt leicht aus jenen der Ebene ableiten, was der natürlichere Gang ist. Der Kegel zweiten Grades erhält dabei eine allgemeinere Erklärung, die nicht mehr an seine besondere Eigenschaft, an seine Kreisschnitte, geknüpft ist; und nicht allein die verschiedenen Eigenschaften aller seiner ebenen Schnitte, sondern auch die Eigenschaften, welche ihm im Ganzen zukommen, seine zwei Erzeugungsarten durch projectivische Gebilde sind dann mit seiner Entstehung zugleich bekannt. Auch führt die gegenwärtige Erzeugungsweise der Kegelschnitte schneller und directer als jene

* Womit das Bündel gemeint ist.

frühere Betrachtungsweise in ihre innere Natur hinein und schliesst uns am unmittelbarsten den organischen Zusammenhang ihrer zahlreichen Eigenschaften und Geheimnisse auf. Ich bemerke hier noch, dass die Betrachtung projectivischer Geraden und Strahlbüschel sich so vereinfachen lässt, dass sie ohne Hülfe trigonometrischer Ausdrücke durchgeführt werden kann, wodurch sie geeignet wird, der Elementargeometrie einverleibt zu werden und darin manche zweckmässige Verbesserung zu bewirken, indem zu ihrem trocknen Inhalt die belebenden Porismen, die Theorie der Transversalen und besonders die vollständige Lehre von den Kegelschnitten hinzutritt, dergestalt, dass alle diese Gegenstände sich ebenso leicht und einfach behandeln lassen, als nach der bisherigen Methode der Kreis. Dass in meiner mehrerwähnten Schrift trigonometrische Ausdrücke eingeführt worden, ist kein Irrthum oder Mangel in der Darstellung, wie man beim ersten Anblick leicht wähnen möchte, sondern die Entwicklungen der folgenden Theile bedürfen derselben, um zu der allseitig vollendeten Ausbildung zu gelangen, der sie fähig sind.“

„Den 24. Mai 1836.“

Diese vor dreissig Jahren geschriebene Einleitung habe ich geglaubt der gegenwärtigen Bearbeitung ungekürzt vorausschicken zu dürfen, weil ich bemüht gewesen bin, in dem hier ausgesprochenen Sinne die Lehre von den Kegelschnitten darzustellen. Von der versprochenen Abhandlung selbst finden sich unter den Papieren nur Bruchstücke, welche vorzugsweise die Theorie der Involution (das Punkt- und Strahlensystem) behandeln, ferner den erwähnten Beweis von der Identität der beiden Erzeugnisse projectivischer Geraden und projectivischer Strahlbüschel und einige Notizen über Involutionen-Netze enthalten. Unter den übrigen mir zur Einsicht gestatteten Manuscripten, welche aus den verschiedensten Zeitepochen herrühren, fanden sich zur Verwerthung für den vorliegenden Zweck Untersuchungen über Kegelschnittbüschel und -schaaren, insbesondere über „conjugirte Kegelschnittbüschel“ und „harmonisch zugeordnete Kegelschnitte“, manche schwer zu enträthselnde kurze Aufzeichnungen und viele Bemerkungen, die vermuthlich den Vorlesungen ihren Ursprung verdanken. Alles, was über die Ebene hinausging und sich grösstentheils auf Oberflächen zweiter Ordnung bezog, musste für jetzt unberücksichtigt bleiben. Der Anfang einer beabsichtigten Darstellung der Lehre von den Kegelschnitten, wie sie *Steiner* in seinen Vorlesungen vorzutragen pflegte, findet sich noch an einer späteren Stelle, welche mit den charakteristischen Worten beginnt:

„Juni 1849. Der veränderte Gang, der nach § 18 (Syst. Entw. d. A. g. G.) eintritt, ist seit Jahren in den Vorlesungen verbessert und einige Mal sogar mit Begeisterung vorgetragen worden, musste aber jedesmal mit saurer Mühe wieder erst neu hergestellt werden, was in der neuesten Zeit bei Abnahme an Eifer und Gedächtniss stets schwieriger wurde. Es wird nun kaum möglich sein, die in einzelnen Perioden in günstigen Licht-Momenten vorgetragenen Sätze und Beweise wieder hervorzurufen, um den besten Gang der Betrachtung endlich festzustellen . . .“

Hierauf folgen verschiedene Aufzeichnungen aus den Vorträgen im Sommersemester 1849, die aber zum grössten Theil Wiederholungen sind und nur bis zu dem erwähnten Identitätsbeweise reichen.

Hinsichtlich der Vertheilung und Behandlung des Stoffes habe ich mir nur wenig Abweichungen von der zu Grunde liegenden Ausarbeitung der *Steiner'schen* Vorlesung erlaubt, während die Menge desselben erheblich vergrössert ist; auch die *Steiner'sche* Terminologie habe ich bis auf wenige Ausnahmen festgehalten; der Gebrauch der Bezeichnung „Punktreihe“ anstatt „Gerade“ (als continuirliche Aufeinanderfolge sämmtlicher Punkte einer unendlich langen geraden Linie) ist schon so üblich geworden, dass er keiner Entschuldigung bedarf.

Der erste Abschnitt (projectivische Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüschel auf einander) enthält eine kurze Wiederholung der ersten in der „Systematischen Entwicklung“ niedergelegten Principien; hier wie in der Folge habe ich die von *Moebius* in die Geometrie eingeführte Auffassung entgegengesetzter Grössen (Strecken und Winkel) durch Berücksichtigung des Richtungs- und Drehungs-Sinnes festgehalten, wonach z. B., wenn a und b zwei Punkte bezeichnen, „ ab “ nicht bloss den absoluten Abstand beider Punkte, sondern die in dem Sinne von a nach b durchlaufene Strecke bedeutet, so dass also $ab + ba = 0$ ist. Die ebenfalls von *Moebius* herrührenden Beziehungen zwischen den 24 möglichen Werthen eines Doppelverhältnisses habe ich aufgenommen. Sodann ist die Bestimmung der doppelten Systeme entsprechender gleicher Strecken und Winkel bei zwei projectivischen Punktreihen und Strahlbüscheln und eine ausführliche Behandlung der Involution (des Punkt- und Strahlsystems) hinzugekommen.

Der zweite Abschnitt (der Kegelschnitt als Erzeugniss projectivischer Gebilde) definirt den Kegelschnitt auf doppelte Art und weist die Identität beider Erzeugnisse nach. Der *Pascal'sche* (und *Brianchon'sche*) Satz erscheint nur als ein etwas veränderter Ausdruck der Projectivität

zweier gleichartiger Gebilde. Die Eintheilung der Kegelschnitte geschieht durch Berücksichtigung der unendlich entfernten Punkte. Zu den Kriterien für die Erzeugung der verschiedenen Kegelschnitte durch zwei projectivische Punktreihen ist das für die gleichseitige Hyperbel hinzugekommen, welches ich nirgends gefunden habe. Die *Steiner'sche* Erweiterung des berühmten *hexagrammum mysticum* schien mir, obwohl sie etwas von dem Gange der Untersuchung abführt, doch mitzutheilen erlaubt, zumal ich das hier zusammengestellte Tableau der 60 Sechsecke, aus deren Gruppierung die Lage der *Pascal'schen* Linien, *Steiner'schen* Punkte und Geraden in der von *Hesse* angegebenen Weise am anschaulichsten hervortritt, anderswo vermisst habe. Das naturgemässe Auftreten des Punkt- und Strahlsystems beim Kegelschnitt führt zu den Polareigenschaften desselben, welche möglichst vollständig auseinandergesetzt sind. Als besondere Fälle dieser allgemeinen Beziehungen ergeben sich dann die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser, der Axen des Kegelschnitts und der Brennpunkte. Die metrischen Beziehungen treten dabei ungezwungen und fast ohne Rechnung hervor. Auf die Focaleigenschaften wird dann noch weiter eingegangen, um die Brücke vollständig herzustellen, welche die hier durchgeführte Auffassung der Kegelschnitte mit der mehr elementaren Behandlung derselben verbindet, bei der die metrischen Eigenschaften der Brennpunkte den Ausgangspunkt bilden. Der Schluss dieses Abschnitts über den Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte ist mehr als ein Anhang zu betrachten, bestimmt, die Nützlichkeit des Princips der projectivischen Beziehung an einem besonderen Beispiel vor Augen zu führen.

Der dritte Abschnitt ist dem Kegelschnittbüschel und der Kegelschnittschaar gewidmet. Von den drei mitgetheilten Entstehungsarten dieser Gebilde ist die erste (*Steiner'sche*) die anschaulichste, erfordert aber die Realität der vier Grundpunkte des Büschels; bei der zweiten können auch zwei von diesen Punkten imaginär sein; die dritte ist die allgemeinste und liefert auch das Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten durch reelle Construction. Die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, jede Gerade in den Punktepaaren eines Punktsystems zu treffen, tritt bei allen drei Entstehungsarten unmittelbar hervor. Die Untersuchung der verschiedenen Arten von Kegelschnitten, welche in einem Büschel und einer Schaar vorkommen, und wie sich dieselben in Gruppen vertheilen, lässt, wie mir scheint, den Vorzug der synthetischen Methoden recht deutlich erkennen; hieran knüpfen sich die Polareigenschaften dieser Gebilde und einige besondere Fälle. Einen neuen oder doch wenig bekannten Gegenstand: „drei conjugirte Kegelschnittbüschel“ behandelt ein be-

sonderer Paragraph. Endlich werden die gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier beliebig gegebenen Kegelschnitte ermittelt und die verschiedenen Fälle, welche hinsichtlich der Realität dieser Elemente eintreten können, genauer discutirt. Der letzte Paragraph dieses Abschnittes behandelt einen bisher wenig untersuchten Gegenstand: die harmonisch zugeordneten oder sich polar selbst entsprechenden Kegelschnitte, mit denen im Zusammenhange die Aufgabe gelöst wird: „Zu zwei gegebenen Kegelschnitten einen solchen dritten zu finden, in Bezug auf welchen als Basis der eine die Polarfigur des andern ist.“

Hier tritt schon *der imaginäre Kegelschnitt* auf und verlangt eine Erweiterung des Begriffes, welche in *dem vierten Abschnitt* durch das Involutions-Netz (Polarsystem) gegeben wird. Die Polareigenschaften eines Kegelschnitts werden unabhängig von demselben aufgefasst und liefern ein stets reelles Gebilde, das Involutions-Netz, welches, je nachdem es hyperbolisch oder elliptisch ist, einen reellen oder imaginären Kegelschnitt vertritt, ebenso wie das Punktsystem auf einer Geraden ein reelles Punktepaar (Asymptotenpunkte) oder ein imaginäres vertritt. Von den verschiedenen Bestimmungsarten des Netzes, deren Zahl durch Hinzunahme anderer Elemente leicht beträchtlich vermehrt werden kann, ist die allgemeinste vermitteltst fünf beliebiger Paare conjugirter Punkte durch eine zwar umständliche, aber lineare Construction bewerkstelligt. Die folgenden Paragraphen enthalten zum Theil eine Wiederholung früherer Betrachtungen auf der allgemeineren Grundlage, indem die ausgezeichneten Elemente des Netzes: Durchmesser, Mittelpunkt, Axen, Brennpunkte mit ihren hervorragendsten Eigenschaften für das Netz ähnlich wie für den reellen Kegelschnitt ermittelt werden. Die Annahme zweier beliebig in der Ebene gegebenen Netze führt zum Netz-Büschel und zur Netz-Schaar; dadurch werden die früheren Gebilde des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschaar vervollständigt, indem auch die imaginären Kegelschnitte, welche ihnen angehören können, zum Vorschein kommen. Der letzte Paragraph untersucht das aus drei beliebig angenommenen Netzen oder Kegelschnitten gebildete Kegelschnitt-Netz und die Tripelcurve und bildet somit den Uebergang zur Theorie der Curven dritter Ordnung.

Aus der vorstehenden Inhaltsangabe und bei einer genaueren Durchsicht des Buches wird der kundige Leser erkennen, dass ich manche Resultate aufzunehmen mir gestattet habe, welche im Laufe der Zeit hinzugekommen sind und von denen ich nicht mehr ermitteln konnte, ob *Steiner* sie früher als Andere gefunden hat, oder nicht, wenn sie sich eben in dem systematischen Entwicklungsgange naturgemäss darboten und der *Steiner'schen* Anschauungsweise ungezwungen

anschlossen. Ich glaube, dass dies nicht zum Nachtheil eines Buches geschehen ist, welches seines ganz elementaren Charakters wegen vorzugsweise bestimmt ist, als Lehrbuch zur Einführung der studirenden Jugend in die synthetische Geometrie zu dienen. Aus diesem Grunde lag mir auch weniger daran, die in Anwendung gebrachten Methoden bis zur äussersten Grenze auszubeuten und die in unerschöpflicher Menge sich darbietenden Sätze und Eigenschaften mit möglichster Vollständigkeit aufzureihen, als vielmehr die fruchtbaren Betrachtungen selbst, welche zu jenen führen, in das klarste Licht zu setzen; dem Leser sollte auch noch Etwas zu thun übrig bleiben, und überall da z. B., wo nach dem in der Natur des Gegenstandes begründeten Princip der Dualität einer Betrachtung sich die polar gegenüberstehende anschloss, ist diese entweder bloss angedeutet, oder es sind die abweichenden Punkte allein ausgeführt; möchte der Leser daher noch recht viel Stoff zur Ergänzung und Erweiterung und besonders die Aufmunterung zur eigenen Forschung aus dem Vorgetragenen entnehmen.

Was meinen eigenen bescheidenen Antheil an diesem Buche betrifft, so verzichte ich selbstverständlich in Anbetracht der Entstehung desselben auf jeden Anspruch, wie auf jede Priorität, ohne darum die Verantwortlichkeit für dasjenige, was etwa Irriges in demselben vorkommen sollte, von mir abzulehnen. Ich halte meine Arbeit für hinreichend belohnt, wenn dadurch das Studium der *Steiner'schen* Schriften erleichtert, das Interesse für synthetisch-geometrische Forschungen von Neuem angeregt und insbesondere die studirende Jugend zu einem der interessantesten und fruchtbarsten Felder mathematischer Speculation hingeführt wird.

Schliesslich bleibt mir noch übrig, Herrn Dr. *Geiser* hiermit öffentlich meinen Dank auszusprechen für die freundlichst gestattete Einsicht in die *Steiner'schen* Manuscripte und das bereitwillige Abtreten seines Anrechtes zur Veröffentlichung dieser Vorlesung.

Breslau, im September 1866.

Heinrich Schröter.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die Verlagsbuchhandlung glaubte, dass es sich doch empfehle, von den *Steiner-Schröter*'schen Vorlesungen über synthetische Geometrie, deren zweite Auflage zu Ende geht, eine neue Auflage zu veranstalten, damit dieses angesehene und nützliche Lehrbuch nicht aus dem Buchhandel verschwinde; auf ihre Aufforderung habe ich die Bearbeitung übernommen.

An dem Buche, auf dessen Titel der Name unseres grossen deutschen Geometers steht und an dessen Herstellung ein zweiter namhafter Mathematiker mitgewirkt hat, wesentliche Aenderungen vorzunehmen, schien mir nicht richtig. Wer die neue Auflage mit der vorangehenden vergleicht, wird also den sachlichen Inhalt, die Ergebnisse und die Erörterungen in ihren Hauptzügen wiederfinden, aber mannigfache äussere Aenderungen, Kürzungen, Umstellungen, Vereinfachung der Bezeichnung, andere Terminologie bemerken.

Durch die Kürzungen wurde für einige Einschaltungen Raum gewonnen, welche jedoch fast ausschliesslich von *Schröter*'schen Notizen herrühren; ich möchte insbesondere Nr. 46, 94, 101, 128, 160, 167, 189, 211, 241, 242, 310 erwähnen und darunter die überaus einfache Behandlung der Quadratur des Parabelsegments in Nr. 160 hervorheben.

Von Aenderungen, welche von mir herrühren, begnüge ich mich anzuführen, dass ich die von Kegelschnitten getragenen projectiven Punktreihen und Strahlbüschel, insbesondere die krummen Involutionen, welche in den älteren Auflagen nicht zu ihrem Rechte kommen, ordentlich einführe (§ 31) und anwende, und dass ich die beiden Fälle der Aehnlichkeit zweier Kegelschnitte, Aehnlichkeit im engern und im weitern Sinne, wie sie z. B. bei zwei conjugirten Hyperbeln stattfindet, doch mehr auseinander halte, weshalb die §§ 43, 46 etwas umgearbeitet werden mussten.

Die Terminologie musste ziemlich stark verändert werden, weil die früheren Auflagen doch mehrere veraltete, weniger geeignete oder nicht acceptirte Benennungen enthielten. Ich will nicht alle Aenderungen aufzählen; die wichtigsten sind, dass ich „Punkt-“ und „Strahlssystem“

durch „Involution“, die „Asymptotenpunkte“ und „Asymptoten“ derselben durch „Doppelpunkte“ und „Doppelstrahlen“ ersetzt habe und im letzten Abschnitt das Wort „Involutionsnetz“ durchweg durch „Polarsystem“. Jene Aenderung hat schon *Schröter* beabsichtigt, wie aus seinem Handexemplar zu ersehen ist; und mit der jetzt üblichen Verkürzung von „projectivisch“ und „perspectivisch“ in „projectiv“ und „perspectiv“ würde er auch einverstanden gewesen sein, denn er hat sie in späteren Arbeiten selbst angewandt.

Den Uebungsstoff, den *Schröter*, dem Beispiele *Steiner's* folgend, in „Aufgaben und Sätzen“ der zweiten Auflage hinzugefügt hat, habe ich gelegentlich in Seminar-Uebungen behandeln lassen und so auf seine Richtigkeit geprüft. Ich konnte ihn aus den *Schröter'schen* Notizen noch vermehren, insbesondere auch um viele metrischen Beziehungen, auf deren Ableitung ja *Schröter* viel Mühe und Scharfsinn verwandt hat, als wenn er die Leistungsfähigkeit der synthetischen Geometrie auch auf diesem Gebiete hätte darthun wollen.

Weil der Inhalt des Buches im allgemeinen der alte geblieben ist, so sah ich keine Veranlassung, die Zahl der literarischen Anmerkungen zu vergrössern. Nicht unwillkommen, hoffe ich, wird die Angabe der Lebenszeit der im Buche erwähnten verstorbenen Mathematiker sein; während ich an ihm arbeitete, hielt ich eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik; dadurch wurde ich zu jenen Angaben veranlasst. Eine nothwendige Ergänzung zu ihnen waren dann die kurzen Mittheilungen über das Leben der beiden Verfasser dieses Buches, die im Anhang stehen.

Breslau, im Januar 1898.

R. Sturm.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Projective Beziehung von Punktreihen und Strahlbüscheln auf einander.

	Seite
§ 1. Grundgebilde (Nr. 1)	1
§ 2. Projective Beziehung der Grundgebilde auf einander (Nr. 2)	1
§ 3. Unendlich ferner Punkt der Punktreihe; unendlich ferne Gerade der Ebene (Nr. 3)	2
§ 4. Uebereinstimmung der Aufeinanderfolge der Strahlen des Strahlbüschels mit den entsprechenden Punkten der Punktreihe (Nr. 4)	3
§ 5. Doppelverhältniss (Nr. 5—7)	4
§ 6. Verschiedene Werthe eines Doppelverhältnisses durch Vertauschung der Elemente. Doppelverhältniss-Beziehungen (Nr. 8, 9)	8
§ 7. Veränderung des Werthes eines Doppelverhältnisses bei der Bewegung eines seiner Elemente (Nr. 10)	10
§ 8. Harmonische Elemente (Nr. 11—15)	13
§ 9. Vorkommen harmonischer Elemente beim vollständigen Viereck und Vierseit (Nr. 16)	18
§ 10. Allgemeine Folgerungen aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse. Construction entsprechender Elemente zweier projectiver Gebilde (Nr. 17—19)	20
§ 11. Bedingung für die perspective Lage zweier projectiver Gebilde. Perspective Dreiecke (Nr. 20—23)	25
§ 12. Besondere Elemente bei zwei projectiven Punktreihen. Zwei Systeme entsprechender gleicher Strecken (Nr. 24, 25)	30
§ 13. Besondere Elemente bei zwei projectiven Strahlbüscheln. Zwei Systeme entsprechender gleicher Winkel (Nr. 26—29)	34
§ 14. Auf einander liegende projective Gebilde. Doppel-elemente (Nr. 30—33)	39
§ 15. Construction der Doppel-elemente mittelst eines festen Kreises (Nr. 34—36)	47
§ 16. Involution von Punktepaaren (Nr. 37—46)	51
§ 17. Involution von Strahlenpaaren (Nr. 47—50)	64
§ 18. Vorkommen von Involutionen beim vollständigen Viereck und Vierseit. Die Hauptsätze der Theorie der Transversalen (Nr. 51—57)	71
§ 19. Besondere Fälle projectiver Beziehung: ausgeartete Projectivität, Aehnlichkeit, Gleichheit (Nr. 58—62)	79

Zweiter Abschnitt.

Der Kegelschnitt als Erzeugniss projectiver Gebilde.

§ 20. Zwei projective Punktreihen in allgemeiner Lage (Nr. 63, 64)	85
§ 21. Die Berührungspunkte auf den Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte (Nr. 65—68)	90

	Seite
§ 22. Zwei projective Strahlbüschel in allgemeiner Lage (Nr. 69—71)	97
§ 23. Identität der Erzeugnisse zweier projectiver Punktreihen und zweier projectiver Strahlbüschel (Nr. 72, 73)	101
§ 24. Der Kreis als Erzeugniß projectiver Gebilde (Nr. 74, 75)	103
§ 25. Eintheilung der Kegelschnitte (Nr. 76, 77)	105
§ 26. Bedingungen für die Erzeugung der verschiedenen Gattungen der Kegelschnitte durch projective Punktreihen (Nr. 78—83)	109
§ 27. Das einem Kegelschnitt umgeschriebene Vierseit und eingeschriebene Viereck (Nr. 84—87)	116
§ 28. Das <i>Pascal'sche</i> Sechseck und die <i>Steiner'sche</i> Erweiterung desselben (Nr. 88—94)	121
§ 29. Das Auftreten der Involution beim Kegelschnitt (Nr. 95—98)	132
§ 30. Pol und Polare, conjugirte Punkte und Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt. Polardreieck oder -dreiseit (Nr. 99—107)	136
§ 31. Von einem Kegelschnitt getragene projective Gebilde und Involutionen. Weitere Folgerungen aus den Polar-Eigenschaften (Nr. 108—114)	147
§ 32. Durchmesser und Mittelpunkt, die Involution der conjugirten Durchmesser und die Axen des Kegelschnitts (Nr. 115—121)	156
§ 33. Construction der Axen und einige daraus hervorgehenden metrischen Beziehungen (Nr. 122—130)	164
§ 34. Bestimmung solcher Punkte, von welchen an einen Kegelschnitt zwei rechtwinklige Tangenten kommen (Nr. 131—134)	174
§ 35. Bestimmung solcher Punkte, für welche die einem Kegelschnitt zugehörige Involution rechtwinklig ist: Brennpunkte des Kegelschnitts (Nr. 135—142)	180
§ 36. Einige Eigenschaften der Kegelschnitte, welche sich auf ihre Brennpunkte beziehen (Nr. 143—151)	189
§ 37. Das Normalenproblem (Nr. 152—155)	199
§ 38. Der Krümmungshalbmesser. Inhalt des Parabelsegments (Nr. 156—160)	203

Dritter Abschnitt.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

§ 39. Entstehung des Kegelschnittbüschels aus dem Strahlbüschel (Nr. 161—167)	213
§ 40. Charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels und einige Folgerungen aus derselben (Nr. 168—178)	222
§ 41. Andere Entstehungsart des Kegelschnittbüschels (Nr. 179—183)	232
§ 42. Erzeugung des Kegelschnittbüschels mittelst zweier Involutionen (Nr. 184—192)	237
§ 43. Ueber die besondere Art der in einem Büschel enthaltenen Kegelschnitte (Nr. 193—201)	247
§ 44. Entstehung der Kegelschnittschaar aus der geraden Punktreihe (Nr. 202—208)	258
§ 45. Charakteristische Eigenschaft der Kegelschnittschaar und einige Folgerungen aus derselben (Nr. 209—213)	267
§ 46. Ueber die besondere Art der in einer Schaar enthaltenen Kegelschnitte (Nr. 214—220)	274
§ 47. Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels (Nr. 221—226)	281
§ 48. Ueber den Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels (Nr. 227—233)	290

	Seite
§ 49. Polar-Eigenschaften der Kegelschnittschaar (Nr. 234—242)	298
§ 50. Die Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten (Nr. 243—245)	312
§ 51. Conjugirte Kegelschnittbüschel (Nr. 246—251)	317
§ 52. Besondere Fälle von Kegelschnitt-Büscheln und -Schaaren: Kegelschnitte, die sich doppelt berühren, confocale Kegelschnitte (Nr. 252—262)	326
§ 53. Gemischte Kegelschnittsysteme (Nr. 263—267)	341
§ 54. Die gemeinschaftlichen Punkte, Tangenten und das gemeinsame Polar-dreieck zweier beliebig angenommenen Kegelschnitte (Nr. 268—279) .	350
§ 55. Harmonisch zugeordnete Kegelschnitte (Nr. 280—291)	369

Vierter Abschnitt.

Das Polarsystem und das Kegelschnittnetz.

§ 56. Erklärung und Construction des Polarsystems (Nr. 292—295)	391
§ 57. Der Kern-Kegelschnitt; hyperbolisches und elliptisches Polarsystem (Nr. 296—300)	397
§ 58. Verschiedene Bestimmungsarten des Polarsystems (Nr. 301—307)	406
§ 59. Durchmesser und Mittelpunkt, die Involution der conjugirten Durchmesser und die Axen des Polarsystems (Nr. 308—310)	421
§ 60. Die Brennpunkte des Polarsystems (Nr. 311—313)	427
§ 61. Einige Eigenschaften der Axen der Involutionen, welche den Punkten in einem Polarsystem zugehören (Nr. 314—318)	433
§ 62. Zwei Polarsysteme. Büschel und Schaar von Polarsystemen (Nr. 319—333)	442
§ 63. Drei Polarsysteme oder Kegelschnitte. Die Tripelcurve. Das Kegelschnittnetz (Nr. 334—353)	469

Anhang.

I. Aufgaben und Sätze (Nr. 1—128)	503
II. Lebenslauf der beiden Verfasser dieses Buches	536

Verbesserungen zu den Aufgaben und Sätzen im Anhange der 3. Auflage der Steiner-Schröter'schen Vorlesungen.

Seite 513 Z. 15 v. u. l. die zu hm in Bezug auf bc , ca , ab symmetrisch liegenden Geraden.

$$\begin{aligned}
 \text{,, 515 Z. 18, 19, 22 v. o. l. } & \frac{S_1}{P_1} + \frac{S_2}{P_2} + \frac{S_3}{P_3} = 2, \\
 & \frac{S_1^2}{P_1} + \frac{S_2^2}{P_2} + \frac{S_3^2}{P_3} = P_a + P_b, \\
 & - \frac{S_1^2 S_2^2 S_3^2}{P_1 P_2 P_3} \cdot \frac{\Delta^2}{r^2} = P_a^2 P_b^2.
 \end{aligned}$$

„ 519 Z. 4 v. o. l. (bc , cb) st. (ba , cb).

„ 528 Z. 10 v. u. l. $\frac{\Delta_1}{2\Delta}$ st. $\frac{\Delta_1}{\Delta}$.

„ 529 Z. 16 v. o. Es ist nicht nothwendig, dass O innerhalb des Kegelschnitts liegt.

Erster Abschnitt.

Projective Beziehung von Punktreihen und Strahlbüscheln auf einander.

§ 1. Grundgebilde.

Die sämtlichen auf einander folgenden Punkte einer (unendlich langen) geraden Linie nennt man eine *gerade Punktreihe* oder schlechtweg *Punktreihe*, wenn nur von geraden Punktreihen die Rede ist. Die Gerade selbst, deren Punkte aufgefasst werden, soll der *Träger* der Punktreihe heissen. Die sämtlichen durch einen Punkt in einer Ebene gehenden Strahlen (unendlich lange gerade Linien) nennt man ein *Strahlbüschel*. Der Punkt, durch welchen sämtliche Strahlen gehen, heisst der *Grundpunkt* des Strahlbüschels. Die Punkte der Punktreihe und die Strahlen des Strahlbüschels heissen *Elemente* dieser *geometrischen Grundgebilde*.

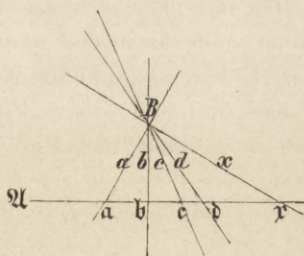
§ 2. Projective Beziehung der Grundgebilde auf einander.

Diese beiden einfachsten geometrischen Gebilde (Punktreihe und Strahlbüschel) sind von einfacher Unendlichkeit. Die gleiche Mächtigkeit erkennen wir, indem wir die beiden Gebilde zu einander in Beziehung setzen.

Sämtliche durch einen Punkt B , den Grundpunkt eines Strahlbüschels, gehenden Strahlen $a, b, c, d \dots x \dots$ treffen eine beliebige (nicht durch B gehende) Gerade \mathcal{A} in den gleichnamigen Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \varepsilon \dots$ (Fig. 1) und stellen eine derartige Beziehung zwischen den Elementen beider Gebilde

her, dass jeder Strahl des Strahlbüschels durch den gleichnamigen Punkt der Punktreihe geht und umgekehrt jeder Punkt der Punktreihe auf dem gleichnamigen Strahl des Strahlbüschels liegt. Zwei solche zusammenliegende Elemente heissen *entsprechende Elemente*, und diese Lage der beiden Gebilde, bei welcher jeder Strahl des Strahlbüschels

Fig. 1.



durch den entsprechenden Punkt der Punktreihe geht, nennt man die *perspective Lage*. Die durch die perspective Lage beider Gebilde hergestellte eindeutige Beziehung der Elemente auf einander kann nun festgehalten werden, während die perspective Lage aufgehoben wird (etwa dadurch, dass das Strahlbüschel B und die Punktreihe \mathfrak{A} beliebig in der Ebene verschoben werden), aber die entsprechenden Elemente in irgend einer Weise, z. B. durch Bezeichnung mit gleichlautenden Buchstaben, fixirt werden. Die auf diese Art von der perspectiven Lage unabhängig gemachte eindeutige Beziehung der Elemente beider Gebilde auf einander heisst *projective Beziehung*, und die Gebilde selbst heissen *projectiv*, wenn ihre entsprechenden Elemente so liegen, dass jene in perspective Lage gebracht werden können.

§ 3. Unendlich ferner Punkt der Punktreihe; unendlich ferne Gerade der Ebene.

3 Die Zusammengehörigkeit entsprechender Elemente lässt sich bei der perspectiven Lage der beiden Grundgebilde auch so auffassen, dass man einen veränderlichen Strahl x des Strahlbüschels um den Grundpunkt B dreht, wodurch sein Schnittpunkt γ mit dem Träger \mathfrak{A} auf demselben fortrückt. Dabei tritt nun einmal der besondere Fall ein, dass der Strahl x in parallele Lage zu dem Träger \mathfrak{A} gelangt und dadurch der Schnittpunkt γ , welcher sonst immer eine bestimmte angebbare Lage auf \mathfrak{A} hatte, der Wahrnehmung entschwindet oder, wie man sich ausdrückt, ins Unendliche rückt. Betrachten wir den Strahl x kurz vor und kurz nach dieser parallelen Lage, so wird der entsprechende Punkt γ einmal nach der einen Seite und das andere Mal nach der andern Seite hin sehr weit entfernt liegen, während es bei der parallelen Lage selbst unentschieden bleibt, ob er nach der einen oder nach der andern Seite hin liegt. Trotzdem nehmen wir der Uebereinstimmung wegen an, dass auch der *Parallelstrahl* den Träger \mathfrak{A} nur in *einem* Punkte trifft, und nennen diesen *den unendlich entfernten Punkt* der Punktreihe, den wir uns sowohl nach der einen Seite als auch nach der andern Seite hin liegend vorstellen können. Der unendlich entfernte Punkt der Gerade* \mathfrak{A} ist ein ausgezeichneter

* Ich habe mich entschlossen, das Wort „Gerade“ in Bezug auf die Declination ebenso zu behandeln, wie das ursprünglich auch adjectivische „Ebene“ und die ebenfalls adjectivischen Fremdwörter „Polare“, „Normale“, „Chordale“, „Transversale“, „Diagonale“, als volles Substantiv, so dass der Singular immer „Gerade“, der Plural immer „Geraden“ heisst. Das ist viel einfacher und klarer; insbesondere empfiehlt sich die substantivische Declination durch die deutliche Unterscheidung der beiden Genitive, der Gerade und der Geraden, während

und bei Verrückung derselben in sich unveränderlicher Punkt, welcher die charakteristische Eigenschaft besitzt, dass jeder nach ihm hingehende Strahl mit der Gerade parallel ist.

Der unendlich entfernte Punkt verbindet gewissermassen die nach entgegengesetzten Seiten hin verlaufenden Enden der geraden Linie und stellt eine Continuität her entsprechend der continuirlichen Drehung des Strahles im Strahlbüschel.

Aus dieser Festsetzung, dass jede Gerade nur einen unendlich fernen Punkt hat, folgt, dass die Verbindungslinie zweier unendlich entfernter Punkte ganz in die Unendlichkeit fällt: alle ihre Punkte sind unendlich fern. Und umgekehrt: *Alle unendlich fernen Punkte einer Ebene liegen auf einer Gerade.* Denn enthielte die Verbindungslinie $a^\infty b^\infty$ der unendlich fernen Punkte zweier Geraden nicht auch den c^∞ einer dritten Gerade, so würde diese zwei unendlich entfernte Punkte haben, nämlich c^∞ und den Schnitt mit $a^\infty b^\infty$.

Zu dieser ausgezeichneten Gerade sind alle Geraden der Ebene als parallel anzusehen.

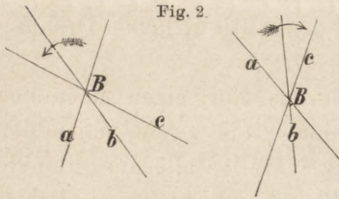
§ 4. Uebereinstimmung der Aufeinanderfolge der Strahlen des Strahlbüschels mit den entsprechenden Punkten der Punktreihe.

Aus der eben betrachteten zusammengehörigen Bewegung: der Drehung des Strahles x um B und dem Fortrücken des entsprechenden Punktes χ auf \mathfrak{A} ergibt sich zugleich eine Uebereinstimmung der Aufeinanderfolge entsprechender Elemente oder des Drehungssinnes mit dem Richtungssinn. Der Strahl x kann sich um den Grundpunkt B entweder in dem einen oder dem entgegengesetzten Drehungssinne herumbewegen (entweder wie der Zeiger einer Uhr, auf welche man sieht, oder entgegengesetzt); dem entsprechend muss der Punkt χ entweder in dem einen oder in dem entgegengesetzten Richtungssinne auf dem Träger \mathfrak{A} fortrücken. Sind a und b zwei besondere Lagen des sich drehenden Strahles x , so kann x auf doppelte Weise aus der Lage a in die Lage b übergeführt werden, in dem einen oder andern Drehungssinne. Diese Zweideutigkeit hört aber auf, sobald wir drei besondere Lagen a, b, c annehmen und verlangen, der veränderliche

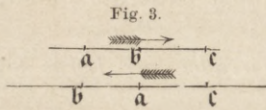
bei der adjectivischen sie gleich sind. Die jetzige Mannigfaltigkeit, bei welcher, je nach den verschiedenen Fällen, beide Formen Singular und Plural sind: die Gerade, zwei Gerade, die Geraden, parallele Geraden u. s. w., ist jedenfalls für Nichtdeutsche wenig bequem; und unsere Bücher sind voller Fehler gegen die Regeln der Grammatik für adjectivische Declination. Und ich meine, wir Mathematiker können diese Veränderung wagen, da wir allein das Substantiv „Gerade“ anwenden; ausserhalb der Mathematik heisst es immer „gerade Linie“. St.

Strahl solle von a durch b nach c gelangen. Durch die Aufeinanderfolge abc ist der Drehungssinn von x bestimmt (Fig. 2).

Sind a und b zwei besondere Lagen des fortrückenden Punktes x , so kann x von a nach b auf doppelte Weise gelangen, entweder direct, oder durch den unendlich entfernten Punkt (Nr. 3). Diese beiden Wege haben entgegengesetzten Richtungssinn. Die Zweideutigkeit hört aber auf, sobald wir drei besondere Lagen a, b, c annehmen und festsetzen, der Punkt x solle von a durch b nach c gelangen;



durch die Aufeinanderfolge abc ist der Richtungssinn von x bestimmt (Fig. 3). Da nun a, b, c und a, b, c entsprechende Elemente der beiden projectiven Gebilde sind, so wird, sobald durch die Aufeinanderfolge abc der Drehungssinn des Strahlbüschels festgestellt ist, durch die zugehörige Aufeinanderfolge abc der Richtungssinn der Punktreihe unzweideutig bestimmt; acb bzw. acb bestimmen die entgegengesetzten Sinne.



§ 5. Doppelverhältniss.

- 5 Um die gegenseitige Abhängigkeit der Elemente der beiden Grundgebilde, welche durch die perspective Lage derselben hervorgerufen wird, unabhängig von letzterer darzustellen, suchen wir Beziehungen auf zwischen den Abständen beliebiger Punkte der Punktreihe und den Winkeln, welche die entsprechenden Strahlen mit einander bilden, solchergestalt, dass diese Beziehungen von der Lage der beiden Gebilde zu einander unabhängig sind.

Seien $a, b, c, d \dots$ beliebige Punkte der Punktreihe \mathcal{A} , so soll nach dem Vorgange von *Möbius* durch die Nebeneinanderstellung der Buchstaben

$$ab$$

nicht allein die Strecke zwischen den Punkten a und b (ihr Abstand) bezeichnet werden, sondern auch der Richtungssinn, in welchem die Strecke von a nach b hin auf endlichem Wege durchlaufen wird, so dass also

$$\text{I. } ab + ba = 0, \text{ d. h. } ba = -ab$$

ist. Strecken von dem einen Richtungssinn auf der Gerade sind also positiv und die vom andern negativ. Dann finden für drei Punkte a, b, c der Gerade immer die aus einander folgenden Beziehungen:

$$\text{II. } ab + bc + ca = 0, \quad ab + bc = ac, \quad ab = ac - bc = cb - ca$$

statt, mag der Punkt c zwischen a und b oder ausserhalb der Strecke liegen; und für irgend vier auf der Gerade befindliche Punkte a, b, c, d gelten nachfolgende Beziehungen III, IV, V:

$$\text{III.} \quad bc \cdot ad + ca \cdot bd + ab \cdot cd = 0;$$

man darf nur bc , ca , ab durch $bd - cd$, $cd - ad$, $ad - bd$ ersetzen, um die Richtigkeit dieser Beziehung zu erkennen.

Ebenso beweist man:

$$\text{IV.} \quad (ad)^2 \cdot bc + (bd)^2 \cdot ca + (cd)^2 \cdot ab + bc \cdot ca \cdot ab = 0,$$

$$\text{V.} \quad bd \cdot cd \cdot bc + cd \cdot ad \cdot ca + ad \cdot bd \cdot ab + bc \cdot ca \cdot ab = 0.$$

Man kann diesen Beziehungen auch die Form geben:

$$\text{III}'. \quad \frac{da}{ba \cdot ca} + \frac{db}{cb \cdot ab} + \frac{dc}{ac \cdot bc} = 0, \quad \text{IV}'. \quad \frac{(da)^2}{ba \cdot ca} + \frac{(db)^2}{cb \cdot ab} + \frac{(dc)^2}{ac \cdot bc} = 1,$$

$$\text{V}'. \quad \frac{db \cdot dc}{ab \cdot ac} + \frac{dc \cdot da}{bc \cdot ba} + \frac{da \cdot db}{ca \cdot cb} = 1.$$

Die Relationen IV, IV' gelten auch, wenn d ausserhalb liegt; denn ist d' der Fusspunkt des Lothes aus d auf abc , so ist IV für d' richtig und führt zur Formel für d , wenn $(ad')^2$ durch $(ad)^2 - (dd')^2$, ... ersetzt wird.

Seien nun $a, b, c, d \dots$ die entsprechenden Strahlen des mit der 6 Punktreihe $abc \dots$ perspectiv liegenden Strahlbüschels B , und bezeichne

(ab)

den Winkel zwischen den beiden Strahlen a und b von einem veränderlichen Strahl x in demjenigen Drehungssinne von a nach b hin beschrieben, welcher übereinstimmt mit dem Richtungssinne der Strecke ab (Nr. 4), dann lassen sich leicht Beziehungen ermitteln zwischen den Winkeln des Strahlbüschels und den entsprechenden Abschnitten auf der Punktreihe, indem man nach bekannten Sätzen der Elementargeometrie die Fläche des Dreiecks Bab auf doppelte Weise ausdrückt; das aus B auf \mathfrak{A} gefällte Perpendikel treffe in p , dann wird

$$Ba \cdot Bb \cdot \sin(ab) = Bp \cdot ab,$$

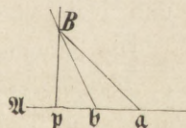
oder

$$\frac{ab}{\sin(ab)} = \frac{Ba \cdot Bb}{Bp}.$$

Nimmt man ein drittes Paar c und c entsprechender Elemente hinzu, so treten in gleicher Weise zwei neue Relationen hinzu:

$$\frac{ac}{\sin(ac)} = \frac{Ba \cdot Bc}{Bp}, \quad \frac{bc}{\sin(bc)} = \frac{Bb \cdot Bc}{Bp}.$$

Fig. 4.



Daraus folgt:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} \cdot \frac{Ba}{Bb}$$

Wir ziehen noch ein viertes Paar entsprechender Elemente d und δ in die Betrachtung und haben:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} \cdot \frac{Ba}{Bb},$$

und durch abermalige Division:

$$1) \quad \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

Nun ist alles entfernt, was auf die perspective Lage Bezug hat.

Der Ausdruck $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$, welchen wir der Kürze wegen mit

$$(abcd)$$

bezeichnen wollen, heisst das *Doppelverhältniss* (oder das anharmonische Verhältniss) von vier Punkten, und um die Bildungsweise desselben leichter zu übersehen, nennen wir a und b ein Paar *zugeordneter* Punkte, c und δ das andere Paar zugeordneter Punkte; dann sind zur Bildung des Doppelverhältnisses die einfachen Verhältnisse der Abstände jedes Punktes des einen Paares zugeordneter Punkte von den beiden Punkten des anderen Paares: $\frac{ac}{bc}$ und $\frac{ad}{bd}$ durch einander zu theilen. Ebenso heisst der Ausdruck:

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

welchen wir mit $(abcd)$ bezeichnen, das Doppelverhältniss von vier Strahlen des Strahlbüschels, und es werden dabei ebenfalls a und b , c und d als zugeordnete aufgefasst.

Die gefundene Beziehung 1) sagt also aus:

Bei zwei projectiven Gebilden: einer Punktreihe und einem Strahlbüschel findet zwischen vier Elementen a, b, c, δ des einen und den entsprechenden a, b, c, d des andern die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:

$$(abcd) = (abcd).$$

Durch die obige Betrachtung ist zunächst nur die absolute Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse nachgewiesen. Aber die Gleichheit erstreckt sich auch auf die Vorzeichen. Es wurde oben angenommen, dass der Drehungssinn im Büschel dem Richtungssinn auf der Gerade entspricht, dann haben ac, bc, \dots je dasselbe Vorzeichen wie $(ac), (bc), \dots$ und also auch wie $\sin(ac), \sin(bc), \dots$ und beide Doppelverhältnisse dasselbe Vorzeichen, und kehrt man etwa den Richtungs-

sinn von \mathcal{A} um, so kehren ac, \dots ihre Vorzeichen um, wodurch aber dasjenige von (abc) nicht beeinflusst wird. Ferner, Winkel (ac) war oben der Winkel von a nach c , der über der Strecke ac steht, so dass diejenigen beiden „Halbstrahlen“ von a, c als Schenkel genommen sind, welche die Punkte a, c enthalten. Ersetzt man beide Halbstrahlen durch die andern, so ändert sich an (ac) und $\sin(ac)$ nichts; wird nur der eine ersetzt, so geht der Winkel in das Supplement über und ändert zugleich sein Vorzeichen; folglich ändert $\sin(ac)$ nur sein Vorzeichen. Da jeder Strahl aber bei zwei Winkeln im Doppelverhältnisse auftritt, z. B. c bei $(ac), (bc)$, so sieht man wiederum, dass diese Veränderung am Doppelverhältnisse nichts ändert. Wie also auch die Winkel $(ac), (bc) \dots$ bestimmt sein mögen, die Relation 1) ist immer, auch dem Vorzeichen nach, richtig.

Bei der Bestimmung eines Winkels kommt es also auf die Wahl der Halbstrahlen als Schenkel an; sind daher a, b, c drei Strahlen eines Büschels, so wird nicht immer $ab + bc + ca = 0$ sein, sondern diese Summe kann auch $\pm \pi$ sein, wo mit π in üblicher Weise der flache Winkel bezeichnet ist. Also $(ab) + (bc) + (ca) = \varepsilon\pi$, wo $\varepsilon = -1, 0$ oder $+1$ ist; und demnach ist

$$(ab) + (bc) = (ac) + \varepsilon\pi, \quad (ab) = (ac) - (bc) + \varepsilon\pi = (cb) - (ca) + \varepsilon\pi.$$

Handelt es sich aber um Winkel, die unter dem Zeichen einer trigonometrischen Function stehen, so kann man $\varepsilon\pi$ weglassen; und in diesem Sinne gelten die Gleichungen:

$$(ab) + (bc) = (ac), \quad (ab) = (ac) - (bc) = (cb) - (ca).$$

Als Anwendung möge die Ableitung folgender Formeln für 3 Strahlen eines Büschels dienen.

$$\begin{aligned} \cos(ab) &= \cos[(ac) + (cb)] = \cos(ac)\cos(cb) - \sin(ac)\sin(cb); \\ \sin(ac)\sin(cb) &= \cos(ac)\cos(cb) - \cos(ab). \end{aligned}$$

Erhebt man ins Quadrat, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \{1 - \cos^2(ac)\} \{1 - \cos^2(bc)\} &= \cos^2(ac)\cos^2(bc) + \cos^2(ab) \\ &\quad - 2\cos(ac)\cos(bc)\cos(ab), \end{aligned}$$

da $\cos(bc) = \cos(cb)$; also:

$$\sin^2(ab) = \cos^2(ac) + \cos^2(bc) - 2\cos(ac)\cos(bc)\cos(ab).$$

Ist c' rechtwinklig zu c , so ist $(ac) = (ac') \pm \frac{\pi}{2}$, also $\cos(ac) = \mp \sin(ac')$, mithin:

$$\sin^2(ab) = \sin^2(ac') + \sin^2(bc') - 2\sin(ac')\sin(bc')\cos(ab).$$

§ 6. Verschiedene Werthe eines Doppelverhältnisses durch Vertauschung der Elemente. Doppelverhältniss-Beziehungen.

8 Ehe wir aus dem in Nr. 6 gefundenen Resultat Folgerungen ziehen, wollen wir untersuchen, in welchem Zusammenhange die 24 Werthe des Doppelverhältnisses mit einander stehen, welche wir erhalten, wenn wir die Elemente desselben auf alle möglichen Arten unter einander vertauschen. Sei der Werth des Doppelverhältnisses:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = (abcd) = k,$$

so erkennen wir zunächst aus der Bildungsweise desselben, dass

$$1) \quad (abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba)$$

ist; ferner 2) $(abcd) \cdot (abdc) = 1.$

Endlich giebt die Relation III. in Nr. 5 zwischen irgend vier Punkten einer Gerade:

$$ab \cdot cd + bc \cdot ad + ca \cdot bd = 0$$

folgende Beziehung zwischen Doppelverhältnissen:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} + \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} = 1$$

oder:

$$3) \quad (abcd) + (acbd) = 1,$$

und hieraus lassen sich die Werthe des Doppelverhältnisses für alle 24 möglichen Vertauschungen folgendermassen durch einen Werth k desselben ausdrücken:

$$\left\{ \begin{array}{l} (abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba) = k, \\ (abdc) = (bacd) = (cdba) = (dca b) = \frac{1}{k}, \\ (acbd) = (bdac) = (cadb) = (dbca) = 1 - k, \\ (acdb) = (bdca) = (cabd) = (dbac) = \frac{1}{1-k}, \\ (adb c) = (bcad) = (cbda) = (dac b) = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}, \\ (adc b) = (bcda) = (cbad) = (dabc) = \frac{k}{k-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{k}}. \end{array} \right.$$

Man überzeuge sich, dass von diesen sechs Werthen vier positiv und zwei negativ sind, und dass:

$$(abcd) \cdot (adb c) + (acbd) = 0, \quad (abcd) \cdot (acdb) \cdot (adb c) = -1.$$

Dieselben Beziehungen ergeben sich für die Doppelverhältnisse von vier Strahlen aus der in Nr. 6 nachgewiesenen Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(abcd) = (abcd).$$

Sind fünf Punkte auf einer Gerade gegeben, so lassen sich zwischen 9 denselben mehrere Doppelverhältnisse bilden, die in einfachem Zusammenhang mit einander stehen; da nämlich

$$(abcd) = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd},$$

$$(abce) = \frac{ac}{bc} : \frac{ae}{be}$$

ist, so folgt:

$$\frac{(abcd)}{(abce)} = \frac{ae}{be} : \frac{ad}{bd} = (abed),$$

also haben wir die Relation:

$$A) \quad (abcd) \cdot (abde) \cdot (abec) = 1.*$$

Schreiben wir sie in der Form:

$$(abcd) \cdot (abde) = (abce),$$

so zeigt sie sich als Specialfall der unmittelbar ersichtlichen Identität:

$$(abc_1c_2) \cdot (abc_2c_3) \dots (abc_{n-1}c_n) = (abc_1c_n).$$

Aehnlich ist: $(acde) = (abde) \cdot (bcde)$; wir haben

$$1 - (acbe) = (abce), \quad 1 - (adbe) = (abde);$$

wir multipliciren mit $(acde)$ und $(adce)$ und addiren, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 1 - (acde) \cdot (acbe) - (adbe) \cdot (adce) &= (abce)(acde) + (abde) \cdot (adce) \\ &= (abce) \cdot (abde) (bcde) + (abde) \cdot (abce) \cdot (bdce) \\ &= (abce) \cdot (abde) \{ (bcde) + (bdce) \} = (abce) \cdot (abde). \quad \text{Also:} \end{aligned}$$

$$B) \quad (abce) \cdot (abde) + (acde) \cdot (acbe) + (adbe) \cdot (adce) = 1.$$

Durch neue Zerlegung erhält man:

$$C) \quad \begin{cases} (abce)^2 \cdot (abdc) + (acde)^2 \cdot (acbd) + (adbe)^2 \cdot (adcb) = 1 & \text{oder:} \\ \frac{(abce)^2}{(abcd)} + \frac{(acde)^2}{(acdb)} + \frac{(adbe)^2}{(adb c)} = 1. \end{cases}$$

Für sechs Punkte haben wir:

$$(abcd) \cdot (abde) \cdot (abef) = (abcf)$$

oder:

$$D) \quad (abcd) \cdot (abef) = (abcf) \cdot (abed).$$

Aus der Relation A) ergiebt sich der Werth eines Doppelverhältnisses, dessen vier Elemente gegeben sind durch die Werthe der vier Doppelverhältnisse, welche sie mit drei anderen (Fundamental-)Elementen bilden; wenn nämlich

* A. F. Möbius (1790—1868), Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827. (Gesammelte Werke Bd. I.) § 185.

$$(abc\delta_1) = k_1, \quad (abc\delta_2) = k_2$$

ist, so wird nach der Relation A):

$$(ab\delta_1\delta_2) = \frac{k_2}{k_1}.$$

Ist $(abc\delta_3) = k_3$, so folgt $(a\delta_1\delta_2\delta_3) \cdot (a\delta_1\delta_3\delta_2) = 1$, d. h.

$$\frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot \frac{k_1 - k_3}{k_1} \cdot (a\delta_1\delta_3\delta_2) = 1,$$

$$(a\delta_1\delta_2\delta_3) = \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_2}.$$

Ist endlich $(abc\delta_4) = k_4$, so haben wir $(\delta_1\delta_2\delta_3\alpha) \cdot (\delta_1\delta_2\alpha\delta_4) \cdot (\delta_1\delta_2\delta_4\delta_3) = 1$, d. h.

$$\frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} \cdot \frac{k_2 - k_4}{k_1 - k_4} (\delta_1\delta_2\delta_4\delta_3) = 1,$$

$$(\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4) = \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_4} \cdot \frac{k_2 - k_4}{k_2 - k_3}.$$

§ 7. Veränderung des Werthes eines Doppelverhältnisses bei der Bewegung eines seiner Elemente.

10 Für die Folge ist es nützlich zu wissen, wie sich der Werth eines Doppelverhältnisses verändert, wenn eines seiner Elemente alle möglichen Lagen annimmt, während die drei andern festgehalten werden. Nehmen wir das Doppelverhältniss von vier Punkten $(abcd)$ und lassen den Punkt δ sich bewegen, so bleibt von dem Doppelverhältnisse $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ das erste Verhältniss unverändert, und es variirt nur das zweite. Untersuchen wir daher zunächst, wie sich das Verhältniss $\frac{ax}{bx}$ verändert, während x alle möglichen Lagen auf der Gerade ab einnimmt. Es treten hierbei zwei wesentlich verschiedene Fälle ein: entweder liegt x auf der endlichen Strecke zwischen a und b , oder auf einer der beiden unendlichen Strecken ausserhalb ab ; im ersten Falle haben die Strecken ax und bx entgegengesetzten, im zweiten Falle gleichen Richtungssinn (Nr. 5); das Verhältniss $\frac{ax}{bx}$ hat also im ersten Falle negatives, im zweiten positives Vorzeichen. Wenn x mit a zusammenfällt, so ist der Werth des Verhältnisses $\frac{ax}{bx} = 0$; er wird $= -1$, wenn x in die Mitte m zwischen a und b fällt, wächst (absolut genommen), während x von m nach b geht, und wird, wenn x in b hineinfällt, unendlich gross (∞); dabei liegen die absoluten Werthe des Verhältnisses $\frac{ax}{bx}$, während x zwischen a und m liegt, zwischen 0 und 1;

während χ zwischen m und b liegt, zwischen 1 und ∞ ; das Verhältniss nimmt also alle negativen Werthe von 0 bis ∞ an; geht χ weiter, über b hinaus, so wird $\frac{a\chi}{b\chi}$ positiv und nimmt ab von dem Werth ∞ an, welchen es in b hatte; je weiter χ gelangt, desto mehr nähert sich der Werth des Verhältnisses dem Werthe $+1$, da $\frac{a\chi}{b\chi} = \frac{ab + b\chi}{b\chi} = 1 + \frac{ab}{b\chi}$; für den unendlich entfernten Punkt selbst wird daher das Verhältniss den Grenzwert $+1$ annehmen; gehen wir durch den unendlich entfernten Punkt auf die andere Seite der Gerade über (Nr. 3), so wird der Werth des Verhältnisses $\frac{a\chi}{b\chi} < 1$, weil jetzt b von χ entfernter liegt als a , während es vorher umgekehrt war; nähert sich χ mehr und mehr dem Punkte a , so nimmt der Werth $\frac{a\chi}{b\chi}$ immer mehr ab bis zum Werthe 0 , der dann eintritt, wenn χ wieder mit a zusammenfällt. Für das ganze Gebiet ausserhalb der Strecke ab , welches durch den unendlich entfernten Punkt in zwei Abschnitte zerfällt, ist demnach der Werth des Verhältnisses positiv und zwar auf dem einen Abschnitte > 1 (nimmt von ∞ bis 1 ab), auf dem andern Abschnitte < 1 (nimmt von 1 bis 0 ab), für den unendlich entfernten Punkt selbst $+1$. Im Ganzen nimmt also das Verhältniss $\frac{a\chi}{b\chi}$ bei der Bewegung von χ alle positiven und alle negativen Werthe von ± 0 bis $\pm \infty$, und zwar jeden nur einmal an; denn aus $\frac{a\chi}{b\chi} = \frac{a\chi'}{b\chi'}$ oder $1 + \frac{ab}{b\chi} = 1 + \frac{ab}{b\chi'}$ folgt $b\chi = b\chi'$, was, da die Vorzeichen zu berücksichtigen sind, Identität von χ' und χ bedeutet. Will man vom Vorzeichen absehen, und zwar nur den absoluten Werth des Verhältnisses auffassen, so tritt ein solcher immer zweimal auf, einmal für eine bestimmte Lage zwischen a und b , das andere Mal ausserhalb ab ; die Punkte gruppieren sich demgemäss paarweise, wie z. B. der Mittelpunkt m und der unendlich entfernte Punkt dem Werthe 1 entspricht; durch das hinzugefügte Vorzeichen wird aber diese Zweideutigkeit aufgehoben.

Hieraus ergibt sich nun auch die Veränderung des Doppelverhältnisses $(abc\delta)$, wenn eines seiner Elemente sich bewegt. Sei δ dies veränderliche Element, so wird in dem Doppelverhältnisse $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{ac}{bc} \cdot \frac{bd}{ad}$ allein das Verhältniss $\frac{bd}{ad}$ sich ändern und alle positiven und negativen Werthe in stetiger Aufeinanderfolge durchlaufen; daher gilt das auch für sein Product in den constanten Werth $\frac{ac}{bc}$; jeden Werth erreicht $(abc\delta)$ einmal.

Wenn c ausserhalb ab sich befindet, und $\frac{ac}{bc}$ positiv ist, so durchläuft $(abc|d)$ die positiven Werthe von 0 bis ∞ , während d ausserhalb von b über den unendlich fernen Punkt nach a sich bewegt, und die negativen von 0 bis ∞ , indem d innerhalb ab von a nach b geht. Das Umgekehrte findet statt, wenn c zwischen a und b liegt, also $\frac{ac}{bc}$ negativ ist. In beiden Fällen nimmt $(abc|d)$ die Werthe $\pm \infty$, ± 0 , $+1$, $\frac{ac}{bc}$ an, wenn d in a , b , c , den unendlich fernen Punkt zu liegen kommt.

Weil jeder Werth vom Doppelverhältniss nur einmal erreicht wird, so folgt, dass, wenn $(abc|x) = (abc|x')$, x und x' identisch sind.

Das Doppelverhältniss ist also positiv, wenn c , d gleichartig zu a , b liegen, d. h. beide zwischen a , b oder beide ausserhalb, gleichgiltig, ob in demselben der beiden äussern Theile oder in verschiedenen; es ist negativ, wenn c , d verschiedenartig zu a , b liegen, der eine zwischen a , b , der andere ausserhalb. Wie c , d zu a , b liegen, so auch a , b zu c , d . *Im ersten Falle schliesst das eine Paar das andere ein, oder sie schliessen sich aus, im andern Falle trennen sich die beiden Paare.*

Aus vier Punkten a , b , c , d einer Gerade kann man auf drei Weisen zwei Paare bilden:

$$ab, cd; ac, bd; ad, bc.$$

In zwei Fällen haben die Paare die erste, im dritten die zweite Lage; von den drei Doppelverhältnissen $(abc|d) = k$, $(ac|bd) = 1 - k$, $(adb|c) = 1 - \frac{1}{k}$ sind zwei positiv und eins negativ.

Die Möbius'sche Relation für fünf Punkte einer Gerade lehrt, dass die drei Doppelverhältnisse $(abc|d)$, $(ab|de)$, $(ab|ec)$ alle positiv sind, oder nur eins. Folglich hat das Paar ab zu allen drei Paaren cd , de , ec die erste Lage oder nur zu einem; dies ergibt sich auch unmittelbar aus der Anschauung.

Ebenso ergibt sich aus

$$D) \quad (abc|d) \cdot (ab|ef) = (abc|f) \cdot (ab|ed)$$

und:

$$(abc|d) \cdot (ab|fe) = (ab|ce) \cdot (ab|fd),$$

dass, wenn a , b zu c , d und e , f gleiche oder ungleiche Lage haben, sie auch zu ce und fd und ebenso zu cf , ed gleiche oder ungleiche Lage haben.

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen irgend vier Paaren entsprechender Elemente einer Punktreihe und eines mit ihr projectiven Strahlbüschels können wir auf einen ganz gleichen Verlauf

des Werthes von $(abcd)$ schliessen, wenn von den vier Strahlen drei fest bleiben und der vierte d sich um den Grundpunkt drehend das ganze Strahlbüschel durchläuft.

§ 8. Harmonische Elemente.

Unter allen Werthen, welche ein Doppelverhältniss annehmen kann, 11 giebt es einen, welcher seines häufigen Vorkommens wegen von besonderer Wichtigkeit ist; ehe wir daher in den allgemeinen Betrachtungen fortfahren, wollen wir diesen besonderen Fall näher ins Auge fassen. Dieser wichtigste specielle Werth ist -1 , und wenn das Doppelverhältniss von vier Punkten

$$(abcd) = -1$$

ist, so heissen diese vier harmonische Punkte, und zwar a und b zugeordnete harmonische Punkte, ebenso c und d zugeordnete; da das Doppelverhältniss von vier harmonischen Punkten negativ ist, so folgt (Nr. 10), dass ein Paar zugeordneter Punkte durch das andere Paar getrennt wird. Zwischen ihren Abständen findet die Bedingung statt:

$$I. \quad \frac{ac}{bc} + \frac{ad}{bd} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{ca}{ba} + \frac{cb}{db} = 0,$$

oder die Verhältnisse $\frac{ac}{bc}$ und $\frac{ad}{bd}$ haben gleichen, aber entgegengesetzten Werth. Aus den Beziehungen in Nr. 8 ergibt sich für $k = -1$, dass

$$\begin{aligned} (abcd) &= (abdc) = (badc) = (bacd) \\ &= (cdab) = (cdba) = (dcab) = (dcb a) = -1. \end{aligned}$$

Man kann also sowohl ein Paar zugeordneter harmonischer Punkte unter sich, als auch mit dem andern Paar vertauschen, ohne die harmonische Eigenschaft aufzuheben. Ferner ergibt sich aus Nr. 10, dass, wenn man irgend drei Punkte a, b, c auf einer Gerade willkürlich annimmt und zwei z. B. a und b als zugeordnet auffasst, nur ein einziger bestimmter vierter dem c zugeordneter harmonischer Punkt d existirt, welcher, wenn c zwischen a, b liegt, ausserhalb ab liegen muss und umgekehrt; eine einfache Construction desselben allein mittels des Lineals ergibt sich später (Nr. 16). Hier erwähnen wir nur noch einige metrische Beziehungen, welche aus dem besonderen Werthe -1 des Doppelverhältnisses folgen.

Wenn nämlich

$$(abcd) = -1,$$

so ist (Nr. 8)

$$(acdb) = \frac{1}{2}, \quad \frac{ad}{cb} = \frac{1}{2} \frac{ab}{cb}, \quad \frac{ac+cb}{cd} = \frac{1}{2} \frac{ac+cb}{cb};$$

daraus folgt:

$$\text{II.} \quad \frac{2}{cd} = \frac{1}{ca} + \frac{1}{cb};$$

d. h. *der reciproke Werth des Abstandes eines Punktes von dem zugeordneten harmonischen Punkte ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den reciproken Werthen der Abstände des ersten von den beiden andern zugeordneten Punkten.*

12 Ferner führen wir die Mitte m zwischen zwei zugeordneten Punkten a, b ein, also

$$am = \frac{1}{2} ab = mb,$$

dann wird

$$\frac{ad}{cd} = \frac{am}{cb} = \frac{mb}{cb},$$

woraus folgt:

$$\frac{ma}{ad} = \frac{bc}{cd}$$

und durch Vertauschung von a und b :

$$\frac{mb}{bd} = \frac{ac}{cd} = \frac{ma}{db}, \text{ oder: } \frac{ma}{ac} = \frac{db}{cd};$$

aus diesen Beziehungen folgt:

$$\frac{md}{ad} = \frac{bd}{cd}, \quad \frac{mc}{ac} = \frac{cb}{cd};$$

hieraus ergibt sich derselbe Werth für $mc \cdot md$, wie aus den vorigen Formeln für $(ma)^2$; demnach:

$$\text{III.} \quad (ma)^2 = (mb)^2 = mc \cdot md.$$

Ferner hat man

$$\text{IV.} \quad \frac{mc}{md} = \left(\frac{ac}{ad}\right)^2 = \left(\frac{bc}{bd}\right)^2;$$

denn aus den obigen Formeln folgt:

$$mc = \frac{ac \cdot cb}{cd}, \quad md = \frac{bd \cdot ad}{c},$$

also

$$\frac{mc}{md} = \frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} = \left(\frac{ac}{ad}\right)^2, \text{ da } \frac{ac}{ad} = \frac{bc}{bd}.$$

Die obigen Beziehungen wollen wir lieber in der Form schreiben:

$$\text{V.} \quad \begin{cases} ca \cdot cb = cd \cdot cm, \\ da \cdot db = dc \cdot dm; \end{cases}$$

aus ihnen folgt:

$$\text{VI.} \quad ca \cdot cb + da \cdot db = (cd)^2.$$

Von besonderem Interesse ist die Beziehung III. für vier harmonische Punkte: *das Quadrat des Abstandes der Mitte zwischen zwei zu-*

geordneten Punkten von einem derselben ist gleich dem Rechteck aus den Abständen derselben Mitte von den beiden andern zugeordneten Punkten.

Halten wir bei vier harmonischen Punkten zwei zugeordnete ¹³ Punkte a, b fest, so bewegen sich die andern zugeordneten Punkte c, d in der Weise, dass das Rechteck $mc \cdot md$ auch dem Vorzeichen nach constant bleibt. Bemerken wir insbesondere zwei specielle Fälle: 1) wenn c in m liegt, so liegt d im Unendlichen, d. h. *zwei beliebigen Punkten einer Gerade sind die Mitte zwischen ihnen und der unendlich entfernte Punkt harmonisch zugeordnet*; 2) wenn c in b oder in a hineinfällt, so muss auch d hineinfallen, d. h. *wenn von vier harmonischen Punkten ein Paar zugeordneter zusammenfallen, so muss in diesem Punkte auch einer des andern Paares zugeordneter Punkte liegen*, oder: vier harmonische Punkte können insbesondere so liegen, dass drei zusammenfallen und einer abgesondert ist. *Also fällt, wenn zwei nicht zugeordnete von vier harmonischen Punkten sich vereinigen, noch ein dritter mit ihnen zusammen.*

Weil $mc \cdot md$ positiv ist, so liegen c und d auf derselben Seite von m ; und da das Product constant ist, so nimmt der eine Factor ab, wenn der andere wächst; während also c von m nach a fortschreitet, geht der vierte harmonische Punkt d vom Unendlichen im entgegengesetzten Richtungsinne nach a und wenn c von m nach b fortrückt, bewegt sich d vom unendlich entfernten Punkt ebenfalls nach b hin [vergl. Nr. 10].*

Es seien zwei Kreise $(M), (M_1)$ mit den Mittelpunkten M, M_1 gegeben, welche sich rechtwinklig (orthogonal) schneiden, d. h. so, dass die Tangenten in jedem der beiden Schnittpunkte S auf einander senkrecht sind, so dass jeder der Radien nach S den andern Kreis tangirt. Ein Durchmesser ab des ersten schneide auch den zweiten in c, d . So ist, nach dem bekannten Kreissatze: $Mc \cdot Md = (MS)^2 = (Ma)^2$; also sind c, d zu a, b harmonisch.

Zwei orthogonale Kreise werden von jedem Durchmesser des einen oder andern (der beide schneidet) in vier harmonischen Punkten geschnitten; und umgekehrt, wenn ein Durchmesser des einen von zwei Kreisen beide harmonisch schneidet, so sind sie orthogonal.

Denn aus: $Mc \cdot Md = (Ma)^2$ folgt: $Mc \cdot Md = (MS)^2$, also berührt der Radius MS in S den zweiten Kreis. Dass die beiden Kreise sich schneiden, folgt aus der Lage der vier Punkte a, b, c, d , in Folge

* Die Erweiterung dieser Betrachtung führt zu dem für geometrische Betrachtungen nützlichen *Princip der Transformation durch reciproke Radien*. (Vergl. Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie S. 159.)

deren einer der Punkte c, d innerhalb, der andere ausserhalb des Kreises (M) sich befindet.

Alle Kreise, welche den Kreis (M) rechtwinklig schneiden und durch den gegebenen Punkt c gehen, gehen noch durch einen zweiten Punkt d , der zu c harmonisch ist in Bezug auf die beiden Schnitte von Mc mit (M); sie bilden ein *Kreisbüschel* und haben ihre Mittelpunkte auf der Geraden, die auf $Mc d$ in der Mitte von cd senkrecht steht. Diese Mitte liegt, weil sie a und b auf derselben Seite hat, ausserhalb (M) und mit ihr, wie nothwendig, die Centrale des Kreisbüschels.

14 Ebenso heissen vier Strahlen a, b, c, d eines Strahlbüschels, für welche

$$(abcd) = -1$$

ist, vier harmonische Strahlen und zwar a, b zugeordnet und ebenso c, d ; der Werth des Doppelverhältnisses zwischen den Sinus der Winkel liefert die Beziehung:

$$1) \quad \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} + \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = 0.$$

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse (Nr. 6) folgt, dass, wenn man irgend vier harmonische Punkte mit einem Punkt durch Strahlen verbindet, diese vier harmonische Strahlen sind, und wenn man irgend vier harmonische Strahlen durch eine beliebige Gerade schneidet, die vier Schnittpunkte vier harmonische Punkte sind, zugleich auch zugeordnete Strahlen zugeordnete Punkte enthalten.

Hiernach ergibt sich die relative Lage von vier harmonischen Strahlen aus der von vier harmonischen Punkten. Zwei zugeordnete Strahlen a, b theilen nämlich die ganze Ebene in vier Winkelräume, von denen zwei und zwei (Scheitelwinkelräume) gleich sind; von dem anderen Paar zugeordneter Strahlen fällt der Strahl c in das eine Paar Scheitelräume und der andere d in das andere Paar Neben-Scheitelräume, oder kürzer: bei vier harmonischen Strahlen wird ein Paar zugeordneter Strahlen durch das andere Paar *getrennt*. Ferner giebt es zu drei beliebig gewählten Strahlen nur einen bestimmten vierten harmonischen, der, wenn zwei als zugeordnet festgesetzt sind, dem dritten zugeordnet ist. Den metrischen Relationen II., III., IV. entsprechen analoge für harmonische Strahlen.

Da

$$\frac{\sin(da)}{\sin(ca)} + \frac{\sin(db)}{\sin(cb)} = 0$$

ist und (Nr. 7)

$$(da) = (dc) + (ca), \quad (db) = (dc) + (cb),$$

so ergibt sich durch Auflösung der Sinus der Summen:

$$2) \quad 2 \cotg (cd) = \cotg (ca) + \cotg (cb).$$

Führt man den Halbierungsstrahl m des Winkels (ab) ein, so dass

$$(am) = (mb) = - (bm) = - (ma),$$

so lässt sich die Relation 1) dann so schreiben:

$$\frac{\sin [(am) + (mc)]}{\sin [(bm) + (mc)]} + \frac{\sin [(am) + (md)]}{\sin [(bm) + (md)]} = 0$$

und giebt entwickelt mit Berücksichtigung der vorigen Gleichheiten:

$$\frac{\operatorname{tg} (mc) - \operatorname{tg} (ma)}{\operatorname{tg} (mc) + \operatorname{tg} (ma)} + \frac{\operatorname{tg} (md) - \operatorname{tg} (ma)}{\operatorname{tg} (md) + \operatorname{tg} (ma)} = 0;$$

setzt man

$$\frac{\operatorname{tg} (mc)}{\operatorname{tg} (ma)} = \gamma, \quad \frac{\operatorname{tg} (md)}{\operatorname{tg} (ma)} = \delta,$$

so hat man:

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{\delta - 1}{\delta + 1}, \quad \text{also } \gamma = \delta$$

oder:

$$\frac{\operatorname{tg} (mc)}{\operatorname{tg} (ma)} = \frac{\operatorname{tg} (md)}{\operatorname{tg} (ma)},$$

demnach:

$$3) \quad \operatorname{tg}^2 (ma) = \operatorname{tg}^2 (mb) = \operatorname{tg} (mc) \cdot \operatorname{tg} (md).$$

Ist m' die Halbierungslinie des Nebenwinkels von (ab) , also $(mm') = \pm \frac{\pi}{2}$, so ist $\operatorname{tg} (ma) = - \cotg (m'a)$ u. s. w.; daher:

$$\cotg^2 (m'a) = \cotg (m'c) \cotg (m'd) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2 (m'a) = \operatorname{tg} (m'c) \cdot \operatorname{tg} (m'd).$$

Ferner hat man:

$$\frac{\sin 2 (mc)}{\sin 2 (md)} = \left\{ \frac{\sin (bc)}{\sin (bd)} \right\}^2 = \left\{ \frac{\sin (ac)}{\sin (ad)} \right\}^2.$$

Weitere Beziehungen zwischen vier harmonischen Strahlen sehe man unter „Aufgaben und Sätze“.

Die Beziehung 3) zeigt, dass, wenn a und b und mit ihnen m festbleiben, c und d sich so bewegen, dass das Product $\operatorname{tg} (mc) \cdot \operatorname{tg} (md)$ constant bleibt.

Fällt c auf m , so muss $\operatorname{tg} (md) = \infty$ werden, also d zu m senkrecht stehen, oder, was dasselbe sagt: d wird der Halbierungsstrahl des Nebenwinkels von (ab) . Wir schliessen also: *Wenn zwei Strahlen die Winkel zweier andern halbiren, so bilden sie mit ihnen vier harmonische Strahlen und sind einander zugeordnet; aber auch umgekehrt: Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete zu einander rechtwinklig sind, so halbiren sie die Winkel der beiden andern zugeordneten Strahlen.*

Sind nämlich c und d rechtwinklig, so ist $\cotg(c\bar{d}) = 0$, also wegen 2)

$$\cotg(bc) = -\cotg(ac),$$

mithin $(bc) = -(ac)$ oder $= \pi - (ac)$; d. h. c halbiert den Winkel (ab) oder den Nebenwinkel.

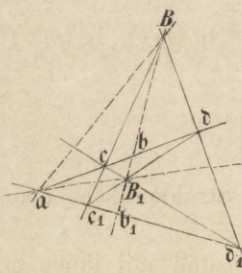
Fällt zweitens bei der Bewegung von c dieser Strahl auf a oder b , so muss auch d auf denselben fallen, also: *Wenn von vier harmonischen Strahlen ein Paar zugeordneter zusammenfallen, so muss auch einer des andern Paares hineinfallen*, oder: vier harmonische Strahlen können die besondere Lage haben, dass drei zusammenfallen und der vierte abgesondert liegt.

Hinsichtlich der Bewegung sehen wir endlich, dass, während c das Gebiet zweier Scheitelräume von a, b durchstreift, der zugeordnete Strahl d das Gebiet der beiden andern Scheitelräume in entgegengesetztem Drehungssinne durchstreift.

§ 9. Vorkommen harmonischer Elemente beim vollständigen Viereck und Vierseit.

16 Harmonische Punkte und Strahlen bieten sich bei sehr vielen geometrischen Untersuchungen dar; des Folgenden wegen müssen wir auf ihr Vorkommen beim vollständigen Viereck und Vierseit aufmerksam machen. Sind nämlich c, d, c_1, d_1 irgend vier Punkte der Ebene

Fig. 5.



(Fig. 5) (ein vollständiges Viereck), so giebt es drei Paare Verbindungslinien je zweier derselben (drei Gegenseitenpaare), nämlich:

cd, c_1d_1 , die sich in a treffen mögen,

cc_1, dd_1 , „ „ „ B „ „

cd_1, c_1d , „ „ „ B_1 „ „

Diese drei Schnittpunkte bilden das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks, und die drei Seiten desselben heissen die drei

Diagonalen des vollständigen Vierecks, die drei Ecken die *Diagonalepunkte* desselben. Ziehen wir BB_1 , welche cd und c_1d_1 bzw. in b und b_1 treffe, so ist, weil die vier Strahlen Ba, Bb, Bc, Bd die Gerade c_1d_1 in a, b_1, c_1, d_1 treffen, ihr Doppelverhältniss einmal gleich $(abc\bar{d})$ und zweitens gleich $(ab_1c_1\bar{d}_1)$ (Nr. 6), mithin

$$(abc\bar{d}) = (ab_1c_1\bar{d}_1).$$

Die vier Strahlen $B_1a, B_1b_1, B_1c_1, B_1d_1$ treffen aber die Gerade cd in den Punkten a, b, d, c und c_1d_1 in a, b_1, c_1, d_1 , mithin ist

folglich auch

$$(a b_1 c_1 d_1) = (a b d c);$$

$$(a b c d) = (a b d c).$$

Allgemein aber ist (Nr. 8, 2):

$$(a b c d) \cdot (a b d c) = 1, \text{ daher } (a b c d)^2 = 1,$$

$(a b c d)$ selbst also $+1$ oder -1 ; den Werth $+1$ kann dies Doppelverhältniss nach Nr. 10 nicht haben, weil derselbe nur dann auftritt, wenn zwei zugeordnete Punkte zusammenfallen, was hier offenbar nicht der Fall ist; mithin muss

$$(a b c d) = -1$$

sein, d. h. (Nr. 11) die vier Punkte a, b, c, d sind harmonisch gelegen, ebenso a, b_1, c_1, d_1 ; folglich sind auch die vier von B ausgehenden Strahlen harmonisch. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Beim vollständigen Viereck bilden in jedem der drei Diagonalpunkte die beiden Seiten und die beiden Diagonalen, welche durch denselben gehen, vier harmonische Strahlen, und zwar enthält jedes Paar zwei zugeordnete. Auf einer Diagonale sind die beiden Diagonalpunkte zu den Schnitten mit den beiden im gegenüberliegenden Diagonalpunkt sich schneidenden Gegenseiten harmonisch zugeordnet.

Aber auch, dass a, b, c, d selber harmonisch sind, ist hervorzuheben:

Auf jeder Seite des vollständigen Vierecks sind die beiden Ecken dem auf ihr befindlichen Diagonalpunkte und dem Schnitte mit der diesem gegenüberliegenden Diagonale harmonisch zugeordnet.

Dieselbe Figur lässt sich auch anders auffassen: Die vier Verbindungslinien $cd, c_1 d_1, cc_1, dd_1$ sind vier beliebige Geraden in der Ebene und bilden ein vollständiges Vierseit; sie schneiden sich in drei Punktepaaren, den sechs Ecken des vollständigen Vierseits oder den drei Paar Gegenecken, nämlich B und a, c und d_1, d und c_1 ; die drei Verbindungslinien dieser drei Paare Gegenecken heissen *Diagonalen des vollständigen Vierseits*, ihre Schnittpunkte *Diagonalpunkte*. Die vier z. B. auf cd_1 gelegenen Punkte sind Schnitte mit den harmonischen Strahlen aus B , also selbst harmonisch. Hiernach ergibt sich der Satz:

Beim vollständigen Vierseit bilden auf jeder der drei Diagonalen die beiden Ecken des Vierseits und die Schnittpunkte der beiden andern Diagonalen vier harmonische Punkte, und zwar besteht jedes Paar aus zwei zugeordneten.

Und: *An jedem Diagonalpunkte des Vierseits sind die beiden Diagonalen den Geraden, welche nach den auf der dritten Diagonale gelegenen Gegenecken gehen, harmonisch zugeordnet.*

An jeder Ecke sind die beiden Seiten des Vierseits der die Ecke enthaltenden Diagonale und dem Strahle nach dem ihr gegenüberliegenden Diagonalepunkte harmonisch zugeordnet.

Es folgt hieraus eine nur mit Hülfe des Lineals zu vollziehende Construction sowohl des vierten harmonischen Punktes, als auch Strahles zu drei gegebenen, wenn zwei als zugeordnete angenommen sind:

1. Sind auf einer Gerade drei Punkte a, b, c gegeben, und soll der vierte harmonische dem c zugeordnete Punkt d gefunden werden in Bezug auf a und b , so lege man durch c einen beliebigen Strahl und nehme zwei beliebige Punkte x und y auf demselben, ziehe xa, xb, ya, yb und bestimme die Schnittpunkte:

$$(xa, yb) \text{ und } (xb, ya),$$

deren Verbindungslinie die Gerade in dem gesuchten Punkte d trifft.

2. Sind drei durch einen Punkt O gehende Strahlen a, b, c gegeben, und man soll den vierten harmonischen dem c zugeordneten Strahl d finden, während ab das andere Paar zugeordneter Strahlen ist, so ziehe man durch einen beliebigen Punkt von c irgend zwei Geraden, welche a und b resp. in a, b und a_1, b_1 treffen; dann giebt der Schnittpunkt $(a b_1, b a_1)$ mit O verbunden den gesuchten vierten harmonischen Strahl d .

§ 10. Allgemeine Folgerungen aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse.

Construction entsprechender Elemente zweier projectiver Gebilde.

17 Die in Nr. 6 bewiesene Gleichheit der Doppelverhältnisse von irgend vier Punkten einer Gerade und vier Strahlen eines Strahlbüschels, welche durch jene gehen:

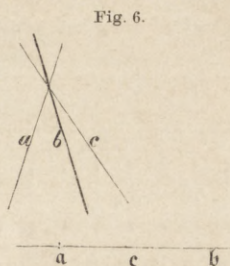
$$(abc d) = (abcd)$$

liefert zuvörderst zwei allgemeine Sätze, deren specielle Fälle für harmonische Punkte und Strahlen wir bereits angewendet haben, nämlich:

1. *Zieht man durch ein beliebiges Strahlbüschel von vier Strahlen a, b, c, d irgend welche Geraden (Transversalen), die jene resp. in den Punkten a, b, c, d treffen, so ist der Werth des Doppelverhältnisses $(abc d)$ immer derselbe, nämlich gleich dem Doppelverhältnisse der vier Strahlen $(abcd)$.*

2. *Verbindet man irgend vier Punkte a, b, c, d einer Gerade mit beliebigen Punkten der Ebene durch je vier Strahlen a, b, c, d , so ist der Werth des Doppelverhältnisses $(abcd)$ immer derselbe, nämlich gleich dem Doppelverhältniss der vier Punkte $(abc d)$.*

Da ferner diese Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen entsprechenden Elementen der beiden in perspectiver Lage befindlichen Gebilde ganz unabhängig ist von der perspectiven Lage, indem sie nur die Abstände der Punkte von einander und die Winkel zwischen den entsprechenden Strahlen enthält, so bleibt sie auch bestehen, wenn die perspective Lage aufgehoben wird, und enthält das allgemeine *Gesetz für die projective Beziehung* (Nr. 2) eines Strahlbüschels und einer Punktreihe auf einander. Wenn wir also die Strahlen eines Strahlbüschels und die Punkte einer Punktreihe projectiv auf einander beziehen wollen, so dürfen wir drei Paare von Elementen $a, a; b, b; c, c$ willkürlich als entsprechende annehmen (Fig. 6), weil erst zwischen vier Paaren die Bedingung obwaltet:



$$(abcd) = (ab\bar{c}d).$$

Durch jene drei Paare ist aber die Beziehung vollständig und eindeutig bestimmt; denn nehmen wir jetzt einen beliebigen vierten Strahl d des Strahlbüschels, so ist der Werth von $(abcd)$ gegeben, und da $(ab\bar{c}d)$ denselben gegebenen Werth hat, so giebt es nur einen bestimmten Punkt \bar{d} (Nr. 10), welcher diesen Werth liefert, wofern man auch das Vorzeichen des Werthes von $(ab\bar{c}d)$ berücksichtigt. Demnach gehört zu jedem Strahl d nur ein einziger entsprechender Punkt \bar{d} und auch umgekehrt; lassen wir den Strahl d das ganze Strahlbüschel durchstreifen, so wird der entsprechende Punkt die ganze Punktreihe durchlaufen. Wir können also den *allgemeinen Satz* aussprechen:

Sämmtliche Paare entsprechender Elemente zweier projectiver Gebilde (eines Strahlbüschels und einer Punktreihe) sind vollständig bestimmt durch drei Paare entsprechender Elemente, welche willkürlich angenommen werden können; zu jedem vierten Element des einen Gebildes kann das entsprechende Element des andern aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(abcx) = (ab\bar{c}x)$$

unzweideutig ermittelt werden.

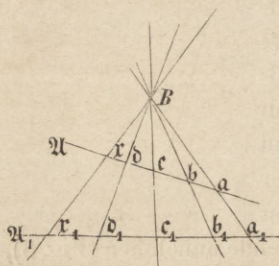
Wir werden bald Constructionen ermitteln, um entsprechende Elemente bei allgemeiner Lage der Gebilde allein mittels des Lineals zu erhalten. (Siehe Nr. 19.)

Die beiden im Anfange dieses Paragraphen ausgesprochenen Sätze lassen sich in dem Sinne erweitern, dass man an Stelle von vier Strahlen und vier Punkten das ganze Strahlbüschel und die ganze Punktreihe treten lässt und an Stelle der Gleichheit der Doppelverhältnisse die

durch dieselbe gegebene projective Beziehung entsprechender Elemente zweier Gebilde.

Wir sagen, zwei Punktreihen $abcd \dots x \dots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \dots x_1 \dots$ befinden sich in perspectiver Lage, wenn sie sich in demselben Strahlbüschel B befinden, d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte $a a_1, b b_1, \dots, x x_1$ sämtlich durch einen Punkt B laufen (Fig. 7); der Punkt B heisst *Perspectivitätscentrum*, diejenigen Punkte, welche auf demselben Strahle durch B liegen, *entsprechende Punkte*. Diese Beziehung entsprechender Punkte der beiden Punktreihen ist demselben Gesetze unterworfen, wie die früher betrachtete Beziehung zwischen Strahlbüschel und Punktreihe, derart,

Fig. 7.



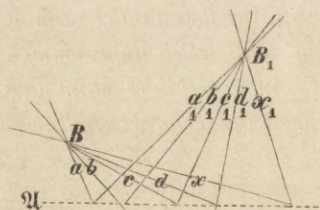
für irgend vier Paare entsprechender Elemente die Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfindet:

$$(abcx) = (a_1 b_1 c_1 x_1)$$

nach Nr. 17, 1.

Diese Beziehung bleibt also bestehen, auch wenn die perspective Lage aufgehoben wird, und heisst für die allgemeine Lage der beiden Punktreihen die *projective* Beziehung derselben, oder die Gebilde selbst heissen *projectiv*. Der vorhin für Strahlbüschel und Punktreihe ausgesprochene allgemeine Satz gilt jetzt in ganz gleicher Weise für zwei projective Punktreihen. Andererseits sagen wir, zwei Strahlbüschel $abcd \dots x \dots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \dots x_1 \dots$ befinden sich in perspectiver Lage, wenn ihre Strahlen durch die Punkte derselben Punktreihe gehen oder die Schnittpunkte entsprechender Strahlen $(aa_1), (bb_1), (cc_1) \dots (xx_1)$

Fig. 8.



auf derselben Gerade \mathcal{A} liegen (Fig. 8); diese Gerade heisst alsdann der *perspective Durchschnitt* der beiden Strahlbüschel, und immer zwei solche Strahlen heissen *entsprechende*, welche durch denselben Punkt des perspectiven Durchschnitts gehen. Diese Beziehung entsprechender Strahlen der beiden Strahlbüschel auf einander ist demselben Gesetze unterworfen, wie die früher

untersuchte Beziehung zwischen Strahlbüschel und Punktreihe, derart, dass für irgend vier Paare entsprechender Elemente die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(abcx) = (a_1 b_1 c_1 x_1)$$

stattfindet (nach Nr. 17, 2); sie bleibt also bestehen, auch wenn die perspective Lage aufgehoben wird, und heisst ebenfalls für die all-

gemeine Lage zweier Strahlbüschel *projective* Beziehung derselben, oder die Gebilde selbst heissen *projectiv*. Der vorhin für Strahlbüschel und Punktreihe ausgesprochene allgemeine Satz gilt jetzt in ganz gleicher Weise für zwei *projective* Strahlbüschel.

Wir haben hierdurch eine eindeutige gegenseitige Abhängigkeit der Elemente zweier Gebilde, mögen diese 1) Strahlbüschel und Punktreihe oder 2) zwei Punktreihen oder 3) zwei Strahlbüschel sein, aus der perspectiven Lage derselben abgeleitet und durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen irgend vier entsprechenden Elementenpaaren, unabhängig von der perspectiven Lage, ausgedrückt, so dass wir auch umgekehrt schliessen können:

Wenn die Elemente zweier Gebilde in der Weise einander entsprechen, dass zwischen irgend viere des einen Gebildes und den entsprechenden des andern die Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfindet, dann sind die beiden Gebilde projectiv.

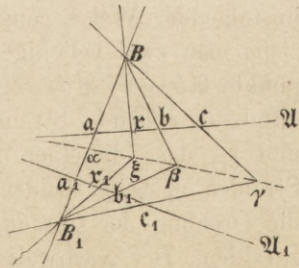
Hieraus folgt ein allgemeiner sehr häufig zur Anwendung komender Satz:

Wenn eine beliebige Anzahl von Gebilden (Punktreihen oder Strahlbüschel) in der Verbindung mit einander steht, dass das erste mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten, das dritte mit dem vierten u. s. f., das vorletzte mit dem letzten projectiv ist, so ist auch das letzte mit dem ersten projectiv.

Wir können hiervon eine nützliche Anwendung machen zur Construction entsprechender Elemente bei zwei *projectiven* Gebilden, deren Beziehung durch drei willkürlich gewählte Elementenpaare bestimmt wird:

a) *Erste Construction.* Sind auf zwei Geraden \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 je drei Punkte a, b, c ; a_1, b_1, c_1 willkürlich gegeben und sollen diese entsprechende Punkte zweier *projectiven* Punktreihen \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 sein, so ist durch sie die ganze *projective* Beziehung vollständig bestimmt, und es können beliebig viele andere Paare entsprechender Punkte allein mittels des Lineals in folgender Weise construirt werden: Man ziehe aa_1 und nehme in diesem Strahl zwei beliebige Punkte B und B_1 an (Fig. 9), dann treffen sich Bb und B_1b_1 in β , ferner Bc und B_1c_1 in γ ; man ziehe $\beta\gamma$ und verbinde irgend einen Punkt ξ dieser Linie einmal mit B und das andere Mal mit B_1 ; wo diese Strahlen \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 treffen, hat man allemal zwei entsprechende Punkte x und x_1

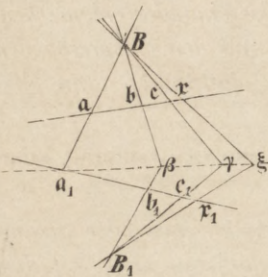
Fig. 9.



der beiden Punktreihen; bewegt man ξ auf der Gerade $\beta\gamma$, so erhält man dadurch sämtliche Paare entsprechender Punkte. Die Richtigkeit dieser Construction ist mit Hülfe des vorigen Satzes evident, denn bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von $\beta\gamma$ mit aa_1 durch α , so ist die Punktreihe $abcx$ projectiv mit der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\xi$, weil beide perspectiv liegen (im Strahlbüschel B), ferner $\alpha\beta\gamma\xi$ projectiv mit $a_1b_1c_1x_1$, weil beide perspectiv liegen (im Strahlbüschel B_1), folglich auch $abcx$ projectiv mit $a_1b_1c_1x_1$, was zu beweisen war.

Zweite Construction. (Fig. 10.) Man nehme in dem Strahle aa_1 einen beliebigen Punkt B an und ziehe durch a_1 eine beliebige Gerade, welche von Bb und Bc resp. in β und γ getroffen wird; dann mögen sich βb_1 und γc_1 in B_1 treffen; verbindet man irgend einen Punkt x der ersten Punktreihe mit B und trifft Bx in ξ die Gerade $\beta\gamma$, so wird $B_1\xi$ die zweite Punktreihe in dem gesuchten entsprechenden Punkte x_1 treffen.

Fig. 10.



Dritte Construction. Man nehme zwei willkürliche Punkte B und B_1 an und bestimme den Schnittpunkt $(Ba, B_1 a_1) = \alpha$, ziehe durch α zwei beliebige Geraden \mathfrak{L} und \mathfrak{L}_1 , bestimme die Schnittpunkte:

$$(Bb, \mathfrak{L}) = \beta, (Bc, \mathfrak{L}) = \gamma, (B_1 b_1, \mathfrak{L}_1) = \beta_1, (B_1 c_1, \mathfrak{L}_1) = \gamma_1,$$

endlich den Schnittpunkt $(\beta\beta_1, \gamma\gamma_1) = O$; dann wird irgend ein Strahl durch O die Geraden \mathfrak{L} und \mathfrak{L}_1 in ξ und ξ_1 treffen; $B\xi$ und $B_1\xi_1$ schneiden aber auf den gegebenen Trägern allemal zwei entsprechende Punkte x und x_1 aus.

b) Sind durch die Grundpunkte B und B_1 je drei Strahlen a, b, c ; a_1, b_1, c_1 willkürlich gezogen, und sollen dieselben entsprechende Strahlen zweier projectiver Strahlbüschel B und B_1 sein, so können beliebig viele andere Paare entsprechender Strahlen allein mittels des Lineals in folgender Weise construirt werden. Durch den Schnittpunkt aa_1 ziehe man zwei beliebige Geraden \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 und bestimme die Schnittpunkte $\mathfrak{A}b = b$, $\mathfrak{A}c = c$, $\mathfrak{A}_1 b_1 = b_1$, $\mathfrak{A}_1 c_1 = c_1$, $(bb_1, cc_1) = O$. Jeder durch O gehende Strahl trifft \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 in zwei solchen Punkten x und x_1 , dass dieselben mit B und B_1 verbunden zwei entsprechende Strahlen x, x_1 der beiden Strahlbüschel liefern, und wir erhalten durch die Drehung der Gerade um O die sämtlichen Paare entsprechender Strahlen. Der Nachweis der Richtigkeit dieser Construction sowie die Uebertragung der anderen im vorigen Falle a) angegebenen Constructionen wird für den Leser ohne Schwierigkeit sein.

c) Sind drei Strahlen a, b, c eines Strahlbüschels B und drei Punkte a_1, b_1, c_1 einer Gerade \mathcal{A}_1 willkürlich gegeben und sollen diese entsprechende Elemente zweier projectiven Gebilde B, \mathcal{A}_1 sein, so können andere Paare entsprechender Elemente allein mittels des Lineals in doppelter Weise construirt werden. Entweder schneide man das Strahlbüschel B durch eine beliebige Transversale, wodurch man drei Schnittpunkte a, b, c auf derselben erhält, suche nach a) zu abc und $a_1 b_1 c_1$ Elementenpaare $\chi \chi_1$ und ziehe $B\chi$, dann ist dieses der jedesmal entsprechende Strahl zu χ_1 ; oder man verbinde einen beliebigen Punkt B_1 mit a_1, b_1, c_1 durch drei Strahlen a_1, b_1, c_1 , suche nach b) zu a, b, c und a_1, b_1, c_1 Paare entsprechender Strahlen x, x_1 ; der Schnittpunkt von x_1 mit \mathcal{A}_1 liefert denjenigen Punkt χ_1 , welcher dem Strahle x entsprechend ist.

§ 11. Bedingung für die perspective Lage zweier projectiver Gebilde. Perspective Dreiecke.

Zwei projective Gebilde: ein Strahlbüschel und eine Punktreihe ²⁰ befinden sich dann in perspectiver Lage, wenn jeder Strahl des Strahlbüschels durch den ihm entsprechenden Punkt der Punktreihe geht (Nr. 2) oder jeder Punkt der Punktreihe auf dem ihm entsprechenden Strahl des Strahlbüschels liegt. Dies ist der Fall für jedes Elementenpaar, sobald es nur für irgend drei Paare entsprechender Elemente stattfindet, weil durch diese drei Paare die ganze projective Beziehung bestimmt wird. Hat man daher ein Strahlbüschel und eine mit ihm projective Punktreihe in irgend welcher Lage, so kann es höchstens zweimal vorkommen, dass ein Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt geht; denn käme es dreimal vor, so müssten sämtliche Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen und die beiden Gebilde lägen perspectiv.

In der That, die Strahlen a, b, c, x mögen den Punkten a, b, c, χ entsprechen und a, b, c durch a, b, c gehen. Es gehe x durch χ' , so ist wegen der projectiven Beziehung $(abcx) = (abc\chi)$, wegen der perspectiven Lage $(abcx) = (abc\chi')$; also $(abc\chi) = (abc\chi')$; d. h. χ' identisch mit χ . (Nr. 10.)

Zwei projective Punktreihen befinden sich in perspectiver Lage, wenn die Verbindungsstrahlen sämtlicher Paare entsprechender Punkte durch einen und denselben Punkt gehen (Nr. 18); dies wird auch hier für sämtliche Paare der Fall sein, sobald es für irgend drei Paare stattfindet; denn wenn aa_1, bb_1, cc_1 durch B gehen, $B\chi$ die \mathcal{A} in χ_1 trifft, so ergiebt sich wiederum

$$(a_1 b_1 c_1 \chi_1) = (abc\chi) = (a_1 b_1 c_1 \chi'_1),$$

also ist χ'_1 mit χ identisch.

Derjenige Strahl aus B , welcher bei der perspectiven Lage der beiden Punktreihen nach dem Schnittpunkte ihrer Träger hingeht, trifft sie in zwei im Schnittpunkte vereinigten Punkten, welche entsprechende Punkte sind. Umgekehrt: wenn im Schnittpunkte der Träger beider Punktreihen zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, so wird der sie verbindende Strahl seiner Richtung nach unbestimmt oder kann jede Gerade sein, die durch diesen Schnittpunkt geht; suchen wir daher den Schnittpunkt zweier beliebiger anderer Verbindungslinien entsprechender Punkte auf und verbinden ihn mit dem Schnittpunkte der Träger, so können wir sagen, dass durch ihn drei Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte gehen, dass also die beiden Punktreihen perspectiv liegen; wir können daher für die perspective Lage zweier Punktreihen folgende einfachere Bedingung setzen:

I. Wenn zwei projective Punktreihen so liegen, dass in dem Schnittpunkte ihrer Träger zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, so befinden sie sich in perspectiver Lage, d. h. die Verbindungslinien sämtlicher Paare entsprechender Punkte laufen durch einen Punkt.

In gleicher Weise verhält es sich mit der perspectiven Lage zweier projectiver Strahlbüschel; dieselbe findet dann statt, wenn die Schnittpunkte sämtlicher Paare entsprechender Strahlen auf derselben Gerade liegen, und dies ist der Fall, sobald drei von diesen Schnittpunkten in einer Gerade liegen. Diese Bedingung wird aber dadurch erfüllt, dass auf der Verbindungslinie der Grundpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, weil deren Schnittpunkt jeder beliebige ihrer Punkte sein kann; die Verbindungslinie der Schnittpunkte zweier beliebiger anderer Strahlenpaare enthält dann also drei solcher Punkte und die Gebilde liegen somit perspectiv; also:

II. Wenn zwei projective Strahlbüschel so liegen, dass in der Verbindungslinie ihrer Grundpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt sind, so befinden sie sich in perspectiver Lage, d. h. die Schnittpunkte sämtlicher Paare entsprechender Strahlen liegen auf einer Gerade.

21 Diese beiden Sätze werden in der Folge häufige Anwendung finden; wir wollen sofort einen Satz aus ihnen ableiten.

Werden zwei Geraden, die sich in γ treffen, von drei durch einen Punkt B gehenden Strahlen in den Punkten a, b, c und a_1, b_1, c_1 getroffen (Fig. 11), und nehmen wir auf cc_1 zwei beliebige Punkte c, c_1 an, so werden, weil die Punkte γabc und $\gamma a_1 b_1 c_1$ perspectiv liegen, wenn wir c mit den ersteren und c_1 mit den letzteren verbinden, um c und c_1 zwei projective Strahlbüschel von je vier Strahlen entstehen; diese haben aber, weil cc und $c_1 c_1$ in cc_1 vereinigt sind, nothwendig

perspective Lage (II), mithin liegen die drei Schnittpunkte $\alpha = (bc, b_1c_1)$, $\beta = (ca, c_1a_1)$ und $\gamma = (ab, a_1b_1)$ in einer Geraden; also:

Wenn zwei Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ so liegen, dass die Verbindungslinien ihrer Ecken aa_1, bb_1, cc_1 durch einen Punkt laufen, dann liegen die Schnittpunkte ihrer correspondirenden Seiten:

$$(bc, b_1c_1), (ca, c_1a_1), (ab, a_1b_1)$$

auf einer Geraden.

Ihm steht ein anderer gegenüber, der in der entsprechenden Weise abzuleiten und zugleich die Umkehrung des ersteren ist:

Wenn zwei Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ so liegen, dass die drei Schnittpunkte ihrer Seiten (bc, b_1c_1) , (ca, c_1a_1) und (ab, a_1b_1) auf einer Geraden sich befinden, so laufen die Verbindungslinien ihrer correspondirenden Ecken aa_1, bb_1, cc_1 durch einen Punkt.

Zwei solche Dreiecke heissen *perspectiv gelegen*.*

Wir haben drei perspective Punktreihen $Baa_1\dots, Bbb_1\dots, Bcc_1\dots$, deren Träger in B zusammenlaufen; α, β, γ sind die Perspectivitätscentren. Diese liegen also in gerader Linie.

Denkt man sich noch ein drittes Dreieck $a_2b_2c_2$ so gelegen, dass $a, a_1, a_2; b, b_1, b_2; c, c_1, c_2$ in je einer durch den Punkt O gehenden Geraden liegen, so kommt der vorige Satz dreimal zur Anwendung und die Schnittpunkte correspondirender Seitenpaare liegen dreimal zu je dreien auf einer Geraden; diese drei Geraden laufen wieder durch einen Punkt. Bezeichnen wir nämlich diese Schnittpunkte in mehr symmetrischer Weise:

$$(b_1c_1, b_2c_2) = \alpha, \quad (b_2c_2, bc) = \alpha_1, \quad (bc, b_1c_1) = \alpha_2,$$

$$(c_1a_1, c_2a_2) = \beta, \quad (c_2a_2, ca) = \beta_1, \quad (ca, c_1a_1) = \beta_2,$$

$$(a_1b_1, a_2b_2) = \gamma, \quad (a_2b_2, ab) = \gamma_1, \quad (ab, a_1b_1) = \gamma_2,$$

so liegen nach dem vorigen Satze sowohl α, β, γ als auch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ in je einer Geraden; fassen wir nun die beiden Dreiecke aa_1a_2 und $\beta\beta_1\beta_2$ auf, so ergibt sich aus dem Schema, dass

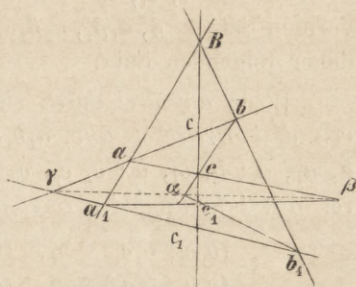
$$\alpha \alpha_1 \text{ identisch ist mit } b_2c_2, \quad \beta \beta_1 \text{ identisch mit } c_2a_2,$$

$$\alpha_1\alpha_2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad bc, \quad \beta_1\beta_2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad ca,$$

$$\alpha_2\alpha \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad b_1c_1, \quad \beta_2\beta \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad c_1a_1;$$

folglich ist der Schnittpunkt:

Fig. 11.



* Die hieran sich knüpfende Frage, ob zwei Dreiecke gleichzeitig auf mehr als eine Art perspective liegen können, ist von Rosanes und Schröter in den Math. Annalen Bd. 2 S. 549 u. 553 beantwortet worden.

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2) & \text{ identisch mit } c, \\ (\alpha_2 \alpha, \beta_2 \beta) & \text{ „ „ } c_1, \\ (\alpha \alpha_1, \beta \beta_1) & \text{ „ „ } c_2. \end{aligned}$$

Da nun c, c_1, c_2 in einer Geraden liegen, so müssen nach dem vorigen Satze $\alpha\beta, \alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2$, sich in einem Punkte treffen. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn auf drei durch einen Punkt O gehenden Strahlen die Ecken von drei Dreiecken $abc, a_1b_1c_1, a_2b_2c_2$ so gelegen sich vorfinden, dass $a, a_1, a_2; b, b_1, b_2; c, c_1, c_2$ in je einem Strahle liegen, dann werden von den Schnittpunkten correspondirender Seiten:

$$\begin{aligned} (b_1c_1, b_2c_2) &= \alpha, & (b_2c_2, bc) &= \alpha_1, & (bc, b_1c_1) &= \alpha_2, \\ (c_1a_1, c_2a_2) &= \beta, & (c_2a_2, ca) &= \beta_1, & (ca, c_1a_1) &= \beta_2, \\ (a_1b_1, a_2b_2) &= \gamma, & (a_2b_2, ab) &= \gamma_1, & (ab, a_1b_1) &= \gamma_2 \end{aligned}$$

die Punkte: $\alpha\beta\gamma, \alpha_1\beta_1\gamma_1, \alpha_2\beta_2\gamma_2$ in je einer Geraden liegen und diese drei Geraden durch einen Punkt Q laufen.

Diese Figur* liefert ein eigenthümliches Arrangement von 15 Geraden und 20 Punkten in der Art, dass immer 4 von den 20 Punkten auf einer der 15 Geraden liegen und immer drei von den 15 Geraden durch einen der 20 Punkte laufen. Die 20 Punkte entsprechen sich ferner paarweise in der Art, dass, wenn man von irgend einem ausgeht, die drei durch ihn gehenden Geraden und die auf letzteren gelegenen Ecken dreier Dreiecke, deren Seiten zu den 15 Geraden gehören, aufsucht, die angegebene Construction zu einem bestimmten anderen Punkte des Systems führt, ebenso wie man von O zu Q gelangt. Man nennt sie eine *Configuration* $(20_3, 15_4)$.

Geht man z. B. von a als *Perspectivitätscentrum* aus, so haben wir die *perspectiven Dreiecke*:

$$Obc, a_1\gamma_2\beta_2, a_2\gamma_1\beta_1$$

mit den *Perspectivitätsaxen*

$$b_1\alpha_2c_1, b_2\alpha_1c_2, \gamma Q\beta,$$

welche in den Punkt α zusammenlaufen.

Wir können die Figur aber noch auf eine andere Weise betrachten: Jede von den 15 Geraden, z. B. Oaa_1a_2 , ist *Perspectivitätsaxe* für zwei *perspective vollständige Vierseite*:

$$\begin{aligned} bb_1b_2, b\gamma_1\gamma_2, b_1\gamma_2\gamma, b_2\gamma\gamma_1; \\ cc_1c_2, c\beta_1\beta_2, c_1\beta_2\beta, c_2\beta\beta_1. \end{aligned}$$

* Auf sie hat zuerst *Hesse* [1811—1874] (im Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 41 Seite 270) aufmerksam gemacht und gezeigt, dass sie bei der *Steiner'schen* Erweiterung des *Pascal'schen* Satzes auftritt (Nr. 92, 93).

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken bc , b_1c_1 , b_2c_2 , $\gamma\beta$, $\gamma_1\beta_1$, $\gamma_2\beta_2$ sind die Seiten eines vollständigen Vierecks $\alpha\alpha_1\alpha_2Q$.

Von zwei perspectiven Dreiecken abc , $a_1b_1c_1$ mit den Perspectivitätscentrum s_2 ausgehend, können wir zu einer andern Figur gelangen, welche aus 15 Punkten und 20 Geraden besteht, derartig, dass durch jeden der 15 Punkte vier Geraden gehen und auf jeder der 20 Geraden drei Punkte liegen. Es sei $(bc, b_1c_1) = \alpha_2$, $(ca, c_1a_1) = \beta_2$, $(ab, a_1b_1) = \gamma_2$. Ersichtlich sind auch a_1bc und ab_1c_1 , ab_1c und a_1bc_1 , abc_1 und a_1b_1c perspectiv mit demselben Centrum s_2 ; also befinden sich je in einer Gerade die Punkte:

$$\begin{aligned} &(a_1b, ab_1), (bc, b_1c_1), (ca_1, c_1a); \\ &(b_1c, bc_1), (ac, a_1c_1), (ab_1, a_1b); \\ &(c_1a, ac_1), (ab, a_1b_1), (bc_1, b_1c). \end{aligned}$$

Es sei $(bc_1, b_1c) = \alpha_2$, $(ca_1, c_1a) = \beta_2$, $(ab_1, a_1b) = c_2$; so liegen c_2 , b_2 mit (bc, b_1c_1) in gerader Linie; oder:

$$b_2c_2, bc, b_1c_1 \text{ und ebenso } c_2a_2, ca, c_1a_1 \text{ und } a_2b_2, ab, a_1b_1$$

gehen je durch einen Punkt. Diese drei Punkte liegen in einer Gerade, denn sie sind die $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Weil bc, b_1c_1, b_2c_2 in einen Punkt zusammenlaufen, so sind bc_1b_2 und cb_1c_2 perspectiv; also $a_2 = (bc_1, cb_1)$, $a = (c_1b_2, b_2c_2)$, (bb_2, cc_2) in gerader Linie gelegen, d. h.

$$aa_2, bb_2, cc_2 \text{ laufen in einen Punkt } s_1$$

und ebenso

$$a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 \text{ in einen Punkt } s$$

zusammen. Es sind aber auch bb_1b_2 und cc_1c_2 perspectiv; für sie sind die drei Punkte s, s_1, s_2 Schnitte entsprechender Seiten, also in einer Gerade gelegen.

Jetzt haben wir die Figur: Die 15 Punkte sind $a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; s, s_1, s_2$; die 20 Geraden sind die Seiten von abc , $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, aa_1a_2 , bb_1b_2 , cc_1c_2 und die beiden Geraden $\alpha_2\beta_2\gamma_2, ss_1s_2$.

Jeder von den 15 Punkten ist Perspectivitätscentrum für zwei vollständige Vierecke. Die Schnittpunkte entsprechender Seiten sind die Ecken eines vollständigen Vierseits.

Die jetzige Figur ist eine Configuration $(15_4, 20_3)$.*

* Zu einer solchen Configuration gelangt man auch, wenn man die 15 Verbindungslinien und 20 Verbindungsebenen von sechs Punkten im Raume mit einer Ebene schneidet.

§ 12. Besondere Elemente bei zwei projectiven Punktreihen.

Zwei Systeme entsprechender gleicher Strecken.

24 Unter allen Paaren entsprechender Punkte bei zwei projectiven Punktreihen giebt es einige von besonderer Eigenthümlichkeit.

Bei jeder Gerade ist der unendlich entfernte Punkt von besonderem Interesse. Nennen wir bei zwei projectiven Punktreihen \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 den unendlich entfernten Punkt der einen q^∞ , den der anderen r_1^∞ , so werden die ihnen entsprechenden Punkte q_1 und r im allgemeinen im Endlichen liegen. Denken wir

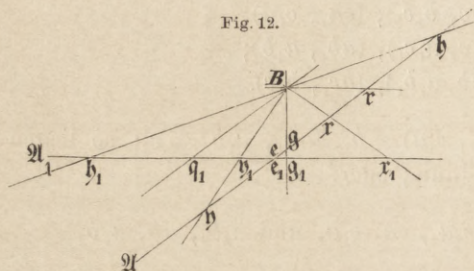


Fig. 12.

uns die beiden Punktreihen in perspective Lage gebracht, wodurch die unendlich entfernten Punkte sich nicht ändern, und sei B das Perspectivitätscentrum (Fig. 12), so treffen die durch B zu den Trägern der beiden Punktreihen gezogenen Parallelen

jene in den beiden Punkten r und q_1 . Diese ausgezeichneten Punkte heissen die *Fluchtpunkte* der projectiven Punktreihen; sie bleiben unverändert, wenn die perspective Lage aufgehoben wird, weil die unendlich entfernten Punkte q^∞ und r_1^∞ selbst sich nicht ändern.

Nehmen wir irgend zwei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{A}x_1$ und \mathfrak{A}_1y_1 und die besonderen Paare rr_1^∞ , qq_1^∞ , so ist wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(\mathfrak{A}y_1r_1^\infty q_1^\infty) = (\mathfrak{A}_1x_1y_1r_1^\infty q_1^\infty),$$

$$\frac{\mathfrak{A}x_1}{\mathfrak{A}_1y_1} : \frac{\mathfrak{A}r_1^\infty}{\mathfrak{A}q_1^\infty} = \frac{\mathfrak{A}_1x_1}{\mathfrak{A}_1r_1^\infty} : \frac{\mathfrak{A}_1q_1^\infty}{\mathfrak{A}_1y_1},$$

nach Nr. 10 ist

$$\frac{\mathfrak{A}x_1}{\mathfrak{A}q_1^\infty} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{A}_1x_1}{\mathfrak{A}_1r_1^\infty} = 1,$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{A}x_1}{\mathfrak{A}_1y_1} = \frac{\mathfrak{A}_1q_1^\infty}{\mathfrak{A}_1r_1^\infty} \quad \text{oder} \quad r\mathfrak{A} \cdot q_1\mathfrak{A}_1 = r\mathfrak{A} \cdot q_1\mathfrak{A}_1;$$

halten wir also ein Paar \mathfrak{A}_1y_1 fest und verändern das andere Paar $\mathfrak{A}x_1$, so bleibt dieses Rechteck constant:

$$r\mathfrak{A} \cdot q_1\mathfrak{A}_1 = \text{const.},$$

und wir sehen das ganze System entsprechender Punkte vermittelt der Fluchtpunkte durch eine viel einfachere Relation mit einander ver-

bunden, als es die Gleichheit der Doppelverhältnisse war, denn es gilt der Satz:

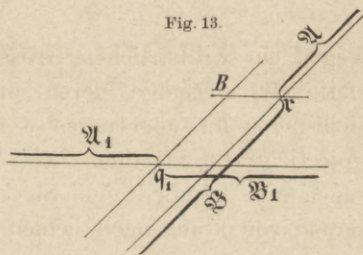
Bei zwei projectiven Punktreihen ist das Rechteck aus den Abständen irgend eines Paares entsprechender Punkte von den Fluchtpunkten unveränderlich.

Dieses constante Rechteck soll „Potenz der projectiven Beziehung“ genannt werden.

Sobald man also zu irgend einem Punkte ζ den entsprechenden Punkt ζ_1 bestimmen will, hat man nur nöthig, die andere Seite eines Rechtecks, dessen eine $r\zeta$ ist und dessen Inhalt durch die Potenz der projectiven Beziehung gegeben ist, zu ermitteln und dieselbe von q_1 auf die andere Gerade $= q_1\zeta_1$ abzutragen, und zwar nach derjenigen Seite, bei welcher das Rechteck $r\zeta \cdot q_1\zeta_1$ dasselbe Vorzeichen hat, wie bei dem gegebenen Paare entsprechender Punkte, etwa $\eta\eta_1$. Denn durch ein solches Paar und die beiden Fluchtpunkte, welche je zwei Paare rr_1^∞ , $q_1q_1^\infty$ geben, ist die projective Beziehung und die Potenz bestimmt.

Die beiden Punkte r und q_1 theilen jeder seinen Träger in zwei unendlich lange Hälften, welche einzeln einander entsprechen; dies erkennen wir, indem wir von der perspectiven Lage ausgehend um das Perspectivitätscentrum B einen Strahl drehen, welcher immer zwei entsprechende Punkte auf den beiden Trägern fixirt (Fig. 13); während also ζ die eine Hälfte \mathcal{A} von r bis q_1^∞ durchläuft, muss ζ_1 eine bestimmte Hälfte \mathcal{A}_1 des zweiten Trägers von r_1^∞ bis q_1 durchlaufen, und wenn ζ die zweite Hälfte \mathcal{B} von q_1^∞ bis r durchläuft, wird ζ_1 die andere entsprechende Hälfte von q_1 bis r_1^∞ durchlaufen; diese Hälften entsprechen einander so, dass Punkte, die auf der Hälfte \mathcal{A} liegen, ihre entsprechenden *nur* auf der Hälfte \mathcal{A}_1 haben (nicht auf der andern), und Punkte, die auf der Hälfte \mathcal{B} liegen, ihre entsprechenden nur auf \mathcal{B}_1 haben. Das gegebene Paar $\eta\eta_1$ bestimmt die entsprechenden Hälften; infolge dessen weiss man nun, nach welcher Seite $q_1\zeta_1$ aufzutragen ist.

Das Rechteck mit constantem Inhalt und veränderlichen Seiten 25 kann insbesondere ein Quadrat werden, und die Seite dieses Quadrates, auf die entsprechenden Hälften von r und von q_1 aus aufgetragen, liefert zwei besondere Punktepaare, welche wir *Potenzpunkte* nennen und durch die Buchstaben



g und g_1 , h und h_1

(Fig. 12) bezeichnen wollen; es ist also (absolut):

$$\begin{aligned}rg &= q_1 g_1 = hr = h_1 q_1, \\r\xi &\cdot q_1 \xi_1 = (rg)^2 = (rh)^2.\end{aligned}$$

Selbstverständlich behalten die Potenzpunkte g, g_1 und h, h_1 ihre Eigenthümlichkeit bei Aufhebung der perspectiven Lage und sind daher ebenso wie r und q_1 ausgezeichnete Elemente; ihre Construction ist in elementarer Weise mittels eines Kreises leicht zu bewerkstelligen.

Aus der Eigenschaft des gleichen Rechtecks für irgend zwei Paare entsprechender Punkte:

$$r\xi \cdot q_1 \xi_1 = r\eta \cdot q_1 \eta,$$

folgt:

$$\begin{aligned}r\xi \cdot (q_1 \eta_1 - \xi_1 \eta_1) &= (r\xi + \xi\eta) \cdot q_1 \eta_1, \\- r\xi \cdot \xi_1 \eta_1 &= q_1 \eta_1 \cdot \xi\eta.\end{aligned}$$

Wenn also $\xi\eta = \pm \xi_1 \eta_1$, so muss $r\xi = \mp q_1 \eta_1$ und $r\eta = \mp q_1 \xi_1$ sein; und umgekehrt $r\xi = \mp q_1 \eta_1$ führt zu: $\xi\eta = \pm \xi_1 \eta_1$.

Wenn wir also eine Strecke von beliebiger Grösse von r aus abtragen $= r\xi$ und dieselbe Strecke von q_1 aus auf dem zweiten Träger $= q_1 \eta_1$, alsdann zu ξ und η_1 die entsprechenden Punkte ξ_1 und η bestimmen, so ist die Strecke

$$\xi\eta = \xi_1 \eta_1.$$

Wegen der willkürlichen Grösse der Strecke $r\xi$ und in Folge der Zweideutigkeit, vermöge deren dieselbe Strecke nach entgegengesetzten Richtungen hin abgetragen werden kann, erhalten wir auf den beiden projectiven Punktreihen *zwei Systeme entsprechender gleicher Strecken*; tragen wir nämlich eine Strecke von beliebiger Länge auf die erste Gerade von r aus nach beiden Seiten hin auf:

$$ar = rb$$

und dieselbe Strecke auf die zweite Gerade von q_1 aus:

$$c_1 q_1 = q_1 d_1 = ra = br,*$$

und bestimmen die vier entsprechenden Punkte a_1, b_1, c, d , so ist nicht nur:

$$1) \quad \begin{aligned}ac &= a_1 c_1, \\bb &= b_1 d_1,\end{aligned}$$

sondern auch:

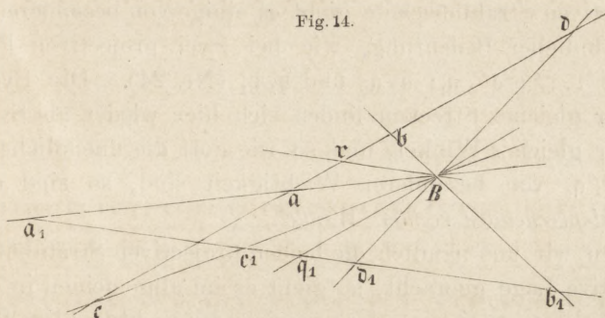
$$2) \quad \begin{aligned}bc &= c_1 b_1, \\ad &= d_1 a_1.\end{aligned}$$

* Man kann ja den positiven Sinn auf der einen Gerade so bestimmen, dass diese Gleichungen auch dem Vorzeichen nach richtig sind. Die Figur 14 ist, der Einfachheit halber, für perspective Lage gezeichnet

Denn aus: $ra \cdot q_1 a_1 = rc \cdot q_1 c_1$ und $ra = c_1 q_1$ folgt $rc = a_1 q_1$, also $ac = a_1 c_1$; und ebenso in den andern Fällen.

Verändern wir die willkürlich angenommene Länge ra , so erhalten wir beide Systeme entsprechender gleicher Strecken. Fassen wir das gewonnene Resultat zusammen:

Fig. 14.



Bei zwei projectiven Punktreihen giebt es zwei Systeme von Paaren entsprechender gleicher Strecken. Jedes Paar des einen Systems hat seine beiden Endpunkte auf denselben entsprechenden Hälften der beiden Träger (schliesst also die Punkte r und q_1 aus); die Potenzpunkte g und g_1 repräsentiren zwei gleiche entsprechende Strecken von dem Werthe 0, ebenso h und h_1 ; die Strecken $r q^\infty$ und $r_1^\infty q_1$ haben den Werth ∞ ; die entsprechenden gleichen Strecken dieses Systems nehmen also alle Werthe von 0 bis ∞ an. Jedes Paar des andern Systems hat dagegen seine beiden Endpunkte auf entgegengesetzten Hälften der beiden Träger (schliesst also die Punkte r und q_1 ein), und die entsprechenden Strecken dieses Systems nehmen nur Werthe an zwischen $g h = h_1 g_1$ und $r q^\infty = q_1 r_1^\infty = \infty$. Jeder Punkt einer Punktreihe ist ein Endpunkt für zwei Paare entsprechender gleicher Strecken, von denen eines dem einen, das andere dem andern Systeme angehört, und deren Construction oben angegeben ist.

Wir werden später eine wichtige Anwendung hiervon zu machen haben (§ 16).

Man erhält die beiden Systeme in sehr einfacher Weise, indem man die Punktreihen so perspectiv macht, dass sie sich rechtwinklig schneiden und im Schnittpunkte zwei entsprechende Potenzpunkte g und g_1 vereinigt sind; das Perspectivitätscentrum B ist dann die vierte Ecke eines Quadrats, von dem g, r, q_1 die drei übrigen Ecken sind. Zieht man nun durch B Strahlenpaare, deren Winkel durch Bg halbirt werden, so schneiden diese entsprechende gleiche Strecken auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ ein und zwar solche, welche die Fluchtpunkte r und q_1 ausschliessen. Hingegen zwei zu einander rechtwinklige Strahlen durch B schneiden entsprechende gleiche Strecken aus, welche r und q_1 einschliessen.

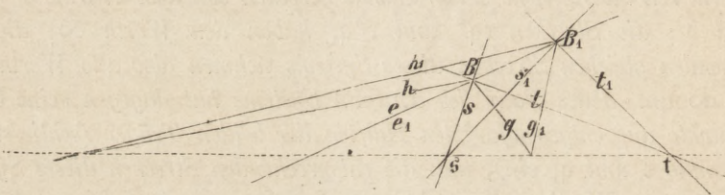
§ 13. Besondere Elemente bei zwei projectiven Strahlbüscheln.

Zwei Systeme entsprechender gleicher Winkel.

26 Unter den unendlich vielen Paaren entsprechender Strahlen bei zwei projectiven Strahlbüscheln giebt es einige von besonderem Interesse und von ähnlicher Bedeutung, wie bei zwei projectiven Punktreihen die Punkte $r, r_1^\infty; q^\infty, q_1; g, g_1$ und h, h_1 (Nr. 24). Die Systeme entsprechender gleicher Strecken finden sich hier wieder als Systeme entsprechender gleicher Winkel, und so wie dort die unendlichen Strecken $r q^\infty$ und $r_1^\infty q_1$ von besonderer Wichtigkeit sind, so sind es hier die *Schenkel entsprechender rechter Winkel*.

Denken wir uns nämlich die beiden projectiven Strahlbüschel B, B_1 in perspective Lage gebracht, so giebt es im allgemeinen in dem ersten Strahlbüschel nur zwei besondere zu einander rechtwinklige Strahlen s, t von solcher Beschaffenheit, dass die entsprechenden Strahlen s_1, t_1 auch zu einander rechtwinklig sind. Sie werden dadurch ermittelt, dass wir den Kreis durch B und B_1 legen, welcher auf dem perspectiven

Fig. 15.



Durchschnitt der beiden Strahlbüschel seinen Mittelpunkt hat. Dieser Kreis trifft den perspectiven Durchschnitt in zwei Punkten s und t , welche mit B und B_1 verbunden diese besonderen Strahlenpaare ss_1 und tt_1 liefern (Fig. 15). Da diese Eigenschaft der besonderen Paare ss_1 und tt_1 unabhängig von der perspectiven Lage ist, so giebt es auch bei zwei projectiven Strahlbüscheln in allgemeiner Lage ein und nur ein Paar entsprechender rechter Winkel st und s_1t_1 .

Um noch zu zeigen, dass in der That, wie auch die perspective Lage herbeigeführt werde, immer nur dieselben entsprechenden rechtwinkligen Strahlenpaare st und s_1t_1 aus der Construction hervorgehen, weisen wir direct nach, dass solche Paare nur *einmal* vorkommen können. Träten zu den Paaren:

$$st \text{ und } s_1t_1$$

noch zwei andere Paare:

$$uv \text{ und } u_1 v_1$$

von gleicher Beschaffenheit, so dass:

$$(st) = (s_1 t_1) = (uv) = (u_1 v_1) = \frac{\pi}{2}$$

wäre, so würde, wenn perspectiv gemacht wird, es zwei Kreise geben durch B und B_1 , mit dem Centrum auf dem perspectiven Durchschnitte; dieser würde dann die Gerade sein, welche auf BB_1 in der Mitte senkrecht steht. Von zwei perspectiven Büscheln mit solchem perspectiven Durchschnitte erkennt man aber sofort, dass jede zwei entsprechende Winkel gleich sind. Das ist jedoch bei zwei beliebigen projectiven Büscheln nicht der Fall.

Die rechtwinkligen entsprechenden Strahlenpaare st und $s_1 t_1$ kommen also nur *einmal* vor.*

Nehmen wir irgend zwei Paare entsprechender Strahlen xx_1 und yy_1 , so wird sich wegen der besonderen Eigenthümlichkeit der Schenkel entsprechender rechter Winkel die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(stxy) = (s_1 t_1 x_1 y_1)$$

wesentlich vereinfachen:

$$\frac{\sin(sx)}{\sin(tx)} : \frac{\sin(sy)}{\sin(ty)} = \frac{\sin(s_1 x_1)}{\sin(t_1 x_1)} : \frac{\sin(s_1 y_1)}{\sin(t_1 y_1)}$$

also

$$(sx) = (st) + (tx);$$

ebenso

$$\sin(sx) = \sin(st) \cos(tx),$$

u. s. w.

$$\sin(t_1 x_1) = \sin(t_1 s_1) \cos(s_1 x_1)$$

Demnach:

$$\cotg(tx) : \cotg(ty) = \tg(s_1 x_1) : \tg(s_1 y_1)$$

oder:

$$\tg(tx) \cdot \tg(s_1 x_1) = \tg(ty) \cdot \tg(s_1 y_1).$$

Hieraus folgt, dass, wenn wir das Paar yy_1 festhalten und das andere Paar entsprechender Strahlen der projectiven Beziehung gemäss verändern, das Product der Tangenten constant bleibt:

* Die Construction der Schenkel entsprechender rechter Winkel lässt sich auch ohne Zuhülfenahme der perspectiven Lage bewerkstelligen. Ihr Beweis folgt allerdings erst aus späteren Betrachtungen. Sie lautet so:

In dem Strahlbüschel B ziehe man Paare rechtwinkliger Strahlen a und α , b und β etc., die entsprechenden Strahlen im Strahlbüschel B_1 seien a_1 und α_1 , b_1 und β_1 etc.; sie werden im allgemeinen nicht rechtwinkliger Paare sein; legt man aber durch B_1 einen Kreis (m), so schneiden diese Strahlenpaare Sehnen im Kreise aus, welche sämmtlich durch einen festen Punkt o laufen; die Sehne om (ein Durchmesser des Kreises) trifft ihn in zwei solchen Punkten, welche mit B_1 verbunden das gesuchte Paar $s_1 t_1$ liefern, dessen entsprechende Strahlen im Strahlbüschel B die s, t sind, die ebenfalls auf einander senkrecht stehen.

$$\operatorname{tg}(tx) \cdot \operatorname{tg}(s_1 x_1) = \text{const.};$$

d. h. bei zwei projectiven Strahlbüscheln ist das Product aus den Tangenten derjenigen Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel (t, s_1 oder s, t_1) bilden, von unveränderlichem Werthe. Dieser Werth ist in dem einen Falle (t, s_1) der reciproke von dem im andern Falle (s, t_1), weil

$$\operatorname{tg}(tx) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(sx)}$$

und also

$$\operatorname{tg}(tx) \cdot \operatorname{tg}(s_1 x_1) = \frac{1}{\operatorname{tg}(sx) \cdot \operatorname{tg}(t_1 x_1)}$$

ist. Durch dieses constante Product (die *Potenz* der projectiven Beziehung), welches an Stelle der Gleichheit der Doppelverhältnisse tritt, wird mit Hilfe der Schenkel der entsprechenden rechten Winkel eine einfachere Relation zwischen entsprechenden Strahlen der beiden projectiven Strahlbüschel hergestellt, und es lässt sich leicht eine einfache Construction entsprechender Strahlen daraus ableiten. Ohne hierauf näher einzugehen, bemerken wir nur noch, dass, wenn die Factoren des einen sowohl wie des andern constanten Productes einander gleich werden, das Product in ein Quadrat übergeht; es giebt aber zwei besondere Strahlenpaare:

$$g \text{ und } g_1, \quad h \text{ und } h_1,$$

für welche dieser Fall eintritt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(tx) \cdot \operatorname{tg}(s_1 x_1) &= \operatorname{tg}^2(tg) = \operatorname{tg}^2(s_1 g_1) \\ &= \operatorname{tg}^2(th) = \operatorname{tg}^2(s_1 h_1) \text{ (absolut).} \end{aligned}$$

Für diese besonderen Strahlen, welche *Potenzstrahlen* heissen sollen, wird (absolut):

$$\begin{aligned} (sg) &= (t_1 g_1) = (hs) = (h_1 t_1), \\ (tg) &= (s_1 g_1) = (ht) = (h_1 s_1). \quad (\text{Fig. 15.}) \end{aligned}$$

28 Endlich giebt es auch bei zwei projectiven Strahlbüscheln zwei Systeme von entsprechenden gleichen Winkeln, zu welchen uns eine analoge Betrachtung wie in Nr. 25 führt. Aus der allgemeinen Relation folgt nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)} = \frac{\operatorname{tg}(x_1 s_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)}$$

und hieraus

$$\frac{\operatorname{tg}(xt) + \operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)} = \frac{\operatorname{tg}(x_1 s_1) + \operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)},$$

also:

$$\operatorname{tg}(xy) \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}(xt) \cdot \operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)} = \operatorname{tg}(x_1 y_1) \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}(x_1 s_1) \operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)},$$

$$\frac{\operatorname{tg}(x_1 y_1)}{\operatorname{tg}(xy)} = \frac{\operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(xt)} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}(xt) \cdot \operatorname{tg}(ty)}{1 - \operatorname{tg}(x_1 s_1) \cdot \operatorname{tg}(s_1 y_1)}.$$

Sollen nun zwei Strahlen x, y des einen Strahlbüschels dieselben Winkel einschliessen, als die entsprechenden x_1, y_1 des andern, so muss die linke Seite der letzten Gleichung ± 1 sein, d. h.

$$\operatorname{tg}(s_1 y_1) - \operatorname{tg}(xt) \cdot \operatorname{tg}(ty) \cdot \operatorname{tg}(s_1 y_1) = \pm \{ \operatorname{tg}(xt) - \operatorname{tg}(s_1 y_1) \cdot \operatorname{tg}(xt) \cdot \operatorname{tg}(x_1 s_1) \}.$$

Nun ist

$$\operatorname{tg}(ty) \operatorname{tg}(s_1 y_1) = \operatorname{tg}(tx) \operatorname{tg}(s_1 x_1) = k,$$

also:

$$\operatorname{tg}(s_1 y_1) + k \operatorname{tg}(tx) = \pm [-\operatorname{tg}(tx) - k \operatorname{tg}(s_1 y_1)];$$

daraus folgt:

$$\operatorname{tg}(s_1 y_1) = \mp \operatorname{tg}(tx)$$

und

$$\operatorname{tg}(s_1 x_1) = \mp \operatorname{tg}(ty).$$

Also

$$(s_1 y_1) = \mp (tx), \quad (s_1 x_1) = \mp (ty).$$

Durchweg gilt das obere oder das untere Vorzeichen.

Hieraus ergibt sich nun eine einfache Construction solcher Paare von Strahlen und ihrer entsprechenden, welche gleiche Winkel einschliessen; man trage, nachdem man die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel $st, s_1 t_1$ bestimmt hat, einen Winkel von beliebiger Grösse an den Strahl s sowohl nach einer wie auch nach der andern Drehrichtung hin an und erhält dadurch zwei Strahlen a und b ; denselben Winkel trage man zweitens an den Strahl t_1 nach beiden Seiten an und erhält dadurch c_1 und d_1 ; sucht man alsdann die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c, d zu jenen vieren, so bilden folgende Paare gleiche Winkel:

$$1) \quad \begin{cases} (ac) = (a_1 c_1), \\ (bd) = (b_1 d_1), \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} (bc) = (c_1 b_1), \\ (ad) = (d_1 a_1). \end{cases}$$

Verändert man die willkürlich angenommene Grösse des anzutragenden Winkels, so liefern 1) und 2) zwei Systeme von Paaren entsprechender gleicher Winkel, deren eines die Eigenschaft hat, dass beide Schenkel des einen Winkels und ebenso die beiden Schenkel des entsprechenden gleichen Winkels innerhalb desselben Winkelraumes (st) und $(s_1 t_1)$ liegen; (st) und $(s_1 t_1)$ gehören selbst diesem Systeme an; ebenso (gg) und $(g_1 g_1)$, welche den Winkel 0° oder 180° repräsentiren, auch (hh) und $(h_1 h_1)$. Das andere System hat die Eigenschaft, dass die beiden

Schenkel eines Winkels und auch die des entsprechenden gleichen Winkels durch die Strahlen s und t , bzw. durch s_1 und t_1 getrennt werden; in diesem Systeme nimmt kein Paar entsprechender gleicher Winkel den Werth 0° an, vielmehr schwanken die Werthe zwischen

$$(gh) = (h_1g_1) \text{ und } (st) = (t_1s_1) = 90^\circ.$$

- 29 Diese mit den im vorigen Paragraphen abgeleiteten vollständig analogen Resultate ausführlicher zu entwickeln, können wir um so mehr unterlassen, als wir ein zweites sehr einfaches Mittel haben, die beiden Systeme entsprechender gleicher Winkel anzuschauen. Denken wir uns die beiden projectiven Strahlbüschel in perspective Lage gebracht, so können wir, ebenso wie die Schenkel entsprechender rechter Winkel, überhaupt die Schenkel irgend eines Paares entsprechender gleicher Winkel dadurch ermitteln, dass wir durch die Grundpunkte B, B_1 der beiden Strahlbüschel irgend einen Kreis legen, welcher den perspectiven Durchschnitt in zwei Punkten ζ und η trifft; aus der bekannten Eigenschaft des Kreises, dass Peripheriewinkel auf gleichem Bogen gleich sind, folgt, dass die von B und B_1 nach ζ und η gezogenen Strahlenpaare gleiche Winkel einschliessen:

$$(xy) = (x_1y_1).$$

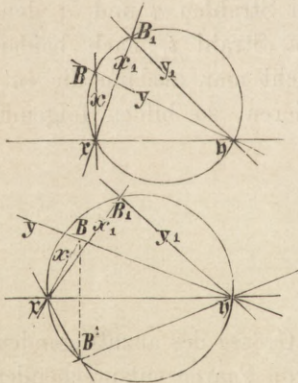
Verändern wir den durch B und B_1 gelegten Kreis, wodurch wir ein Kreisbüschel (sämtliche durch zwei Punkte gehenden Kreise) erhalten, so liefert dasselbe ein System von entsprechenden gleichen Winkeln, aber nur eines der beiden Systeme. Das andere System wird aber durch ein zweites Kreisbüschel bestimmt; fällen wir dazu aus B das Perpendikel auf den perspectiven Durchschnitt und verlängern es um sich selbst bis B^1 , so dass B^1 das Spiegelbild von B in Bezug auf den perspectiven Durchschnitt ist, so wird irgend ein durch B^1 und B_1 gelegter Kreis diesen Durchschnitt in zwei solchen Punkten ζ und η treffen, dass $B^1\zeta$ und $B^1\eta$ dieselben Winkel (oder Nebenwinkel) mit einander bilden,

wie $B_1\zeta$ und $B_1\eta$; $B^1\zeta$ und $B^1\eta$ bilden aber auch dieselben Winkel mit einander wie $B\zeta$ und $B\eta$, folglich ist der Winkel:

$$(yx) = (x_1y_1). \quad (\text{Fig. 16.})$$

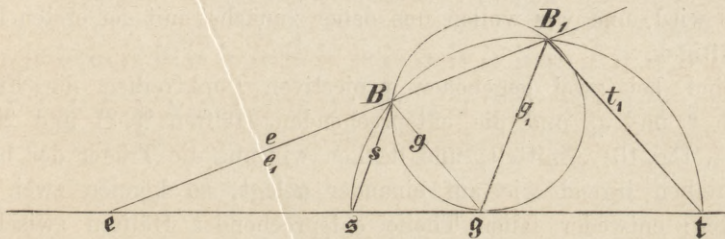
Wir erhalten also, indem wir durch B^1, B_1 das ganze Kreisbüschel legen, das zweite System entsprechender gleicher Winkel. Es ist ein-

Fig. 16.



leuchtend, dass, wenn wir statt B_1 sein Spiegelbild B_1^1 in Bezug auf den perspectiven Durchschnitt nehmen, das durch B, B_1^1 gelegte Kreisbüschel dasselbe System, das durch B^1, B_1 gelegte Kreisbüschel aber wieder das erste System liefert. Das eine der beiden Kreisbüschel, welche die Systeme entsprechender gleicher Winkel liefern, hat allemal seine beiden gemeinsamen Punkte auf derselben Seite vom perspectiven Durchschnitt, das andere aber auf entgegengesetzten Seiten, so dass in dem einen Kreisbüschel zwei (leicht zu ermittelnde) Kreise sich vorfinden, welche den perspectiven Durchschnitt berühren, in dem andern aber keine solche Berührungskreise vorhanden sind. Die nach den Berührungspunkten hingehenden entsprechenden Strahlen sind g und g_1, h und h_1 ; die ihnen zugehörigen gleichen entsprechenden Winkel haben den Werth Null.

Fig. 17.



In der That (Fig. 17), wenn ein Kreis des Büschels (BB_1) den perspectiven Durchschnitt in g berührt, so ist in dem Dreieck $B\tilde{s}g$ der Aussenwinkel:

$$\angle B\tilde{s}e = \angle (sg) + \angle Bg\tilde{s};$$

weil aber $\tilde{s}g$ Tangente ist, so ist:

$$\angle Bg\tilde{s} = \angle BB_1g$$

und im Kreisviereck:

$$\angle B\tilde{s}e = \angle BB_1g + \angle (g_1t_1)$$

woraus folgt:

$$\angle (sg) = \angle (g_1t_1),$$

was zu beweisen war.

§ 14. Auf einander liegende projective Gebilde. Doppelemente.

Wie wir in Nr. 20 gesehen haben, kommt es bei allgemeiner 30 (nicht perspectiver) Lage eines Strahlbüschels und einer mit ihm projectiven Punktreihe nicht dreimal vor, dass Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen; ob aber bei allgemeiner Lage weniger als drei Paare entsprechender Elemente zusammenliegen, ist eine Cardinalfrage für die Theorie, die wir in doppelter Weise aussprechen können. Seien $a, b, c \dots$ die Strahlen des Strahlbüschels B

und $a_1, b_1, c_1 \dots$ die entsprechenden Punkte der mit ihm projectiven Punktreihe \mathcal{A}_1 , dann wird das Strahlbüschel B den Träger \mathcal{A}_1 selbst, den wir uns noch einmal als einen neuen Träger \mathcal{A} denken können, in einer neuen Punktreihe $abc \dots$ treffen, und die vorige Frage reducirt sich auf folgende:

Fallen bei zwei beliebig auf einander liegenden projectiven Punktreihen entsprechende Punkte zusammen, und wie viel Paare?

Oder wir können andererseits den Punkt B mit den Punkten $a_1, b_1, c_1 \dots$ durch neue Strahlen $a_1, b_1, c_1 \dots$ verbinden und erhalten in B zwei concentrische projective Strahlbüschel B und B_1 ; die obige Frage wird daher folgende:

Fallen bei zwei auf einander liegenden (concentrischen) projectiven Strahlbüscheln entsprechende Strahlen zusammen, und wie viel Paare?

Es ist einleuchtend, dass mit der einen Frage die andere beantwortet wird, und wir wollen uns daher zunächst mit der ersten Frage beschäftigen.

Sind bei zwei gegebenen projectiven Punktreihen die Fluchtpunkte r und q_1 und die entsprechenden Hälften \mathcal{A}, \mathcal{B} und $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1$ (Nr. 24, Fig. 13) ermittelt, und denken wir uns die Träger der beiden Punktreihen irgend wie auf einander gelegt, so können zwei Fälle eintreten: entweder fallen Theile entsprechender Hälften zwischen r und q_1 über einander oder nicht, d. h. die Abschnitte von r bis ∞ und q_1 bis ∞ enthalten Theile entsprechender Hälften über einander oder nicht. Diese beiden Fälle lassen sich noch kürzer dadurch von einander unterscheiden, dass in dem ersten Fall der Richtungssinn in beiden Punktreihen derselbe, im zweiten Fall entgegen-

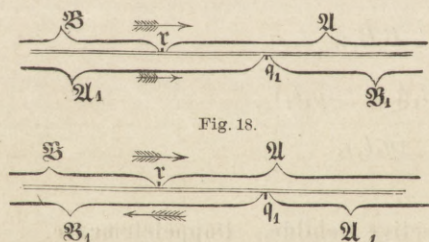


Fig. 18.

gesetzt ist, was wir leicht erkennen (Fig. 18), wenn wir auf entsprechenden Hälften von r nach q_1 und von r_1 nach q_1 gehen. Wir nennen daher in dem ersten Falle die Punktreihen *gleichlaufend*, im zweiten Falle *ungleichlaufend* und können, sobald die beiden auf einander

liegenden projectiven Punktreihen durch irgend drei Paare entsprechender Punkte gegeben sind, sofort entscheiden, ob sie gleichlaufend oder ungleichlaufend sind, indem wir ihren Richtungssinn vergleichen (Nr. 4). Folglich muss, wenn die auf einander liegenden Punktreihen *gleichlaufend* sind, der Werth der Potenz $r\bar{x} \cdot q_1\bar{x}_1$ *negativ* sein, weil die Strecken $r\bar{x}$ und $q_1\bar{x}_1$ entgegengesetzten Richtungssinn haben, hingegen *positiv*, wenn die Punktreihen *ungleichlaufend* sind.

Ob nun zusammenfallende entsprechende Punkte vorkommen, das wird in dem zweiten Fall, wenn die Punktreihen ungleichlaufend sind, sofort zu entscheiden sein; da nämlich nur entsprechende Hälften entsprechende Punkte enthalten, so werden in diesem Fall zusammenfallende entsprechende Punkte nur ausserhalb der Strecke $r q_1$ zu suchen sein. Dort müssen sie aber nothwendig vorkommen; denn während ein Punkt ξ der ersten Punktreihe die Hälfte \mathfrak{A} von r bis q_1 durchläuft, geht der entsprechende Punkt ξ_1 auf der Hälfte \mathfrak{A}_1 in entgegengesetzter Richtung von r_1 bis q_1 und erst dann, wenn ξ bis ins Unendliche gekommen ist, gelangt ξ_1 nach q_1 ; sie laufen sich also entgegen und überholen sich, müssen sich mithin nothwendig irgendwo getroffen haben. Dasselbe findet statt, wenn wir die Punkte ξ und ξ_1 die andern Hälften \mathfrak{B} und \mathfrak{B}_1 in dem Sinne, welchen die projective Beziehung angiebt, durchlaufen lassen; es kommt daher nothwendig zweimal (auf jeder der unendlichen Strecken ausserhalb $r q_1$ einmal) vor, dass entsprechende Punkte zusammenfallen, und von diesen beiden *Doppelpunkten* der auf einander liegenden projectiven Punktreihen steht der eine so weit von r ab, wie der andere von q_1 , wegen der Eigenschaft der constanten Potenz $r \xi \cdot q_1 \xi_1$. Es werden sich hieraus die Doppelpunkte in elementarer Weise construiren lassen; hat man nämlich die Potenzpunkte g und g_1 (oder h und h_1) bestimmt, für welche:

$$r \xi \cdot q_1 \xi_1 = (r g)^2$$

ist, so wird man nur nöthig haben, in r (oder q_1) die Senkrechte auf den zusammenliegenden Trägern der beiden Punktreihen zu errichten, auf dieser zwei Stücke $= r g = h r$ zu beiden Seiten von r abzutragen und durch die Endpunkte der abgetragenen Stücke den Kreis zu legen, welcher seinen Mittelpunkt in der Mitte von $r q_1$ hat. Dieser Kreis geht durch die Doppelemente der beiden Punktreihen. Denn, wenn ξ, ξ' seine Schnitte mit dem Träger sind, von denen ξ näher an r , ξ' näher an q_1 sei, so ist $\xi r = q_1 \xi'$ und daher $\xi q_1 = r \xi'$; wegen der bekannten Kreiseigenschaft ist

$$\xi r \cdot r \xi' = (r g)^2,$$

demnach

$$r \xi \cdot q_1 \xi = (r g)^2$$

und

$$q_1 \xi' \cdot r \xi' = (r g)^2;$$

das bedeutet aber, dass ξ und ξ' sich selbst entsprechende Punkte sind.

Anders verhält es sich im ersten Falle, wenn die auf einander 31 liegenden projectiven Punktreihen gleichlaufend sind; hier fallen nur innerhalb der Strecke $r q_1$ Theile entsprechender Hälften über einander; wenn daher zusammenfallende entsprechende Punkte vorkommen, so

können sie nur innerhalb der Strecke $r q_1$ enthalten sein. Wenn nun zwischen r, q_1 zwei entsprechende Punkte ξ, ξ_1 auf einander fallen, etwa in den Punkt ξ , so muss

$$r\xi + \xi q_1 = r q_1$$

und

$$r\xi \cdot q_1 \xi = - (r q_1)^2$$

oder

$$r\xi \cdot \xi q_1 = (r q_1)^2$$

sein; wir haben also zur Bestimmung des Punktes ξ ein Rechteck zu construiren, für welches der Inhalt und die Summe der Seiten gegeben sind. Während, wenn die Differenz der Seiten gegeben ist, Rechtecke von jedem Inhalte möglich sind, kann man, wenn die Summe der Seiten gegeben ist, *nicht* Rechtecke von jedem beliebigen Inhalte construiren, sondern der Inhalt des grössten Rechtecks, welches man herstellen kann, ist der des Quadrates, dessen Seite gleich der Hälfte der gegebenen Summe ist.* Wenn daher der Abstand der Punkte $r q_1$ kleiner ist als die doppelte Seite $2r q_1 = h g$ des Quadrats $(r q_1)^2$, mit dem das Rechteck gleich sein soll, so gibt es kein Rechteck von der verlangten Beschaffenheit, oder wenn

$$(\text{absolut}) r q_1 < g h \text{ (oder } g_1 h_1),$$

so gibt es keine Doppelpunkte. Wenn dagegen

$$r q_1 > g h,$$

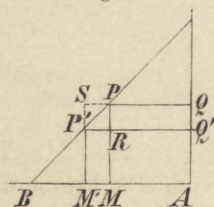
so gibt es ein Rechteck von der verlangten Beschaffenheit, dessen Seiten von r oder q_1 aus zwischen $r q_1$ abgetragen, zwei solche End-

* Denn, ist $2s$ die Summe, so ist

$$(s+x)(s-x) = s^2 - x^2 < s^2.$$

Oder, um uns in elementar-geometrischer Weise davon zu überzeugen, dass unter allen Rechtecken, welche dieselbe Summe der Seiten haben, das Quadrat den grössten Inhalt besitzt, können wir folgendermassen verfahren:

Fig. 19.



Sei AB die gegebene Summe der Seiten und M die Mitte von AB , ferner $AMPQ$ das Quadrat über der Seite AM ; ziehen wir BP und füllen aus irgend einem Punkte P' dieser Linie die Perpendikel $P'M'$ und $P'Q'$ auf AM und AQ , so hat das Rechteck $AM'P'Q'$ offenbar dieselbe Summe der Seiten; es ist aber, wenn sich $M'P'$ und PQ in S , $P'Q'$ und PM in R treffen, das Rechteck $MM'P'R$ gleich dem Rechteck $PQQ'R$ (congruent), folglich $MM'P'R$ kleiner als $PQQ'R$, mithin das Rechteck $AM'P'Q'$ kleiner als das Quadrat $AMPQ$; da dasselbe von jedem andern in gleicher Weise construirten Rechteck gilt, so ist das Quadrat das grösste unter allen Rechtecken von gleichem Umfang.

punkte liefern, in deren jedem zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen über einander liegen; es giebt also in diesem Fall wieder zwei Doppelpunkte. Wiederum ist der eine so weit von r entfernt, wie der andere von q_1 . Ist insbesondere

$$rq_1 = g^2 h,$$

so wird das construirte Rechteck selbst ein Quadrat; die beiden zwischen r und q_1 liegenden Doppelpunkte fallen zusammen; es giebt also in diesem Grenzfall nur *einen* Doppelpunkt oder vielmehr zwei zusammenfallende.*

In diesem Falle zweier gleichlaufenden projectiven Punktreihen können die Doppelpunkte durch elementare Construction so gefunden werden: Man beschreibe über rq_1 als Durchmesser den Kreis und trage von r (oder q_1) auf der Tangente dieses Kreises nach einer Seite hin ein Stück

$$= rg = h r \quad (\text{oder } q_1 g_1 = h_1 q_1)$$

ab; die durch den Endpunkt desselben zu dem Träger der Punktreihen gezogene Parallele trifft den Kreis in solchen Punkten, dass die von ihnen auf den Träger herabgelassenen Perpendikel zu Fusspunkten die gesuchten Doppelpunkte haben. Diese Construction, deren Richtigkeit einleuchtet, liefert auch das vorhin angegebene Kennzeichen, ob die Doppelpunkte reell vorhanden sind oder nicht; wenn nämlich $rg < \frac{1}{2}rq_1$ (der Radius des Kreises), so schneidet die Parallele den Kreis in zwei reellen Punkten, es giebt also zwei Doppelpunkte; wenn dagegen $rg > \frac{1}{2}rq_1$, so trifft die Parallele den Kreis nicht, es giebt also keine Doppelpunkte; wenn endlich $rg = \frac{1}{2}rq_1$, so berührt die Parallele den Kreis, es giebt also nur einen Doppelpunkt.

Das gewonnene Resultat lässt sich, wie folgt, zusammenfassen:

Bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen giebt es im allgemeinen zweimal zwei zusammenfallende entsprechende Punkte (Doppelpunkte); diese sind immer reell vorhanden, wenn die beiden Punktreihen ungleichlaufend sind, und liegen ausserhalb des Abstandes der

* Die quadratische Gleichung, welche sich aus den beiden Gleichungen für $r\xi$ und $q_1\xi$, nämlich $r\xi \cdot q_1\xi = \pm (rg)^2$ und $r\xi - q_1\xi = rq_1$, für eine dieser Grössen ergibt, hat im vorigen Falle immer zwei reelle Wurzeln, während sie in diesem auch imaginäre Wurzeln haben kann. Ist $rq_1 = 2d$ und die Potenz $\pm (rg)^2 = p$, so sind die Wurzeln

$$r\xi = d + \sqrt{d^2 + p}, \quad r\xi' = d - \sqrt{d^2 + p}.$$

Wenn m die Mitte von rq_1 ist, so giebt sich einfacher:

$$m\xi = +\sqrt{d^2 + p}, \quad m\xi' = -\sqrt{d^2 + p}.$$

Punkte r und q_1 symmetrisch zur Mitte dieser Strecke; sind dagegen die Punktreihen gleichlaufend, so sind die Doppelpunkte nur dann reell vorhanden, wenn der Abstand

$$rq_1 > gh \text{ (oder } g_1h_1),$$

und liegen zwischen r, q_1 ebenfalls symmetrisch zur Mitte; ist

$$rq_1 = gh,$$

so giebt es nur einen Doppelpunkt (oder vielmehr: die beiden Doppelpunkte fallen selbst zusammen); dieser liegt in der Mitte von rq_1 und enthält als zusammenfallende Punkte eines der besonderen Paare gg_1 oder hh_1 ; ist endlich

$$rq_1 < gh,$$

so fällt kein Paar entsprechender Punkte zusammen oder, wie man sich ausdrückt, die beiden Doppelpunkte sind imaginär.

Das Gleichlaufen der Punktreihen erfordert, dass grh und $g_1r_1h_1$ gleichen Sinn haben; also haben die endlichen Strecken gh und g_1h_1 ungleichen oder gh und h_1g_1 gleichen Sinn; r halbirt erstere, q_1 letztere. Liegt also h mit q_1 auf derselben Seite von r , so liegt h_1 mit r auf derselben Seite von q_1 , und $rh = h_1q_1$.

Wenn $rq_1 > gh$, so sind (absolut) rh und $q_1h_1 < \frac{1}{2}rq_1$, also schliessen sich gh und h_1g_1 gegenseitig aus. Wenn $rq_1 = gh$, so fallen h und h_1 beide in die Mitte von rq_1 , und wenn $rq_1 < gh$, so haben gh und g_1h_1 ein Stück gemeinsam oder greifen in einander über.

Zwei auf derselben Gerade gelegene gleichlaufende projective Punktreihen haben zwei getrennte oder zwei zusammengefallene oder keine (zwei imaginäre) Doppelpunkte, je nachdem die Strecken gh und g_1h_1 sich gegenseitig ausschliessen, an einander stossen oder in einander übergreifen.

Eine andere Art, die Doppelemente zweier auf einander liegender projectiver Gebilde zu ermitteln, werden wir demnächst bei der Betrachtung der Involution kennen lernen.

- 32 Es wäre nun übrig, die analoge Untersuchung für zwei auf einander liegende (concentrische) projective Strahlbüschel auf demselben Wege durchzuführen; statt dessen können wir das Resultat dieser an sich nicht schwierigeren Untersuchung sofort aus dem eben erlangten ableiten und ziehen diesen kürzeren Weg vor. Schneiden wir nämlich die beiden concentrischen Strahlbüschel durch eine beliebige Transversale, welche wir uns doppelt denken als den Träger zweier Punktreihen $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$, deren eine durch das eine, die andere durch das andere

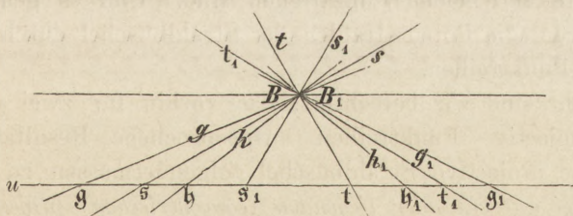
Strahlbüschel entsteht, so haben wir die beiden concentrischen Strahlbüschel in perspectiver Lage mit zwei auf einander liegenden Punktreihen; durch die Doppelpunkte der letzteren gehen offenbar die Doppelstrahlen der ersteren; die Construction jener liefert also auch diese.

Offenbar sind die Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend, je nachdem die Strahlbüschel es sind, und wir haben sofort das Ergebniss: Bei zwei auf einander liegenden projectiven Strahlbüscheln giebt es, wenn sie ungleichlaufend sind, immer zweimal zwei reelle zusammenfallende entsprechende Strahlen (Doppelstrahlen).

Sind dagegen die beiden Strahlbüschel gleichlaufend, so können wir das dem obigen analoge Kennzeichen, wann Doppelstrahlen vorhanden sind, dadurch ableiten, dass wir die beiden concentrischen Strahlbüschel durch eine besondere Transversale u schneiden, welche parallel läuft einer der beiden Richtungen, die den Winkel (st_1) , also auch (ts_1) halbiren; diese Transversale besitzt nämlich die Eigenschaft, dass die beiden auf ihr ausgeschnittenen projectiven Punktreihen ihre Potenzpunkte g, g_1, h, h_1 gerade in denjenigen Punkten haben, durch welche Potenzstrahlen g, g_1, h, h_1 der beiden concentrischen Strahlbüschel gehen, so dass dann also das obige von den Punkten g, h, g_1, h_1 abhängige Kennzeichen sich direct überträgt.

In der That, bei der angegebenen Lage der Transversale werden, weil die Winkel von g, h durch s, t und die von h_1, g_1 durch t_1, s_1 halbtirt werden, g und g_1, h und h_1 mit der Transversale gleichschenklige Dreiecke bilden und mit Rücksicht darauf, dass die Strahlbüschel B, B_1 gleichlaufend sind, so liegen, wie sie Fig. 20 darstellt.

Fig. 20.



Für irgend zwei entsprechende Strahlen x, x_1 gilt nun die Relation:

$$\operatorname{tg}(sx) \cdot \operatorname{tg}(x_1 t_1) = \operatorname{tg}^2(sg),$$

und hieraus wird der Winkel $(x_1 t_1)$ leicht bestimmt durch (sx) , wenn man die (Nr. 14, 3) für harmonische Strahlen gefundene ganz gleichlautende Relation in Betracht zieht; bestimmt man nämlich zu g, h

und x den vierten harmonischen, dem x zugeordneten Strahl ξ , so ist $(s\xi) = (x_1 t_1)$; was nun die Lage von x_1 anbetrifft, so erkennen wir mit Rücksicht auf die entsprechenden Quadranten zwischen den Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel, dass x_1 und ξ mit der Transversale ein gleichschenkliges Dreieck bilden müssen; wir können jetzt zu irgend einem Strahl x den entsprechenden x_1 in der einfachen Weise ermitteln, dass wir zu g, h, x den vierten harmonischen Strahl ξ , welcher dem x zugeordnet ist, bestimmen und dann x_1 so ziehen, dass sie mit der Transversale denselben Winkel bildet wie ξ . Wenn nun die Strahlen $g, h \dots x$ und $g_1, h_1 \dots x_1$ der beiden concentrischen Strahlbüschel B, B_1 der Transversale u in den Punkten $g, h \dots x$ und $g_1, h_1 \dots x_1$ zweier auf einander liegender Punktreihen begegnen, und die Mitte von gh mit r , die von $g_1 h_1$ mit q_1 bezeichnet wird, so erhalten wir den entsprechenden Strahl zu Br , indem wir zu g, h und Br den vierten, Br zugeordneten harmonischen Strahl ziehen. Dieser ist (Nr. 3) der Parallelstrahl zu u , und fällt mit dem Strahl zusammen, der dieselben Winkel mit u bildet; folglich entspricht diese Parallele dem Br und r dem unendlich fernen Punkte r_1^∞ von u ; ebenso ist q_1 der dem unendlich entfernten q_1^∞ der anderen Punktreihe entsprechende.

Aus der obigen Construction entsprechender Strahlen von B, B_1 folgt diejenige entsprechender Punkte x, x_1 der projectiven Punktreihen auf u , nämlich: man bestimme den vierten harmonischen Punkt x' zu g, h, x , welcher x zugeordnet ist, und suche den zu x' in Bezug auf die Mitte von $r q_1$ — den Fusspunkt des Loths aus B auf u — symmetrischen Punkt x_1 . Nun ist r die Mitte von gh , also $rx \cdot rx' = (rg)^2$. Ferner $rx' = x_1 q_1$; daher $rx \cdot x_1 q_1 = (rg)^2$. Hieraus folgt, da r Fluchtpunkt für die eine Reihe ist, dass die vier Punkte g, h, g_1, h_1 die Potenzpunkte der beiden Punktreihen sind. Und es gehen, wie behauptet wurde, die Potenzstrahlen der Strahlbüschel durch die Potenzpunkte der Punktreihen.

Nunmehr sind wir berechtigt, das vorhin für zwei auf einander liegende projective Punktreihen ausgesprochene Resultat auf zwei concentrische projective Strahlbüschel folgendermassen zu übertragen:

Bei zwei auf einander liegenden (concentrischen) projectiven Strahlbüscheln gibt es im allgemeinen zweimal zwei zusammenfallende entsprechende Strahlen (Doppelstrahlen). Diese sind immer reell vorhanden, wenn die beiden Strahlbüschel ungleichlaufend sind. Sind sie aber gleichlaufend, so werden die beiden Doppelstrahlen nur dann vorhanden sein, wenn die besonderen Strahlen g, h durch die Strahlen h_1, g_1 nicht getrennt werden; werden dagegen g, h durch h_1, g_1 getrennt (d. h. fällt g_1 in einen Winkelraum (gh) und h_1 in den andern), so gibt es keine

reellen Doppelstrahlen; den Uebergang bildet der Fall, wenn die Winkel (gh) und (h_1g_1) an einander stossen, so dass entweder g, g_1 oder h, h_1 zusammenfallen; in diesem Falle giebt es nur einen Doppelstrahl, oder die beiden Doppelstrahlen sind selbst zusammengefallen.

Es seien ξ und ξ' die Doppelpunkte zweier auf einander liegender projectiver Punktreihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1$ zwei weitere Paare entsprechender Punkte, so haben wir:

$$(\xi \xi' \mathfrak{X} \mathfrak{Y}) = (\xi \xi' \mathfrak{X}_1 \mathfrak{Y}_1) \quad \text{oder} \quad \frac{\xi \mathfrak{X}}{\xi' \mathfrak{X}} : \frac{\xi \mathfrak{Y}}{\xi' \mathfrak{Y}} = \frac{\xi \mathfrak{X}_1}{\xi' \mathfrak{X}_1} : \frac{\xi \mathfrak{Y}_1}{\xi' \mathfrak{Y}_1},$$

also auch:

$$\frac{\xi \mathfrak{X}}{\xi' \mathfrak{X}} : \frac{\xi \mathfrak{X}_1}{\xi' \mathfrak{X}_1} = \frac{\xi \mathfrak{Y}}{\xi' \mathfrak{Y}} : \frac{\xi \mathfrak{Y}_1}{\xi' \mathfrak{Y}_1} \quad \text{oder} \quad (\xi \xi' \mathfrak{X} \mathfrak{X}_1) = (\xi \xi' \mathfrak{Y} \mathfrak{Y}_1).$$

Das Doppelverhältniss, welches die Doppelpunkte zweier auf einander liegender projectiver Punktreihen mit irgend einem Paare entsprechender Punkte bilden, ist constant.*

Umgekehrt, wenn das Doppelverhältniss $(abcd)$ und die Punkte a, b fest sind, so beschreiben c und d projective Punktreihen. Es habe auf einer durch a gehenden Gerade $a b_0 c_0 d_0$ dasselbe Doppelverhältniss, dann sind $abcd$ und $a b_0 c_0 d_0$ perspective Punktreihen, und $b_0 b, c_0 c, d_0 d$ laufen in einem Punkt \mathfrak{X} zusammen. Bewegt sich c und mit ihm d , so dass $(abcd)$ festbleibt, so beschreibt \mathfrak{X} eine Punktreihe auf $b_0 b$; $c_0 c$ und $d_0 d$ erzeugen mit ihr perspective, also unter einander projective Strahlbüschel um c_0 und d_0 und daher wiederum c und d projective Punktreihen.

Aehnliches gilt für Strahlen.

§ 15. Construction der Doppелеlemente mittelst eines festen Kreises.

Die im vorigen Paragraphen angegebenen Constructionen der Doppelpunkte und darnach auch der Doppelstrahlen setzen die Kenntniss der besonderen Elemente r, q_1, g, g_1, h, h_1 voraus; es giebt aber eine andere viel einfachere Auflösung der Aufgabe:

Wenn zwei auf einander liegende projective Punktreihen durch irgend drei Paare entsprechender Elemente $a a_1, b b_1, c c_1$ gegeben sind, die Doppelpunkte zu finden,

bei welcher nur das Lineal und ein fester in der Ebene als gezeichnet angenommener Kreis benutzt wird.

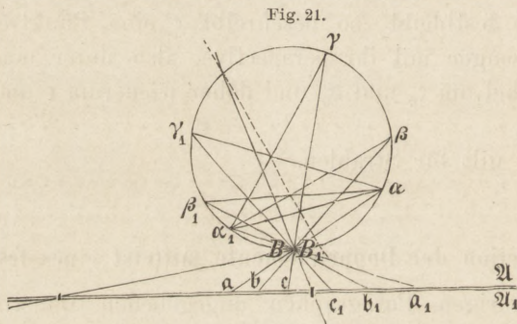
* Es ist

$$(\xi \xi' r r_1^{\infty}) = \frac{\xi r}{\xi' r} = \frac{d + \sqrt{d^2 + p}}{d - \sqrt{d^2 + p}}$$

(vergl. Note auf S. 43).

Diese von *Steiner* angegebene Construction beruht auf der elementaren Eigenschaft des Kreises, dass Peripheriewinkel auf gleichem Bogen gleich sind. Verbinden wir irgend zwei Punkte B, B_1 eines Kreises* mit zwei andern Punkten desselben α, β durch die Strahlen a, b und a_1, b_1 , so ist entweder der Winkel (ab) gleich dem Winkel $(a_1 b_1)$ oder gleich seinem Nebenwinkel; jedenfalls also ist $\sin(ab) = \sin(a_1 b_1)$. Lassen wir jetzt einen veränderlichen Punkt ξ den Kreis durchlaufen und verbinden ihn mit B und B_1 durch die Strahlen x, x_1 , so beschreiben dieselben zwei projective Strahlbüschel, weil die Doppelverhältnisse zwischen irgend vier Strahlen des einen und den entsprechenden des andern Strahlbüschels offenbar gleich sind (da die einzelnen Sinus dieser Doppelverhältnisse einander gleich sind).

Haben wir nun auf den zusammenliegenden Trägern zweier Punkt-reihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ drei Paare entsprechender Punkte a, a_1, b, b_1, c, c_1 willkürlich angenommen, und ist irgend ein Kreis in der Ebene gezeichnet, so verbinden wir einen beliebigen Punkt desselben, den wir uns doppelt denken als den Grundpunkt zweier Strahlbüschel B, B_1 , mit den Punkten a, b, c, a_1, b_1, c_1 durch Strahlen a, b, c, a_1, b_1, c_1 , welche den Kreis resp. in $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ treffen (Fig. 21). Bewegen wir nun



zwei entsprechende Punkte ξ, ξ_1 der durch die angenommenen drei Paare Elemente vollständig bestimmten projectiven Punkt-reihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$, so beschreiben x, x_1 , ihre Verbindungsstrahlen mit B, B_1 , zwei concentrische projective Strahlbüschel und ξ, ξ_1 , die Schnittpunkte mit dem Kreise, zwei „krumme projective Punkt-reihen“; so oft daher zwei entsprechende Punkte ξ, ξ_1 zusammenfallen, müssen auch zwei entsprechende Strahlen x, x_1 zusammenfallen und folglich auch zwei entsprechende Punkte ξ, ξ_1 und umgekehrt. Nehmen wir irgend ein Punkte-paar α, α_1 auf dem Kreise und verbinden α mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \xi_1$, anderer-

* Unter „Kreis“ verstehen wir immer die Peripherie.

seits α_1 mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots \xi$, so müssen die um α und α_1 als Grundpunkte erhaltenen Strahlbüschel auch projectiv sein. Denn das Strahlbüschel (α) ist mit dem Strahlbüschel (B_1) projectiv wegen der oben angegebenen Eigenschaft des Kreises, ebenso (α_1) mit (B); da nun (B) und (B_1) projectiv sind, so sind es auch (α) und (α_1) (Nr. 18). Diese beiden Strahlbüschel haben aber in der Verbindungslinie ihrer Grundpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt; folglich liegen sie perspectiv, (Nr. 20), die Schnittpunkte also sämtlicher Paare entsprechender Strahlen liegen auf einer Geraden (ihrem perspectiven Durchschnitt); dieser Ort des Schnittpunktes ($\alpha\xi_1, \alpha_1\xi$) ist schon bestimmt durch die beiden Schnittpunkte:

$$(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta) \text{ und } (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma);$$

jeder Punkt dieser Geraden mit α_1 und α verbunden liefert zwei Strahlen, welche den Kreis in zwei entsprechenden Punkten ξ, ξ_1 treffen. Diese Gerade wird daher selbst den Kreis in solchen zwei Punkten treffen, in deren jedem zwei entsprechende Punkte ξ, ξ_1 zusammenfallen; diese Punkte mit B (B_1) verbunden bestimmen auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ die gesuchten Doppelpunkte, deren Construction sich also in folgender einfachen Weise gestaltet:

Man verbinde die gegebenen Punktepaare aa_1, bb_1, cc_1 mit irgend einem Peripheriepunkte B (B_1) eines festen Kreises durch Strahlen, welche die Peripherie zum zweiten Male in $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1$ treffen, bestimme die Schnittpunkte $(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta), (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma)$ und ihre Verbindungslinie \mathfrak{Q} ; die Schnittpunkte der letzteren mit dem Kreise verbinde man mit B durch Strahlen, welche die Träger der gegebenen auf einander liegenden Punkt-reihen in den gesuchten Doppelpunkten treffen.

Wenn die Gerade \mathfrak{Q} den Kreis in zwei Punkten trifft, so giebt es zwei Doppelpunkte; geht die Gerade \mathfrak{Q} aber vorbei, ohne den Kreis zu treffen, so giebt es keine Doppelpunkte; berührt sie den Kreis, so giebt es nur einen Doppelpunkt (zwei zusammenfallende). Das Resultat des § 14 findet sich also durch diese Construction bestätigt, und es würde nicht schwer sein, die dort gefundenen Kennzeichen aus ihr von neuem herzuleiten. Wir unterlassen dies, ebenso wie die Auflösung der analogen Aufgabe, die Doppelstrahlen zweier concentrischer projectiver Strahlbüschel zu finden, da diese durch die vorige gleichzeitig gelöst ist.

Die Gerade \mathfrak{Q} muss auch durch den Punkt $(\beta\gamma_1, \gamma\beta_1)$ gehen, ³⁵ oder die drei Punkte $(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta), (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma), (\beta\gamma_1, \beta_1\gamma)$ liegen in einer Geraden.

In der That, die beiden von α und β ausgehenden Büschel $\alpha(\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $\beta(\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ sind wegen der oben gefundenen Eigenschaft des Kreises projectiv. Das erste Büschel trifft die Gerade $\gamma\alpha_1$ in den vier Punkten:

$$\gamma, \alpha_1, (\gamma\alpha_1, \alpha\beta_1), (\alpha\gamma_1, \gamma\alpha_1);$$

das zweite Büschel trifft $\gamma\beta_1$ in den vier Punkten:

$$\gamma, (\beta\alpha_1, \gamma\beta_1), \beta_1, (\beta\gamma_1, \gamma\beta_1).$$

Diese beiden Punktreihen liegen perspectiv, weil in ihrem Schnittpunkte γ entsprechende Punkte vereinigt sind; folglich treffen sich die drei Verbindungsstrahlen der übrigen entsprechenden Punkte in einem Punkte; die Verbindungslinie des ersten Paares entsprechender Punkte ist $\alpha_1\beta$, die des zweiten $\alpha\beta_1$, die des dritten die Verbindungslinie der beiden Punkte $(\alpha\gamma_1, \gamma\alpha_1)$, $(\beta\gamma_1, \gamma\beta_1)$; mithin liegt der Punkt $(\alpha\beta_1, \beta\alpha_1)$ auf dieser Gerade, was zu beweisen war.

Somit haben wir folgenden Satz für den Kreis gewonnen, der, wie wir später darthun werden, für jeden Kegelschnitt gilt:

Verbindet man irgend sechs Punkte eines Kreises zu einem einfachen Sechsecke $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$, so treffen sich die Gegenseiten desselben $\alpha\beta_1$ und $\alpha_1\beta$, $\beta_1\gamma$ und $\beta\gamma_1$, $\gamma\alpha_1$ und $\gamma_1\alpha$ in drei Punkten, welche auf einer Gerade liegen.

Wir fanden oben, dass alle Punkte $(\alpha\xi_1, \alpha_1\xi)$ auf der Gerade Ω liegen, welche die Punkte $(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta)$, $(\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma)$ verbindet; ingleichen liegen alle Punkte $(\beta\xi_1, \beta_1\xi)$ auf der Gerade, welche die Punkte $(\beta\alpha_1, \beta_1\alpha)$, $(\beta\gamma_1, \beta_1\gamma)$ verbindet. Diese beiden Geraden sind aber, in Folge des eben gefundenen Satzes, identisch. Wir haben die entsprechenden Punkte α, α_1 durch β, β_1 ersetzt, die Gerade ist dieselbe geblieben; sie wird sich also auch nicht ändern, wenn wir andere und andere entsprechende Punkte, z. B. η, η_1 nehmen; demnach liegen auf dieser Gerade alle Punkte $(\eta\xi_1, \eta_1\xi)$.

Wenn also zwei projective Punktreihen auf einen Kreis aus einem Punkte desselben projectirt werden, so dass sich zwei krumme projective Punktreihen:

$$\alpha\beta\gamma\dots\xi\eta\dots, \quad \alpha_1\beta_1\gamma_1\dots\xi_1\eta_1\dots$$

auf ihm ergeben, so erhalten wir eine ausgezeichnete Gerade, auf welcher alle Punkte $(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta)$, $(\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma), \dots, (\alpha\xi_1, \alpha_1\xi)$, $(\alpha\eta_1, \alpha_1\eta), \dots, (\beta\gamma_1, \beta_1\gamma), \dots, (\beta\xi_1, \beta_1\xi), \dots, (\xi\eta_1, \xi_1\eta), \dots$ liegen, also alle Schnittpunkte von zwei Linien, welche zwei entsprechende Punkte mit zwei andern „über Kreuz“ verbinden. Ihre Schnitte mit dem Kreise sind die Doppelpunkte der krummen projectiven Punktreihen, wenn sie vorhanden sind.

Wenn bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen ³⁶ ein Doppelpunkt bekannt ist, so bedarf es nicht mehr der vorigen Construction mit Hülfe des festen Kreises, um den andern Doppelpunkt zu finden, der dann nothwendig immer reell vorhanden ist, sondern dieser lässt sich mittelst des Lineals allein construiren auf folgende Art:

Sei e, e_1 der bekannte Doppelpunkt der beiden projectiven auf einander liegenden Punktreihen und seien aa_1, bb_1 irgend zwei Paare entsprechender Punkte, wodurch die ganze projective Beziehung bestimmt ist, so ziehe man durch e, e_1 einen beliebigen Strahl und nehme in demselben irgend zwei Punkte B, B_1 willkürlich an; die Schnittpunkte (Ba, B_1a_1) und (Bb, B_1b_1) bestimmen eine Gerade, welche den Träger der beiden zusammen liegenden Punktreihen in dem gesuchten zweiten Doppelpunkte trifft. Die Richtigkeit erhellt aus der ersten Construction in Nr. 19.

§ 16. Involution von Punktepaaren.

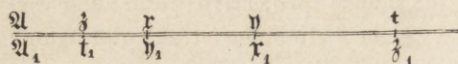
Es giebt einen ausgezeichneten speciellen Fall zweier auf ein- ³⁷ ander liegender projectiver Punktreihen, welcher in der Folge eine besondere Wichtigkeit erlangt; dieser besteht darin, dass der Abstand der beiden Punkte r und q_1 Null wird. Wenn zwei projective Punktreihen so auf einander liegen, dass die Fluchtpunkte r und q_1 auf einander fallen, so fallen sämtliche entsprechende gleiche Strecken des einen der beiden Systeme (Nr. 25) — desjenigen nämlich, das durch $r\xi = +q_1\eta_1, r\eta = +q_1\xi_1$ sich ergibt — verkehrt auf einander, so dass, wenn $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ zwei entsprechende gleiche Strecken desselben sind, ξ auf η_1 und zugleich η auf ξ_1 fällt. Und zwar wird das eine oder das andere System entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander fallen, je nachdem die Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind, d. h. je nachdem entsprechende Hälften über einander liegen: \mathcal{A} auf \mathcal{A}_1 und \mathcal{B} auf \mathcal{B}_1 (dann sind die Punktreihen ungleichlaufend, Fig. 18), oder nicht entsprechende Hälften: \mathcal{A} auf \mathcal{B}_1 und \mathcal{B} auf \mathcal{A}_1 (dann sind die Punktreihen gleichlaufend). Der eine Fall geht aus dem andern hervor durch Drehung der einen Reihe um den Punkt r, q_1 und den Winkel 180° , wozu die Strecken auf ihr ihr Vorzeichen wechseln.

In dem ersten Falle existiren zwei Doppelpunkte; es fallen nämlich die Punkte g und g_1 auf einander und die Punkte h und h_1 ; im zweiten Falle existiren keine Doppelpunkte (Nr. 31); denn die Strecke rq_1 , in der etwa vorhandene enthalten sind, ist verschwunden. Es fällt g auf h_1 und h auf g_1 .

Es findet aber auch das Umgekehrte statt: Wenn bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen irgend ein Paar entsprechender gleicher Strecken verkehrt zusammen fällt, d. h. $\xi\eta$ auf $\eta_1\xi_1$, so fallen sämtliche entsprechende gleiche Strecken desjenigen Systems, welchem jenes Paar angehört, verkehrt auf einander, insbesondere auch r auf q_1 .

In der That, denken wir uns (Fig. 22) in den beiden auf einander liegenden Trägern der Punktreihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ die Punkte ξ, ξ_1 und η, η_1 so

Fig. 22.



liegend, dass ξ auf η_1 und η auf ξ_1 fällt, und nehmen wir ein beliebiges drittes Paar entsprechender Punkte δ, δ_1 (wo-

durch die projective Beziehung vollständig bestimmt wird) an, so wird der Punkt δ der ersten Punktreihe auf einem gewissen Punkte t_1 der zweiten liegen, und der diesem entsprechende Punkt t der ersten Punktreihe wird bestimmt durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(\xi\eta\delta t) = (\xi_1\eta_1\delta_1 t_1).$$

Es ist aber identisch (Nr. 8):

$$(\xi_1\eta_1\delta_1 t_1) = (\eta_1\xi_1 t_1 \delta_1)$$

also:

$$(\xi\eta\delta t) = (\eta_1\xi_1 t_1 \delta_1)$$

und, wenn wir für η_1, ξ_1, t_1 die darüber stehenden Namen derselben Punkte setzen, = $(\xi\eta\delta_1 t_1)$; da also

$$(\xi\eta\delta t) = (\xi\eta\delta_1 t_1)$$

wird, so muss t mit δ_1 zusammenfallen, d. h. die Strecke δt fällt verkehrt auf die ihr gleiche entsprechende Strecke $t_1 \delta_1$; dies gilt von jedem Punkte des Trägers und seinen beiden entsprechenden; weil insbesondere die beiden unendlich entfernten Punkte r_1^∞ und q^∞ der beiden Punktreihen auf einander fallen, so müssen auch die ihnen entsprechenden r und q_1 auf einander fallen.

Wir können dies Ergebniss auch in folgender Form aussprechen:

Wenn bei zwei projectiven Punktreihen, die sich auf derselben Gerade befinden, einmal die einem Punkte ξ, η_1 in beiderlei Sinne entsprechenden (von ihm verschiedenen) Punkte ξ_1 und η sich decken, dann geschieht dies durchweg.

38 Ein solches Doppelgebilde zweier auf einander liegenden projectiven Punktreihen, bei denen für einen und dann für jeden Punkt die beiden entsprechenden Punkte sich vereinigen oder, was dasselbe ist, die entsprechenden gleichen Strecken des einen Systems verkehrt auf einander

liegen, heisst nach einer von *Desargues** (1593—1662) eingeführten Bezeichnung eine *Involution* von Punktepaaren. Die Punkte eines Paares, von denen also jeder dem andern in beiderlei Sinne entspricht, die Endpunkte einer solchen Strecke, heissen *conjugirt* in der Involution oder sie bilden ein Paar in ihr; und so beschaffene projective Punkt-reihen nennt man *involutorisch*. Der dem unendlich entfernten Punkte conjugirte Punkt, in welchem r und q_1 auf einander liegen, heisst der *Mittelpunkt* der Involution.

Wenn die die Involution erzeugenden Punkt-reihen gleichlaufend sind, so heisst sie eine *elliptische*; es liegen dann zwei conjugirte Punkte immer auf entgegengesetzten Seiten vom Mittelpunkte, und bezeichnen wir mit o den Mittelpunkt, mit $x\xi$ irgend ein Paar conjugirter Punkte, so werden sämtliche Paare conjugirter Punkte durch die Relation zusammengehalten:

$$ox \cdot o\xi = \text{const.};$$

denn x und ξ treten an die Stelle zweier entsprechender Punkte x_1 und x_2 der beiden projectiven Punkt-reihen, und in o liegen r und q_1 vereinigt, also gilt die Eigenschaft des constanten Products $rx \cdot q_1x_1$ (Nr. 24), welches in diesem Falle *negativ* ist. Doppelpunkte können nicht vorkommen, wohl aber zeichnet sich ein Paar conjugirter Punkte vor den andern aus, dasjenige nämlich, dessen Punkte gleich weit vom Mittelpunkte nach entgegengesetzten Richtungen hin abstehen, für welches also das constante Rechteck ein Quadrat wird; es sind dies offenbar die Punkte g und g_1 oder h_1 und h , indem g auf h_1 und g_1 auf h fällt. Dieses besondere Paar wollen wir wiederum die *Potenzpunkte*, das constante Product *die Potenz* der elliptischen Involution nennen.

Wenn dagegen die die Involution erzeugenden Punkt-reihen ungleichlaufend sind, also die entsprechenden gleichen Strecken des andern Systems verkehrt auf einander fallen, so heisst die Involution eine *hyperbolische*; es liegen zwei conjugirte Punkte immer auf derselben Seite vom Mittelpunkte aus und sämtliche Paare conjugirter Punkte werden wiederum durch die Relation zusammengehalten:

$$ox \cdot o\xi = \text{const.},$$

aber mit *positivem* Werthe der Constante oder der Potenz. Es fallen insbesondere zweimal zwei conjugirte Punkte zusammen (wenn nämlich das constante Rechteck ein Quadrat wird); dies geschieht für die

* Der jedoch nicht in dieser Weise zur Involution gelangt ist, sondern von der Eigenschaft $ox \cdot o\xi = \text{const.}$ ausging.

Punkte g, g_1 auf der einen Seite von o und für h, h_1 auf der andern Seite; diese besonderen zusammenfallenden Punktepaare der Involution heissen ihre *Doppelpunkte*; sie liegen nach entgegengesetzten Seiten in gleichem Abstände von o . Bezeichnen wir sie mit g und h , so drückt die Relation:

$$ox \cdot o\xi = (og)^2 = (oh)^2$$

zugleich ein merkwürdiges Verhalten sämmtlicher Paare conjugirter Punkte zu den Doppelpunkten der Involution aus, indem x, ξ den g und h harmonisch zugeordnet sind (Nr. 13), also:

Sämmtliche Paare conjugirter Punkte einer hyperbolischen Involution sind den beiden Doppelpunkten derselben harmonisch zugeordnet, und auch umgekehrt: Sämmtliche Paare von Punkten c, d , welche zwei festen Punkten a, b einer Gerade harmonisch zugeordnet sind, bilden eine hyperbolische Involution, deren Doppelpunkte die festen Punkte sind; denn wir haben das constante Doppelverhältniss $(abcd) = -1$ (Nr. 33); bei diesem aber kann man c und d vertauschen, ohne dass der Werth des Doppelverhältnisses sich ändert, d. h. gelangt c nach d , dann kommt d nach c . Also bewegen sich c und d so projectiv, dass sie sich durchweg doppelt oder involutorisch entsprechen.

Bei zwei involutorischen projectiven Punktreihen ist das in Nr. 33 gefundene constante Doppelverhältniss $(\xi\xi'\chi\chi_1) = -1$ (wie auch aus $d = o$ sich ergibt; Anm. S. 47).

Den Uebergang zwischen der elliptischen und der hyperbolischen Involution bildet die *parabolische*; bei ihr vereinigen sich die beiden Doppelpunkte; dann fallen die allen Punkten des Trägers conjugirten Punkte in denselben einzigen Punkt hinein, in welchem die beiden Doppelpunkte vereinigt sind, weil (Nr. 13), wenn von vier harmonischen Punkten zwei zugeordnete in einen Punkt zusammenfallen, auch einer des andern Paares zugeordneter Punkte in diesen hineinfallen muss. In diesen ausgezeichneten Punkt fällt auch der Mittelpunkt als Mitte zwischen den Doppelpunkten.

Für die *elliptische Involution* ist die Potenz eine *negative*, für die *hyperbolische* eine *positive* Grösse, für die *parabolische* ist sie *Null*.

Der negative Werth der Potenz bei einer elliptischen Involution führt zu imaginären Werthen von og, oh , den Quadratwurzeln der Potenz, und zu *imaginären Doppelpunkten*. Und die Gleichheit von $ox \cdot o\xi$ mit diesem negativen Quadrate von og oder oh sprechen wir, das Ergebniss von dem Fall der hyperbolischen auf den der elliptischen Involution übertragend, dahin aus, dass wir auch bei der letzteren *irgend zwei conjugirte Punkte harmonisch zu den imaginären Doppelpunkten* nennen.

Ein besonders einfacher Fall tritt bei der hyperbolischen Involution auf, wenn einer der beiden Doppelpunkte im Unendlichen liegt; in diesem Fall wird die Strecke zwischen je zwei conjugirten Punkten durch den andern im Endlichen befindlichen Doppelpunkt halbirt, und wir erhalten folgendes sehr einfaches Gebilde: alle Paare von Punkten x, ξ einer Gerade, welche zu einem festen Punkte g symmetrisch liegen. Eine solche Involution nennt man eine *gleichseitig-hyperbolische*.

Wegen des häufigen Auftretens von Involutionen bei geometrischen Untersuchungen heben wir die Grundeigenschaft eines solchen Doppelgebildes, dass es nämlich in sich projectiv ist, noch besonders hervor:

Wenn wir bei einer Involution von Punktepaaren aus jedem Paare einen nehmen und diese als eine Reihe auffassen $abc \dots$, so bilden die conjugirten Punkte $\alpha\beta\gamma \dots$ eine mit der ersten Reihe projective Punktreihe, und die beiden Punktreihen liegen in der oben angegebenen eigenthümlichen Weise auf einander. Die Construction von Nr. 34 führt zu den Doppelpunkten.

Es ist einleuchtend, dass wir zwei conjugirte Punkte mit einander vertauschen können, ohne die projective Beziehung zu ändern; denn da die Endpunkte eines solchen Paares $\chi(\eta_1)$ und $\chi_1(\eta)$ sind, so können wir es sowohl als $\chi\chi_1$ auffassen, wie auch als $\eta_1\eta$.

Es folgt ferner, dass *Involutionen durch Projection wieder in Involutionen übergehen*, d. h. wenn wir eine Involution $a\alpha, b\beta, c\gamma \dots$ mit irgend einem Punkte B durch Strahlenpaare verbinden, welche eine beliebige andere Transversale in den neuen Punktepaaren $a^1\alpha^1, b^1\beta^1, c^1\gamma^1 \dots$ treffen, so bilden diese ebenfalls eine Involution. Denn es bilden $a^1b^1c^1 \dots$ und $\alpha^1\beta^1\gamma^1 \dots$ zwei projective Punktreihen, welche sich in der eigenthümlichen Lage befinden, dass dem Punkt a^1 der ersten Punktreihe der Punkt α^1 der zweiten entspricht, aber auch gleichzeitig dem Punkt α^1 , als der ersten Punktreihe angehörig betrachtet, der Punkt a^1 der zweiten Punktreihe entspricht; da also ein Paar entsprechender Punkte sich in beiderlei Sinne entsprechen, so bilden $a^1\alpha^1, b^1\beta^1, c^1\gamma^1 \dots$ eine Involution.

Aus der Eigenschaft der constanten Potenz:

39

$$ox \cdot o\xi = \text{const.}$$

können wir uns ein leichtes Verfahren ableiten, Involutionen in ihrem ganzen Verlaufe herzustellen. Legen wir nämlich durch zwei conjugirte Punkte a, α einen beliebigen Kreis und durch ein zweites Paar conjugirter Punkte b, β irgend einen zweiten Kreis, welcher den ersten in den Punkten P und Q treffe, so wird ein dritter Kreis, welcher durch P, Q und x geht, nothwendig durch ξ gehen müssen,

weil, wenn PQ den Träger der Involution in o trifft, $oP \cdot oQ = oa \cdot oa = ob \cdot ob = ox \cdot ox$ sein muss. Sämmtliche durch die Punkte P, Q gelegten Kreise, welche nach Nr. 13 ein Kreisbüschel bilden, bestimmen also alle Punktepaare $x\xi$ einer Involution, die mit der angenommenen identisch ist, deren Mittelpunkt durch die gemeinschaftliche Secante PQ des Kreisbüschels (oder denjenigen Kreis des Büschels, dessen Radius unendlich gross ist) bestimmt wird. Liegt der Punkt o ausserhalb der Strecke PQ , so liegt er auch ausserhalb jeder Strecke $x\xi$, ausserhalb aller Kreise des Büschels, die Involution ist hyperbolisch; liegt o innerhalb PQ , so liegt er auch innerhalb jeder Strecke $x\xi$, innerhalb sämmtlicher Kreise des Büschels, die Involution ist elliptisch. Wir schliessen: *Ein Kreisbüschel mit zwei (reellen) gemeinschaftlichen Punkten PQ wird von einer beliebigen Transversale immer in einer Involution geschnitten, deren Paare conjugirter Punkte die Schnittpunkte mit je einem Kreise des Büschels sind; sie ist elliptisch, wenn die Transversale die Punkte P und Q trennt, d. h. auf entgegengesetzten Seiten von sich hat, hyperbolisch, wenn P und Q auf derselben Seite von der Transversale liegen.* Im letzteren Fall giebt es zwei besondere Kreise des Büschels, welche die Transversale berühren; die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte der Involution.

40 Aus dieser Construction einer Involution mittelst des Kreisbüschels geht schon hervor, dass *eine Involution vollständig bestimmt ist durch zwei Paare* (willkürlich anzunehmender) *conjugirter Punkte.* Dies folgt aber auch aus der ursprünglichen Entstehung der Involution, denn nehmen wir $a\alpha, b\beta$ als zwei Paare conjugirter Punkte willkürlich an, so vertritt $a\alpha$ die Stelle von zwei Paaren $a\alpha_1$ und b_1b , $b\beta$ die Stelle von zwei andern Paaren $c\gamma_1$ und d_1d entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen $abcd\dots$ und $\alpha_1b_1c_1d_1\dots$; es scheint also, als ob durch diese vier Paare entsprechender Punkte die projective Beziehung überbestimmt sei, da doch drei Paare entsprechender Elemente zur Bestimmung der projectiven Beziehung nothwendig und ausreichend sind. Dieses Bedenken verschwindet aber, da diese vier Paare so eigenthümlich liegen, dass das vierte nur eine Folge der drei andern ist, dass also kein Widerspruch eintritt, und in der That die projective Beziehung durch sie gerade bestimmt wird. Es liegen nämlich a, b_1 zusammen in a , ebenso b, α_1 zusammen in α , ferner c, d_1 in b und d, c_1 in β ; folglich ist identisch:

$$(abcd) = (b_1\alpha_1d_1c_1),$$

und da (Nr. 8) allgemein:

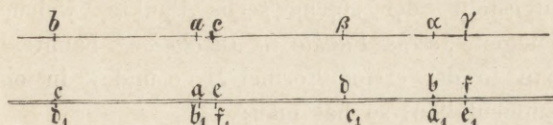
$$(b_1\alpha_1d_1c_1) = (\alpha_1b_1c_1d_1)$$

ist, so folgt:

$$(abcd) = (\alpha_1b_1c_1d_1).$$

Diese vier Paare entsprechender Elemente vertreten also nur drei Paare und bestimmen vollständig die projective Beziehung, also auch die Involution. Zwischen drei Paaren conjugirter Punkte einer Invo-

Fig. 23.



lution muss daher eine Bedingung bestehen, welche unmittelbar hervorgeht aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse. Fügen wir nämlich noch ein drittes Paar conjugirter Punkte $c\gamma$ den vorigen hinzu und denken uns dieses als c und c_1 oder f_1 und f (Fig. 23), so ist:

$$(abc) = (a_1 b_1 c_1)$$

oder, wenn wir die Bezeichnung der conjugirten Punkte der Involution anwenden:

$$(abc) = (a\alpha\beta\gamma),$$

das heisst:

$$\frac{ab}{a'b'} : \frac{ac}{a'c'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} : \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'}$$

Dies lässt sich in mehr symmetrischer Gestalt so schreiben:

$$I. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ab \cdot \alpha\beta}{a'b' \cdot \alpha'\beta'} = \frac{ac \cdot \alpha\gamma}{a'c' \cdot \alpha'\gamma'}, \\ \text{und in gleicher Weise ist:} \\ \frac{bc \cdot b\gamma}{b'c' \cdot b'\gamma'} = \frac{ba \cdot b\alpha}{b'a' \cdot b'\alpha'}, \\ \frac{ca \cdot c\alpha}{c'a' \cdot c'\alpha'} = \frac{cb \cdot c\beta}{c'b' \cdot c'\beta'}. \end{array} \right.$$

Ferner können wir folgende Gleichheit der Doppelverhältnisse ansetzen:

$$(acbf) = (a_1 c_1 b_1 f_1)$$

oder in der andern Bezeichnung:

$$(\bar{a}b\alpha\gamma) = (\alpha\beta\alpha c),$$

das heisst:

$$\frac{a\alpha}{b\alpha} : \frac{a\gamma}{b\gamma} = \frac{\alpha a}{\beta a} : \frac{\alpha c}{\beta c}$$

da nun $\alpha a = -a\alpha$, so hebt sich ein Factor fort, und es ergeben sich die Relationen:

$$II. \quad \left\{ \begin{array}{l} a\beta \cdot b\gamma \cdot c\alpha = a\gamma \cdot b\alpha \cdot c\beta, \\ a\beta \cdot bc \cdot \gamma\alpha = a'c \cdot b\alpha \cdot \gamma\beta, \\ b\gamma \cdot ca \cdot \alpha\beta = b\alpha \cdot c\beta \cdot \alpha\gamma, \\ c\alpha \cdot ab \cdot \beta\gamma = cb \cdot a\gamma \cdot \beta\alpha, \end{array} \right.$$

von denen die drei letzten aus der ersten durch Vertauschung zweier conjugirter Punkte (c und γ , a und α , b und β) hervorgehen.

Diese sieben Relationen zwischen drei Paaren conjugirter Punkte einer Involution bestehen, wenn eine von ihnen gilt; sie sind von *Desargues* aufgestellt, der solche sechs Punkte, welche diesen Bedingungen genügen, „*sechs Punkte in Involution*“ nannte.

Lässt man in der ersten Formel II. c und γ in einem Doppelpunkt d zusammenfallen, so hat man:

$$db \cdot d\alpha (d\beta - da) = da \cdot d\beta (da - db),$$

oder

$$\frac{1}{da} + \frac{1}{d\alpha} = \frac{1}{db} + \frac{1}{d\beta},$$

also für alle Paare constant.

- 41 Es ist wichtig, ein Kennzeichen zu besitzen, welches sofort entscheidet, ob eine durch zwei Paare conjugirter Punkte gegebene Involution elliptisch oder hyperbolisch ist. Bei der hyperbolischen Involution liegen zwei conjugirte Punkte auf derselben Seite vom Mittelpunkt.

Wenn also $a\alpha$ und $b\beta$ auf verschiedenen Seiten des Mittelpunkts o liegen, so schliessen sie sich aus; befinden sie sich aber auf derselben Seite von o , so seien a und b die an o näheren Punkte der beiden Paare und von ihnen wieder a näher als b , dann folgt aus $oa \cdot o\alpha = ob \cdot o\beta$, dass α weiter von o entfernt ist als β , also die Punkte die Reihenfolge $oab\beta\alpha$ haben und das Paar $b\beta$ von $a\alpha$ eingeschlossen wird.

Wenn aber die Involution elliptisch ist, so liegen zwei conjugirte Punkte auf verschiedenen Seiten von o , nehmen wir a, b auf der einen, α, β auf der andern; ist wiederum $oa < ob$, so folgt aus der nämlichen Gleichung, dass (absolut) $o\alpha > o\beta$; die Punkte haben die Reihenfolge $ba\alpha\beta$; jedes der beiden Paare $a\alpha, b\beta$ greift in das andere über: „sie trennen sich.“ Das gesuchte Kennzeichen ist also folgendes:

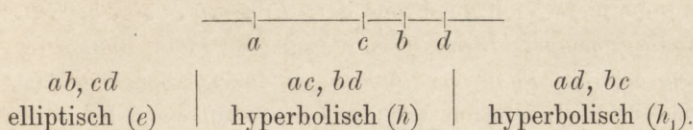
Wenn eine Involution durch zwei Paare conjugirter Punkte $a\alpha$ und $b\beta$ gegeben ist, so ist sie eine hyperbolische, wenn die beiden Paare sich ausschliessen oder eins das andere einschliesst, eine elliptische, wenn sie sich trennen; im ersten Falle ist das Doppelverhältniss $(a\alpha b\beta)$ positiv, im zweiten negativ.

Es empfiehlt sich, die beiden Lagen der Punktepaare $a\alpha, b\beta$ hyperbolisch, bezw. elliptisch zu nennen.

- 42 Nehmen wir auf einer Gerade vier beliebige Punkte a, b, c, d an, so lassen sich dieselben auf dreifache Weise zu Paaren ordnen, nämlich:

$$ab, cd \mid ac, bd \mid ad, bc.$$

Bei jeder dieser Zuordnungen wird durch die zwei Punktepaare eine Involution bestimmt, und von diesen drei Involutionen ist nach dem obigen Kennzeichen und Nr. 10 immer eine elliptisch, die beiden andern sind hyperbolisch; z. B.



Nehmen wir von einem beliebigen Punkte p des Trägers den conjugirten Punkt rücksichtlich dieser drei Involutionen, beziehlich

$$\pi_e, \quad \pi_h, \quad \pi_{h_1}.$$

Wegen der zweiten und dritten Involution ist:

$$(abc\pi_h) = (cdap), \quad (bad\pi_{h_1}) = (cdap);$$

also:

$$(abc\pi_h) = (bad\pi_{h_1}).$$

Folglich sind π_h und π_{h_1} conjugirte Punkte der Involution (e), gleicherweise π_e und π_h conjugirte Punkte von (h_1), endlich π_e und π_{h_1} conjugirte Punkte von (h). Hiernach gilt folgender Satz:

Vier beliebige Punkte in einer Gerade als zwei Paare conjugirter Punkte aufgefasst bestimmen drei verschiedene Involutionen, von denen immer eine elliptisch: (e) und die beiden andern hyperbolisch sind: (h) und (h_1). Nimmt man von irgend einem Punkte p in der Gerade die conjugirten Punkte π_e, π_h, π_{h_1} in Bezug auf diese drei Involutionen, so sind π_h und π_{h_1} conjugirte Punkte in (e), π_e und π_{h_1} conjugirte Punkte in (h) und π_e und π_h conjugirte Punkte in (h_1).

Auch zeigt sich das eigenthümliche reciproke Verhalten, dass die vier angenommenen Punkte a, b, c, d zu den vier Punkten $p, \pi_e, \pi_h, \pi_{h_1}$ genau dieselbe Beziehung haben, wie diese zu jenen; d. h. wenn man von $p, \pi_e, \pi_h, \pi_{h_1}$ ausgeht und zu a die drei conjugirten sucht, erhält man b, c, d , wie aus den folgenden Projectivitäten sich ergibt:

$$\begin{aligned} (e) \quad & abcdp\pi_e\pi_h\pi_{h_1} \frown badc\pi_e p\pi_{h_1}\pi_h, \\ (h) \quad & abcdp\pi_e\pi_h\pi_{h_1} \frown cdab\pi_h\pi_{h_1}p\pi_e, \\ (h_1) \quad & abcdp\pi_e\pi_h\pi_{h_1} \frown dcba\pi_{h_1}\pi_h\pi_e p, \end{aligned}$$

womit wir zugleich das Zeichen \frown für „projectiv“ einführen, welches von *v. Staudt* (1798—1867) herrührt.

Die Doppelpunkte g, h der Involution (h) sind harmonisch zu a, c und zu b, d ; aus $(ghac) = (ghbd) = -1$ folgt: $(ghac) = (hgbd)$ und $(ghac) = (hgdb)$. Die erstere Gleichung bedeutet, dass gh, ab, cd in Involution sind oder dass g, h conjugirt in (e) sind; die andere zeigt,

dass sie ebenso conjugirt in (h_1) sind; und ebenso bilden die Doppelpunkte von (h_1) je ein Paar in (e) und (h) .

Die Doppelpunkte einer jeden hyperbolischen von den drei Involutionen bilden ein Paar in jeder der beiden andern.

- 43 Sehr oft bietet sich die Frage dar: *Ereignet es sich bei zwei beliebig auf einander gelegten Involutionen, dass ein Paar conjugirter Punkte der einen auf ein Paar der andern zu liegen kommt?* Dazu wollen wir zunächst die Involution von der Gerade auf einen Kreis übertragen durch Projection aus einem Punkte desselben, wie in Nr. 34. Die Projectionen von $a\alpha, b\beta, c\gamma \dots$ seien $a_1\alpha_1, \beta_1\gamma_1, c_1\gamma_1 \dots$. Auf der Gerade haben wir die Projectivität:

$$aab\beta c\gamma \dots \bar{\wedge} aab\beta\gamma c \dots$$

demnach entsprechen in den krummen projectiven Punktreihen auf dem Kreise den Punkten $a_1, \alpha_1, b_1, \beta_1, c_1, \gamma_1 \dots$ die Punkte $\alpha_1, a_1, \beta_1, b_1, \gamma_1, c_1 \dots$. Wir können deshalb, weil auch durchgängiges Doppelt-Entsprechen stattfindet, von einer *Involution auf dem Kreise* sprechen. Auf der ausgezeichneten Gerade (Nr. 35) treffen sich also jede zwei Linien, welche entsprechende Punkte der krummen Punktreihen mit zwei andern über Kreuz verbinden. So verbinden a_1b_1 und $\alpha_1\beta_1$ die entsprechenden Punkte a_1 und α_1 mit den entsprechenden Punkten β_1, b_1 über Kreuz; also liegt $(a_1b_1, \alpha_1\beta_1)$ auf der Gerade, und ebenso $(b_1c_1, \beta_1\gamma_1)$, $(c_1\alpha_1, \gamma_1\alpha_1)$. Folglich liegen die beiden Dreiecke $a_1b_1c_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1$ perspectiv; die drei Geraden $a_1\alpha_1, b_1\beta_1, c_1\gamma_1$ laufen in einen Punkt zusammen, der, schon durch $a_1\alpha_1, b_1\beta_1$ bestimmt, sich nicht ändert, wenn c_1, γ_1 durch andere conjugirte Punkte der krummen Involution ersetzt werden.

Demnach laufen bei der krummen Involution auf dem Kreise alle Verbindungslinien conjugirter Punkte in einen Punkt zusammen, den man das Centrum dieser krummen Involution nennt.

Jene ausgezeichnete Gerade heisst die *Involutionensaxe*. Auf ihr liegen also alle Punkte von der Art $(a_1b_1, \alpha_1\beta_1)$, aber, da auch $a_1\beta_1$ und α_1b_1 die entsprechenden Punkte a_1, α_1 mit den entsprechenden Punkten b_1, β_1 über Kreuz verbinden, auch die Punkte $(a_1\beta_1, \alpha_1b_1)$, und endlich, indem wir die entsprechenden Punkte a_1, α_1 mit den entsprechenden Punkten α_1, a_1 über Kreuz verbinden, auch der Schnittpunkt der Verbindungslinien $a_1a, \alpha_1\alpha_1$, d. h. der Tangenten in den conjugirten Punkten a_1, α_1 . Also:

Auf der Involutionensaxe schneiden sich auch die Tangenten in conjugirten Punkten der krummen Involution.

Die Schnittpunkte der Axe mit dem Kreise, wenn solche vorhanden sind, sind die Doppelpunkte der krummen Involution; andererseits müssen

das aber auch die Berührungspunkte der vom Involutioncentrum kommenden Tangenten sein.

Danach liegt das Centrum einer hyperbolischen krummen Involution ausserhalb des Kreises und das einer elliptischen innerhalb.

Nun kommen wir auf die Frage nach einem gemeinsamen Paare 44 zweier auf derselben Gerade gelegenen Involutionen zurück. Wir übertragen beide in der beschriebenen Weise auf einen Kreis. Die Verbindungslinie der Punkte eines gemeinsamen Paares der krummen Involutionen, die ersichtlich mit den gegebenen gleichartig sind (Doppelpunkte gehen in Doppelpunkte über), muss durch beide Centren gehen. Ist also mindestens eine der Involutionen elliptisch, so liegt mindestens ein Centrum im Innern; die Verbindungslinie schneidet den Kreis.

Die Tangenten in den Punkten eines gemeinsamen Paares müssen sich auf beiden Axen, also in deren Schnittpunkte begegnen; folglich muss derselbe, wenn ein gemeinsames Paar vorhanden sein soll, ausserhalb des Kreises liegen.

Sind die Involutionen beide hyperbolisch, so können die einen Doppelpunkte zu den andern die hyperbolische oder die elliptische Lage haben, auf dem Kreise ersichtlich ebenso wie auf der Gerade. Die Involutionen verbinden je die Doppelpunkte, und man erkennt sofort, dass der Schnittpunkt bei der hyperbolischen Lage ausserhalb, bei der elliptischen innerhalb liegt. Also:

Zwei Involutionen auf derselben Gerade haben, wenn mindestens eine elliptisch ist, ein (reelles) Paar gemeinsam; dasselbe gilt, wenn beide hyperbolisch sind und ihre Doppelpunkte hyperbolisch liegen; hingegen haben sie kein gemeinsames Paar oder vielmehr ein gemeinsames Paar mit imaginären Punkten, wenn die Doppelpunkte elliptisch liegen.

Aber dies auf zwei hyperbolische Involutionen bezügliche Resultat kennen wir längst: Das gemeinsame Paar ist das Paar der (reellen oder imaginären) Doppelpunkte derjenigen (hyperbolischen oder elliptischen) Involution, welche durch die Doppelpunkte der gegebenen Involutionen als durch zwei Paare conjugirter Punkte bestimmt werden.

Hieraus ergibt sich insbesondere folgende Eigenschaft der elliptischen Involution: *In einer elliptischen Involution gibt es allemal zu einem beliebig gegebenen Paare conjugirter Punkte $a\alpha$ ein einziges und bestimmtes anderes Paar $a^1\alpha^1$, welches durch das erstere harmonisch getrennt wird, d. h. so liegt, dass a, α, a^1, α^1 vier harmonische Punkte sind, und zwar a, α , ebenso a^1, α^1 zugeordnet. Bei einer hyperbolischen Involution ist dies nicht möglich, weil da jedes Paar $a\alpha$ zu den Doppelpunkten elliptische Lage hat.*

45 Es seien $a\alpha, b\beta$ zwei Punktepaare einer elliptischen Involution auf \mathfrak{A} , so schneiden sich die beiden Kreise, welche die Strecken $a\alpha, b\beta$ zu Durchmessern haben, weil dieselben in einander übergreifen. Die Schnitte P, Q , symmetrisch zum Träger \mathfrak{A} gelegen, bestimmen ein Kreisbüschel, für das dieser Träger die Centrale ist; die weiteren Kreise desselben schneiden die weiteren Paare conjugirter Punkte der Involution ein, die so für die verschiedenen Kreise Durchmesser-Endpunkte werden. Zu einer zweiten elliptischen Involution auf \mathfrak{A} gehört ein zweiter Kreisbüschel, es seien P^1, Q^1 seine Grundpunkte. Da auch sie symmetrisch zu \mathfrak{A} liegen, so erhellt, dass der Kreis, der durch drei von den Punkten P, Q, P^1, Q^1 geht und daher seinen Mittelpunkt auf \mathfrak{A} hat, auch den vierten enthält; er gehört zu beiden Büscheln und schneidet in \mathfrak{A} das gemeinsame Paar der beiden Involution ein.

Wenn eine hyperbolische Involution vorliegt, so schneiden alle Kreise, welche über den Strecken der Punktepaare als Durchmessern construiert sind, denjenigen Kreis K_0 , welcher die Strecke zwischen den Doppelpunkten zum Durchmesser hat, rechtwinklig (Nr. 13), und umgekehrt, jeder Kreis, welcher diesen Kreis rechtwinklig schneidet und seinen Mittelpunkt auf dem Träger \mathfrak{A} der Involution hat, schneidet ein Paar derselben ein.

Liegt auf \mathfrak{A} noch eine elliptische Involution, so sei der zugehörige Kreisbüschel mit den Grundpunkten P, Q construiert. Wir haben einen durch P gehenden und den K_0 rechtwinklig schneidenden Kreis, der seinen Mittelpunkt auf \mathfrak{A} hat; in Folge dessen geht er durch Q , und gehört zu diesem Kreisbüschel; er schneidet also das gemeinsame Paar der Involutionen ein. Es mag genügen, die beiden einfacheren Fälle auf diese Weise zu behandeln.

Ferner, wenn $a\alpha, b\beta$ harmonisch sind, so schneiden sich die Kreise über deren Strecken als Durchmessern rechtwinklig in P, Q ; sind also m und m' die Mittelpunkte der Strecken und Kreise, so ist mPm' ein rechter Winkel; also geht der Kreis über mm' als Durchmesser durch P und Q , und mm' ist ein Paar der durch $a\alpha, b\beta$ bestimmten elliptischen Involution.

46 Auf einer Gerade sind drei Punktepaare $a\alpha_1, b\beta_1, c\gamma_1$ gegeben; wir fragen nach einem Punktepaare $\xi\xi'$, für welches:

$$(\xi\xi' a\alpha_1) = (\xi\xi' b\beta_1) = (\xi\xi' c\gamma_1)^*$$

ist; wir wissen, dass es aus den Doppelpunkten der Projectivität $a\beta c \cap a_1\beta_1 c_1$ besteht. Aus: $(\xi\xi' a\alpha_1) = (\xi\xi' b\beta_1)$ folgt $(\xi\xi' a\alpha_1) = (\xi' b\beta_1 b)$; also

* Wir schliessen nicht imaginäre Punkte ξ, ξ' aus, ev. in die Doppelverhältniss-Gleichheiten imaginäre Strecken $a\xi, a\xi', \dots$ einführend.

sind $\xi\xi', a_1b_1, a_1b_1$ Paare einer Involution; ebenso $\xi\xi', a_1c_1, a_1c_1$ und $\xi\xi', b_1c_1, b_1c_1$. Demnach ist $\xi\xi'$ das gemeinsame Paar zweier von diesen drei Involutionen, etwa der beiden ersten, welche durch a_1b_1, a_1b_1 , bzw. a_1c_1, a_1c_1 bestimmt sind, und gehört auch der dritten durch b_1c_1, b_1c_1 bestimmten an.

Halten wir die beiden ersten Paare a_1a_1, b_1b_1 fest, so bleibt die erste Involution fest.

Die Doppelpunkte aller Paare projectiver Punktreihen auf der nämlichen Gerade, welche in zwei Paaren entsprechender Punkte a_1a_1, b_1b_1 übereinstimmen, durchlaufen eine Involution, und zwar die durch die Paare a_1b_1, a_1b_1 bestimmte.

Insbesondere gilt auch: *Wenn a_1a_1, b_1b_1 zwei Paare einer hyperbolischen Involution sind und ξ, ξ' deren Doppelpunkte, so bilden $a_1b_1, a_1b_1, \xi\xi'$ (oder $a_1b_1, a_1b_1, \xi\xi'$) drei Paare einer andern Involution.**

Wir fanden eben: wenn $\xi\xi_1, \eta\eta_1$ zwei Paare entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen auf derselben Gerade und ξ, ξ' die Doppelpunkte sind, dann sind

$$\xi\xi', \xi\xi_1, \eta\eta_1$$

drei Paare einer Involution; nehmen wir an, dass ξ und η_1 sich in ζ vereinigen, so dass ξ_1 und η die diesem Punkte ζ in beiderlei Sinne entsprechenden Punkte sind, so wird ζ der eine Doppelpunkt der Involution, der andere ξ ist harmonisch zu ihm in Bezug auf $\eta\xi_1$ und auf $\xi\xi'$. Wegen der letzteren Harmonicität beschreiben, wenn ζ und mit ihm ξ_1, η bewegt werden, ζ und ξ eine Involution, von welcher ξ, ξ' die Doppelpunkte sind. Also:

Wenn zwei projective Punktreihen auf der nämlichen Gerade liegen, zu jedem Punkte ζ derselben die ihm in beiderlei Sinne entsprechenden Punkte construirt werden und in Bezug auf diese der ihm harmonisch zugeordnete ξ , so entsteht durch die Punktepaare $\zeta\xi$ eine Involution, welche dieselben (reellen oder imaginären) Doppelpunkte hat, wie die gegebenen projectiven Punktreihen.

Führen wir den Beweis für die Involution, ohne diese Doppelpunkte zu benützen.

Es seien, wie in der Anmerkung zu Seite 43, $r_1q_1 = 2d$ und die Potenz p , m die Mitte von r_1q_1 , ferner, wie oben, ξ_1 und η die beiden ζ entsprechenden Punkte; so ist

* Hieraus folgen die von *Hesse* (Journal für Mathematik Bd. 63 S. 179) angegebenen Sätze.

$$r\delta \cdot q_1\xi_1 = p \text{ oder } (m\delta + d)(m\xi_1 - d) = p, \quad m\xi_1 = \frac{p}{m\delta + d} + d, \quad \delta\xi_1 = \frac{p + d^2 - m\delta^2}{m\delta + d};$$

$$r\eta \cdot q_1\delta = p \text{ oder } (m\eta + d)(m\delta - d) = p, \quad m\eta = \frac{p}{m\delta - d} - d, \quad \delta\eta = \frac{p + d^2 - m\delta^2}{m\delta - d};$$

wegen der Harmonicität von δ und ξ zu ξ_1 und η ist (Nr. 11):

$$\frac{2}{\delta\xi} = \frac{1}{\delta\xi_1} + \frac{1}{\delta\eta};$$

also

$$\delta\xi = \frac{p + d^2 - m\delta^2}{m\delta}, \quad m\xi = \frac{p + d^2}{m\delta}, \quad m\delta \cdot m\xi = p + d^2.$$

Damit ist bewiesen, dass δ und ξ eine Involution bilden, und wir erkennen überdies, dass *die Mitte zwischen den Fluchtpunkten der projectiven Punktreihen der Mittelpunkt dieser Involution ist.* Die Doppelpunkte haben mit die (reelle oder imaginäre) Entfernung $\pm \sqrt{p + d^2}$, dieselbe wie (nach jener Anmerkung) die Doppelpunkte der gegebenen projectiven Punktreihen.

§ 17. Involution von Strahlenpaaren.

47 Der im vorigen Paragraphen durchgeführten Betrachtung steht eine gleichlaufende zur Seite für zwei in der Weise auf einander liegende (concentrische) projective Strahlbüschel, dass die entsprechenden gleichen Winkel des einen oder des andern Systems verkehrt auf einander fallen. Da diese Betrachtung der vorigen ohne Schwierigkeit nachgebildet werden kann, so genüge es, nur die Resultate anzuführen, welche auch unmittelbar durch Projection aus den vorigen abgeleitet werden können:

Liegen zwei projective concentrische Strahlbüschel in der Weise auf einander, dass die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel st , s_1t_1 verkehrt auf einander fallen: s auf t_1 und t auf s_1 ; so fallen die Schenkel sämtlicher Paare des einen oder andern Systems entsprechender gleicher Winkel (xy) und (x_1y_1) verkehrt auf einander, nämlich x auf y_1 und y auf x_1 , und zwar findet dieses für das eine oder andere System statt, je nachdem die Strahlbüschel gleichlaufend oder ungleichlaufend sind.

Wenn bei zwei concentrischen projectiven Strahlbüscheln die Schenkel irgend eines Paares entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander fallen, x, y auf y_1, x_1 , so fallen sämtliche Paare von Schenkeln entsprechender gleicher Winkel desjenigen Systems, welchem jenes Paar angehört, verkehrt auf einander.

Nur bei den Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel st , s_1t_1 , welche beiden Systemen angehören, kann sowohl das eine, wie

das andere System in der angegebenen Weise zur Deckung gebracht werden, indem man die Strahlbüschel einmal gleichlaufend, das andere Mal ungleichlaufend so auf einander legt, dass s auf t_1 und t auf s_1 fällt. Ein solches Doppelgebilde heisst eine *Involution von Strahlenpaaren*, die Schenkel irgend eines Paares verkehrt auf einander fallender entsprechender gleicher Winkel *ein Paar conjugirter Strahlen* der Involution oder kurz ein Paar, die Schenkel der auf einander fallenden entsprechenden rechten Winkel $s(t_1)$ und $t(s_1)$ ihre *Axen*. Wenn die die Involution erzeugenden Strahlbüschel gleichlaufend sind, so heisst sie eine *elliptische*, wenn sie ungleichlaufend sind, eine *hyperbolische*. Im letzteren Fall liegen die besonderen Strahlen g, g_1 auf einander und h, h_1 ebenfalls; dies sind die beiden Doppelstrahlen der hyperbolischen Involution; ihre Winkel werden durch die Axen gehälftet. Im ersteren Fall giebt es keine Doppelstrahlen, es fällt g auf h_1 und h auf g_1 , und diese besonderen Strahlen heissen *Potenzstrahlen*.

Sind x, ξ irgend zwei conjugirte Strahlen der Involution, m und μ die Axen, so ist immer (Nr. 27) sowohl:

$$\operatorname{tg}(mx) \cdot \operatorname{tg}(m\xi) = \operatorname{const.},$$

als auch:

$$\operatorname{tg}(\mu x) \cdot \operatorname{tg}(\mu \xi) = \operatorname{const.}$$

Diese beiden Constanten — die *Potenzen der Involution* — sind (Nr. 27) reciprok zu einander.

Bei der elliptischen Involution liegt von zwei conjugirten Strahlen x, ξ immer der eine in dem einen rechten Winkel $(m\mu)$ der Axen, der andere im Nebenwinkel: $x\xi$ und $m\mu$ trennen sich; die beiden Potenzen sind negativ. Bei der hyperbolischen aber liegen beide Strahlen x, ξ in demselben Winkel $(m\mu)$ und werden also von m und μ eingeschlossen; die beiden Potenzen sind positiv. Ist bei ihr d einer von den Doppelstrahlen, so ist:

$$\operatorname{tg} mx \cdot \operatorname{tg} m\xi = \operatorname{tg}^2 md;$$

also sind je zwei conjugirte Strahlen einer hyperbolischen Involution harmonisch zu den Doppelstrahlen; und umgekehrt: Alle Paare von Strahlen, welche zwei festen Strahlen harmonisch zugeordnet sind, bilden eine hyperbolische Involution, deren Doppelstrahlen die beiden festen Strahlen sind.

Bei der elliptischen Involution sind dann, durch Uebertragung dieses Satzes, je zwei conjugirte Strahlen harmonisch zu den imaginären Doppelstrahlen.

Eine Strahlinvolution ist ein in sich projectives Doppelgebilde von der Art, dass, wenn man aus jedem Paare conjugirter Strahlen einen

herausnimmt und diese Strahlen als ein Strahlbüschel $abc \dots$ auffasst, die conjugirten Strahlen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ein mit dem ersten projectives Strahlbüschel bilden und diese beiden Strahlbüschel in der angegebenen eigenthümlichen Weise auf einander liegen. Wir können dabei die conjugirten Strahlen eines Paares mit einander vertauschen, ohne jene projective Beziehung zu alteriren; denn, da die Strahlen eines solchen Paares nach der ursprünglichen Entstehung der Involution als $x(y_1)$ und $x_1(y)$ aufgefasst werden müssen, so können sie sowohl als x, x_1 gelten, wie auch als y_1, y . Die Strahlinvolution besitzt die Eigenschaft, dass sie auf jeder beliebigen Transversale eine Punktinvolution ausschneidet, deren Paare conjugirter Punkte durch die Paare conjugirter Strahlen fixirt werden, und umgekehrt, jede Punktinvolution mit irgend einem Punkte der Ebene durch Strahlen verbunden liefert eine Strahlinvolution; denn das Doppelt-Entsprechen überträgt sich.

Eine Strahlinvolution ist vollständig bestimmt durch zwei Paare (willkürlich anzunehmender) conjugirter Strahlen; zwischen drei Strahlenpaaren $a\alpha, b\beta, c\gamma$ finden die aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse entspringenden Relationen statt:

$$I^1. \quad \begin{cases} \frac{\sin(ab) \cdot \sin(a\beta)}{\sin(\alpha b) \cdot \sin(\alpha\beta)} = \frac{\sin(ac) \cdot \sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c) \cdot \sin(\alpha\gamma)}, \\ \frac{\sin(bc) \cdot \sin(b\gamma)}{\sin(\beta c) \cdot \sin(\beta\gamma)} = \frac{\sin(ba) \cdot \sin(b\alpha)}{\sin(\beta a) \cdot \sin(\beta\alpha)}, \\ \frac{\sin(ca) \cdot \sin(c\alpha)}{\sin(\gamma a) \cdot \sin(\gamma\alpha)} = \frac{\sin(cb) \cdot \sin(c\beta)}{\sin(\gamma b) \cdot \sin(\gamma\beta)}. \end{cases}$$

$$II^1. \quad \begin{cases} \sin(a\beta) \cdot \sin(b\gamma) \cdot \sin(c\alpha) = \sin(a\gamma) \cdot \sin(b\alpha) \cdot \sin(c\beta), \\ \sin(a\beta) \cdot \sin(bc) \cdot \sin(\gamma\alpha) = \sin(ac) \cdot \sin(b\alpha) \cdot \sin(\gamma\beta), \\ \sin(b\gamma) \cdot \sin(ca) \cdot \sin(\alpha\beta) = \sin(ba) \cdot \sin(c\beta) \cdot \sin(\alpha\gamma), \\ \sin(c\alpha) \cdot \sin(ab) \cdot \sin(\beta\gamma) = \sin(cb) \cdot \sin(a\gamma) \cdot \sin(\beta\alpha). \end{cases}$$

Es gilt wiederum folgendes Kennzeichen dafür, ob eine Strahlinvolution, welche durch zwei gegebene Paare conjugirter Strahlen $a\alpha, b\beta$ bestimmt wird, elliptisch oder hyperbolisch ist: *Wird das eine Strahlenpaar $a\alpha$ durch das andere $b\beta$ getrennt, also auch umgekehrt, (d. h. fällt b in einen Winkelraum $a\alpha$ und β in den Nebenwinkelraum), so ist die Involution elliptisch; wird dagegen das eine Strahlenpaar durch das andere nicht getrennt, so ist sie hyperbolisch.*

Wir nennen die beiden Lagen der Strahlenpaare auch, wie in Nr. 41, elliptisch und hyperbolisch.

48 Ein eigenthümliches Auftreten der Involution zeigt sich bei folgender Betrachtung: Sind drei beliebige durch einen Punkt gehende Strahlen a, b, c gegeben (oder drei Punkte auf einer Gerade), so kann

man zwei derselben in dreifacher Weise als zugeordnete Strahlen auffassen und zu dem jedesmaligen dritten den zugeordneten vierten harmonischen Strahl construiren; es seien also α, β, γ bestimmt durch die Beziehungen:

$$(cba\alpha) = -1, \quad (acb\beta) = -1, \quad (bac\gamma) = -1.$$

Aus: $(acb\beta) = (abc\gamma)$ folgt, dass b und c ein Paar, β und γ ein zweites Paar conjugirter Strahlen einer Involution sind, welche a zu einem Doppelstrahle hat; denn b und c entsprechen sich doppelt, und wenn dies bei einem Paare entsprechender Elemente der Fall ist, so gilt es auch bei den weiteren; solche sind β und γ , a und α . Der andere Doppelstrahl ist α , als der a zugeordnete vierte harmonische Strahl in Bezug auf b und c ; mithin müssen a und α auch harmonisch liegen zu β und γ , also:

$$(\gamma\beta\alpha\alpha) = -1,$$

ebenso

$$(\alpha\gamma\beta b) = -1$$

und

$$(\beta\alpha\gamma c) = -1.$$

Es findet daher zwischen den sechs Strahlen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ das eigenthümliche reciproke Verhalten statt, dass *die drei ersten von den drei letzten ebenso abhängen, wie diese von jenen.*

Aus der Relation:

$$(cba\alpha) = (\gamma\beta\alpha\alpha)$$

folgt sodann, dass $a\alpha, b\beta, c\gamma$ drei Paare conjugirter Strahlen einer Involution sind, und zwar einer elliptischen. Denn weil b, c zu a, α harmonisch sind, so fällt b in den einen und c in den andern Winkel $(a\alpha)$; der eine Winkel (ac) ist also ein Theil dieses letztern Winkels $(a\alpha)$, in welchem b nicht enthalten ist; folglich enthält dieser Winkel (ac) nicht b und daher den vierten harmonischen Strahl β , also liegen b und β in verschiedenen Winkeln $(a\alpha)$.

Ebenso sind je $a\alpha, b\gamma, c\beta$; $a\gamma, b\beta, c\alpha$; $a\beta, b\alpha, c\gamma$ in Involution; diese drei Involutionen sind hyperbolisch, die drei Paare einer jeden haben die Eigenschaft, dass die Strahlen, welche zu den beiden Strahlen eines Paares conjugirt sind in der früheren Involution, wiederum ein Paar derselben jetzigen bilden; so z. B. gehen durch die frühere die Paare $a\alpha, b\gamma, c\beta$ in $\alpha\alpha, \beta c, \gamma b$, also eins in sich selbst, die beiden andern in einander über.

Die Involution $a\alpha, b\beta, c\gamma$ ist elliptisch, ihre Doppelstrahlen i, i_1 also imaginär; nach der obigen Uebertragung auf imaginäre Gebilde müssen sie sowohl durch a, α , als auch durch b, β und durch c, γ har-

monisch getrennt werden; da aber auch b, c durch a, α harmonisch getrennt werden, so gehören ii_1 und bc einer Involution an, deren eines Doppelement a ist; wir haben demnach folgende projective Gebilde:

$$\begin{aligned} & ii_1 abc \bar{\wedge} i_1 iac b \\ \text{und ebenso:} & ii_1 abc \bar{\wedge} i_1 icba, \\ & ii_1 abc \bar{\wedge} i_1 ibac. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \text{und ebenso} & (ii_1 ab) = (i_1 iac) = (ii_1 ca) \\ & = (ii_1 bc); \\ \text{oder} & ii_1 abc \bar{\wedge} ii_1 bca \bar{\wedge} ii_1 cab. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe der Doppelverhältnisse $(iabc)$ und $(i_1 abc)$; setzen wir $(iabc) = x$, so folgt aus den Gleichheiten:

$$\begin{aligned} (iabc) & = (ibca) = (icab) \\ x & = \frac{1}{1-x} = \frac{x-1}{x}, \end{aligned}$$

d. h. die quadratische Gleichung:

$$x^2 - x + 1 = 0 = \frac{x^3 + 1}{x + 1},$$

deren beide imaginäre Wurzeln:

$$\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$$

die Werthe der Doppelverhältnisse $(iabc)$ und $(i_1 abc)$ sind, d. h. die imaginären cubischen Wurzeln der negativen Einheit, welche bekanntlich reciprok zu einander sind. Ein solches System von vier Elementen a, b, c, i oder a, b, c, i_1 nennt man ein *äquianharmonisches System von vier Elementen**, weil zu drei willkürlichen Elementen a, b, c das vierte i dadurch bestimmt wird, dass von den Werthen, welche das Doppelverhältniss $(iabc)$ durch cyklische Vertauschung der Elemente a, b, c annehmen kann, die drei sonst verschiedenen:

$$x, \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{x-1}{x}$$

einander *gleich* werden. Reciprok zu ihnen sind die drei andern ebenfalls gleichen $(iacb)$, $(icba)$, $(ibac)$. Mit diesen sind $(i_1 abc)$, $(i_1 bca)$, $(i_1 cab)$, mit jenen $(i_1 acb)$, $(i_1 cba)$, $(i_1 ba)$ gleich.

* Siehe *Cremona*, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, deutsch von Curtze (Greifswald 1865) Nr. 26.

Wir fanden i, i_1 als die beiden imaginären Doppelemente einer elliptischen Involution $a\alpha, b\beta, c\gamma$; sie sind aber auch, wie sich oben ergeben hat, die Doppelemente der Projectivität:

$$abc \bar{\wedge} bca$$

oder:

$$bca \bar{\wedge} cab,$$

die man eine *cyklische Projectivität* nennt.

Bei harmonischen Elementen sind dreimal zwei von den sechs Doppelverhältnissen gleich:

$$k = \frac{1}{k}, \quad 1 - k = 1 - \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{k}};$$

bei äquianharmonischen zweimal drei:

$$k = \frac{1}{1-k} = \frac{k-1}{k}, \quad \frac{1}{k} = 1 - k = \frac{k}{k-1}.$$

Wir müssen noch zwei besondere Fälle einer Strahlinvolution erwähnen, in welchen diese einen sehr einfachen Charakter annimmt.

Im allgemeinen giebt es in jeder Strahlinvolution nur ein Paar zu einander rechtwinkliger conjugirter Strahlen, die Axen derselben, weil es im allgemeinen bei zwei projectiven Strahlbüscheln nur ein Paar entsprechender rechter Winkel giebt. Andererseits dürfen wir aber zur Bestimmung der Strahlinvolution zwei Paare conjugirter Strahlen willkürlich annehmen, und es steht uns frei, diese Paare $a\alpha, b\beta$ beide rechtwinklig anzunehmen, also eine Strahlinvolution zu bilden, welche zwei Paare rechtwinkliger conjugirter Strahlen hat; sie muss elliptisch sein, weil zwei rechte Winkel mit demselben Scheitel einander trennen. Betrachten wir a, α als die Axen, so ist:

$$\operatorname{tg}(ax) \cdot \operatorname{tg}(a\xi) = \operatorname{const.} = \operatorname{tg}(ab) \cdot \operatorname{tg}(a\beta);$$

weil aber

$$(a\beta) = (ab) \pm 90^\circ \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}(a\beta) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(ab)}$$

ist, so folgt:

$$\operatorname{tg}(ax) \cdot \operatorname{tg}(a\xi) = -1;$$

und hieraus ergibt sich wieder, dass der Strahl ξ auf dem conjugirten Strahl x senkrecht stehen muss; also *sämmtliche Paare conjugirter Strahlen bilden rechte Winkel*. Eine solche Strahlinvolution, welche nur aus rechten Winkeln besteht, also nicht nur ein Axenpaar, sondern unendlich viele Axenpaare hat, soll *rechtwinklig, orthogonal oder auch circular* heissen. Wir schliessen also: *Wenn eine Strahlinvolution zwei Paare rechtwinkliger conjugirter Strahlen hat, so sind sämmtliche Paare conjugirter Strahlen rechtwinklig.*

Zweitens wissen wir, dass jede zwei conjugirten Strahlen einer hyperbolischen Strahlinvolution harmonisch zu den Doppelstrahlen sind; nehmen wir nun insbesondere diese beiden Doppelstrahlen, welche je zwei zusammenfallende conjugirte Strahlen vertreten, also zur Bestimmung der Involution gerade ausreichen, auf einander rechtwinklig an, so muss jedes Paar $x\xi$ mit ihnen gleiche Winkel bilden (Nr. 15). Hieraus geht eine Strahlinvolution besonders einfacher Art hervor, welche *gleichzeitig-hyperbolisch* heisst und die charakteristische Eigenschaft besitzt, dass *ihre Doppelstrahlen zu einander rechtwinklig sind*, also mit den Axen Winkel von 45^0 bilden; wir können auch sagen: Alle durch einen Punkt gehenden Paare von Strahlen, welche zu einem festen Strahl gleich geneigt sind, bilden eine gleichzeitig-hyperbolische Strahlinvolution.

⁵⁰ Die involutorische Lage zweier projectiver Gebilde tritt nicht allein bei gleichartigen Gebilden auf, deren Träger zusammenfallen, also bei zwei auf einander liegenden Punktreihen und bei zwei concentrischen Strahlbüscheln, sondern kann auch bei zwei verschiedenartigen Gebilden: einem Strahlbüschel und einer Punktreihe, deren Träger beliebig in der Ebene liegen und die in projectiver Beziehung stehen, vorkommen. Dies ist der Fall, wenn die beiden Gebilde $B (abc \dots x \dots)$ und $\mathfrak{A}_1 (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \xi_1 \dots)$ derartig liegen, dass jeder Strahl x des Strahlbüschels durch einen Punkt η_1 der Punktreihe geht, dessen entsprechender Strahl y den dem Strahle x entsprechenden Punkt ξ_1 enthält. Dies tritt immer ein, sobald es nur *einmal* eintritt, und es bilden alsdann die Strahlenpaare xy eine Strahl-, die Punktepaare $\eta_1 \xi_1$ eine Punktinvolution; diese liegt mit jener perspectiv. Wir sagen daher: Strahlbüschel (B) und Punktreihe (\mathfrak{A}_1) liegen *involutorisch*, ein Verhalten, welches sich z. B. bei Pol und Polare eines Kegelschnitts darbietet (Nr. 98).

Da jede der beiden Involutionen durch zwei Elementenpaare eindeutig bestimmt ist, so folgt, dass, *wenn zwei Strahlenpaare einer Strahlinvolution durch zwei Punktepaare einer Punktinvolution gehen, jedes Paar jener durch ein Paar dieser geht*; die Involutionen sind dann *perspectiv*.

Hieran können wir den Beweis eines wichtigen Satzes anschliessen:

Wenn zwei elliptische Punktinvolutionen gegeben sind, so giebt es immer zwei Punkte, aus denen sie je durch die nämliche Strahlinvolution projectirt werden.

Der gemeinsame Punkt der beiden Träger sei a und ihm seien in den beiden Involutionen die Punkte α, α' conjugirt. Dann giebt es nach Nr. 44 in jeder ein zweites Paar conjugirter Punkte, dass zu $a\alpha,$

bezw. aa' harmonisch ist. Wenn diese Paare $b\beta, b'\beta'$ sind, so ist sowohl $aa\beta\beta \cap aa'b'\beta'$, als $aa\beta\beta \cap aa'\beta'b'$. Da nun perspective Lage besteht, so laufen $\alpha\alpha', bb', \beta\beta'$ in einen Punkt B zusammen und $\alpha\alpha', b\beta', \beta\beta'$ in einen Punkt B_1 zusammen. Wird in beiden Fällen als vierter Strahl der nach a hinzugefügt, so haben wir durch jeden der beiden Punkte B, B_1 zwei Strahlenpaare, die durch zwei Punktepaare der einen und zugleich durch zwei Punktepaare der andern Involution gehen; die durch sie bestimmte Strahlinvolution ist daher zu beiden Punktinvolutionen perspectiv.

Bemerken wir, dass die beiden Punkte B, B_1 auf der Gerade liegen, welche die dem gemeinsamen Punkte der Träger der gegebenen Involutionen conjugirten Punkte verbindet.

Ebenso giebt es zu zwei elliptischen Strahlinvolutionen zwei Geraden, auf deren jeder sie dieselbe Punktinvolution einschneiden.

§ 18. Vorkommen von Involutionen beim vollständigen Viereck und Vierseit. Die Hauptsätze der Theorie der Transversalen.

Es sei $ABCD$ ein vollständiges Viereck, von dem sich die Gegen- 51
seiten:

$$\begin{aligned} BC, DA & \text{ in } x, \\ CA, DB & \text{ in } y, \\ AB, DC & \text{ in } z, \end{aligned}$$

den drei Diagonalepunkten, treffen; schneiden wir diese sechs Seiten durch irgend eine Transversale und bezeichnen (Fig. 24) die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} \text{der Gegenseiten } BC, DA & \text{ mit } a \text{ und } \alpha, \\ \text{„ „ } CA, DB & \text{ „ } b \text{ „ } \beta, \\ \text{„ „ } AB, DC & \text{ „ } c \text{ „ } \gamma, \end{aligned}$$

so ist zunächst:

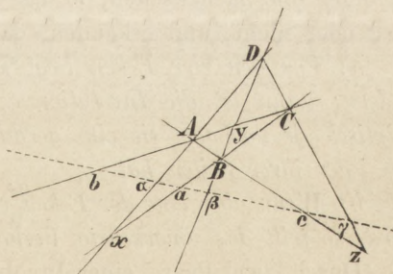
Fig. 24.

$$(axCB) = (xaBC).$$

Die Projection der Punkte a, x, C, B aus A auf die Transversale und der Punkte x, a, B, C aus D liefert die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(a\alpha bc) = (a\alpha b\gamma);$$

auf der Transversale finden sich also vier Paare entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen dergestalt, dass die entsprechenden gleichen Strecken $a\alpha$ und αa verkehrt auf einander fallen; $a\alpha, b\beta, c\gamma$ sind drei Paare conjugirter Punkte einer Involution; also gilt der Satz:



Die Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare eines vollständigen Vierecks mit einer beliebigen Transversale bilden drei Paare conjugirter Punkte einer Involution.

Dieser Satz enthält als speciellen Fall in sich die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierseits (Nr. 16); denn, geht die beliebige Transversale insbesondere durch zwei Diagonalkpunkte x, y , so werden diese die Doppelpunkte der Involution, und die Schnittpunkte des dritten Seitenpaares müssen zu ihnen harmonisch liegen (Nr. 38). Der Satz selbst ist aber wiederum nur ein specieller Fall eines allgemeineren, den wir später finden werden und bei welchem die ganze Involution zum Vorschein kommt (Nr. 168).

Aus dieser Eigenschaft des vollständigen Vierecks ergibt sich eine lineare *Construction* beliebig vieler Punktepaare einer Involution, von welcher zwei Paare conjugirter Punkte $a\alpha$ und $b\beta$ gegeben sind. Um nämlich zu irgend einem Punkte c des Trägers den conjugirten γ zu finden, ziehe man durch c eine beliebige Gerade, nehme auf ihr zwei beliebige Punkte A und B an und suche die Schnittpunkte $(Ab, Ba) = C$ und $(A\alpha, B\beta) = D$ auf; dann geht CD durch den gesuchten Punkt γ .

Nehmen wir an, dass a, α, b, c fest bleiben, während β sich bewegt, und infolge dessen auch γ ; so bleibt auch C fest, während D auf $A\alpha$ eine Punktreihe beschreibt, die zu der von β beschriebenen perspectiv ist; γ wiederum beschreibt eine Punktreihe, welche zu jener von D beschriebenen perspectiv ist. Folglich erzeugen β und γ projective Punktreihen auf derselben Gerade; und man erkennt leicht, dass sowohl in a , als in α diese beiden Punkte β und γ sich vereinigen.

52 Es drängt sich hierbei die Frage auf, wann bei einer Transversale die Involution elliptisch und wann sie hyperbolisch wird. Wir brauchen bei der Bewegung der Transversale nur zwei Paare conjugirter Punkte $a\alpha, b\beta$ zu verfolgen und nachzusehen, ob das eine Paar durch das andere getrennt wird oder nicht, und erkennen, dass zwei Fälle zu unterscheiden sind:

a) *Von den vier Ecken liegt keine innerhalb des Dreiecks der drei andern; dann ist die Involution auf der Transversale hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem sie eine gerade oder eine ungerade Zahl von Ecken auf jeder ihrer Seiten hat.*

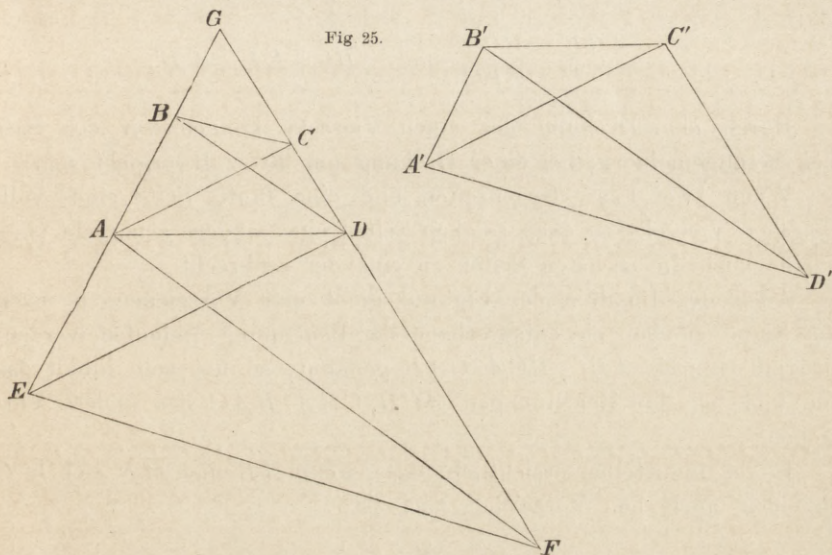
b) *Wenn aber eine der Ecken vom Dreiecke der andern eingeschlossen wird, so tritt das umgekehrte Verhalten ein.*

53 Durch zwei Paare einer Involution und einen einzelnen Punkt auf einer Gerade ist der diesem conjugirte Punkt eindeutig bestimmt. Also geht von allen vollständigen Vierecken, von denen zwei Paare Gegenseiten und eine fünfte Seite durch jene fünf Punkte gehen, auch die sechste Seite durch einen festen Punkt der Gerade, den sechsten Punkt in Involution zu jenen.

Lassen wir die Gerade ins Unendliche gehen und beschränken uns auf zwei Vierecke, so ergibt sich:

Wenn zwei Paare Gegenseiten und eine fünfte Seite eines vollständigen Vierecks mit eben solchen Seiten eines andern parallel sind, so sind es auch die sechsten Seiten.

Es ist wünschenswerth, für diesen Satz, der in der Statik werthvoll geworden ist, einen Beweis zu haben, der die unendlich ferne Gerade nicht voraussetzt. Da sind aber zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Offenbar ist jeder Seite des einen Vierecks



eine des andern zugeordnet und die Gegenseiten sind es dann auch; nun können drei Seiten des einen Vierecks und ihre zugeordneten im andern sich gleichartig verhalten, d. h. sie bilden in beiden Vierecken ein Dreieck oder gehen in beiden durch denselben Punkt; oder sie verhalten sich ungleichartig, d. h. sie bilden in dem einen Viereck ein Dreieck, während sie im andern durch einen Punkt gehen; und wenn die eine oder andere Zuordnung einmal statt hat, so findet sie durchweg statt.

Bewirken nun die fünf vorausgesetzten Parallelismen die erste (gleichartige) Zuordnung, so erkennt man die beiden Vierecke leicht als ähnliche und ähnlich gelegene Figuren, und der Parallelismus der sechsten Seiten folgt daraus.

Den Fall der andern Zuordnung, der gerade in der Statik auftritt, führen wir auf den ersten zurück.

Die beiden Vierecke seien $ABCD$ und $A'B'C'D'$; wir setzen voraus (Fig. 25): $AB \parallel A'B'$, $CD \parallel C'D'$; $AC \parallel A'C'$, $BD \parallel B'D'$; und AD nicht $\parallel A'D'$, sondern $\parallel B'C'$.

Dann legen wir an AD eine der $A'B'C'D'$ ähnliche und ähnlich gelegene Figur $EADF$ an, so dass E, A, D, F den A', B', C', D' homolog sind. Es fallen AE, AB , beide parallel zu $A'B'$, in dieselbe Gerade, ebenso DF und CD ; ferner werden AF und BD parallel, weil beide zu $B'D'$, und ebenso AC und ED , weil beide zu $A'C'$; endlich ist auch $EF \parallel A'D'$ nach dem ersten Falle.

Nennen wir nun G den Schnitt von EAB und FDC , so ist:

$$\frac{GA}{GE} = \frac{GC}{GD} \quad \text{und} \quad \frac{GB}{GA} = \frac{GD}{GF};$$

also:

$$\frac{GB}{GE} = \frac{GC}{GF} \quad \text{und} \quad BC \parallel EF \parallel A'D'.$$

Durch eine Drehung des einen Vierecks können wir den Satz noch verallgemeinern; bei einer Drehung um 90° z. B. ergibt sich:

Wenn zwei Paare Gegenseiten und eine fünfte Seite eines vollständigen Vierecks zu eben solchen Seiten eines andern senkrecht sind, so sind auch die sechsten Seiten zu einander senkrecht.

54 Auch den Inhalten der Figuren giebt man Vorzeichen, je nach dem Sinne, in dem sie entsprechend der Benennung umlaufen werden; wird ein Dreieck ABC, BCA, CAB genannt, so hat sein Inhalt das eine und bei den Benennungen ACB, CBA, BAC das andere Vorzeichen.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn AB und MN sich in C schneiden, auch dem Vorzeichen nach ist:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{MNA}{MNB};$$

denn AC und BC sind den Höhen der beiden Dreiecke aus A und B proportional, und dass die Formel auch in Bezug auf die Vorzeichen richtig ist, lehrt die Anschauung der beiden Fälle, wo C ausserhalb AB oder zwischen A und B liegt.

Eine Transversale schneide die Seiten $AB, BC, CD, \dots GA$ eines Polygons in $a, b, c \dots g$, so hat man, wenn M, N zwei auf sie gelegte Punkte sind:

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{MNA}{MNB}, \quad \frac{Bb}{Cb} = \frac{MNB}{MNC}, \quad \dots \quad \frac{Gg}{Ag} = \frac{MNG}{MNA};$$

also:

$$\frac{Aa}{Ba} \cdot \frac{Bb}{Cb} \cdot \dots \cdot \frac{Gg}{Ag} = +1.$$

Das Product der Verhältnisse, in denen eine Transversale die Seiten eines Polygons schneidet und welche cyklich gebildet sind, ist stets $+1$.

Oder das Product der einen nicht zusammenhängenden Abschnitte ist gleich dem der andern ebenfalls nicht zusammenhängenden:

$$Aa \cdot Bb \dots Gg = Ba \cdot Cb \dots Ag.$$

Bei einem Dreiecke bezeichnen wir die Schnitte mit BC, CA, AB lieber mit a, b, c und haben:

1.
$$\frac{Ba}{Ca} \cdot \frac{Cb}{Ab} \cdot \frac{Ac}{Bc} = +1$$

oder

$$Ba \cdot Cb \cdot Ac = Ca \cdot Ab \cdot Bc.$$

Dieser Satz wird nach *Menelaus*, einem griechischen Geometer aus dem ersten Jahrhundert n. Chr., benannt.*

Umgekehrt, wenn a, b, c so auf den Seiten eines Dreiecks liegen, dass diese Beziehung statt hat, dann befinden sie sich in gerader Linie.

Denn wenn ab die AB in c' trifft, so hat man:

$$\frac{Ba}{Ca} \cdot \frac{Cb}{Ab} \cdot \frac{Ac'}{Bc'} = 1,$$

woraus, in Verbindung mit der Voraussetzung, sich

$$\frac{Ac'}{Bc'} = \frac{Ac}{Bc}$$

ergibt, d. h. die Identität von c und c' , also die Geradlinigkeit von a, b, c .

Man kann den Satz von *Menelaus* auch aus der involutorischen Eigenschaft des vollständigen Vierecks ableiten; man fügt zu den Ecken von ABC als vierten Punkt einen unendlich fernen D zu; die parallelen Geraden AD, BD, CD mögen die Transversale in α, β, γ treffen; dann sind $a\alpha, b\beta, c\gamma$ in Involution. Also ist nach Nr. 40:

$$a\beta \cdot b\gamma \cdot c\alpha = a\gamma \cdot b\alpha \cdot c\beta,$$

oder:

$$\frac{a\beta}{a\gamma} \cdot \frac{b\gamma}{b\alpha} \cdot \frac{c\alpha}{c\beta} = +1;$$

aber wegen des Parallelismus ist:

$$\frac{a\beta}{a\gamma} = \frac{aB}{aC}, \quad \frac{b\gamma}{b\alpha} = \frac{bC}{bA}, \quad \frac{c\alpha}{c\beta} = \frac{cA}{cB},$$

demnach:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1.$$

* *Menelaus*, Sphaericorum libri tres (Lemma I im 3. Buche, dem als Theorema I der entsprechende sphärische Satz vorangeht).

55 Nehmen wir ferner an (Fig. 26), dass die Verbindungslinien eines Punktes O mit den Ecken A, B, C die Gegenseiten BC, CA, AB in a_1, b_1, c_1 treffen, so hat man

$$\frac{Ba_1}{Ca_1} = \frac{ABO}{ACO}, \quad \frac{Cb_1}{Ab_1} = \frac{BCO}{BAO}, \quad \frac{Ac_1}{Bc_1} = \frac{CAO}{CBO};$$

nun ist $ABO = -BAO$, u. s. w.; also:

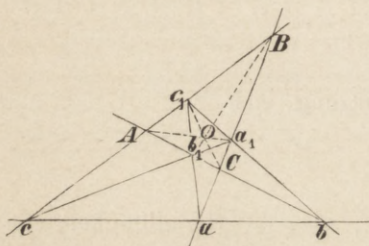
$$2) \quad \frac{Ba_1}{Ca_1} \cdot \frac{Cb_1}{Ab_1} \cdot \frac{Ac_1}{Bc_1} = -1.$$

Wenn also die Verbindungslinien eines Punktes mit den Ecken A, B, C eines Dreiecks die Gegenseiten in a_1, b_1, c schneiden, so gilt diese Beziehung 2.

(Satz von Ceva, italienischem Mathematiker des 17. Jahrhunderts.)*

Umgekehrt, wenn sie gilt, so laufen Aa_1, Bb_1, Cc_1 in einen Punkt zusammen. Man beweist, wie oben, wenn c'_1 der Schnitt der Verbindungslinie der Punkte (Aa_1, Bb_1) und C mit AB ist, die Identität dieses Punktes mit c_1 .

Fig. 26.



Im früheren Falle lehrt das positive Vorzeichen des Products der Theilverhältnisse, dass von den Punkten a, b, c entweder keiner oder zwei zwischen den Ecken liegen, während im jetzigen Falle, wo es negativ ist, alle drei Punkte a_1, b_1, c_1 zwischen den Ecken liegen oder nur einer.

Werden nun zu den drei in gerader Linie gelegenen Punkten a, b, c auf den Seiten von ABC die vierten harmonischen Punkte a_1, b_1, c_1 je in Bezug auf die Ecken construirt, so dass:

$$\frac{Ba_1}{Ca_1} = -\frac{Ba}{Ca}, \quad \frac{Cb_1}{Ab_1} = -\frac{Cb}{Ab}, \quad \frac{Ac_1}{Bc_1} = -\frac{Ac}{Bc},$$

so folgt aus 1. offenbar 2., also laufen Aa_1, Bb_1, Cc_1 in einen Punkt zusammen; und umgekehrt. So wird jeder Gerade abc ein Punkt zugeordnet; und umgekehrt. Man nennt Gerade und Punkt, die so zu einander gehören, *harmonische Polare und harmonischen Pol in Bezug auf das Dreieck*. Aber man erkennt auch leicht, dass:

$$\frac{Ba}{Ca} \cdot \frac{Cb_1}{Ab_1} \cdot \frac{Ac_1}{Bc_1} = +1, \quad \frac{Ba}{Ca} \cdot \frac{Cb}{Ab} \cdot \frac{Ac_1}{Bc_1} = -1,$$

dass also a, b_1, c_1 und ebenso a_1, b, c_1 und a_1, b_1, c je in gerader Linie liegen und Aa, Bb, Cc_1 ; Aa, Bb_1, Cc ; Aa_1, Bb, Cc je in einen Punkt zusammenlaufen.

* Natürlich findet sich bei den älteren Mathematikern nicht der Vorzeichen-Unterschied.

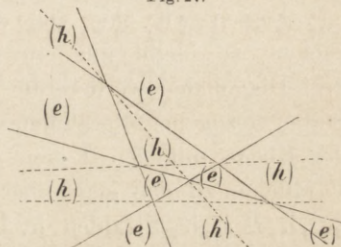
Diese Sätze bilden das Fundament einer besonders von französischen Geometern, namentlich *Carnot* (1753 — 1823), *Brianchon* (geb. 1785), *Poncelet* (1788 — 1867) ausgebildeten Theorie: Theorie der Transversalen.

Es bleibt noch übrig, die analoge Betrachtung für das vollständige 56 Vierseit anzustellen; da der Gang der Untersuchung aber genau derselbe ist, so genüge es, die Resultate anzugeben:

Werden die Gegeneckenpaare AB und CD , AC und BD , AD und BC eines vollständigen Vierseits $ABCD$ mit irgend einem Punkte der Ebene durch gerade Linien verbunden, so bilden dieselben drei Paare conjugirter Strahlen einer Strahlinvolution.

Sehen wir zu, wann die Involution elliptisch und wann sie hyperbolisch ist. Durch die vier geraden Linien A, B, C, D wird die ganze unendliche Ebene in elf Gebiete zerschnitten, von denen drei einen endlichen, die andern acht einen unendlich grossen Inhalt haben. Von diesen elf Räumen sind fünf von solcher Beschaffenheit, dass für ihre Punkte die Involution hyperbolisch wird; wir haben diese Räume in Fig. 27 mit (h) bezeichnet; die andern sechs Räume (e) aber liefern für jeden in ihnen enthaltenen Punkt eine elliptische Involution. Die Seiten des vollständigen Vierseits trennen die Räume (h) von den Räumen (e) .

Fig. 27.



Die fünf Räume (h) sind gerade diejenigen, in welche die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits hineinfallen, während die sechs Räume (e) von den Diagonalen nicht getroffen werden.

Insbesondere kann man nach solchen Punkten P in der Ebene fragen, für welche die Involution, welche nach den drei Paaren Gegenecken des vollständigen Vierseits $a\alpha, b\beta, c\gamma$ geht, orthogonal ist. Es giebt höchstens zwei solche Punkte in der Ebene; beschreibt man nämlich über $a\alpha$ und über $b\beta$ als Durchmesser zwei Kreise, so schneiden sich dieselben in den gesuchten Punkten P und P' ; denn die Involution aus jedem derselben enthält zwei rechtwinklige Paare und folglich sind alle Paare rechtwinklig. Es muss also auch der Kreis, welcher über $c\gamma$ als Durchmesser beschrieben wird, durch dieselben beiden Punkte P und P' gehen. Hieraus folgt, dass die Mitten der drei Diagonalen $a\alpha, b\beta, c\gamma$ eines vollständigen Vierseits auf einer Gerade liegen müssen, der Centrale dieses Kreisbüschels durch P, P' . Diese Eigenschaft bleibt erhalten, auch wenn die Kreise über $a\alpha$ und $b\beta$ als Durchmesser sich nicht treffen, also die Punkte P und P' nicht reell sind. (Siehe Nr. 210.)

Diese von *Gauss* (1777—1855) gefundene Eigenschaft kann man folgendermassen verallgemeinern: Sind a, b, c die Schnitte einer Geraden \mathcal{L} mit den drei Diagonalen $aa, b\beta, c\gamma$ des vollständigen Vierseits und a', b', c' zu ihnen harmonisch je in Bezug auf die Endpunkte $a, \alpha; b, \beta; c, \gamma$ der Diagonalen, so liegen diese Punkte wiederum in gerader Linie. Zum Beweise können wir unsern Involutionssatz benutzen; es sei U der Schnittpunkt von $\mathcal{L} = a\beta c$ mit $\mathcal{L}' = a'b'$, so sind die Strahlenpaare $U(a, \alpha; b, \beta; c, \gamma)$ in Involution, und zwar sind \mathcal{L} und \mathcal{L}' , weil harmonisch zu den beiden ersten Paaren, die Doppelstrahlen dieser Involution; also sind sie auch harmonisch zum dritten Paare; d. h. \mathcal{L}' geht durch c' , weil \mathcal{L} durch c geht.

Ist \mathcal{L} die unendlich ferne Gerade, so ergibt sich der Satz von *Gauss*.

Der Leser bilde zu dem allgemeinen Satze den entsprechenden für das vollständige Viereck und beweise ihn.

57 Lassen wir eine von den vier Seiten, \mathfrak{D} , in die Unendlichkeit rücken, so bleibt nur ein Dreiseit \mathfrak{ABC} im Endlichen zurück; die drei Diagonalen werden die durch die Ecken dieses Dreiseits zu den Seiten gezogenen Parallelen. Verbinden wir einen beliebigen Punkt P der Ebene mit den Ecken des Dreiseits und ziehen durch ihn die Parallelen zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten, so erhalten wir durch P sechs Strahlen in Involution; bezeichnen wir mit a, b, c die ersteren drei Strahlen und mit α, β, γ die letzteren, so gilt nach Nr. 47 II¹. die Relation:

$$\sin(a\beta) \sin(b\gamma) \sin(c\alpha) = \sin(\alpha\gamma) \sin(b\alpha) \sin(c\beta);$$

weil aber α, β, γ resp. parallel laufen zu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so können wir auch schreiben:

$$\frac{\sin(a\mathfrak{B})}{\sin(a\mathfrak{C})} \cdot \frac{\sin(b\mathfrak{C})}{\sin(b\mathfrak{A})} \cdot \frac{\sin(c\mathfrak{A})}{\sin(c\mathfrak{B})} = 1$$

oder

$$1'. \quad \frac{\sin(\mathfrak{B}a)}{\sin(\mathfrak{C}a)} \cdot \frac{\sin(\mathfrak{C}b)}{\sin(\mathfrak{A}b)} \cdot \frac{\sin(\mathfrak{A}c)}{\sin(\mathfrak{B}c)} = +1.$$

Wir nennen diese Quotienten die Theilverhältnisse, nach denen die Winkel $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}), (\mathfrak{C}\mathfrak{A}), (\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ durch die Geraden a, b, c getheilt werden, und haben den Satz: Verbindet man die Ecken eines Dreiseits \mathfrak{ABC} mit einem beliebigen Punkte durch Strahlen a, b, c , wodurch jeder Winkel des Dreiseits in zwei Theilwinkel $(\mathfrak{B}a), (\mathfrak{C}a); (\mathfrak{C}b), (\mathfrak{A}b); (\mathfrak{A}c), (\mathfrak{B}c)$ zerfällt, so ist das Product der drei cyklisch gebildeten Theilverhältnisse gleich $+1$.

Dies ist eine andere Form des Satzes von *Ceva*, in welcher er, ebenso wie der Satz von *Menelaus* rechts $+1$ hat. Und ähnlich lässt sich dem Satze von *Menelaus* eine andere Form geben:

Werden die drei Seiten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} eines Dreiecks von einer Transversale geschnitten und die Schnittpunkte mit den Gegenecken durch die Strahlen a_1, b_1, c_1 verbunden, so ist:

$$2'. \quad \frac{\sin(\mathfrak{B}a_1)}{\sin(\mathfrak{C}a_1)} \cdot \frac{\sin(\mathfrak{C}b_1)}{\sin(\mathfrak{A}b_1)} \cdot \frac{\sin(\mathfrak{A}c_1)}{\sin(\mathfrak{B}c_1)} = -1.$$

Und umgekehrt, wenn 1'. oder 2'. erfüllt wird, so laufen a, b, c in einen Punkt zusammen, bezw. die Schnitte $\mathfrak{A}a_1, \mathfrak{B}b_1, \mathfrak{C}c_1$ liegen in gerader Linie.

§ 19. Besondere Fälle projectiver Beziehung: ausgeartete Projectivität, Aehnlichkeit, Gleichheit.

Die perspective Lage zweier Gebilde führt zu einigen besonderen 58 Fällen projectiver Beziehung, die jetzt erörtert werden sollen. An den sich ergebenden Eigenschaften wird die Aufhebung der perspectiven Lage nichts ändern.

Es kann bei der perspectiven Lage eines Strahlbüschels und einer Punktreihe der in Nr. 2 ausgeschlossene besondere Fall eintreten, dass der Grundpunkt B des Strahlbüschels in dem Träger \mathfrak{A} der Punktreihe selbst liegt. Es treffen alsdann alle durch B gehenden Strahlen die Punktreihe \mathfrak{A} in einem einzigen Punkte, dem Punkte B selbst, mit Ausnahme eines einzigen durch B gehenden Strahls, desjenigen nämlich, welcher mit dem Träger \mathfrak{A} der Punktreihe zusammenfällt; jeder Punkt der Punktreihe darf als ein Schnittpunkt dieses besonderen Strahles mit dem Träger der Punktreihe angesehen werden, und die projective Beziehung beider Gebilde gestaltet sich in der eigentümlichen Weise, dass allen Strahlen des Strahlbüschels ein einziger Punkt der Punktreihe entsprechend ist mit Ausnahme eines Strahls, welchem sämtliche Punkte der Punktreihe entsprechen. Es ist wichtig, auch ein solches Verhalten, welches bei geometrischen Untersuchungen sich öfters darbietet, als projective Beziehung aufzufassen. Wir nennen eine solche Projectivität *ausgeartet* und die beiden Elemente \mathfrak{A} und B , denen je alle im andern Gebilde entsprechen, *singulär*.

Ebenso kann es bei der perspectiven Lage zweier Punktreihen vorkommen, dass das Perspectivitätscentrum (Nr. 18) in eine der beiden Geraden selbst zu liegen kommt; in diesem Fall werden die allen Punkten der andern Gerade entsprechenden Punkte in einem Punkte der ersteren, dem genannten Centrum, vereinigt sein mit Ausnahme eines Punktes, des Schnittpunktes beider Träger, welchem wiederum alle Punkte der ersten Gerade entsprechen. Ebenso ist es bei der perspectiven Lage zweier Strahlbüschel, wenn der perspective Durchschnitt (Nr. 18) durch einen der Grundpunkte selbst hindurchgeht; in

diesem Fall entspricht allen Strahlen des einen Strahlbüschels ein einziger Strahl des andern mit Ausnahme eines einzigen Strahles, dem wiederum sämtliche Strahlen des andern Strahlbüschels entsprechen; diese beiden singulären Strahlen sind der perspective Durchschnitt und die Verbindungslinie der Grundpunkte.

59 Wenn der Grundpunkt eines Strahlbüschels in die Unendlichkeit rückt, so geht es in ein Büschel von Parallellinien über. Schneidet man vier Strahlen a, b, c, d eines solchen Büschels mit zwei beliebigen Transversalen in a, b, c, d , bzw. a_1, b_1, c_1, d_1 , so folgt aus dem Parallelismus der a, b, c, d sofort:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a_1 c_1}{b_1 c_1}, \quad \frac{ad}{bd} = \frac{a_1 d_1}{b_1 d_1},$$

also

$$(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1).$$

Sonach werden die parallelen Strahlen a, b, c, d von allen Transversalen nach constantem Doppelverhältnisse geschnitten, und indem wir den Satz von Nr. 6 auch für den vorliegenden Fall perspectiver Gebilde geltend annehmen, erhalten wir dies constante Doppelverhältniss als das der vier Strahlen a, b, c, d , während die gewöhnliche Definition

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

versagt, da alle vier Winkel 0 sind.

Nehmen wir die Transversale senkrecht zu den Strahlen des Büschels und bezeichnen den Abstand der Parallelen x, y mit (xy) , so ist:

$$(abcd) = \frac{(ac)}{(bc)} : \frac{(ad)}{(bd)}.$$

Wenn zwei Punktreihen in perspectiver Lage ihr Perspectivitätscentrum im Unendlichen haben, also sämtliche Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel laufen, so gehen die Fluchtpunkte r und q_1 selbst ins Unendliche; denn der Strahl, welcher durch den unendlich entfernten Punkt q^∞ der ersten Punktreihe und durch das unendlich entfernte Perspectivitätscentrum geht, fällt ganz ins Unendliche, trifft also auch die andere Punktreihe in dem entsprechenden Punkte q_1 , der im Unendlichen liegen muss; es fallen also r und q^∞ zusammen, ebenso wie r_1^∞ und q_1 , oder *die unendlich entfernten Punkte beider Punktreihen sind entsprechend*. Die Gleichheit der Doppelverhältnisse vereinfacht sich in diesem Fall, weil die entsprechenden Punkte q^∞ und q_1^∞ beide unendlich entfernt sind; die Gleichung:

$$(abcdq^\infty) = (a_1 b_1 c_1 q_1^\infty)$$

geht über in:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a_1 c_1}{b_1 c_1},$$

d. h. *irgend zwei Abschnitte auf einer Punktreihe haben dasselbe Verhältniss zu einander, wie die entsprechenden Abschnitte der andern*, was ja auch bei der perspectiven Lage aus bekannten Elementarsätzen folgt. Aus diesem Grunde heissen zwei solche projective Punktreihen, bei denen entsprechende Strecken in constantem Verhältniss zu einander stehen, *projectiv-ähnliche* oder kürzer *ähnliche Punktreihen* und haben die charakteristische Eigenschaft, dass ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende Punkte sind; auch umgekehrt sind zwei projective Punktreihen immer ähnlich, sobald ihre unendlich entfernten Punkte entsprechend sind. Die Beziehung zweier ähnlichen Punktreihen ist schon durch *zwei* Paare entsprechender Punkte vollständig bestimmt, weil die unendlich fernen Punkte als das dritte Paar entsprechender Punkte von selbst gegeben sind. Jedem endlichen Punkte der einen Reihe muss immer ein endlicher der andern entsprechen. Entsprechende gleiche Strecken kann es bei zwei ähnlichen Punktreihen nicht geben, weil das constante Verhältniss zweier entsprechender Strecken im allgemeinen von 1 verschieden ist. Dies ist nur ein scheinbarer Widerspruch zu unserm allgemeinen Resultat, dass es bei zwei projectiven Punktreihen unendlich viele entsprechende gleiche Strecken giebt; denn da hier die unendlich entfernten Punkte q^∞ und q_1^∞ entsprechend sind, so giebt es entsprechende Strecken: $q^\infty \xi$ und $q_1^\infty \xi_1$, die, beide unendlich gross, als gleich angesehen werden können.

Im besonderen Falle aber kann es vorkommen, dass das constante 60 Verhältniss bei zwei ähnlichen Punktreihen = 1 ist; dann werden alle entsprechenden Strecken einander gleich sein; in diesem Fall heissen die Punktreihen *projectiv-gleich* oder *gleich*. Für die perspective Lage muss bei beliebiger Lage der Träger das Perspectivitätscentrum so im Unendlichen liegen, dass es einer von den unendlich entfernten Punkten der beiden Halbirungslinien der Winkel zwischen den Trägern ist. Die Beziehung zweier gleicher Punktreihen ist durch *ein einziges* Paar entsprechender Punkte vollständig, aber nicht eindeutig bestimmt, weil sie ausserdem die unendlich entfernten Punkte als zweites Paar entsprechender Punkte haben und irgend ein drittes Paar durch den Werth 1 des constanten Verhältnisses entsprechender Strecken erhalten wird, $\alpha \xi = \alpha_1 \xi_1$, wobei es allerdings zweifelhaft bleibt, ob der dem ξ entsprechende Punkt ξ_1 nach der einen oder andern Seite von α_1 liegt.

Ähnliche Punktreihen in perspectiver Lage erhält man auch bei beliebigem Perspectivitätscentrum, wenn die Träger parallel sind; sie werden gleich, wenn das Centrum unendlich fern oder auf der Mittelparallelen der Träger gelegen ist.

Werden zwei ähnliche Punktreihen beliebig auf einander gelegt, so giebt es immer ausser dem schon vorhandenen unendlich entfernten Doppelpunkte noch einen bestimmten zweiten Doppelpunkt, dessen Construction in Nr. 36 angegeben ist; die beiden Doppelpunkte sind also bei ähnlichen Punktreihen, welche auf einander liegen, immer reell.

Werden zwei gleiche Punktreihen beliebig auf einander gelegt und sind sie gleichlaufend, so fällt auch der zweite Doppelpunkt in die Unendlichkeit, was sich aus der Construction desselben ergibt, und keine zwei entsprechende Punkte fallen im Endlichen zusammen. Aber es kann auch vorkommen, dass alle Paare entsprechender Punkte über einander fallen; dies tritt immer ein, sobald irgend ein Paar entsprechender Punkte, ausser den unendlich entfernten, zusammenfällt. Sind dagegen die gleichen Punktreihen, welche auf einander liegen, ungleichlaufend, so giebt es ausser dem unendlich entfernten Punkte noch einen Doppelpunkt im Endlichen, welcher in der Mitte aller Paare entsprechender Punkte liegt. Zwei solche auf einander liegende gleiche Punktreihen, welche ungleichlaufend sind, constituiren daher immer eine Involution, diejenige, welche (Nr. 38) als gleichseitig-hyperbolische bezeichnet worden ist.

Zwei ähnliche (nicht gleiche) Punktreihen können nie so auf einander gelegt werden, dass sie eine Involution bilden, weil es bei ihnen keine entsprechenden gleichen Strecken von endlicher Länge giebt.

61 Die perspective Lage zweier Strahlbüschel kann dadurch eine besondere Vereinfachung erlangen, dass der perspective Durchschnitt in die Unendlichkeit rückt; dadurch werden je zwei entsprechende Strahlen parallel; die Strahlbüschel heissen *gleich*, weil je zwei entsprechende Winkel gleich sind:

$$(ab) = (a_1b_1).$$

Die Strahlbüschel haben gleichen Drehungssinn, sind gleichlaufend; aber auch bei endlicher Lage des perspective Durchschnitts können wir gleiche Strahlbüschel erhalten, wenn wir nämlich den Durchschnitt in der Mitte zwischen den Grundpunkten B, B_1 beider Strahlbüschel auf ihrer Verbindungslinie senkrecht annehmen; dann haben sie aber entgegengesetzten Drehungssinn, sind ungleichlaufend. Zwei gleiche Strahlbüschel sind durch *ein einziges* Paar entsprechender Strahlen vollständig bestimmt, sobald noch hinzugefügt wird, dass sie gleichlaufend oder ungleichlaufend sein sollen. Zwei gleiche und gleichlaufende (aber nicht perspective) Büschel ergeben sich, wenn wir zwei Punkte eines Kreises mit allen übrigen verbinden (Nr. 34).

Haben zwei gleichlaufende gleiche Strahlbüschel irgend ein Paar entsprechender Strahlen parallel, so sind sämmtliche Paare ent-

sprechender Strahlen parallel, ihre Schnittpunkte liegen also alle im Unendlichen. Die Verbindungslinie der Grundpunkte enthält aber bei dieser Lage zwei entsprechende Strahlen, die zusammenfallen, folglich sind die beiden Strahlbüschel in perspectiver Lage (Nr. 20). Da nun bei der perspectiven Lage zweier Strahlbüschel die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen, so halten wir dies consequent auch für diesen ausgezeichneten Fall fest und erhalten von neuem (Nr. 3): *Alle unendlich entfernten Punkte der Ebene liegen in einer Geraden.*

Werden zwei gleiche Strahlbüschel concentrisch gelegt, so fallen, wenn sie gleichlaufend sind, entweder gar keine entsprechenden Strahlen auf einander, oder es fallen sämtliche Paare entsprechender Strahlen auf einander, so dass also die Strahlbüschel identisch liegen.

Stehen irgend zwei entsprechende Strahlen bei zwei concentrischen gleichen Strahlbüscheln, welche gleichlaufend sind, auf einander senkrecht, so stehen alle entsprechenden Strahlen auf einander senkrecht; sie bilden eine Involution, und zwar die rechtwinklige. Dagegen sind sie nicht involutorisch, wenn der constante Winkel entsprechender Strahlen vom Rechten verschieden ist. Jeder Strahl x, y_1 halbirt dann den einen Winkel der beiden Strahlen x_1, y , die ihm in dem einen und dem andern Sinne entsprechen; denn es ist $yx = y_1x_1$ auch dem Vorzeichen nach.

Wenn aber die beiden concentrischen gleichen Strahlbüschel ungleichlaufend sind, so fallen zwei Paare entsprechender Strahlen auf einander; diese Doppelstrahlen sind zu einander rechtwinklig. Denn es leuchtet ein, dass jede von den Halbierungslinien der Winkel irgend eines Paares entsprechender Strahlen x, x_1 sich selbst entspricht und dass sie in Folge dessen auch Halbierungslinien der übrigen derartigen Winkel sind. Daraus ergibt sich, dass die Büschel immer *involutorisch* sind und zwar eine gleichseitig-hyperbolische Involution bilden.

Eine rechtwinklige Involution schneidet die unendlich entfernte Gerade G_∞ in einer ausgezeichneten Involution, welche elliptisch ist, weil die rechtwinklige es ist. Diese ausgezeichnete Involution I_∞ ist fest, unabhängig von der Lage der orthogonalen Involution, durch welche wir sie hervorgerufen dachten; jede andere orthogonale Involution giebt sie ebenso, weil zu jedem Strahlenpaare der einen ein Strahlenpaar der andern parallel ist und dieselben Schnitte mit G_∞ giebt.

Diese unbewegliche Involution I_∞ auf G_∞ besteht aus sämtlichen Paaren unendlich entfernter Punkte, die in je zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen; ihre beiden imaginären Doppelpunkte heissen die absoluten Punkte der Ebene. Diese Punkte sind also nicht reell, die Involution I_∞ aber ist es.

Bei zwei concentrischen gleichen und gleichlaufenden Strahlbüscheln halbirt, wie wir eben sagten, irgend ein Strahl z den einen Winkel der beiden Strahlen, die ihm in beiderlei Sinne entsprechen; der zu ihm harmonische ζ in Bezug auf diese beiden Strahlen ist daher der zu ihm senkrechte. Folglich ist (Nr. 46) die Involution, welche dieselben Doppelstrahlen hat wie die beiden gleichen und gleichlaufenden Büschel — welche Doppelstrahlen ersichtlich imaginär sein müssen —, eine orthogonale. Also:

Die (imaginären) Doppelstrahlen zweier concentrischer gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel gehen nach den absoluten Punkten.

Oder mit einer leichten Verallgemeinerung für nicht concentrische Büschel:

In jedem von zwei gleichen und gleichlaufenden Strahlbüscheln gehen die beiden Strahlen, die zu den entsprechenden parallel sind, nach den absoluten Punkten.

Es sei nun ein Kreis gegeben; die Büschel, welche zwei Punkte desselben mit allen seinen Punkten verbinden, sind gleich und gleichlaufend; zwei entsprechende Strahlen treffen sich immer auf dem Kreise, mithin auch die beiden Paare imaginärer paralleler entsprechender Strahlen, von denen wir eben sprachen. Deren Schnittpunkte sind die absoluten Punkte; folglich haben wir diese als dem Kreise angehörig anzusehen.

Jeder beliebige Kreis der Ebene trifft deren unendlich ferne Gerade in den beiden absoluten Punkten, weshalb sie auch die unendlich fernen (imaginären) Kreispunkte der Ebene genannt werden.

Liegen die beiden Grundpunkte der Büschel auf dem Kreise diametral gegenüber, so sind entsprechende Strahlen rechtwinklig zu einander; die projectiven Punktreihen, welche die Büschel auf G_∞ hervorrufen, sind involutorisch: sie bilden die Involution I_∞ .

Zwei (imaginäre) Strahlen, die nach demselben von den beiden absoluten Punkten gehen, sind zugleich parallel und senkrecht.

Stellt man eine beliebige elliptische Punktinvolution mit der gleichfalls elliptischen Involution I_∞ zusammen, so giebt der Satz in Nr. 50 über zwei elliptische Involutionen:

Zu jeder elliptischen Punktinvolution giebt es stets zwei reelle Punkte, aus deren jedem sie durch eine orthogonale Strahlinvolution projicirt wird. Sie befinden sich auf der Senkrechten, die auf dem Träger im Mittelpunkte errichtet ist, offenbar in gleicher Entfernung von demselben.

Die Kreise über den Strecken der Punktepaare als Durchmesser gehen durch sie; zwei dieser Kreise reichen zur Construction hin, sowie auch zum Beweise, dass die projicirenden Involutionen orthogonal sind.

Zweiter Abschnitt.

Der Kegelschnitt als Erzeugniss projectiver Gebilde.

§ 20. Zwei projective Punktreihen in allgemeiner Lage.

Nachdem wir in dem ersten Abschnitt aus der perspectiven Lage ⁶³ zweier Gebilde nicht nur das Wesen ihrer projectiven Beziehung abgeleitet, sondern auch besondere Elemente und eigenthümliche Verbindungen derselben genau untersucht haben, gehen wir nunmehr dazu über, zwei projective Gebilde in allgemeiner, d. h. nicht perspectiver Lage zu betrachten und zwar zunächst zwei projective Punktreihen. Während bei der perspectiven Lage zweier projectiver Punktreihen sämtliche Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte durch einen festen Punkt, das Perspectivitätscentrum, laufen, werden bei allgemeiner Lage diese Verbindungsstrahlen nicht mehr durch einen und denselben Punkt laufen, vielmehr in gewisser Weise die Ebene erfüllen, und das allgemeine Gesetz, welchem der Inbegriff dieser Strahlen unterworfen ist, haben wir nunmehr zu erforschen.

Hierzu bedarf es einer einfachen Construction, um beliebig viele von ihnen herzustellen; wir haben bereits oben (Nr. 19) Constructionen angegeben, durch welche aus drei gegebenen Paaren entsprechender Punkte, die zur Bestimmung der projectiven Beziehung erforderlich sind, beliebig viele andere, also beliebig viele Verbindungsstrahlen durch blosses Ziehen von geraden Linien ermittelt werden können. Jede dieser Constructionen enthielt noch eine gewisse Willkürlichkeit, welche passend benutzt zu ihrer Vereinfachung dient. Wir nehmen z. B. die erste. Seien aa_1, bb_1, cc_1 drei Paare entsprechender Punkte der gegebenen Punktreihen $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ und bezeichnen wir die Verbindungsstrahlen aa_1, bb_1, cc_1 resp. durch a, b, c ; sei ein beliebiger noch zu ermittelnder vierter Verbindungsstrahl $\chi\chi_1$ oder x , und B, B_1 die

Schnittpunkte x_b, x_c , so sind die vier Strahlen Ba, Bb, Bc, Bx mit den vier Strahlen $B_1a_1, B_1b_1, B_1c_1, B_1x_1$ projectiv, und da diese beiden Strahlbüschel $(B), (B_1)$ in der Verbindungslinie ihrer Grundpunkte $BB_1 = x$ zwei entsprechende Strahlen vereinigt haben, so liegen sie perspectiv, also die Schnittpunkte entsprechender Strahlen

$$(Ba, B_1a_1), (Bb, B_1b_1), (Bc, B_1c_1)$$

auf einer Gerade. Es fällt aber Bb mit Bb_1 und B_1c_1 mit B_1c zusammen (Fig. 28); also ist der Punkt (Bb, B_1b_1) der Punkt b_1 und (Bc, B_1c_1) ist c ;

der perspective Durchschnitt der Strahlbüschel B, B_1 ist die Verbindungslinie cb_1 ; es schneiden sich daher

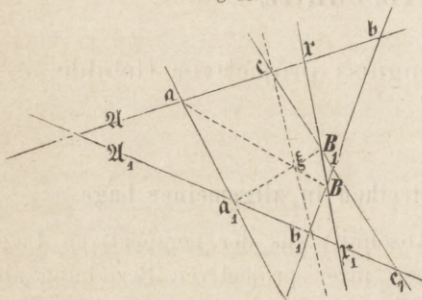
$$Ba, B_1a_1, cb_1$$

in einem Punkt ξ . Um also einen beliebigen Verbindungsstrahl x zu construiren, haben wir irgend einen Punkt ξ der Verbindungslinie cb_1 mit a und a_1 zu verbinden; trifft $a\xi$ den b

in B und $a_1\xi$ den c in B_1 , so ist BB_1 der gesuchte Strahl x . Hierdurch wird es leicht, beliebig viele Verbindungsstrahlen zu construiren; lassen wir den Punkt ξ die ganze Linie cb_1 durchwandern, so erhalten wir alle. Gelangt ξ insbesondere nach c oder b_1 , so erhalten wir den Träger \mathcal{A} der einen gegebenen Punktreihe, bezw. den Träger \mathcal{A}_1 der andern. *Die Träger der beiden gegebenen Punktreihen sind also selbst Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte.*

Zugleich erkennen wir, indem wir den Punkt ξ die ganze Gerade cb_1 durchlaufen lassen, dass die Strahlen $a\xi$ und $a_1\xi$ zwei perspective Strahlbüschel beschreiben, folglich die Punkte B und B_1 auf den beiden Geraden b und c zwei projective Punktreihen bilden; die Verbindungsstrahlen b und c werden also von sämtlichen andern x in zwei projectiven Punktreihen geschnitten, gerade so, wie die Träger der beiden ursprünglich gegebenen Punktreihen selbst; da aber an Stelle von b und c irgend zwei andere treten können, für die dasselbe gelten muss, so haben wir das wichtige Resultat gefunden. *Die Gesammtheit der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen trifft irgend zwei unter ihnen allemal in zwei projectiven Punktreihen.* Hierdurch verlieren die Träger der gegebenen beiden Punktreihen, indem sie selbst Verbindungsstrahlen sind, ihre hervorragende Stellung und treten in die Gesammtheit aller übrigen Verbindungs-

Fig. 28.



strahlen ein; denn es steht uns jetzt frei, irgend zwei andere als Träger zweier neuen erzeugenden Punktreihen aufzufassen, welche auf ihnen durch die Gesammtheit der Verbindungsstrahlen fixirt werden.

Es ergibt sich ferner, dass die Gesammtheit der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte durch irgend fünf, die willkürlich angenommen werden dürfen, vollständig bestimmt ist; denn man kann von diesen fünf Geraden zwei als die Träger zweier erzeugenden Punktreihen und die drei andern als drei Verbindungsstrahlen auffassen, welche drei Paare entsprechender Punkte auf jenen fixiren; hierdurch ist dann die ganze projective Beziehung der beiden Punktreihen bestimmt. Welche von den fünf Geraden wir als Träger auffassen wollen, bleibt ganz willkürlich.

Die obige Construction eines beliebigen Verbindungsstrahls x drückt andererseits eine Beziehung zwischen irgend sechs aus der Gesammtheit der Verbindungsstrahlen aus. Die sechs Verbindungsstrahlen bilden nämlich ein einfaches Sechseck $acB_1Bb_1a_1$, indem wir die Strahlen in der Reihenfolge $\mathfrak{A}, cc_1, \mathfrak{A}_1, bb_1, \mathfrak{A}, aa_1$ durchlaufen, wodurch die Punkte a, c, \dots Ecken werden; die drei Verbindungslinien:

$$Ba, \quad B_1a_1, \quad cb_1,$$

welche nach dem Obigen sich in einem Punkte schneiden müssen, erscheinen als Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken dieses Sechsecks (der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke), und wir können demnach folgende Beziehung zwischen irgend sechs Verbindungsstrahlen aussprechen:

Werden irgend sechs Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen als ein einfaches Sechseck aufgefasst, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken desselben (Hauptdiagonalen) in einem Punkte.

Die Gesammtheit der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte 64 besitzt ferner die charakteristische Eigenschaft, dass durch einen beliebigen Punkt der Ebene höchstens zwei gehen; denn verbinden wir einen beliebigen Punkt P der Ebene mit den beiden erzeugenden Punktreihen durch Strahlen, so erhalten wir in P zwei concentrische Strahlbüschel $P(abcd\dots)$, und $P(a_1b_1c_1d_1\dots)$, welche projectiv sind; diese haben (Nr. 32) zwei Doppelstrahlen, welche offenbar Verbindungsstrahlen sein müssen. Diese können zusammenfallen und imaginär werden; wir werden diejenigen Gebiete der Ebene aufzusuchen haben, in denen der Punkt P liegen muss, damit der eine oder andere Fall eintritt.

Verfolgen wir auf einem Träger \mathfrak{A} der beiden erzeugenden Punktreihen einen Punkt \mathfrak{x} , so sehen wir, dass durch ihn immer zwei

Verbindungsstrahlen gehen, nämlich der Träger \mathfrak{A} , welcher selbst ein solcher Strahl ist, und $\mathfrak{r}\mathfrak{x}_1$; nur einmal kommt es vor, dass diese beiden Strahlen zusammenfallen, nämlich dann, wenn der Punkt \mathfrak{x}_1 in den Schnittpunkt der beiden Träger rückt. Nennen wir diesen Schnittpunkt, als der zweiten Punktreihe angehörig, \mathfrak{f}_1 und seinen entsprechenden in der ersten Punktreihe \mathfrak{f} , so werden, wenn \mathfrak{x} in \mathfrak{f} sich befindet, die beiden durch ihn gehenden Verbindungsstrahlen in dem Träger \mathfrak{A} selbst zusammenfallen; durch den Punkt \mathfrak{f} , welchen wir den *Berührungspunkt* des Verbindungsstrahls nennen wollen (die Benennung wird bald ihre Erklärung finden) und welcher entsprechend ist dem im Schnittpunkte beider Träger liegenden Punkte der andern Punktreihe, geht also nur *ein* Verbindungsstrahl \mathfrak{A} . Ebenso verhält es sich mit dem Träger \mathfrak{A}_1 der zweiten Punktreihe, für welche der Punkt \mathfrak{e}_1 , der dem Schnittpunkte \mathfrak{e} von \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 als Punkt von \mathfrak{A} entspricht, Berührungspunkt wird.

Da wir nach dem Obigen an Stelle der beiden ursprünglichen Punktreihen zwei neue erzeugende Punktreihen setzen können, welche auf irgend zwei Verbindungsstrahlen durch die Gesammtheit aller übrigen fixirt werden, so giebt es auf jedem Verbindungsstrahle einen einzigen bestimmten Punkt, seinen Berührungspunkt, welcher die Eigenschaft hat, dass für ihn der Strahl der einzige Verbindungsstrahl ist, welcher durch ihn geht, während durch jeden andern seiner Punkte noch ein zweiter geht. Der Berührungspunkt eines Verbindungsstrahls ist daher auch als derjenige Punkt aufzufassen, in welchem dieser Strahl von einem unendlich nahe liegenden Verbindungsstrahl geschnitten wird. Es könnte fraglich erscheinen, ob auch bei einem Verbindungsstrahl, welcher mit diesem oder jenem andern als Träger projectiver Punktreihen zur Erzeugung der Gesammtheit der Verbindungsstrahlen zusammengefasst wird, immer ein und derselbe Punkt als Berührungspunkt hervorgeht. Dies Bedenken erledigt sich dadurch, dass immer dieselbe Gesammtheit der Verbindungsstrahlen resultirt, welche Punktreihen man auch als erzeugende annehmen mag; wenn daher bei einer Erzeugungsweise auf einem Verbindungsstrahl nur ein einziger Punkt sich vorfindet von der Beschaffenheit, dass für ihn dieser Strahl der allein hindurchgehende ist, so kann bei einer andern Erzeugungsweise kein neuer Punkt derselben Beschaffenheit auftreten, weil dieselbe Gesammtheit von Verbindungsstrahlen wieder auftritt. Es giebt also auf jedem nur einen einzigen bestimmten Berührungspunkt.

Fassen wir nun die Gesammtheit der Verbindungsstrahlen in der Weise auf, dass wir zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1$ die beiden Träger continuirlich durchlaufen lassen und auf der Verbindungslinie $\mathfrak{r}\mathfrak{x}_1$,

d. h. dem Verbindungsstrahl x , den jedesmaligen Berührungspunkt bestimmen, so wird bei dieser Bewegung der Strahl x ein gewisses Gebiet der Ebene durchstreifen, welches alle solchen Punkte P enthält, durch die je zwei Verbindungsstrahlen gehen. Dieses Gebiet wird begrenzt von einer gewissen Curve, dem Orte der Berührungspunkte auf sämtlichen Verbindungsstrahlen; durch jeden Punkt P dieses Ortes geht nur je ein Verbindungsstrahl, und der übrige Theil der Ebene enthält daher das Gebiet derjenigen Punkte P der Ebene, durch welche keine Verbindungsstrahlen gehen. Es giebt also zwei Gebiete der Ebene, das eine enthält nur solche Punkte P , durch die je zwei Verbindungsstrahlen gehen, das andere solche Punkte P , durch welche keiner geht, und beide Gebiete werden von einander getrennt durch den Ort derjenigen Punkte, für welche es immer nur einen durchgehenden Verbindungsstrahl giebt. Diese Grenzcurve ist der Ort sämtlicher Berührungspunkte, sie heisst das *Erzeugniss der beiden projectiven Punktreihen* und ist der eigentliche Gegenstand unserer Untersuchung. Wir können uns ihre Entstehung in der Weise anschaulich machen, dass wir uns die ganze unendliche Ebene schwarz denken und jeden Verbindungsstrahl als unendlich lange gerade Linie von weisser Farbe; die Gesammtheit der Verbindungsstrahlen wird dann einen gewissen unendlich grossen Theil der Ebene weiss machen und den übrigen Theil schwarz lassen; die Grenze zwischen dem schwarzen und weissen Theil der Ebene ist eben die zu untersuchende Curve.

Dass in der That die Ortscurve der Berührungspunkte die Grenze zwischen beiden Gebieten der Ebene bildet, machen wir uns noch in folgender Weise klar: Seien a und b irgend zwei Verbindungsstrahlen, α und β die respectiven Berührungspunkte auf ihnen und s ihr Schnittpunkt. Halten wir den einen Strahl a mit seinem Berührungspunkt α fest, verändern aber auf ihm den Schnittpunkt s , so verändert sich der zweite Strahl b und der ihm zugehörige Berührungspunkt β ; die Verbindungslinie $\alpha\beta$ ist eine veränderliche Sehne der Ortscurve, deren einer Endpunkt α fest bleibt, während der andere β sich auf ihr bewegt. Rücken wir nun mit dem Punkte s allmählich nach α , bis er in α hineinfällt, so wird auch der zweite Strahl b mit a zusammenfallen müssen, denn durch α giebt es nur einen Verbindungsstrahl; der Berührungspunkt β muss aber auch in α hineinfallen, denn der Verbindungsstrahl a besitzt nur einen einzigen Berührungspunkt α . Dieser Strahl a ist also die Grenzlage einer veränderlichen Sehne $\alpha\beta$, deren einer Endpunkt α fest bleibt, während der andere β allmählich auf der Ortscurve nach α hinrückt. Eine solche Grenzlage einer veränderlichen Sehne nennt man bekanntlich *Tangente* der Curve und den

festen Punkt ihren Berührungspunkt; die sämtlichen Verbindungsstrahlen sind also Tangenten einer gewissen Ortscurve und die Punkte, in welchen sie die Ortscurve berühren, diejenigen Punkte, welchen wir vorhin den Namen *Berührungspunkte* beigelegt haben, wodurch die Benennung gerechtfertigt wird. Da jeder Verbindungsstrahl Tangente der Ortscurve ist und nur einen Punkt, den Berührungspunkt, mit ihr gemein hat, so bildet die Ortscurve der Berührungspunkte die Grenze zwischen denjenigen beiden Gebieten der Ebene, deren eines von sämtlichen Verbindungsstrahlen erfüllt wird, während das andere von keinem getroffen wird. Fassen wir das gewonnene Resultat noch einmal zusammen:

Die Gesamtheit der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen in allgemeiner Lage, deren Träger auch unter den Verbindungsstrahlen sich befinden, umhüllt eine gewisse krumme Linie, welche mit jedem solchen Strahl nur einen Punkt, den Berührungspunkt, gemein hat und der Ort dieser Berührungspunkte ist. Sie theilt die ganze Ebene in zwei Gebiete, von denen das eine alle solche Punkte enthält, durch welche je zwei reelle Verbindungsstrahlen (Tangenten der Curve) gehen, während das andere diejenigen Punkte enthält, durch welche keine gehen. Durch jeden Punkt der Curve selbst geht nur ein Verbindungsstrahl, die Tangente an ihr. Diese als das Erzeugniß zweier projectiver Punktreihen definirte Curve nennen wir „Kegelschnitt“; sie ist zweiter Klasse, weil von einem beliebigen Punkte der Ebene sich höchstens zwei Tangenten an sie ziehen lassen.

Die vorhin für die Gesamtheit der Verbindungsstrahlen gefundenen Eigenschaften lassen sich nach dieser Definition als Sätze für die Tangenten eines Kegelschnitts aussprechen, z. B.:

Irgend zwei Tangenten eines Kegelschnitts werden von sämtlichen in zwei projectiven Punktreihen geschnitten.

Werden irgend sechs Tangenten eines Kegelschnitts zu einem einfachen Sechseck verbunden, so schneiden sich die drei Hauptdiagonalen desselben in einem Punkte.

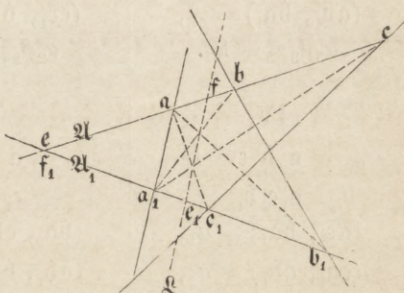
Der zweite dieser Sätze wurde von *Brianchon* gefunden und wird nach ihm benannt.

§ 21. Die Berührungspunkte auf den Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte.

65 Es ist zunächst erforderlich, den Berührungspunkt auf jedem Verbindungsstrahl zu construiren, um von der zu untersuchenden Curve ein deutliches Bild zu erhalten. Seien aa_1, bb_1, cc_1 drei Paare entsprechender Punkte zweier erzeugender projectiver Punktreihen $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$,

so können wir die in Nr. 19 angegebene erste Construction beliebig vieler anderer Verbindungsstrahlen dadurch sehr vereinfachen, dass wir die Punkte B und B_1 in ein Paar entsprechender Punkte, z. B. a_1 und a selbst legen; wir ziehen also ab_1, ac_1 und a_1b, a_1c ; die Schnittpunkte (ab_1, a_1b) , (ac_1, a_1c) bestimmen die gerade Linie \mathcal{Q} , auf welcher sämtliche Schnittpunkte (ax_1, a_1x) liegen, nämlich den perspectiven Durchschnitt zweier Strahlbüschel, welche in a und a_1 ihre Grundpunkte haben und beziehentlich mit den Punktreihen $a_1b_1c_1\dots$ und abc perspectiv liegen, also projectiv mit einander sind und perspectiv liegen, weil die Verbindungslinie der Grundpunkte zwei entsprechende Strahlen enthält. Jeder Punkt ξ dieser Gerade \mathcal{Q} mit a und a_1 verbunden liefert Strahlen $a\xi$ und $a_1\xi$, welche \mathcal{U}_1 und \mathcal{U} in zwei entsprechenden Punkten ξ_1 und ξ treffen, also den Verbindungsstrahl x liefern. Die Gerade \mathcal{Q} schneidet aber die Träger der beiden Punktreihen in zwei Punkten f und e_1 , deren entsprechende nach der eben angegebenen Construction in dem Schnittpunkte der beiden Träger vereinigt liegen müssen: f_1 und e

Fig 29.



(Fig. 29). Da nun nach Nr. 64 diese Punkte f und e_1 , welche den im Schnittpunkte der beiden Träger vereinigten Punkten entsprechen, die Berührungspunkte auf diesen Trägern als Verbindungsstrahlen sind, so geht die gerade Linie \mathcal{Q} durch die gesuchten Berührungspunkte und bestimmt dieselben; weil es aber auf jedem Verbindungsstrahl (wie ee_1 und ff_1) nur einen Berührungspunkt giebt, so bleibt die Gerade \mathcal{Q} unverändert, wenn wir zu ihrer Construction statt der Paare aa_1, bb_1, cc_1 irgend welche andere Paare entsprechender Punkte nehmen; also gilt der Satz:

Wenn man aus zwei projectiven Punktreihen irgend zwei Paare entsprechender Punkte $x\xi_1$ und $y\eta_1$ herausnimmt, so liegt der Schnittpunkt $(x\eta_1, \xi_1y)$ immer auf einer und derselben festen Gerade \mathcal{Q} , welche durch die beiden Berührungspunkte der Träger beider Punktreihen hindurchgeht, die den im Schnittpunkte vereinigt liegenden Punkten entsprechen.

Dies lässt sich auch folgendermassen als Satz aussprechen:

66

Sind auf einer Gerade drei beliebige Punkte a, b, c und auf einer zweiten Gerade drei beliebige Punkte a_1, b_1, c_1 gegeben, so liegen die drei Schnittpunkte:

$$(ab_1, a_1b), \quad (bc_1, b_1c), \quad (ca_1, c_1a)$$

auf einer Gerade.

Dieser Satz ist einer Erweiterung fähig, da die Zuordnung des einen Tripels von Punkten zu dem andern in sechsfacher Weise geschehen kann, weil drei Punkte sechs Permutationen zulassen; wir erhalten daher sechs solcher geraden Linien, die in eigenthümlichem Zusammenhange mit einander stehen; wir bezeichnen bei diesen sechs Zuordnungen die Schnittpunkte in folgender Weise:

I.	II.	III.
$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$
$\frac{a_1 b_1 c_1}{(bc_1, cb_1) = \alpha_3,$	$\frac{b_1 c_1 a_1}{(aa_1, cb_1) = \alpha_2,$	$\frac{c_1 a_1 b_1}{(aa_1, bc_1) = \alpha_1,$
$(ca_1, ac_1) = \beta_3,$	$(bb_1, ac_1) = \beta_2,$	$(bb_1, ca_1) = \beta_1,$
$(ab_1, ba_1) = \gamma_3,$	$(cc_1, ba_1) = \gamma_2,$	$(cc_1, ab_1) = \gamma_1,$
$\frac{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 = \mathcal{L}_1.$	$\frac{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 = \mathcal{L}_2.$	$\frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \mathcal{L}_3.$
IV.	V.	VI.
$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$
$\frac{a_1 c_1 b_1}{(ac_1, ba_1) = a_1,$	$\frac{c_1 b_1 a_1}{(ba_1, cb_1) = b_1,$	$\frac{b_1 a_1 c_1}{(ac_1, cb_1) = c_1,$
$(ca_1, ab_1) = a_2,$	$(ab_1, bc_1) = b_2,$	$(ca_1, bc_1) = c_2,$
$(bb_1, cc_1) = a_3,$	$(aa_1, cc_1) = b_3,$	$(aa_1, bb_1) = c_3,$
$\frac{a_1 a_2 a_3 = \mathcal{L}_4.$	$\frac{b_1 b_2 b_3 = \mathcal{L}_5.$	$\frac{c_1 c_2 c_3 = \mathcal{L}_6.$

Aus dem Schema I., II., III. lesen wir die Identität folgender Verbindungslinien ab:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 &= aa_1, & \beta_1 \beta_2 &= bb_1, & \gamma_1 \gamma_2 &= cc_1, \\ \alpha_2 \alpha_3 &= cb_1, & \beta_2 \beta_3 &= ac_1, & \gamma_2 \gamma_3 &= ba_1, \\ \alpha_3 \alpha_1 &= bc_1, & \beta_3 \beta_1 &= ca_1, & \gamma_3 \gamma_1 &= ab_1 \end{aligned}$$

und aus dem Schema IV., V., VI.:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= ba_1, & a_2 b_2 &= ab_1, & a_3 b_3 &= cc_1, \\ b_1 c_1 &= cb_1, & b_2 c_2 &= bc_1, & b_3 c_3 &= aa_1, \\ c_1 a_1 &= ac_1, & c_2 a_2 &= ca_1, & c_3 a_3 &= bb_1; \end{aligned}$$

so dass je drei Linien, z. B. $\alpha_1 \alpha_2, aa_1, b_3 c_3$, identisch sind.

Folglich ist nach Schema IV.

$$\begin{aligned} (\beta_2 \beta_3, \gamma_2 \gamma_3) &= a_1, \\ (\beta_3 \beta_1, \gamma_3 \gamma_1) &= a_2, \\ (\beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2) &= a_3, \end{aligned}$$

und da die drei Punkte a_1, a_2, a_3 in einer geraden Linie \mathcal{L}_4 liegen, so folgt, dass die beiden Dreiecke $\beta_1 \beta_3 \beta_3$ und $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ perspectiv liegen

(Nr. 21), d. h. $\beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2, \beta_3\gamma_3$ oder die drei Linien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ durch einen Punkt laufen. Ebenso, weil

$$\begin{aligned}(a_1b_1, a_2b_2) &= \gamma_3, \\ (b_1c_1, b_2c_2) &= \alpha_3, \\ (c_1a_1, c_2a_2) &= \beta_3\end{aligned}$$

und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ in gerader Linie \mathcal{L}_1 liegen, laufen $\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6$ durch einen Punkt. *Es laufen also von den sechs erhaltenen Linien \mathcal{L} drei durch einen Punkt und die drei andern ebenfalls durch einen Punkt*, und es ist unmittelbar zu erkennen, dass die 15 Geraden: $aa_1, ab_1, ac_1, ba_1, bb_1, bc_1, ca_1, cb_1, cc_1$ und $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6$, welche sich in den 18 Punkten $a_1, \dots, \gamma_3, a_1, \dots, c_3$ und den beiden Schnittpunkten $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3$ und $\mathcal{L}_4\mathcal{L}_5\mathcal{L}_6$ treffen, genau dieselbe gegenseitige Lage haben, wie bei der in Nr. 23 beschriebenen Figur.

Der vorige Satz lässt sich auch in anderer Form aussprechen, wobei er als specieller Fall eines allgemeineren Satzes auftritt, von dem später die Rede sein wird. Die sechs Punkte a, b, c, a_1, b_1, c_1 , von denen drei und drei auf zwei Geraden liegen, lassen sich als die Ecken eines einfachen Sechsecks auffassen, z. B. $ab_1ca_1bc_1$; in dieser Reihenfolge erscheinen ab_1 und a_1b als gegenüberliegende Seiten, ebenso bc_1 und b_1c , endlich auch ca_1 und c_1a . Der obige Satz lautet also auch so: *Bei einem einfachen Sechseck, dessen Ecken zu drei und drei auf zwei geraden Linien liegen, schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche auf einer Gerade liegen*, und die sechs Sechsecke, welche sich aus denselben Eckpunkten herstellen lassen, sind folgende:

$$\begin{cases} ab_1ca_1bc_1, \\ ac_1cb_1ba_1, \\ aa_1cc_1bb_1, \\ \\ ac_1ca_1bb_1, \\ aa_1cb_1bc_1, \\ ab_1cc_1ba_1; \end{cases}$$

die für die ersten drei Sechsecke erhaltenen Geraden laufen durch einen Punkt und die für die andern drei Sechsecke erhaltenen Geraden durch einen andern Punkt.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zu dem Gegenstande unserer 67 Betrachtung zurück. Es sei \mathcal{D} irgend ein Punkt der Gerade \mathcal{L} von Nr. 65 und durch ihn werde ein Strahl gezogen, welcher \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 in γ und η_1 trifft, so begegnet sich $\gamma_1\eta$ mit $\gamma\eta_1$ auf \mathcal{L} , also geht sie auch durch \mathcal{D} . Von den projectiven Büscheln, durch welche die

gegebenen Punktreihen aus \mathfrak{D} projectirt werden, fallen die Strahlen $\mathfrak{D}\eta_1$ und $\mathfrak{D}\xi_1$ auf die Strahlen $\mathfrak{D}\xi$ und $\mathfrak{D}\eta$; folglich sind sie involutorisch.

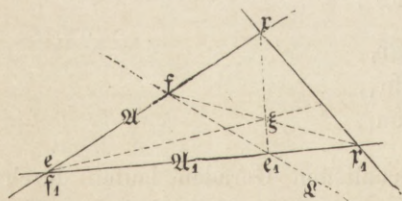
Aus jedem Punkte der Gerade \mathfrak{Q} werden die gegebenen projectiven Punktreihen durch involutorische projective Strahlbüschel projectirt, und nur aus den Punkten dieser Gerade.

Denn wenn \mathfrak{D} ein Punkt ist, für welchen die projectirenden Büschel involutorisch sind, so müssen die Strahlen $\mathfrak{D}e_1$ und $\mathfrak{D}f_1$, die den sich deckenden Strahlen $\mathfrak{D}e$ und $\mathfrak{D}f$ entsprechen, ebenfalls sich decken; folglich muss \mathfrak{D} auf $e_1f_1 = \mathfrak{Q}$ liegen.

Diese Gerade \mathfrak{Q} geht durch die Berührungspunkte der beiden Träger.

Es bleibt noch übrig, auf einem beliebigen andern Verbindungsstrahl den Berührungspunkt zu ermitteln; seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ die beiden Träger, welche von irgend drei Verbindungsstrahlen a, b, c resp. in den Punktepaaren $a\alpha_1, b\beta_1, c\gamma_1$ getroffen werden, so wird nach der Construction in Nr. 63 ein beliebiger anderer Verbindungsstrahl dadurch gefunden, dass man $c\beta_1$ zieht und irgend einen Punkt ξ dieser Gerade mit a und α_1 verbindet; $a\xi$ trifft b in B , $\alpha_1\xi$ trifft c in B_1 , und BB_1 ist ein Verbindungsstrahl. Fassen wir b und c als die Träger zweier neuen Punktreihen auf, welche dieselbe Gesamtheit der Verbindungsstrahlen liefern, von denen a, \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 drei zur Bestimmung erforderliche sind, so erscheinen B, B_1 als entsprechende Punkte dieser beiden neuen Punktreihen, und der Berührungspunkt auf b ist derjenige Punkt auf b , welcher entsprechend ist dem Schnittpunkte bc als einem Punkte von c . Wir ziehen also von α_1 nach diesem Schnittpunkte bc die Gerade, welche in ξ_0 die Gerade $c\beta_1$ trifft; dann wird $a\xi_0$ den Strahl b in dem gesuchten Berührungspunkte t treffen. In gleicher Weise können wir den Berührungspunkt auf c ermitteln; wir

Fig. 30.



ziehen von a nach bc die Linie, welche in ξ'_0 die Gerade $c\beta_1$ trifft, dann wird $a_1\xi'_0$ den Strahl c in dem gesuchten Berührungspunkte t' treffen. Wir können aber auch die Berührungspunkte auf b und c gleichzeitig finden, indem wir b und c als Träger und $a, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ als

drei Verbindungsstrahlen auffassen und dann nach der vorhin angegebenen Construction jene Gerade \mathfrak{Q} ermitteln, welche der Ort der Punkte (x_1y_1, x_1y) ist und durch die beiden Berührungspunkte auf b und c gehen muss. Die vorige Construction vereinfacht sich wesentlich, wenn wir statt der drei Punktepaare $a\alpha_1, b\beta_1, c\gamma_1$ folgende wählen: $ee_1, \xi\xi_1, ff_1$, welche so gewählt sind (Fig. 30), dass e und f_1 im Schnitt-

punkte der beiden Träger $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ vereinigt liegen, e_1 und f die Berührungspunkte auf \mathcal{A}_1 und \mathcal{A} sind und $\mathcal{r}\mathcal{r}_1$ ein beliebiger Verbindungsstrahl ist, dessen Berührungspunkt gesucht wird. Die Gerade cb_1 wird dann $f\xi_1$; der Schnittpunkt (b_1b_1, cc_1) wird ($\mathcal{r}\mathcal{r}_1, ff_1$), d. h. der Punkt \mathcal{r} ; a_1 ist der Berührungspunkt e_1 und a ist der Schnittpunkt e ; man ziehe also $e_1\mathcal{r}$, welche $f\xi_1$ in ξ treffe, dann wird $e\xi$ den Verbindungsstrahl $\mathcal{r}\mathcal{r}_1$ in dem gesuchten Berührungspunkt treffen. Um also auf irgend einem Verbindungsstrahl $\mathcal{r}\mathcal{r}_1$ den Berührungspunkt zu finden, verbinde man die Punkte \mathcal{r}_1 und \mathcal{r} mit den Berührungspunkten f und e_1 der beiden Träger; der Schnittpunkt ($f\xi_1, e_1\mathcal{r}$) mit dem Schnittpunkt e, f_1 der Träger verbunden liefert eine Gerade, welche $\mathcal{r}\mathcal{r}_1$ in dem gesuchten Berührungspunkte trifft. Dies lässt sich als Satz auch folgendermassen aussprechen:

Die drei Verbindungslinien der Ecken eines von irgend drei Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte gebildeten Dreiecks mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in einem Punkte.

Oder, wenn man nach der Definition (Nr. 64) den Kegelschnitt als Erzeugniss der beiden projectiven Punktreihen und die Verbindungsstrahlen als seine Tangenten einführt:

Die drei Verbindungslinien der Berührungspunkte irgend dreier Tangenten eines Kegelschnitts mit den gegenüberliegenden Ecken des von denselben gebildeten Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Nach der vorigen Construction lässt sich sehr einfach auf einem beliebigen Verbindungsstrahl der Berührungspunkt ermitteln, da die Berührungspunkte e_1, f der beiden Träger durch die oben construirte Gerade \mathcal{Q} bereits gefunden sind. Heben wir hervor, dass wegen der obigen Construction und wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierecks $f e_1 \mathcal{r} \mathcal{r}_1$ (Nr. 16) auf jedem Strahle $\mathcal{r}\mathcal{r}_1$ der Berührungspunkt, in Bezug auf \mathcal{r} und \mathcal{r}_1 , dem Schnitte mit der Gerade \mathcal{Q} , welche die Berührungspunkte der Träger verbindet, harmonisch zugeordnet ist; wir werden hierauf im Folgenden genauer eingehen.

Wenn in den beiden projectiven Punktreihen $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ aa_1 und bb_1 zwei Paare entsprechender Punkte sind, so liegt der Schnittpunkt (a_1b_1, ba_1) auf derjenigen Gerade \mathcal{Q} , welche die Berührungspunkte der beiden Träger $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ verbindet; sehen wir aber nun $a = aa_1, b = bb_1$ als Träger der Punktreihen und $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ als Verbindungsstrahlen an, so sind a und b ein Paar entsprechender Punkte und a_1 und b_1 ein zweites Paar; folglich wird der Schnittpunkt (a_1b_1, a_1b), welcher derselbe Punkt ist, auch auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Strahlen a und b liegen. Wir haben daher das bemerkenswerthe Resultat:

Sind aa_1 und bb_1 irgend zwei Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen, so liegt der Schnittpunkt (ab_1, ba_1) in gerader Linie mit den Berührungspunkten dieser beiden Strahlen.

68 Hieraus folgt, wenn wir den einen Strahl aa_1 mit seinem Berührungspunkt α festhalten, den andern bb_1 und seinen Berührungspunkt β aber, der projectiven Beziehung gemäss, bewegen und den Schnittpunkt (ab_1, ba_1) mit γ_1 bezeichnen, dass die Strahlen $\alpha\beta$ und αb_1 , welche sich in γ_1 auf der Gerade \mathcal{L} begegnen, bei der Bewegung zwei perspective Strahlbüschel beschreiben; also wird die Punktreihe, welche der veränderliche Strahl bb_1 auf dem Träger \mathcal{A}_1 oder auf irgend einem andern Verbindungsstrahl, z. B. aa_1 , fixirt, projectiv sein mit dem Strahlbüschel, welches $\alpha\beta$ beschreibt. Dies giebt folgenden Satz:

Die Punktreihe, in welcher ein beliebiger Verbindungsstrahl von der Gesammtheit derselben getroffen wird, ist projectiv mit dem Strahlbüschel, dessen Grundpunkt der Berührungspunkt des ersteren ist, und dessen Strahlen nach den Berührungspunkten sämtlicher Verbindungsstrahlen gehen.

Fügen wir noch einen dritten Verbindungsstrahl cc_1 hinzu und nennen α, β, γ die Berührungspunkte auf aa_1, bb_1, cc_1 , ferner $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Schnittpunkte $(bc_1, cb_1), (ca_1, ac_1), (ab_1, ba_1)$, so liegen nach dem Vorigen je in einer Gerade:

$$\beta, \gamma, \alpha_1; \quad \gamma, \alpha, \beta_1; \quad \alpha, \beta, \gamma_1; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$$

letztere in der Gerade \mathcal{L} . Diese sechs Punkte sind also die Ecken eines vollständigen Vierseits und bilden eine Figur, wie wir sie in Nr. 55 kennen gelernt haben.

Halten wir die beiden Verbindungsstrahlen aa_1 und bb_1 mit ihren Berührungspunkten α und β fest und bewegen den dritten cc_1 der projectiven Beziehung gemäss, so verändert sich auch sein Berührungspunkt γ ; es bewegen sich die Punkte α_1 und β_1 auf der festen Gerade \mathcal{L} und beschreiben zwei projective Punktreihen, weil sie mit den von c und c_1 beschriebenen Punktreihen perspectiv liegen; folglich müssen auch die Strahlen $\alpha\beta_1$ und $\beta\alpha_1$ projective Strahlbüschel um α und β als Grundpunkte beschreiben; nun schneiden sich aber $\alpha\beta_1$ und $\beta\alpha_1$ im Punkte γ , dem Berührungspunkt auf dem veränderlichen Strahl cc_1 , folglich erhalten wir den wichtigen Satz:

Verbindet man irgend zwei Berührungspunkte als Grundpunkte zweier Strahlbüschel mit sämtlichen Berührungspunkten durch Strahlenpaare, so erhält man allemal zwei projective Strahlbüschel.

Hiernach erscheint der Kegelschnitt, welchen wir als das Erzeugniss zweier projectiver Punktreihen, d. h. als die von der Gesammt-

heit der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte umhüllte Curve definiert haben, zugleich als das Erzeugniss zweier projectiver Strahlbüschel, d. h. als der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen. Dieselbe Curve, der Kegelschnitt, je nachdem sie als eine continuirliche Reihe von Punkten oder als eine continuirliche Aufeinanderfolge von berührenden Strahlen (Tangenten) aufgefasst wird, ist das Erzeugniss zweier projectiver Strahlbüschel oder das Erzeugniss zweier projectiver Punktreihen; beide Erzeugnisse, welche nach der in unseren Grundbegriffen liegenden Dualität neben einander stehen, sind also *identisch*.

§ 22. Zwei projective Strahlbüschel in allgemeiner Lage.

Den in den beiden vorigen Paragraphen durchgeführten Betrachtungen stehen ganz analoge zur Seite, welche ihren Ausgangspunkt nehmen von zwei projectiven Strahlbüscheln in allgemeiner Lage. Es würde ermüdend sein, diese analogen Betrachtungen in aller Ausführlichkeit zu wiederholen; vielmehr genüge es, die Resultate hervorzuheben, welche ohne jede Schwierigkeit aus dem Gange der gleichlaufenden Betrachtung sich ergeben, indem man Strahl und Strahlbüschel an Stelle von Punkt und Punktreihe, Schnittpunkt an Stelle von Verbindungslinie u. s. w. und umgekehrt setzt, oder *dualisirt*, wie wir diesen Prozess kurz nennen wollen. Da wir aus dem Schluss der vorigen Betrachtung bereits wissen, dass das Erzeugniss zweier projectiver Strahlbüschel in allgemeiner Lage identisch ist mit dem Erzeugniss zweier projectiver Punktreihen, welches wir Kegelschnitt genannt haben, so dürfen wir diese Benennung auch dem jetzt zu untersuchenden Erzeugniss geben.

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projectiver Strahlbüschel in allgemeiner (nicht perspectiver) Lage ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Grundpunkte B, B_1 der beiden Strahlbüschel geht; denn dem Strahle BB_1 , als dem Strahlbüschel (B) angehörig, entspricht ein bestimmter durch B_1 gehender Strahl, also ist B_1 ein Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen, ebenso B . Seien x, x_1 zwei entsprechende Strahlen und χ ihr Schnittpunkt, und bewegen wir den Strahl x um B herum, bis er zuletzt auf BB_1 fällt, so wird die Sehne $B_1\chi$ des Kegelschnitts, welche den entsprechenden Strahl bildet, sich um den festen Punkt B_1 drehen, bis sie zuletzt in die Grenzlage der Tangente des Kegelschnitts im Punkte B_1 übergeht; also diejenigen Strahlen, welche den in der Verbindungslinie der Grundpunkte vereint liegenden entsprechen, sind die Tangenten des Kegelschnitts in diesen Punkten.

Man kann irgend zwei Schnittpunkte entsprechender Strahlen als Grundpunkte zweier neuer Strahlbüschel annehmen, deren Strahlenpaare nach sämtlichen Schnittpunkten hingehen; solche zwei Strahlbüschel sind immer projectiv und je zwei Strahlen entsprechend, die nach demselben Schnittpunkte gehen. Oder:

Wenn man irgend zwei Punkte eines Kegelschnitts mit sämtlichen durch Strahlenpaare verbindet, so erhält man allemal zwei projective Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen immer zwei solche sind, welche nach demselben Punkte des Kegelschnitts gehen.

Hieraus folgt, dass der Kegelschnitt durch fünf Punkte, welche willkürlich angenommen werden dürfen, vollkommen bestimmt ist; um beliebig viele andere Punkte desselben allein mittelst des Lineals zu construiren, wähle man irgend zwei von den gegebenen fünf Punkten zu Grundpunkten zweier Strahlbüschel und ziehe nach den drei übrigen die drei Paare entsprechender Strahlen; dadurch ist die projective Beziehung der beiden Strahlbüschel vollständig bestimmt, und beliebig viele andere Paare entsprechender Strahlen sind allein mittelst des Lineals zu construiren (Nr. 19); die Schnittpunkte derselben werden Punkte des Kegelschnitts sein. Diese Construction führt zu folgender Beziehung zwischen irgend sechs Punkten eines Kegelschnitts:

Verbindet man irgend sechs Punkte eines Kegelschnitts in beliebiger Reihenfolge zu einem einfachen Sechseck, so schneiden sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen.

Diesen Satz hat *Pascal* (1623—1662) im Alter von 16 Jahren gefunden. Der Satz und die Gerade, welche die drei Punkte enthält, werden nach ihm benannt.

Ferner besitzt der Kegelschnitt die charakteristische Eigenschaft, dass eine beliebige Gerade in der Ebene ihn in zwei Punkten trifft. Der Kegelschnitt ist daher auch von der zweiten Ordnung, wie von der zweiten Klasse (Nr. 64).

Die beiden Schnittpunkte des Kegelschnitts mit einer beliebigen Gerade können aber auch in einen zusammenfallen oder zu existiren aufhören. Die doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von sämtlichen geraden Linien der Ebene zerfällt dadurch in zwei Gebiete: das eine bilden diejenigen Geraden, welche den Kegelschnitt nicht treffen, das andere diejenigen, welche ihn in zwei (reellen) Punkten treffen. Diese beiden Gebiete werden von einander getrennt durch eine einfache Unendlichkeit solcher Geraden, welche nur einen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein haben, oder für welche die beiden Schnittpunkte zusammenfallen; dies sind die Tangenten des Kegelschnitts.

Die Construction der Tangente in irgend einem Punkte des Kegelschnitts wird leicht mit Hülfe des folgenden Satzes ausgeführt:

Wenn xx_1 und yy_1 irgend zwei Paare entsprechender Strahlen zweier projectiver Strahlbüschel B, B_1 sind, so läuft die Verbindungslinie der Schnittpunkte:

$$(xy_1, yx_1)$$

durch einen und denselben festen Punkt S , welcher zugleich der Schnittpunkt der beiden Tangenten des Kegelschnitts in den Grundpunkten der Strahlbüschel B und B_1 ist. Dieser Punkt S hat die analoge Eigenschaft zu der Gerade \mathcal{L} bei projectiven Punktreihen: alle Strahlen durch ihn und nur die Strahlen durch ihn schneiden die projectiven Strahlbüschel B, B_1 in involutorischen projectiven Punktreihen.

Benutzen wir blos drei Paare entsprechender Strahlen, so haben wir:

Wenn a, b, c irgend drei durch einen Punkt gehende Strahlen und a_1, b_1, c_1 irgend drei durch einen zweiten Punkt gehende Strahlen sind, so laufen die drei Verbindungslinien:

$$(ab_1, a_1b), \quad (bc_1, b_1c), \quad (ca_1, c_1a)$$

durch einen und denselben Punkt.

Dieser Satz ist einer ganz ähnlichen Erweiterung fähig, wie der analoge in Nr. 66; die Ausführung sei dem Leser überlassen.

Mit Hülfe dieses Satzes ist in jedem Punkte des Kegelschnitts die Tangente zu construiren, wenn irgend fünf zur Bestimmung desselben erforderliche Punkte gegeben sind. Sei B der Punkt, in welchem die Tangente gesucht wird, und B_1, a, b, c die vier andern, so ziehe man die drei Strahlen Ba, Bb, Bc oder a, b, c und B_1a, B_1b, B_1c oder a_1, b_1, c_1 , bestimme die beiden Linien (ab_1, a_1b) , (bc_1, b_1c) und verbinde ihren Schnittpunkt mit B , alsdann ist diese Verbindungslinie die gesuchte Tangente in B .

Sind die Tangenten f und e_1 in den Punkten B und B_1 gefunden, so gelangt man zu der Tangente in irgend einem Punkte $\mathfrak{x} = xx_1$, indem man die Verbindungslinie (xe_1, x_1f) zieht und den Punkt, in welchem sie den Strahl $e(f_1)$ oder BB_1 trifft, mit $\mathfrak{x} = xx_1$ verbindet oder einfacher, indem man, in Bezug auf x und x_1 , den vierten harmonischen Strahl zieht, welcher dem Strahle von \mathfrak{x} nach fe_1 zugeordnet ist (Nr. 67).

Jene Construction führt zu folgendem Satz:

Die Seiten irgend eines dem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecks treffen die Tangenten der gegenüberliegenden Ecken in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen.

Endlich folgt noch der Satz:

Sind aa_1 und bb_1 irgend zwei Paare entsprechender Strahlen zweier projectiver Strahlbüschel und a , b beziehungsweise ihre Schnittpunkte, so geht die Verbindungslinie (ab_1, a_1b) durch den Schnittpunkt der beiden Kegelschnitts-Tangenten in a und b , woraus dann von Neuem der in Nr. 68 gefundene Satz folgt:

Das Strahlbüschel, welches von allen Strahlen gebildet wird, die einen beliebigen Punkt des Kegelschnitts mit sämtlichen Punkten desselben verbinden, ist projectiv zu der Punktreihe, welche auf der in dem ersten Punkte gezogenen Tangente durch die Tangenten in sämtlichen Punkten des Kegelschnitts bestimmt wird.

Hieraus ergibt sich schliesslich von der dualen Seite her wiederum die Identität beider Erzeugnisse, indem wir finden, dass *sämtliche Tangenten des Kegelschnitts irgend zwei derselben in zwei projectiven Punktreihen treffen*, indem jede auf den beiden willkürlich herausgenommenen zwei entsprechende Punkte bestimmt.

- 71 Wir haben die projectiven Gebilde (Punktreihen, Strahlbüschel) im Vorangehenden in nicht perspectiver Lage angenommen. Sind sie aber *perspectiv*, so zerfällt das Erzeugniss. Bei zwei *perspectiven* Punktreihen besteht es aus zwei Strahlbüscheln, von denen das eine offenbar das *Perspectivitätscentrum* zum Grundpunkte hat, das andere den sich selbst entsprechenden Schnittpunkt der beiden Träger; denn jeder Strahl durch denselben kann als Verbindungsstrahl angesehen werden. Bei zwei *perspectiven* Strahlbüscheln aber besteht es aus dem *perspectiven* Durchschnitt und der sich selbst entsprechenden Verbindungslinie der beiden Grundpunkte. Die Curve zweiter Klasse artet dort in ein Punktepaar, die Curve zweiter Ordnung hier in ein Geradenpaar aus, und die andere Erzeugung ist in beiden Fällen nicht möglich.

Zu denselben Ausartungen gelangt man aber auch, wenn die Projectivität selbst ausartet (Nr. 58). Eine ausgeartete Projectivität zweier Punktreihen hat zwei singuläre Punkte, in jeder Punktreihe einen, dem alle Punkte der andern Reihe entsprechen. Das Erzeugniss der Verbindungsstrahlen besteht ersichtlich aus den Büscheln um diese singulären Punkte. Und ebenso besteht das Erzeugniss einer ausgearteten Projectivität zwischen zwei Strahlbüscheln aus den beiden singulären Strahlen derselben.

§ 23. Identität der Erzeugnisse zweier projectiver Punktreihen und zweier projectiver Strahlbüschel.

Obgleich wir bereits aus dem Vorigen die Identität beider neben 72 einander stehenden Erzeugnisse erkannt haben, so wollen wir doch dies wichtige Resultat noch einmal auf einem anderen Wege ableiten.

Wir gehen von zwei projectiven Punktreihen \mathfrak{A} (a, b, c, \dots, x, \dots) und \mathfrak{A}_1 ($a_1, b_1, c_1, \dots, x_1, \dots$) aus und projectiren sie aus den entsprechenden Punkten c und c_1 , wodurch sich zwei projective Strahlbüschel in perspectiver Lage ergeben, da der Verbindungsstrahl cc_1 sich selbst entspricht; der perspective Durchschnitt \mathfrak{Q} ist die Gerade, auf der die Punkte (c_1x, cx_1) , überhaupt alle Punkte (x_1y, x_1y) liegen (Nr. 65) und welche $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ in den dem gemeinsamen Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ entsprechenden Berührungspunkten schneidet. Jeder Punkt ξ von \mathfrak{Q} giebt zwei entsprechende Punkte x und x_1 , die Schnitte von $c_1\xi$ mit \mathfrak{A} , von $c\xi$ mit \mathfrak{A}_1 .

Die vier Punkte c, c_1, x, x_1 bilden ein vollständiges Viereck; Diagonalepunkte desselben sind $\xi, \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und (cc_1, xx_1) . Folglich sind die beiden Strahlen von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ nach ξ und (cc_1, xx_1) harmonisch zugeordnet den beiden Seiten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ des Vierecks. Sie erzeugen demnach eine hyperbolische Involution, von welcher $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ die Doppelstrahlen sind, und bewegen sich projectiv; also sind auch die bez. zu den von ihnen beschriebenen Büscheln perspectiven Punktreihen zu einander projectiv, nämlich die von ξ auf \mathfrak{Q} beschriebene und die von (cc_1, xx_1) auf cc_1 beschriebene. Erstere ist wiederum perspectiv zu der von x oder x_1 beschriebenen. Also ist letztere projectiv zu diesen beiden Punktreihen, den gegebenen.

Wir erkennen also nochmals:

Die Punktreihe, welche auf einem Verbindungsstrahle entsprechender Punkte durch die sämtlichen Verbindungsstrahlen eingeschnitten wird, ist den gegebenen projectiv.

Und wir können durch sie zunächst eine und dann durch eine zweite auch die zweite gegebene Punktreihe ersetzen.

Auf beliebigen zwei Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte erzeugen alle derartigen Linien zwei projective Punktreihen, welche den Inbegriff dieser Linien, die Tangenten des Kegelschnitts, ebenso liefern wie die ursprünglichen Punktreihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$.

Der Strahl von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ nach (cc_1, xx_1) war also immer der vierte harmonische Strahl zu dem nach ξ in Bezug auf \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 . Kommt x nach c , also in den Schnittpunkt der Träger \mathfrak{A} und $cc_1 = \mathfrak{A}_2$, so fällt (cc_1, xx_1) in den Berührungspunkt von \mathfrak{A}_2 ; ξ kommt, als Schnitt

von c_1x mit \mathcal{Q} , in den Punkt (cc_1, \mathcal{Q}) zu liegen, und der Berührungspunkt ist der Schnitt von \mathcal{N}_2 mit dem vierten harmonischen Strahle, welcher dem Strahle von $\mathcal{N}\mathcal{N}_1$ nach (cc_1, \mathcal{Q}) zugeordnet ist in Bezug auf $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1$. Und ebenso ergibt sich der Berührungspunkt T_x auf x_1x_1 als der Schnitt mit dem vierten harmonischen Strahle, der dem Strahle aus $\mathcal{N}\mathcal{N}_1$ nach (xx_1, \mathcal{Q}) , ebenfalls in Bezug auf $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1$, zugeordnet ist. Oder dieser Berührungspunkt T_x ist der vierte harmonische Punkt, zugeordnet dem Punkte (xx_1, \mathcal{Q}) in Bezug auf x und x_1 .

Demnach sind auch harmonisch die Gerade \mathcal{Q} und die Verbindungslinie der Berührungspunkte $(\mathcal{N}, \mathcal{Q})$ und T_x von \mathcal{N} und x_1x_1 zu der Gerade \mathcal{N} und der Verbindungslinie des ersten dieser Berührungspunkte mit x_1 . Der erste und der dritte dieser Strahlen sind fest; folglich bewegen sich die beiden andern projectiv, und daher auch der zweite und der Punkt x_1 oder x .

Die Punktreihe, welche auf einer Tangente \mathcal{N} des Kegelschnitts durch sämtliche Tangenten x_1x_1 eingeschnitten wird, und der Strahlbüschel, welcher vom Berührungspunkte von \mathcal{N} nach den Berührungspunkten der x_1x_1 geht, sind projectiv.

Dasselbe gilt für \mathcal{N}_1 ; also haben wir zwei projective Strahlbüschel um die Berührungspunkte von \mathcal{N} und \mathcal{N}_1 , deren entsprechende Strahlen je nach dem Berührungspunkte derselben Tangente x_1x_1 gehen.

Damit ist die Identität der beiden Erzeugnisse dargethan.

Die dualen von zwei projectiven Strahlbüscheln ausgehenden Ueberlegungen geben den Umkehrungssatz.

73 Es sei nun noch \mathcal{N}_3 ein vierter Verbindungsstrahl db_1 , so haben wir vier projective Punktreihen auf $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$. Bezeichnen wir die Berührungspunkte von $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ mit a, b_1, c_2, d_3 , so ergeben sich für jeden der sechs Schnittpunkte zwei Namen:

$$\begin{array}{cccccc} \mathcal{N}\mathcal{N}_1 & \mathcal{N}\mathcal{N}_2 & \mathcal{N}\mathcal{N}_3 & \mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 & \mathcal{N}_1\mathcal{N}_3 & \mathcal{N}_2\mathcal{N}_3 \\ b, a_1 & c, a_2 & d, a_3 & c_1, b_2 & d_1, b_3 & d_2, c_3. \end{array}$$

Die drei Diagonalkpunkte des Vierseits $\mathcal{N}\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2\mathcal{N}_3$ sind:

$$\begin{aligned} x &= (cd_1, db_1) = (a_2b_3, a_3b_2), \\ y &= (bc_3, cb_3) = (a_1d_2, a_2d_1), \\ z &= (bd_2, db_2) = (a_1c_3, a_3c_1). \end{aligned}$$

Nun ist wegen der Projectivität:

$$(abcb) = (a_1b_1c_1d_1) = (a_2b_2c_2d_2) = (a_3b_3c_3d_3);$$

daher $(abcb) = (b_1a_1d_1c_1)$. Aber b ist mit a_1 identisch; also laufen ab_1, db_1, dc_1 , in einen Punkt zusammen, oder ab_1 geht durch x . Ebenso

folgt aus: $(a_2 b_2 c_2 d_2) = (b_3 a_3 d_3 c_3)$, dass $c_2 d_3$ durch x geht. Ingleichen gehen $a d_3$ und $b_1 c_2$ durch y und $a c_2$, $b_1 d_3$ durch z . Also ist xyz auch das Diagonaldreieck von $a b_1 c_2 d_3$.

Demnach hat das vollständige Vierseit von vier Tangenten eines Kegelschnitts das nämliche Diagonaldreieck wie das vollständige Viereck der zugehörigen Berührungspunkte.

Auch den Seiten dieses Vierecks können wir Doppelnamen geben:

$$\begin{array}{ccc} a b_1 & a c_2 & a d_3 \\ b, a_1 & c, a_2 & d, a_3 \\ b_1 c_2 & b_1 d_3 & c_2 d_3 \\ c_1, b_2 & d_1, b_3 & d_2, c_3; \end{array}$$

und um die duale Bezeichnung ganz durchzuführen, müssen dann $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ besser mit a, b_1, c_2, d_3 bezeichnet werden.

Weil $a b_1 = \mathfrak{A} \mathfrak{A}_1$, $d c_1 = y$, $c d_1 = z$ in gerader Linie liegen und b, a_1 identisch sind, so ist $(b a d c) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$ und also auch $(a b c d) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$ und in gleicher Weise:

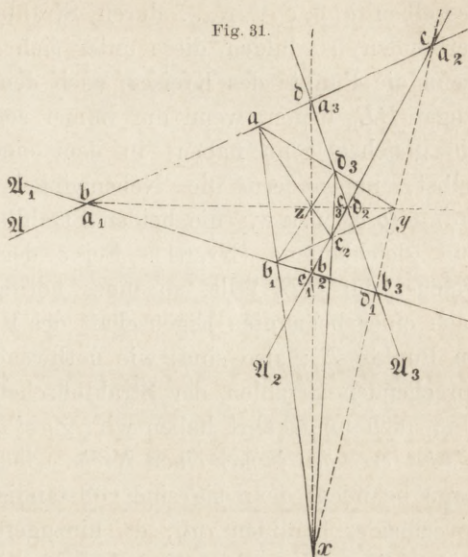
$$(a b c d) = (a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2) = (a_3 b_3 c_3 d_3).$$

Die vier Punkte, in denen a, b, c, d von yz getroffen werden, liegen, in Bezug auf das Centrum x , perspectiv zu b, a, d, c ; also ist:

$$(a b c d) = (a b c d);$$

und alle acht Doppelverhältnisse sind gleich.

Fig. 31.



§ 24. Der Kreis als Erzeugniss projectiver Gebilde.

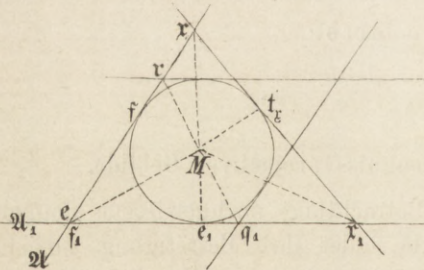
Die durch die vorangehende Betrachtung nachgewiesene doppelte Entstehungsweise des Kegelschnitts findet ihre Bestätigung zunächst bei dem aus der Elementargeometrie bekannten Kegelschnitt, dem *Kreise*, und die doppelte Erzeugung des Kreises durch projective Gebilde lässt sich aus elementaren Eigenschaften desselben unmittelbar ableiten. Zugleich wollen wir auch umgekehrt hieraus die Bedingungen ermitteln, unter welchen zwei projective Strahlbüschel oder zwei projective Punktreihen einen Kreis erzeugen. Wir haben bereits in Nr. 34

diejenige elementare Eigenschaft des Kreises benutzt, welche ihn als Erzeugniss zweier projectiver Strahlbüschel erscheinen lässt. Werden irgend zwei Punkte B, B_1 eines Kreises mit allen übrigen Punkten desselben $a, b, c \dots x \dots$ durch Strahlenpaare $aa_1, bb_1, cc_1 \dots xx_1 \dots$ verbunden, so bilden diese unter sich gleiche Winkel und zwar auch wenn die Punkte des Kreises, nach denen sie gehen, in verschiedenen Bogen BB_1 liegen; wenn nur immer solche Winkel genommen werden, die gleichen Sinn haben, in dem einen Falle die Peripheriewinkel selbst, im andern die Nebenwinkel. Es ist also $(ab) = (a_1b_1)$, $(bc) = (b_1c_1)$ u. s. w.; die beiden Strahlbüschel B, B_1 sind also gleich und gleichlaufend (Nr. 61). Sei e der Strahl des Strahlbüschels B , welcher auf BB_1 fällt, so muss nothwendig auch $(xe) = (x_1e_1)$ sein; nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises ist dann e_1 die Tangente im Punkte B_1 ; also sind, wie nothwendig, die dem Strahle BB_1 entsprechenden Strahlen der Strahlbüschel die Tangenten in B und B_1 . Und auch umgekehrt haben wir: *Zwei gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel erzeugen immer einen Kreis*, sobald sie sich nicht in perspectiver Lage befinden; denn sie sind vollständig bestimmt durch ein Paar entsprechender Strahlen aa_1 , da hinzugefügt ist, dass sie gleichlaufend sein sollen (Nr. 61); legt man also durch die Grundpunkte B, B_1 und den Schnittpunkt $a = aa_1$ den Kreis, so liefert jeder Punkt x desselben zwei entsprechende Strahlen x, x_1 zweier gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel, welche mit den angenommenen identisch sind.

75 Zweitens kann der Kreis, als die Gesamtheit seiner Tangenten aufgefasst, durch zwei projective Punktreihen erzeugt werden. Auf

zwei Tangenten des Kreises, welche als Träger $\mathcal{U}, \mathcal{U}_1$ der Punktreihen genommen werden (Fig. 32), seien f, e_1 die Berührungspunkte, also e, f_1 der Schnittpunkt und x, x_1 die Schnitte mit irgend einer beweglichen Tangente, welche in t_x berühre. Dann ist, wenn M der Mittelpunkt des Kreises ist,

Fig. 32.



$$\sphericalangle x M t_x = \frac{1}{2} \sphericalangle M t_x,$$

$$\sphericalangle t_x M x_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle t_x M e_1, \text{ also } \sphericalangle x M x_1 = \frac{1}{2} (\sphericalangle M t_x + \sphericalangle t_x M e_1) = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle e c_1,$$

mithin constant; dabei hat man freilich für Constanz des Sinnes zu sorgen, d. h. wenn der Winkel $x M x_1$ seinen Sinn beim Durchgange durch eine oder die andere der zu $\mathcal{U}, \mathcal{U}_1$ parallelen Tangenten ändert,

ihn durch den Nebenwinkel zu ersetzen. Aus dieser Constanz der Grösse und des Sinnes folgt, dass die Strahlen $M\xi$ und $M\xi_1$ zwei gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel beschreiben und demnach die Punkte ξ und ξ_1 zwei projective Punktreihen.

Die beiden eben erwähnten parallelen Tangenten schneiden in $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ die Fluchtpunkte r und q_1 ein.

Suchen wir umgekehrt für projective Punktreihen die Bedingungen auf, damit sie einen Kreis erzeugen. Zunächst ist ersichtlich, dass $e\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 e_1$; dies sind also entsprechende gleiche Strecken und zwar solche aus dem ersten Systeme, dessen Strecken die Fluchtpunkte r und q_1 ausschliessen. Aus $e\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 e_1$ folgt $r e = q_1 \mathfrak{f}_1$ und $r \mathfrak{f} = q_1 e_1$ (Nr. 25). Die beiden Paare paralleler Tangenten bilden einen Rhombus, also ist $eM \perp rMq_1$.

Damit zwei projective Punktreihen einen Kreis erzeugen, ist also nothwendig, dass erstens die Strecken zwischen dem Schnittpunkte und den Berührungspunkten gleich sind: $e\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 e_1$ und dass zweitens, wenn M der Schnittpunkt der Lothe in den Berührungspunkten \mathfrak{f} und e_1 auf den Trägern ist, die Fluchtpunkte r, q_1 auf der Gerade liegen, welche in M auf Me senkrecht steht.

Und diese Bedingungen sind auch *hinreichend*; denn durch sie wird $er = \mathfrak{f}_1 q_1$; werden daher durch r und q_1 die Parallelen zu $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}$ gezogen, so dass ein Rhombus entsteht, so stimmt die projective Beziehung, welche der diesem Rhombus eingeschriebene Kreis auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ hervorruft, mit der gegebenen die Bedingungen erfüllenden überein, weil er mit ihr die Paare entsprechender Punkte $e e_1, \mathfrak{f} \mathfrak{f}_1, r r_1^\infty, q_1^\infty q_1$ gemein hat.

Aus den Bedingungen leitet man leicht ab, dass:

$$(e \mathfrak{f} r q_1^\infty) = (e_1 \mathfrak{f}_1 r_1^\infty q_1).$$

§ 25. Eintheilung der Kegelschnitte.

Um uns von der Gestalt des Kegelschnitts, trete er als Erzeugniss 76 zweier projectiver Strahlbüschel oder zweier projectiver Punktreihen auf, ein anschauliches Bild machen zu können, müssen wir einige besondere Umstände näher ins Auge fassen, welche bei den erzeugenden Gebilden vorkommen können. Gehen wir von zwei projectiven Strahlbüscheln B, B_1 in allgemeiner Lage aus und denken uns, indem wir das eine Strahlbüschel B festhalten, das andere B_1 , ohne es um seinen Grundpunkt zu drehen, parallel mit sich fortgeschoben, bis B_1 mit B zusammenfällt (oder was dasselbe ist, ziehen wir durch B zu sämtlichen Strahlen des Strahlbüschels B_1 die Parallelen), so erhalten wir

in B zwei auf einander liegende projective Strahlbüschel, wie sie in Nr. 32 genauer untersucht worden sind. Dort sahen wir, dass drei Fälle eintreten können: entweder haben die beiden concentrischen projectiven Strahlbüschel zwei verschiedene Doppelstrahlen oder einen (zwei zusammenfallende) oder keine reellen (zwei imaginäre). Im mittleren Falle haben sich g und g_1 oder h und h_1 vereinigt. Schieben wir nun das Strahlbüschel B_1 wieder parallel mit sich in seine ursprüngliche Lage zurück, so werden die vorhin zusammengefallenen Strahlen nunmehr parallel laufen oder ihren Schnittpunkt im Unendlichen haben; die Schnittpunkte aller übrigen Paare entsprechender Strahlen müssen aber im Endlichen liegen. Nach den drei Fällen ergeben sich daher drei Gattungen von Kegelschnitten:

1. Ein Kegelschnitt, welcher keinen unendlich entfernten Punkt hat, dessen Punkte also sämmtlich in einem endlichen Stück der Ebene liegen, heisst eine *Ellipse*; die sie erzeugenden projectiven Strahlbüschel müssen gleichlaufend sein (Nr. 32).

2. Ein Kegelschnitt, welcher nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt (zwei vereinigte) hat, heisst eine *Parabel*; die erzeugenden projectiven Strahlbüschel müssen ebenfalls gleichlaufend sein und so liegen, dass die besonderen Strahlen g und g_1 oder die h und h_1 parallel laufen. Da sämmtliche unendlich entfernten Punkte der Ebene auf einer Gerade G_∞ liegen (Nr. 361) und die Parabel nur zwei vereinigte Punkte mit G_∞ gemein hat, so muss G_∞ Tangente der Parabel sein und dieser Punkt ihr Berührungspunkt. *Die Berührung mit G_∞ ist die Fundamental-Eigenschaft der Parabel.*

3. Ein Kegelschnitt, welcher zwei unendlich entfernte Punkte hat, heisst eine *Hyperbel*; dieselbe kann sowohl durch gleichlaufende, als auch durch ungleichlaufende projective Strahlbüschel erzeugt werden; zwei ungleichlaufende projective Strahlbüschel erzeugen immer eine Hyperbel.*

Die Gerade G_∞ wird von der Hyperbel in zwei reellen und getrennten Punkte, von der Ellipse aber in zwei imaginären Punkten geschnitten.

77 Aus der vorigen Betrachtung geht hervor, dass durch parallele Verschiebung der Strahlbüschel B, B_1 ohne Drehung um ihre Grund-

* Die griechischen Namen der drei Kegelschnitte bekunden, dass schon die Griechen mit diesen Curven sich beschäftigt haben. Insbesondere sind *Archimedes* (von Syracus) (287—212 v. Chr.) und *Apollonius* aus Pergä (in Kleinasien), der um 200 v. Chr. lebte, zu erwähnen. Letzterer, den die Alten den grossen Geometer nannten, hat ein besonderes noch grösstentheils erhaltenes Werk über die Kegelschnitte geschrieben.

punkte die Gattung des Kegelschnitts, ihres Erzeugnisses, nicht verändert wird. Fallen die Grundpunkte zusammen, so besteht das Erzeugniß aus den beiden Doppelstrahlen (Geradenpaar), die entweder reell und getrennt oder vereinigt oder imaginär sind und beziehungsweise eine ausgeartete Hyperbel, Parabel, Ellipse darstellen. Im letzten Falle ist vom Erzeugniß nur der Schnittpunkt der Geraden reell. Liegen dagegen die Grundpunkte der beiden Strahlbüschel B, B_1 getrennt und drehen wir die Strahlbüschel selbst um ihre Grundpunkte, ohne die projective Beziehung zu verändern, so wird nur dann, wenn die Strahlbüschel ungleichlaufend sind, ihr Erzeugniß seine Gattung nicht ändern und beständig Hyperbel sein.

Es können dabei, mögen die Strahlbüschel gleichlaufend sein oder nicht, zwei besondere Fälle von Interesse eintreten; einmal nämlich fallen bei der Drehung zwei entsprechende Strahlen auf die Verbindungslinie der Grundpunkte; dann werden die Strahlbüschel perspectiv; das Erzeugniß ist, wie wir schon wissen, ein Geradenpaar, bestehend aus dem perspectivischen Durchschnitte und dem sich selbst entsprechenden Strahle BB_1 .

Ein zweiter besonderer Fall tritt ein, wenn bei der Drehung die Strahlen s und s_1 , folglich auch t und t_1 in parallele Lage gelangen, d. h. die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel (Nr. 26) parallel werden. Es entsteht also eine Hyperbel; und eine solche Hyperbel, bei welcher die unendlich entfernten Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, heisst eine *gleichseitige Hyperbel*. So wie der Kreis (Nr. 74) als das Erzeugniß zweier gleicher und gleichlaufender projectiver Strahlbüschel auftritt, kann die gleichseitige Hyperbel als das Erzeugniß zweier gleicher und ungleichlaufender Strahlbüschel aufgefasst werden. Bei zwei ungleichlaufenden projectiven Strahlbüscheln sind stets zwei Paare paralleler entsprechender Strahlen vorhanden; sind die Büschel überdies gleich, so sind die Senkrechten zu den Strahlen des einen Paares gleichfalls entsprechend, also bilden sie das andere Paar; mithin ist das Erzeugniß eine gleichseitige Hyperbel. Die gleichseitige Hyperbel kann indessen, wie wir gesehen haben, auch durch zwei beliebige projective Strahlbüschel erzeugt werden, nicht so der Kreis.

Sind die beiden erzeugenden Strahlbüschel B, B_1 gleichlaufend, und drehen wir sie um ihre festgedachten Grundpunkte, ohne die projective Beziehung zu verändern, so verändert sich der Kegelschnitt und kann Ellipse, Parabel und Hyperbel werden. Der Spielraum, innerhalb dessen diese verschiedenen Fälle eintreten, ist leicht zu übersehen, wenn wir nur das eine Strahlbüschel B_1 drehen, das andere B dagegen unverändert lassen. Bei dieser Drehung kommen einmal g und g_1 in

parallele Lage; h und h_1 laufen dann aber nicht parallel, weil bei zwei gleichlaufenden projectiven Strahlbüscheln unmöglich gleichzeitig g mit g_1 und h mit h_1 parallel sein kann (Nr. 32). Drehen wir nun, mit der parallelen Lage von g und g_1 beginnend, für welche das Erzeugniss eine Parabel wird, in beliebigem Drehungssinne das Strahlbüschel B_1 , so wird das Erzeugniss Ellipse oder Hyperbel, je nachdem die Richtungen von g und h durch die Richtungen von h_1 und g_1 getrennt werden oder nicht; denn dann haben die bis zur Vereinigung der Grundpunkte parallel verschobenen Büschel imaginäre oder reelle Doppelstrahlen (Nr. 32). Gelangen wir endlich bei fortgesetzter Drehung in die Lage, dass h und h_1 parallel werden, so entsteht wieder eine Parabel, und bei weiter fortgesetzter Drehung geht das Erzeugniss, wenn es früher Ellipse war, in die Hyperbel über, oder umgekehrt. Es giebt also zwei Reihen von Kegelschnitten; welche bei dieser Bewegung auftreten; die eine enthält lauter Ellipsen, die andere lauter Hyperbeln; beide Reihen werden durch zwei Parabeln von einander getrennt. In der Reihe von Hyperbeln befindet sich, wie oben bemerkt, ein Geradenpaar und eine gleichseitige Hyperbel.

Es erhellt schon hieraus, dass *nur Ellipse und Hyperbel allgemeine Kegelschnitte sind; die Parabel ist ein specieller.*

Zu einer gleichseitigen Hyperbel gelangt man bei dem Problem der *Dreitheilung des Winkels*, welches mit dem ebenso berühmten (*Delischen*) Probleme der Würfelverdoppelung die Griechen in der Platonischen Schule zur Beschäftigung mit den Kegelschnitten geführt hat. Ein Kreis um den Scheitel M des zu theilenden Winkels φ schneide die Schenkel in A und B ; so trage man von A in dem einen Sinne den Bogen Aa und von B im entgegengesetzten Sinne den zweimal so grossen Bogen Bb auf. Man erkennt leicht, dass die Strahlen Ma und Bb gleiche, aber ungleichlaufende Büschel durchlaufen; also erzeugen sie eine gleichseitige Hyperbel. Der dem Bogen AB angehörige Schnitt T derselben mit dem Kreise ist der Theilungspunkt. Sie geht durch B und hat noch zwei andere Schnitte T_1, T_2 , welche so gelegen sind, dass durch T, T_1, T_2 der ganze Kreis in drei gleiche Theile getheilt wird:

$$\sphericalangle AMT_1 = 120^\circ + \frac{\varphi}{3}, \quad BMT_1 = 240^\circ + \frac{2\varphi}{3};$$

$$AMT_2 = 240^\circ + \frac{\varphi}{3}, \quad BMT_2 = 120^\circ + \frac{2\varphi}{3}$$

oder

$$480^\circ + \frac{2\varphi}{3};$$

wobei AMT_1 und AMT_2 den einen, BMT_1 und BMT_2 den andern Sinn haben.

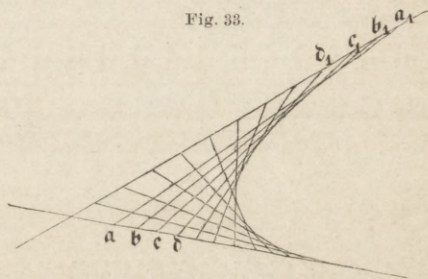
§ 26. Bedingungen für die Erzeugung der verschiedenen Gattungen der Kegelschnitte durch projective Punktreihen.

Das Erzeugniss zweier beliebiger projectiver Punktreihen kann 78 im allgemeinen nur Ellipse oder Hyperbel sein, nicht aber Parabel. Die unendlich entfernte Gerade G_∞ ist, wie wir wissen, Tangente der Parabel; irgend zwei andere Tangenten, als Träger zweier erzeugenden Punktreihen aufgefasst, werden von ihr in den unendlich entfernten Punkten getroffen, welche mithin entsprechende Punkte sein müssen. Zwei Punktreihen, deren unendlich entfernte Punkte entsprechende sind, sind aber nothwendig ähnlich (Nr. 59); also sehen wir, dass eine Parabel nur von zwei ähnlichen Punktreihen erzeugt werden kann und immer erzeugt wird, sobald sich dieselben nicht in perspectiver Lage befinden. Also auch umgekehrt:

Irgend zwei Tangenten einer Parabel werden von allen übrigen in zwei ähnlichen Punktreihen getroffen.

Hieraus können wir uns leicht ein anschauliches Bild der Parabel durch Zeichnung herstellen, indem wir z. B. (Fig. 33) auf einer Gerade eine Anzahl von gleich entfernten

Fig. 33.



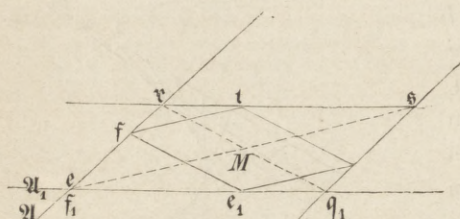
Punkten $a, b, c, d \dots$, auf einer zweiten Gerade eine gleiche Anzahl von gleich entfernten Punkten $a_1, b_1, c_1, d_1 \dots$ annehmen und die Verbindungsstrahlen $aa_1, bb_1, cc_1 \dots$ ziehen. Selbstverständlich erzeugen auch zwei gleiche Punktreihen immer eine Parabel. Die Parabel kann keine zwei im Endlichen gelegenen parallelen Tangenten haben; denn in ihren projectiven Punktreihen wäre der gemeinsame unendlich ferne Punkt sich selbst entsprechend, die Punktreihen wären also perspectiv. Andererseits kann freilich jede Tangente als parallel mit der unendlich entfernten Tangente G_∞ angesehen werden, weil ihr Schnittpunkt im Unendlichen liegt.

Eine Parabel entsteht, wenn eine Punktreihe $\mathcal{A} (a, b, c \dots x)$ und ein zu ihr projectives Strahlbüschel $B (a, b, c, \dots x)$ gegeben sind; sie wird von den Parallelen durch die Punkte x von \mathcal{A} je zu den entsprechenden Strahlen x von B umhüllt. Aber auch die Senkrechten aus den x je auf die entsprechenden Strahlen x umhüllen eine Parabel. Im letzteren Falle sind erzeugende projective Punktreihen die gegebene \mathcal{A} und diejenige auf der unendlich fernen Gerade G_∞ , welche mit der durch B eingeschnittenen die ausgezeichnete Involution I_∞ (Nr. 62)

bildet. In beiden Fällen ist G_∞ der eine Träger und daher die Curve Parabel.

79 Um das Erzeugniss zweier projectiver Punktreihen, welche nicht ähnlich sind, genauer zu erkennen und insbesondere zu erfahren, unter welchen Bedingungen dasselbe Ellipse oder Hyperbel wird, ziehen wir durch die den unendlich fernen Punkten r_1^∞ und q_1^∞ von \mathcal{A}_1 und \mathcal{A} entsprechenden Fluchtpunkte r, q_1 (welche nicht selbst unendlich fern sind, da sonst die Punktreihen ähnlich wären) zu \mathcal{A}_1 und \mathcal{A} die Parallelen, welche Tangenten des Kegelschnitts sein müssen. Da man jede beliebige Tangente als Träger einer erzeugenden Punktreihe auffassen darf, so folgern wir: *Bei Ellipse und Hyperbel treten die Tangenten paarweise parallel auf*, d. h. es giebt zu jeder Tangente eine bestimmte parallele Tangente. Seien (Fig 34) e und f_1 die in dem Schnittpunkte der Träger vereinigten Punkte, also e_1 und f die Berührungspunkte,

Fig. 34.



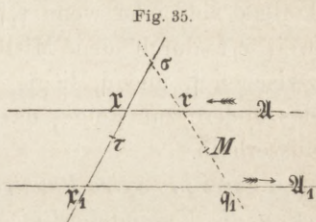
so muss der Schnittpunkt ($r q_1, q_1^\infty r_1^\infty$) mit e_1 und f in gerader Linie liegen (Nr. 65); dies ist der unendlich entfernte Punkt der Verbindungslinie $r q_1$, also muss die Linie $e_1 f$ mit $r q_1$ parallel laufen. Die Träger $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ und die durch r und q_1 ge-

zogenen Parallelstrahlen bilden ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Parallelogramm, dessen Diagonale $r q_1$ der Berührungssehne $f e_1$ parallel läuft. Sei s die vierte Ecke dieses Parallelogramms, dann lassen sich auch auf den Parallelstrahlen die Berührungspunkte leicht ermitteln. Betrachten wir nämlich zwei parallele Tangenten $r s$ und $f_1 q_1$ als Träger erzeugender Punktreihen und die beiden andern als Verbindungsstrahlen, so werden für diese Beziehung r und f_1 , ebenso s und q_1 Paare entsprechender Punkte sein, also der Schnittpunkt ($r q_1, s f_1$), d. h. der Mittelpunkt M des Parallelogramms wird auf der Berührungssehne der beiden parallelen Tangenten liegen; $e_1 M$ trifft mithin den Parallelstrahl durch r in dem gesuchten Berührungspunkt t und ebenso $f_1 M$ den Parallelstrahl durch q_1 in seinem Berührungspunkte, und es folgt:

Die vier Berührungspunkte auf den Seiten eines dem Kegelschnitt umgeschriebenen Parallelogramms bilden selbst ein Parallelogramm, dessen Seiten den Diagonalen des ersteren parallel laufen, und dessen Mittelpunkt mit dem des ersteren zusammenfällt.

Um nun zu erkennen, ob der erzeugte Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel ist, fassen wir zunächst zwei parallele Tangenten als Träger erzeugender Punktreihen auf. Die unendlich entfernten Punkte dieser

beiden Träger liegen vereinigt; ihre entsprechenden r und q_1 sind also die Berührungspunkte (Fig. 35); wird irgend ein Projectionsstrahl $r\xi_1$ hinzugefügt, so ist die ganze Beziehung bestimmt. Den Berührungspunkt auf $r\xi_1$ erhält man nach Nr. 67 dadurch, dass man zu dem Schnittpunkte σ des Strahls $r\xi_1$ mit der Berührungssehne rq_1 den vierten harmonischen dem σ zugeordneten Punkt τ in Bezug auf r, ξ_1 construiert; es wird nun nachzusehen sein, ob τ in die Unendlichkeit gelangen kann oder nicht; im ersten Falle ist der Kegelschnitt Hyperbel, im andern Ellipse. Es kann τ nur dann in die Unendlichkeit fallen, wenn σ in die Mitte von $r\xi_1$ zu liegen kommt; σ kann aber überhaupt nie zwischen r und ξ_1 zu liegen kommen, sobald die beiden Punktreihen ungleichlaufend sind; denn alsdann haben $r\xi$ und $q_1\xi_1$ stets gleichen Sinn (Nr. 30); der Schnittpunkt σ durchläuft also von der Verbindungslinie rq_1 die beiden unendlichen Stücke, welche ausserhalb der Strecke rq_1 liegen; der Kegelschnitt ist nothwendig Ellipse. Wenn dagegen die beiden projectiven Punktreihen auf den parallelen Trägern $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ gleichlaufend sind, so verhält sich die Sache umgekehrt; $r\xi$ und $q_1\xi_1$ haben ungleichen Sinn; der Punkt σ durchläuft also nur die endliche Strecke zwischen r und q_1 und liegt daher immer zwischen r, ξ_1 ; er muss zweimal in die Mitte von $r\xi_1$, also auch von rq_1 gelangen. Denn verbinden wir die Mitte M von rq_1 mit den beiden projectiven Punktreihen, welche r und ξ_1 durchlaufen, so erhalten wir in M zwei concentrische projective Strahlbüschel, welche ungleichlaufend sind, folglich (Nr. 32) immer zwei reelle Doppelstrahlen haben; diese sind aber zwei Strahlen $r\xi_1$, deren Strecken $r\xi_1$ in M halbirt werden; ihre Berührungspunkte liegen im Unendlichen, der Kegelschnitt ist also Hyperbel.



Das Resultat dieser Betrachtung ist, dass zwei projective Punktreihen, deren Träger in paralleler Lage sich befinden, eine Ellipse erzeugen, wenn sie ungleichlaufend, dagegen eine Hyperbel, wenn sie gleichlaufend sind.

Oder auch: Ein Kegelschnitt ist Ellipse oder Hyperbel, wenn die Berührungspunkte von zwei parallelen Tangenten auf derselben Seite einer dritten Tangente oder auf verschiedenen Seiten liegen.

Aus der Eigenschaft der constanten Potenz $r\xi \cdot q_1\xi_1$ ergibt sich weiter: Wenn zwei feste parallele Tangenten eines Kegelschnitts von einer veränderlichen dritten getroffen werden, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken, welche auf jenen durch die Berührungspunkte und die Schnittpunkte der veränderlichen Tangente begrenzt werden, constant, positiv bei der Ellipse, negativ bei der Hyperbel.

80 Aus dem gefundenen Kennzeichen fließt unmittelbar ein neues für den allgemeinen Fall, dass die beiden Träger der erzeugenden Punktreihen sich nicht mehr in paralleler Lage befinden. Stellen wir uns wieder das Parallelogramm aus den Trägern \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 und den durch r und q_1 gehenden parallelen Tangenten vor (Fig. 34); t , auf Me_1 gelegen, war Berührungspunkt der zu \mathfrak{A}_1 parallelen Tangente. In den projectiven Punktreihen auf diesen parallelen Tangenten sind f_1 und r entsprechend. Es entsteht eine Ellipse, wenn die Punktreihen ungleichlaufend sind oder wenn $e_1 f_1$ und tr gleichen Sinn haben. Das erfordert, weil $e_1 t$ durch den Mittelpunkt des Parallelogramms geht, dass e_1 zwischen f_1 und q_1 liegt, und ebenso f zwischen e und r . Eins hat das andere zur Folge, da $f e_1 \parallel r q_1$. Bei der Hyperbel liegen sie beide ausserhalb.

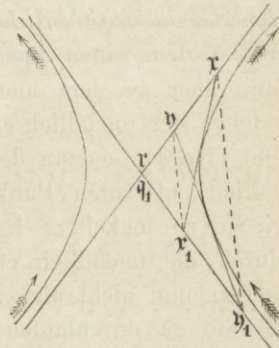
Zwei projective Punktreihen in allgemeiner Lage erzeugen eine Ellipse, wenn die Verbindungslinie $f e_1$ der Berührungspunkte der Träger zwischen dem Schnittpunkte e , f_1 und der Verbindungslinie $r q_1$ der Fluchtpunkte liegt, eine Hyperbel, wenn ausserhalb (vergl. Nr. 75).

Hieraus folgt, dass, wenn wir den Schnittpunkt der Träger zweier projectiver Punktreihen festhalten und die projective Beziehung ungeändert lassen, die Träger selbst aber um ihren Schnittpunkt drehen, der erzeugte Kegelschnitt seine Gattung nicht verändert, d. h. Ellipse bleibt, wofern er es einmal war, und ebenso Hyperbel, wohl aber seine Form. Dagegen kann der Kegelschnitt seine Gattung verändern, wenn wir die Träger in ihrer Lage festhalten, die Punktreihen aber auf ihnen verschieben, ohne die projective Beziehung zu verändern. Verschieben wir nur die Punktreihe \mathfrak{A} auf ihrem Träger, so bleibt der Kegelschnitt Ellipse, so lange f zwischen e und r liegt; gelangt f nach f_1 , so werden die Punktreihen perspectiv. In diesem Uebergangsfalle artet der Kegelschnitt in ein Punktepaar aus und ist sowohl als Ellipse, wie auch als Hyperbel anzusehen: das endliche Stück zwischen den beiden Punkten doppelt gedacht als unendlich schmale Ellipse, die beiden unendlichen Stücke auf der Verbindungslinie der beiden Punkte, welche zu beiden Seiten von ihnen liegen, doppelt gedacht als unendlich schmale Hyperbel. Wie bei der Erzeugung des Kegelschnitts durch projective Strahlbüschel als Uebergang von Ellipse zu Hyperbel die Parabel auftrat, zeigt sich hier bei der Erzeugung des Kegelschnitts durch projective Punktreihen ein neuer Uebergang von Ellipse zu Hyperbel durch das Punktepaar. Schieben wir nun die Punktreihe \mathfrak{A} auf ihrem Träger weiter fort, so kommt f ausserhalb $e r$ zu liegen, der Kegelschnitt ist also nach dem obigen Kennzeichen Hyperbel geworden; kommt dann r nach e , so wird r_1^{∞} , der unendlich entfernte

Punkt des Trägers \mathcal{A}_1 , der Berührungspunkt, also \mathcal{A}_1 die Tangente der Hyperbel in einem ihrer unendlich entfernten Punkte. Eine solche Tangente in einem der beiden unendlich entfernten Punkte der Hyperbel heisst *Asymptote der Hyperbel*. Wir können es leicht einrichten, dass die Träger der beiden erzeugenden Punktreihen die Asymptoten der Hyperbel werden, indem wir beide Punktreihen so auf ihren Trägern verschieben, dass die Punkte r und q_1 in ihrem Durchschnittspunkte vereinigt werden; dann sind die ihnen entsprechenden unendlich entfernten Punkte die Berührungspunkte.

Mit Hülfe der Asymptoten können wir uns leicht ein anschauliches 81 Bild der Hyperbel machen; da in ihrem Schnittpunkt die Fluchtpunkte r und q_1 vereinigt sind und für irgend ein Paar entsprechender Punkte das Rechteck $r\xi \cdot q_1\xi_1$ constant ist (Nr. 24), so bleibt auch der Inhalt des Dreiecks constant, welches von den Asymptoten und einer beliebigen dritten Tangente der Hyperbel gebildet wird, oder *jede Tangente der Hyperbel schliesst mit den beiden Asymptoten ein Dreieck von constantem Inhalte ein*. Das constante Rechteck

Fig. 36.



aus den auf den Asymptoten der Hyperbel durch eine veränderliche Tangente abgeschnittenen Strecken heisst *die Potenz der Hyperbel*. Denken wir uns daher die beiden Asymptoten und eine beliebige dritte Tangente $\xi\xi_1$ gegeben (Fig. 36), wodurch die projective Beziehung vollständig bestimmt wird, so erhalten wir leicht andere Tangenten, indem wir durch ξ und ξ_1 in irgend einer Richtung zwei Parallelen ziehen, welche in η_1 und η den Asymptoten begegnen; dann ist $\eta\eta_1$ eine neue Tangente, weil das Dreieck, welches sie mit den Asymptoten bildet, denselben Inhalt hat oder auch, weil $(\xi\eta_1, \xi_1\eta)$ sich auf der Berührungsehne der Träger, d. h. hier G_∞ , befindet (Nr. 65). *Auf jeder Tangente ist ferner der Berührungspunkt der Mittelpunkt zwischen den beiden Schnittpunkten mit den Asymptoten*, weil er der vierte harmonische dem Schnittpunkt mit G_∞ zugeordnete ist (Nr. 67). Verändern wir die Richtung der durch ξ und ξ_1 gezogenen Parallelen, so können wir leicht so viele Tangenten und auch Punkte der Hyperbel (die Berührungspunkte) herstellen, als erforderlich sind, um uns ein Bild von ihrem Verlaufe machen zu können.

Wir sehen hieraus, dass die Hyperbel in zwei hinsichtlich des Schnittpunkts der Asymptoten (r, q_1) — der deshalb Mittelpunkt der Hyperbel genannt werden kann — symmetrische unendliche Zweige

zerfällt, welche ganz in zwei Scheitelräume der von den Asymptoten gebildeten Winkel hinein fallen, während die andern beiden Scheitelräume frei bleiben; die Zweige der Hyperbel liegen nämlich in denjenigen Winkelräumen der Asymptoten, welche von entsprechenden Hälften (Nr. 24, Fig. 13) der Träger der erzeugenden Punktreihen eingeschlossen werden. Die Parallelen durch den Mittelpunkt zu sämtlichen Tangenten der Hyperbel fallen in die beiden andern Scheitelräume, und je zwei parallele Tangenten berühren die Hyperbel auf verschiedenen Zweigen; die Asymptoten erscheinen als je ein Paar zusammenfallender paralleler Tangenten und trennen diejenigen Winkelräume, welche solche Richtungen enthalten, in denen es Tangenten an die Hyperbel giebt, von denen, in welchen es keine Tangentenrichtungen giebt. Verfolgen wir den Verlauf einer Tangente an der Hyperbel, so erkennen wir, dass sie sich von der Lage einer Asymptote continuirlich bis in die Lage der andern bewegt, dann aber ihren Drehungssinn ändernd wieder in die Lage der ersten Asymptote zurückkehrt.

Der Berührungspunkt durchläuft dabei *die beiden Zweige der Hyperbel in continuirlicher Folge*, indem er zuerst auf dem einen Zweige bis zu dem einen unendlich entfernten Punkte der Hyperbel geht, dann aber zu dem unendlich entfernten Punkte des andern Zweiges, welcher der unendlich entfernte Punkt derselben Asymptote ist, übergeht (Nr. 3), sodann den andern Zweig durchläuft und durch den unendlich entfernten Punkt der zweiten Asymptote zum ersten Zweige wieder zurückkehrt. In diesem Sinne haben wir uns *die Hyperbel als* (durch die unendlich entfernten Punkte) *zusammenhängende Curve* zu denken und nicht als zwei getrennte Curven, und nur derartig haben wir sie zu durchlaufen, wie die Pfeile in Fig. 36 es andeuten. Wir erkennen zugleich bei diesem Verlaufe, dass, wenn wir uns die Hyperbel als Erzeugniss zweier projectiver Strahlbüschel denken, die Strahlbüschel gleichlaufend sind, sobald ihre Grundpunkte sich auf demselben Zweige der Hyperbel befinden, dagegen ungleichlaufend, wenn sie sich auf verschiedenen Zweigen der Hyperbel befinden. (Nr. 76.)

82 Ermitteln wir die Bedingung, unter welcher zwei projective Punktreihen eine *gleichseitige Hyperbel* zu ihrem Erzeugniss haben.

Nehmen wir zunächst zwei parallele Träger an; die projectiven Punktreihen müssen gleichlaufend sein, damit eine Hyperbel entsteht. Es seien wieder r, q_1 die Fluchtpunkte, in diesem Falle auch die Berührungspunkte der Träger, ferner g, g_1, h, h_1 die Potenzpunkte, so dass $\left(\frac{1}{2}gh\right)^2 = \left(\frac{1}{2}h_1g_1\right)^2$ der absolute Werth der Potenz ist. Mit der Mitte M von r, q_1 liegen g und g_1, h und h_1 je in gerader Linie, weil

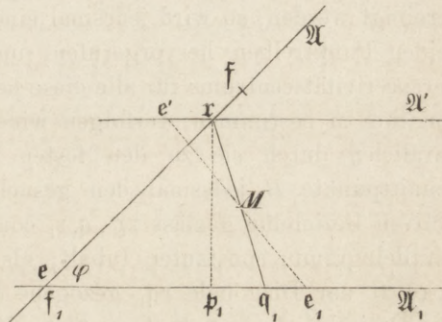
bei gleichlaufenden parallelen projectiven Punktreihen $g\bar{h}$ und \bar{h}_1g_1 denselben Sinn haben. Folglich sind $g\bar{g}_1$ und $\bar{h}\bar{h}_1$ die Asymptoten, da die Berührungspunkte auf ihnen, als vierte harmonische Punkte, in Bezug auf g und g_1 , bezw. \bar{h} und \bar{h}_1 , zur Mitte M , dem Schnitte mit der Berührungsehne $r\bar{q}_1$ der Träger, unendlich fern sind. Sollen sie rechtwinklig sein, so muss (absolut)

$$Mr = r\bar{g} = r\bar{h}$$

oder $(\frac{1}{2}r\bar{q}_1)^2$ gleich dem absoluten Werthe der Potenz sein, und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so sind die Asymptoten rechtwinklig.

Jetzt seien beliebige Träger $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ gegeben (Fig. 37), e, \bar{f}_1 sei ihr Schnitt, e_1, \bar{f} die entsprechenden Punkte, r, \bar{q}_1 die Fluchtpunkte, M wieder die Mitte von $r\bar{q}_1$. Wir ziehen die parallele Tangente \mathcal{A}' zu \mathcal{A}_1 , die durch r geht, und schneiden Me_1 mit \mathcal{A}' in e' . In den projectiven Punktreihen auf \mathcal{A}' und \mathcal{A}_1 sind, als Schnitte mit \mathcal{A} , entsprechend r und \bar{f}_1 , ferner sind Fluchtpunkte und zugleich Berührungspunkte e' und e_1 ; der absolute Werth der Potenz ist $re' \cdot e_1\bar{f}_1 = e_1\bar{q}_1 \cdot e_1\bar{f}_1$, und das muss gleich $M\bar{e}_1^2$ sein.

Fig. 37.



Es sei p_1 der Fusspunkt des Loths aus r auf \mathcal{A}_1 , so ist die Potenz von e_1 in Bezug auf den Kreis durch r, \bar{q}_1, p_1 , dessen Mittelpunkt M ist,

$$M\bar{e}_1^2 - M\bar{r}^2 = e_1\bar{q}_1 \cdot e_1p_1;$$

also:

$$M\bar{r}^2 = e_1\bar{q}_1 \cdot e_1\bar{f}_1 + e_1\bar{q}_1 \cdot p_1e_1 = e_1\bar{q}_1 \cdot p_1\bar{f}_1 = e_1\bar{q}_1 \cdot re \cdot \cos \varphi,$$

wo φ der Winkel der Träger ist. Oder (absolut)

$$\left(\frac{1}{2}r\bar{q}_1\right)^2 = re \cdot \bar{q}_1e_1 \cdot \cos \varphi.$$

Wir wissen, bei einer Hyperbel muss e_1 ausserhalb $\bar{f}_1\bar{q}_1$ liegen. Also haben wir folgende Bedingung:

Zwei projective Punktreihen erzeugen eine gleichseitige Hyperbel, wenn e_1 so ausserhalb $\bar{f}_1\bar{q}_1$ liegt, dass der Gleichung:

$$\left(\frac{1}{2}r\bar{q}_1\right)^2 = re \cdot \bar{q}_1e_1 \cdot \cos \varphi$$

(absolut) genügt wird.

Die Projectivität ist dann durch das Entsprechen von r und r_1^∞ , q^∞ und q_1 , e und e_1 festgelegt; der Punkt f genügt von selbst der Bedingung, dass er ausserhalb er liegt und dass

$$\left(\frac{1}{2} r q_1\right)^2 = r f \cdot q_1 f_1 \cdot \cos \varphi.$$

Bei $\varphi = 90^\circ$ müssen, wie wir wissen, r und q_1 sich im Schnittpunkte vereinigen.

- 83 Die Eigenschaft der Asymptoten einer Hyperbel ist auch die Quelle einer Erzeugung des Kegelschnitts, welche an die perspective Lage zweier projectiver Punktreihen anknüpft. Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 die Träger zweier projectiver Punktreihen in perspective Lage, und werden die in sich festgehaltenen Punktreihen so auf ihren Trägern verschoben, dass immer zwei neue entsprechende Punkte ξ , ξ_1 in dem Schnittpunkte vereinigt werden, so wird jedesmal eine neue perspective Lage derselben beiden Punktreihen hervorgerufen, und es kann nach dem Orte des Perspectivitätscentrums für alle diese perspective Lagen gefragt werden. Um ihn zu bestimmen, verfolgen wir die Punkte r und q_1 , ziehen die Parallelen durch sie zu den festen Trägern und erhalten in deren Schnittpunkte B jedesmal den gesuchten Punkt. Weil nun der projectiven Beziehung gemäss $r\xi \cdot q_1\xi_1$ constant ist, so hat das gezeichnete Parallelogramm constanten Inhalt; also bestimmt auch die durch die Ecke B zur Diagonale rq_1 gezogene Parallele mit den Trägern \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 ein Dreieck von constantem (doppeltem) Inhalt, umhüllt also eine Hyperbel, deren Asymptoten \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 sind; da aber B in der Mitte zwischen den Schnittpunkten mit den beiden Trägern liegt, so ist B der Berührungspunkt; also wird der gesuchte Ort eine Hyperbel, welche die beiden festen Träger zu ihren Asymptoten und die vierfache Potenz der Punktreihen zur eigenen Potenz hat.

§ 27. Das einem Kegelschnitte umgeschriebene Vierseit und eingeschriebene Viereck.

- 84 Die in Nr. 73 durchgeführte Untersuchung und die dort in Betracht gezogene Figur (Fig. 31) zeigt eine Menge von Eigenschaften des Kegelschnitts, von denen einige hier hervorgehoben werden sollen. Das dort gewonnene Resultat lässt sich mit etwas veränderter Bezeichnung so aussprechen:

Werden (Fig. 38) irgend vier Tangenten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} eines Kegelschnitts als vollständiges Vierseit aufgefasst, dessen sechs Ecken seien:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{D} &= a, & \mathfrak{B}\mathfrak{D} &= b, & \mathfrak{C}\mathfrak{D} &= c, \\ \mathfrak{B}\mathfrak{C} &= \alpha, & \mathfrak{C}\mathfrak{A} &= \beta, & \mathfrak{A}\mathfrak{B} &= \gamma, \end{aligned}$$

und dessen drei Diagonalen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sich in den Punkten:

$$(b\beta, c\gamma) = x, \quad (c\gamma, a\alpha) = y, \quad (a\alpha, b\beta) = z$$

treffen, und werden die Berührungspunkte a, b, c, d der vier Tangenten als vollständiges Viereck aufgefasst, so fallen die drei Diagonalpunkte des letzteren mit den Punkten x, y, z zusammen; es ist:

$$(ad, bc) = x, \quad (bd, ca) = y, \quad (cd, ab) = z.$$

Hieraus geht hervor, dass der Kegelschnitt vollständig bestimmt ist, sobald von ihm vier Tangenten und der Berührungspunkt auf

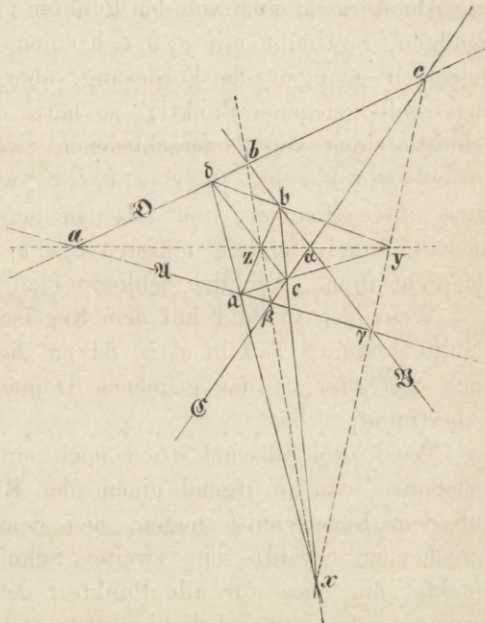
einer, oder vier Punkte und die Tangente in einem derselben gegeben sind, was auch daraus hervorgeht, dass mit diesen Bestimmungsstücken drei Paare entsprechender Elemente zweier projectiver Punktreihen oder Strahlbüschel gegeben werden, also die ganze projective Beziehung bestimmt ist. Wir finden die Berührungspunkte auf den andern Tangenten, wenn a auf \mathfrak{A} bekannt ist, indem wir $a\alpha$, $a\gamma$, $a\beta$ ziehen und ihre Schnittpunkte mit \mathfrak{D} , \mathfrak{C} , \mathfrak{B} aufsuchen, oder wir finden die Tangenten in b, c, d , wenn die Tangente \mathfrak{A} in a bekannt ist, indem wir die Schnittpunkte γ, β, α , in welchen \mathfrak{A} den Verbindungslinien xy, xz, yz begegnet, bez. mit den andern drei Ecken b, c, d verbinden.

Wir haben gesehen, dass irgend zwei Tangenten eines Kegel-

schnitts von sämtlichen in zwei projectiven Punktreihen getroffen werden. Und ebenso sind die Büschel, welche sämtliche Punkte eines Kegelschnitts aus zweien von ihnen projectiren, projectiv.

Die vier Tangenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ des Kegelschnitts werden also von allen Tangenten in vier Punkten geschnitten, welche dasselbe Doppelverhältniss haben. Und ebenso haben die Strahlen, die nach den Punkten

Fig. 38.



$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Kegelschnitts aus seinen verschiedenen Punkten gehen, alle das nämliche Doppelverhältniss, das mit dem vorigen gleich ist, wenn, wie im Vorangehenden, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ die Berührungspunkte von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ sind (Nr. 73).

Selbstverständlich ist, dass die Zuordnung festgehalten wird.

Umgekehrt, alle Punkte χ , von welchen nach vier gegebenen Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Strahlen gehen, deren Doppelverhältniss gegeben ist oder die einem gegebenen vierelementigen Gebilde, etwa vier Strahlen a, b, c, d eines Büschels, projectiv sind, erzeugen einen durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gehenden Kegelschnitt; und ebenso umhüllen alle Strahlen, in welche vier gegebene Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ Punkte einschneiden, die ein gegebenes Doppelverhältniss haben oder die zu a, b, c, d projectiv sind, einen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ berührt.

Denn irgend einer von den Punkten χ , welche der ersteren Forderung genügen, bestimmt mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einen Kegelschnitt, und alle Punkte desselben genügen der Forderung, aber kein anderer. Thäte es ein ausserhalb gelegener Punkt χ' , so hätte die Gerade $\chi'a$ mit dem Kegelschnitte einen von χ' verschiedenen zweiten Schnitt χ ausser α , und sowohl χ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$), als χ' ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) wären zu $abcd$ projectiv, also auch unter einander, und zwar in perspectiver Lage, da χa und $\chi' a$ identisch sind; folglich müssten β, γ, δ in gerader Linie liegen, was sie nicht thun. Aehnlich schliesst man im andern Falle.

Wenn der Punkt χ auf dem Kegelschnitte in einen der gegebenen Punkte kommt, etwa in α , so ist χa die Tangente t_a in α ; daher hat auch α ($t_a, \beta, \gamma, \delta$) das gegebene Doppelverhältniss, und dadurch ist t_a bestimmt.

Wird zum Büschel $abcd$ noch ein fünfter Strahl e gefügt, so construirt man in irgend einem der Büschel χ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$), wo die χ auf dem Kegelschnitt liegen, den dem e in der Projectivität entsprechenden Strahl; sein zweiter Schnitt mit der Curve sei e' , so leuchtet ein, dass für alle Punkte χ des Kegelschnitts χ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, e'$) $\propto abcde$. Ist nun e beliebig, also nicht auf dem Kegelschnitte gegeben, so sei χ der zweite Schnitt von ee' mit demselben. Dieser Punkt χ ist der einzige Punkt, für welchen χ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, e$) $\propto abcde$.

Wenn also ein fünfelementiges Gebilde, etwa ein Büschel von fünf Strahlen a, b, c, d, e , gegeben ist und fünf Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, e$, so giebt es einen und im allgemeinen nur einen Punkt χ von der Beschaffenheit, dass χ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, e$) $\propto abcde$.

86 Vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ können wir auf dreierlei Weise in zwei Paare zerlegen: $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$, $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$; wir haben daher drei Kegelschnitte durch die vier Punkte, aus deren Punkten nach

ihnen harmonische Büschel gehen und die man wohl *die dem Viereck $abcd$ umgeschriebenen harmonischen Kegelschnitte* nennen kann.* Und ebenso kann man einem Vierseite $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ drei harmonische Kegelschnitte einschreiben.

Umgekehrt nennt man vier Punkte eines Kegelschnitts *harmonische Punkte des Kegelschnitts*, wenn aus einem und dann aus jedem Punkte der Curve vier harmonische Strahlen nach ihnen gehen, und vier Tangenten harmonisch, wenn sie auf einer und dann jeder Tangente harmonische Punkte einschneiden. Nach Nr. 73 *sind die Tangenten von vier harmonischen Punkten eines Kegelschnitts ebenfalls harmonisch, und umgekehrt.*

Vier harmonische Punkte a, b, c, d eines Kegelschnitts haben immer die Lage, dass die Verbindungslinie von zwei zugeordneten durch den Schnittpunkt der Tangenten in den beiden andern zugeordneten geht. In der That, es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Tangenten von a, b , so hat man, die Punkte aus a und b projicirend:

$$a(\mathfrak{A}, b, c, d) = b(a, \mathfrak{B}, c, d) = -1 = b(\mathfrak{B}, a, c, d).$$

Die beiden projectiven Büschel $a(\mathfrak{A}, b, c, d)$ und $b(\mathfrak{B}, a, c, d)$ sind aber perspectiv; folglich liegen die Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}, c, d$ in gerader Linie.

Und umgekehrt, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sich auf cd schneiden, so sind a, b, c, d harmonische Punkte.

Zu zwei Punkten eines Kegelschnitts giebt es also unendlich viele Paare harmonisch zugeordneter; ihre Verbindungslinien laufen alle durch den Schnittpunkt der Tangenten der gegebenen Punkte.

Kehren wir zu der allgemeineren Figur von vier beliebigen Tan- 87 genten eines Kegelschnitts und ihren vier Berührungspunkten zurück, so können wir das Vierseit festhalten und das Viereck verändern, oder auch das Viereck festhalten und das Vierseit verändern. Ersteres geschieht, indem wir einen Berührungspunkt a die feste Tangente \mathfrak{A} durchlaufen lassen, letzteres, indem wir um eine Ecke a die Tangente \mathfrak{A} drehen. Wir erhalten dadurch eine *Schaar* von unendlich vielen Kegelschnitten, welche dieselben vier Tangenten haben, und ein *Büschel* von unendlich vielen Kegelschnitten, welche durch dieselben vier Punkte gehen, auf deren Untersuchung wir aber erst im dritten Abschnitt näher eingehen wollen. Für jetzt genüge es, indem wir die

* Sie sind alle drei Hyperbeln, oder nur zwei und die dritte eine Ellipse, je nachdem einer der vier Punkte a, b, c, d vom Dreiecke der andern eingeschlossen wird oder jeder ausserhalb des Dreiecks der übrigen liegt.

vier Tangenten $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ festhalten, zwei Kegelschnitte ins Auge zu fassen, welche in den Punkten a, b, c, d und a^1, b^1, c^1, d^1 die vier Tangenten berühren; auch das zweite Viereck $a^1b^1c^1d^1$ hat seine Diagonalpunkte in x, y, z ; insbesondere schneiden sich ab und a^1b^1 in z . Weil nun a, α, y, z vier harmonische Punkte sind, also $\gamma a, \gamma \alpha, \gamma y, \gamma z$ vier harmonische Strahlen und $(aa^1, bb^1) = \gamma$ ist, so muss (ab^1, ba^1) auf dem vierten harmonischen Strahle, d. h. auf γy oder xy liegen. Die vier von a ausgehenden Strahlen a (b^1, a^1, c, d) treffen also die vier von b ausgehenden b (a^1, b^1, c, d) in vier Punkten derselben Gerade $xy\gamma$; wir erhalten daher zwei perspective Strahlbüschel; mithin sind die beiden Strahlbüschel a (a^1, b^1, c, d) und b (a^1, b^1, c, d) projectiv, folglich liegen die sechs Punkte a, b, c, d, a^1, b^1 auf einem Kegelschnitt. In gleicher Weise zeigt sich, dass auch a, b, c, d, a^1, c^1 auf einem Kegelschnitt liegen müssen und, da dieser durch fünf Punkte schon bestimmt ist (Nr. 69), auf demselben Kegelschnitt; folglich liegen alle acht Punkte $a, b, c, d, a^1, b^1, c^1, d^1$ auf einem und demselben Kegelschnitt, oder:

Die acht Berührungspunkte von irgend zwei demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten mit den Seiten liegen allemal auf einem neuen Kegelschnitte.

In gleicher Weise wird der duale Satz bewiesen:

Die acht Tangenten zweier demselben Vierecke umgeschriebenen Kegelschnitte in den Ecken berühren allemal einen neuen Kegelschnitt.

Diese beiden demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte bieten noch andere Eigenthümlichkeiten rücksichtlich der Lage ihrer Berührungspunkte zu den Gegenecken des Vierseits und den gegenseitigen Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte dar, deren nähere Untersuchung uns hier zu weit führen würde.* (Siehe Aufgaben und Sätze.)

Auch wollen wir hier nicht auf eine allgemeine Eigenschaft desjenigen Kegelschnitts, welcher die acht Berührungspunkte zweier demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte enthält, eingehen, weil dieselbe aus späteren Betrachtungen unmittelbar hervortritt. (Nr. 295.) Wir könnten aus der in diesem Paragraphen untersuchten Figur leicht zu den sogenannten Polar-Eigenschaften des Kegelschnitts übergehen, ziehen es indessen vor, dieselben etwas später aus ursprünglicheren Betrachtungen abzuleiten.

* Vergl. Steiner, Journal für Mathematik Bd. 44 S. 175, Bd. 45 S. 219 oder Gesammelte Werke Bd. II S. 427, 471.

§ 28. Das Pascal'sche Sechseck* und die Steiner'sche Erweiterung desselben.

Wir haben gesehen, dass fünf Punkte zur Bestimmung des Kegelschnitts nothwendig sind, und dass er durch dieselben eindeutig bestimmt wird. Damit sechs Punkte auf demselben Kegelschnitt liegen, ist eine Beziehung zwischen ihnen erforderlich, welche darin besteht, dass, wenn die Punkte mit B, B_1, a, b, c, d bezeichnet werden, die beiden Strahlbüschel von je vier Strahlen $B(a, b, c, d)$ und $B_1(a, b, c, d)$ dasselbe Doppelverhältniss haben. Diese Beziehung haben wir bereits oben anders aufgefasst und daraus den *Pascal'schen* Satz abgeleitet, auf welchen wir jetzt näher eingehen wollen.

Seiner Wichtigkeit wegen soll er jedoch ordentlich bewiesen werden, was oben in Nr. 69 nicht geschehen ist. Lassen wir ab von den vier Strahlen $B(a, b, c, d)$ und ac von den vier Strahlen $B_1(a, b, c, d)$ treffen, so erhalten wir vier Paare entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen, nämlich:

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & (Bc, ab), & (Bd, ab), \\ a, & (B_1b, ac), & c, & (B_1d, ac); \end{array}$$

da der Schnittpunkt a zwei entsprechende Punkte enthält, so sind die Punktreihen in perspectiver Lage, also laufen die Verbindungslinien entsprechender Punkte $B_1b, Bc, [(Bd, ab), (B_1d, ac)]$ durch einen Punkt, oder, was dasselbe sagt, die drei Punkte:

$$(B_1b, Bc), \quad (Bd, ab), \quad (B_1d, ac)$$

liegen auf einer Gerade; diese drei Punkte sind die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten des einfachen Sechsecks B_1bacBd .

Der Leser wiederhole den Beweis für eine andere Reihenfolge der Punkte.

Dieser Satz ist offenbar auch umzukehren: Liegen die drei Schnittpunkte von drei Geradenpaaren auf einer Gerade und fasst man die Paare als die gegenüberliegenden Seiten eines einfachen Sechsecks auf, so liegen die sechs Ecken desselben auf einem Kegelschnitt; denn seien die drei Geradenpaare ab, a_1b_1, a_2b_2 , deren Schnittpunkte auf einer Gerade liegen, so haben wir, um das Sechseck zu erhalten, die Geraden in der Reihenfolge $ab_2a_1ba_2b_1$ zu nehmen; die Ecken sind:

$$ab_2, b_2a_1, a_1b, ba_2, a_2b_1, b_1a.$$

* Ein *Pascal'sches* Sechseck wurde früher *Hexagramma mysticum* genannt.

Diese sechs Ecken müssen nun auf einem Kegelschnitt liegen, weil die beiden Büschel:

$$\begin{aligned} a_2 b_1 & (a_1 b, a_1 b_2, b a_2, b_1 a), \\ a b_2 & (a_1 b, a_1 b_2, b a_2, b_1 a) \end{aligned}$$

projectiv sind. Die ersten vier Strahlen treffen nämlich die Gerade a_1 und die letzten vier Strahlen die Gerade b in den Punkten:

$$\begin{aligned} a_1 b, a_1 b_2, a_1 a_2, a_1 b_1, \\ a_1 b, b b_2, b a_2, a b; \end{aligned}$$

jene Punkte liegen mit diesen perspectiv; denn der Punkt $a_1 b$ ist gemeinschaftlich, und die drei anderen Verbindungsstrahlen $b_2, a_2, (ab, a_1 b_1)$ schneiden sich in einem Punkte, weil die Schnittpunkte $ab, a_1 b_1, a_2 b_2$ in einer Gerade liegen. Damit ist der umgekehrte Satz erwiesen und lässt sich, wie wir aus der Bezeichnung der sechs Ecken erkennen, auch so aussprechen:

Wenn von den neun Punkten, in welchen die Seiten eines Dreiecks $aa_1 a_2$ die Seiten eines andern $bb_1 b_2$ treffen, drei in gerader Linie liegen, so liegen die übrigen sechs auf einem Kegelschnitte.

Ebenso lässt sich *Brianchon's* Satz (Nr. 64) umkehren und anders aussprechen. Unter dem *Pascal's*chen und dem *Brianchon's*chen Satze versteht man aber jetzt meistens den Satz *und* seine Umkehrung.

89 Lässt man von den sechs Punkten eines *Pascal's*chen Sechsecks zweimal zwei benachbarte unendlich nahe an einander rücken, so gehen die verbindenden Seiten in Tangenten über; wählt man die Reihenfolge so, dass diese Seiten Gegenseiten werden, dann erhält man den Satz:

Wenn einem Kegelschnitte ein vollständiges Viereck eingeschrieben ist, so schneiden die Tangenten in zwei Ecken sich stets auf derjenigen Diagonale des Vierecks, durch deren gegenüberliegenden Diagonalpunkt die Verbindungsseite der beiden Ecken geht.

Auf derselben Diagonale schneiden sich daher auch die Tangenten in den beiden andern Ecken.

Daraus folgt der Nr. 73, 84 erhaltene Satz, dass das Viereck dasselbe Diagonaldreieck wie das vollständige Vierseit der Tangenten seiner Ecken ist, welcher Satz aber auch aus dem dualen durch Specialisirung des *Brianchon's*chen Satzes sich ergebenden Satze folgt, da er in sich dual ist.

Lässt man dreimal zwei Ecken eines *Pascal's*chen Sechsecks sich vereinigen, so dass drei Tangenten Sechseck-Seiten werden, so ergibt sich der Satz von Nr. 70 über die Tangenten in den Ecken eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks und analog aus dem *Brianchon's*chen der Satz von Nr. 67 über ein umgeschriebenes Dreieck.

Ferner sind die beiden Sätze von *Pascal* und *Brianchon* äusserst 90 wichtig, um, *wenn fünf Punkte oder fünf Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind*, wodurch er eindeutig bestimmt ist, *weitere Punkte, bzw. weitere Tangenten zu construiren*. Es soll der zweite Punkt des Kegelschnitts auf einem beliebig gegebenen Strahle construirt werden, welcher durch einen der fünf gegebenen Punkte geht; man hat dann diesen und den gesuchten zu Nachbarn in der Reihenfolge zu machen, so dass der gegebene Strahl Seite wird. Die fünf gegebenen Punkte seien 1, 2, 3, 4, 5 und durch 1 sei der Strahl gezogen, auf dem der gesuchte Punkt 6 liegen soll; so dass der Strahl die Seite 61 ist. Von der *Pascal'schen* Gerade kennen wir die Punkte: (12, 34), (34, 61); der dritte Punkt ist (23, 56); 23 giebt diesen dritten Punkt auf der durch jene beiden Punkte bestimmten *Pascal'schen* Gerade; wird er mit 5 verbunden, so giebt die Verbindungslinie auf dem gegebenen Strahle den Punkt 6.

Statt zweier endlich getrennter Punkte kann man zwei unendlich nahe und ihre Verbindungslinie geben, d. h. einen Punkt der Curve und seine Tangente; man muss nur diese Punkte wiederum zu Nachbarn in der Reihenfolge machen, damit diese Tangente Seite wird. Man löse demnach die Aufgaben:

Von einem Kegelschnitte sind vier Punkte und die Tangente in einem oder drei Punkte und die Tangenten in zweien gegeben; es sollen weitere Punkte construirt werden.

Oder es sind wiederum fünf Punkte gegeben, die Tangente in einem ist zu suchen; wir denken uns den sechsten unendlich nahe neben diesem und auch als Nachbar in der Reihenfolge; die Tangente in 5 ergibt sich also folgendermassen: man verbinde die Punkte (12, 45) und (34, 51) = (34, 61) durch die *Pascal'sche* Gerade, schneide diese mit 23; nach dem Schnitte geht die gesuchte Tangente.

Der Leser bilde noch andere Specialisirungen, insbesondere auch dahin, dass unter den gegebenen Punkten sich auch unendlich entfernte befinden, die dann durch Geraden, die nach ihnen gehen, veranschaulicht sind.

Z. B. Von einer Hyperbel sind die eine Asymptote, d. h. ein unendlich ferner Punkt und seine Tangente, und dann noch drei andere Punkte gegeben; man ermittle die Richtung nach dem andern unendlich entfernten Punkte und construire dessen Asymptote. Von einer Hyperbel sind beide Asymptoten gegeben und ein Punkt; man construire weitere Punkte und die Tangente in diesem Punkte; es muss sich zeigen, dass *auf jeder Gerade durch den Punkt der zweite Hyperbelpunkt so liegt, dass die Sehne dieselbe Mitte hat wie die Strecke zwischen den*

Asymptoten, auf der Tangente also der Berührungspunkt in diese Mitte fällt. Von einer Parabel ist die Richtung nach dem unendlich fernen Berührungspunkte, also dieser Punkt und seine Tangente, die G_∞ , gegeben nebst drei andern Punkten.

Sehr lehrreich ist es, die dualen Constructionen zu formuliren und auszuführen; der Schnitt einer Tangente mit der unendlich nahen ist ihr Berührungspunkt.

Eine Hyperbel ist z. B. eindeutig bestimmt durch eine Asymptote und drei andere Tangenten, durch beide Asymptoten und eine beliebige Tangente: der constante Inhalt, der Nr. 81 gefunden wurde, muss sich bei diesen Constructionen ergeben. Eine Parabel ist eindeutig bestimmt durch vier Tangenten, zu denen ja als fünfte G_∞ tritt. Man construiren beispielsweise den Berührungspunkt dieser ausgezeichneten Tangente.*

91 Die beiden Sätze von *Pascal* und *Brianchon* lassen sich in Verbindung bringen und führen dann zu einem neuen Satze. Fassen wir nämlich in dem obigen Sechseck $B_1 b a c B d$ die Schnittpunkte der Gegenseiten auf:

$$(B_1 b, Bc), \quad (Bd, ab), \quad (B_1 d, ac),$$

welche in gerader Linie liegen müssen, so haben wir zugleich drei Punktepaare, deren Verbindungslinien durch einen Punkt laufen, nämlich:

$$B_1 \text{ und } b, B \text{ und } c, \quad (Bd, ab) \text{ und } (B_1 d, ac).$$

Nehmen wir diese als gegenüberliegende Ecken eines einfachen Sechsseits, so dass die Ecken desselben die Reihenfolge haben:

$$B_1, (B_1 d, ac), c, b, (ba, dB), B$$

und demnach die auf einander folgenden Seiten sind:

$$B_1 d, ac, cb, ba, dB, BB_1.$$

Diese sechs Linien müssen nach *Brianchon's* Satze einen Kegelschnitt berühren. Sie sind nichts anderes, als die Seiten der beiden Dreiecke abc und $BB_1 d$; wir schliessen hieraus den Satz:

Wenn die sechs Ecken zweier Dreiecke auf einem Kegelschnitt liegen, so berühren die sechs Seiten derselben einen zweiten Kegelschnitt;

und den dualen Satz, welcher zugleich der umgekehrte ist:

Wenn die sechs Seiten zweier Dreiecke einen Kegelschnitt berühren, so liegen die sechs Ecken derselben auf einem zweiten Kegelschnitt.

* Dem Leser wird sehr empfohlen, diese Constructionen auszuführen unter möglichster Veränderung der gegebenen Stücke.

Da der Kegelschnitt sowohl durch fünf Tangenten als auch durch fünf Punkte eindeutig bestimmt ist, so lässt sich dasselbe Ergebnis auch so aussprechen:

Haben zwei Kegelschnitte eine solche Lage zu einander, dass es ein Dreieck gibt, welches gleichzeitig dem einen um- und dem andern eingeschrieben ist, so gibt es unzählig viele Dreiecke derselben Beschaffenheit.

In der That, abc sei dem Kegelschnitte K^2 ein- und dem \mathcal{K}^2 umgeschrieben; so ziehe man von dem beliebigen Punkte a' von K^2 die Tangenten an \mathcal{K}^2 , welche K^2 zum zweiten Male in b', c' treffen; abc und $a'b'c'$ sind beide dem K^2 eingeschrieben, also einem andern Kegelschnitte umgeschrieben; da dieser aber mit \mathcal{K}^2 fünf Tangenten gemeinsam hat, so ist er mit ihm identisch, d. h. \mathcal{K}^2 berührt nicht bloß $a'b', a'c'$, sondern auch $b'c'$.

Wir wollen nun die vollständige Figur eines Sechsecks im Kegelschnitt näher untersuchen und die von Steiner angegebenen Eigenschaften derselben herleiten.

Sechs Punkte eines Kegelschnitts 1, 2, 3, 4, 5, 6 lassen sich auf 60 verschiedene Arten zu einem einfachen Sechseck verbinden; von sämtlichen 1. 2. 3. 4. 5. 6 Permutationen liefern nämlich immer zweimal sechs Sechseck, z. B.:

1 2 3 4 5 6 | 2 3 4 5 6 1 | 3 4 5 6 1 2 | 4 5 6 1 2 3 | 5 6 1 2 3 4 | 6 1 2 3 4 5
 6 5 4 3 2 1 | 1 6 5 4 3 2 | 2 1 6 5 4 3 | 3 2 1 6 5 4 | 4 3 2 1 6 5 | 5 4 3 2 1 6,

da man die sechs Ecken in derselben Reihenfolge in einem und in dem entgegengesetzten Sinne durchlaufen und ausserdem mit jeder Ecke beginnen kann. Die sechs Punkte bilden infolge dessen nur

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 60 \text{ verschiedene Sechsecke.}$$

Bei jedem derselben liegen nach dem Pascal'schen Satze die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden, z. B. beim Sechseck 1 2 3 4 5 6 die Schnittpunkte:

$$(12, 45), (23, 56), (34, 61).$$

Solcher Pascal'schen Geraden erhalten wir also 60, und diese haben einen eigenthümlichen Zusammenhang. Genau auf dieselbe Weise, wie in dem in Nr. 66 behandelten speciellen Falle, wo der Kegelschnitt ein Geradenpaar ist, erhalten wir auch im allgemeinen Falle, dass die Pascal'schen Geraden für die drei Sechsecke:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6, \quad 1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4, \quad 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2$$

sich in einem Punkte schneiden. Denn in dem dortigen Beweise, dass $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$ in einen Punkt zusammenlaufen, wurde der Umstand, dass

a, b, c und ebenso a_1, b_1, c_1 in gerader Linie liegen, nicht benutzt. Die drei Sechsecke waren dort:

$$ab_1ca_1bc_1, \quad aa_1bb_1cc_1, \quad aa_1cc_1bb_1,$$

also in der jetzigen Bezeichnung:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6, \quad 1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6 \quad \text{oder} \quad 1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4, \quad 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2.$$

Der Punkt, in welchen die drei *Pascal'schen* Geraden zusammenlaufen, heisst ein *Steiner'scher* Punkt. Ebenso laufen die *Pascal'schen* Geraden der drei Sechsecke:

$$2\ 5\ 4\ 3\ 6\ 1, \quad 2\ 3\ 4\ 1\ 6\ 5, \quad 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 3$$

durch einen *Steiner'schen* Punkt, welcher der *Gegenpunkt* des ersteren genannt werde.* Die erste Gruppe von drei Sechsecken ist nun so gebildet, dass die erste, dritte und fünfte Ecke festgehalten, die zweite, vierte und sechste cyclisch vertauscht werden, während bei der zweiten Gruppe die vorhin vertauschten Ecken fest bleiben und die übrigen drei cyclisch vertauscht werden. Die zweite Gruppe kann man auch schreiben:

$$1\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2, \quad 1\ 4\ 3\ 2\ 5\ 6, \quad 1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4.$$

Sobald wir aus den sechs Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 irgend drei Punkte herausnehmen und sie an die ungeraden Stellen der Ecken versetzen, lassen sich die übrigen drei *nur* auf diese sechs Arten dazwischen als geradestellige Ecken einfügen; und die auf diese Weise erhaltenen sechs Sechsecke zerfallen in zwei Gruppen von je drei, für welche die drei *Pascal'schen* Geraden in einem *Steiner'schen* Punkte und seinem *Gegenpunkte* zusammenlaufen. Da nun die sechs Punkte auf $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ Arten sich zu dreien combiniren lassen, so laufen die 60 *Pascal'schen* Geraden zu je dreien durch 20 *Steiner'sche* Punkte, welche in zehn Paare von *Gegenpunkten* zerfallen. Wir werden in einer später entworfenen Tabelle die 60 Sechsecke so zusammenstellen, dass die 20 *Steiner'schen* Punkte aus ihnen vollständig und in übersichtlicher Weise hervortreten.

93 Theilen wir zweitens die sechs Punkte des Kegelschnitts in drei Paare ab, z. B.:

$$1\ 2, \quad 3\ 4, \quad 5\ 6,$$

so lassen sich diese Paare unter einander und die Elemente jedes Paares unter sich, ohne dass ein Paar getrennt wird, auf alle möglichen Arten nur so vertauschen, dass acht verschiedene Sechsecke

* Dass ein *Steiner'scher* Punkt und sein *Gegenpunkt* allemal conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind, kann erst später, Nr. 114, gezeigt werden.

zum Vorschein kommen, weil von den sämtlichen 48 hervorgehenden Sechsecken immer 6 identisch werden. Diese acht verschiedenen Sechsecke lassen sich aber in vier Paare zertheilen, welche, wenn wir sie sämtlich mit 1 beginnen lassen, so lauten:

$$\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5 \mid 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \mid 1\ 2\ 4\ 3\ 6\ 5 \mid 1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6 \\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2 \mid 1\ 4\ 3\ 5\ 6\ 2 \mid 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 2 \mid 1\ 3\ 4\ 6\ 5\ 2, \end{array}$$

und jedes Paar besteht, wie wir sehen, aus zwei Sechsecken, deren *Pascal'sche* Geraden sich in einem *Steiner'schen* Punkte treffen. Nennen wir der Reihenfolge gemäss die *Pascal'schen* Geraden dieser acht Sechsecke:

$$\begin{array}{cccc} l_1, & l_2, & l_3, & l_4, \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4, \end{array}$$

so dass also $l_1 m_1, l_2 m_2, l_3 m_3, l_4 m_4$ vier *Steiner'sche* Punkte sind, und nehmen wir zuerst nur drei Paare *Pascal'scher* Geraden heraus:

$$\begin{array}{l} l_1 \text{ von } 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6^{\text{a}}, \quad l_2 \text{ von } 1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5, \quad l_3 \text{ von } 1\ 2\ 4\ 3\ 6\ 5, \\ m_1 \text{ von } 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2, \quad m_2 \text{ von } 1\ 4\ 3\ 5\ 6\ 2, \quad m_3 \text{ von } 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 2; \end{array}$$

dann wird identisch:

$$\left\{ \begin{array}{l} (l_1 l_2) = (23, 56), \\ (l_2 l_3) = (34, 51), \\ (l_3 m_1) = (12, 36), \\ (m_1 m_2) = (14, 56), \\ (m_2 m_3) = (34, 62), \\ (m_3 l_1) = (12, 45). \end{array} \right.$$

Diese sechs Punkte sind die Ecken zweier einfacher Sechsecke, deren auf einander folgende Seiten:

$$l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, \text{ bzw. } 12, l_1, 56, m_2, 34, l_3$$

sind. Sie haben drei nicht zusammenstossende Seiten gemein. Das zweite Sechseck ist nun offenbar ein *Pascal'sches*, d. h. einem Kegelschnitt eingeschrieben, denn die Schnittpunkte der Gegenseiten:

$$(12, m_2) = (12, 35), \quad (34, l_1) = (34, 61), \quad (56, l_3) = (56, 24)$$

liegen auf einer Gerade, der *Pascal'schen* Gerade des Sechsecks 1 2 4 3 5 6. Folglich müssen auch die drei Schnittpunkte der Gegenseiten des ersten Sechsecks, d. h.:

$$l_1 m_1, \quad l_2 m_2, \quad l_3 m_3$$

auf einer Gerade liegen. In gleicher Weise liegen

$$l_1 m_1, \quad l_2 m_2, \quad l_4 m_4$$

auf einer Gerade.

Mithin liegen alle vier *Steiner'schen* Punkte:

$$l_1 m_1, \quad l_2 m_2, \quad l_3 m_3, \quad l_4 m_4$$

auf derselben Gerade, welche *Steiner-Plücker'sche Gerade** genannt wird, und da sich die sechs Punkte nur auf 15 Arten in drei Paare theilen lassen, wie leicht einzusehen ist, so folgt, dass die 20 *Steiner'schen Punkte* zu je vier auf 15 Geraden liegen.

Die 60 Sechsecke lassen sich nun in eine Tabelle bringen, aus welcher die Lage der 20 *Steiner'schen Punkte* zu den 15 *Steiner-Plücker'schen Geraden* klar hervortritt; diese ist folgende:

	p	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2 \\ 1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4 \end{array} \right.$	π	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2 \\ 1\ 4\ 3\ 2\ 5\ 6 \\ 1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4 \end{array} \right.$	
a_1	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5 \\ 1\ 4\ 3\ 5\ 6\ 2 \\ 1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4 \end{array} \right.$	b_1	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 3\ 2\ 4\ 6\ 5 \\ 1\ 4\ 2\ 5\ 6\ 3 \\ 1\ 5\ 2\ 3\ 6\ 4 \end{array} \right.$	c_1	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6 \\ 1\ 4\ 2\ 6\ 5\ 3 \\ 1\ 6\ 2\ 3\ 5\ 4 \end{array} \right.$
a_2	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6 \\ 1\ 3\ 4\ 6\ 5\ 2 \\ 1\ 6\ 4\ 2\ 5\ 3 \end{array} \right.$	b_2	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6 \\ 1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 4 \\ 1\ 6\ 2\ 4\ 3\ 5 \end{array} \right.$	c_2	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 3\ 2\ 5\ 4\ 6 \\ 1\ 5\ 2\ 6\ 4\ 3 \\ 1\ 6\ 2\ 3\ 4\ 5 \end{array} \right.$
a_3	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 2\ 4\ 3\ 6\ 5 \\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 2 \\ 1\ 5\ 4\ 2\ 6\ 3 \end{array} \right.$	b_3	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 3 \\ 1\ 4\ 6\ 3\ 5\ 2 \\ 1\ 3\ 6\ 2\ 5\ 4 \end{array} \right.$	c_3	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6 \\ 1\ 5\ 3\ 6\ 4\ 2 \\ 1\ 6\ 3\ 2\ 4\ 5 \end{array} \right.$
α_1	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 5\ 3\ 4\ 6\ 2 \\ 1\ 4\ 3\ 2\ 6\ 5 \\ 1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 4 \end{array} \right.$	β_1	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 5\ 2\ 4\ 6\ 3 \\ 1\ 4\ 2\ 3\ 6\ 5 \\ 1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4 \end{array} \right.$	γ_1	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 6\ 2\ 4\ 5\ 3 \\ 1\ 4\ 2\ 3\ 5\ 6 \\ 1\ 3\ 2\ 6\ 5\ 4 \end{array} \right.$
α_2	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 6\ 4\ 3\ 5\ 2 \\ 1\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6 \\ 1\ 2\ 4\ 6\ 5\ 3 \end{array} \right.$	β_2	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 6\ 2\ 5\ 3\ 4 \\ 1\ 5\ 2\ 4\ 3\ 6 \\ 1\ 4\ 2\ 6\ 3\ 5 \end{array} \right.$	γ_2	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 6\ 2\ 5\ 4\ 3 \\ 1\ 5\ 2\ 3\ 4\ 6 \\ 1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5 \end{array} \right.$
α_3	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 5\ 4\ 3\ 6\ 2 \\ 1\ 3\ 4\ 2\ 6\ 5 \\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 3 \end{array} \right.$	β_3	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 3\ 6\ 4\ 5\ 2 \\ 1\ 4\ 6\ 2\ 5\ 3 \\ 1\ 2\ 6\ 3\ 5\ 4 \end{array} \right.$	γ_3	$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 6\ 3\ 5\ 4\ 2 \\ 1\ 5\ 3\ 2\ 4\ 6 \\ 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5 \end{array} \right.$

Dies sind sämmtliche 60 verschiedenen Sechsecke; jedes derselben liefert eine *Pascal'sche Gerade*. Die Bildungsweise dieser Tabelle der 60 Sechsecke ist ersichtlich. Wir gehen aus von dem Sechseck 123456 und bilden, indem wir die ungeradstelligen Ecken festhalten, die

* Ein Irrthum *Steiner's* bezüglich dieser Geraden wurde durch *Plücker* (1801—1868) berichtigt. Vergl. hierzu *Steiner's* Gesammelte Werke Bd. I, S. 224, S. 526, Anm. 14 und S. 450 Aufg. 54 und *Plücker*, Journal f. Mathematik Bd. 5, S. 280.

geradstelligen aber cyclisch vertauschen, die drei Sechsecke, deren *Pascal'sche* Geraden sich in einem *Steiner'schen* Punkte p treffen. Hieraus erhalten wir drei andere Gruppen von je drei Sechsecken, welche die *Steiner'schen* Punkte a_1, a_2, a_3 liefern, indem wir die sechs Punkte $1, \dots, 6$ in drei Paare $12, 34, 56$ theilen und sowohl die Paare unter einander, als auch die Elemente je eines Paares unter sich vertauschen, ohne aber die Paare zu trennen. Zugleich bilden wir in der oben angegebenen Weise die Gegenpunkte $\pi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Eine zweite Gruppe von drei *Steiner'schen* Punkten b_1, b_2, b_3 , die mit p auf derselben Gerade liegen, erhalten wir, indem wir die sechs ursprünglichen Punkte in die drei Paare $14, 25, 36$ theilen und mit denselben die eben beschriebene Operation vornehmen; die in bekannter Weise zu bildenden Gegenpunkte sind $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Endlich theilen wir die gegebenen Punkte in die drei Paare $16, 23, 45$ und gelangen dadurch zu den Punkten c_1, c_2, c_3 , die ebenfalls mit p in gerader Linie liegen, und deren Gegenpunkte $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind. Hierdurch werden sämtliche 60 Sechsecke erschöpft.

Die Punkte $p, \pi, a_1, \dots, \gamma_3$ sind die 20 *Steiner'schen* Punkte, in welchen sich die *Pascal'schen* Geraden zu je dreien schneiden, und zwar sind je zwei gleichnamige aus dem lateinischen und griechischen Alphabet Gegenpunkte.

Die 15 *Steiner-Plücker'schen* Geraden, auf welchen diese 20 Punkte zu je vierten liegen, sind folgende:

$$\begin{array}{l|l} pa_1a_2a_3 & \pi\alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ pb_1b_2b_3 & \pi\alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ pc_1c_2c_3 & \pi\alpha_3\beta_3\gamma_3 \\ \\ a_1b_1\gamma_2\gamma_3 & a_2b_2\gamma_3\gamma_1 & a_3b_3\gamma_1\gamma_2 \\ b_1c_1\alpha_2\alpha_3 & b_2c_2\alpha_3\alpha_1 & b_3c_3\alpha_1\alpha_2 \\ c_1a_1\beta_2\beta_3 & c_2a_2\beta_3\beta_1 & c_3a_3\beta_1\beta_2. \end{array}$$

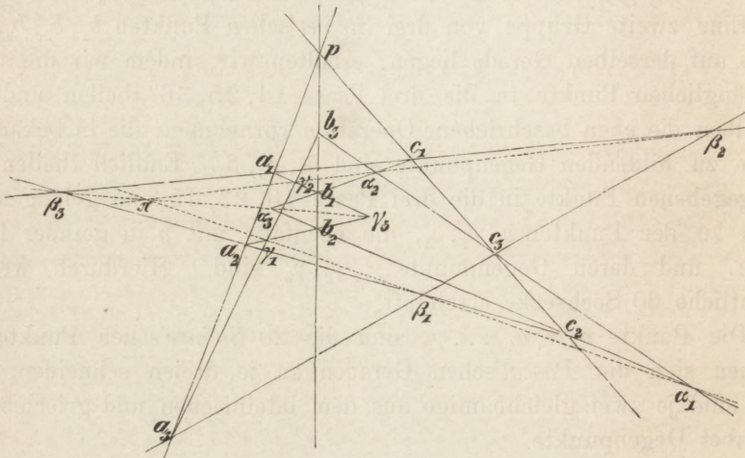
Die 15 Steiner-Plücker'schen Geraden schneiden sich also zu je drei in den 20 Steiner'schen Punkten.

Diese 20 Punkte und 15 Geraden bilden hiernach eine solche Figur (Fig. 39), wie sie bereits in Nr. 22 und 66 aufgetreten ist.* Dass in der That die 20 *Steiner'schen* Punkte zu je vier auf den angegebenen 15 *Steiner-Plücker'schen* Geraden liegen, erkennen wir aus der obigen Tabelle nach dem für einen Fall durchgeführten Beweise, wenn wir noch berücksichtigen, dass dasselbe Sechseck, immer bei

* *Hesse*, Eine Bemerkung zum *Pascal'schen* Theorem, Journal f. Mathematik Bd. 41, S. 269.

dem Punkte 1 angefangen, in doppelter Weise gelesen werden kann, z. B. 163254 und 145236. Dass aber die 15 *Steiner-Plücker'schen* Geraden zu je dreien sich in den 20 *Steiner'schen* Punkten schneiden, sehen wir aus dem letzten Schema, bei welchem je vier in derselben Horizontalreihe stehende Punkte immer in einer Gerade liegen und jeder der 20 Punkte in drei Horizontalreihen vorkommt.

Fig. 39.



Die weiteren Eigenschaften dieser Figur, welche *Kirkman*, *Cayley* (1821—1895) und *Salmon* hinzugefügt haben, finden in den Aufgaben und Lehrsätzen am Schlusse des Buches Erwähnung. Auch bedarf die duale Betrachtung eines dem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechsecks und die Erweiterung des *Brianchon'schen* Satzes keiner Ausführung, weil man unter der Bezeichnung 1, 2, 3, 4, 5, 6 ebenso sechs Tangenten eines Kegelschnitts, wie sechs Punkte desselben verstehen kann.

- 94 Wir wollen aber das um- (oder ein-) geschriebene Polygon auf sieben und acht Seiten erweitern. Es sei 1234567 ein Siebeneck, dessen Seiten 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71 einen Kegelschnitt berühren. Nehmen wir zunächst das *Brianchon'sche* Sechseck der sechs ersten Seiten 12, ... 67, dessen Ecken 2, 3, 4, 5, 6, (67, 12) sind, so laufen in den *Brianchon'schen* Punkt zusammen 25, 36, | 4, (67, 12) |; also liegen in einer Gerade (25, 36), 4, (67, 12), oder es laufen wiederum in einen Punkt zusammen: 67, 12, | 4, (25, 36) |. Folglich sind die Dreiecke mit den Ecken 7, 1, 4, bzw. 6, 2, (25, 36) perspectiv, und es liegen in einer Gerade die drei Punkte:

$$(71, 62), (14, 25), (47, 63).$$

Es sei:

$$(14, 25) = a_1,$$

$$(25, 36) = a_2,$$

$$(36, 47) = a_3,$$

$$(47, 51) = a_4,$$

$$(51, 62) = a_5,$$

$$(62, 73) = a_6,$$

$$(73, 14) = a_7;$$

so ist die eben gefundene Geradlinigkeit identisch mit der von $(71, a_5 a_6)$, $a_1 a_3$; d.h. wiederum: 7, 1 und $(a_5 a_6, a_1 a_3)$ liegen in gerader Linie. Da nun

$$(a_3 a_4, a_6 a_7) = (47, 73) = 7, \quad (a_4 a_5, a_7 a_1) = (51, 14) = 1,$$

so sehen wir, dass $(a_3 a_4, a_6 a_7)$, $(a_4 a_5, a_7 a_1)$ und $(a_5 a_6, a_1 a_3)$ in gerader Linie liegen oder dass $a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_1$ ein *Pascal'sches* Sechseck ist. Wenn also 12, 23, 34, 45, 56, 67 einen Kegelschnitt berühren, so befinden sich die sechs Punkte $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_1$ auf einem andern Kegelschnitt. Rücken wir in den Ziffern 1, ... 7 cyklisch vor, so erhalten wir: Wenn 23, 34, 45, 56, 67, 71 einen Kegelschnitt berühren, so liegen $a_4, a_5, a_6, a_7, a_1, a_2$ auf einem Kegelschnitte, der aber mit dem vorigen identisch ist, weil sie die fünf Punkte a_4, a_5, a_6, a_7, a_1 gemeinsam haben. Also:

Wenn die Seiten eines Siebenecks 1234567 einen Kegelschnitt berühren, so liegen die Ecken des Siebenecks, dessen auf einander folgende Seiten die Diagonalen

$$14, 25, 36, 47, 51, 62, 73$$

sind, auf einem andern Kegelschnitte.

Lassen wir nun ein Achteck 12345678 einem Kegelschnitt umgeschrieben sein. Die Tangenten 12, 23, ... 67 führten oben dazu, dass die Geraden 67, 12, | 4, (25, 36) | durch denselben Punkt gehen. Dies bedeutet, dass das Sechseck mit den Ecken 6, 1, 4, 7, 2, (25, 36) oder mit den Seiten 36, 61, 14, 47, 72, 25 einem Kegelschnitte umgeschrieben ist.

Wenn also 12, 23, 34, 45, 56, 67 einen Kegelschnitt berühren, so sind auch 36, 61, 14, 47, 72, 25 Tangenten eines Kegelschnitts. Rücken wir in unserm Falle, wo auch 78 und 81 jenen Kegelschnitt berühren, dreimal cyklisch in den Ziffern vor, so folgt: weil 45, 56, 67, 78, 81, 12 einen Kegelschnitt tangieren, berühren auch 61, 14, 47, 72, 25, 58 einen Kegelschnitt. Beide Kegelschnitte haben die Tangenten 61, 14, 47, 72, 25 gemeinsam und sind identisch. Damit haben wir nun schon sieben Tangenten an demselben Kegelschnitt: 36, 61, 14, 47, 72, 25, 58; und rücken wir noch einmal vor, so ergeben

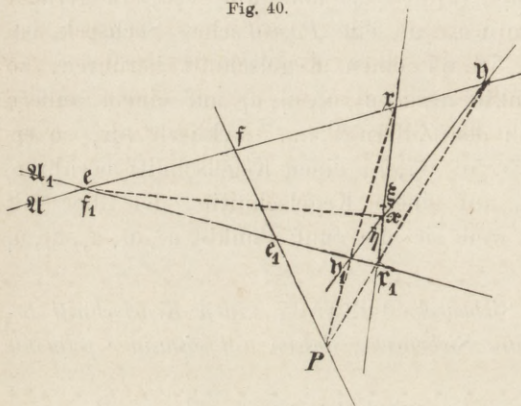
sich 61, 14 ... 58, 83 als Tangenten eines Kegelschnitts, also alle acht gleichartigen Diagonalen.

Wenn ein Achteck mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 einem Kegelschnitte umgeschrieben ist, so berühren die acht Diagonalen 14, 47, 72, 25, 58, 83, 36, 61 einen andern Kegelschnitt.*

§ 29. Das Auftreten der Involution beim Kegelschnitte.

95 Fassen wir den Kegelschnitt als das Erzeugniss zweier projectiven Punktreihen $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ auf, so liegt (Nr. 65) jeder Punkt $(x y_1, x_1 y)$ auf der Berührungsehne $f e_1$ der beiden Träger (Fig. 40), die Berührungspunkte ξ, η der Strahlen $x x_1, y y_1$ sind die vierten harmonischen

Fig. 40.



Punkte, in Bezug auf x, x_1 , bzw. y, y_1 , zu dem Schnitte mit der Gerade $f e_1$, und ihre Verbindungslinie $\xi \eta$ geht durch den Punkt $(x y_1, x_1 y)$ (Nr. 67) und ist der dem $f e_1$ zugeordnete vierte harmonische Strahl in Bezug auf $x y_1$ und $x_1 y$. Jeder Punkt P von $f e_1$ kann ein solcher Punkt $(x y_1, x_1 y)$ sein und zwar auf unendlich viele Weisen.

Denn wird durch ihn ein beliebiger Strahl gezogen, welcher \mathcal{A} und \mathcal{A}_1 in x und y_1 trifft, so muss der zugehörige Strahl $x_1 y$ mit ihm sich auf $f e_1$, also in P treffen. Daraus folgt auch, dass jedem Strahl $x x_1$, wenn P auf $f e_1$ gegeben ist, ein Strahl $y y_1$ zugeordnet wird, denn trifft $P x$ den Träger \mathcal{A}_1 in y_1 , so muss $x_1 y$ durch P gehen. So wird auch dem Berührungspunkte ξ von $x x_1$ derjenige η von $y y_1$ zugeordnet, und wir erhalten alle Tangentenpaare $x x_1, y y_1$, deren Berührungsehne $\xi \eta$ durch P geht, welche also analog sind dem ursprünglichen Tangentenpaare $\mathcal{A} \mathcal{A}_1$ mit der Berührungsehne $f e_1$.

Die beiden Strahlen $P x y_1, P x_1 y$ beschreiben eine Involution (Nr. 67).

Wenn nun P ein beliebiger Punkt in der Ebene des Kegelschnitts ist, so sei durch ihn eine die Curve schneidende Gerade gezogen; die Tangenten in den Schnitten nehmen wir als Träger $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ der er-

* Aus einer Correspondenz von *Schröter*, *Hurwitz* und *Töplitz* entstanden, von welchem letzteren die hier mitgetheilten Beweise herrühren.

zeugenden Punktreihen, so dass die Schnitte die Punkte f und e_1 werden. Wir stellen die Involution um P in der beschriebenen Weise her und haben darzuthun, dass sie unabhängig ist von der Berührungssehne. Sei also $\xi\eta$ eine andere durch P gehende Berührungssehne, zugehörig den beiden Tangenten $\mathfrak{r}\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$; wir wissen, dass diese so beschaffen sein müssen, dass $\mathfrak{r}\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}$ sich in P schneiden. In der Involution um P , die vorhin bei der Berührungssehne $f e_1$ sich ergab, bilden $P\mathfrak{r}\mathfrak{y}_1$ und $P\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}$ ein Paar und auch $Pf e_1$, die Berührungssehne, und der Strahl nach dem gemeinsamen Punkte f_1, e von \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 ein Paar.

Nehmen wir nun $\mathfrak{r}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ als Träger der Punktreihen und nennen ihren Schnitt x , so sind entsprechend \mathfrak{r} und \mathfrak{y} , die Schnitte der Tangente \mathfrak{A} , \mathfrak{x}_1 und \mathfrak{y}_1 , die von \mathfrak{A}_1 , ferner der Berührungspunkt ξ und x , ebenso x und η ; folglich erhalten wir für die Involution um P das Paar $P\mathfrak{r}\mathfrak{y}_1, P\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}$, das mit dem ersten von vorhin übereinstimmt, und das Paar $P\xi\eta, Px$. Beide Involutionen sind identisch, wenn diese drei Paare

$$P\mathfrak{r}\mathfrak{y}_1, P\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}; \quad P f e_1, P e; \quad P \xi \eta, P x$$

drei Strahlenpaare in Involution sind. Da ξ der vierte harmonische Punkt, in Bezug auf \mathfrak{r} und \mathfrak{x}_1 , zum Schnitte von $\mathfrak{r}\mathfrak{x}_1$ mit $f e_1$ ist, so sind $P\mathfrak{r}\mathfrak{y}_1$ und $P\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}$ harmonisch zu $P f e_1$ und $P \xi \eta$; andererseits sind wegen des vollständigen Vierseits der Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{r}\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ dieselben zwei Strahlen harmonisch zu $P e$ und $P x$; folglich sind sie die Doppelstrahlen der Involution, die durch die Paare $P f e_1, P \xi \eta; P e, P x$ bestimmt ist; und demnach sind nach dem Satze von Nr. 46 die obigen drei Strahlenpaare in Involution. Also geben alle durch P gehenden Berührungssehn dieselbe Involution um diesen Punkt.

Folglich wird jeder Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Grundpunkt einer ihm in Bezug auf denselben zugeordneten Strahlinvolution; in dieser sind zwei Strahlen conjugirt, welche durch zwei entsprechende Punkte solcher den Kegelschnitt erzeugenden projectiven Punktreihen gehen, auf deren Berührungssehne der Punkt liegt, und gehen noch durch zwei andere entsprechende Punkte im umgekehrten Sinne. Diese Berührungssehne und der Strahl nach dem Schnittpunkte der Träger sind ebenfalls conjugirt. Die (reellen oder imaginären) durch den Punkt gehenden Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte oder Tangenten des Kegelschnitts sind die Doppelstrahlen. Die Involution ändert sich nicht, wenn die Berührungssehne um den Punkt gedreht wird.

Bezeichnen wir auf der Berührungssehne die endliche Strecke 96 zwischen f und e_1 mit $f e_1$, hingegen die unendlich grosse im unendlich

fernen Punkt zusammenhängende (nach *Staudt's* Vorgang) mit $f \cdot e_1$ und ähnlich auf andern Geraden, so werden, wenn irgend ein Verbindungsstrahl $\chi\chi_1$ die Strecke $f e_1$ trifft, die Strecken $e f$, $e \cdot f$ den Strecken $e_1 \cdot f_1$ und $e_1 f_1$ in der Projectivität entsprechend, und alle Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte treffen $f e_1$. Trifft aber einer die Strecke $f \cdot e_1$, so werden die Strecken $e f$, $e \cdot f$ den Strecken $e_1 f_1$, $e_1 \cdot f_1$ entsprechend, und alle Verbindungsstrahlen treffen $f \cdot e_1$.

Im ersten Falle sind Pf und Pf_1 von $P\chi$ und $P\chi_1$ nicht getrennt oder getrennt, je nachdem P auf $f e_1$ oder auf $f \cdot e_1$ liegt; die Involution ist hyperbolisch, bezw. elliptisch; im zweiten umgekehrt. In beiden Fällen liegt, wenn die Involution hyperbolisch ist, P so, dass Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte durch ihn gehen, wenn sie aber elliptisch ist, so, dass keiner durch ihn geht. Nennen wir also das Gebiet, dass von den Verbindungsstrahlen oder, was dasselbe ist, den Tangenten erfüllt wird, *ausserhalb* des Kegelschnitts, dasjenige, in welches keine Tangente hineinkommt, *innerhalb* — der Kegelschnitt bildet die Grenze —, so sehen wir: *Die einem Punkte zugehörige Involution ist hyperbolisch bezw. elliptisch, je nachdem er ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnitts liegt.* Von äusseren Punkten kommen zwei reelle Tangenten, die Doppelstrahlen.

Fällt P auf den Kegelschnitt, also nach f (oder e_1), so ist auf jedem Strahle $P\chi\chi_1$ der Punkt χ der f , also ist der conjugirte Strahl $P\chi_1\chi$ der Strahl $f f_1$, die Tangente \mathcal{A} von f ; die Involution wird parabolisch.

97 *Ingleichen wird jede Gerade in der Ebene eines Kegelschnitts Träger einer ihr in Bezug auf denselben zugeordneten Involution. Man nehme zwei erzeugende projective Strahlbüschel um solche Punkte des Kegelschnitts, dass die Tangenten sich auf der Gerade schneiden: Es sind in der Involution conjugirt solche Punkte, die auf entsprechenden Strahlen liegen, und liegen dann stets noch auf zwei andern entsprechenden Strahlen im umgekehrten Sinne. Jener Tangentenschnitt und der Schnitt mit der Verbindungslinie der Grundpunkte sind auch conjugirt. Die auf der Gerade liegenden (reellen oder imaginären) Schnittpunkte entsprechender Strahlen oder die Schnittpunkte der Gerade mit dem Kegelschnitte sind die Doppelpunkte der Involution. Sie ändert sich nicht, wenn der Tangentenschnitt auf der Gerade verschoben wird.*

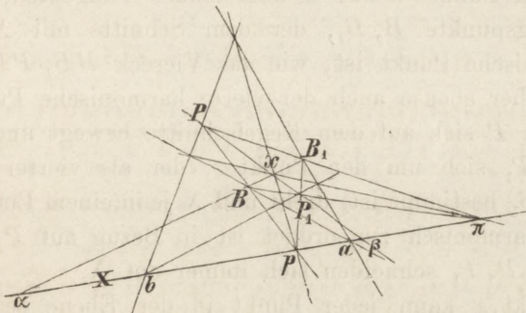
Durch jeden Punkt gehen Geraden, welche den Kegelschnitt (reell) schneiden. Die Tangenten bilden den Uebergang von (reell) schneidenden zu nicht (oder imaginär) schneidenden Geraden. Da beim innern Punkte diese Uebergangsform fehlt, so haben wir:

Alle Geraden, welche durch einen innerhalb eines Kegelschnitts gelegenen Punkt gehen, schneiden ihn (reell).

Eine nicht (reell) schneidende Gerade hat nur äussere Punkte.

Sei X eine beliebige Gerade in der Ebene eines Kegelschnitts ⁹⁸ (Fig. 41) und a einer ihrer Punkte, von welchem sich ein Tangentenpaar an den Kegelschnitt legen lässt, welches in B und B_1 denselben

Fig. 41.



berührt; wird alsdann ein beliebiger Punkt P des Kegelschnitts mit B und B_1 verbunden, so treffen nach dem obigen Satze BP und B_1P die Gerade X in zwei conjugirten Punkten p und π derjenigen Involution, welche ihr in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; a und α , der Tangentenschnitt und der Schnittpunkt mit der Berührungssehne, geben ein zweites Paar; und wenn $B\pi$, B_1p sich in P_1 schneiden, so ist BP_1 , B_1P_1 das zweite Paar entsprechender Strahlen, welches das Paar $p\pi$ liefert.

Die Tangente in P ist der vierte harmonische Strahl, in Bezug auf PB , PB_1 , zu dem Strahle Pa nach dem Schnitte der Tangenten in B , B_1 (Nr. 71), trifft also X in dem vierten harmonischen Punkt b , der dem a in Bezug auf $p\pi$ zugeordnet ist. Durch denselben vierten harmonischen Punkt b geht auch die Tangente in P_1 . Das vollständige Viereck BB_1PP_1 lehrt, dass p , π auch zu α , β harmonisch sind,* wo β der Schnitt von PP_1 und X ist. Also sind p , π die Doppelpunkte der Involution, die durch a , b ; α , β bestimmt ist, und demnach gehören nach dem kürzlich benutzten Satze von Nr. 46 p , π ; a , α ; b , β zur nämlichen Involution; oder b , β ist ein drittes Paar der Involution, welche der Gerade X in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört.

Wenn $x = (BB_1, PP_1)$ ist, so sei nun die diesem Punkte zugehörige Involution aufgesucht. Die Berührungssehne $BB_1\alpha$ und der Strahl xa nach dem Tangentenschnitt sind in ihr conjugirt, ebenso die durch x gehende Berührungssehne $PP_1\beta$ und der Strahl xb nach

dem Tangentenschnitt b . Zwei Strahlenpaare der Involution gehen daher durch zwei Punktepaare der vorhinigen, mithin geht jedes Strahlenpaar jener durch ein Punktepaar dieser; die beiden Involutionen sind perspectiv (Nr. 50).

Wir haben also zu der Gerade X einen Punkt x gefunden von der Eigenschaft, dass die ihm zugehörige Involution perspectiv ist zu der, welche der Gerade zugehört. Bemerken wir, dass x auf der Berührungsehne der vom Punkte a auf X kommenden Tangenten, in Bezug auf die Berührungspunkte B, B_1 , der dem Schnitte mit X zugeordnete vierte harmonische Punkt ist, wie das Viereck BB_1PP_1 lehrt. Der Punkt x ist aber ebenso auch der vierte harmonische Punkt auf PP_1 ; so dass, wenn P sich auf dem Kegelschnitte bewegt und P_1 mit ihm, die Sehne PP_1 sich um den Punkt x , der als vierter harmonischer Punkt auf BB_1 bestimmt ist, dreht und X je in einem Punkte schneidet, der dem x harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf P und P_1 . Die Tangenten in P, P_1 schneiden sich immer auf X .

Der Punkt x kann jeder Punkt in der Ebene sein; wir legen durch einen beliebigen Punkt x eine Sehne BB_1 , construiren den Schnitt a der Tangenten in den Punkten B, B_1 und den vierten harmonischen Punkt α , der x in Bezug auf B, B_1 zugeordnet ist, so ist die Verbindungslinie $a\alpha$ die Gerade X , zu der der Punkt x gehört.

§ 30. Pol und Polare, conjugirte Punkte und Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt. Polardreieck oder -dreieit.

99 Die in dem vorigen Paragraphen durchgeführte Untersuchung giebt eine Menge von wichtigen Eigenschaften des Kegelschnitts, welche unter dem Namen der *Polareigenschaften* bekannt sind. Die zuletzt besprochene Bewegung des Punktes P auf dem Kegelschnitt, bei welcher der Punkt x unverändert bleibt, giebt den Satz:

Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Strahlen, welche denselben in je zwei Punkten treffen, so ist der Ort des vierten harmonischen, dem gegebenen in Bezug auf die Schnittpunkte zugeordneten Punktes auf jedem Strahl eine gerade Linie, welche den Kegelschnitt nicht trifft, sobald der Punkt innerhalb des Kegelschnitts liegt, dagegen durch die beiden Berührungspunkte der von dem gegebenen Punkte an den Kegelschnitt zu legenden Tangenten geht, sobald der Punkt ausserhalb des Kegelschnitts liegt.

Die letzte Bemerkung geht daraus hervor, dass, wenn durch den gegebenen Punkt eine Tangente des Kegelschnitts geht, auf diesem Strahl die beiden Schnittpunkte, also zwei zugeordnete von vier har-

monischen Punkten zusammenfallen, folglich auch der vierte dem festen Punkt harmonisch zugeordnete in jene beiden hineinfallen muss (Nr. 13), und umgekehrt, wenn von vier harmonischen Punkten zwei nicht zugeordnete zusammenfallen, in diesen nothwendig auch einer der beiden übrigen hineinfallen muss.

Hieraus ergibt sich ein bequemes Mittel, durch einen gegebenen Punkt O die Tangenten an den Kegelschnitt zu ziehen, welcher gezeichnet vorliegt: Man ziehe durch O zwei beliebige Strahlen, welche in a und α , b und β demselben begegnen; die Schnittpunkte $(a\beta, b\alpha)$ und $(ab, \alpha\beta)$ mit einander verbunden geben eine Gerade, die den Kegelschnitt in denjenigen beiden Punkten trifft, deren Verbindungslinien mit O das gesuchte Tangentenpaar bilden; denn wegen der harmonischen Eigenschaft des Vierecks $aba\beta$ (Nr. 16) geht jene Gerade durch die vierten harmonischen Punkte auf den beiden durch O gezogenen Strahlen. Trifft die so ermittelte Gerade den Kegelschnitt nicht, so giebt es keine Tangenten durch O . Wenn der Kegelschnitt aber durch fünf Punkte a, b, c, d, e gegeben ist, so hat man mit Hülfe des *Pascal'schen Satzes* (Nr. 90) auf den Geraden, welche O mit zwei von diesen Punkten a, b verbinden, die zweiten Schnitte α, β zu suchen.

Dieselbe Gerade ist aber andererseits auch der Ort des Tangentenschnitts b (Fig. 41), also gilt der Satz: *Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Strahlen, welche denselben in je zwei Punkten treffen, und bestimmt die Tangenten in letzteren, so ist der Ort des Schnittpunktes eines jeden solchen Tangentenpaares eine gerade Linie, welche mit der im vorigen Satze erhaltenen identisch ist.*

Hiernach gehört zu jedem beliebigen Punkt x in der Ebene eines Kegelschnitts eine bestimmte Gerade X , welche immer reell vorhanden ist, weil es, wo auch der Punkt x liegen mag, immer Strahlen durch ihn giebt, welche dem Kegelschnitt in zwei reellen Punkten begegnen. Diese dem Punkte x zugehörige Gerade X heisst die *Polare* des Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt; sie kann auf die eine oder andere angegebene Art construirt werden und besitzt nach dem Vorigen die charakteristische Eigenschaft, dass die in Bezug auf den Kegelschnitt ihr zugehörige Involution mit der dem Punkte zugehörigen perspectiv liegt. Ist der Punkt ausserhalb des Kegelschnitts gelegen, so ist seine Polare die Berührungsehne des aus ihm an den Kegelschnitt zu legenden Tangentenpaares; ist der Punkt innerhalb des Kegelschnitts gelegen, so giebt es zwar kein Tangentenpaar aus ihm an den Kegelschnitt, aber die Polare hört nicht auf zu existiren, sondern ist eine bestimmte in der angegebenen Weise zu construierende Gerade, welche in diesem Falle mit dem Kegelschnitt keinen Punkt gemein hat; ihre

Involution ist elliptisch. Liegt endlich der Punkt auf dem Kegelschnitt selbst, so erkennen wir aus der zweiten Construction, dass seine Polare die Tangente des Kegelschnitts in diesem Punkte ist. Die Tangente des Kegelschnitts erscheint also als besonderer Fall der Polare für solche Punkte, welche auf dem Kegelschnitt selbst liegen.

100 Wir schliessen ferner aus der in der obigen Figur (Fig. 41) vorgenommenen Bewegung, indem wir den Punkt b auf der Gerade X fortlaufen lassen und bemerken, dass die Berührungsehne des Tangentenpaares aus ihm an den Kegelschnitt durch den festen Punkt x läuft, und dass der Strahl bx zu X in Bezug auf die Tangenten bP und bP_1 harmonisch ist, weil diese Strahlen durch vier harmonische Punkte auf PP_1 gehen, den folgenden Satz:

Legt man aus den Punkten einer Gerade in der Ebene eines Kegelschnitts die Tangentenpaare an denselben, so läuft die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen festen Punkt; construirt man je den vierten harmonischen Strahl, welcher der Gerade zugeordnet ist in Bezug auf das Tangentenpaar, so läuft dieser vierte harmonische Strahl durch denselben Punkt. Schneidet die gegebene Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten, so ist der feste Punkt der Schnittpunkt der beiden Tangenten in ihnen, liegt also ausserhalb des Kegelschnitts. Trifft die gegebene Gerade den Kegelschnitt nicht, so ist der auf die eine oder andere Weise zu ermittelnde Punkt innerhalb des Kegelschnitts gelegen.

Hiernach gehört zu jeder beliebigen Gerade X in der Ebene eines Kegelschnitts ein bestimmter Punkt x , welcher immer reell vorhanden ist, wie auch die Gerade in der Ebene liegen mag, weil es immer Punkte auf ihr giebt, deren Tangentenpaare an den Kegelschnitt reell sind. Dieser Punkt heisst der „Pol“ der Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt. Er besitzt die charakteristische Eigenschaft, dass die ihm zugehörige Involution mit der der Gerade zugehörigen perspectiv liegt; beide sind also gleichzeitig elliptisch oder hyperbolisch. Wenn insbesondere die Gerade eine Tangente des Kegelschnitts ist, so wird ihr Pol der Berührungspunkt. Zu dem Pol einer gegebenen Gerade gelangen wir, indem wir aus zwei solchen Punkten derselben, welche ausserhalb des Kegelschnitts liegen, die Tangentenpaare an denselben legen und den Schnittpunkt der Berührungsehnen aufsuchen, oder wenn die gegebene Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten schneidet, indem wir den Schnittpunkt der in diesen beiden Punkten gezogenen Tangenten aufsuchen.

Es geht daraus, dass gleichzeitig in unserer Figur X die Polare von x und x der Pol von X ist, ein inniger Zusammenhang zwischen Pol und Polare hervor:

Die Polare eines beliebigen Punktes hat denselben zu ihrem Pol, und der Pol einer beliebigen Gerade hat zu seiner Polare diese Gerade.

Für den äusseren Punkt b auf X (Fig. 41) ist die Berührungssehne PP_1 Polare; sie geht durch den Pol x und schneidet die Gerade X in dem Punkte β , welcher zu b in der X zugehörigen Involution conjugirt ist. Wenn aber X reell schneidet, so hat sie auch innere Punkte und für diese müssen wir, wenn wir nur reelle Elemente im Beweise verwenden wollen, anders schliessen. Wenn also b ein innerer Punkt auf X ist, so sind alle durch ihn gehenden Geraden reell schneidend; auf bx ist b vierter harmonischer Punkt, dem x zugeordnet in Bezug auf die Schnitte, also auch x dem b zugeordneter; d. h. die Polare von b geht durch x . Und der Schnitt dieser Polare mit X ist der dem b in Bezug auf die Schnitte dieser Gerade harmonisch zugeordnete Punkt, also der ihm conjugirte in der Involution, welche X in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört und von der die Schnitte die Doppelpunkte sind.

Mithin ergibt sich der Satz:

Bewegt sich ein Punkt y auf einer Gerade X in der Ebene eines Kegelschnitts, so läuft seine Polare Y durch einen festen Punkt x , den Pol von X , und trifft X in demjenigen Punkte, welcher der conjugirte zu y ist in der Involution, die der Gerade X in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, während der Verbindungsstrahl des festen Punktes x mit dem veränderlichen Punkte y der conjugirte Strahl zu der Polare Y in derjenigen Involution ist, welche dem Punkt x in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört. Um also auf einer beliebigen Gerade die ihr in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Involution zu erhalten, haben wir zu jedem Punkte x derselben den Schnittpunkt ξ seiner Polare mit der gegebenen Gerade zu bestimmen; dann sind immer x, ξ zwei conjugirte Punkte der Involution.

Ebenso gilt der duale Satz:

Dreht sich ein Strahl Y um einen festen Punkt x in der Ebene eines Kegelschnitts, so bewegt sich sein Pol y auf einer Gerade X , der Polare von x . Der Punkt y und der Schnittpunkt von Y mit X sind conjugirte Punkte derjenigen Involution, welche der Gerade X in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, der Strahl Y und der Verbindungsstrahl von x mit y conjugirte Strahlen der Involution, welche dem Punkt x in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört.

Aus der Erzeugung des Kegelschnitts durch zwei projective Punkt- 101
reihen kann man zur Zuordnung von Polare und Pol auch in folgender Weise gelangen. Die beiden Punktreihen seien wiederum \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 ; die Gerade sei X . Sie schneide \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 in \mathfrak{x} und \mathfrak{y}_1 ; deren entsprechende Punkte seien \mathfrak{x}_1 und \mathfrak{y} ; wir wissen, dass der Punkt $\xi = (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}\mathfrak{x}_1)$

auf der Berührungssehne f_{e_1} von \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 liegt. Auf η_{ξ_1} construirt man den ξ zugeordneten vierten harmonischen Punkt x in Bezug auf η und ξ_1 . Das ist der Pol von X . Um uns zu überzeugen, dass es der nämliche Punkt ist, wie der in der vorangehenden Betrachtung der Gerade X zugeordnete, haben wir nachzuweisen, dass, wenn wir aus zwei Punkten von X die Tangentenpaare construiren und in Bezug auf sie den der Gerade X zugeordneten vierten Strahl, diese beiden Strahlen durch den in der obigen Weise erhaltenen Punkt x gehen. Die Tangenten aus ξ sind \mathfrak{A} und ξ_{ξ_1} ; sie und die Gerade X treffen η_{ξ_1} in η , ξ_1 und ξ , also muss der vierte harmonische Strahl durch x gehen; ebenso bei den Tangenten aus η_1 .

Leiten wir die Haupteigenschaften von Pol und Polare aus der jetzigen Construction ab. Durch x sei eine zweite Gerade Y gelegt; sie schneide \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 in β, t_1 , denen β_1 und t entsprechen. Auch $(\beta t_1, t_{\beta_1}) = \eta$ und $(\eta t_1, t_{\eta_1}) = \xi$ liegen auf der Berührungssehne f_{e_1} . Weil $\eta, \xi_1; \xi, x^*$ harmonisch sind, so sind es (durch Projection aus t_1) auch $\xi, e_1; \xi, \eta$, weil $t_1 \beta = Y$, welche durch η geht, nach Voraussetzung den Punkt x enthält; folglich sind, wenn von η_1 auf t_{β_1} projectirt wird, auch $t, \beta_1; (t_{\beta_1}, X), \eta$ harmonisch, der vierte harmonische Punkt also zu $t, \beta_1; \eta, *$ d. i. der Pol y von Y nach unserer jetzigen Construction, liegt auf X . Wenn daher Y durch x geht, so fällt y auf X .

Wir drehen weiter X um einen Punkt p ; ξ und η_1 bewegen sich perspectiv und daher η und ξ_1 projectiv. Folglich umhüllt η_{ξ_1} einen Kegelschnitt, welcher \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 berührt und auch f_{e_1} , denn in diese Gerade fällt η_{ξ_1} , wenn X durch den Schnittpunkt e, f_1 von \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 geht. Die Punkte η, ξ_1, ξ der veränderlichen Tangente bewegen sich daher auf den festen Tangenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, f_{e_1}$. Es sei aus dem Punkte x auf irgend einer der Tangenten die zweite Tangente P an diesen Kegelschnitt gezogen, so werden die vier Tangenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1; f_{e_1}, P$ von allen Tangenten harmonisch geschnitten, weil von einer, derjenigen, auf der jener Punkt x genommen ist. Folglich liegen alle x auf dieser P . Wenn also X sich um einen Punkt p dreht, so bewegt sich x auf einer Gerade P .

Zwei Lagen von X reichen zur Bestimmung dieser P aus; sie seien X', X'' und die zugehörigen P bestimmenden Punkte x', x'' . Weil P durch x', x'' geht, so muss der Pol auf X', X'' liegen, also der Schnittpunkt p sein. Die Gerade P ist also so beschaffen, dass der Pol der gegebene Punkt p ist.

* Diese abkürzenden Ausdrucksweisen, in denen η und ξ_1, ξ und x , bezw. t und β_1 als zugeordnet gekennzeichnet sind, mögen künftighin gebraucht werden.

Dies giebt eine Construction der Polare eines Punktes, wenn der Kegelschnitt durch projective Punktreihen erzeugt gedacht wird.

Der Leser möge hieraus die Construction des Pols einer Gerade in Bezug auf einen durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt ableiten und die duale Betrachtung machen.

Weil die einem Punkte oder einer Gerade in Bezug auf einen 102 Kegelschnitt zugeordneten Involutionen in sich projective Doppelgebilde sind, so folgt der bemerkenswerthe Satz:

Die Polaren sämmtlicher Punkte einer geraden Punktreihe in Bezug auf einen Kegelschnitt bilden ein mit der Punktreihe projectives Strahlbüschel, und die Pole sämmtlicher Strahlen eines ebenen Strahlbüschels in Bezug auf einen Kegelschnitt bilden eine mit dem Strahlbüschel projective gerade Punktreihe.

Nehmen wir jetzt zwei beliebige projective Punktreihen \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 , so bilden die Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt zwei mit jenen, also unter sich projective Strahlbüschel B und B_1 ; die Schnittpunkte entsprechender Strahlen von B, B_1 sind die Pole der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$; beide Erzeugnisse sind, wie wir wissen, Kegelschnitte und die Tangenten des einen die Polaren der Punkte des andern, ebenso wie die Punkte des einen die Pole der Tangenten des andern sind. Einer Gerade, die den einen Kegelschnitt schneidet, und ihren Schnittpunkten entspricht ein Punkt und die beiden Tangenten aus ihm an den andern Kegelschnitt; rücken jene Schnittpunkte zusammen, dann vereinigen sich auch diese Tangenten; also einer Tangente des einen Kegelschnitts und ihrem Berührungspunkte entspricht ein Punkt des andern und seine Tangente. Daher gilt der Satz:

Die Polaren sämmtlicher Punkte eines Kegelschnitts $K^{(2)}$ in Bezug auf einen beliebigen andern Kegelschnitt $C^{(2)}$ umhüllen einen dritten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, und die Pole sämmtlicher Tangenten des Kegelschnitts $K^{(2)}$ in Bezug auf $C^{(2)}$ sind die Punkte desselben Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, in der Weise, dass jede Tangente (und der Berührungspunkt) des einen Kegelschnitts einen Punkt (und die Tangente) des andern Kegelschnitts zum Pol (und zur Polare) in Bezug auf den Kegelschnitt $C^{(2)}$ hat.

Hieraus folgt zugleich, dass, wenn man von irgend einem Punkt P die Polare L in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$ annimmt, auch der Pol \mathfrak{P} von L und die Polare \mathfrak{Q} von P rücksichtlich des Hilfskegelschnitts $C^{(2)}$ für den neuen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ Pol und Polare sein werden. Dies giebt ein einfaches Kennzeichen dafür, ob der Polarkegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist; nämlich: Liegt der Mittelpunkt von $C^{(2)}$ ausserhalb von $K^{(2)}$, so ist $\mathfrak{K}^{(2)}$ Hyperbel;

liegt er auf $K^{(2)}$, so ist $\mathfrak{R}^{(2)}$ Parabel; liegt er innerhalb $K^{(2)}$, so ist $\mathfrak{R}^{(2)}$ Ellipse.

Daraus erhalten wir eine directe Ueberführung von Eigenschaften, des Kegelschnitts in andere (polare), z. B. des *Pascal'schen* Satzes in den *Brianchon'schen* Satz, und erkennen eine vollkommene Dualität von Eigenschaften des Kegelschnitts, wie sie ursprünglich schon in den Grundelementen enthalten ist, von denen wir ausgegangen sind, und wie sie infolge dessen in den weiteren Sätzen uns wiederholt entgegengetreten ist. Dies gegenseitige Entsprechen der Punkte einer Ebene und der Geraden in derselben mit Hülfe eines festen Kegelschnitts (Basis) ist ein fruchtbares Princip zur Auffindung neuer Wahrheiten (Polarisation) und der Ausgangspunkt einer umfangreichen Theorie (*Theorie der reciproken Polaren* von *Poncelet*) geworden.

103 Wir nennen zwei solche Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts x und y , für welche die Polare des einen durch den andern geht, also auch die Polare des zweiten durch den ersten, *zwei conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt* und in gleicher Weise zwei solche Strahlen X und Y , für welche der Pol des einen auf dem andern liegt, also auch der Pol des zweiten auf dem ersten, *zwei conjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt* zu nennen. Es sind dann zwei conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt immer auch conjugirt in derjenigen Involution, welche ihrer Verbindungslinie, und zwei conjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt auch conjugirt in derjenigen Involution, welche ihrem Schnittpunkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört. Dies lässt sich auch so aussprechen: *Sämmtliche Paare conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, welche auf derselben Gerade liegen, bilden die Involution, welche dieser Gerade, und sämmtliche Paare conjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt, welche durch denselben Punkt gehen, bilden die Involution, welche diesem Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört.* Hieraus folgt, dass es durch jeden beliebigen Punkt ein Paar und im allgemeinen nur ein Paar rechtwinkliger conjugirter Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt giebt; es sei denn, dass die dem Punkte zugehörige Involution orthogonal ist, wo dann sämmtliche Paare conjugirter Strahlen zu einander rechtwinklig sind. Dieser Fall wird uns später beschäftigen. (§ 35.)

104 Es seien ξ und ξ_1 , η und η_1 zwei Paare in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirter Punkte; sie sind entsprechende Punkte zweier projectiver Punktreihen auf den Geraden $\xi\eta$, $\xi_1\eta_1$, von denen jede in ihre Gerade eingeschnitten wird durch den Polarenbüschel der Punktreihe der andern Gerade; entsprechende Punkte sind durchweg con-

jugirt. Dem Schnittpunkte $(x\eta, x_1\eta_1)$, als Punkt der einen oder andern Gerade, entspricht je ein conjugirt auf der zweiten; die Verbindungslinie dieser beiden Punkte ist also seine Polare, andererseits ist sie aber die Berührungsssehne \mathcal{Q} der beiden projectiven Punktreihen, und deshalb muss auf ihr der Punkt $(x\eta_1, \eta x_1)$ liegen. Folglich ist dieser Punkt zu $(x\eta, x_1\eta_1)$ conjugirt, und wir haben den von *Hesse* gefundenen Satz:*

Wenn x und x_1 , η und η_1 zwei Paare in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirte Punkte sind, so sind auch $(x\eta, x_1\eta_1)$ und $(x\eta_1, x_1\eta)$ conjugirt. Oder:

Wenn zweimal zwei Gegenecken eines vollständigen Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirt sind, so sind es auch die dritten Gegenecken; ein solches Vierseit wird ein Polvierseit des Kegelschnitts genannt.

Und dual:

Wenn zweimal zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirt sind, so sind es auch die dritten Gegenseiten (Polviereck).

Es seien a, b, c drei Punkte, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ihre Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt; ferner

$$a_1 = \mathcal{B}\mathcal{C}, \quad b_1 = \mathcal{C}\mathcal{A}, \quad c_1 = \mathcal{A}\mathcal{B};$$

es sind dann a und b_1 , b und a_1 conjugirt, also auch (ab, a_1b_1) und (aa_1, bb_1) . Nun ist $\mathcal{C} = a_1b_1$ Polare von c , $c_1 = \mathcal{A}\mathcal{B}$ der Pol von ab , also cc_1 die Polare von (ab, a_1b_1) , demnach enthält sie den Punkt (aa_1, bb_1) . Die Geraden aa_1, bb_1, cc_1 laufen in einen Punkt zusammen und die Dreiecke $abc, a_1b_1c_1$ sind perspectiv. Also:

*Ein Dreieck und seine Polarfigur in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen immer perspectiv.***

Zu einem Punkte x gehören unendlich viele conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, die alle auf der Polare X liegen; zu einem beliebigen Punkt y derselben gehören wiederum auch unendlich viele conjugirte Punkte, die auf der durch x gehenden Polare Y liegen. Die beiden Polaren X und Y schneiden sich nun in einem Punkte z , dessen Polare Z nach dem Vorigen die Verbindungslinie xy sein muss.

* Journal für Mathematik Bd. 20 S. 301.

** Wenn δ das Perspectivitätscentrum und \mathcal{D} die Perspectivitätsaxe ist, welche die Polare von \mathcal{D} ist, so ist sowohl das Punktquadrupel $abcd$ als das Geradenquadrupel $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$ von der Beschaffenheit, dass jedes der vier Elemente von den übrigen in gleicher Weise abhängt. Diese Bemerkung verdanke ich einer mündlichen Mittheilung von *Rosanes*. (Anmerkung von *Schröter*.)

Solche drei Punkte x, y, z , von denen je zwei ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind, und deren Polaren X, Y, Z die (gegenüberliegenden) Seiten ihres Dreiecks sind:

$$X = yz, \quad Y = zx, \quad Z = xy,$$

bilden ein *Polardreieck*, sich selbst conjugirtes Dreieck, Tripel conjugirter Punkt in Bezug auf den Kegelschnitt, oder wenn man mehr seine Seiten ins Auge fasst, ein *Polardreieck*, sich selbst conjugirtes Dreieck, Tripel conjugirter Strahlen, weil offenbar auch je zwei Seiten conjugirt sind, indem jede durch den Pol der andern geht.

Ein Polardreieck giebt mit einem beliebigen Punkte immer ein Polviereck, mit einer beliebigen Gerade immer ein Polvierseit.

Aus Fig. 41 wissen wir, dass x und X Pol und Polare sind, also Diagonalpunkt und gegenüberliegende Diagonale des Vierecks BB_1PP_1 , und ebenso sind natürlich p und $x\pi$, π und xp Pol und Polare; daher ist das Diagonaldreieck ein Polardreieck. Also:

Das Diagonaldreieck eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen vollständigen Vierecks oder eines demselben umgeschriebenen vollständigen Vierseits ist immer Polardreieck in Bezug auf ihn.

Erinnern wir uns, dass ein solches Viereck und das Vierseit der Tangenten seiner Ecken dasselbe Diagonaldreieck haben.

Es sei O wiederum ein Punkt, aus dem die einen Kegelschnitt erzeugenden projectiven Punktreihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ durch involutorische Strahlbüschel projectirt werden (Nr. 67); sind dann $Ox_1y_1, O\xi_1\eta$ zwei conjugirte Strahlen dieser Involution, so bilden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, x_1y_1, \eta\xi_1$ ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Vierseit; $x_1y_1, \xi_1\eta$ sind zwei Diagonalen desselben, mithin conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt.

Wenn also die einen Kegelschnitt erzeugenden projectiven Gebilde aus einem Punkte durch eine Involution projectirt oder von einer Gerade in einer Involution geschnitten werden, so ist diese Involution die dem Punkte, der Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige.

Diese Polardreiecke spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Kegelschnitte und sind in dreifach unendlicher Mannigfaltigkeit vorhanden. Ein Punkt x von drei Punkten eines Tripels kann willkürlich in der Ebene angenommen werden, der zweite Punkt y ist dann auf die Polare X beschränkt und kann auf dieser auch noch willkürlich gewählt werden; der dritte z ist aber durch diese beiden bestimmt, nämlich der Schnittpunkt der Polaren X, Y .

105 Zu einem beliebigen Punkte x in der Ebene eines Kegelschnitts giebt es unendlich viele Paare yz , welche mit ihm zusammen ein Polardreieck bilden; sie liegen sämmtlich auf der Polare X des

Punktes x und bilden die Involution, welche dieser Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört.

Es seien $\xi\xi_1\xi_2$ und $\eta\eta_1\eta_2$ zwei zu demselben Kegelschnitte gehörige Polardreiecke. Nach dem *Hesse'schen* Satze ist $(\xi\eta_1, \xi_1\eta)$ zu $(\xi\eta, \xi_1\eta_1)$ conjugirt; Pol von $\xi\eta$ ist der Schnitt $(\xi_1\xi_2, \eta_1\eta_2)$, der von $\xi_1\eta_1$ ist $(\xi_2\xi, \eta_2\eta)$; die Verbindungslinie ist also die Polare von $(\xi\eta, \xi_1\eta_1)$; sie enthält $(\xi\eta_1, \xi_1\eta)$. Indem so die drei Punkte $(\xi\eta_1, \eta_1\xi_1)$, $(\eta_1\eta_2, \xi_1\xi_2)$ und $(\eta_2\eta, \xi_2\xi)$ in gerader Linie liegen, ist $\xi\eta_1\eta_2\eta\xi_1\xi_2$ ein *Pascal'sches* Sechseck.

Die Ecken zweier zu demselben Kegelschnitte K gehörigen Polardreiecke sind stets sechs Punkte eines zweiten Kegelschnitts K_1 und die Seiten sechs Tangenten eines dritten \mathfrak{K}_1 .

Dem Kegelschnitte K_1 sei ein Polardreieck $\xi\xi_1\xi_2$ des Kegelschnitts K eingeschrieben; η sei ein beliebiger Punkt von K_1 ; seine Polare Y in Bezug auf K schneide K_1 in η_1, η_2 , welche Punkte also zu η conjugirt sind für K . Man vervollständige $\eta\eta_1$ durch η'_2 , der auch auf Y liegen muss, zum Polardreiecke von K . Dann liegen die sechs Ecken von $\xi\xi_1\xi_2$ und $\eta\eta_1\eta'_2$ auf einem Kegelschnitte, der aber mit K_1 identisch ist, weil er mit ihm die fünf Punkte $\xi, \xi_1, \xi_2, \eta, \eta_1$ gemeinsam hat. Also fallen η'_2 und η_2 zusammen in den zweiten Schnitt von K_1 mit Y ; und $\eta\eta_1\eta_2$ ist ein Polardreieck von K . Da η beliebig auf K_1 gewählt ist, haben wir:

Wenn einem Kegelschnitte ein Polardreieck eines andern eingeschrieben ist, so sind ihm unendlich viele eingeschrieben; jeder von seinen Punkten ist Ecke eines dieser Dreiecke, die Schnitte seiner Polare nach dem andern Kegelschnitte sind die beiden übrigen. Es können sich also unter den Dreiecken solche befinden, bei denen nur eine Ecke und die Gegenseite reell sind.

Dual: Wenn einem Kegelschnitte ein Polardreieck eines andern umgeschrieben ist, so sind ihm unendlich viele umgeschrieben; jede von seinen Tangenten kann Seite sein, die Tangenten aus ihrem Pole nach dem andern Kegelschnitte sind die beiden übrigen.

Kommen wir aber nochmals auf die obige Figur von drei Kegelschnitten zurück: die Ecken von zwei Polardreiecken von K liegen auf einem zweiten K_1 und ihre Seiten berühren einen dritten \mathfrak{K}_1 . Diese beiden Kegelschnitte K_1 und \mathfrak{K}_1 sind polar zu einander in Bezug auf K , weil die Polaren von sechs Punkten von K_1 nach K Tangenten von \mathfrak{K}_1 sind. Ist also ξ ein Punkt von K_1 , so berührt seine Polare nach K den \mathfrak{K}_1 ; ihre Schnitte mit K_1 bilden mit ξ ein Polardreieck von K , und folglich berühren auch die beiden andern Seiten den \mathfrak{K}_1 .

Mithin haben wir unendlich viele Dreiecke, welche Polardreiecke von K , dem K_1 ein- und dem \mathfrak{R}_1 umgeschrieben sind.

Die Tangenten von \mathfrak{R}_1 schneiden K und K_1 in zwei harmonischen Punktepaaren, die Punkte von K_1 senden an K und \mathfrak{R}_1 zwei harmonische Tangentenpaare.

106 Es sei abc wiederum ein Polardreieck von K ; ein beliebiger Punkt ζ von K werde mit a und b verbunden; die Verbindungslinien schneiden K zum zweiten Male in η und ξ ; wenn nun bc die $\eta\xi$ in ξ , ca die $\xi\eta$ in η schneidet, so sind a und ξ conjugirt, also harmonisch zu η und ζ , ebenso b und η zu ξ und ζ ; daher

$$a\xi\eta\zeta \cap \eta b\xi\zeta$$

und weil ζ sich selbst entspricht, gehen $a\eta$, $b\xi$, $\xi\eta$ durch denselben Punkt, oder $\xi\eta$ geht durch $c = (a\eta, b\xi)$. Also:

Wenn zwei Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks durch zwei Ecken eines Polardreiecks desselben gehen, so geht die dritte Seite durch die dritte Ecke. Oder:

Man kann einem Kegelschnitte unendlich viele Dreiecke einschreiben, deren Seiten durch die Ecken eines Polardreiecks gehen, und unendlich viele umschreiben, deren Ecken auf den Seiten dieses Dreiecks liegen. Jeder Punkt des Kegelschnitts kann Ecke eines von jenen, jede Tangente Seite eines von diesen Dreiecken sein.

Wir halten c und ζ fest, während a , b die Involution conjugirter Punkte auf der Polare von c durchlaufen; $\xi\eta$ geht immer durch c .

Projicirt man aus einem Punkte des Kegelschnitts die Punktepaare der Involution conjugirter Punkte auf einer Gerade, so gehen die Sehnen, welche die Schnittpunkte der Strahlenpaare mit der Curve unter einander verbinden (Durchbohrungssehnen), alle durch einen festen Punkt, den Pol der Gerade.

107 Bei jedem Polardreiecke haben wir drei Involutionen conjugirter Punkte auf den Seiten und drei Involutionen conjugirter Strahlen um den Ecken; je zwei, die zu Seite und Gegenecke gehören, sind perspectiv und daher gleichartig. Von den drei einen oder andern ist stets eine elliptisch, die beiden andern sind hyperbolisch. Oder von den drei Ecken des Polardreiecks liegt stets eine innerhalb des Kegelschnitts und die beiden andern ausserhalb, die Gegenseiten dieser schneiden, die Gegenseite jener schneidet nicht.

Demn wenn die erste Ecke eines Polardreiecks eine innere ist, so schneidet die Gegenseite als ihre Polare nicht, und die auf ihr gelegenen Ecken sind also äussere Punkte. Ist die Ausgangsecke aber eine äussere, so schneidet die Gegenseite, die auf ihr gelegenen Ecken

sind harmonisch zu den Schnitten; also ist die eine auch ausserhalb, die andere innerhalb des Kegelschnitts gelegen.

Zu drei Punkten auf den Seiten eines Polardreiecks, die auf einer Gerade liegen, sind in den Involutionen bezw. conjugirt drei Punkte, deren Verbindungslinien mit den Gegenecken in einen Punkt zusammenlaufen, den Pol jener Gerade.

Die sechs Punkte, in denen ein Kegelschnitt die Seiten eines ihm zugehörigen Polardreiecks abc schneidet (von denen freilich zwei nicht reell sind), bilden 24 *Brianchon'sche* Sechsecke. Denn sind die Schnitte $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2$, so haben wir z. B. auf bc, ca die harmonischen Punkte $c b a_1 a_2, c a b_1 b_2$; also laufen $ab = c_1 c_2, a_1 b_1, a_2 b_2$ in einen Punkt zusammen, und $a_1 a_2 c_1 b_1 b_2 c_2$ ist ein *Brianchon'sches* Sechseck.

§ 31. Von einem Kegelschnitte getragene projective Gebilde und Involutionen. Weitere Folgerungen aus den Polar-Eigenschaften.

Wie wir in Nr. 34, 35 zu krummen projectiven Punktreihen auf 108 einem Kreise gelangt sind, so erhalten wir analog *krumme projective Punktreihen auf einem Kegelschnitte*; wir brauchen ihn nur zu schneiden mit zwei projectiven Strahlbüscheln, deren Scheitel auf ihm liegen, vereinigt, wie a. a. O., oder getrennt. Entsprechend sind in den krummen Punktreihen zwei Punkte, durch welche entsprechende Strahlen der Büschel gehen. Projiciren wir diese krummen Punktreihen wiederum aus beliebigen zwei Punkten des Kegelschnitts (oder aus demselben), so sind, infolge der Fundamental-Eigenschaft des Kegelschnitts, die projicirenden Strahlenbüschel bezw. den früheren projectiv, also auch unter einander.

Genau wie beim Kreise finden wir *eine ausgezeichnete Gerade, auf welcher alle Punkte $(x y_1, x_1 y)$ liegen, wo x und x_1, y und y_1 irgend welche Paare entsprechender Punkte der krummen Punktreihen sind, und welche den Kegelschnitt in den (reellen oder imaginären) Doppelpunkten dieser Punktreihen schneidet*. Drei Paare entsprechender Punkte bestimmen sie, und sie dient dazu, weitere entsprechende Punkte zu gewinnen.

Es seien dual auf zwei Tangenten eines Kegelschnitts (oder auf dieselbe) projective Punktreihen gelegt; durch entsprechende Punkte ziehe man die zweiten Tangenten. Man erhält dadurch entsprechende Elemente *zweier projectiver Tangentenbüschel*, die dann wiederum in zwei beliebige Tangenten entsprechende Punkte projectiver (gerader) Punktreihen einschneiden. Hier haben wir *einen ausgezeichneten Punkt, durch den alle Verbindungslinien $(x y_1, x_1 y)$ gehen, wo $x, x_1; y, y_1$ irgend welche Paare entsprechender Strahlen der projectiven Tangentenbüschel*

sind. Durch ihn gehen die (reellen oder imaginären) Doppelstrahlen der Büschel.

Ferner fanden wir (Nr. 68), dass, wenn ζ und x ein Punkt des Kegelschnitts und seine Tangente sind, der Büschel um einen festen Punkt des Kegelschnitts und die Punktreihe auf seiner Tangente derartig projectiv sind, dass der nach ζ gehende Strahl und der Schnittpunkt mit x einander entsprechen. Daher sind auch die krumme Punktreihe auf dem Kegelschnitt und sein Tangentenbüschel projectiv mit ζ und x als entsprechenden Elementen.

Zwei krumme projective Punktreihen auf einem Kegelschnitt führen sofort zu zwei projectiven Tangentenbüscheln, in denen Tangenten sich entsprechen, die in entsprechenden Punkten berühren, und umgekehrt.

In den Doppelpunkten jener berühren die Doppelstrahlen dieser; also folgt, dass die ausgezeichnete Gerade der ersteren die Polare des ausgezeichneten Punktes der letzteren ist. Wir wollen dies jedoch auch erkennen, ohne eventuell imaginäre Elemente zu benutzen. Es seien $\xi\xi_1, \eta\eta_1, \zeta\zeta_1$ drei Paare entsprechender Punkte der Punktreihen; dann sind xx_1, yy_1, zz_1 , ihre Tangenten, drei Paare entsprechender Strahlen der Büschel. Die ausgezeichnete Gerade verbindet die Punkte $(\xi\eta_1, \xi_1\eta)$ und $(\xi\zeta_1, \xi_1\zeta)$, im ausgezeichneten Punkte schneiden sich (xy_1, x_1y) und (xz_1, x_1z) . Nun ist xy_1 der Pol von $\xi\eta_1$, x_1y der von $\xi_1\eta$; also (xy_1, x_1y) die Polare von $(\xi\eta_1, \xi_1\eta)$ und ebenso (xz_1, x_1z) die von $(\xi\zeta_1, \xi_1\zeta)$; woraus dann die Behauptung folgt.

109 Jetzt seien die krummen projectiven Punktreihen auf dem Kegelschnitte die Schnitte mit zwei involutorischen projectiven Büscheln um einen Punkt der Curve. Die Fundamental-Eigenschaft, dass die beiden demselben Strahle in beiderlei Sinne entsprechenden Strahlen sich immer decken und dass dies durchweg geschieht, sobald es einmal geschieht, geht über auf die krummen Punktreihen, von diesen auf die beiden Büschel, die sie aus irgend einem andern Punkte des Kegelschnitts projiciren, aber auch auf die Tangentenbüschel und auf die Punktreihen, die diese in irgend eine Tangente einschneiden; und ebenso könnten wir von involutorischen projectiven Punktreihen auf einer Tangente ausgehen. Wir gelangen so zum Begriffe einer krummen Punktinvolution und einer Tangenteninvolution auf einem Kegelschnitte, bezw. um ihn.

Jede Involution der einen Art inducirt sofort eine der andern, in welcher die Tangenten, bezw. Berührungspunkte conjugirter Elemente der ersteren conjugirt sind; in den Doppelpunkten der einen berühren die Doppelstrahlen der andern. Die krumme Punktinvolution wird aus jedem Punkte des Kegelschnitts durch eine Strahleninvolution projicirt, die

Tangenteninvolution von jeder Tangente in einer Punktinvolution geschnitten.

Wenn $\xi\xi_1, \eta\eta_1$ zwei Paare conjugirter Punkte der krummen Punktinvolution sind, so entsprechen den Punkten ξ, ξ_1, η, η_1 der einen der beiden involutorischen (krummen) Reihen die Punkte ξ_1, ξ, η_1, η der andern. Also liegt auf der ausgezeichneten Gerade, die wir hier wiederum *Involutionsaxe* nennen, sowohl $(\xi\eta_1, \xi_1\eta)$ als auch $(\xi\eta, \xi_1\eta_1)$, ferner aber auch, wenn wir $\eta\eta_1$ in $\xi\xi_1$ überführen, der Punkt $(\xi\xi, \xi_1\xi_1)$, d. i. der Schnittpunkt der Tangenten x und x_1 von ξ, ξ_1 .

Auf der Involutionsaxe der krummen Punktinvolution liegen also die zwei Diagonalepunkte des vollständigen Vierecks zweier Paare conjugirter Punkte, in denen sich Seiten schneiden, welche nicht conjugirte Punkte verbinden, und die Schnitte der Tangenten in conjugirten Punkten, also conjugirter Strahlen der Tangenteninvolution; damit erhält diese Linie auch eine Beziehung zu dieser Involution.

Sie selbst hat ein *Involutionscentrum* mit den dualen Eigenschaften zu denen der Involutionsaxe der Punktinvolution: *Durch dasselbe gehen, wenn aus zwei Paaren ein vollständiges Vierseit gebildet wird, diejenigen beiden Diagonalen desselben, welche Ecken verbinden, in denen nicht conjugirte Strahlen sich schneiden, sodann aber auch alle Verbindungslinien der Berührungspunkte conjugirter Strahlen, also conjugirter Punkte der Punktinvolution.* Damit kommt dies Centrum der Tangenteninvolution in Beziehung zur Punktinvolution.

Diese wichtige Eigenschaft, dass alle Verbindungslinien conjugirter Punkte einer krummen Punktinvolution in einen Punkt zusammenlaufen, haben wir in Nr. 43 beim Kreise kennen gelernt und können den dortigen Beweis für den allgemeinen Kegelschnitt wiederholen und dann für den Fall der Tangenteninvolution dualisiren.

Jede der beiden Involutionen hat also ein Centrum und eine Axe; in das Centrum der Punktinvolution laufen die Verbindungslinien conjugirter Punkte zusammen, und es ist für jedes der oben genannten vollständigen Vierecke der (feste) dritte Diagonalepunkt, während die beiden anderen (veränderlichen) auf der Axe liegen. Auch hieraus erhellt, dass sie Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt sind.

Auf der Axe der Tangenteninvolution liegen alle Schnittpunkte conjugirter Strahlen, und sie ist die dritte Diagonale aller obigen Vierseite, während die beiden andern im Centrum sich schneiden.

Gehören die beiden Involutionen so zusammen, dass conjugirte Strahlen der einen in conjugirten Punkten der andern berühren, so sind ihnen Centrum und Axe gemeinsam.

Den letzten Satz von Nr. 106 kann man nun auch so aussprechen:

Wird die Involution in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirter Punkte auf einer Geraden aus irgend einem Punkte des Kegelschnitts auf denselben projectirt, so ergibt sich immer dieselbe krumme Involution, diejenige nämlich, welche die Gerade zur Axe und ihren Pol zum Centrum hat.

Sind $\xi\xi_1, \eta\eta_1$ zwei Paare der krummen Punktinvolution, so hat ihr Viereck das Centrum und ein Paar der geraden Involution zu Diagonalknoten. Oder jedes Paar $\xi\xi_1$ der geraden Involution kann auf zwei Weisen in dasselbe Paar $\xi\xi_1$ der krummen projectirt werden; die beiden Projectionscentren η, η_1 bilden ein Paar der letzteren.

Duales gilt für eine Tangenteninvolution.

110 Jede krumme Involution führt zu einem Centrum.

Auch umgekehrt führt jeder Punkt als Centrum zu einer krummen Involution auf einem gegebenen Kegelschnitte, oder, was dasselbe ist, jeder Strahlbüschel schneidet eine solche ein. Zwei durch den Punkt gezogene Strahlen (die den Kegelschnitt schneiden) geben zwei Paare; durch diese ist eine Involution auf der Curve bestimmt, und der Punkt, durch den ja zwei der Verbindungssehnen laufen, ist das Centrum.

Beweisen wir aber, wegen der Wichtigkeit dieses Satzes, noch direct, dass drei Strahlenpaare, welche drei eingeschnittene Punktepaare aus irgend einem Punkte des Kegelschnitts projectiren, in Involution sind. Es seien $a\alpha, b\beta, c\gamma$ diese drei Punktepaare auf dem Kegelschnitte, deren Verbindungssehnen durch den gegebenen Punkt p gehen. Die Büschel $a(b, c, \gamma, \alpha)$ und $b(a, c, \gamma, \beta)$ sind perspectiv mit $c\gamma p$ als perspectivem Durchschnitt, mithin sind auch $a(b, c, \gamma, \alpha)$ und $b(\beta, \gamma, c, a)$ projectiv; also sind, wegen der projectiven Grundeigenschaft des Kegelschnitts, auch $B(b, c, \gamma, \alpha)$ und $B(\beta, \gamma, c, a)$ projectiv, wenn B ein beliebiger Punkt der Curve ist; dies bedeutet, da Bc und $B\gamma$ sich in beiderlei Sinne entsprechen, dass $Bc, B\gamma; Ba, B\alpha; Bb, B\beta$ in Involution sind.

Von dem früheren Satze, von dem der eben bewiesene die Umkehrung ist, möge nun der Specialfall erwähnt werden, dass die Strahlinvolution, deren Grundpunkt auf einen Kegelschnitt gelegt wird, eine orthogonale sei; er giebt den Satz:

Wenn man um einen Punkt eines Kegelschnitts als Scheitel einen rechten Winkel dreht, so dreht sich die Verbindungslinie der zweiten Schnittpunkte der Schenkel um einen festen Punkt, der sich auf der Normale des Scheitels befindet, d. h. derjenigen Geraden, die in ihm auf seiner Tangente senkrecht steht. Denn diese Normale ergibt sich als Verbindungslinie, wenn der eine Schenkel in die Tangente fällt.

Dual zu obigem Satze haben wir:

Die Tangentenpaare, die von den Punkten einer Gerade an einen Kegelschnitt kommen, bilden eine Tangenteninvolution.

Wir fanden in Nr. 106, dass, wenn $a\alpha a$ ein Polardreieck eines Kegelschnitts und o ein Punkt desselben ist, die Sehne, welche die zweiten Schnitte p, q von oa, oa verbindet, durch die dritte Ecke a geht. Ist also r der zweite Schnitt von oa , so geht ebenso pr durch α , qr durch a , und wir haben ein Viereck $opqr$ mit einer beliebig gegebenen Ecke dem Kegelschnitte eingeschrieben, für welches das Polardreieck $a\alpha a$ Diagonaldreieck ist.

Jenen Satz können wir auch verwenden zur Lösung der Aufgabe:

Einen Kegelschnitt zu construiren, der durch drei gegebene Punkte p_1, p_2, p_3 geht und eine gegebene Punktinvolution auf der Gerade \mathfrak{A} zur zugehörigen hat. Ist dieselbe hyperbolisch, so haben wir ihre reellen Doppelpunkte und damit fünf reelle bestimmende Punkte; ist sie aber elliptisch, so verschaffen wir uns für den Kegelschnitt, der, ausser durch die drei reellen, durch zwei conjugirte imaginäre Punkte bestimmt ist, die durch eine reelle elliptische Involution vertreten werden, von welcher sie die Doppelpunkte sind, weitere reelle Punkte. Wir schneiden \mathfrak{A} mit p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2 in s_1, s_2, s_3 , suchen zu diesen die conjugirten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in der gegebenen Involution und andererseits die vierten harmonischen q_1, q_2, q_3 zu $p_2, p_3; s_1$, bezw. $p_3, p_1; s_2$ und $p_1, p_2; s_3$; dann sind $q_1\sigma_1, q_2\sigma_2, q_3\sigma_3$ die Polaren von s_1, s_2, s_3 in Bezug auf den verlangten Kegelschnitt und laufen in den Pol von \mathfrak{A} zusammen. Dass sie durch denselben Punkt gehen, kann man in folgender Weise erkennen: Wir wissen aus Nr. 55, dass

$$q_2, q_3, s_1; \quad q_3, q_1, s_2; \quad q_1, q_2, s_3$$

je in gerader Linie liegen; wenn nun α Schnitt von $q_1\sigma_1, q_2\sigma_2$ ist, so zeigt das Viereck $q_1q_2q_3\alpha$, dass αq_3 durch den sechsten Punkt in Involution zu $s_1, \sigma_1; s_2, \sigma_2; s_3$ gehen muss, also durch σ_3 oder $q_3\sigma_3$ durch α . Es seien q_1, q_2, q_3 die zweiten Schnitte von α (p_1, p_2, p_3) mit der Curve. Das Polardreieck $\alpha s_2\sigma_2$ lehrt, dass die Verbindungslinie der zweiten Schnitte q_1, p_3 von $p_1\alpha$ und p_1s_2 durch σ_2 , und das Polardreieck $\alpha s_3\sigma_3$, dass q_1p_2 durch σ_3 geht; also ist

$$q_1 = (p_2\sigma_3, p_3\sigma_2);$$

wir erhalten demnach in den drei Schnittpunkten:

$$q_1 = (p_2\sigma_3, p_3\sigma_2), \quad q_2 = (p_3\sigma_1, p_1\sigma_3), \quad q_3 = (p_1\sigma_2, p_2\sigma_1),$$

wie wir es wünschen, drei weitere Punkte des Kegelschnitts, so dass er schon überbestimmt ist. Die sechs Punkte bilden das Pascal'sche

Sechseck $p_1q_2p_3q_1p_2q_3$, dessen Gegenseiten sich in den in gerader Linie gelegenen Punkten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ schneiden.

- 112 Führen wir auf diese Aufgabe die weitere zurück: *Den Kegelschnitt zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt p_1 geht und für den zwei auf \mathfrak{A} und \mathfrak{B} gegebene Involutionen die zugehörigen sind.* Der Fall, wo beide hyperbolisch sind, hat für uns kein Interesse, weil wir da die Involutionen durch ihre vier Doppelpunkte ersetzen können. Ist eine hyperbolisch, so haben wir den vorigen Fall; besonders interessant ist der dritte Fall, dass beide elliptisch sind, in dem es also sich darum handelt, *den Kegelschnitt zu construiren, der durch einen reellen Punkt und zweimal zwei conjugirt imaginäre gegeben ist, welche durch zwei elliptische Involutionen vertreten sind.* Wir wollen aber den zweiten Fall nicht ausschliessen.

Die Gerade, welche die Punkte verbindet, die in den beiden Involutionen dem Schnittpunkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ conjugirt sind, ist offenbar die Polare \mathfrak{C} dieses Punktes. Wenn nun diese Involutionen conjugirter Punkte aus p_1 auf den Kegelschnitt in krumme Involutionen projectirt werden, so sind die Centren, die Pole von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , beide auf \mathfrak{C} gelegen, und die Punkte des Kegelschnitts auf \mathfrak{C} werden also aus p_1 durch das gemeinsame Paar der beiden projectirenden Strahlinvolutionen projectirt. Da mindestens eine von ihnen elliptisch ist, so ist dies Paar reell und nach früherer Construction (Nr. 44) zu ermitteln; seine Schnitte p_2, p_3 mit \mathfrak{C} sind zwei reelle Punkte des Kegelschnitts.

Man kann aber nun leicht noch zwei weitere Punkte gewinnen. Es seien a der Pol von \mathfrak{A} und α, α die Schnitte von p_1p_2, p_1p_3 mit \mathfrak{A} , welche ein Paar der Involution auf \mathfrak{A} bilden; dann ist $a\alpha\alpha$ ein Polar-dreieck; $p_2\alpha$ treffe den Kegelschnitt nochmals in $p_4, p_2a = \mathfrak{C}$ trifft in p_3 , daher geht p_4p_3 durch a . Weil also p_3p_4 durch a , p_3p_2 durch a geht, so muss p_4p_2 durch a gehen; demnach ist

$$p_4 = (\alpha p_2, \alpha p_3),$$

und wenn b, β die analogen Punkte auf \mathfrak{B} sind, so ergibt sich der fünfte Punkt

$$p_5 = (\beta p_2, \beta p_3).$$

Die dualen Aufgaben werden entsprechend gelöst.

- 113 An den Satz, dass zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt polare Dreiecke perspectiv liegen, wollen wir die Lösung einer interessanten Aufgabe knüpfen.

Die Ecken des einen Dreiecks seien a, b, c , die Seiten des andern, ihre Polaren, A, B, C und seine Ecken $BC = a, CA = b, AB = c$

(Fig. 42), so schneiden sich nach jenem Satze aa, bb, cc in einem Punkte o ; wenn nun α, β, γ die Schnitte $(oa, A), (ob, B), (oc, C)$ sind, so bilden diese ein neues Dreieck, welches mit den beiden vorigen perspectiv liegt. Nun zeigt aber die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierecks $ab\alpha\beta$, wenn wir sie auf die Seiten und Diagonalen aus dem Diagonalepunkte c anwenden, dass auch die Strahlen $\alpha\beta, \alpha\gamma$ harmonisch zu den aa und A liegen.

Es sind ferner a und A Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt; begegnet ihm daher die Gerade $\alpha\beta$ in zwei Punkten z und z^1 , so wird der andere Schnittpunkt y von za mit dem Kegelschnitt von z durch a und den Schnittpunkt mit A harmonisch getrennt werden; folglich muss y auf dem vierten harmonischen Strahl $\alpha\gamma$ zu αz ; $A, \alpha a$ liegen. Ziehen wir anderer-

seits z^1a , welches in y^1 dem Kegelschnitt zum andern Male begegnen möge, so muss auch y^1 auf $\alpha\gamma$ liegen, oder $\alpha\gamma$ trifft den Kegelschnitt in den beiden Punkten y, y^1 . Die beiden Seiten $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ treffen also den Kegelschnitt in zwei solchen Punktepaaren zz^1 und yy^1 , dass zy und z^1y^1 durch a gehen, daher zy^1 und z^1y sich in a_1 auf der Polare A schneiden; in gleicher Weise treffen die beiden Seiten $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ den Kegelschnitt in zwei solchen Punktepaaren zz^1 und xx^1 , dass zx und z^1x^1 sich in b treffen, also zx^1 und z^1x sich in b_1 auf der Polare B schneiden; endlich aber treffen die beiden Seiten $\beta\gamma$ und $\alpha\gamma$ den Kegelschnitt in zwei solchen Punktepaaren xx^1 und yy^1 , dass von den beiden Schnittpunkten (xy, x^1y^1) und (xy^1, x^1y) der eine c ist und der andere c_1 auf der Polare C liegt; es fragt sich nur noch, welcher c ist und welcher c_1 ? Dies ist nicht schwer zu entscheiden, denn die sechs Punkte z, z^1, y, y^1, x, x^1 auf dem Kegelschnitt bilden ein *Pascal'sches* Sechseck $xzyx^1z^1y^1$, bei dem die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen; da nun

$$(xz, x^1z^1) = b,$$

$$(yz, y^1z^1) = a,$$

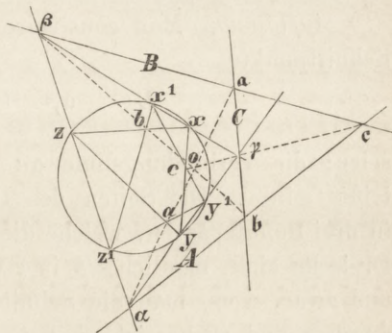
so muss der dritte

$$(xy^1, x^1y) = c_1$$

sein, denn die willkürlich angenommenen Punkte a, b, c liegen *nicht* in einer Geraden; folglich ist

$$(xy, x^1y^1) = c.$$

Fig. 42.



Das dem Kegelschnitte eingeschriebene Dreieck xyz hat also die Eigenschaft, dass seine drei Seiten durch die gegebenen Punkte a, b, c gehen, und das andere Dreieck $x^1y^1z^1$ hat dieselbe Eigenschaft. Daraus fließt die Auflösung der Aufgabe:

Es ist ein Kegelschnitt gegeben und drei beliebige Punkte a, b, c , man soll ein Dreieck dem Kegelschnitt einschreiben, dessen Seiten durch a, b, c gehen.

Auflösung. Man construire zu a, b, c die Polaren A, B, C , deren Schnittpunkte

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$$

seien; die Verbindungslinie aa trifft A in α , bb trifft B in β , cc trifft C in γ . Die Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ treffen den Kegelschnitt in drei Punktepaaren, welche die Ecken zweier der Aufgabe genügenden Dreiecke sind, nämlich $\alpha\beta$ in z und z^1 , $\beta\gamma$ in x und x^1 , $\gamma\alpha$ in y und y^1 und zwar, wenn man die Schnittpunkte von $\alpha\beta$ mit dem Kegelschnitt durch z und z^1 bezeichnet hat, so trifft za in y , z^1a in y^1 , zb in x und z^1b in x^1 , xy und x^1y^1 schneiden sich in c ; es giebt also zwei Dreiecke xyz und $x^1y^1z^1$ von der gewünschten Beschaffenheit, so dass die Seiten yz, zx, xy resp. durch a, b, c gehen und ebenso y^1z^1, z^1x^1, x^1y^1 . Diese beiden Dreiecke können auch imaginär werden, wenn nämlich eine Seite des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ den Kegelschnitt nicht trifft, woraus dann folgt, dass auch die andern ihn nicht treffen können. Auch können beide Dreiecke zusammenfallen; welche Bedingung muss alsdann zwischen den gegebenen Punkten a, b, c obwalten? Ist insbesondere abc ein Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt, so giebt es, wie wir in Nr. 106 gesehen haben, nicht bloß zwei Auflösungen der Aufgabe, sondern unendlich viele; sie ist unbestimmt.

Andererseits aber kann diese Aufgabe auch mit Hülfe krummer projectiver Punktreihen gelöst werden. Es sei ξ ein beliebiger Punkt auf dem Kegelschnitte, η der zweite Schnitt von ξc , dann wiederum ζ der zweite Schnitt von ηa , und ξ_1 der zweite Schnittpunkt von ζb . Wenn ξ auf der Curve bewegt wird, so beschreiben ξ und η , deren Verbindungslinie sich um c dreht, involutorische projective Punktreihen auf dem Kegelschnitte, ebenso η und ζ , ζ und ξ_1 , also beschreiben auch ξ und ξ_1 projective Punktreihen. Drei Lagen von ξ geben drei Paare entsprechender Punkte; mit diesen construirt man die ausgezeichnete Gerade; deren Schnitte mit der Curve, wenn sie vorhanden sind, sind die ersten Ecken der beiden Dreiecke, aus denen man dann

durch den obigen Prozess je die zweite und dritte Ecke erhält; bei ihnen muss derselbe zum Ausgangspunkt zurückführen.*

Was die Aufsuchung des gemeinsamen Paares zweier Involutionen auf derselben Gerade oder um denselben Punkt anlangt, so kann man theoretisch ebenso auf dem Kegelschnitte arbeiten, wie es in Nr. 44 auf dem Kreise geschehen ist; für die praktische Lösung ist natürlich dieser vorzuziehen.

Schliesslich soll noch diejenige Eigenschaft der *Steiner'schen* Punkte 114 beim *Pascal'schen* Sechsecke (Nr. 92) nachgewiesen werden, welche mit den Polarbeziehungen des Kegelschnitts zusammenhängt und auf die wir schon in der dortigen Anmerkung hingewiesen haben.

Hierzu müssen wir uns die Betrachtung a. a. O. vergegenwärtigen:

Die beiden Sechsecke 123456 und 143652 liefern zwei *Pascal'sche* Geraden, welche durch die Punkte

$$\begin{aligned} & (12, 45) = c_1, \quad (23, 56) = c_2, \\ \text{beziehungsweise} \quad & (12, 36) = \gamma_1, \quad (14, 56) = \gamma_2 \end{aligned}$$

bestimmt werden; $c_1 c_2$ und $\gamma_1 \gamma_2$ schneiden sich in dem *Steiner'schen* Punkte p .

Die Punkte $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ sind Diagonalepunkte von vier vollständigen Vierecken, die dem Kegelschnitt eingeschrieben sind und deren übrige Diagonalepunkte sind:

$$\begin{aligned} (14, 25) = a_1, \quad (25, 36) = a_2, \quad (16, 23) = \alpha_1, \quad (16, 45) = \alpha_2, \\ (15, 24) = b_1; \quad (26, 35) = b_2; \quad (13, 26) = \beta_1; \quad (15, 46) = \beta_2; \end{aligned}$$

so dass $a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1, \alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ Polardreiecke in Bezug auf den Kegelschnitt sind.

Es ist

$$\begin{aligned} 12 = c_1 \gamma_1, \quad 56 = c_2 \gamma_2, \quad 16 = \alpha_1 \alpha_2, \quad 25 = a_1 a_2, \\ \text{also} \quad (12, 56) = (c_1 \gamma_1, c_2 \gamma_2), \quad (16, 25) = (\alpha_1 \alpha_2, a_1 a_2). \end{aligned}$$

Da nun die Punkte (12, 56) und (16, 25) als Diagonalepunkte eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks conjugirt sind in Bezug auf ihn, so liegt

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \alpha_2, a_1 a_2) \\ \text{auf der Polare von} \quad & (c_1 \gamma_1, c_2 \gamma_2). \end{aligned}$$

* Ueber die Geschichte dieses Problems vergl. *Chasles*, Aperçu historique (oder deutsche Uebersetzung von *Sohncke*: Geschichte der Geometrie) Note XI; sowie auch *Göpel*, Journal für Mathematik Bd. 36 S. 317.

Diese Polare verbindet die Punkte

$$(a_1 b_1, \alpha_1 \beta_1) \quad \text{und} \quad (a_2 b_2, \alpha_2 \beta_2);$$

also liegen in einer Geraden die drei Punkte

$$(a_1 b_1, \alpha_1 \beta_1), \quad (a_2 b_2, \alpha_2 \beta_2), \quad (a_1 a_2, \alpha_1 \alpha_2),$$

oder die Dreiecke mit den Ecken

$$a_1, \alpha_1, (a_1 b_1, \alpha_1 \beta_1), \quad \text{bezw.} \quad a_2, \alpha_2, (a_2 b_2, \alpha_2 \beta_2)$$

liegen perspectiv. Die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Seiten sind

$$(a_1 \alpha_1, a_2 \alpha_2), \quad (a_1 b_1, a_2 b_2), \quad (\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2)$$

und liegen in einer Geraden. Folglich liegt $(a_1 \alpha_1, a_2 \alpha_2)$ auf der Polare von

$$p = (c_1 c_2, \gamma_1 \gamma_2).$$

Dieser Punkt $(a_1 \alpha_1, a_2 \alpha_2)$ ist aber der Schnittpunkt der *Pascal'schen* Geraden der Sechsecke

$$143256 \quad \text{und} \quad 163452,$$

also der *Steiner'sche* Gegenpunkt π von p ; somit sind p und π conjugirt, und wir erhalten den Satz:

*Jedes Paar Steiner'scher Gegenpunkte ist ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt.**

§ 32. Durchmesser und Mittelpunkt, die Involution der conjugirten Durchmesser und die Axen des Kegelschnitts.

115 Besondere Fälle der allgemeinen Polaritätsbeziehungen des Kegelschnitts führen zu denjenigen Eigenschaften desselben, welche am bekanntesten sind und meist zum Ausgangspunkt für die Untersuchung der Kegelschnitte gewählt werden. Nehmen wir einen unendlich fernen Punkt als Pol, so haben wir (Nr 99) durch ihn Strahlen zu ziehen, d. h. Parallele, welche den Kegelschnitt in zwei Punkten treffen, und den vierten harmonischen, dem unendlich entfernten zugeordneten Punkt zu construiren; dieser ist (Nr. 13) die Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten, also: *Die Mitten in beliebiger Richtung gezogener paralleler Sehnen eines Kegelschnitts liegen auf einer Geraden.* Eine solche Gerade heisst *Durchmesser* des Kegelschnitts und ist die Polare eines unendlich entfernten Punktes. *Die Tangenten in den Schnittpunkten eines Durchmessers laufen parallel*, nämlich durch den im Unendlichen liegenden

* Vergl. *Hesse*, Journal für Mathematik Bd. 24 S. 40; *G. Bauer*, Abhandlungen der Baierischen Akademie. II. Cl. Bd. XI, Abth. III.

Pol. Ziehen wir ein zweites Parallelstrahlenbüschel, so liegen die Mitten der durch den Kegelschnitt abgeschnittenen Stücke auf einem zweiten Durchmesser, der Polare des zweiten unendlich entfernten Grundpunktes; der Schnittpunkt beider Durchmesser ist der Pol der Verbindungslinie beider unendlich entfernten Punkte, d. h. der unendlich entfernten Gerade G_∞ . Auf jedem durch diesen Schnittpunkt zweier Durchmesser gehenden Strahl werden also durch den Kegelschnitt zwei Punkte bestimmt, deren Mitte jener Punkt ist, jeder solcher Strahl ist die Polare eines bestimmten Punktes im Unendlichen und jeder unendlich ferne Punkt sendet seinen polaren Durchmesser durch diesen Punkt.

Sämmtliche Durchmesser des Kegelschnitts laufen durch einen festen Punkt, welcher der Mittelpunkt des Kegelschnitts heisst und der Pol der unendlich entfernten Gerade G_∞ ist.

Alle Durchmesser werden durch diesen Punkt halbirt; die Curve ist also in Bezug auf ihn symmetrisch. Die Tangenten in symmetrischen Punkten sind parallel.

Bei der Hyperbel ist der Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Asymptoten (Nr. 80), weil diese die Polaren (Tangenten) der unendlich entfernten Punkte des Kegelschnitts sind; er liegt also ausserhalb der Hyperbel. Bei der Ellipse liegt er innerhalb derselben; weil G_∞ die Ellipse nicht schneidet. Bei der Parabel tritt die Eigenthümlichkeit ein, dass ihr Mittelpunkt auf ihr selbst liegt, nämlich ihr unendlich entfernter Punkt ist; da nämlich die unendlich entfernte Gerade Tangente der Parabel ist (Nr. 76), so ist ihr Pol der Berührungspunkt. Also ist der unendlich entfernte Punkt der Parabel zugleich der Mittelpunkt derselben, und alle ihre Durchmesser laufen parallel nach ihrem unendlich entfernten Punkte.

Wegen ihres endlichen Mittelpunktes heissen Ellipse und Hyperbel auch *centrische* oder *Mittelpunkts-Kegelschnitte*.

Wie jedem Punkte und jeder Gerade in Bezug auf einen Kegelschnitt eine bestimmte Involution zugehört (Nr. 96, 97), so auch der unendlich entfernten Gerade und dem Mittelpunkt; sind Punkt und Gerade Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt, so liegen beide Involutionen perspectiv. *Folglich liegt die dem Mittelpunkt in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Involution mit der der unendlich entfernten Gerade zugehörigen perspectiv.* Wir erhalten zwei conjugirte Strahlen der dem Mittelpunkt zugehörigen Involution, indem wir einen beliebigen Durchmesser ziehen und den Pol desselben mit dem Mittelpunkte verbinden, d. h. den Ort der Mitten der zu ihm parallelen Sehnen bestimmen. Zwei solche Durchmesser des Kegelschnitts, von denen einer

der Ort der Mitten der zu dem andern parallelen Sehnen und infolge dessen auch der andere der Ort der Mitten der zu dem ersten parallelen Sehnen ist, oder, was dasselbe sagt, zwei solche Durchmesser, von deren jeder seinen Pol auf dem andern hat, heissen *conjugirte Durchmesser* des Kegelschnitts. *Die sämmtlichen Paare conjugirter Durchmesser des Kegelschnitts bilden eine Involution.* Diese dem Mittelpunkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Involution ist elliptisch bei der Ellipse, hyperbolisch bei der Hyperbel; denn aus dem Mittelpunkt kommen an die Hyperbel reelle, an die Ellipse imaginäre Tangenten, welche Doppelstrahlen der Involution sind. Die unendlich ferne zur Durchmesser-Involution perspective hat die unendlich fernen Punkte der Curve zu Doppelpunkten. *Die Doppelstrahlen der hyperbolischen Involution der conjugirten Durchmesser einer Hyperbel sind die Asymptoten der Hyperbel;* je zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel sind daher den beiden Asymptoten harmonisch zugeordnet.

Beim Kreise stehen ersichtlich zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht; *die Involution für den Mittelpunkt eines Kreises ist also eine orthogonale oder circulare (Nr. 49).* *Die einem Kreise zugehörige Involution auf der unendlich fernen Gerade ist die ausgezeichnete I_{∞} , in der je zwei unendlich ferne Punkte conjugirt sind, welche in senkrechten Richtungen liegen, und deren imaginäre Doppelpunkte die absoluten Punkte sind (Nr. 62).*

Bei der gleichseitigen Hyperbel sind die Asymptoten rechtwinklig; also bilden je zwei conjugirte Durchmesser mit einer Asymptote (und ebenso mit der andern) gleiche Winkel; *die dem Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel zugehörige Involution ist gleichseitig-hyperbolisch.*

Bei der Parabel, deren Mittelpunkt im Unendlichen und auf der Curve liegt, nimmt die ihm zugehörige Involution parabolischen Charakter an, dass die zu allen Durchmessern conjugirten in einem einzigen, der unendlich entfernten Gerade, vereinigt sind (Nr. 38, 96).*

117 Zwei conjugirte Durchmesser und die unendlich entfernte Gerade bilden ein Polardreieck des Kegelschnitts.

Jedem Durchmesser des Kegelschnitts gehört eine bestimmte Involution in Bezug auf den Kegelschnitt zu, der Mittelpunkt des Kegelschnitts ist allemal Mittelpunkt derselben, die beiden Schnittpunkte des Durchmessers mit dem Kegelschnitt sind ihre Doppelpunkte, welche bekanntlich vom Mittelpunkte gleich weit abstehen.

* Von diesen wichtigen Involutionen rühren die Namen: elliptisch, hyperbolisch, circular, gleichseitig-hyperbolisch, parabolisch her, sowie die älteren, besonders von *Steiner* und auch in den früheren Auflagen dieses Buches gebrauchten Namen: Asymptoten, Asymptotenpunkte für Doppelstrahlen, Doppelpunkte einer Involution.

Bei der Ellipse sind alle diese Involutionen auf den Durchmessern hyperbolisch, d. h. jeder Durchmesser der Ellipse schneidet, als durch einen innern Punkt gehende Gerade (Nr. 97), dieselbe in zwei reellen Punkten, welche gleich weit vom Mittelpunkte abstehen. Da die unendlich entfernte Gerade keinen Punkt der Ellipse enthält, so liegt sie ganz in dem von den Tangenten der Ellipse erfüllten Gebiet der Ebene; aus jedem ihrer Punkte giebt es also zwei reelle Tangenten an die Ellipse und die Verbindungslinie der Berührungspunkte ist ein Durchmesser; *jeder Durchmesser der Ellipse schneidet also dieselbe in zwei reellen Punkten, und in jeder beliebigen Richtung giebt es zwei parallele Tangenten der Ellipse.*

Anders verhält es sich bei der Hyperbel; hier zerfallen die Durchmesser in zwei Arten. Die Involutionen auf den einen Durchmessern sind hyperbolisch, die auf den andern elliptisch, und beide Arten werden durch die Asymptoten, auf denen, als Tangenten, die Involution parabolisch ist (Nr. 97), von einander getrennt, so dass also zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel immer verschiedenen Arten angehören. Die unendlich entfernte Gerade enthält nämlich zwei Punkte der Hyperbel und zerfällt durch dieselben in zwei Theile, von denen der eine Punkte ausserhalb der Hyperbel, der andere Punkte innerhalb der Hyperbel enthält. Für die ersteren ist die zugehörige Involution hyperbolisch, sie liefern also reelle Tangentenpaare, die beiden Berührungspunkte sind die Schnittpunkte eines Durchmessers der Hyperbel, welcher in diejenigen Asymptoten-Scheitelräume hineinfällt, in denen überhaupt die Hyperbel enthalten ist (Nr. 81, Fig. 36); für die unendlich entfernten Punkte des andern Theils ist aber die Involution elliptisch, also auch die auf der Polare befindliche, d. h. diese Durchmesser treffen die Hyperbel nicht und liegen in den beiden andern Asymptoten-Scheitelräumen, in denen kein Punkt der Hyperbel enthalten ist. *Diejenigen Durchmesser der Hyperbel, welche in das eine Paar Scheitelräume zwischen den Asymptoten hineinfallen, treffen dieselbe in je zwei reellen Punkten, die gleichweit vom Mittelpunkte abstehen; diejenigen Durchmesser aber, welche in das andere Paar Scheitelräume hineinfallen, treffen die Hyperbel nicht; zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel fallen in verschiedene Scheitelräume, weil sie den Asymptoten harmonisch zugeordnet sind. Hieraus folgt, dass es nicht in allen Richtungen parallele Tangentenpaare der Hyperbel giebt, sondern nur in denjenigen Richtungen, welche in die beiden Scheitelräume zwischen den Asymptoten hineinfallen, die nicht die Zweige der Hyperbel enthalten.*

Bei der Parabel endlich ist die jedem Durchmesser derselben (d. h. einem durch den unendlich entfernten Punkt der Parabel gehenden

Strahl) zugehörige Involution, weil sein Mittelpunkt im Unendlichen liegt (Nr. 38), eine gleichseitig-hyperbolische, von der nur ein Doppelpunkt im Endlichen liegt. Also *jeder Durchmesser der Parabel trifft dieselbe nur in einem endlichen Punkte*, der andere ist der unendlich entfernte Punkt der Parabel.

Aus jedem unendlich fernen Punkt kommt nur eine endliche Tangente (Nr. 78), die in diesem endlichen Schnittpunkte des polaren Durchmessers berührt; die andere Tangente ist G_∞ . Ausgenommen ist der unendlich ferne Punkt der Parabel, durch den, wie durch jeden Punkt eines Kegelschnitts, nur eine Tangente geht, die eigene Tangente, hier die G_∞ .

118 Die in den Schnittpunkten zweier conjugirten Durchmesser der Ellipse gezogenen Tangenten bilden ein der Ellipse umgeschriebenes Parallelogramm, dessen parallele Gegenseitenpaare den conjugirten Durchmessern parallel laufen; die Diagonalen dieses Parallelogramms bilden ein zweites Paar conjugirter Durchmesser, weil sie mit der unendlich entfernten Gerade das Diagonaldreieck eines dem Kegelschnitt umgeschriebenen Vierseits, also ein Polardreieck bilden (Nr. 104).

Und allgemeiner:

Die Diagonalen irgend eines dem Kegelschnitt umgeschriebenen Parallelogramms sind stets conjugirte Durchmesser desselben, und die Gegenseitenpaare eines beliebigen dem Kegelschnitt eingeschriebenen Parallelogramms laufen allemal parallel zwei conjugirten Durchmessern desselben; die Diagonalen schneiden sich auch hier im Mittelpunkt.

Oder einfacher: Die Sehnen, welche einen Punkt des Kegelschnitts mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden (Supplementarsehnen), sind zu conjugirten Durchmessern parallel.

Bei der Hyperbel schneidet nur einer von zwei conjugirten Durchmessern dieselbe in zwei reellen Punkten P und P^1 ; die Tangenten in denselben laufen dem andern parallel; treffen die Tangenten in P und P^1 die Asymptoten in a und b , bzw. a^1 und b^1 (Fig. 43), so sind die Berührungspunkte P und P^1 die Mitten von ab , a^1b^1 (Nr. 81); da aber die Mitte von PP^1 der Mittelpunkt M der Hyperbel ist, so sind die vier Punkte a , b , a^1 , b^1 die Ecken eines Parallelogramms,

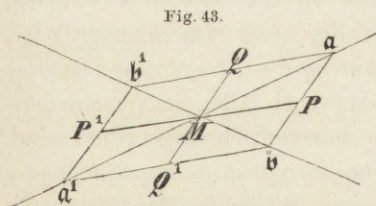


Fig. 43.

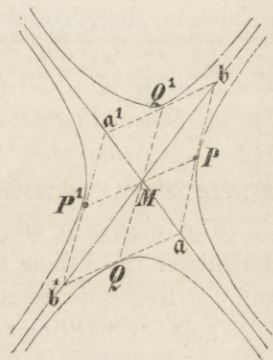
dessen Gegenseitenpaare den beiden conjugirten Durchmessern der Hyperbel parallel laufen, indem ab^1 und a^1b mit PP^1 parallel sind. Verändern wir den durch den Mittelpunkt M gezogenen Durchmesser PP^1 , so verändert sich dies Parallelogramm, dessen Gegenseitenpaare

allemal zwei conjugirten Durchmessern parallel laufen und dessen Flächeninhalt constant bleibt (Nr. 81).

Ebenso wie das eine Gegenseitenpaar ab , a^1b^1 die gegebene 119 Hyperbel einhüllt, hüllt auch das andere eine neue Hyperbel ein; denn betrachten wir die Asymptoten als die erzeugenden Punktreihen der gegebenen Hyperbel, so sind in ihrem Schnittpunkte die Fluchtpunkte r und q_1 vereinigt (Nr. 80), und es ist also $Ma \cdot Mb = \text{const.}$ Nun ist aber $b^1M = Mb$; der Punkt b^1 durchläuft also eine mit der von b durchlaufenen gleiche Punktreihe; also sind auch die von a und b^1 durchlaufenen Punktreihen projectiv und haben ebenfalls ihre Fluchtpunkte r und q_1 in M vereinigt. Die andern Gegenseiten ab^1 und a^1b umhüllen also gleichfalls eine Hyperbel, welche dieselben Asymptoten hat, wie die erste, und ganz in die beiden andern Scheitlräume der Asymptoten hineinfällt; diese zweite heisst die *conjugirte Hyperbel* (oder complementäre Hyperbel) der gegebenen (Fig. 44). Die Mittelpunkte Q , Q^1 der andern Gegenseiten unseres Parallelogramms sind die Berührungspunkte der conjugirten Hyperbel; QQ^1 ist also ein Durchmesser derselben und hat PP^1 zu seinem conjugirten Durchmesser.

Die Involution der conjugirten Durchmesser ist daher für die beiden conjugirten Hyperbeln dieselbe, und sie ergänzen sich in der Weise, dass diejenigen Durchmesser, welche die eine Hyperbel in zwei reellen Punkten treffen, die andere nicht treffen und umgekehrt; zwei conjugirte Hyperbeln haben nicht allein dieselben Asymptoten, sondern auch dieselbe Potenz und können durch dieselben beiden Punktreihen erzeugt werden, wenn man in ihrem Schnittpunkte die Fluchtpunkte r und q_1 vereinigt; die conjugirte Hyperbel erhält man alsdann dadurch, dass man den einen der beiden Träger um den festen Schnittpunkt herumbewegt um 180° , so dass die beiden Hälften des Trägers sich vertauschen. Wir bemerken noch, dass, während P und P^1 die Doppelpunkte der dem Durchmesser PMP^1 zugehörigen Involution in Bezug auf die ursprüngliche Hyperbel sind, die Punkte Q und Q^1 conjugirte Punkte in Bezug auf dieselbe Hyperbel sind; denn die Polare von a geht durch P und läuft parallel aa^1 , folglich durch Q^1 , ist also PQ^1 und die von b^1 ist P^1Q^1 ; mithin ist ab^1 die Polare von Q^1 ; da somit die Polare von Q^1 durch Q geht, so sind Q und Q^1 conjugirte Punkte in Bezug auf die ursprüngliche Hyperbel und bilden dasjenige Punktepaar der dem Durchmesser $QM Q^1$ in Bezug auf diese Hyperbel zugehörigen Involution, dessen Punkte

Fig. 44.



Die Involution der conjugirten Durchmesser ist daher für die beiden conjugirten Hyperbeln dieselbe, und sie ergänzen sich in der Weise, dass diejenigen Durchmesser, welche die eine Hyperbel in zwei reellen Punkten treffen, die andere nicht treffen und umgekehrt; zwei conjugirte Hyperbeln haben nicht allein dieselben Asymptoten, sondern auch dieselbe Potenz und können durch dieselben beiden Punktreihen erzeugt werden, wenn man in ihrem Schnittpunkte die Fluchtpunkte r und q_1 vereinigt; die conjugirte Hyperbel erhält man alsdann dadurch, dass man den einen der beiden Träger um den festen Schnittpunkt herumbewegt um 180° , so dass die beiden Hälften des Trägers sich vertauschen. Wir bemerken noch, dass, während P und P^1 die Doppelpunkte der dem Durchmesser PMP^1 zugehörigen Involution in Bezug auf die ursprüngliche Hyperbel sind, die Punkte Q und Q^1 conjugirte Punkte in Bezug auf dieselbe Hyperbel sind; denn die Polare von a geht durch P und läuft parallel aa^1 , folglich durch Q^1 , ist also PQ^1 und die von b^1 ist P^1Q^1 ; mithin ist ab^1 die Polare von Q^1 ; da somit die Polare von Q^1 durch Q geht, so sind Q und Q^1 conjugirte Punkte in Bezug auf die ursprüngliche Hyperbel und bilden dasjenige Punktepaar der dem Durchmesser $QM Q^1$ in Bezug auf diese Hyperbel zugehörigen Involution, dessen Punkte

vom Mittelpunkte M gleich weit abstehen. Auf den beiden conjugirten Durchmessern MP und MQ repräsentiren also diese beiden Strecken, welche den Hälften der Seiten des Parallelogramms ab^1b^1 gleich sind, zwei solche Längen, dass die Quadrate derselben den absoluten Werth der Potenz liefern, welche der einen und der andern Involution auf diesen Durchmessern in Bezug auf die Hyperbel zugehören; wobei aber festzuhalten ist, dass allemal die eine Involution hyperbolisch, die andere elliptisch, also die eine Potenz positiv, die andere negativ ist.

120 Die dem Mittelpunkte des Kegelschnitts zugehörige Involution der conjugirten Durchmesser hat, wie jede Strahlinvolution (Nr. 47), ein Paar zu einander rechtwinkliger conjugirter Strahlen und nur ein einziges Paar, die Axen der Involution, wofern sie nicht orthogonal ist. Also:

Der Kegelschnitt hat immer ein Paar zu einander rechtwinkliger conjugirter Durchmesser und nur ein einziges Paar; diese heissen die Axen des Kegelschnitts. Eine Ausnahme hiervon macht der Kreis, welcher unendlich viele Axenpaare hat.*

In Bezug auf einen Durchmesser ist der Kegelschnitt schräg symmetrisch: die durch den Durchmesser halbirtten Verbindungslinien symmetrischer Punkte sind zum conjugirten Durchmesser parallel. In Bezug auf eine Axe ist er normal symmetrisch oder symmetrisch im engeren Sinne.

Um die Axen des Kegelschnitts zu finden, hat man also die Axen derjenigen Involution aufzusuchen, welche dem Mittelpunkt in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört und welche durch zwei Paare conjugirter Durchmesser bestimmt wird.

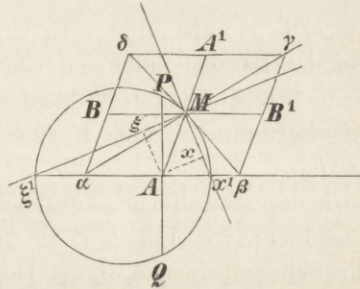
Bei der *Hyperbel* sind die Axen unmittelbar zu finden; sie sind nämlich die Halbierungslinien der Winkel zwischen den Asymptoten, wie aus den Eigenschaften der hyperbolischen Involution hervorgeht, weil die Asymptoten die Doppelstrahlen sind.

Bei der *Ellipse* seien zwei conjugirte Durchmesser und die (stets reellen) Schnittpunkte derselben mit der Ellipse A und A^1 , B und B^1 ermittelt (Fig. 45), womit zugleich zwei Paare conjugirter Durchmesser bekannt sind; denn ziehen wir durch A und A^1 die Parallelen zu BB^1 und durch B und B^1 die Parallelen zu AA^1 , so erhalten wir ein Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$, welches der Ellipse umgeschrieben ist, und dessen Diagonalen nach dem Obigen ein zweites Paar conjugirter Durchmesser sind. Die Axen der durch diese zwei Paare conjugirter

* „Axen des Kegelschnitts“ ist der ältere Name; er hat zu dem Namen „Axen einer Strahlinvolution“ geführt.

Strahlen vollständig bestimmten Involution lassen sich nun in elementarer Weise wie folgt construiren: Die Involution des Mittelpunkts M trifft die Seite $\alpha\beta$, deren Mitte A ist, in einer Involution, von welcher A der Mittelpunkt (dem unendlich entfernten conjugirt) und α, β conjugirte Punkte sind; denken wir uns über $\alpha\beta$ als Durchmesser den Kreis geschlagen und in A das Perpendikel auf $\alpha\beta$ errichtet, welches den Kreis in den Punkten P und Q treffen möge, so wird das durch P und Q gelegte Kreisbüschel die Gerade $\alpha\beta$ in der betrachteten Involution schneiden. Der Kreis, welcher durch P, Q und M geht, schneide in x, ξ ; so sind Mx und $M\xi$ zwei conjugirte Durchmesser, und da sie auf einander senkrecht stehen, weil $x\xi$ ein Durchmesser dieses Kreises ist, so sind sie die gesuchten Axen der Ellipse.

Fig. 45.



Da die Axe eines Kegelschnitts ein solcher Durchmesser desselben 121 ist, dessen conjugirter auf ihm senkrecht steht, oder für den die Tangente in einem Schnittpunkt zu ihm rechtwinklig ist, so können wir auch für die *Parabel* die Axen ermitteln. Alle nach dem unendlich entfernten Punkte der Parabel (ihrem Mittelpunkte) gehenden Parallelstrahlen sind Durchmesser derselben; jeder schneidet sie nur noch in einem einzigen im Endlichen liegenden Punkt, und es ist ein solcher zu suchen, dessen Tangente senkrecht auf dieser Richtung ist; wir haben also eine Tangente aus demjenigen unendlich entfernten Punkte an die Parabel zu legen, welcher in der zu der Richtung sämtlicher Durchmesser senkrechten Richtung liegt. Da es durch jeden unendlich entfernten Punkt nur eine endliche Tangente an die Parabel giebt, so giebt es auch nur eine zur Durchmesser-Richtung senkrechte Tangente. Ihr Berührungspunkt heisst der *Scheitel* der Parabel und der Durchmesser durch ihn *Axe* der Parabel. G_∞ ist ihr in der parabolischen Involution des Mittelpunkts, wie jedem andern Durchmesser, conjugirt, also die andere Axe. Die Parabel hat daher nur *eine* im Endlichen liegende Axe. Die Construction derselben lässt sich, wenn die Parabel gezeichnet vorliegt, so bewerkstelligen:

Man ziehe zwei beliebige parallele Sehnen der Parabel und verbinde deren Mitten; zu dieser Verbindungslinie ziehe man zwei senkrechte, also mit einander parallele neue Sehnen der Parabel und verbinde deren Mitten. Diese Verbindungslinie ist die gesuchte Axe der Parabel.

Dass auch bei der Parabel jeder Durchmesser Axe schräger und die Axe eine Axe normaler Symmetrie ist, bedarf wohl nur der Erwähnung.

§ 33. Construction der Axen und einige daraus hervorgehenden metrischen Beziehungen.

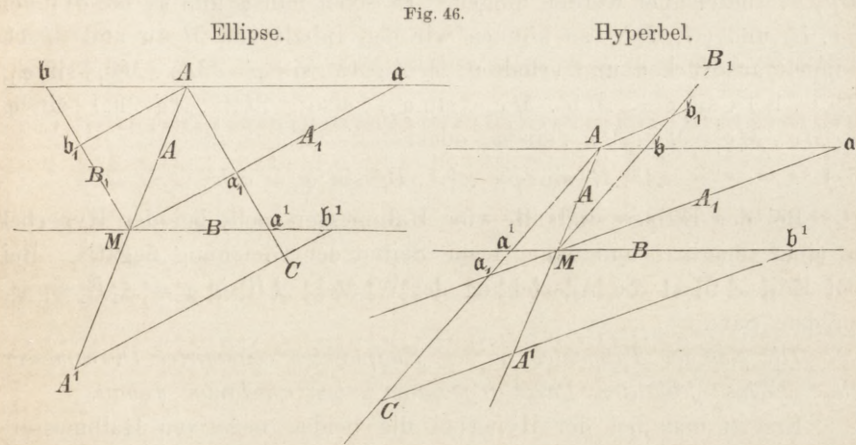
122 Die Schnittpunkte der Axen mit dem Kegelschnitt heissen, wie bei der Parabel, auch bei Ellipse und Hyperbel *Scheitel*, und die endliche Strecke auf jeder Axe zwischen den beiden Scheitel wird im engeren Sinne *Axe* des Kegelschnitts genannt, die Hälfte dieser Strecke *Halbaxe*. Suchen wir die Grösse der Axen zu bestimmen. Die im vorigen Paragraphen angegebene Construction ergab nur die Richtung derselben; wir erhalten die Grösse, wenn wir berücksichtigen, dass die Scheitel einer Axe die Doppelpunkte der Involution sind, welche ihr in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; M ist Mittelpunkt dieser Involution; der Punkt x (Fig. 45) und der Schnittpunkt seiner Polare bestimmen ein anderes Paar conjugirter Punkte. Die Polare von x muss aber durch A gehen, weil A der Berührungspunkt einer aus x an den Kegelschnitt gehenden Tangente ist; sie muss ferner senkrecht auf Mx stehen, weil sie durch den Pol von Mx , d. h. den unendlich entfernten Punkt des conjugirten Durchmessers oder der andern Axe gehen muss. Sie ist also das aus A auf Mx gefällte Perpendikel; möge es in x^1 treffen, so ist $Mx \cdot Mx^1$ die Potenz der auf der Axe befindlichen Involution; sei $Mx \cdot Mx^1 = a^2$, wo die Grösse a durch elementare Construction leicht zu ermitteln ist, die Scheitel sind dann die Endpunkte der nach beiden Seiten von M aus aufgetragenen Strecke a ; also ist $2a$ die Länge der einen Axe. Treffe gleicherweise das aus A auf $M\xi$ gefällte Perpendikel in ξ^1 , und sei $M\xi \cdot M\xi^1 = b^2$, so wird die nach beiden Seiten von M aus auf die zweite Axe aufgetragene Strecke b die Scheitel der zweiten Axe bestimmen, deren Länge $2b$ ist.

Bei der Ellipse, wo alle Durchmesser reell schneiden, sind beide Grössen a^2, b^2 positiv, bei der Hyperbel, wo von zwei conjugirten Durchmessern der eine reell, der andere imaginär schneidet, ist nur eine positiv, die andere negativ. Die Axe mit dem grösseren Halbaxen-Quadrate a^2 , bei der Hyperbel also die reell schneidende, bei der Ellipse die grössere, heisst Hauptaxe, die andere Nebenaxe; bei der Ellipse sagt man auch grosse und kleine Axe. Bei der Hyperbel ist also b imaginär.

Sind bei einer Ellipse die Axen gleich, so ist das durch die Tangenten in den Scheiteln gebildete, der Ellipse umgeschriebene

Rechteck ein Quadrat, dessen Diagonalen also auch zu einander rechtwinklig sind; die dem Mittelpunkte zugehörige Involution hat daher zwei Paare rechtwinkliger conjugirter Strahlen, ist also (Nr. 49) orthogonal.

In einem Punkte A , nach dem der Durchmesser $A^1MA = A$ ¹²³ geht, sei die Tangente an einen Kegelschnitt gezogen (Fig. 46) und mit der Durchmesser-Involution geschnitten. In der entstehenden



Involution ist, wie schon oben bemerkt, A der Mittelpunkt, weil der conjugirte Durchmesser B zu jenem der Tangente parallel ist. Wenn zwei andere conjugirte Durchmesser A_1, B_1 in a, b schneiden, so ist $Aa \cdot Ab$ die Potenz dieser Involution. Es sei AC die zu B_1 parallele Sehne aus A , dann ist die Supplementarsehne CA^1 zu A_1 parallel.

Die dem Durchmesser B in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Involution wird aus jedem Punkte des Kegelschnitts in die krumme Involution auf ihm projectirt, die den Pol von B , den unendlich fernen Punkt von A , zum Centrum hat, so dass A, A^1 in der letzteren conjugirt sind; also sind die Schnitte a^1, b^1 von CA, CA^1 mit B conjugirte Punkte jener Involution; ihr Mittelpunkt ist M und ihre Potenz ist $Ma^1 \cdot Mb^1$. Nun ist $Aa = Mb^1, Ab = -Ma^1$; also: $Aa \cdot Ab = -Ma^1 \cdot Mb^1$.

Die Involution, welche in eine Tangente eines Kegelschnitts durch die Durchmesser-Involution eingeschnitten wird, hat den Berührungspunkt zum Mittelpunkt, und ihre Potenz ist entgegengesetzt gleich der Potenz der Involution, welche dem der Tangente parallelen Durchmesser in Bezug auf den Kegelschnitt zukommt, oder dem Quadrate seines Halbmessers.

Dieses Halbmesser-Quadrat ist bei der Hyperbel negativ, also jene Involution hyperbolisch; Doppelpunkte sind die Schnitte mit den

Asymptoten. *Folglich ist bei der Hyperbel das Quadrat eines imaginären Halbmessers entgegengesetzt gleich dem Quadrate der Hälfte der Strecke auf der parallelen Tangente zwischen den Asymptoten.*

Wir ziehen nun noch durch A die Parallelen zu A_1 und B_1 , welche B_1 und A_1 in b_1, a_1 schneiden; sie sind die Polaren von b und a , also b_1, a_1 bezw. diesen Punkten conjugirt, und demnach $Mb \cdot Mb_1$ und $Ma \cdot Ma_1$ die Halbmesser-Quadrate von B_1, A_1 , die mit B_1^2, A_1^2 bezeichnet werden mögen. Es seien nun φ und φ_1 die Winkel (A, B) und (A_1, B_1) , so können wir den Inhalt von MAa und MAB doppelt ausdrücken und erhalten: $MA \cdot Aa \cdot \sin \varphi = Ma \cdot Mb_1 \cdot \sin \varphi_1$, $MA \cdot bA \cdot \sin \varphi = Mb \cdot Ma_1 \cdot \sin \varphi_1$, also: $MA^2 \cdot Aa \cdot bA \cdot \sin^2 \varphi = Ma \cdot Ma_1 \cdot Mb \cdot Mb_1 \cdot \sin^2 \varphi_1$ oder:

$$\text{I.} \quad A^2 \cdot B^2 \sin^2 \varphi = A_1^2 \cdot B_1^2 \sin^2 \varphi_1 = a^2 b^2.$$

Bei der Ellipse sind alle vier Halbmesser reell, bei der Hyperbel je einer imaginär und daher beide Seiten der Gleichung negativ. Bei der Ellipse führt die Ausziehung der Wurzel: $AB \sin \varphi = A_1 B_1 \sin \varphi_1$ zu dem Satze:

Die von den Tangenten in den Endpunkten conjugirter Durchmesser einer Ellipse gebildeten Parallelogramme haben constanten Inhalt.

Ersetzt man bei der Hyperbel die beiden negativen Halbmesser-Quadrate durch ihre absoluten Werthe, die Quadrate der halben Strecken der parallelen Tangenten zwischen den Asymptoten, so ergibt sich unsere Beziehung als identisch mit dem Satze von der constanten Potenz der Hyperbel (Nr. 81).

124 Nach Formel IV in Nr. 5 mit der dort bemerkten Erweiterung ist:

$$Ma^2 \cdot bA + Mb^2 \cdot Aa + MA^2 \cdot ab + bA \cdot Aa \cdot ab = 0,$$

oder:

$$Ma^2 \cdot \frac{bA}{bA} + Mb^2 \cdot \frac{aA}{aA} = MA^2 + bA \cdot Aa,$$

$$Ma^2 \cdot \frac{Ma_1}{Ma} + Mb^2 \cdot \frac{Mb_1}{Mb} = MA^2 + bA \cdot Aa,$$

also:

$$Ma \cdot Ma_1 + Mb \cdot Mb_1 = MA^2 + bA \cdot Aa;$$

$$\text{II.} \quad A_1^2 + B_1^2 = A^2 + B^2 = a^2 + b^2.$$

Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser eines Kegelschnitts ist constant.

Wir wiederholen, bei der Hyperbel ist stets das eine Quadrat negativ; in Wirklichkeit handelt es sich also bei ihr um Differenzen.

Bezeichnen wir lieber die Potenz der einem Durchmesser A zugehörigen Involution, um die Bezeichnung einer eventuell negativen Grösse durch ein Quadrat zu vermeiden, mit P_A , so haben wir die Formeln I und II in der Gestalt zu schreiben:

$$P_A \cdot P_B \sin^2 \varphi = P_{A_1} \cdot P_{B_1} \sin^2 \varphi_1 = P_a \cdot P_b,$$

$$P_A + P_B = P_{A_1} + P_{B_1} = P_a + P_b.$$

Weil

$$A_1^2 = M\alpha \cdot M\alpha_1,$$

so ist:

$$\frac{M\alpha_1^2}{A_1^2} = \frac{M\alpha_1}{M\alpha} = \frac{bA}{b\alpha},$$

ebenso:

$$\frac{Mb_1^2}{B_1^2} = \frac{Mb_1}{Mb} = \frac{aA}{ab},$$

also:

$$\frac{M\alpha_1^2}{A_1^2} + \frac{Mb_1^2}{B_1^2} = 1$$

oder:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} = 1,$$

denn $M\alpha_1, Mb_1$ sind die Coordinaten von A in Bezug auf die beiden conjugirten Durchmesser A_1 und B_1 als schiefwinklige Coordinatenaxen.

Aus diesen metrischen Beziehungen zwischen den Paaren conjugirter Durchmesser geht für die Ellipse ein weiteres ausgezeichnetes Paar hervor, *die gleichen conjugirten Durchmesser der Ellipse.*

Für sie muss sein wegen I und II:

$$\mu^2 \sin \vartheta = ab,$$

$$2\mu^2 = a^2 + b^2,$$

wo μ die Länge der gleichen conjugirten Halbmesser und ϑ ihren Winkel bedeutet.

Mithin ist:

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a}.$$

In dem der Ellipse umgeschriebenen Rechteck, das von den vier Tangenten in den Scheiteln gebildet wird, ist der Winkel zwischen den Diagonalen dieses Rechtecks $= \vartheta$; und da die Diagonalen selbst ein Paar conjugirter Durchmesser sind, so sind sie die gesuchten gleichen conjugirten Durchmesser der Ellipse ihrer Lage nach. *Die Axen der Ellipse halbiren also die Winkel zwischen den gleichen conjugirten Durchmessern derselben.*

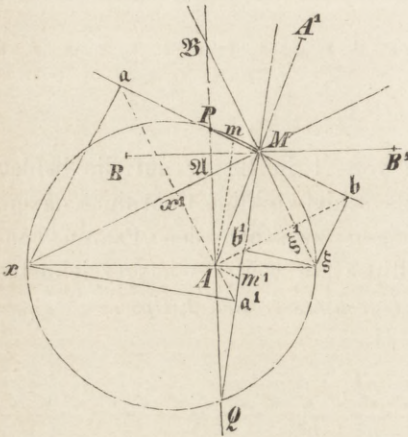
Wir fanden oben, dass, wenn bei einer Ellipse $a = b$, für jedes Paar conjugirter Durchmesser A, B der Winkel ein rechter ist; mithin ist: $AB = a^2, A^2 + B^2 = 2a^2$, woraus folgt: $A = B = a$; d. h. alle Halbmesser sind gleich.

Die Ellipse mit gleichen Axen ist ein Kreis.

Die Ermittlung der Länge der Axen $2a$ und $2b$ der Ellipse war auf die elementare Aufgabe zurückgeführt, ein gegebenes Rechteck in

ein Quadrat zu verwandeln: $Mx \cdot Mx^1 = a^2$ und $M\xi \cdot M\xi^1 = b^2$ (Nr.122); allein die nähere Betrachtung der dortigen Figur (Figur 45) zeigt, dass wir gar nicht nöthig haben, diese Aufgabe besonders zu lösen, sondern dass die Figur selbst auch die Länge der Axen der Ellipse liefert und zugleich zu einigen interessanten Eigenschaften derselben führt. Es sei wiederum (Fig. 47) M der Mittelpunkt der Ellipse, MA der Halbmesser A , die Tangente und die Normale in A gezogen, auf letzterer die Länge $AP = AQ = MB = B$ des conjugirten Halbmessers zu A nach beiden Seiten hin abgetragen, durch die Punkte P, Q, M der Kreis gelegt, welcher in x und ξ die Tangente in A trifft, so dass Mx und $M\xi$ die Richtungen der Axen der Ellipse sind, und endlich aus A auf Mx und $M\xi$ die Perpendikel Ax^1 und $A\xi^1$ gefällt; dann ist $Mx \cdot Mx^1 = a^2$ und $M\xi \cdot M\xi^1 = b^2$.

Fig. 47.



Ziehen wir nun noch die Linien MP und MQ und schneiden sie mit Ax^1 in a und a^1 , mit $A\xi^1$ in b

und b^1 , so zeigt eine einfache Betrachtung, dass $Ma = Ma^1 = a$ und $Mb = Mb^1 = b$ wird, also die Längen der Halbaxen unmittelbar aus der Figur zu entnehmen sind.

In der That, zunächst ist, weil die Punkte P, Q, x, ξ, M auf einem Kreise liegen: $\angle PMx = \angle P\xi x = \angle P\xi A$ und $\angle QMx = \angle Q\xi A$; weil aber A die Mitte von PQ und $A\xi$ senkrecht auf PQ , ist $\angle P\xi A = \angle Q\xi A$, folglich auch: $\angle PMx = \angle QMx$; d. h. die Axen halbiren die Winkel zwischen den beiden Strahlen MP, MQ . Folglich hätten wir nach der Construction der Punkte P und Q nur nöthig gehabt, den Winkel und Nebenwinkel zwischen den Strahlen MP und MQ zu halbiren, um die Richtungen der Axen der Ellipse zu erhalten, ohne den Kreis um PQM zu legen und die Schnittpunkte x, ξ mit der Tangente in A aufzusuchen. Aus der Gleichheit der Winkel PMx und QMx folgt, dass $Ma = Ma^1$, und ebenso ist $Mb = Mb^1$. Die Parallele zu MQ durch A muss, weil $AP = AQ$ ist, PM in m halbiren, und des Parallelismus wegen ist auch $mA = ma$, also, da das Dreieck aAb bei A rechtwinklig ist, $ma = mb = mA = \frac{1}{2} MQ$; mithin $ab = MQ$. Andererseits muss die Parallele durch A zu MP die MQ in m^1 halbiren und $m^1b^1 = m^1A = m^1a^1 = \frac{1}{2} MP$ sein, also haben wir absolut:

$$\begin{cases} a b = MQ; & Ma = Ma^1 = Pb = Qb^1; \\ a^1 b^1 = MP; & Mb = Mb^1 = Pa = Qa^1. \end{cases}$$

Es ist: $\perp a Mx^1 = PMx = P\xi x = P\xi A$, folglich $\Delta a Mx^1 \sim P\xi A$; daher $x^1 a : AP = Mx^1 : \xi A = xx^1 : Ax$, da $M\xi$ und $x^1 A$ beide auf xM senkrecht, also parallel sind; daher: $\Delta x^1 a x \sim APx$ und $\perp x^1 a x = APx$; nun ist auch $\perp x^1 a M = AP\xi$, also $xaM = xP\xi = 90^\circ$. Und $\overline{Ma^2} = Mx \cdot Mx_1 = a^2$; $Ma = a$. Ebenso $Mb = b$.

Auf den Strahlen MP und MQ werden also von M aus durch die aus A auf die Axen gefällten Perpendikel Strecken abgeschnitten, welche paarweise gleich sind und die Längen der Halbaxen a und b liefern.

Ferner ergibt sich aus den obigen Relationen:

$$\begin{cases} MP = a - b, \\ MQ = a + b. \end{cases}$$

Die Abstände des Mittelpunktes M von den beiden Punkten P und Q sind Summe und Differenz der beiden Halbaxen der Ellipse.

Oder auch:

$$\begin{cases} a b = a + b, \\ a^1 b^1 = a - b, \end{cases}$$

welche Relationen sich ebenso leicht in Worte kleiden lassen.

Aus der Aehnlichkeit der drei symmetrischen Vierecke ξPxQ , $Ma x a^1$ und $\xi b Mb^1$ ergeben sich andere metrische Beziehungen von geringerer Wichtigkeit. Wenn wir die Schnittpunkte der Gerade PQ , welche die Normale der Ellipse im Punkte A ist, mit den beiden Axen durch \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bezeichnen, so ist, weil $xM \parallel A b$, $\xi M \parallel A a^1$, auch dem Vorzeichen nach:

$$\frac{A\mathfrak{A}}{AP} = \frac{M\mathfrak{B}}{Pb} = \frac{b}{a}, \quad \frac{A\mathfrak{B}}{QA} = \frac{a^1 M}{Qa^1} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus ergibt sich:

1) $\frac{A\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} = \frac{b^2}{a^2}$

2) $A\mathfrak{A} \cdot A\mathfrak{B} = B^2.$

Die Normale in einem beliebigen Punkte A der Ellipse trifft die Axen derselben in zwei solchen Punkten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , dass das Verhältniss der Abschnitte $A\mathfrak{A}$, $A\mathfrak{B}$ constant bleibt, gleich dem Verhältniss der Quadrate der Axen, und:

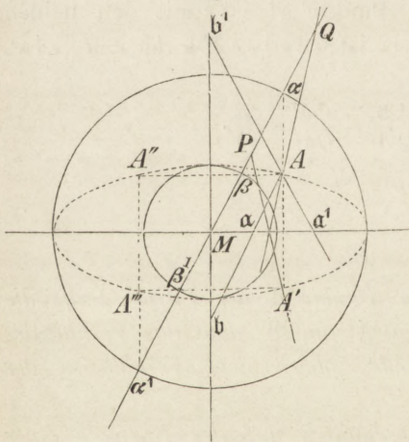
Das Rechteck aus den beiden Abschnitten auf der Normale einer Ellipse vom Fusspunkte A bis zu den Schnittpunkten mit den Axen ist gleich dem Quadrate desjenigen Halbmessers der Ellipse, welcher dem nach dem Punkte A hin gehenden conjugirt ist.

Man erkennt leicht die Aehnlichkeit der Dreiecke $MP\mathfrak{A}$ und MxQ ; daraus ergibt sich auf der einen Axe: $M\mathfrak{A} \cdot Mx = MP \cdot MQ = a^2 - b^2 = \text{const.}$ Auf der andern Axe erhält man ebenso: $M\mathfrak{B} \cdot M\xi = b^2 - a^2.$

Also: Tangente und Normale eines Punktes einer Ellipse schneiden auf jeder der beiden Axen vom Mittelpunkte aus Strecken ab, deren Product constant ist, gleich der Differenz der Quadrate der Halbachsen, positiv auf der grossen, negativ auf der kleinen Axe. Die Schnittpunkte bilden daher je eine Involution, die auf der ersteren Axe hyperbolisch, auf der andern elliptisch ist. Die beiden Potenzen sind entgegengesetzt gleich (Nr. 137).

127 Die Betrachtung der obigen Figur 47 führt auch zu einer bekannten graphischen Construction der Ellipse, welche sich für praktische Zwecke empfiehlt. Lassen wir nämlich den Punkt A auf der Ellipse sich verändern, so beschreiben die Punkte α und α^1 den Kreis um M , welcher a zum Radius hat, und die Punkte β und β^1 den Kreis um M , der b zum Radius hat; auch die Punkte P und Q beschreiben mit diesen concentrische Kreise, deren Radien $a - b$ und $a + b$ sind. Gehen wir daher umgekehrt von zwei Kreisen um M mit den Radien a und b aus, lassen, nachdem durch M zwei rechtwinklige Geraden als Axen gezogen sind, einen Strahl durch M in α und α^1 den ersten, in β und β^1 den anderen Kreis treffen, so werden die durch α auf die a -Axe, durch β auf die b -Axe gefällten Perpendikel sich in einem Punkte A der Ellipse treffen (Fig. 48). Die Benutzung von $\alpha^1, \beta^1; \alpha, \beta^1; \alpha^1\beta$ liefert drei andere Punkte A'''', A', A'' der Ellipse, von denen

Fig. 48.



einer der diametralgegenüberliegende, die beiden andern die zu A in Bezug auf die Axen symmetrischen Punkte sind. Die Bewegung des durch M willkürlich gezogenen Strahles $M\alpha\beta$ führt nach und nach zu sämtlichen Punkten der Ellipse. Die beiden Kreise berühren die Ellipse in ihren Scheiteln.

Unsere Betrachtung liefert aber auch die Normale und mithin auch die Tangente des construirten Ellipsenpunktes. Wenn die benutzten Punkte α, β auf derselben oder verschiedenen

Seiten von M liegen, so trägt man $MQ = a + b$, bezw. $MP = a - b$ auf demselben Strahle von M nach der Seite des Punktes α auf; durch Q , bezw. P geht die Normale.

128 Die Figur 48 führt noch zu einer andern Entstehungsweise der Ellipse. Die Parallele durch A zu $M\beta\alpha$ schneide die a -Axe in a , die b -Axe in b , so ist $aA = M\beta = b$, $bA = M\alpha = a$, also $ba = a - b$.

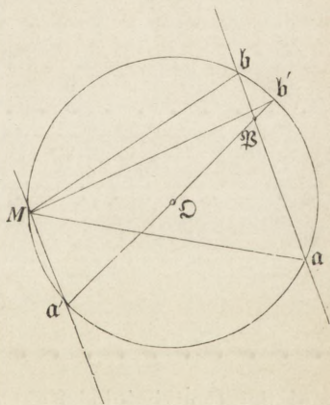
Folglich bewegt sich eine Strecke von der festen Länge $a - b$ mit ihren Endpunkten auf den beiden rechtwinkligen Axen; der Punkt A liegt ausserhalb. Man ziehe zweitens durch A die Gerade, welche mit den Axen die nämlichen Winkel bildet, wie die eben gezogene Aab ; ihre Schnitte mit denselben seien a^1, b^1 , so liegt nun A zwischen diesen. Wiederum aber ist $a^1A = aA = b$, $b^1A = bA = a$; aber nun ist $a^1b^1 = a + b$. Und wir erhalten folgende Erzeugung der Ellipse:

Bewegt sich eine feste Strecke mit ihren Endpunkten auf zwei festen zu einander rechtwinkligen Geraden, so erzeugt jeder Punkt der Gerade, auf der sie sich befindet, mag er innerhalb oder ausserhalb liegen, eine Ellipse; für dieselbe sind die festen Geraden die Axen, und zwar ist je die Entfernung des Punktes von dem auf der einen Axe sich bewegenden Endpunkte der Strecke gleich der Halbaxe auf der andern Axe. Die Strecke ist gleich der Differenz oder der Summe der Halbaxen, je nachdem der erzeugende Punkt ausserhalb oder innerhalb liegt.

Auf diesem Satze beruht der sogenannte *Ellipsenzirkel*.

Wir können aber zwei Erweiterungen eintreten lassen. Zunächst werde die Rechtwinkligkeit der beiden Geraden, auf denen die Endpunkte a, b der Strecke gleiten, aufgegeben (Fig. 49a). Wenn M ihr Schnittpunkt ist, so behält der Kreis Ma^1b bei der Bewegung seinen Radius $r = \frac{ab}{2 \sin \alpha Mb}$ bei; wir ziehen (in irgend einer Lage) durch den erzeugenden Punkt \mathfrak{P} (auf a^1b) den Durchmesser $a'b'$ dieses Kreises; nun ist $\mathfrak{P}a' \cdot \mathfrak{P}b' = \mathfrak{P}a \cdot \mathfrak{P}b$. Daraus folgt, dass \mathfrak{P} auch zu a', b' eine feste Lage hat. Ferner bleibt auch die Entfernung des Punktes \mathfrak{P} vom Mittelpunkt \mathfrak{D} des Kreises unverändert, vom Dreieck $\mathfrak{D}\mathfrak{P}a$ also alle drei Seiten, mithin auch $\sphericalangle \mathfrak{P}\mathfrak{D}a$ oder $a'\mathfrak{D}a$ und demnach auch der halb so grosse $\sphericalangle a'Ma$, und ebenso $b'Mb$. Das bedeutet, dass die Geraden Ma', Mb' fest bleiben. Dies sind zwei rechtwinklige Geraden, da $a'b'$ ein Durchmesser des Kreises ist. Damit ist \mathfrak{P} auf die Gerade einer Strecke gebracht, welche mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden gleitet, und hat auf ihr feste Lage zu diesen Endpunkten.

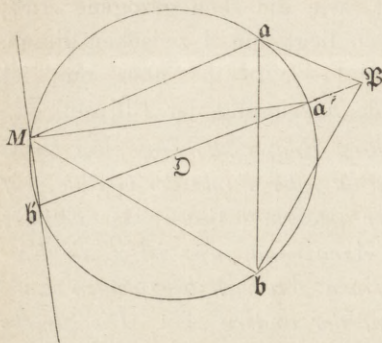
Fig. 49a.



Bewegt sich eine Strecke von fester Länge mit ihren Endpunkten auf zwei beliebigen Geraden, so beschreibt jeder Punkt auf ihrer Gerade eine Ellipse.

Jetzt liege der Punkt \mathfrak{P} ausserhalb der Gerade ab , behalte aber eine feste Lage zu den Endpunkten a, b der Strecke, sodass das

Fig. 49 b.

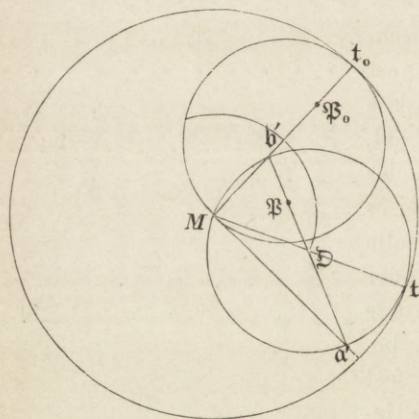


Dreieck $ab\mathfrak{P}$ sich congruent bleibt (Fig. 49b). In Bezug auf den Kreis Mab mit dem Mittelpunkte \mathfrak{D} gilt dasselbe wie vorhin; auch der Centriwinkel $a\mathfrak{D}b = 2 aMb$ bleibt, also auch das Dreieck $a\mathfrak{D}b$ und das Viereck $a\mathfrak{D}b\mathfrak{P}$, und wenn wir wieder durch \mathfrak{P} den Durchmesser $a'b'$ ziehen, auf dem die Diagonale $\mathfrak{D}\mathfrak{P}$ liegt, so zeigt sich, dass \mathfrak{P} feste Lage zu a', b' hat. Die Constanz der Winkel $a'Ma, b'Mb$ ergibt sich wie vorhin.

Wenn also eine Strecke von fester Länge mit ihren Endpunkten auf zwei beliebigen Geraden gleitet, so beschreibt jeder mit ihr fest verbundene Punkt eine Ellipse.

Der Mittelpunkt \mathfrak{D} bewegt sich auf einem Kreise um M mit dem Radius r (Fig. 49c); folglich tangirt der Kreis Mab oder (\mathfrak{D}) ständig den Kreis (M) um M mit doppelt so grossem Halbmesser von innen, immer im Gegenpunkte von M .

Fig. 49 c.



Wir nehmen, jetzt die bequemeren Punkte a', b' , die sich auf rechtwinkligen Geraden bewegen, benutzend, als Ausgangslage von (\mathfrak{D}) die, wo a' gerade in M zu liegen kommt und b' in den zugehörigen Berührungspunkt t_0 , der auf der Gerade liegt, auf welcher sich b' bewegt. Sei nun eine andere Lage von (\mathfrak{D}) betrachtet, wo t der Berührungspunkt, so erkennt man leicht, dass der Bogen $b't$ von (\mathfrak{D}) gleich ist dem Bogen t_0t von (M) ,

weil der Centriwinkel $b'\mathfrak{D}t$ des ersten doppelt so gross ist als der t_0Mt des zweiten. Dies beweist, dass der innere Kreis auf dem äusseren rollt. Curven, erzeugt durch Punkte, welche von einem Kreise mitgenommen werden, der auf einem festen Kreise rollt, heissen Epicykloiden oder Hypocykloiden, je nachdem der rollende Kreis ausserhalb oder innerhalb des festen Kreises sich befindet. Die Ellipse hat sich damit als Specialfall einer Hypocykloide herausgestellt, wenn nämlich der rollende Kreis

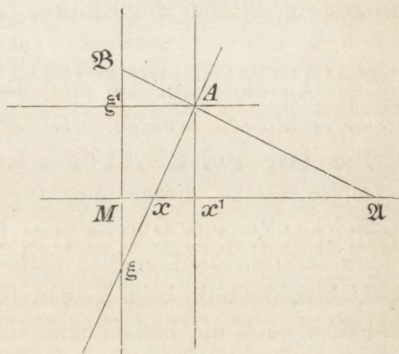
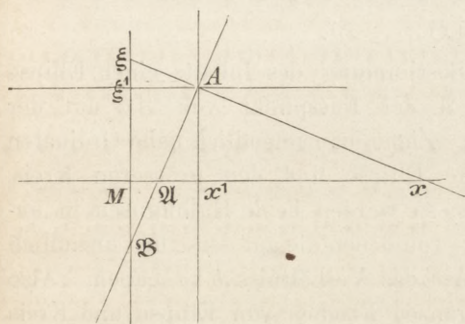
halb so grossen Radius hat als der feste. Punkte, die auf dem rollenden Kreise selbst (in diesem Specialfalle) liegen, bewegen sich auf geraden Linien durch M .

Die Formeln 1) und 2) in Nr. 126 sind dort auf eine Weise bewiesen, welche nur für die Ellipse brauchbar ist; wir wollen einen allgemeineren für Ellipse und Hyperbel zugleich gültigen Beweis geben. Wir erinnern uns von Nr. 122: wofern die beiden Axen von der in A berührenden Tangente in x und ξ getroffen werden und x^1, ξ^1 die

Ellipse.

Fig. 50.

Hyperbel.



Fusspunkte der aus A auf die Axen gefällten Lothe, der Polaren von x, ξ , sind, so sind $Mx \cdot Mx^1$ und $M\xi \cdot M\xi^1$ die beiden Halbaxen-Quadrate a^2, b^2 ; bei der Hyperbel ist das eine negativ; wir wollen annehmen das zweite. Wir zeichnen (Fig. 50) nun noch die Normale von A , welche wiederum die Axen in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ treffe; dann hat man immer mit Berücksichtigung der Vorzeichen:

$$\frac{A\mathfrak{B}}{A\mathfrak{A}} = \frac{A\xi^1}{x^1\mathfrak{A}} = \frac{Mx^1}{\mathfrak{A}x^1};$$

$$\frac{\mathfrak{A}x^1}{x^1A} = \frac{A\xi^1}{\xi^1\mathfrak{B}} = \frac{\xi\xi^1}{A\xi^1} = \frac{M\xi}{Mx}; \quad \mathfrak{A}x^1 = \frac{x^1A \cdot M\xi}{Mx} = \frac{M\xi \cdot M\xi^1}{Mx};$$

also:

$$\frac{A\mathfrak{B}}{A\mathfrak{A}} = \frac{Mx \cdot Mx^1}{M\xi \cdot M\xi^1} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{P_a}{P_b}.$$

Bei der Hyperbel ist b^2 negativ; um dies deutlicher zur Erscheinung zu bringen, setzen wir lieber $-b^2$ statt b^2 ; dann ist b reell, und zwar ist es die halbe Strecke auf der Tangente in einem Scheitel der Hauptaxe zwischen den Asymptoten. Unsere Formel lautet dann für die Hyperbel:

$$\frac{A\mathfrak{B}}{A\mathfrak{A}} = -\frac{a^2}{b^2}.$$

Dieselbe Aenderung machen wir bei jedem Paare conjugirter Halbmesser, deren Quadrate dann $A^2, -B^2$ sind; dadurch geht die Formel II in Nr. 124 für die Hyperbel über in:

$$A^2_1 - B^2_1 = A^2 - B^2 = a^2 - b^2.$$

Ferner folgt aus der Aehnlichkeit von $\mathfrak{A}Ax$ und $\xi A\mathfrak{B}$:

$$\frac{A\mathfrak{A}}{Ax} = \frac{A\xi}{A\mathfrak{B}} \quad \text{oder} \quad A\mathfrak{A} \cdot A\mathfrak{B} = Ax \cdot A\xi;$$

die Figuren zeigen, dass diese Gleichung, wenn die Vorzeichen berücksichtigt werden: $A\mathfrak{A} \cdot A\mathfrak{B} = -Ax \cdot A\xi$ geschrieben werden muss. Auf der Tangente von A sind nun die Punkte x, ξ conjugirt in der durch die Durchmesser-Involution eingeschnittenen Involution, also $Ax \cdot A\xi$ deren Potenz; diese ist (Nr. 123) entgegengesetzt gleich dem Halbmesser-Quadrat P_B des zum Durchmesser MA conjugirten Durchmessers, B^2 bei der Ellipse, $-B^2$ bei der Hyperbel. Also ist:

$$A\mathfrak{A} \cdot A\mathfrak{B} = \pm B^2.$$

130 An die Figur 48 kann die Bestimmung des Inhalts einer Ellipse angeschlossen werden. Es sei \mathfrak{A} der Fusspunkt von $A\alpha$ auf der Hauptaxe, so ist $\mathfrak{A}A : \mathfrak{A}\alpha = b : a$. Zieht man unendlich nahe Ordinaten senkrecht zu dieser Axe für die Ellipse und den grösseren Kreis, welcher $2a$ zum Durchmesser hat, so werden beide Halbfiguren in unendlich schmale Lamellen getheilt, von denen die auf derselben unendlich kleinen Grundlinie stehenden immer das Verhältniss $b : a$ haben. Also haben auch die halben und die ganzen Flächen von Ellipse und Kreis dies Verhältniss; demnach hat die Ellipsenfläche den Inhalt

$$\frac{b}{a} \cdot a^2 \pi = ab\pi.$$

Der Inhalt der Ellipse mit den Axen $2a, 2b$ ist $ab\pi$.

§ 34. Bestimmung solcher Punkte, von welchen an einen Kegelschnitt zwei rechtwinklige Tangenten kommen.

131 Wir wollen jetzt *solche Punkte* in der Ebene eines Kegelschnitts aufsuchen, für welche die zugehörige Involution gleichseitig-hyperbolisch ist. Da dann die Doppelstrahlen rechtwinklig zu einander sind, so kommt die vorliegende Frage darauf hinaus, den Ort des Schnittpunktes zweier zu einander rechtwinkliger Tangenten des Kegelschnitts aufzusuchen.

Wir betrachten zunächst Ellipse und Hyperbel gemeinsam.

Wenn von einem Punkte p zwei rechtwinklige Tangenten ausgehen (Fig. 51), so gehen von dem zu ihm in Bezug auf den Mittelpunkt M symmetrischen Punkte p' ebenfalls zwei rechtwinklige Tangenten aus, die zu jenen in Bezug auf M symmetrisch und also ihnen parallel sind. Es entsteht daher ein umgeschriebenes Rechteck $ppp'q'$; seine Diagonalen pp', qq' sind conjugirte Durchmesser A, B . Sei t der Berührungspunkt von pq , so ist die Parallele durch t zu qq' die Polare von p ; sie schneide pp' in p_1 , dann haben wir in p und p_1 conjugirte

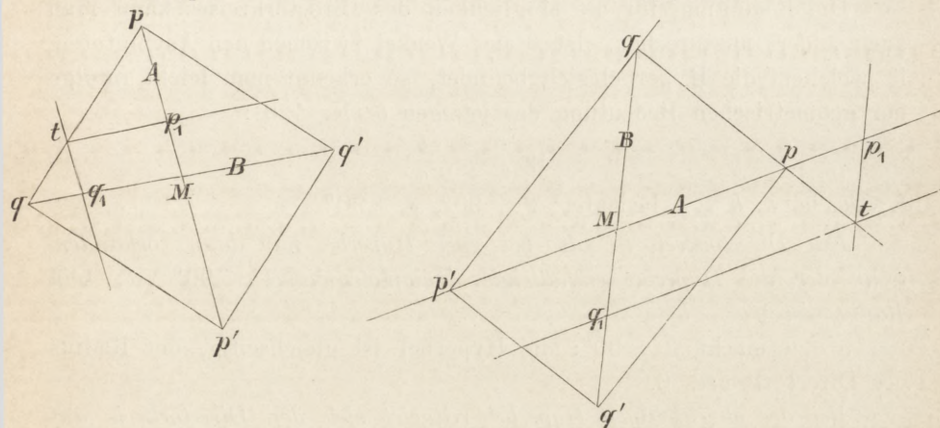
Punkte der zu A gehörigen Involution; also ist $Mp \cdot Mp_1 = A^2$, und ebenso, wenn qq' von der Parallelen durch t zu pp' in q_1 getroffen wird, ist $Mq \cdot Mq_1 = B^2$.

Wir addiren: $A^2 + B^2 = Mp \cdot Mp_1 + Mq \cdot Mq_1$. Bei der Ellipse sind beide Summanden positiv; ferner ist absolut $Mq = Mp$, $Mq_1 = p_1t = p_1p$, also $A^2 + B^2 = Mp (Mp_1 + Mq_1) = Mp^2$; denn der Berührungspunkt t liegt zwischen p und q , also p_1 zwischen M und p .

Fig. 51.

Ellipse.

Hyperbel.



Bei der Hyperbel haben die beiden Summanden ungleiche Vorzeichen, und es ist genau zu untersuchen, welcher der absolut grössere ist. Da es nur auf die Grösse der gleichen Strecke Mp , Mq ankommt, so spielen die Punkte p, q gleiche Rolle; wir können also annehmen, dass p auf dem reell, q auf dem imaginär schneidenden Durchmesser liege, so dass $Mp \cdot Mp_1$ positiv, $Mq \cdot Mq_1$ negativ ist. Letzteres fordert, dass t ausserhalb pq auf der Seite von p liegt, woraus dann folgt, dass p_1 ausserhalb $p'p$ auf der Seite von p sich befindet; wiederum ist absolut $Mq = Mp$, $Mq_1 = p_1t = pp_1 < Mp_1$. Somit ist das negative Produkt $Mq \cdot Mq_1$ das absolut kleinere und die algebraische Summe beider positiv und zwar gleich Mp mal der absoluten Differenz von Mp_1 und Mq_1 oder von Mp_1 und pp_1 , d. i. Mp , also gleich Mp^2 .

In beiden Fällen haben wir demnach:

$$Mp^2 = Mq^2 = A^2 + B^2 = a^2 + b^2 = \text{const.}$$

Die Punkte, von denen rechtwinklige Tangenten an die Ellipse oder Hyperbel kommen, haben also die constante Entfernung $\sqrt{a^2 + b^2}$ vom Mittelpunkte, liegen daher auf einem Kreise um denselben, den man den Directorkreis des Kegelschnitts zu nennen pflegt.

Alle der Curve umgeschriebenen Rechtecke sind ihm eingeschrieben, bei der Ellipse insbesondere das, welches in den Scheiteln berührt.

Bei dieser Curve sind a^2 und b^2 (oder A^2 und B^2) beide positiv, mithin ist es auch $a^2 + b^2$.

Wir fanden eben, dass, wenn ein umgeschriebenes Rechteck vorhanden ist, $A^2 + B^2$ positiv ist, also auch $a^2 + b^2$. Bei der Hyperbel ist b^2 negativ; ersetzen wir wieder b^2 durch $-b^2$, so erhalten wir: $Mp^2 = Mq^2 = a^2 - b^2$; es muss daher $a \geq b$ sein. *Folglich besitzt nicht jede Hyperbel einen Directorkreis, sondern nur dann, wenn $a \geq b$ ist.*

Die Bedingung für die Möglichkeit des Directorkreises kann man auch anders aussprechen. Ist ϑ der Winkel zwischen den Asymptoten, in welchem die Hyperbel sich befindet, so erkennt man leicht in Folge der geometrischen Bedeutung des jetzigen b (Nr. 129):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a};$$

$b \leq a$, bzw. $b > a$ bedeutet: $\vartheta \leq 90^\circ$, $\vartheta > 90^\circ$.

Ein Directorkreis ist also bei einer Hyperbel nur dann vorhanden, wenn der die Hyperbel enthaltende Asymptotenwinkel $\leq 90^\circ$ ist; sein Radius ist $\sqrt{a^2 - b^2}$.

$a = b$ macht $\vartheta = 90^\circ$; die Hyperbel ist gleichseitig, der Radius des Directorkreises 0.

Bei der gleichseitigen Hyperbel reducirt sich der Directorkreis auf den Mittelpunkt; nur von diesem kommen rechtwinklige Tangenten, die Asymptoten.

Wenn $b > a$ ist, dann kann man von einem Directorkreise mit imaginärem Halbmesser $\sqrt{a^2 - b^2}$ sprechen.

Wir wissen ja auch, dass die Parallelen durch den Mittelpunkt zu den Tangenten der Hyperbel in die die Curve nicht enthaltenden Asymptoten-Scheitelwinkel fallen; sind diese Winkel $< 90^\circ$, so sind keine rechtwinkligen Strahlen in ihnen möglich.

Wir entnehmen dem Vorangehenden auch den Satz:

Die Durchmesser, welche nach den Schnitten einer Tangente eines centrischen Kegelschnitts mit dem Directorkreise gehen, sind conjugirt.

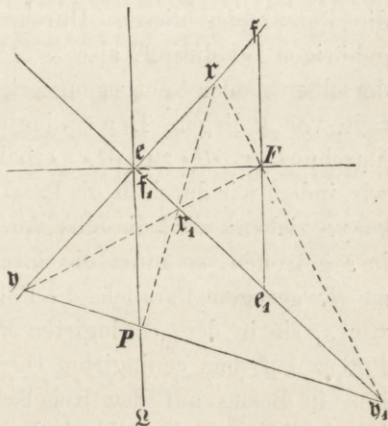
132 Bei der Parabel giebt es keine zwei parallelen Tangenten, sondern in jeder beliebigen Richtung eine und nur eine Tangente; folglich existiren keine der Parabel umgeschriebenen Rechtecke, wohl aber unzählig viele rechten Winkel, deren Schenkel die Parabel berühren.

Die beiden von einem Punkte der Axe der Parabel ausgehenden Tangenten, welche rechtwinklig zu einander sind, sind symmetrisch in Bezug auf die Axe und bilden mit ihr Winkel von 45° ; da es in jeder der beiden Richtungen, welche mit der Axe diesen Winkel bilden,

nur eine Tangente giebt, so haben wir nur einen derartigen Punkt auf der Axe. Die Berührungspunkte dieser beiden Tangenten liegen ebenfalls symmetrisch zur Axe; sind sie wieder f, e_1 (Fig. 52) und der Schnitt e, f_1 , so ist $ef = e_1f_1$, also sind die erzeugenden Punktreihen auf diesen Tangenten gleich. Die auf der Axe gelegene Mitte der Berührungsehne fe_1 sei F ; dann ist $eF = fF$, weil $\sphericalangle eFf = 45^\circ$.

Tragen wir nun eine beliebige Strecke fx von f aus auf fe und die gleiche Strecke f_1x_1 von f_1 auf f_1e_1 ab, so ist x_1 eine Tangente der Parabel. Es ist Dreieck $fxF \cong f_1x_1F$, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel (45°) gleich haben; es folgt daher: $x_1F = xF$

Fig. 52.



und $\sphericalangle xFx_1 = 90^\circ$, also ist jeder der beiden andern Winkel des Dreiecks x_1Fx_1 gleich 45° . Nun treffen Fx und Fx_1 die Träger der beiden Punktreihen, weil F auf der Berührungsehne liegt, in zwei neuen entsprechenden Punkten η_1, η (Nr. 65), deren Verbindungslinie ebenfalls eine Tangente der Parabel sein muss (man erkennt auch leicht, dass $e\eta = e_1\eta_1$).

In dem Dreieck $x\eta\eta_1$ steht η_1x_1 auf ηx senkrecht (in e), und auch ηx_1 auf η_1x (in F), also ist x_1 der Höhenpunkt dieses Dreiecks, und folglich steht auch $x_1\eta_1$ auf $\eta\eta_1$ senkrecht; d. h. wir haben zwei neue zu einander senkrechte Tangenten der Parabel gefunden, die sich in P treffen. Verändern wir die willkürlich angenommene Tangente x_1 der Parabel, so erhalten wir sämtliche Paare rechtwinkliger Tangenten derselben und können nun leicht den Ort ihrer Schnittpunkte P ermitteln. Da nämlich x_1 der Höhenpunkt des Dreiecks $x\eta\eta_1$ ist, so liegen die vier Punkte x, η_1, P, e auf einem Kreise, und es ist $\sphericalangle Pex_1 = \sphericalangle P\eta_1x_1 = 45^\circ$; also liegt P auf derjenigen Halbierungslinie Q des Winkels zwischen den beiden Trägern, welche senkrecht auf der Parabelaxe steht; diese gerade Linie bleibt aber fest, während wir die Tangente x_1 verändern, und wir erhalten daher folgendes Resultat:

Der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel Tangenten einer Parabel sind, ist eine gerade Linie, welche senkrecht steht auf der Axe der Parabel in demjenigen Punkte, in welchem die beiden unter 45° zur Axe geneigten Tangenten der Parabel sich treffen.

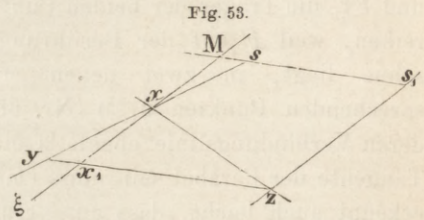
Man nennt diese Gerade die *Leitlinie* oder *Directrix* der Parabel; aus letzterem Namen ist dann die Benennung „Directorkreis“ gebildet worden.

Der Punkt F ist der Pol dieser Linie, denn sie sind Diagonalknotenpunkt und gegenüberliegende Diagonale in dem Vierseit der vier Tangenten ee_1, ff_1, xx_1, yy_1 .

Wollen wir dieses Resultat mit dem für Ellipse und Hyperbel gefundenen in Uebereinstimmung bringen, so können wir die gefundene Gerade auch als einen Kreis mit unendlich grossem Radius ansehen, ist ja auch bei der Parabel der Mittelpunkt, der ja zugleich der des Directorkreises ist, unendlich fern.

133 Wir erwähnen noch folgende Eigenschaft des Directorkreises. Es sei xyz ein Polardreieck eines Kegelschnitts, M der Mittelpunkt der Curve; wenn x_1 der Schnittpunkt (Mx, yz) ist (Fig. 53), so ist $Mx \cdot Mx_1$ die Potenz der diesem Durchmesser $Mx = A$ des Kegelschnitts zugehörigen Involution, also $= A^2$ oder $-A^2$, je nachdem x und x_1 auf derselben oder entgegengesetzten

Seite von M liegen. Den conjugirten Durchmesser B zu Mx erhalten wir, indem wir durch M die Parallele zu yz ziehen; wird dieselbe von xy in s getroffen, so muss die durch z zu Mx gezogene Parallele, die Polare



von s , sie in dem conjugirten Punkte s_1 treffen, so dass $Ms \cdot Ms_1$ die Potenz auf dem conjugirten Durchmesser ist für die Involution, welche ihm in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, also $= B^2$ oder $-B^2$, je nachdem er den Kegelschnitt trifft oder nicht. Für die Ellipse gelten die Werthe A^2 und B^2 , für die Hyperbel A^2 und $-B^2$ oder B^2 und $-A^2$; in beiden Fällen aber ist die Summe constant und zwar, wie wir gesehen haben, gleich dem Quadrate des Radius R des Directorkreises, also: $Mx \cdot Mx_1 + Ms \cdot Ms_1 = R^2$.

Nun ist

$$\frac{Ms}{Mx} = \frac{x_1 y}{x_1 x} \quad \text{und} \quad Ms_1 = x_1 z,$$

daher:

$$\frac{Ms \cdot Ms_1}{Mx} = \frac{x_1 y \cdot x_1 z}{x_1 x};$$

wenn ξ der zweite Schnittpunkt des Kreises xyz mit $x_1 x$ ist, dann ist (auch dem Vorzeichen nach):

$$x_1 \xi = \frac{x_1 z \cdot x_1 y}{x_1 x} = Ms_1 \cdot \frac{Ms}{Mx}$$

oder $Ms \cdot Ms_1 = Mx \cdot x_1 \xi = Mx (M\xi - Mx_1)$; also: $Ms \cdot Ms_1 + Mx \cdot Mx_1 = R^2 = Mx \cdot M\xi$; und da $Mx \cdot M\xi$ die Potenz des Punktes M in Bezug auf den um xyz beschriebenen Kreis bedeutet, so folgt: *Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts hat in Bezug auf den einem beliebigen*

Polardreieck des Kegelschnitts umgeschriebenen Kreis immer dieselbe Potenz, welche gleich ist dem Quadrate des Radius des Directorkreises. Oder auch: Der Directorkreis eines Kegelschnitts schneidet jeden einem Polardreieck umgeschriebenen Kreis rechtwinklig.

Für die Parabel ergibt sich:

Die sämmtlichen Polardreiecken in Bezug auf eine Parabel umgeschriebenen Kreise haben ihre Mittelpunkte auf der Leitlinie der Parabel.

Aus den obigen Ausdrücken für die Halbmesser-Quadrate (oder 134 Potenzen der Involutionen) von A und B ergibt sich:

$$Mx \cdot Mx_1 \cdot Ms \cdot Ms_1 \sin^2 \varphi = P_a \cdot P_b,$$

wo φ wieder den Winkel der beiden conjugirten Durchmesser A und B bezeichnet; wenn man mit p_1, p_2, p_3 die drei Perpendikel aus M auf die Seiten yz, zx, xy des Polardreiecks bezeichnet und bemerkt, dass

$$Mx_1 \cdot \sin \varphi = p_1,$$

$$Mx = p_2 \cdot \frac{x_1 x}{x_1 z} \cdot \frac{1}{\sin(xzy)},$$

$$Ms \cdot \sin \varphi = p_3 \cdot \frac{xy}{x_1 y}$$

ist und demnach:

$$Mx_1 \cdot Mx^2 \cdot \sin^2 \varphi = p_1 p_2 p_3 \cdot \frac{x_1 x}{x_1 y \cdot x_1 z} \cdot \frac{xy}{\sin(xzy)},$$

ferner nach dem Obigen:

$$\frac{Ms \cdot Ms_1}{Mx} = \frac{x_1 y \cdot x_1 z}{x_1 x},$$

so folgt:

$$P_a \cdot P_b = p_1 p_2 p_3 \cdot \frac{xy}{\sin(xzy)}$$

$$= 2 \cdot p_1 p_2 p_3 \cdot r,$$

wo r den Radius des dem Polardreieck umgeschriebenen Kreises bedeutet.*

Bis jetzt ist diese Formel noch nicht in Bezug auf die Vorzeichen als richtig erkannt. Die Seiten von xyz theilen die Ebene in sieben Räume: a) den Innenraum, b) die drei Scheitelräume der Innenwinkel, c) die drei Aussenräume über den Seiten. Wenn M im Innenraume liegt, so werden beide Potenzen $Mx \cdot Mx_1$ und $Ms \cdot Ms_1$ negativ, also beide Halbmesser-Quadrate, was weder bei der Ellipse noch bei der Hyperbel möglich ist. Liegt M in dem Scheitelraume bei x , wie oben in der Figur, so sind beide Potenzen positiv; sollte M in einem der andern derartigen Räume liegen, so ist x durch y oder z zu ersetzen und die Figur dem entsprechend zu ändern. Liegt aber M in

* Diese Sätze sind zuerst von *Faure* in den *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1. Ser. Bd. 19 S. 234 und Bd. 20 S. 55 ausgesprochen.

dem Aussenraume über yz , so ist $Mx \cdot Mx_1$ positiv und $Ms \cdot Ms_1$ negativ.

Also hat der Mittelpunkt eines (centrischen) Kegelschnitts zu einem Polardreiecke immer folgende Lage: er liegt in einem der Scheitelräume oder einem der Aussenräume, je nachdem die Curve Ellipse oder Hyperbel ist.

Setzt man nun fest, dass jedes der Lothe p_1, p_2, p_3 positiv oder negativ ist, je nachdem es auf derselben Seite von yz, zx, xy liegt wie das Dreieck xyz oder auf der andern, so sind bei der Lage, wie sie der Mittelpunkt einer Ellipse haben muss, zwei Lothe negativ, eins positiv, und wie sie der einer Hyperbel haben muss, eins negativ, zwei positiv. Folglich ist bei dieser Festsetzung die Formel:

$$P_a \cdot P_b = \pm a^2 b^2 = 2 p_1 p_2 p_3 \cdot r,$$

worin r den absoluten Werth des Radius bezeichnet, auch dem Vorzeichen nach richtig.

Das Ergebniss von Nr. 133 kann auch geschrieben werden:

$$P_A + P_B = P_a + P_b = P_{R_1},$$

wo P_{R_1} die Potenz des Mittelpunkts des Kegelschnitts in Bezug auf den irgend einem Polardreiecke umgeschriebenen Kreis bedeutet.

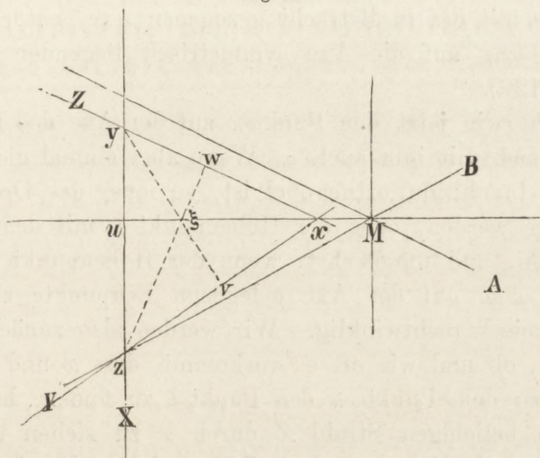
§ 35. Bestimmung solcher Punkte, für welche die einem Kegelschnitte zugehörige Involution rechtwinklig ist: Brennpunkte des Kegelschnitts.

135 Punkte, denen in Bezug auf einen Kegelschnitt eine orthogonale Involution zugehört, bei welcher je zwei conjugirte Strahlen zu einander rechtwinklig sind, müssen, falls sie vorhanden sind, innerhalb des Kegelschnitts liegen; d. h. es dürfen keine reellen Tangenten durch sie gehen, weil die orthogonale Involution ein besonderer Fall der elliptischen ist. Wir können aber den Ort, wo wir sie überhaupt zu suchen haben, noch mehr beschränken; denn es ist leicht einzusehen, dass sie nur auf den Axen des Kegelschnitts liegen können. Es sei P irgend ein nicht auf einer Axe des Kegelschnitts liegender Punkt; zu dem Durchmesser durch P gehört ein conjugirter Durchmesser, der nicht zu ihm rechtwinklig ist; conjugirt zu jenem in der zu P gehörigen Involution ist die durch P zu diesem gezogene Parallele. Die Involution enthält zwei nicht rechtwinklige conjugirte Strahlen und ist also nicht orthogonal. Die Punkte von der verlangten Eigenschaft sind demnach auf den innern Abschnitten der Axen zu suchen.

Sei x ein beliebiger Punkt einer Axe des Kegelschnitts (Fig. 54) und X seine Polare, die in u senkrecht auf der Axe steht, dann wird die dem Punkte x zugehörige Involution in folgender Weise erhalten:

Wir ziehen einen beliebigen (von der Axe verschiedenen) Strahl Z durch x , welcher in y die Polare X treffe, und bestimmen den Pol z von Z , welcher nothwendig auf X liegt; während sich Z bewegt, wird sich auch $xz = Y$ verändern, und Y, Z sind immer zwei conjugirte Strahlen der dem Punkte x zugehörigen Involution, y und z gleichzeitig zwei conjugirte Punkte der der Gerade X zugehörigen Involution, deren Mittelpunkt offenbar u ist. Der Strahl xu und die auf ihm Senkrechte durch x sind die Axen der Involution für den Punkt x ; wenn nun die beiden conjugirten Strahlen Y und Z auch zu einander rechtwinklig

Fig. 54.



wären, so hätte diese Involution zwei rechtwinklige Paare und wäre mithin orthogonal (Nr. 49). Dies ist aber für einen beliebig auf der Axe angenommenen Punkt x nicht der Fall, und wir werden solche besonderen Punkte aufzusuchen haben, welche diese Eigenschaft besitzen. Betrachten wir die dem Punkte x zugehörige Involution und die mit ihr perspectiv liegende der Polare X zugehörige, so ist, weil u der Mittelpunkt der letzteren ist, allemal $uy \cdot uz = \text{const.}$ In dem Dreieck xyz ist xu eine Höhe, die beiden andern Höhen yv und zw schneiden sich daher in einem Punkte ξ der ersteren, d. h. der Axe des Kegelschnitts, und wir haben wegen ähnlicher Dreiecke: $yu \cdot uz = u\xi \cdot ux = \text{const.}$; folglich wird, wie wir auch das Punktepaar yz auf der Polare verändern, der Höhenpunkt ξ des Polardreiecks xyz unverändert bleiben; also haben wir den Satz gefunden:

Alle Polardreiecke eines Kegelschnitts, welche einen bestimmten Punkt einer Axe desselben zur Ecke haben, haben den nämlichen Höhenpunkt, der ebenfalls auf dieser Axe liegt.

Für v sind die Strahlen vx, vy , welche gleichzeitig conjugirt und rechtwinklig sind, die Axen der zugehörigen Involution, für w ebenso wx und wz . Die Punkte x und ξ besitzen also die Eigenschaft, dass für jeden Punkt P des über $x\xi$ als Durchmesser beschriebenen Kreises die Strahlen Px und $P\xi$ die Axen der ihm in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Involution sind. Geht insbesondere durch x (oder ξ) eine Tangente des Kegelschnitts, deren Pol der Berührungspunkt P_0 ist, so muss $P_0\xi$ (oder P_0x) senkrecht auf der Tangente stehen, d. h. die Normale in P_0 sein. Die Punkte x und ξ sind also auch die Durchschnittspunkte von Tangente und Normale eines gewissen Kegelschnittspunktes mit der in Betracht gezogenen Axe, natürlich auch des zu ihm in Bezug auf die Axe symmetrisch liegenden Kegelschnittspunktes (Nr. 126).

136 Verändern wir jetzt den Punkt x auf der Axe des Kegelschnitts, so verändert sich mit ihm auch ξ . Wenn aber einmal die dem Punkte x zugehörige Involution orthogonal ist, so muss das Dreieck yxz bei x rechtwinklig werden, oder der Höhenpunkt ξ mit dem Eckpunkt x zusammenfallen, und umgekehrt, wenn der Höhenpunkt eines solchen Dreiecks mit dem auf der Axe gelegenen Eckpunkte zusammenfällt, so ist das Dreieck rechtwinklig. Wir werden also zunächst zu untersuchen haben, ob und wie oft es vorkommt, dass x und ξ zusammenfallen. Um zu dem Punkte x den Punkt ξ zu finden, haben wir nur nöthig, einen beliebigen Strahl Z durch x zu ziehen und aus dem Pol z das Perpendikel auf Z zu fällen, welches die Axe in ξ trifft. Halten wir der Einfachheit wegen, indem wir x fortrücken, die Richtung von Z fest, so wird der Pol z auf dem zu dieser Richtung conjugirten Durchmesser Mz sich bewegen, die Senkrechte zw bleibt auch sich parallel.

Die Punkte x und u sind conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt, also durchlaufen sie projective Punktreihen; da uz beständig senkrecht steht auf der Axe Mx , so durchlaufen z auf der festen Gerade Mz und u auf der Axe ähnliche Punktreihen, also durchlaufen auch z und x projective Punktreihen. Da ferner $z\xi w$ sich ebenfalls beständig parallel bleibt, so durchlaufen z und ξ ähnliche Punktreihen; also müssen schliesslich auch x und ξ projective Punktreihen durchlaufen. Dass dieselben aber auch involutorisch liegen, erhellt so: Um zu einem Punkte x den zugehörigen ξ zu finden, ziehen wir durch x einen beliebigen Strahl Z und fällen aus dem Pole desselben z das Perpendikel auf Z , welches in ξ die Axe trifft. Die beiden Strahlen, welche x und ξ einschneiden, sind rechtwinklig und conjugirt, und da das beides reciproke Eigenschaften sind, so folgt, dass jeder der beiden Punkte

x, ξ aus dem andern in gleicher Weise sich ergibt; d. h. wenn ξ zu x construirt ist und nun x nach ξ kommt, dann kommt ξ nach x . Die beiden von x und ξ beschriebenen projectiven Punktreihen liegen also involutorisch, und die Doppelpunkte dieser Involution sind die gesuchten Punkte, deren in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Involutionen orthogonal sind.

Der Mittelpunkt des Kegelschnitts ist auch in dieser Involution Mittelpunkt, da er dem unendlich fernen Punkte conjugirt ist; denn fällt x ins Unendliche, so ist der Strahl Z parallel zur Axe, sein Pol z liegt auf der andern Axe, diese ist daher das aus z auf Z gefällte Loth und der Mittelpunkt M dessen Schnittpunkt.

Es giebt also auf jeder der beiden Axen zwei solche Punkte, und es bleibt noch zu untersuchen, ob dieselben reell oder imaginär, d. h. die in der angegebenen Weise auf den Axen des Kegelschnitts construirten beiden neuen Involutionen, die wir — zur Unterscheidung von den den Axen in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Involutionen, deren Potenzen die Halbaxen-Quadrate sind — die *Focalinvolutionen* des Kegelschnitts nennen wollen, hyperbolisch oder elliptisch sind. Da der Mittelpunkt des Kegelschnitts M auch für diese Involutionen Mittelpunkt ist, so ist nur zu untersuchen, ob ein solches auf einer der Axen befindliches Punktepaar $x\xi$ durch M getrennt wird, oder nicht; im ersten Falle wird die Involution elliptisch, im zweiten hyperbolisch sein.

Conjugirte Punkte x, ξ unserer Involution auf einer Axe sind Schnitte mit zwei rechtwinkligen conjugirten Strahlen, den Axen der irgend einem Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Involution. Wir haben also den Satz:

Denkt man sich in sämmtlichen Punkten der Ebene die Axen der ihnen in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Involutionen ermittelt, so schneiden alle diese Axenpaare die eine (und ebenso die andere) Axe des Kegelschnitts in den Punktepaaren einer festen Involution: der Focalinvolution dieser Axe, welche den Mittelpunkt des Kegelschnitts zu ihrem Mittelpunkte hat.

Die in dieser Weise auf den beiden Axen erhaltenen Focalinvolutionen sind verschiedener Art, die eine hyperbolisch und die andere elliptisch. 137

Durch unmittelbare Anschauung erkennt man, dass die Axen durch irgend einen andern rechten Winkel nur so in Punktepaaren $x\xi, y\eta$ geschnitten werden können, dass auf der einen Axe die beiden Punkte durch M getrennt werden, auf der andern nicht; und daraus folgt die Behauptung über die Verschiedenartigkeit der Focalinvolutionen.

Aber wir wollen lieber ordentlich beweisen, dass, wenn die eine dieser Involutionen hyperbolisch oder elliptisch ist, die andere elliptisch oder hyperbolisch sein muss.

Die eine — etwa auf der Axe a — sei hyperbolisch; dann hat sie zwei reelle Doppelpunkte, und für jeden derselben wird die zugehörige Involution orthogonal sein; alle Paare conjugirter Strahlen sind rechtwinklig, und daher schneidet jedes die andere Axe in einem Paare ihrer Focalinvolution; diese wird dadurch perspectiv zu den beiden orthogonalen Involutionen um die Doppelpunkte, also selbst elliptisch.

Geht man aber von einer elliptischen Focalinvolution — die etwa auf der Axe b liege — aus, so giebt es (Nr. 62) zwei reelle Punkte, aus deren jedem sie durch eine orthogonale Involution projectirt wird. Sie liegen auf der Gerade, die im Mittelpunkte M der Involution und des Kegelschnitts auf b senkrecht steht, also auf der andern Axe a , in gleicher Entfernung von M .

Wir wissen, jede zwei rechtwinklige Geraden, die durch ein Paar einer Focalinvolution gehen, sind conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt und gehören zu der Involution, welche ihrem Schnittpunkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugeordnet ist. Sie sind bei beliebigem Punkte das einzige rechtwinklige Paar, die Axen dieser Involution. In unserm Falle aber gilt dies für jedes Paar der einen oder andern orthogonalen Involution; die Strahlen jedes Paares sind conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt, und die beiden orthogonalen Involutionen sind die den Punkten zugehörigen, die Punkte also die Doppelpunkte der Focalinvolution auf a , und diese ist hyperbolisch.

Somit ist die Zahl der gesuchten Punkte vier, aber nur auf der einen Axe sind sie reell, auf der andern imaginär. Sie heissen die *Brennpunkte* des Kegelschnitts, und im engeren Sinne werden die beiden reellen Punkte so genannt.*

Wenn nun F einer von den reellen Brennpunkten ist, so ist \overline{MF}^2 die Potenz der hyperbolischen Focalinvolution. Zwei rechtwinklige Strahlen durch ihn gehen nach conjugirten Punkten y, η der elliptischen, also ist deren Potenz $My \cdot M\eta$; man erkennt sofort, dass dies $= -\overline{MF}^2$ ist.

Die beiden Focalinvolutionen haben entgegengesetzt gleiche Potenz $c^2, -c^2$, wo c die Entfernung der beiden (reellen) Brennpunkte vom Mittelpunkte ist, die sogenannte halbe Excentricität des Kegelschnitts.

* Diese waren den Alten schon bekannt; sie kommen in den Kegelschnitten von *Apollonius* vor; der Name „Brennpunkte“ scheint erst bei *Kepler* (1571 — 1630) aufzutreten.

Diese beiden Involutionen auf a und b und die ausgezeichnete Involution I_∞ auf G_∞ haben noch folgende interessante Lage: Dem Schnittpunkte je zweier von den drei Geraden sind in den beiden Involutionen die Schnittpunkte mit der dritten Gerade conjugirt.

Ferner treffe eine beliebige Gerade G die drei Geraden a, b, G_∞ in x, y, z , denen in den drei Involutionen ξ, η, ζ conjugirt seien; die rechtwinklig conjugirte Gerade zu G (das Loth auf G aus ihrem Pole) muss durch ξ und η , aber, wegen der Rechtwinkligkeit, auch durch ζ gehen. Demnach sind drei in gerader Linie gelegenen Punkten der drei Geraden wiederum in gerader Linie gelegene Punkte in den Involutionen conjugirt.

Verbindet die erste Gerade zwei Doppelpunkte von verschiedenen Involutionen, so vereinigt sie sich mit der zweiten Gerade, und geht daher auch durch einen Doppelpunkt der dritten Involution. Die sechs Doppelpunkte sind daher die drei Paare Gegenecken (zwei reelle und zweimal zwei imaginäre) eines freilich imaginären vollständigen Vierseits.

Seine Seiten sind Tangenten des Kegelschnitts als Doppelstrahlen der dem einen oder andern (reellen) Brennpunkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Involution.

Sie gehen nach den absoluten Punkten auf G_∞ . Und so ergibt sich:

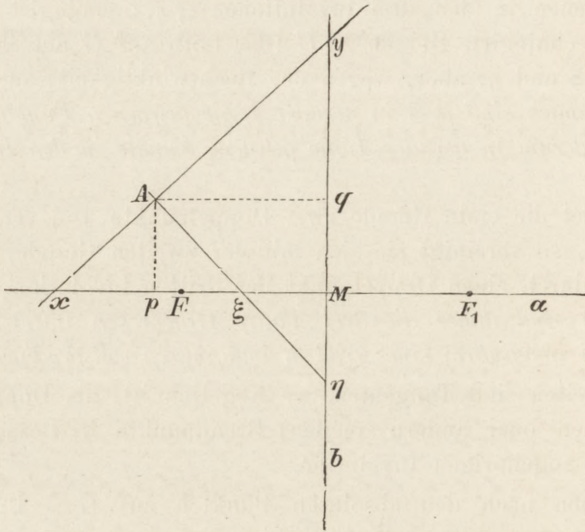
Die vier Tangenten eines Kegelschnitts aus den beiden absoluten Punkten schneiden sich in zwei reellen Punkten, die auf der einen, und zwei imaginären Punkten, die auf der andern Axe liegen; das sind die vier Brennpunkte des Kegelschnitts.

Jenes imaginäre Vierseit, das dem Kegelschnitt umgeschrieben ist, hat aber ein vollständig reelles Diagonal-Dreiseit (für den Kegelschnitt ein Polardreiseit) abG_∞ .

Tangente und Normale (Fig. 55) in irgend einem Punkte A des Kegelschnitts sind auch rechtwinklige conjugirte Geraden und treffen die Axen in conjugirten Punkten der betreffenden Focalinvolution. Diese Schnittpunkte seien auf der einen Axe x und ξ , welche auf derselben Seite von M liegen, auf der andern y und η , welche sich auf verschiedenen Seiten von M befinden, und demnach: $Mx \cdot M\xi = c^2$, $My \cdot M\eta = -c^2$. Wir wollen die Beziehung der Excentricität zu den Axenlängen ermitteln. Dazu fällen wir von A die Lothe Ap und Aq auf die Axen, die Polaren von x und y oder von ξ und η , je nachdem xAy oder $A\xi\eta$ Tangente ist. Im ersteren Falle sind p und x , q und y conjugirt und die Potenzen der den Axen zugehörigen Involutionen oder die Halbaxen-Quadrate $Mx \cdot Mp$ und $My \cdot Mq$, also beide

positiv; im zweiten Falle sind sie $M\xi \cdot Mp$ und $M\eta \cdot Mq$, jene positiv, diese negativ. Also ist bei der Ellipse xAy , bei der Hyperbel $A\xi\eta$ als Tangente zu nehmen. Bei der Ellipse ist $Mx \cdot Mp = a^2$, $My \cdot Mq = b^2$, bei der Hyperbel $M\xi \cdot Mp = a^2$, $M\eta \cdot Mq = -b^2$. Es ist:

Fig. 55.



$Mp^2 = qA^2 = \eta q \cdot qy$ und infolge ähnlicher Dreiecke (auch dem Vorzeichen nach):

$$\frac{Mx}{Mp} = \frac{My}{qy}, \quad \frac{M\xi}{Mp} = \frac{M\eta}{q\eta},$$

also für den Fall der Ellipse:

$$Mx \cdot Mp = My \cdot \eta q = My (\eta M + Mq),$$

oder

$$Mx \cdot Mp - My \cdot Mq = My \cdot \eta M,$$

d. h.

$$a^2 - b^2 = c^2; \quad c < a.$$

Für den Fall der Hyperbel:

$$M\xi \cdot Mp = M\eta \cdot yq = M\eta (yM + Mq),$$

oder

$$M\xi \cdot Mp - M\eta \cdot Mq = M\eta \cdot yM,$$

d. h.

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad c > a;$$

in beiden Fällen:

$$P_a - P_b = c^2.$$

Wir haben die Axe, auf der die hyperbolische Focalinvolution liegt, a genannt; das Ergebniss für die Ellipse zeigt, dass $a > b$ sein muss, also enthält die grosse oder Hauptaxe der Ellipse die reellen Brennpunkte.

Bei der Hyperbel hat sich schon während der Betrachtung gezeigt, dass jene Axe mit der hyperbolischen Focalinvolution die mit dem positiven Halbaxen-Quadrate ist; aber dass nur *auf dieser reell schneidenden Axe*, welche allein innere Punkte enthält, *die reellen Brennpunkte sich befinden können*, geht ja schon daraus hervor, dass diese innere Punkte sein müssen; wir nannten sie schon die Hauptaxe.

Hauptaxe ist also in beiden Fällen die, welche die reellen Brennpunkte enthält, und in beiden Fällen ist ihr Halbaxen-Quadrat das grössere.

Es erhellt, wie man aus a und b die Lage der Brennpunkte gewinnen kann. Bei der Hyperbel schneidet jede der Scheiteltangenten von den Asymptoten die halbe Excentricität ab , bei der Ellipse haben die Brennpunkte von den Scheiteln der Nebenaxe die Entfernung a .

Bei der Ellipse schliessen die Scheitel der Hauptaxe die Brennpunkte ein, während sie bei der Hyperbel von denselben eingeschlossen werden.

Bei der Hyperbel ist, wenn $a^2, -b^2$ die Halbaxen-Quadrate sind, $c^2 = a^2 + b^2$; für die conjugirte Hyperbel, bei der diese Quadrate $-a^2, b^2$ sind und also die Nebenaxe nun Hauptaxe ist, hat c^2 denselben Werth; also gehen ihre Brennpunkte aus denen der gegebenen durch Rotation um 90° um dem Mittelpunkt hervor.

Wir haben vorhin den Kreis erwähnt, welcher über der Strecke $x\xi$ als Durchmesser beschrieben werden kann; wenn das Punktepaar $x\xi$ die Focalinvolution durchläuft, so bilden alle diese Kreise ein Kreisbüschel, dessen Centrale eine Kegelschnittaxe ist. Beschreiben wir andererseits auch über den verschiedenen Strecken $y\eta$ als Durchmessern die Kreise, so erhalten wir ein zweites Kreisbüschel, welches die andere Kegelschnittaxe zur Centrale hat. Diese beiden Kreisbüschel sind *conjugirte Kreisbüschel*, d. h. jeder Kreis des einen Büschels schneidet jeden des andern rechtwinklig; denn diejenigen beiden Kreise, welche (Fig. 55) über $x\xi$ und $y\eta$ als Durchmessern beschrieben sind, haben den Punkt A gemein, und die von den Mittelpunkten dieser beiden Kreise nach A hin gehenden Radien stehen offenbar senkrecht auf einander. Dasjenige Büschel, das aus der hyperbolischen Focalinvolution entsteht, hat die andere Axe zur „ideellen“ gemeinschaftlichen Secante*: alle seine Kreise gehen durch die beiden imaginären Punkte G, G_1 dieser Axe, welche zu beiden Seiten des Mittelpunkts in gleicher Entfernung von ihm so liegen, dass $MG \cdot MG_1 = c^2$, der gemeinsamen Potenz aller Kreise des Büschels in Bezug auf M ; da

* Siehe Steiner, Einige geometrische Betrachtungen, Journal für Mathematik, Bd. I S. 161 flg., Gesammelte Werke Bd. I S. 17.

$MG_1 = -MG$, so folgt $MG^2 = -c^2$, $MG = ci$, $MG = -ci$, es sind dies die beiden imaginären Brennpunkte. Die reellen Brennpunkte F, F_1 , als die Doppelpunkte jener Involution, sind die „Grenzpunkte“ des Kreisbüschels, zu Punkten gewordene Kreise desselben. Durch sie gehen alle Kreise des andern Büschels, weil $MF \cdot MF_1 = My \cdot M\eta$.

Hiernach können wir den Satz aussprechen:

Die beiden Brennpunkte eines Kegelschnitts und die Schnittpunkte von Tangente und Normale in irgend einem Kegelschnittspunkte mit derjenigen Axe, auf welcher die Brennpunkte nicht liegen, befinden sich allemal auf einem Kreise; woraus eine Construction der Brennpunkte sich ergibt.

141 In der obigen Figur 54 bewegten wir den Strahl $xy = Z$ parallel mit sich fort und fällten aus z das jedesmalige Perpendikel auf Z . Der Fusspunkt w desselben beschreibt bei dieser Bewegung, weil die Grundpunkte der erzeugenden Büschel in senkrechten Richtungen unendlich fern liegen, eine *gleichseitige Hyperbel*, welche durch die beiden reellen und die beiden imaginären Brennpunkte des Kegelschnitts hindurchgeht. Verändern wir dann die Richtung von Z , so erhalten wir ein Bündel gleichseitiger Hyperbeln, welches mit den beiden conjugirten Kreisbüscheln in engem Zusammenhange steht (siehe Nr. 251).

Wir fanden oben die Involution I_∞ auf G_∞ in enger Beziehung zu den Focalinvolutionen; wir können, das Polardreieck, zu dem die endlichen Axen gehören, vervollständigend, G_∞ als dritte Axe und die beiden imaginären Doppelpunkte von I_∞ , die absoluten Punkte, als ein drittes Paar Brennpunkte hinzufügen.

Diese Auffassung dient bei manchen geometrischen Untersuchungen zur Aufklärung von Paradoxen, die sonst nicht erklärt werden können. Beim sphärischen Kegelschnitt z. B. treten, weil das Operationsfeld der Kugel keine unendlich entfernten Punkte besitzt, drei Axen und sechs Brennpunkte so auf, dass die beiden Axen mit imaginären Brennpunkten gleichartig sich verhalten.*

Wir haben aber auf der unendlich entfernten Gerade auch die Involution, welche ihr in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; sie wird durch die dem Mittelpunkte des Kegelschnitts zugehörige Involution (der conjugirten Durchmesser) eingeschnitten und ist elliptisch, wenn der Kegelschnitt Ellipse, hyperbolisch, wenn er Hyperbel ist, wo dann die Asymptoten des Kegelschnitts durch die Doppelpunkte dieser Involution auf G_∞ gehen. Da beim Kreise die Involution der con-

* Vergl. *Heinrich Vogt*: Der sphärische Kegelschnitt, Inaug.-Diss. Breslau 1871.

jugirten Durchmesser orthogonal ist, so ist für alle Kreise diese feste Involution I_∞ die der G_∞ zugehörige: ihre Doppelpunkte sind die Schnittpunkte jedes Kreises mit G_∞ ; und wir gewinnen von neuem den Satz (Nr. 62): Alle Kreise der Ebene gehen durch die beiden absoluten Punkte. Reell ist dies eben nichts anderes, als dass, wie eben gesagt, I_∞ für jeden Kreis die der G_∞ zugehörige Involution ist.

Auf der Axe der *Parabel* entsteht durch die Schnitte rechtwinkliger conjugirter Geraden ebenfalls eine Focalinvolution; der unendlich ferne Punkt hat sich mit seinem conjugirten, dem Mittelpunkte, vereinigt. Keinem endlichen Punkte der Axe kann ein unendlich ferner conjugirt sein; denn für jeden durch ihn gezogenen Strahl Z , der von der Axe verschieden ist, ist der Pol z endlich und das aus ihm auf Z gefällte Perpendikel, das die Axe im conjugirten Punkte ξ trifft, nicht parallel zur Axe, ξ also nicht unendlich fern.

Der unendlich ferne Punkt der Axe einer Parabel ist demnach der eine Doppelpunkt der Focalinvolution und diese ist gleichseitig-hyperbolisch (Nr. 38). Er ist der eine Brennpunkt der Parabel, der andere endliche und stets reelle, der zweite Doppelpunkt jener Involution, wird nun vorzugsweise der Brennpunkt der Parabel genannt. Zwei conjugirte Punkte der Involution, also Schnitt von Tangente und zugehöriger Normale, stehen zu beiden Seiten gleichweit von diesem Brennpunkte F ab. Das der Focalinvolution zugehörige Kreisbüschel besteht aus allen Kreisen um diesen endlichen Brennpunkt.*

§ 36. Einige Eigenschaften der Kegelschnitte, welche sich auf ihre Brennpunkte beziehen.

Die Brennpunkte führen zu sehr einfachen Eigenschaften der Kegelschnitte, welche zu den ältesten und bekanntesten gehören. Wir wollen dieselben hier aus unserer Definition der Brennpunkte ableiten. Da die Involution $(x\xi)$, deren Doppelpunkte die Brennpunkte F, F_1 des Kegelschnitts sind, durch Tangente und Normale sämtlicher Kegelschnittspunkte P in die Hauptaxe eingeschnitten wird, so bilden die Tangente und Normale irgend eines Punktes P des Kegelschnitts und die beiden Strahlen PF, PF_1 nach den Brennpunkten vier harmonische Strahlen, und da Tangente und Normale zugeordnete Strahlen sind und auf einander senkrecht stehen, so halbiren sie (Nr. 15) die Winkel zwischen den Strahlen PF und PF_1 , also erhalten wir den Satz:

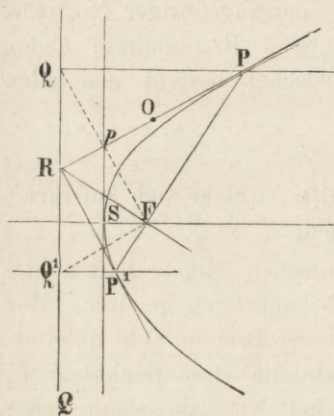
* Diesen unendlich entfernten Brennpunkt erkannte schon *Kepler*; er nannte ihn focus coecus.

Die Tangente (und Normale) in jedem Punkte des Kegelschnitts bildet gleiche Winkel mit den beiden Strahlen, welche von diesem Punkte nach den Brennpunkten des Kegelschnitts gehen.

Hieraus erklärt sich (wenigstens für Ellipse und Parabel) der Name „Brennpunkte“, indem nach dem bekannten Reflexionsgesetz die von einem Brennpunkte des Kegelschnitts ausgehenden (Licht- oder Wärme-) Strahlen, welche an dem Kegelschnitte gespiegelt werden, in dem andern sich wieder vereinigen. Bei der Parabel werden alle von dem (endlichen) Brennpunkte ausgehenden Strahlen durch dieselbe parallel zur Axe reflectirt, weil der zweite Brennpunkt im Unendlichen auf dieser liegt.

144 Ueberhaupt gestalten sich die Focaleigenschaften bei der Parabel am einfachsten, und wir wollen sie daher zunächst ableiten. Die Polare des Brennpunktes heisst die Leitlinie (Directrix) der Parabel; sie wird sich bald mit der in Nr.132 so genannten Gerade identisch erweisen. Sie steht senkrecht auf der Axe in dem Punkte, der vom Scheitel ebenso weit entfernt ist, wie der Brennpunkt, ihrem Pol; denn auch die der Axe in Bezug auf die Parabel zugehörige Involution ist gleichseitig-hyperbolisch, da der eine Schnittpunkt der

Fig. 56.



Axe mit der Curve, also der eine Doppelpunkt dieser Involution unendlich fern ist. Weil die dem Brennpunkte zugehörige Involution rechtwinklig ist, so steht die Verbindungslinie irgend eines Punktes R (Fig. 56) der Leitlinie mit dem Brennpunkt F senkrecht auf der durch F gehenden Polare von R ; diese schneidet aber die Parabel in zwei reellen Punkten P und P^1 , weil der Brennpunkt F innerhalb der Parabel liegt, und RP und RP^1 sind die Tangenten in diesen Punkten. Die Parallele

durch P zur Axe schneide die Leitlinie in Q ; es halbirt nach dem Vorigen die Tangente PR den Winkel FPQ ; PQ steht aber senkrecht auf der Leitlinie Q , folglich sind die beiden Dreiecke RPQ und RPF , weil sie alle Winkel gleich haben und eine Seite RP gemeinschaftlich, congruent; mithin ist $PF = PQ$; dasselbe ergibt sich für alle Punkte der Parabel, wenn wir R auf der Leitlinie fortrücken lassen. Hieraus erhalten wir den Satz:

Alle Punkte einer Parabel haben von dem Brennpunkte und der Leitlinie, seiner Polare, gleiche Entfernung.

Da ferner $RF = RQ = Q^1R$ und FQ senkrecht auf RP steht und durch diese Gerade halbirt wird in p , so durchläuft bei der Bewegung von R , weil Q auf der festen Gerade \mathcal{Q} sich bewegt und immer $Fp = \frac{1}{2}FQ$ ist, der Punkt p eine mit \mathcal{Q} parallele Gerade, welche den Abstand des Brennpunktes F von \mathcal{Q} halbirt; diese Gerade geht durch den Scheitel S der Parabel und ist, weil senkrecht zur Axe, dessen Tangente; p ist der Fusspunkt eines vom Brennpunkte auf eine beliebige Tangente gefällten Perpendikels, also:

Die Fusspunkte der aus dem Brennpunkt auf sämtliche Tangenten der Parabel gefällten Perpendikel liegen auf einer Gerade, der Tangente im Scheitel.

Da ferner $\angle QRP = \angle PRF$ und ebenso $\angle Q^1RP^1 = \angle P^1RF$ und Q, R, Q^1 in gerader Linie liegen, so ist $\angle PRP^1 = 90^\circ$, also *kommen von allen Punkten der Leitlinie der Parabel rechtwinklige Tangentenpaare an dieselbe.*

Die Gerade \mathcal{Q} ist in der That die in Nr. 132 Leitlinie genannte Gerade. Der Punkt F in Fig. 52 ist der Brennpunkt der Parabel.

Wenn neben dem Brennpunkte F einer Parabel noch eins der ¹⁴⁵ Elemente: Scheitel S , Scheiteltangente s , Leitlinie \mathcal{Q} gegeben ist, so hat man die beiden andern, ferner die Axe a und den unendlich fernen Berührungspunkt M_∞ . Wird nun noch irgend ein Punkt P construiert, der von F und \mathcal{Q} gleiche Entfernung hat, so haben wir vom Kegelschnitte drei Punkte S, M_∞, P und in zweien S, M_∞ die Tangenten s, G_∞ ; dadurch ist er bekanntlich eindeutig bestimmt (Nr. 90): er ist Parabel wegen der Berührung mit G_∞ . Wir können auch leicht die Tangente in P herstellen, als Halbierungslinie des Winkels FPQ ; so dass wir den Kegelschnitt auch durch drei Tangenten und die Berührungspunkte von zweien bestimmt ansehen können, was ebenfalls eine eindeutige Bestimmung ist.

Die Parabel ist durch den Brennpunkt und ein jedes der drei Elemente: Scheitel, Scheiteltangente, Leitlinie eindeutig bestimmt. Durch jeden Punkt der Scheiteltangente geht eine zweite Tangente und steht senkrecht auf dem Strahl, der ihn mit dem Brennpunkte verbindet. Mithin ist, da es auf jedem Strahle durch F in seinem Schnitte mit s nur eine Senkrechte giebt, diese eine Tangente der Parabel. Also:

Wenn ein rechter Winkel sich so bewegt, dass sein Scheitel auf einer festen Gerade vortrückt, während der eine Schenkel um einen festen Punkt sich dreht, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel, für welche die feste Gerade Scheiteltangente, der feste Punkt Brennpunkt ist.

Die Construction des Tangentenpaares aus einem beliebigen Punkte O ¹⁴⁶ an die Parabel ergibt sich leicht aus dem Vorigen, indem ein Punkt

einer Tangente gleich weit absteht vom Brennpunkte, wie vom Fusspunkte des aus dem Berührungspunkte auf die Leitlinie herabgelassenen Perpendikels; wenn der um O mit dem Radius OF geschlagene Kreis die Leitlinie in den Punkten Q und Q^1 trifft, so sind die Perpendikel aus O auf die Geraden QF und Q^1F die Tangenten aus O an die Parabel.

Aus dieser Figur entnehmen wir weiter, dass, wenn P und P^1 die Berührungspunkte der beiden Tangenten sind: $\sphericalangle PQO = PFO$, weil Q und F in Bezug auf OP symmetrisch liegen; ebenso $\sphericalangle P^1Q^1O = P^1FO$; $OQ = OQ^1 = OF$, also sind PQO und P^1Q^1O gleich als Complementary von gleichen Winkeln, und demnach ist auch $\sphericalangle PFO = P^1FO$. Also:

Der Winkel zwischen den Strahlen vom Brennpunkte einer Parabel nach den Berührungspunkten zweier Tangenten wird durch den Strahl nach dem Schnittpunkte derselben halbirt.

Hat man drei Tangenten t, t^1, t^2 , welche in P, P^1, P^2 berühren, so seien O, O^1, O^2 die Schnitte t^1t^2, t^2t, tt^1 ; dann ist $\sphericalangle P^1FO^2 = O^2FP$, $PFO^1 = O^1FP^2$, also ist $\sphericalangle O^2FO^1$ gleich der Hälfte des Winkels P^1FP^2 und demnach fest, wenn die in P berührende Tangente sich bewegt.

Die Strecke auf einer beweglichen Tangente der Parabel zwischen zwei festen wird aus dem Brennpunkt unter einem der Grösse und dem Sinne nach festen Winkel gesehen.

Kommt die bewegliche Tangente in die Scheiteltangente, so werden FO^1 und FO^2 die Lothe aus F auf die beiden festen Tangenten; *unser constanter Winkel ist daher gleich (oder supplementär) dem Winkel der beiden festen Tangenten.* Daraus folgt, dass der Kreis, welcher durch die Ecken eines einer Parabel umgeschriebenen Dreiecks gelegt ist, stets durch den Brennpunkt geht.

Weitere Folgerungen wollen wir übergehen; es liegt nicht in unserer Absicht, diesen elementaren Weg für die Ableitung der Eigenschaften der Kegelschnitte weiter zu verfolgen, sondern nur die Brücke herzustellen, welche von den allgemeinsten Eigenschaften des Kegelschnitts zu diesen besonderen hinüberführt.*

147 Seien F und F_1 die beiden Brennpunkte eines *centrischen* Kegelschnitts und P irgend ein Punkt desselben, so müssen, wie wir gesehen haben, die Tangente und Normale in P die Winkel zwischen

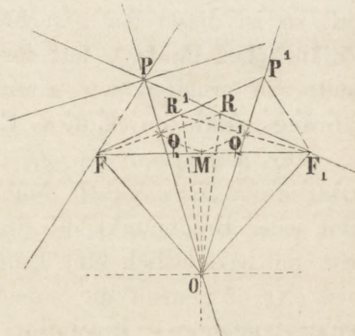
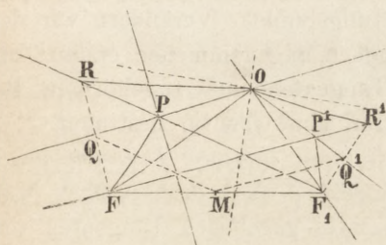
* Die Focaleigenschaften der Kegelschnitte bilden den Ausgangspunkt der Betrachtung in dem I. Theile der *Steiner'schen* Vorlesungen: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von *C. F. Geiser*. 3. Aufl. Leipzig 1887.

den Strahlen PF und PF_1 nach den Brennpunkten halbiren; es bleibt aber zweifelhaft, welche von den beiden Halbiringlinien Tangente und welche Normale ist. Die beiden Halbiringlinien werden durch PF und PF_1 getrennt. Fassen wir denjenigen Halbiringstrahl, welcher zwischen F und F_1 hindurchgeht, als Tangente auf, den andern als Normale, so ist der Kegelschnitt Hyperbel, weil jede Tangente der Hyperbel die Hauptaxe zwischen ihren beiden Scheiteln trifft, mithin umsomehr zwischen den Brennpunkten; im andern Falle ist der Kegelschnitt Ellipse, weil jede Tangente derselben die Axe ausserhalb ihrer beiden Scheitel trifft, mithin auch ausserhalb der beiden Brennpunkte.

Ellipse.

Fig. 57.

Hyperbel.



Wir wollen nun in Fig. 57 die beiden Fälle der Ellipse und Hyperbel von einander trennen. In der ersten Figur ist also die Halbiringlinie des Winkels FPF_1 , welche zwischen F, F_1 hindurchgeht, die Normale, die Halbiringlinie des Nebenwinkels die Tangente, in der andern umgekehrt. Füllen wir in beiden Figuren von F das Perpendikel FQ auf die Tangente, welches in R den Strahl PF_1 trifft, so ist $PF = PR$ wegen der Congruenz der Dreiecke PFQ und PRQ ; jeder Punkt der Tangente ist gleichweit von F und R entfernt. Nehmen wir einen beliebigen Punkt O der Tangente, so ist die andere durch ihn gehende Tangente vollkommen bestimmt, denn die dem Punkte O zugehörige Involution hat zu Doppelstrahlen die Tangenten aus O ; ihre Axen sind die Halbiringlinien der Winkel zwischen denselben, und diese Axen treffen, wie wir eingesehen haben, immer in einem solchen Punktepaar $x\xi$ die Kegelschnittaxe, welches mit den Brennpunkten F, F_1 harmonisch liegt; folglich sind die Axen der Involution O mit den Strahlen OF und OF_1 harmonisch gelegen, und da jene senkrecht auf einander stehen, so sind sie die Halbiringlinien der Winkel zwischen den Strahlen OF und OF_1 , also: *Die Halbiringlinien der*

Winkel der von einem beliebigen Punkte O an den Kegelschnitt gelegten Tangenten und die Halbirungslinien der Winkel der von O nach den Brennpunkten F, F_1 gehenden Strahlen fallen zusammen. Stellen wir daher diese Halbirungslinien her, so ist die andere durch O gehende Tangente unzweideutig bestimmt; der Winkel von OF_1 nach ihr hat gleiche Grösse und gleichen Sinn mit demjenigen von der ersten Tangente nach OF .

Um ihren Berührungspunkt P^1 zu ermitteln, haben wir einen solchen Punkt auf ihr zu suchen, dass P^1F und P^1F_1 gleiche Winkel mit ihr bilden; d. h. wir fällen aus F_1 das Perpendikel F_1Q^1 auf die Tangente, verlängern es über Q^1 um sich selbst bis R^1 , ziehen FR^1 und suchen den Schnittpunkt P^1 der letzten Gerade mit der Tangente auf, so ist dieser der gesuchte Berührungspunkt. Verändern wir den willkürlichen Punkt O auf der als gegeben angenommenen ersten Tangente, so erhalten wir sämtliche Tangenten und zugehörigen Berührungspunkte durch diese Construction unzweideutig bestimmt.

Der Kegelschnitt ist also vollständig und eindeutig bestimmt durch seine beiden Brennpunkte und eine Tangente, was vorauszusehen war, weil jeder Brennpunkt die Stelle von zwei gegebenen Tangenten vertritt und bekanntlich fünf Tangenten den Kegelschnitt eindeutig bestimmen (Nr. 63); denn die einem Brennpunkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Involution ist die orthogonale um diesen Punkt, also gegeben, und ihre imaginären Doppelstrahlen sind Tangenten des Kegelschnitts.

148 Wenn ein Punkt P gegeben ist ausser den Brennpunkten F, F_1 , so sind die Halbirungslinien des Winkels FPE_1 und seines Nebenwinkels gegeben; jede bestimmt als Tangente eindeutig einen Kegelschnitt.

Die Brennpunkte und ein Punkt bestimmen zwar zwei Kegelschnitte, aber eindeutig eine Ellipse und eindeutig eine Hyperbel.

Sie sind beide Parabeln, wenn der eine Brennpunkt unendlich fern ist.

Diese beiden Kegelschnitte schneiden sich in dem Punkte rechtwinklig, und allgemeiner, *zwei Kegelschnitte, welche dieselben Brennpunkte haben (confocal sind), schneiden sich in denjenigen reellen Punkten, in denen sie sich treffen, rechtwinklig.*

Weil $OF = OR$ und $OF_1 = OR^1$, $\angle ROF_1 = \angle FOR^1$, sind die Dreiecke ROF_1 und FOR^1 congruent, also $RF_1 = FR^1$ in beiden Figuren. Indem $RP = FP$ und $R^1P^1 = F_1P^1$ ist, haben wir in der Figur der Ellipse:

$$FP + F_1P = FP^1 + F_1P^1.$$

Da O , ein beliebiger Punkt auf einer beliebigen Tangente, Schnittpunkt zweier beliebigen Tangenten ist, so ist die Summe der Entfernungen von den beiden Brennpunkten für alle Punkte der Ellipse dieselbe. Diese Summe ist nun, wenn der Ellipsenpunkt insbesondere einer der Scheitel wird, $= 2a$, der grossen Axe der Ellipse, folglich gilt der Satz:

Alle Punkte einer Ellipse haben dieselbe Summe der Abstände von den beiden Brennpunkten, und diese Summe ist gleich der Hauptaxe. Und umgekehrt: Der Ort aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F und F_1 denselben Werth hat, ist die Ellipse, für welche diese Punkte die Brennpunkte und die grosse Axe gleich der gegebenen Summe ist.

Denn ein Punkt mit der gegebenen Entfernungssumme bestimmt eindeutig die Ellipse, alle ihre Punkte haben sie; und kein anderer. Wenn nämlich ein nicht der Ellipse angehöriger Punkt Q sie auch hätte, so sei P der auf derselben Seite von F gelegene (reelle) Schnitt der Curve mit FQ ; dann würde aus $FQ + F_1Q = FP + F_1P$ folgen, dass PQ gleich der Differenz der beiden andern Seiten von PQF_1 ist.

Etwas anders gestaltet es sich bei der Hyperbel wegen der Lage der Tangenten, welche sämmtlich zwischen F und F_1 hindurchgehen. Auch bei ihr ist $RF_1 = FR^1$, d. h. hier $PF_1 - PF = P^1F - P^1F_1$, also

$$PF - PF_1 = \text{const.}$$

Für alle Punkte einer Hyperbel hat die Differenz der Abstände von den Brennpunkten F und F_1 denselben (absoluten) Werth, welcher gleich der Hauptaxe ist. Die beiden Zweige der Hyperbel unterscheiden sich dadurch von einander, dass für die Punkte des einen der Werth der constanten Differenz entgegengesetzt ist dem für die Punkte des andern Zweiges. Minuend der Differenz ist immer die Entfernung von demjenigen Brennpunkte, den der Zweig nicht umschliesst.

Was den Beweis der Umkehrung anlangt, so sei die Hyperbel ähnlich wie oben die Ellipse bestimmt, Q ein ihr nicht angehöriger Punkt, für den $FQ - F_1Q$ auch den gegebenen Werth hat (wo also $FQ > F_1Q$); schneidet der Strahl QF_1 den diesen Brennpunkt F_1 umschliessenden Zweig zweimal, dann liegt einer der Schnitte auf derselben Seite von F_1 wie Q , und dieser wird als P genommen und der Beweis wie oben geführt. Schneidet er aber jenen Zweig nur einmal und überdies nicht auf der Seite von F_1 , wo Q liegt, so nehme man als P den Schnitt mit dem andern Zweige, der dann auch auf der andern Seite liegt. $FQ - F_1Q = F_1P - FP$ führt zu: $FQ + FP = QP$, was nicht möglich ist.

Also alle Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten F und F_1 denselben (absoluten) Werth hat, bilden die Hyperbel, für welche F und F_1 die Brennpunkte sind und die Hauptaxe gleich der constanten Differenz ist.

149 Die constante Summe oder Differenz ist durch die Länge $RF_1 = FR_1 = 2a$ gegeben; da Q die Mitte von RF und M die Mitte von FF_1 , so ist $MQ = MQ^1 = a$; Q und Q^1 sind die Fusspunkte der aus den Brennpunkten auf die Tangenten herabgelassenen Perpendikel; wir erhalten daher den für Ellipse und Hyperbel gleichlautenden Satz:

Die Fusspunkte der aus den Brennpunkten auf die Tangenten eines Kegelschnitts herabgelassenen Perpendikel liegen auf einem Kreise, welcher die Hauptaxe zu seinem Durchmesser hat, also den Kegelschnitt in deren Scheiteln berührt (Fusspunktskreis).

Bei der Parabel geht der Fusspunktskreis in die Tangente am Scheitel über. Bei Ellipse und Hyperbel liefert diese Eigenschaft des Fusspunktskreises ein bequemes Mittel zur Zeichnung dieser Curven, da sie sich so aussprechen lässt:

Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einem Kreise, und läuft der eine Schenkel desselben durch einen festen Punkt, so umhüllt der andere Schenkel eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, und dieser Punkt ist ein Brennpunkt des Kegelschnitts.

Von jedem Punkte des Kreises kommen zwei Tangenten an die Curve, er ist für beide Fusspunkt, aber für verschiedene Brennpunkte; wird also ein Punkt des Kreises mit dem einen Brennpunkt verbunden, so ist die Senkrechte in ihm auf diesem Strahle eine der beiden Tangenten.

Es seien FQ und F_1Q_1 die Perpendikel von F und F_1 auf dieselbe Tangente, FQ' das aus F auf die parallele Tangente, so liegen alle Fusspunkte auf dem Kreise. Nun ist, wegen der Symmetrie in Bezug auf den Mittelpunkt, $F_1Q_1 = -FQ'$; also $FQ \cdot F_1Q_1 = -FQ \cdot FQ'$; $FQ \cdot FQ'$ ist aber die Potenz von F in Bezug auf den Kreis, also $c^2 - a^2 = \mp b^2$; daher $FQ \cdot F_1Q_1 = \pm b^2 = P_b$. Somit haben wir den Satz:

Das Rechteck aus den Abständen der Brennpunkte von einer Tangente des Kegelschnitts ist von constantem Inhalt für alle Lagen der Tangente, und zwar gleich dem Quadrate der halben Nebenaxe.

150 Aus der Congruenz der Dreiecke ROF_1 und FOR_1 folgt auch die Gleichheit der Winkel ORF_1 und ORF^1 oder OFP und OFP^1 ; also ergibt sich der schon für die Parabel gefundene Satz:

Von einem Brennpunkt des Kegelschnitts aus gesehen, erscheinen die Stücke auf zwei Tangenten von ihrem Schnittpunkt bis zu den Berührungspunkten unter gleichem Winkel (oder Nebenwinkel), oder anders ausgesprochen; der Strahl von einem Brennpunkt nach dem Schnittpunkt eines Tangentenpaares ist immer ein Halbierungsstrahl des Winkels zwischen den beiden von demselben Brennpunkte nach den Berührungspunkten hingehenden Strahlen.

Hieraus folgt wie bei der Parabel:

Das von zwei festen Tangenten eines Kegelschnitts auf einer veränderlichen dritten Tangente abgeschnittene Stück erscheint, von einem Brennpunkt aus gesehen, immer unter demselben Winkel (oder Nebenwinkel). Dieser Winkel ist insbesondere gleich demjenigen, unter welchem die Stücke auf den beiden festen Tangenten vom Schnittpunkt bis zu den Berührungspunkten, aus demselben Brennpunkte gesehen, erscheinen. Und umgekehrt:

Dreht sich ein Winkel von unveränderlicher Grösse um seinen festen Scheitel F , und begegnen die Schenkel x, x_1 zwei festen Geraden $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_1$ resp. in den Punkten \varkappa und \varkappa_1 , so hüllt die Verbindungslinie $\varkappa\varkappa_1$ einen Kegelschnitt ein, welcher die beiden Geraden $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_1$ berührt und den Punkt F zu einem seiner Brennpunkte hat.

Die Strahlen x und x_1 beschreiben gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel und \varkappa und \varkappa_1 projective Punktreihen; daher umhüllt $\varkappa\varkappa_1$ einen Kegelschnitt.

Die Tangenten an ihn aus dem festen Punkte F sind die Doppelstrahlen jener Strahlbüschel; diese gehen nach den absoluten Punkten (Nr. 62); mithin ist F Brennpunkt (Nr. 138).

Wir wollen noch eine allgemeine Eigenschaft des Kegelschnitts 151 angeben, welche aus der Grundeigenschaft der Brennpunkte hervorgeht und eine analoge Entstehungsweise von Ellipse und Hyperbel liefert, wie wir sie bei der Parabel durch Brennpunkt und Leitlinie gefunden haben. Construiren wir nämlich auch hier die Polaren der beiden Brennpunkte und nennen dieselben die den Brennpunkten zugehörigen *Leitlinien* (Directricen) des Kegelschnitts, so stehen dieselben, wenn F, F_1 die Brennpunkte und M der Mittelpunkt des Kegelschnitts ist, in denjenigen beiden Punkten senkrecht auf der Hauptaxe, deren Abstand von M gleich $\frac{a^2}{c}$ ist, weil der Fusspunkt zum zugehörigen Brennpunkte harmonisch ist in Bezug auf die Scheitel. Also treffen sie bei der Ellipse ($a > c$) die Axe ausserhalb der beiden Brennpunkte, bei der Hyperbel ($a < c$) zwischen den beiden Brennpunkten.

Es seien P und P' zwei Punkte des Kegelschnitts, s der Schnitt ihrer Sehne mit der zu F gehörigen Leitlinie \mathcal{Q} , so sind sF und die Polare von s in der zu F gehörigen Involution conjugirt und daher rechtwinklig. Wegen der vier harmonischen Punkte auf sPP' sind diese beiden Strahlen zu FP und FP' harmonisch; mithin werden die Winkel der letzteren durch sF und die Polare halbirt. Wir haben wegen der Halbirtung durch sF :

$$\frac{PF}{P'F} = \frac{sP}{sP'} = \frac{PQ}{P'Q'},$$

wo $PQ, P'Q'$ die Lothe auf \mathcal{Q} sind; also:

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{P'F}{P'Q'} = \text{const.}$$

Das Verhältniss der Entfernungen von einem Brennpunkt und seiner Leitlinie ist für alle Punkte eines Kegelschnitts das nämliche.

Fällt der Punkt in einen der Scheitel, etwa den S zwischen Brennpunkt und Leitlinie, so ist das Verhältniss, wegen der obigen Entfernung der Leitlinie von M , gleich $\frac{c}{a}$, die sogenannte *numerische Excentricität*, die man auch mit e bezeichnet: das Verhältniss der *linearen Excentricität* zur Hauptaxe.

Jenes constante Verhältniss ist also gleich der numerischen Excentricität $\frac{c}{a} = e$ und deshalb bei der Ellipse < 1 , bei der Hyperbel > 1 . Bei der Parabel ist es $= 1$, wie wir oben gesehen haben.

Wenn ein Punkt F , eine Gerade \mathcal{Q} und ein Verhältniss gegeben sind und jene als Brennpunkt und zugehörige Leitlinie genommen werden, so kann man sofort die Hauptaxe, ihre Scheitel, den Mittelpunkt und den andern Brennpunkt construiren, der Kegelschnitt ist eindeutig bestimmt. Alle seine Punkte haben das Entfernungsverhältniss, und keine anderen.

In der That, es seien f der Fusspunkt der Leitlinie \mathcal{Q} und S, S' die Scheitel, s, s' ihre Tangenten; bei der Ellipse liegt F zwischen S und S' und f ausserhalb jenseits S , bei der Hyperbel liegt f innerhalb und F ausserhalb jenseits S . Jedenfalls ist $\frac{FS}{fS} = \frac{FS'}{fS'} = e$. Wenn nun bei der Ellipse χ auf der Hauptaxe jenseits f liegt, so ist $F\chi > f\chi$; also ist $\frac{F\chi}{f\chi} > 1 > e$; liegt χ zwischen f und S , so ist $F\chi > FS$, $f\chi < fS$, also $\frac{F\chi}{f\chi} > \frac{FS}{fS}$; liegt χ jenseits S' , so ist $\frac{F\chi}{f\chi} = \frac{FS' + S'\chi}{fS' + S'\chi}$, also $> \frac{FS'}{fS'}$, weil dies < 1 . In allen diesen Fällen ist $F\chi > e \cdot f\chi$; d. h. die Senkrechte auf der Hauptaxe in χ wird von dem Kreise um F mit dem Radius $e \cdot f\chi$ nicht geschnitten. Wenn bei der Hyperbel χ zwischen

S und f liegt, dann ist es wie vorhin; liegt er zwischen f und S' , so ist $\frac{F\chi}{f\chi} = \frac{FS' - S'\chi}{fS' - S'\chi} > \frac{FS'}{fS'}$, weil dies nunmehr > 1 ist; wiederum ist in diesen Fällen $F\chi > e \cdot f\chi$. Auf den Parallelen zu \mathcal{Q} , welche im Falle der Ellipse ausserhalb des Parallelstreifens zwischen den Scheiteltangenten s, s' sich befinden, bei der Hyperbel in demselben, giebt es keine Punkte mit dem gegebenen Entfernungsverhältniss. Die andern Parallelen schneiden die Curve in zwei Punkten; wenn es überhaupt solche Punkte auf einer Parallelen zu \mathcal{Q} giebt, dann nur zwei, die Schnitte derselben mit einem gewissen Kreise. Folglich genügen nur die Punkte der Curve. Für die Parabel fällt die Untersuchung noch einfacher aus, und wir haben:

Der Ort aller derjenigen Punkte, deren Abstände von einem festen Punkte und einer festen Gerade in einem gegebenen Verhältnisse stehen, ist ein Kegelschnitt, welcher den Punkt zu einem Brennpunkt und die Gerade zu der ihm zugehörigen Leitlinie hat; er ist Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem das gegebene Verhältniss $> 1, = 1$ oder < 1 ist.

§ 37. Das Normalenproblem.

Die Aufgabe: „Aus einem beliebigen Punkte an einen Kegelschnitt 152 eine Normale zu ziehen“ ist vom vierten Grade; sie lässt sich zurückführen auf die später (§ 54) zu besprechende Fundamentalaufgabe: „Die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte zu finden“, welche vier Lösungen hat, einschliesslich der etwa imaginären. Diese Zurückführung ergibt sich aus unserer Erzeugung des Kegelschnitts mittelst projectiver Gebilde in einfachster Weise und liefert die eleganten von Chasles gegebenen Constructionen*, welche wir hier einfügen.

Es sei $K^{(2)}$ ein allgemeiner Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) und P irgend ein Punkt; wenn T eine veränderliche Tangente von $K^{(2)}$, t ihr Berührungspunkt und $M\tau$ die Parallele zu ihr durch den Mittelpunkt M ist, so sind Mt und $M\tau$ conjugirte Durchmesser des Kegelschnitts, welche bei der Bewegung von T eine Involution beschreiben, also zwei projective Strahlbüschel. Füllen wir aus P das Perpendikel auf die Tangente T oder die zu ihr parallele $M\tau$ und schneiden dies Perpendikel mit Mt in x , so wird bei der Bewegung von T der Punkt x einen Kegelschnitt beschreiben; denn Px durchläuft ein Strahlbüschel, welches mit dem von $M\tau$ beschriebenen gleich, also mit dem von Mt beschriebenen projectiv ist. Dieser Kegelschnitt

* Chasles, *Traité des Sections coniques* (Paris, 1862), n^o. 219.

ist eine gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$, die durch P und M geht, und deren Asymptoten den Axen des Kegelschnitts $K^{(2)}$ parallel laufen; denn wird Mt die eine und also $M\tau$ die andere Axe von $K^{(2)}$, so wird x unendlich fern auf der ersteren; und ebenso kommt der unendlich entfernte Punkt der zweiten Axe auf $H^{(2)}$; da also die unendlich entfernten Punkte des Kegelschnitts $H^{(2)}$ in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so ist er eine *gleichseitige Hyperbel*. Dieselbe wird näher noch bestimmt durch die Tangenten in M und P ; ziehen wir den conjugirten Durchmesser zu PM , so ist das aus P auf denselben gefällte Perpendikel die Tangente in P ; der Durchmesser, welcher zu dem auf MP senkrechten Durchmesser conjugirt ist, ist die Tangente in M . Wir kennen also eigentlich sechs Punkte der Hyperbel $H^{(2)}$, wodurch sie mehr als bestimmt ist.

Die gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ schneidet den Kegelschnitt $K^{(2)}$ in solchen Punkten, welche die Lösung der Aufgabe liefern. Denn ein solcher Schnittpunkt x besitzt die Eigenschaft, dass Px senkrecht steht auf dem zu Mx conjugirten Durchmesser; da aber x auf dem gegebenen Kegelschnitt $K^{(2)}$ selbst liegt, so steht Px senkrecht auf der Tangente in x , ist also eine Normale aus P an $K^{(2)}$. Es giebt — indem das spätere Ergebniss (von § 54) schon hier benutzt wird — vier Normalen aus P an die Curve $K^{(2)}$, von denen eine gerade Anzahl (0, 2, 4) imaginär sein kann.

153 Die vorige Lösung bedarf einer geringen Modification für den Fall, dass der gegebene Kegelschnitt $K^{(2)}$ eine Parabel ist. Sei wiederum T eine beliebige Tangente derselben und t ihr Berührungspunkt; so ziehen wir durch den gegebenen Punkt P die Parallele zur Leitlinie der Parabel, welche die Tangente T in s schneide. Der Höhenpunkt x des Dreiecks Pts ist der Schnittpunkt des Perpendikels aus P auf T und desjenigen aus t auf die Leitlinie; wir wollen nun den Ort des Punktes x bei der Bewegung der Tangente T ermitteln. Die Tangenten T schneiden die unendlich entfernte Gerade G_∞ , welche selbst Tangente der Parabel ist, in einer Punktreihe, die projectiv ist mit dem Parallelstrahlen-Büschel, welches die durch den veränderlichen Berührungspunkt t zu der Parabelaxe gezogenen Parallelen bilden, die sämtlich durch den Berührungspunkt t_∞ von G_∞ gehen. Dieselbe Punktreihe auf G_∞ ist aber auch projectiv mit dem von Px beschriebenen Strahlbüschel, weil Px auf T allemal senkrecht steht, dieser Strahlbüschel also nach einer ebenfalls auf G_∞ gelegenen Punktreihe geht, welche zu jener involutorisch-projectiv ist (mit ihr die Involution I_∞ bildet). Folglich ist x der Schnittpunkt entsprechender Strahlen zweier projectiver Strahlbüschel (P) und (t_∞), also Punkt

einer Hyperbel, die durch den unendlich entfernten Punkt der gegebenen Parabel geht. Es ist leicht, die Tangenten dieser Hyperbel in den Punkten P und t_∞ zu bestimmen, d. h. die dem gemeinschaftlichen Strahle Pt_∞ in beiderlei Sinn entsprechenden Strahlen. Wird nämlich T die Scheiteltangente der Parabel, so ist das Perpendikel auf dieselbe Pt_∞ , folglich die Parabelaxe, das Loth aus dem Scheitel, in den t fällt, auf die Leitlinie, die Tangente in t_∞ , die eine Asymptote der Hyperbel. Trifft ferner Pt_∞ die Parabel in t_0 , und ist T_0 die Tangente der Parabel in t_0 , so wird das Perpendikel aus P auf T_0 die Tangente der Hyperbel im Punkte P sein.

Kommt T nach G_∞ , so ist der Berührungspunkt t_∞ der Schnittpunkt (T, G_∞) und conjugirt zu ihm in I_∞ ist der unendlich ferne Punkt der Leitlinie; nach diesem Punkte geht das Perpendikel aus P auf T in diesem Falle, also ist es parallel zur Leitlinie; während das Loth aus t auf dieselbe mit t sich immer weiter entfernt und, wenn t nach t_∞ gekommen ist, mit G_∞ sich vereinigt; der Schnittpunkt x wird also der unendlich entfernte Punkt der Leitlinie. Die unendlich fernen Punkte der Hyperbel liegen daher in den Richtungen der Axe und der Leitlinie; woraus folgt, dass sie eine *gleichseitige Hyperbel* sein muss. Sie ist durch drei Punkte: die beiden unendlich fernen und P , und die eine Asymptote, nämlich die Parabelaxe, und die Tangente von P vollständig bestimmt.

Diese Hyperbel $H^{(2)}$ schneidet die Parabel $P^{(2)}$ ausser im unendlich fernen Punkte t_∞ noch dreimal; ist x einer von diesen Punkten, so fällt er, da der Durchmesser xtt_∞ nur einen endlichen Schnittpunkt mit $P^{(2)}$ hat, mit t zusammen; also ist Pt senkrecht auf T oder Normale von $P^{(2)}$. *Daher kommen von einem Punkte an eine Parabel drei Normalen*, von denen jedoch zwei imaginär sein können.

Das vorgelegte Problem lässt noch eine zweite Lösung zu, die 154 auf folgender Betrachtung beruht:

Es sei wieder ein allgemeiner Kegelschnitt $K^{(2)}$ gegeben; ein Strahl l drehe sich um P ; der Pol p beschreibt eine Punktreihe auf der Polare \mathcal{Q} von P , welche zum Büschel (l) projectiv ist (Nr. 102). Fällt man aus dem jedesmaligen p das Perpendikel auf den entsprechenden Strahl l , so wird dasselbe eine Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ umhüllen. Denn diese Perpendikel erzeugen auf G_∞ die Punktreihe, welche mit der vom Büschel (l) eingeschnittenen die Involution I_∞ bildet, also zu letzterer, zum Büschel und demnach auch zur Reihe der Pole p projectiv ist; und die Perpendikel sind die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte, umhüllen einen Kegelschnitt, der eine Parabel ist, weil der eine Träger die unendlich entfernte Gerade ist.

Wird l zu einer Axe von $K^{(2)}$ parallel, so fällt p auf die andere Axe und das Perpendikel ist diese. Die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ berührt also die Axen von $K^{(2)}$. Ferner sind auch die Axen der Involution, welche dem Punkte P in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$ zugehört, Tangenten der Parabel; und da sowohl jene als auch diese Tangenten rechtwinklig sind, so sind P und der Mittelpunkt M des Kegelschnitts $K^{(2)}$ Punkte der Leitlinie, PM also die Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$. Der Pol t des zu \mathcal{Q} senkrechten Strahls durch P , welcher auf \mathcal{Q} liegt, ist der Berührungspunkt der \mathcal{Q} , des Trägers der zweiten Punktreihe, mit $\mathfrak{P}^{(2)}$. Fällt man aus t auf die Leitlinie PM das Perpendikel, vom Fusspunkt desselben wiederum das Perpendikel auf die Tangente \mathcal{Q} und verlängert letzteres um sich selbst bis F , dann ist F der Brennpunkt der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ und diese mithin durch Leitlinie und Brennpunkt völlig bestimmt.

Ist insbesondere eine Tangente der so construirten Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ zugleich eine Tangente des Kegelschnitts $K^{(2)}$, so kommt ihr die Eigenschaft zu, dass das aus P auf sie herabgelassene Perpendikel die Polare eines ihrer Punkte ist, also nothwendig durch den Berührungspunkt geht; ein solches Perpendikel ist daher eine Normale des Kegelschnitts $K^{(2)}$, die durch P geht. Es giebt also so viele Normalen aus P an den Kegelschnitt $K^{(2)}$, als die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$ gemeinschaftliche Tangenten haben, d. h. vier (§ 54). Die Berührungspunkte dieser gemeinschaftlichen Tangenten mit dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ sind die Fusspunkte der von P auf den gegebenen Kegelschnitt $K^{(2)}$ herabzulassenden Normalen.

Ist der gegebene Kegelschnitt $K^{(2)}$ selbst eine Parabel, so fällt eine von den vier Lösungen des allgemeinen Falls fort, da zwei Parabeln die unendlich entfernte Gerade G_∞ zur gemeinschaftlichen Tangente, mithin nur noch drei andere haben. Es gehen daher durch einen Punkt P nur drei Normalen einer Parabel.

Zwischen den beiden im Vorigen enthaltenen Lösungen des Normalenproblems durch die gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ und die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ besteht ein naher Zusammenhang, der aus folgender Bemerkung hervorgeht:

Sind Mt und $M\tau$ ein Paar conjugirter Durchmesser des Kegelschnitts $K^{(2)}$, und fällen wir aus P das Perpendikel auf $M\tau$, welches Mt in x trifft, so ist der Ort von x die gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$. Construiren wir jetzt die Polare X von x in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$, indem wir die Pole von Px und Mx ermitteln. Der Pol von Mx oder Mt ist der unendlich entfernte Punkt der Gerade $M\tau$, also ist die Polare von x parallel zu $M\tau$ oder senkrecht zu Px . Der Pol von Px liegt auf der Polare von P ; die Polare von x ist also

das Perpendikel X aus dem Pol von Px oder l auf diesen Strahl Px ; dies Perpendikel ist eine Tangente der oben betrachteten Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$. Während der Punkt x die gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ durchläuft, umhüllt seine Polare X die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, d. h.:

Die gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ und die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ sind Polarfiguren von einander in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt $K^{(2)}$.

Hiermit tritt nun der ganze Zusammenhang beider Lösungen noch deutlicher ans Licht. Da die gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ durch den Mittelpunkt der Basis $K^{(2)}$ geht, so muss ihre Polarfigur $\mathfrak{P}^{(2)}$ die unendlich entfernte Gerade zur Tangente haben, also Parabel sein. Die Polaren der Schnittpunkte von $H^{(2)}$ und $K^{(2)}$ sind die Tangenten in diesen Punkten von $K^{(2)}$ und daher gemeinschaftliche Tangenten von $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $K^{(2)}$.

Für die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ lassen sich leicht noch einige andere Tangenten angeben. Kommt p in einen der Schnitte von \mathcal{Q} mit $K^{(2)}$, so wird l die Tangente und das Perpendikel die Normale; $\mathfrak{P}^{(2)}$ berührt also die Normalen von $K^{(2)}$ in den Schnitten a, b mit \mathcal{Q} . Es sei m die Mitte der Sehne ab , der Schnitt von \mathcal{Q} mit dem durch P gehenden Durchmesser von $K^{(2)}$, welcher dem zu \mathcal{Q} parallelen conjugirt ist; die Polare von m ist dann zu letzterem Durchmesser, also zu \mathcal{Q} parallel. Die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ tangirt daher die Senkrechte auf \mathcal{Q} in der Mitte der Sehne ab . Wenn \mathcal{Q} einer Leitlinie von $K^{(2)}$ in \mathfrak{P} begegnet, so ist die Polare von \mathfrak{P} im zugehörigen Brennpunkt F senkrecht zu $F\mathfrak{P}$, andererseits geht sie durch P ; $F\mathfrak{P}$ ist das Loth aus \mathfrak{P} . Die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ berührt also auch die Perpendikel auf den Geraden PF, PF_1 in den Brennpunkten. Die oben erwähnten Axen der P zugehörigen Involution sind die Halbierungslinien der Winkel von PF und PF_1 .

Wir haben nun sechs Tangenten von $\mathfrak{P}^{(2)}$, welche fest bleiben, wenn $K^{(2)}$ in einen confocalen Kegelschnitt übergeht, P aber festgehalten wird, nämlich die beiden Axen, die eben genannten Halbierungslinien und jene Perpendikel auf FP, F_1P . Also bleibt auch die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ fest, vier von diesen Tangenten bestimmen sie mit G_∞ . \mathcal{Q} verändert sich und umhüllt sie.

Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten umhüllen eine Parabel, welche die genannten sechs Geraden tangirt und den durch P gehenden Durchmesser zur Leitlinie hat.

§ 38. Der Krümmungshalbmesser. Inhalt des Parabelsegments.

Obwohl die Bestimmung des Krümmungshalbmessers eigentlich nicht in das Gebiet von Untersuchungen descriptiver Natur, mit denen wir es vorzugsweise zu thun haben, gehört, so glauben wir doch eine

von *Steiner* angegebene Construction des Krümmungshalbmessers für den Kegelschnitt nicht unterdrücken zu dürfen, weil dieselbe zu den einfachsten und elegantesten gehört und wesentlich auf der Entstehung des Kegelschnitts durch projective Gebilde, insbesondere auf der Erzeugung der Parabel durch ähnliche Punktreihen beruht.

Unter dem Krümmungshalbmesser versteht man bekanntlich diejenige Strecke auf der Normale einer Curve, welche von ihrem Fusspunkte bis zu dem Schnittpunkte der unendlich nahen Normale reicht, und die Grenzlage des Schnittpunktes zweier unendlich naher Normalen heisst der Krümmungsmittelpunkt, der um ihn mit dem Krümmungshalbmesser als Radius beschriebene Kreis der Krümmungskreis; er ist unter allen Kreisen, welche in dem Punkte der Curve dieselbe Tangente haben, derjenige, welcher sich ihr am nächsten anschliesst, sie in diesem Punkte zugleich berührt und schneidet, durch drei unendlich nahe Punkte der Curve geht. Der reciproke Werth des Krümmungshalbmessers heisst die Krümmung oder genauer das Krümmungsmaass der Curve.

Für den Kegelschnitt sind aus dieser allgemeinen Definition verschiedene Constructionen des Krümmungshalbmessers abgeleitet worden; diejenige, welche hier mitgetheilt werden soll, gilt für Ellipse und Hyperbel in gleicher Weise und modificirt sich nur wenig für den Fall der Parabel. Wir nehmen zunächst jenen allgemeinen Fall. Nach Nr. 126 1) trifft die Normale eines Punktes A der Ellipse die beiden Axen in zwei solchen Punkten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , dass das Verhältniss der Abschnitte $\frac{A\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} = \frac{b^2}{a^2}$ constant ist und die beiden Schnittpunkte \mathfrak{A} und \mathfrak{B} auf derselben Seite von A liegen; bei der Hyperbel liegen die beiden Schnittpunkte auf entgegengesetzten Seiten vom Hyperbelpunkte, und das Verhältniss der Abschnitte $\frac{A\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} = -\frac{b^2}{a^2}$ ist ebenfalls constant (Nr. 129). Diese Eigenschaft der Normale zeigt unmittelbar in dem einen, wie in dem andern Fall, dass, wenn wir in zwei beliebigen Punkten A und A_1 die Normalen construiren, welche die Axen des Kegelschnitts in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ treffen, allemal $\frac{A\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} = \frac{A_1\mathfrak{A}_1}{A_1\mathfrak{B}_1}$ sein muss, dass also die beiden Normalen durch die Sehne AA_1 und die Kegelschnittaxen ähnlich geschnitten werden, und hieraus folgt (Nr. 78):

Die Normalen in zwei beliebigen Punkten eines Kegelschnitts, die Sehne derselben und die beiden Axen sind fünf Tangenten einer Parabel.

Wenn wir nun den einen Kegelschnittpunkt A festhalten und den andern allmählich in den ersten hineinrücken, so wird die Sehne AA_1 in die Tangente für A übergehen, und die beiden zusammenfallenden

Normalen werden zu ihrem Schnittpunkt den Berührungspunkt mit derjenigen Parabel erhalten, welche Tangente und Normale, sowie die beiden Kegelschnittaxen berührt; wir haben also den Satz:

Hat man in einem Punkte des Kegelschnitts Tangente und Normale construirt, so giebt es eine bestimmte Parabel, welche dieselben und die beiden Kegelschnittaxen berührt; der Berührungspunkt mit der Normale ist der Krümmungsmittelpunkt für den angenommenen Punkt des Kegelschnitts.

Hieraus ergibt sich eine sehr einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes. Tangente und Normale in A sind zwei rechtwinklige Tangenten dieser Parabel, und die beiden Kegelschnittaxen, welche sich im Mittelpunkte M schneiden, sind es ebenfalls, folglich ist MA die Leitlinie der Parabel und ihr Pol in Bezug auf die Parabel der Brennpunkt derselben. Da aber MA eine Diagonale des von den vier Tangenten der Parabel gebildeten Vierseits ist, so ist ihr Pol (Nr. 104) der Schnittpunkt der beiden andern Diagonalen, d. h. $F = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}^1, \mathfrak{A}^1\mathfrak{B})$, worin nunmehr bei der Ellipse $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Schnitte der Normale mit den Axen sind, $\mathfrak{A}^1, \mathfrak{B}^1$ diejenigen der Tangente, bei der Hyperbel umgekehrt; damit die Figur 58 für beide Fälle benutzt werden kann. Der Krümmungsmittelpunkt ist leicht zu finden, da die Polare von A durch F geht und senkrecht auf AF stehen muss, zugleich aber die Normale des Kegelschnitts in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkte (dem Berührungspunkte der Parabel) trifft; wir haben hiernach folgende Construction:

*Treffen Tangente und Normale eines Punktes A des Kegelschnitts die eine Axe desselben in \mathfrak{A} und \mathfrak{A}^1 , die andere in \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^1 , errichtet man in dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^1, \mathfrak{A}^1\mathfrak{B}) = F$ auf der Gerade AF die Senkrechte, so trifft dieselbe die Normale des Kegelschnitts in dem Krümmungsmittelpunkte.**

Für die Ellipse ist also K , für die Hyperbel K^1 Krümmungsmittelpunkt. Die vier Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}^1, \mathfrak{B}^1$ liegen so, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern bestimmten Dreiecks ist, und die drei Punkte A, M, F sind die Fusspunkte der Höhen oder die drei Diagonalpunkte ihres vollständigen

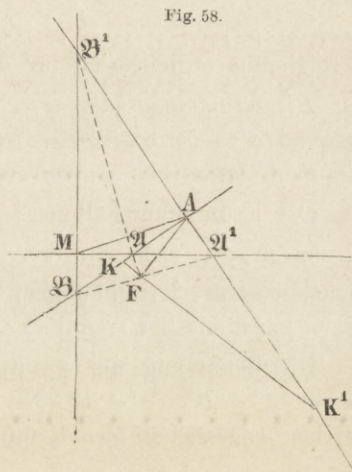


Fig. 58.

* Eine andere Construction des Krümmungskreises siehe § 48, Ende.

Vierecks; aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $AF\mathfrak{A}$ und $A\mathfrak{B}M$ folgt (absolut):

$$\frac{A\mathfrak{A}}{AF} = \frac{AM}{A\mathfrak{B}} \quad \text{oder} \quad A\mathfrak{A} \cdot A\mathfrak{B} = AM \cdot AF.$$

Nun ist, wenn wir den Halbmesser $MA = A$ setzen und das Quadrat des conjugirten Halbmessers $\pm B^2$ ist, für beide Fälle absolut (Nr. 126, 129):

$$A\mathfrak{A} \cdot A\mathfrak{B} = B^2,$$

also:

$$AF = \frac{B^2}{A}.$$

Da aber FKK^1 senkrecht auf FA steht und der Winkel AKF , bzw. AK^1F gleich ist dem spitzen Winkel zwischen den beiden conjugirten Halbmessern A und B , welchen wir mit φ bezeichnen wollen — $MA\mathfrak{B}^1$ bei der Ellipse, $MA\mathfrak{A}$ bei der Hyperbel —, so ergibt sich für den Krümmungshalbmesser r im Punkte A :

$$r \cdot \sin \varphi = \frac{B^2}{A}.$$

Benutzen wir die Relation I. in Nr. 123 für die conjugirten Durchmesser $AB \cdot \sin \varphi = ab$, die ja, wenn B^2 und b^2 durch $-B^2$ und $-b^2$ ersetzt werden, auch für die Hyperbel gilt, so können wir den Krümmungshalbmesser auch so ausdrücken:

$$r = \frac{B^3}{ab}.$$

Hieraus ergibt sich für die Ellipse folgender Satz:

Die Krümmungshalbmesser für zwei solche Punkte der Ellipse, welche Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser sind, verhalten sich umgekehrt wie die Cuben dieser Durchmesser.

Die Krümmungshalbmesser in den Scheiteln der Hauptaxe sind $\frac{b^2}{a}$, die in den Scheiteln der Nebenaxe der Ellipse $\frac{a^2}{b}$; man erkennt leicht, dass der Krümmungsmittelpunkt eines von jenen Scheiteln demselben harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf die beiden Brennpunkte.

157 Die Benutzung der zweiten Relation für die conjugirten Durchmesser $A^2 \pm B^2 = a^2 \pm b^2$ (Nr. 124, 129) führt zu einer bemerkenswerthen Eigenschaft des Krümmungshalbmessers.

Aus ihr folgt:

$$a^2 \pm b^2 = A^2 \pm Ar \sin \varphi = A^2 - 2A \cdot \frac{r}{2} \cos(90^\circ \pm \varphi).$$

Nun ist aber bei der Ellipse $90^\circ + \varphi$, bei der Hyperbel $90^\circ - \varphi$ der Winkel, den die nach aussen gezogene Normale mit dem Halbmesser MA bildet; denken wir uns mithin auf derselben die Strecke $A\mu = \frac{r}{2}$ aufgetragen, so ist:

$$M\mu^2 = MA^2 + A\mu^2 - 2MA \cdot A\mu \cdot \cos(90^\circ \pm \varphi),$$

also:

$$M\mu^2 = a^2 \pm b^2 + \frac{r^2}{4}.$$

Nach Nr. 131 ist $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ gleich dem Radius des Directorkreises, welcher der Ort der Scheitel aller dem Kegelschnitte umgeschriebenen rechten Winkel ist; es muss daher derjenige Kreis, welcher um μ mit dem halben Krümmungshalbmesser als Radius beschrieben wird, den Directorkreis rechtwinklig schneiden, weil die Summe der Quadrate ihrer Radien gleich dem Quadrate des Abstandes ihrer Mittelpunkte ist; wir erhalten hiernach folgende Eigenschaft des Krümmungshalbmessers:

*Wenn man von den Krümmungsradien eines gegebenen Kegelschnitts jeden nach entgegengesetzter Seite hin um sich selbst verlängert und über den Verlängerungen als Durchmesser die Kreise beschreibt, so schneiden alle diese Kreise den Directorkreis rechtwinklig.**

Bezeichnen wir den Directorkreis mit $D^{(2)}$, so kommt es hiernach, um den Krümmungsradius für einen gegebenen Punkt A des Kegelschnitts zu finden, nur darauf an, den Kreis zu construiren, welcher den Kegelschnitt in A berührt und $D^{(2)}$ rechtwinklig schneidet; wenn man den Durchmesser dieses Kreises über A hinaus um sich selbst verlängert, so erhält man den Krümmungshalbmesser seiner Grösse und Lage nach. Ist R der Radius von $D^{(2)}$, so ist nach dem Obigen:

$$\overline{\mu M^2} - \overline{\mu A^2} = R^2;$$

wenn das Perpendikel aus μ auf MA den Fusspunkt μ^1 hat, so ist auch:

$$\overline{\mu^1 M^2} - \overline{\mu^1 A^2} = R^2,$$

also:

$$(\mu^1 M + R)(\mu^1 M - R) = \overline{\mu^1 A^2};$$

also ist μ^1 die Mitte zwischen dem Punkte A und dem Fusspunkt seiner auf MA senkrechten Polare in Bezug auf den Kreis $D^{(2)}$; die Polare steht daher doppelt so weit von A ab, wie μ^1 , trifft also $A\mu$ in einem Punkte B , für welchen $AB = 2A\mu$, d. h. gleich dem Krümmungshalbmesser ist. Mithin erhalten wir folgende Construction für den Krümmungshalbmesser:

In dem Punkte A des Kegelschnitts errichte man die Normale, construire die Polare von A in Bezug auf den Directorkreis $D^{(2)}$; sie treffe die Normale in B , dann ist AB gleich der Länge des Krümmungshalbmessers, und die nach der entgegengesetzten Seite hin abgetragene Strecke $AK = AB$ hat zu ihrem Endpunkt den Krümmungsmittelpunkt.

* Steiner: „Ueber eine Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte“, Journal für Mathematik Bd. 30 S. 271; Gesamm. Werke Bd. II S. 341.

Wir übergehen die geringe Modification, welche eintritt, wenn für den Fall der Hyperbel der Directorkreis $D^{(2)}$ imaginär ist (wo man sich dann des Directorkreises der conjugirten Hyperbel zu bedienen und einen Kreis zu suchen hat, welcher von diesem im Durchmesser geschnitten wird).

158 Wir kehren zu der Parabel von Nr. 156 zurück und nehmen in der Figur 58 $A\mathcal{A}\mathcal{B}$ als Normale, also den Fall der Ellipse. Wir schneiden von den Tangenten dieser Parabel die Normale und die eine Axe mit der Tangente, der andern Axe und der Normale und haben:

$$\frac{\mathcal{B}A}{\mathcal{B}K} = \frac{M\mathcal{A}^1}{M\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{A}A}{\mathcal{A}K} = \frac{M\mathcal{B}^1}{M\mathcal{B}};$$

nun ist, weil $M\mathcal{A}\mathcal{B}$ und $M\mathcal{B}_1\mathcal{A}_1$ ähnlich sind, $\frac{M\mathcal{A}}{M\mathcal{B}} = \frac{M\mathcal{B}^1}{M\mathcal{A}^1}$ oder richtiger $-\frac{M\mathcal{B}^1}{M\mathcal{A}^1}$, weil $M\mathcal{A} \cdot M\mathcal{A}^1$ und $M\mathcal{B} \cdot M\mathcal{B}^1$ verschiedene Vorzeichen haben; also:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}AK) = -\frac{M\mathcal{A}^2}{M\mathcal{B}^2} = \frac{\mathcal{A}p}{\mathcal{B}p},$$

wo p der Fusspunkt des Loths aus M auf die Normale ist; ist daher u_∞ der unendlich ferne Punkt der Normale, so hat man:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}AK) = (\mathcal{A}\mathcal{B}pu_\infty) = (\mathcal{B}\mathcal{A}u_\infty p).$$

Wenn demnach auf der Normale einer Ellipse (oder Hyperbel) die Involution construirt wird, in welcher der Fusspunkt der Mittelpunkt und die Schnitte mit den Axen conjugirte Punkte sind, so ist in derselben der Krümmungsmittelpunkt dem Fusspunkte des Loths aus dem Mittelpunkte des Kegelschnitts auf die Normale conjugirt.

Daraus folgt: $A\mathcal{A} \cdot A\mathcal{B} = AK \cdot Ap$, oder $r = \frac{B^2}{A \sin \varphi} = \frac{B^3}{ab}$.

159 Wir wollen nun für die *Parabel* die entsprechende Construction des Krümmungshalbmessers ableiten. Hier lässt uns die Eigenschaft der Normale, dass das Verhältniss ihrer Abschnitte durch die Axen constant bleibt, im Stich, weil eine der Axen im Unendlichen liegt. An ihre Stelle tritt aber eine Eigenschaft der Normale der Parabel, welche unmittelbar aus der Entstehung derselben durch Brennpunkt und Leitlinie hervorgeht.

Sei P ein beliebiger Punkt der Parabel (Fig. 59), deren Brennpunkt F und Leitlinie \mathcal{Q} ist, sei Q der Fusspunkt des aus P auf die Leitlinie gefällten Perpendikels, also:

$$PQ = PF,$$

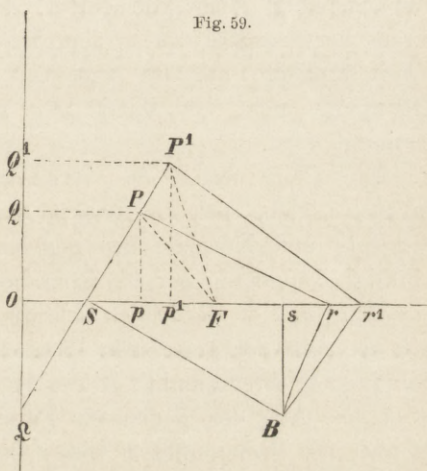
so halbirt die Tangente in P die Strecke FQ und steht auf ihr senkrecht. Folglich ist die Normale in P parallel FQ ; trifft daher diese

Normale die Parabelaxe in r , so ist $Fr = QP$ oder, wenn p und O die Fusspunkte des Perpendikels aus P und der Leitlinie auf der Axe sind, $Op = Fr$; hieraus folgt, wenn wir das Stück pF auf beiden Seiten hinzufügen, $OF = pr = \text{const.}$; also:

Das aus einem Punkte der Parabel auf die Axe gefällte Perpendikel und die Normale dieses Parabelpunktes schneiden auf der Axe eine Strecke von constanter Länge aus, welche gleich dem Abstände des Brennpunktes von der Leitlinie ist.

Construiren wir für einen zweiten Punkt P^1 der Parabel die Normale P^1r^1 und das Perpendikel auf die Axe P^1p^1 , so ist also $pr = p^1r^1$, oder $pp^1 = rr^1$; trifft nun die Parabelsehne PP^1 die Axe in S und ist B der Gegenpunkt zu P auf dem Kreise PSr und s der Fusspunkt des Lothes aus B auf die Axe, so ist $Sp = sr$. In B schneiden sich die Lothe, die in S auf SP , in r auf rP errichtet sind. Umgekehrt, wenn wir denjenigen Punkt s auf der Axe bestimmen, für welchen der Grösse und Lage nach $sr = Sp$ ist, sodann in s auf der Axe und in S auf SP die Perpendikel errichten, so liegt der Schnittpunkt B derselben auch in demjenigen Perpendikel, welches in r auf rP errichtet wird. Da nun $pp^1 = rr^1$, also $Sp^1 = sr^1$, so folgt, dass auch das in r^1 auf r^1P^1 errichtete Perpendikel durch denselben Punkt B gehen muss. Es befinden sich also die vier Scheitel von rechten Winkeln S, s, r, r^1 in einer Geraden, und von den Schenkeln läuft je einer durch den festen Punkt B ; die vier andern umhüllen daher eine Parabel (Nr. 145), welche B zum Brennpunkte und die Gerade Ss zur Tangente im Scheitel s hat; wir haben demnach folgenden Satz:

Die Normalen in zwei beliebigen Punkten einer Parabel, die Parabelsehne zwischen denselben und die Parabelaxe sind vier Tangenten einer bestimmten neuen Parabel, welche die Axe der ersten zur Scheiteltangente, ihren unendlich entfernten Punkt also in der rechtwinkligen Richtung zu derjenigen hat, in welcher der unendlich entfernte Punkt der gegebenen Parabel liegt.



Dieser Satz entspricht vollständig dem oben für Ellipse und Hyperbel aufgestellten; aus ihm geht die Construction des Krümmungshalbmessers für jeden Punkt der Parabel hervor, wenn wir die beiden Normalen einander unendlich nahe rücken. Die Parabelsehne geht dann in die Tangente über, und der Schnittpunkt der beiden unendlich nahen Normalen, d. h. der Berührungspunkt mit der neuen Parabel wird der Krümmungsmittelpunkt, also:

Hat man in einem Punkte der Parabel Tangente und Normale construirt, so giebt es eine völlig bestimmte neue Parabel, welche diese beiden Geraden berührt und die Parabelaxe zu ihrer Scheiteltangente hat; diese zweite Parabel berührt die Normale im Krümmungsmittelpunkt.

Wenn zwei Tangenten und die Scheiteltangente gegeben sind, so ist die Parabel vollständig und eindeutig bestimmt; denn die Scheiteltangente liefert den unendlich fernen Punkt der Parabel in senkrechter Richtung zu ihr; und wir haben dann vier Tangenten und den Berührungspunkt einer von ihnen, der G_∞ . Es geht dies aber auch daraus hervor, dass das in dem Schnittpunkte jeder Tangente mit der Scheiteltangente auf der ersteren errichtete Perpendikel durch den Brennpunkt geht und durch zwei solche Perpendikel der Brennpunkt bestimmt wird.

Die Construction des Krümmungsradius für einen Punkt der Parabel ergibt sich aus unserm Satze sehr einfach. Da nämlich die Tangente und Normale des gegebenen Parabelpunktes A zwei rechtwinklige Tangenten der Hülfsparabel sind, so liegt A in der Leitlinie derselben; und da die in den Schnittpunkten von Tangente und Normale mit der Axe der gegebenen Parabel auf jenen errichteten Perpendikel sich in dem Brennpunkte B der Hülfsparabel schneiden, so wird AB durch die Axe der gegebenen Parabel halbirt. Der Halbirungspunkt ist aber der Brennpunkt F dieser Parabel, weil er auch das Stück der Axe halbirt, welches durch Tangente und Normale ausgeschnitten wird; das in B auf BA errichtete Perpendikel trifft die Normale in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt K ; denn BK ist die Polare von A für die Hülfsparabel. Also:

Um für den Punkt A einer Parabel den Krümmungshalbmesser zu finden, construirt man die Normale in A , verbinde A mit dem Brennpunkt F und verlängere AF über F hinaus um sich selbst bis B , errichte in B auf AB das Perpendikel; sein Schnitt K mit der Normale ist der Krümmungsmittelpunkt und AK der Krümmungshalbmesser für den Parabelpunkt A .

Das in F auf AF errichtete Perpendikel halbirt offenbar die Strecke AK ; verlängern wir daher die Normale bis zum Schnittpunkt

mit der Leitlinie und berücksichtigen die Eigenschaft der Parabel, dass AF gleich dem Abstände des Parabelpunktes A von der Leitlinie ist, sowie die Gleichheit der Winkel, welche die Normale mit dem Strahl nach dem Brennpunkte AF und der Parallelen zur Parabelaxe bildet, so folgt:

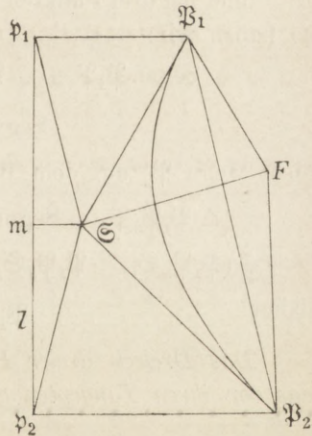
Der Krümmungshalbmesser für einen Punkt A der Parabel ist doppelt so gross, als das Stück, welches auf der Normale von A aus durch die Leitlinie abgeschnitten wird, aber nach der andern Seite gerichtet.

Dies befindet sich in Uebereinstimmung mit der oben (Nr. 157) angegebenen Eigenschaft des Krümmungshalbmessers für Ellipse und Hyperbel; der dort mit $D^{(2)}$ bezeichnete Kreis geht bei der Parabel in die Leitlinie über. Der Mittelpunkt des Kreises, welcher die Parabel in A berührt und zu seinem Radius den halben Krümmungsradius hat, der von A aus auf der Normale der Parabel nach aussen abgetragen wird, muss in der Leitlinie selbst liegen. Die Leitlinie schneidet daher alle solchen Kreise rechtwinklig.

An diese Massbeziehungen möge die Bestimmung des Inhalts eines 160 Parabelsegments angeschlossen werden.

Von zwei Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ einer Parabel seien (Fig. 60) auf die Leitlinie l die Lothe $\mathfrak{P}_1 p_1, \mathfrak{P}_2 p_2$ herabgelassen; wenn F der Brennpunkt und \mathfrak{S} der Schnittpunkt der Tangenten in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ ist, so ist $\mathfrak{S} p_1 = \mathfrak{S} F = \mathfrak{S} p_2$. Daher liegt der Fusspunkt m des Lothes aus \mathfrak{S} auf l in der Mitte von $p_1 p_2$. Der Inhalt des Trapezes $p_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 p_2$ ist $(\mathfrak{P}_1 p_1 + \mathfrak{P}_2 p_2) \cdot \frac{p_1 p_2}{2} = \mathfrak{P}_1 p_1 \cdot p_1 m + \mathfrak{P}_2 p_2 \cdot p_2 m$, also gleich der doppelten Dreieckssumme $p_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{S} + p_2 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{S}$. Nun ist $p_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{S} \cong \mathfrak{S} \mathfrak{P}_1 F, p_2 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{S} \cong \mathfrak{S} \mathfrak{P}_2 F$; daher:

Fig. 60.



$$\text{Trapez } p_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 p_2 = 2 \cdot \text{Viereck } F \mathfrak{P}_1 \mathfrak{S} \mathfrak{P}_2.$$

Denken wir uns jetzt den Parabelbogen $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ durch eine Reihe von Punkten erfüllt, von denen je zwei auf einander folgende durch eine Sehne verbunden werden, so erhalten wir eine Reihe von Trapezen, deren Summe doppelt so gross ist als die einer Reihe von Vierecken, welche eine gemeinsame Ecke in F haben und von denen die zwei in F zusammenstossenden Seiten nach zwei benachbarten von jenen Parabelpunkten gehen, während die beiden andern die Tangenten in denselben sind. Geht man zur Grenze, so ergibt sich:

$$p_1 p_2 \widehat{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2} = 2 F \widehat{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2}.$$

Der Parabelsector $F\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ ist halb so gross als das zum Theil krummlinige Viereck, das von dem Parabelbogen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, den beiden Lothen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{P}_2\mathfrak{p}_2$ und der Leitlinie eingeschlossen wird.

Zieht man dies von der obigen Gleichung ab, so erhält man:

$$\text{Segment } \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = 2 \cdot \mathfrak{C}\widehat{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}.$$

Ein Parabelsegment ist daher doppelt so gross als das theilweise krummlinige Dreieck, das vom Bogen des Segments und den Tangenten der Endpunkte eingeschlossen wird, und folglich gleich zwei Dritteln des geradlinigen Dreiecks, das diese Tangenten mit der Sehne des Segments bilden.

Daraus folgt wieder, dass das Segment ein Drittel des Dreiecks ist, das von der Sehne, der Tangente des einen Endpunkts und dem durch den andern gehenden Durchmesser eingeschlossen wird.

In dieser Form hat Archimedes diesen schönen Satz ausgesprochen.*

Aus $\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{p}_2 = 2\mathfrak{P}_1F\mathfrak{P}_2\mathfrak{C}$ folgt: $\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1F\mathfrak{P}_2\mathfrak{p}_2 = 2(\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1F + \mathfrak{C}\mathfrak{P}_2F) + \mathfrak{P}_1F\mathfrak{P}_2$ oder $\mathfrak{P}_1F\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1F\mathfrak{P}_2\mathfrak{p}_2 - (\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1F\mathfrak{C} + \mathfrak{p}_2\mathfrak{P}_2F\mathfrak{C}) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{C}\mathfrak{p}_2$.

Folglich ist das geradlinige Dreieck, welches den Brennpunkt und zwei Parabelpunkte zu Ecken hat, ebenso gross als dasjenige, dessen Ecken der Schnittpunkt der Tangenten dieser Punkte und die Fusspunkte der aus ihnen auf die Leitlinie gefüllten Lothe sind.

Sind bei drei Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ die Tangentenschnitte $\mathfrak{C}_{12}, \mathfrak{C}_{13}, \mathfrak{C}_{23}$, so haben wir:

$$\text{Segm. } \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \frac{2}{3} \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{C}_{12}, \quad \text{Segm. } \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3 = \frac{2}{3} \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3\mathfrak{C}_{13},$$

$$\text{Segm. } \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 = \frac{2}{3} \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{C}_{23},$$

also, wenn \mathfrak{P}_2 auf dem Bogen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3$ liegt:

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 &= \text{Segm. } \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3 - (\text{Segm. } \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 + \text{Segm. } \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3) \\ &= \frac{2}{3} (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3\mathfrak{C}_{13} - \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{C}_{12} - \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{C}_{23}) = \frac{2}{3} (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 + \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{C}_{13}\mathfrak{C}_{23}); \end{aligned}$$

daher:

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 = 2 \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{C}_{13}\mathfrak{C}_{23}.$$

Das Dreieck dreier Punkte einer Parabel ist doppelt so gross als das von ihren Tangenten eingeschlossene.

* Archimedis Opera omnia, herausg. von Heiberg, Bd. II S. 293. — Vergl. auch Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, Th. I, herausg. von Geiser, 3. Aufl. § 21, wo der Beweis mehr in der Weise von Archimedes geführt wird.

Dritter Abschnitt.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

§ 39. Entstehung des Kegelschnittbüschels aus dem Strahlbüschel.

Die in Nr. 73, 84 ausgeführte Untersuchung der Beziehung zwischen ¹⁶¹ dem von vier Punkten eines Kegelschnitts gebildeten Viereck und dem von den vier Tangenten in diesen Punkten gebildeten Vierseit lässt erkennen, wenn wir die vier Punkte festhalten und die Tangenten, von denen eine willkürlich angenommen werden kann, verändern, dass durch vier Punkte unendlich viele Kegelschnitte gehen, deren Gesamtheit gleich mächtig ist mit der der Strahlen, welche durch einen Punkt gehen. Denn jeder durch einen der vier Punkte gehende Strahl, als Tangente des Kegelschnitts aufgefasst, bestimmt denselben vollständig und eindeutig; die Tangenten in den andern drei Punkten sind dadurch (Nr. 84) mitbestimmt, und es giebt daher so viele Kegelschnitte durch vier Punkte, als es Strahlen durch einen Punkt giebt. Die Gesamtheit der durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte soll ein *Kegelschnittbüschel* heissen und die vier Punkte selbst die *Grundpunkte (Mittelpunkte) des Büschels*. Das Kegelschnittbüschel ist daher ein Gebilde von einfacher Unendlichkeit; hiergegen spricht scheinbar, dass durch einen in der Ebene der vier Grundpunkte willkürlich gewählten Punkt ein Kegelschnitt des Büschels vollständig und eindeutig bestimmt wird und die Ebene selbst eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten enthält. Dieser Einwurf wird aber dadurch widerlegt, dass ein solcher durch fünf Punkte bestimmter Kegelschnitt zugleich unendlich viele andere Punkte enthält und jeder von ihnen, anstatt des fünften gewählt, immer wieder denselben Kegelschnitt hervorruft. Bei der Bewegung des fünften Punktes durch das ganze doppelt unendliche Gebiet der Ebene tritt also jeder Kegelschnitt des Büschels selbst einfach unendlich mal auf, und die sämmtlichen von einander verschiedenen Kegelschnitte des Büschels umfassen also nur

eine Mannigfaltigkeit von einfacher Unendlichkeit. Seien A, B, C, D die vier Grundpunkte des Büschels und ein beliebiger durch A gehender Strahl \mathfrak{A} die Tangente eines dem Büschel angehörigen Kegelschnitts, welcher dadurch vollständig bestimmt ist, so erhalten wir (Nr. 84) die Tangenten in B, C, D , indem wir die Diagonalepunkte des vollständigen Vierecks $ABCD$:

$$(AB, CD) = x, \quad (AC, BD) = y, \quad (AD, BC) = z,$$

und die Seiten dieses Diagonaldreiecks:

$$yz = X, \quad zx = Y, \quad xy = Z$$

bestimmen; durch die Schnitte von \mathfrak{A} mit X, Y, Z gehen die Tangenten $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ von B, C, D . Drehen wir also den Strahl \mathfrak{A} um A , wodurch wir sämtliche Kegelschnitte des Büschels erhalten, so drehen sich auch die Tangenten $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ um die resp. Punkte B, C, D und beschreiben Strahlbüschel, welche perspectiv liegen mit demjenigen, welches \mathfrak{A} beschreibt; die perspectiven Durchschnitte sind die drei Diagonalen des vollständigen Vierecks der vier Grundpunkte des Büschels. Wir erhalten hieraus folgenden Satz:

Die Tangenten an einem Kegelschnitte des Büschels in irgend zweien der vier Grundpunkte beschreiben, wenn der Kegelschnitt das ganze Büschel durchläuft, zwei projective Strahlbüschel, welche perspectiv liegen und zu ihrem perspectiven Durchschnitt eine der drei Diagonalen des vollständigen Vierecks der vier Grundpunkte haben.

Hierdurch werden wir in den Stand gesetzt, das Kegelschnittbüschel mit einem ebenen Strahlbüschel, einer geraden Punktreihe oder einem andern Kegelschnittbüschel in projective Beziehung zu setzen, so dass die Elemente der beiden Gebilde sich eindeutig entsprechen, indem wir zur Herstellung dieser Beziehung ein Strahlbüschel verwenden, welches von den Tangenten des Kegelschnittbüschels in irgend einem der vier Grundpunkte gebildet wird, und für jede Tangente dann den Kegelschnitt des Büschels setzen, welcher durch dieselbe eindeutig bestimmt ist.

162 Die gleiche Mächtigkeit des Kegelschnittbüschels und des Strahlbüschels deutet darauf hin, dass ersteres aus dem letzteren unmittelbar hervorgehen kann, und in der That führt dazu folgende ebenso sinnreiche, wie nützliche Betrachtung *Steiner's*.*

Denken wir uns B und B_1 als die Grundpunkte zweier Strahlbüschel, welche die Gerade \mathfrak{A} zu ihrem perspectiven Durchschnitt

* Ueber diese unter dem Namen „projectiver Drehung“ von *Steiner* häufig angewendete Betrachtung vergl. *F. August* im Journal für Mathematik, Bd. 68 S. 239.

haben, so ist die projective Beziehung derselben vollständig bestimmt; die Verbindungslinie BB_1 enthält zwei zusammenfallende entsprechende Strahlen e und e_1 . Verändern wir aber die Lage des perspectiven Durchschnitts \mathfrak{A} , indem wir denselben um einen festen Punkt P drehen, so haben wir für jede Lage von \mathfrak{A} eine neue Beziehung der beiden Strahlbüschel; die Strahlen e und e_1 sind immer entsprechend, ebenso die beiden Strahlen p und p_1 , welche von B und B_1 nach dem Punkte P gehen. Werden diese projectiven Beziehungen festgehalten, aber die perspective Lage aufgehoben dadurch, dass das eine oder beide Strahlbüschel um ihre Grundpunkte B und B_1 beliebig gedreht werden, so wird aus jeder Gerade \mathfrak{A} und dem Strahl BB_1 nunmehr ein Kegelschnitt, den die beiden nicht mehr perspectiv liegenden, aber projectiv gebliebenen Strahlbüschel erzeugen. Alle diese Kegelschnitte haben zunächst die Punkte B und B_1 , die Grundpunkte der erzeugenden Strahlbüschel, gemein, ferner auch die Punkte e und p , in denen sich e und e_1 , bezw. p und p_1 in den neuen Lagen schneiden, in die sie durch die Drehung gelangt sind.

Die sämmtlichen auf diese Weise erzeugten Kegelschnitte gehen also durch vier feste Punkte B, B_1, e, p , d. h. sie bilden ein Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten, und dieses ist aus dem von \mathfrak{A} beschriebenen Strahlbüschel hervorgegangen, indem jeder Strahl desselben zu einem Kegelschnitt wurde. Beide Gebilde sind also von gleicher Mächtigkeit.*

Es leuchtet die Nützlichkeit dieser Betrachtung augenscheinlich 163 ein, weil nun umgekehrt jedes Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten durch eine passende Drehung in ein Strahlbüschel verwandelt werden kann und hierdurch die Untersuchung der Eigenschaften des Kegelschnittbüschels wesentlich vereinfacht wird. Suchen wir zunächst zu ermitteln, wie sich die verschiedenen Gattungen von Kegelschnitten: Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln in dem Büschel vertheilen.

Das Büschel B sei um den Winkel δ , das Büschel B_1 um δ_1 gedreht, wo δ und δ_1 auch dem Sinne nach gegeben sind. Es ist zuvörderst ersichtlich, dass in dem Kegelschnittbüschel drei Geradenpaare (besondere Hyperbeln) vorkommen. Denn unter den durch P gehenden Strahlen \mathfrak{A} befindet sich einmal auch der Strahl PB ; die beiden perspectiven Strahlbüschel in B und B_1 , welche ihn zum perspectiven Durchschnitt haben, sind in der eigenthümlichen Lage, welche wir

* Lässt man die Gerade \mathfrak{A} das ganze doppelt unendliche Gebiet der Ebene durchstreifen, so erhält man, nach Aufhebung der perspective Lage, ein doppelt unendliches System von Kegelschnitten, die durch drei feste Punkte B, B_1, e gehen.

ausgeartete Projectivität (Nr. 58) genannt haben, indem allen Strahlen des Büschels B_1 der einzige Strahl BP in dem Büschel B und allen Strahlen des Büschels B der einzige Strahl B_1B des Büschels B_1 entspricht; an dieser Besonderheit ändert die Drehung nichts; nach derselben sind Bp und B_1e die singulären Strahlen und bilden das Erzeugniss (Nr. 71), also ein Geradenpaar. In gleicher Weise wird aus dem besonderen durch B_1 gehenden Strahl \mathfrak{A} ein Kegelschnitt, welcher sich in das Geradenpaar (B_1p, B_1e) auflöst. Zwei besondere Strahlen, welche vor der Drehung mit der Verbindungslinie BB_1 in entgegengesetztem Drehungssinne die resp. Winkel δ und δ_1 bildeten und sich in einem Punkte ϵ trafen, müssen nach der Drehung auf einander fallen; wir sehen hieraus, dass aus BB_1 und demjenigen Strahl \mathfrak{A} , welcher durch ϵ geht, also $P\epsilon$, ein Kegelschnitt wird, der wiederum in ein Geradenpaar zerfällt, weil die beiden ihn erzeugenden projectiven Strahlbüschel auch nach der Drehung perspectiv werden; folglich enthält das Kegelschnittbüschel noch ein drittes Geradenpaar $(BB_1, p\epsilon)$. Aus allen übrigen Geraden \mathfrak{A} werden allgemeine Kegelschnitte, und wir wollen nachsehen, welche von ihnen Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen sind.

Hierzu müssen wir diejenigen Punkte in der Ebene aufsuchen, welche nach der Drehung in die Unendlichkeit fallen; alle Punkte im Unendlichen der Ebene liegen auf der Gerade G_∞ und sind die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen zweier gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel, welche sich in perspectiver Lage befinden (Nr. 61). Vor der Drehung müssen zwei solche Strahlbüschel einen Kreis erzeugen (Nr. 74); alle Punkte dieses Kreises gehen also nach der Drehung in die Unendlichkeit, oder vielmehr die beiden diesen Kreis erzeugenden Strahlbüschel werden nach der Drehung perspectiv und erzeugen das Geradenpaar (BB_1, G_∞) . Dieser Kreis, welchen wir kurzweg den „Drehkreis“ nennen wollen, ist leicht zu ermitteln; er geht durch die drei Punkte B, B_1 und ϵ und ist durch dieselben bestimmt; ϵ ist aber derjenige Punkt, in welchem sich zwei Strahlen durch B und B_1 schneiden, welche nach der Drehung auf BB_1 zusammenfallen. Hingegen ist e derjenige Punkt, in welchem sich zwei Strahlen durch B und B_1 nach der Drehung treffen, welche vor der Drehung in dem Strahle BB_1 vereinigt waren; daher liegen e und ϵ symmetrisch in Bezug auf die Gerade BB_1 .

Aus einem Strahle \mathfrak{A} , welcher den Drehkreis in zwei reellen Punkten schneidet, ergibt sich eine Hyperbel, weil die beiden Schnittpunkte nach der Drehung in die Unendlichkeit fallen, aus einem Strahle \mathfrak{A} , welcher den Drehkreis berührt, eine Parabel und aus einem

Strahle \mathfrak{A} , welcher ihn nicht trifft, eine Ellipse. Ferner kommt unter den Strahlen \mathfrak{A} ein einziger vor, der durch den Mittelpunkt des Drehkreises geht; aus diesem wird eine gleichseitige Hyperbel, weil die unendlich entfernten Punkte derselben unter einem rechten Winkel erscheinen.

Liegt daher der Punkt P ausserhalb des Drehkreises, so gibt es in dem Büschel von Kegelschnitten unendlich viele Ellipsen, unendlich viele Hyperbeln und zwei Parabeln, welche die Ellipsen von den Hyperbeln trennen; unter den Hyperbeln kommt eine einzige gleichseitige vor.

Wir heben einen besonderen Fall hervor. Die unendlich ferne Gerade G_∞ , als Strahl \mathfrak{A} , bewirkt in B und B_1 zwei gleiche und gleichlaufende Büschel, folglich geht sie nach der Drehung in einen Kreis über. Derselbe geht durch B , B_1 und e und ist daher in Bezug auf die Axe BB_1 symmetrisch zum Drehkreise.

Liegt also P im Unendlichen, so gehört dieser Kreis zum Büschel, oder die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels befinden sich auf einem Kreise; die Tangenten aus P an den Drehkreis sind parallel, ihre Berührungssehne erscheint also von B (oder B_1) aus unter einem rechten Winkel. Aus diesen beiden Tangenten werden nach der Drehung zwei Parabeln, deren unendlich entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen. Da auch umgekehrt der Schnittpunkt zweier Tangenten des Drehkreises im Unendlichen liegt, wenn ihre Berührungssehne unter rechtem Winkel von B (oder B_1) aus erscheint, so schliessen wir:

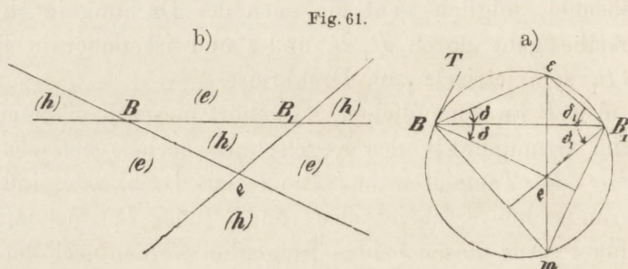
Wenn in einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten zwei Parabeln vorkommen, deren unendlich entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so befinden sich die vier Grundpunkte des Büschels auf einem Kreise.

Liegt P innerhalb des Drehkreises, so besteht das Büschel aus lauter Hyperbeln, unter denen sich eine gleichseitige findet; weil in diesem Falle alle durch P gezogenen Strahlen \mathfrak{A} den Drehkreis in zwei reellen Punkten treffen. Liegt endlich P auf dem Drehkreise selbst, so kommt in dem Büschel nur eine einzige Parabel (zwei zusammenfallende) vor, alle übrigen Kegelschnitte desselben sind Hyperbeln. Ist insbesondere der Punkt P gerade der Mittelpunkt des Drehkreises, so werden alle Kegelschnitte des Büschels gleichseitige Hyperbeln; es gibt also ein besonderes Kegelschnittbüschel, welches aus lauter gleichseitigen Hyperbeln besteht.

Suchen wir die gewonnenen Resultate in der Weise umzugestalten, 164 dass wir von dem Drehkreise absehen können und nur die das Kegelschnittbüschel bestimmenden vier Grundpunkte als gegeben annehmen.

Lassen wir zu diesem Behuf den Punkt P alle möglichen Lagen annehmen.

Der Punkt p ergibt sich aus dem Punkte P , indem die Strahlen BP und B_1P um die Winkel δ und δ_1 im vorgeschriebenen Sinne gedreht und in der neuen Lage geschnitten werden. Die Fläche des Drehkreises wird (Fig. 61a) durch das Dreieck BB_1e in vier Stücke getheilt, das Innere des Dreiecks und die drei Segmente über den Seiten. Das Dreieck BB_1e hingegen theilt die Ebene in sieben Räume (Fig. 61b), die vier mit (h) bezeichneten „hyperbolischen“ und die drei mit (e) bezeichneten „elliptischen“. Man lege P nach und nach in einen der vier Theile des Drehkreises, so wird p in einen der Räume (h) fallen;



liegt hingegen P ausserhalb des Drehkreises, so fällt p in einen der Räume (e) , wobei wir uns natürlich Fig. b) auf a) gelegt denken müssen. Es genüge ein Beispiel; P liege in dem Segmente über B_1e , so bringt die Drehung um δ den Strahl BP zwischen den Strahl β durch B , welcher mit der Tangente BT den Winkel δ bildet, und den Strahl BB_1 , die Drehung um δ_1 den Strahl B_1P zwischen B_1B und B_1e . Nun ist β parallel zu B_1e . Der Schnittpunkt p kommt in den Scheitelwinkel von BB_1e zu liegen, einen der mit (h) bezeichneten Räume, so lange eben P innerhalb des Kreises liegt.

Befindet sich nun der vierte Grundpunkt p des Büschels in einem der drei elliptischen Räume, so liegen die vier Grundpunkte so, dass jeder sich ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks befindet: sie bilden ein convexes Viereck; liegt dagegen p in einem der vier hyperbolischen Räume, so haben die vier Grundpunkte die charakteristische Lage, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich findet: sie bilden ein concaves Viereck.

Wenn ein beliebiges Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten B, B_1, e, p vorliegt, so hat man die Büschel um zwei derselben, B, B_1 , so zu drehen, dass die Strahlen nach einem dritten Grundpunkte, B_1e und B_1e , in den Verbindungsstrahl BB_1 fallen, um die frühere Lage zu erreichen, in der Perspectivität stattfindet und statt allgemeiner

Kegelschnitte Geradenpaare erzeugt werden, welche aus BB_1 und den verschiedenen Strahlen \mathfrak{A} eines Büschels P bestehen. P ergibt sich durch diese Rückdrehung aus p . Also schliessen wir auf folgenden Satz:

Wenn die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels so liegen, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet (d. h. wenn sie ein convexes Viereck bilden), so zerfallen die Kegelschnitte des Büschels in eine Reihe von Ellipsen, eine Reihe von Hyperbeln und zwei Parabeln, welche die Uebergänge von der einen Reihe zur andern bilden; unter den Hyperbeln befinden sich eine einzige gleichseitige und drei Geradenpaare. Wenn dagegen die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels so liegen, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet (d. h. wenn sie ein concaves Viereck bilden), so besteht das Büschel aus lauter Hyperbeln; unter ihnen befinden sich ebenfalls eine einzige gleichseitige Hyperbel und drei Geradenpaare.

Wir wollen die Lage der vier Grundpunkte, sowie auch die Vierecke im ersten Falle *elliptisch*, im zweiten *hyperbolisch* nennen.

Im zweiten Falle kann insbesondere der Punkt p so liegen, dass ¹⁶⁵ alle Hyperbeln des Büschels gleichseitig sind, wenn nämlich P gerade der Mittelpunkt M des Drehkreises ist. Es ist leicht zu erkennen, welche Lage die vier Grundpunkte des Büschels zu einander haben müssen, damit dieser specielle Fall eintrete. Wenn alle Kegelschnitte des Büschels gleichseitige Hyperbeln sind, so gilt dies auch für die drei Geradenpaare, sie bestehen also aus zwei zu einander rechtwinkligen Geraden; dass aber $pe \perp BB_1$, $Be \perp B_1p$, $Bp \perp B_1e$, bedeutet, dass einer und infolge dessen jeder von den vier Grundpunkten der Höhenpunkt des Dreiecks der drei andern ist.

Und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so sind alle drei Geradenpaare rechtwinklig, die Schnitte der entsprechenden Geraden \mathfrak{A} mit dem Drehkreise werden aus B oder B_1 unter rechtem Winkel gesehen, P fällt in den Mittelpunkt M .* Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Wenn die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels so liegen, dass einer und infolge dessen jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, so besteht das Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, von denen drei besondere die drei Paare zu einander rechtwinkliger Gegenseiten dieses vollständigen Vierecks sind.

* Der Leser möge sich überzeugen, dass der Mittelpunkt M des Drehkreises durch die beiden Drehungen in den zweiten Schnitt m von $\epsilon\epsilon$ mit diesem Kreise kommt und dadurch Höhenpunkt von BB_1e wird (Fig. 61a).

Einem Dreiecke sei eine gleichseitige Hyperbel umgeschrieben; dann giebt es in dem Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche durch die drei Ecken des Dreiecks und seinen Höhenpunkt gehen, eine, die durch den einen unendlich fernen Punkt jener Hyperbel geht; weil sie gleichseitig ist, so geht sie auch durch den andern; also sind beide Hyperbeln identisch, da sie fünf Punkte gemeinsam haben. Mithin er giebt sich:

Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche demselben Dreieck umgeschrieben sind, gehen gleichzeitig durch den Höhenpunkt dieses Dreiecks.

Hieraus folgt eine Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, welche eine gewisse Analogie mit einer bekannten Eigenschaft des Kreises darbietet:

Begegnet von zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen, welche sich in o schneiden, der eine einer gleichseitigen Hyperbel in den Punkten a und a^1 , der andere in b und b^1 , so ist immer

$$oa \cdot oa^1 + ob \cdot ob^1 = 0;$$

*d. h. es ist das Product der Abschnitte auf dem einen Schenkel des rechten Winkels gleich dem Product der Abschnitte auf dem andern; aber die Schnittpunkte liegen so, dass zwei auf derselben Seite von o sich befinden und die beiden andern auf entgegengesetzten Seiten von o ; denn die vier Punkte a, a^1, b, b^1 liegen immer so, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, und o ist der Fusspunkt der einen Höhe.**

166 Das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche einem Dreieck umgeschrieben sind und zugleich durch den Höhenpunkt des Dreiecks gehen, besitzt unter andern folgende bemerkenswerthe Eigenschaft, welche, als besonderer Fall einer später zu erweisenden allgemeinen Eigenschaft, schon hier vorausgeschickt werden mag.

Das von den drei Ecken des Dreiecks und dem Höhenpunkt gebildete vollständige Viereck hat zu seinem Diagonaldreiecke xyz das von den drei Fusspunkten der Höhen gebildete Dreieck. Dieses Dreieck xyz ist ein Polardreieck für alle Kegelschnitte des Büschels (Nr. 104); der um dasselbe gelegte Kreis muss (Nr. 133) die Directorkreise aller Kegelschnitte des Büschels rechtwinklig schneiden; für eine gleichseitige Hyperbel reducirt sich der Directorkreis auf einen Punkt (Nr. 131), und ein Kreis, der einen Punktkreis rechtwinklig schneidet,

* Zu dieser Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel fügen wir folgende ähnliche: Schneiden zwei Geraden, die zu conjugirten Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel parallel sind, diese in a und a^1, b und b^1 und einander in o , so ist:

$$oa \cdot oa^1 + ob \cdot ob^1 = 0.$$

geht durch diesen Punkt; also muss der um xyz gelegte Kreis die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln des Büschels enthalten. Dieser Kreis geht durch die drei Höhenfusspunkte, als die Mittelpunkte der drei Geradenpaare des Büschels, und schneidet jede der sechs Seiten noch einmal; für die zugehörigen Hyperbeln sind die Seiten dann Durchmesser und die Schnitte ihre Mittelpunkte; demnach haben wir:

*Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreieck umgeschrieben werden können, liegen auf dem Kreise, der durch die Fusspunkte der Höhen, die Mitten der Seiten und die Mitten der drei Abschnitte auf den Höhen zwischen Ecke und Höhenpunkt geht (Feuerbach's Kreis, Neunpunktkreis). Die Eigenschaft, dass die genannten neun Punkte auf einem Kreise liegen, ist aus den Elementen bekannt.**

Im Anschluss an das Ergebniss von Nr. 164 wollen wir die Frage ¹⁶⁷ vornehmen, wann fünf Punkte eine Ellipse oder Hyperbel bestimmen.

Wir nehmen zunächst vier von den fünf Punkten 1, 2, 3, 4 in hyperbolischer Lage und zwar 4 in dem Innern des Dreiecks 123; die sechs Seiten des Vierecks 1234 theilen die Ebene in 18 Räume und zwar sechs im Innern von 123, je zwei in den Scheitelwinkeln dieses Dreiecks und je zwei in den Aussenräumen an den Seiten. Wenn der Punkt 5 in einem der sechs Aussenräume liegt, so sind drei von den Vierecken 1235, 1245, 1345, 2345 elliptisch, eins hyperbolisch; liegt 5 aber in einem der 12 übrigen Räume, so ist nur eins elliptisch und drei sind hyperbolisch.

Wenn hingegen 1, 2, 3, 4 elliptische Lage haben, so bilden sie ein convexes (einfaches) Viereck, in welchem sich vier von den 18 Räumen befinden; in jedem der Scheitelwinkel desselben liegen zwei Räume; sodann haben wir an den Schnittpunkten der Gegenseiten dieses Vierecks zwei weitere Winkelräume, in deren Scheitelwinkeln das Viereck sich befindet; die vier übrigen Räume liegen an den Seiten des Vierecks. Fällt 5 in einen der 12 Räume von den beiden ersten Arten, so sind von den vier Vierecken 1235, 1245, 1345, 2345 zwei hyperbolisch und zwei elliptisch; liegt er in einem der beiden Räume der dritten Art, so sind alle hyperbolisch, und wenn in einem der vier Räume der vierten Art, dann sind alle elliptisch. Nehmen wir nun das Viereck 1234 hinzu, so sehen wir, dass unter den fünf Vierecken 1234, 1235, 1245, 1345, 2345 sich 1, 3, 5 elliptische und 4, 2, 0 hyperbolische befinden, elliptische also jedenfalls vorhanden sind. Man nehme daher ein elliptisches $ABCD$; in dem ihm umgeschriebenen Büschel giebt es zwei reelle Parabeln, und

* Vergl. *J. Steiner*: Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833, S. 53; Gesammelte Werke Bd. I S. 491; *H. Schröter*, Mathem. Annalen Bd. 7 S. 517.

die Ebene zerfällt durch diese in vier Räume: den Raum ausserhalb beider Parabeln, zwei Räume ausserhalb der einen und innerhalb der andern, den Raum innerhalb beider. Durch die unendlich fernen Punkte, die dem ersten Raume angehören, geht jederzeit eine Hyperbel, und da der Uebergang von Ellipsen zu Hyperbeln nur durch die Parabeln stattfindet, so ergibt sich: *Der durch \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , \mathfrak{E} bestimmte Kegelschnitt ist Hyperbel, wenn der fünfte Punkt \mathfrak{E} ausserhalb oder innerhalb der beiden Parabeln, er ist Ellipse, wenn er ausserhalb der einen und innerhalb der andern liegt.**

§ 40. Charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels und einige Folgerungen aus derselben.

168 Die in dem vorigen Paragraphen gegebene Entstehungsweise des Kegelschnittbüschels führt zu einer charakteristischen Eigenschaft desselben.

Es seien B, B_1, c, p die Grundpunkte des Büschels und \mathfrak{Q} eine beliebige Gerade (Transversale); so haben wir um B, B_1 zwei perspective Strahlbüschel, für welche \mathfrak{Q} der perspective Durchschnitt ist, und dann für jeden Kegelschnitt des Büschels zwei projective Strahlbüschel, die ihn erzeugen. Drehen wir dann alle Paare von projectiven Strahlbüscheln so um die Grundpunkte B, B_1 , dass Bc und B_1c zusammenfallen, so wird aus dem Kegelschnittbüschel ein Strahlbüschel (\mathfrak{A}) um den Grundpunkt P ; aus der Gerade \mathfrak{Q} wird aber ein Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, da die beiden vor der Drehung perspective Strahlbüschel, welche \mathfrak{Q} hervorruft, jetzt nicht mehr perspective liegen. Die beiden Schnittpunkte x und ξ irgend eines Kegelschnitts $K^{(2)}$ des Büschels mit der Transversale \mathfrak{Q} gehen daher in die Schnittpunkte x^1, ξ^1 eines Strahles \mathfrak{A} mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ über; lässt man nun \mathfrak{A} das ganze Strahlbüschel um P durchlaufen, so beschreiben nach einem in Nr. 110 bewiesenen Satze Bx^1 und $B\xi^1$ (oder auch B_1x^1 und $B_1\xi^1$) eine Involution, welche also auch vor der Drehung eine Involution gewesen sein muss; die Strahlenpaare derselben schneiden \mathfrak{Q} in den Punktepaaren x, ξ , welche also auch eine Involution bilden; und wir erhalten den allgemeinen Satz:

*Jede Gerade in der Ebene eines Kegelschnittbüschels wird von den Kegelschnitten desselben in den Punktepaaren einer Involution getroffen.***

* Möbius, Barycentrischer Calcul § 255 (Gesammelte Werke Bd. I S. 330).

** Dass drei durch dieselben vier Punkte gehende Kegelschnitte eine Transversale in drei Punktepaaren in Involution schneiden, hat Charles Sturm (1803–1855) zuerst bemerkt (Gergonne's Annales de Mathématiques Bd. 17 S. 180). Für einen Kegelschnitt und zwei Geradenpaare (die Gegenseitenpaare eines eingeschriebenen Vierecks) kannte es schon Desargues (Nr. 38).

Einen speciellen Fall dieses Satzes haben wir bereits in Nr. 51 bewiesen; wir erhalten denselben, wenn wir aus dem Kegelschnittbüschel die drei Geradenpaare herausnehmen. Die dort (Nr. 52) gefundene Bedingung, wann die Involution elliptisch und wann sie hyperbolisch ist, kommt uns hier zu statten:

Wenn die vier Grundpunkte des Büschels die elliptische Lage haben, d. h. so gelegen sind, dass jeder sich ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks befindet, so ist die Involution auf der Transversale hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Grundpunkten zu beiden Seiten der Transversale liegt. Liegen dagegen die vier Grundpunkte hyperbolisch, d. h. so, dass einer von ihnen in dem von den drei andern gebildeten Dreieck enthalten ist, so findet das Umgekehrte statt.

Aus dieser Involutionseigenschaft des Kegelschnittbüschels leiten wir für die Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit den Seiten eines Dreiecks eine bemerkenswerthe Beziehung ab. Das Dreieck sei \mathcal{ABC} und die Schnitte von \mathcal{BC} , \mathcal{CA} , \mathcal{AB} mit dem Kegelschnitte (die wir zunächst reell annehmen) seien α, α_1 ; β, β_1 ; γ, γ_1 . Schneiden wir \mathcal{BC} mit dem Kegelschnitte und den zwei Geradenpaaren (\mathcal{AB} , \mathcal{AC}), ($\beta\gamma, \beta_1\gamma_1$) des Büschels ($\mathcal{H}\beta_1\gamma\gamma_1$), so sind \mathcal{BC} , $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ in Involution, wo $(\mathcal{BC}, \beta\gamma) = \beta$, $(\mathcal{BC}, \beta_1\gamma_1) = \beta_1$. Also ist nach Nr. 40:

$$\frac{\mathcal{B}\alpha \cdot \mathcal{B}\alpha_1}{\mathcal{C}\alpha \cdot \mathcal{C}\alpha_1} = \frac{\mathcal{B}\beta \cdot \mathcal{B}\beta_1}{\mathcal{C}\beta \cdot \mathcal{C}\beta_1};$$

durchschneiden wir aber \mathcal{ABC} mit $\beta\gamma\delta$ und $\beta_1\gamma_1\delta_1$, so ist nach dem Satze von *Menclaus* (Nr. 54):

$$\frac{\mathcal{B}\beta}{\mathcal{C}\beta} \cdot \frac{\mathcal{C}\gamma}{\mathcal{A}\gamma} \cdot \frac{\mathcal{A}\delta}{\mathcal{B}\delta} = 1, \quad \frac{\mathcal{B}\beta_1}{\mathcal{C}\beta_1} \cdot \frac{\mathcal{C}\gamma_1}{\mathcal{A}\gamma_1} \cdot \frac{\mathcal{A}\delta_1}{\mathcal{B}\delta_1} = 1;$$

setzt man die hieraus sich ergebenden Ausdrücke für $\frac{\mathcal{B}\beta}{\mathcal{C}\beta}$ und $\frac{\mathcal{B}\beta_1}{\mathcal{C}\beta_1}$ in die vorhinige Beziehung ein, so erhält man:

$$I. \quad \frac{\mathcal{B}\alpha \cdot \mathcal{B}\alpha_1 \cdot \mathcal{C}\beta \cdot \mathcal{C}\beta_1 \cdot \mathcal{A}\gamma \cdot \mathcal{A}\gamma_1}{\mathcal{C}\alpha \cdot \mathcal{C}\alpha_1 \cdot \mathcal{A}\beta \cdot \mathcal{A}\beta_1 \cdot \mathcal{B}\gamma \cdot \mathcal{B}\gamma_1} = 1.$$

Wenn also ein Kegelschnitt von den Seiten \mathcal{BC} , \mathcal{CA} , \mathcal{AB} eines Dreiecks in den Punkten α, α_1 ; β, β_1 ; γ, γ_1 geschnitten wird, so gilt diese Beziehung I.

Dieser Satz rührt von *Carnot* her und wird nach ihm benannt.

Die Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, jede Transversale in 170 einer Involution zu schneiden, lässt sich so umkehren:

Alle Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte und ausserdem durch je zwei conjugirte Punkte einer gegebenen Involution gehen, laufen noch durch einen vierten festen Punkt und bilden also ein Kegelschnittbüschel.

Denken wir uns nämlich diese Kegelschnitte durch Paare von projectiven Strahlbüscheln erzeugt, welche in zwei von den drei festen Punkten B, B_1, e , etwa in B und B_1 , ihre Grundpunkte haben, und auch die Gerade \mathcal{L} , welche der Träger der gegebenen Involution ist, durch zwei perspective Strahlbüschel in B und B_1 erzeugt, und drehen das ganze Gebilde so, dass Be und B_1e auf einander fallen, so werden aus sämtlichen Kegelschnitten Geraden und aus \mathcal{L} ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$. Diese Geraden müssen aber alle durch einen festen Punkt P laufen, weil die Strahlenpaare von B (oder B_1) nach den Schnittpunkten jeder solchen Gerade mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine Strahlinvolution bilden (Nr. 109); folglich müssen auch die Kegelschnitte durch einen vierten festen Punkt p laufen, aus dem jener Punkt P durch die Drehung sich ergibt.

- 171 Die obige Eigenschaft des Kegelschnittbüschels führt uns zur Lösung der Aufgabe: „*Einen Kegelschnitt zu construiren, welcher durch vier gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade zur Tangente hat*“.

Die Kegelschnitte durch die vier Punkte rufen auf der Gerade eine Involution hervor; ihre Doppelpunkte sind Berührungspunkte von Kegelschnitten des Büschels mit der Gerade.

Die Aufgabe lässt also *zwei* Lösungen zu, und wir sind im Stande, nicht allein aus der Lage der vier Punkte zu der Gerade über die Realität dieser Lösungen zu entscheiden, sondern auch die beiden Kegelschnitte, wenn sie reell sind, selbst zu construiren, indem wir in jedem der Doppelpunkte einer bekannten Involution, die wir zu ermitteln wissen, wenn sie reell sind (Nr. 38), zu den vier Punkten noch ein fünfter tritt.

Die Involution wird durch die Schnittpunkte zweier Gegenseitenpaare des von den vier gegebenen Punkten gebildeten vollständigen Vierecks bestimmt.

- 172 Hieran knüpft sich die aus derselben Eigenschaft des Kegelschnittbüschels herzuleitende Lösung der Aufgabe: „*Einen Kegelschnitt zu construiren, welcher durch drei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Geraden zu Tangenten hat*“.

Lässt man von den vier Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels zwei zusammenfallen und die beiden andern auch zusammenfallen, so erhält man ein Büschel, dessen Kegelschnitte sich alle in denselben beiden festen Punkten berühren; die Tangenten in diesen beiden gemeinschaftlichen Berührungspunkten nehmen die Stelle eines der drei Geradenpaare aus dem Büschel ein, die beiden andern sind in eins zusammengefallen, und die beiden Geraden dieses Paares haben sich wiederum in der Berührungssehne der Kegelschnitte des Büschels

vereinigt. Man erkennt dies leicht, wenn man sich diesem Falle des Zusammenrückens von zweimal zwei Grundpunkten nähert. Die Involution, in der ein derartiges Büschel von einer Transversale geschnitten wird, ist hyperbolisch; wir können sofort einen reellen Doppelpunkt angeben, den Schnitt mit der Berührungssehne, d. i. mit einem Geradenpaar, dessen Geraden sich vereinigt haben. Das gemeinschaftliche Tangentenpaar trifft ausserdem die Transversale in zwei conjugirten Punkten der Involution; wir schliessen hieraus für einen Kegelschnitt des Büschels: Ein Tangentenpaar eines Kegelschnitts, dieser selbst und die Berührungssehne treffen irgend eine Transversale in zwei Punktepaaren $a\alpha, b\beta$ und einem Punkte g ; g ist der eine Doppelpunkt derjenigen Involution, von welcher $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paare conjugirter Punkte sind. Diese Eigenschaft, die auch aus den Polarbeziehungen des Kegelschnitts abgeleitet werden kann,* löst die vorgelegte Aufgabe.

Seien nämlich $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1$ die beiden gegebenen Geraden, welche den gesuchten Kegelschnitt berühren, und A, B, C die drei Punkte, durch welche er gehen soll, so ziehe man AB , merke die Schnittpunkte γ, γ_1 dieser Gerade mit den gegebenen $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1$; durch die Paare AB und $\gamma\gamma_1$ conjugirter Punkte wird eine Involution bestimmt, deren Doppelpunkte ermittelt werden; sie seien g und h . Ebenso seien β, β_1 die Schnitte von AC mit $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1$ und g', h' die Doppelpunkte der durch AC und $\beta\beta_1$ bestimmten Involution. Die Verbindungslinie zweier Doppelpunkte aus dem einen und dem andern Paar muss jede der beiden Geraden \mathcal{L} und \mathcal{L}_1 in zwei solchen Punkten treffen, welche die Berührungspunkte eines durch A, B, C gehenden und $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1$ berührenden Kegelschnitts sind. Da aber die Punkte g, h mit den g', h' auf vier Arten verbunden werden können, nämlich durch die Geraden gg', hh', gh', hg' , so giebt es vier Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Punkte gehen und zwei gegebene Geraden berühren.

Bestimmen wir die Schnittpunkte α, α_1 von BC mit den Geraden $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1$ und ermitteln die Doppelpunkte g'', h'' der durch die Punktepaare BC und $\alpha\alpha_1$ bestimmten Involution, so müssen dieselben auf den vorhin gefundenen vier Geraden liegen, weil die gesuchten Kegelschnitte durch diese schon vollkommen bestimmt sind. Die Punkte g'', h'' sind die beiden übrigen Schnittpunkte (gg', hh') und (gh', hg') der vier Geraden und alle sechs Punkte g, \dots, h'' die Ecken eines vollständigen

* Es sei p der Schnittpunkt der Tangenten, die Berührungssehne P ist seine Polare; die Polare G von g geht durch p ; sie werde von der Transversale in g' getroffen, so sind einerseits g und g' zu den Schnitten mit dem Kegelschnitte harmonisch, andererseits zu denen mit dem Tangentenpaar, weil dies zu G und gp harmonisch ist. Also ist g' der andere Doppelpunkt.

Vierseits; nun ist $A = (gh, g'h')$, $B = (gh, g''h'')$, $C = (g'h', g''h'')$, d. h. ABC ist das Diagonaldreieck dieses Vierseits. Aus der oben erhaltenen Lösung geht hervor, dass entweder alle vier Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen, reell sind oder keiner, dass ersteres nur stattfindet, wenn von den auf AB, AC, BC bestimmten Involutionen zwei, folglich auch die dritte hyperbolisch sind, letzteres dagegen, wenn eine dieser Involutionen elliptisch ist, woraus sogleich hervorgeht, dass noch eine zweite elliptisch sein muss, denn wären die beiden andern hyperbolisch, so müsste auch die erste hyperbolisch sein. Die genauere Betrachtung zeigt, dass die dritte Involution hyperbolisch ist.

Die beiden noch übrigen Fälle, in denen zur Construction eines Kegelschnitts gegeben sind: a) drei Tangenten und zwei Punkte, b) vier Tangenten und ein Punkt, werden durch die duale Betrachtung in gleicher Weise, wie die beiden oben behandelten, gelöst, und es finden sich bei a) vier Lösungen, bei b) zwei Lösungen. Die nähere Ausführung darf füglich unterbleiben, weil sie der obigen ohne jede Schwierigkeit nachgebildet werden kann.

173 Auch die Lösung der Aufgabe: „Wenn von zwei in der Ebene gegebenen Kegelschnitten drei gemeinschaftliche Punkte bekannt sind, den vierten zu finden“, ergibt sich leicht aus dem Vorigen. Seien a, b, c die drei bekannten gemeinschaftlichen Punkte und ausserdem d, e zwei Punkte des einen Kegelschnitts K , welche mit jenen ihn bestimmen, d_1, e_1 zwei Punkte des andern Kegelschnitts K_1 , so ermittle man (Nr. 90) auf der Verbindungslinie dd_1 die beiden übrigen Schnittpunkte δ, δ_1 der gegebenen Kegelschnitte K, K_1 mittelst des *Pascal'schen* Satzes.

Die Paare $d\delta, d_1\delta_1$ bestimmen eine Involution; und wir wissen, alle Kegelschnitte, welche durch a, b, c und die verschiedenen Paare einer Involution gehen, haben noch einen vierten Punkt gemeinsam (Nr. 170). Zu diesen Kegelschnitten gehören in unserm Falle die beiden gegebenen K und K_1 . Den vierten Punkt liefern uns nun am einfachsten zwei Geradenpaare des Büschels. Treffen bc und ca die Gerade dd_1 in ξ und η und sind x, y die diesen Punkten in jener Involution conjugirten Punkte, so ist (ax, by) der gesuchte vierte Grundpunkt des Büschels oder gemeinschaftliche Punkt von K und K_1 . Das dritte Geradenpaar führt zu einer dritten Gerade cz , die durch diesen Punkt auch gehen muss.

Sind von den Punkten a, b, c zwei imaginär, so tritt eine Modification in die Auflösung der Aufgabe, welche nach Nr. 111 leicht zu finden ist.

Auf unserer charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels beruht ferner die Lösung der Aufgabe: *Wenn von zwei in der Ebene gegebenen Kegelschnitten zwei gemeinschaftliche Punkte bekannt sind, die beiden übrigen zu finden.* Seien a, b die bekannten gemeinschaftlichen Punkte der beiden Kegelschnitte K, K_1 und ausserdem vom ersten drei Punkte c, d, e , vom andern c_1, d_1, e_1 zu seiner Bestimmung gegeben. Dann ermittle man die zweiten Schnittpunkte γ, γ_1 der Kegelschnitte K, K_1 mit der Gerade cc_1 ; die Punktepaare $c\gamma, c_1\gamma_1$ bestimmen die Involution des Büschels (K, K_1) . In gleicher Weise ermittle man die übrigen Schnittpunkte δ, δ_1 von dd_1 mit den Kegelschnitten K, K_1 ; die Paare $d\delta, d_1\delta_1$ bestimmen eine Involution auf dd_1 . Trifft nun die Gerade ab die cc_1 in ξ und dd_1 in η , und sind x und y die conjugirten Punkte in den beiden Involutionen, so ist xy eine gemeinschaftliche Secante der Kegelschnitte K, K_1 , und ihre Schnittpunkte mit einem von ihnen sind mithin die gesuchten gemeinschaftlichen Punkte beider Kegelschnitte.

Das Vorangehende lehrt uns, dass zwei Kegelschnitte, welche drei Punkte gemeinsam haben, in einem vierten, und solche, welche zwei Punkte gemeinsam haben, noch in zwei weiteren (reellen oder imaginären) Punkten sich schneiden.

Die Betrachtung, welche uns im Anfange dieses Paragraphen zu 174 der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, von jeder Transversale in einer Involution geschnitten zu werden, geführt hat, lässt sich noch erweitern. An Stelle der dort betrachteten Gerade \mathcal{Q} nehmen wir einen durch B und B_1 gehenden Kegelschnitt \mathcal{R} , der ja auch zu zwei ihn erzeugenden projectiven Strahlbüscheln um B und B_1 führt, welche nur nicht perspectiv sind, wie die die Gerade \mathcal{Q} erzeugenden. Wir erhalten wie dort um B (oder B_1) eine Involution, die in \mathcal{R} eine krumme Involution einschneidet, welche andererseits durch die Paare der beiden weiteren Schnittpunkte des \mathcal{R} mit den Kegelschnitten des Büschels gebildet wird. Das Geradenpaar des Büschels, zu welchem die Gerade BB_1 gehört, hat seine weiteren Schnittpunkte auf der zweiten Gerade, welche die beiden andern Grundpunkte des Büschels verbindet; folglich liegt auf dieser das Centrum der krummen Involution. Wir erhalten also folgenden Satz:

Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden in einen Kegelschnitt \mathcal{R} , der durch zwei von den Grundpunkten geht, noch je zwei Punkte ein; diese bilden dann auf dem Kegelschnitte \mathcal{R} eine krumme Involution. Das Centrum derselben, durch welches die Verbindungslinien dieser Punktepaare gehen, liegt auf der Verbindungslinie der beiden andern Grundpunkte des Büschels.

Nehmen wir an, dass die beiden Punkte B, B_1 zusammenrücken, so dass die Kegelschnitte des Büschels und \mathfrak{K} sich in B berühren; es seien e, p wieder die beiden übrigen Grundpunkte und e^1, p^1 die Schnitte von $B (e, p)$ mit \mathfrak{K} , so ist $\mathfrak{S} = (ep, e^1p^1)$ das Centrum der vom Büschel in \mathfrak{K} eingeschnittenen Involution; jede Gerade durch \mathfrak{S} schneidet \mathfrak{K} in einem Punktepaare, durch das ein Kegelschnitt des Büschels geht. Die Gerade $\mathfrak{S}B$ liefert, wenn \mathfrak{B} der zweite Schnitt mit \mathfrak{K} ist, in dem Kegelschnitte des Büschels durch \mathfrak{B} denjenigen, welcher \mathfrak{K} in B dreipunktig berührt. Ist \mathfrak{K} ein Kreis, so hat man damit die Auflösung der Aufgabe: *Den Kegelschnitt zu construiren, der durch drei Punkte geht und in einem von ihnen einen gegebenen Kreis zum Krümmungskreis hat.*

175 Der Kegelschnitt \mathfrak{K} sei ein Geradenpaar, so jedoch, dass die eine Gerade durch B , die andere durch B_1 geht; so vertheilen sich die beiden weiteren Schnitte auch auf die beiden Geraden. Von einer Involution wird man in diesem Falle nicht mehr reden; aber die Verbindungslinien zusammengehöriger Punkte laufen auch, wie im allgemeinen Falle, in einen Punkt zusammen. Und wir erhalten auf den beiden Geraden zwei perspective Punktreihen.

Also: *Die Punktreihen, die durch ein Kegelschnittbüschel in zwei Geraden eingeschnitten werden, welche durch zwei Grundpunkte gehen, sind projectiv, so dass sich Punkte entsprechen, welche die zweiten Schnitte desselben Kegelschnitts sind, und zwar sind sie in perspectiver Lage.*

Das Perspectivitätscentrum der Punktreihen liegt, ebenso wie das Centrum der krummen Involution des allgemeineren Satzes, auf der gemeinsamen Secante, welche die beiden andern Grundpunkte des Büschels verbindet. Dies führt zu einer einfachen Construction dieser gemeinsamen Secante. Eine Gerade durch B treffe die beiden Kegelschnitte in a, a_1 , eine durch B_1 in b und b_1 und eine zweite durch B_1 in c und c_1 , so sind (ab, a_1b_1) und (ac, a_1c_1) zwei Punkte der gesuchten Secante.

Jede von den Punktreihen ist ferner perspectiv zu dem Strahlbüschel, das sie aus einem andern Grundpunkte projecirt. Dreht man nun den Träger der Punktreihe etwa um B bis unendlich nahe an BB_1 , so rücken die zweiten Schnitte immer näher an B_1 ; die aus diesem Punkte projecirenden Strahlen gehen in die Tangenten an die verschiedenen Kegelschnitte des Büschels in B_1 über. Also ist auch jede von unsern Punktreihen zu dem Strahlbüschel der Tangenten in einem Grundpunkte perspectiv.

Dabei haben wir schon angenommen, dass auch zwei Punktreihen, deren Träger durch denselben Grundpunkt gehen, projectiv sind; sind

sie doch beide zu irgend einer Punktreihe durch einen andern Grundpunkt projectiv. Aber in diesem Falle sind sie nicht perspectiv; denn der gemeinsame Grundpunkt entspricht sich nicht selbst, da ja derselbe Kegelschnitt nicht beide Träger in ihm berührt. Die Verbindungsstrahlen aller entsprechenden Punkte umhüllen daher einen Kegelschnitt, welcher ausser den Trägern der beiden Punktreihen, wie leicht einzusehen ist, die drei Seiten des Dreiecks der drei übrigen Grundpunkte zu Tangenten hat; mithin haben wir den Satz:

Zieht man durch einen der vier Grundpunkte des Büschels zwei Geraden, so treffen alle Kegelschnitte des Büschels dieselben in je zwei Punkten, deren Verbindungslinie einen Kegelschnitt umhüllt. Dieser Kegelschnitt berührt die beiden Geraden selbst und ist dem Dreiecke eingeschrieben, welches von den drei übrigen Grundpunkten des Büschels gebildet wird.

Ferner:

Die gerade Punktreihe, welche durch ein Kegelschnittbüschel auf einer Geraden entsteht, die durch einen Grundpunkt d geht, und die krumme Punktreihe, welche auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$, der durch drei Grundpunkte a, b, c gelegt ist, durch die vierten Schnitte der verschiedenen Kegelschnitte des Büschels entsteht, sind projectiv.

Ein Kegelschnitt $K^{(2)}$ des Büschels schneide jene Gerade zum zweiten Male in \mathfrak{z} , den $\mathfrak{K}^{(2)}$ zum vierten Male in x , so ist zu beweisen, dass \mathfrak{z} und ax sich projectiv bewegen. Durch d werde noch eine Gerade g gezogen, welche $\mathfrak{K}^{(2)}$ reell: in e, f schneidet (falls die gegebene es nicht thut) und $K^{(2)}$ nochmals in η . Nun gehören $K^{(2)}$, $\mathfrak{K}^{(2)}$ und (bc, ax) zu demselben Büschel; wenn nun bc und ax die g in a_1, x_1 treffen, so sind $d\eta, e\mathfrak{f}, a_1x_1$ in Involution; also ist $(e\mathfrak{f}a_1\eta) = (\mathfrak{f}e x_1 d) = (e\mathfrak{f}d x_1)$. Folglich bewegen sich η und x_1 und also auch \mathfrak{z} und ax projectiv.

Benutzen wir aus dem Büschel (Nr. 174), von dem durch zwei 176 Grundpunkte ein Kegelschnitt \mathfrak{K} gelegt ist, nur zwei Kegelschnitte, so haben die drei Kegelschnitte zwei allen gemeinsame Punkte und dann noch zwei zu je zweien und diesen zugehörig drei gemeinsame Secanten; zwei von denselben sind Verbindungslinien conjugirter Punkte der krummen Involution auf \mathfrak{K} , die dritte verbindet die beiden weiteren Grundpunkte des Büschels. Mithin:

*Wenn drei Kegelschnitten zwei Punkte gemeinsam sind, so laufen die drei gemeinsamen Secanten, welche die weiteren Schnittpunkte verbinden, die sie zu je zweien haben, in einen Punkt zusammen.**

* Davon ist der Satz von dem gemeinsamen Punkte der Potenzlinien dreier Kreise, die sie zu je zweien haben, ihrem Potenzcentrum, ein besonderer Fall; die gemeinsamen Punkte sind die absoluten Punkte.

Sind daher wieder, wie in Nr. 173, zwei Kegelschnitte K und K_1 durch a, b, c und je zwei weitere Punkte bestimmt und ist d ihr vierter Schnittpunkt; so seien $r, r_1; \bar{s}, \bar{s}_1; t, t_1$ ihre zweiten Schnitte mit drei Geraden r, s, t , welche bezw. durch a, b, c gehen. Nun haben K, K_1 und das Geradenpaar (s, t) die Punkte b, c gemeinsam, also laufen $\bar{s}t, \bar{s}_1t_1$ und ad in einen Punkt zusammen; ebenso rt, r_1t_1, bd und $r\bar{s}, r_1\bar{s}_1, cd$. Bezeichnet man also die Schnitte $(\bar{s}t, \bar{s}_1t_1), (rt, r_1t_1), (r\bar{s}, r_1\bar{s}_1)$ mit a, b, c , so ist d der gemeinsame Punkt von aa, bb, cc .

177 Wir wollen durch einen Grundpunkt des Büschels einen beliebigen Kegelschnitt legen und gelangen dadurch zu einem allgemeineren Satze. Obgleich er später aus allgemeineren Betrachtungen unmittelbar hervortritt, so lässt er sich auch hier in folgender Art ableiten, freilich unter stillschweigender Annahme des Satzes, dass zwei Kegelschnitte, welche einen Punkt gemeinsam haben, noch in drei andern sich schneiden, und unter Uebertragung von Sätzen, die bisher nur für reelle Punkte erkannt sind, auf imaginäre.

Die Frage nach der Zahl der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte und ihrer Realität wird später erörtert werden (§ 54, 62).

Seien P, A, B, C die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und sei durch einen derselben, P , ein beliebiger, aber fester Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegt; möge irgend ein Kegelschnitt $K^{(2)}$ des Büschels den $\mathfrak{K}^{(2)}$ in den vier Punkten P, x, y, z treffen, so kann man P, x, y, z als die vier Grundpunkte eines neuen Büschels auffassen, von welchem $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ zwei Individuen sind. Die Verbindungslinie AB wird von diesem neuen Büschel in einer Involution geschnitten, von welcher A, B zwei conjugirte Punkte, die beiden Schnittpunkte e, γ der Gerade AB mit dem festen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zwei weitere conjugirte Punkte sind, und da durch diese beiden Paare die Involution bestimmt ist, so bleibt sie unverändert dieselbe, wenn wir den Kegelschnitt $K^{(2)}$ des gegebenen Büschels verändern; ein drittes Punktepaar x_1, ξ_1 der Involution wird von den Geraden Px und yz auf AB ausgeschnitten. Verändern wir aber den Kegelschnitt $K^{(2)}$ in dem gegebenen Büschel, so verändert sich dies dritte Paar und durchläuft die Involution; die Punkte x_1 und ξ_1 beschreiben also projective Punktreihen auf AB . Ebenso durchlaufen die Punkte $(Px, AC) = x_2$ und $(yz, AC) = \xi_2$ projective Punktreihen auf AC . Da aber die Punktreihen x_1 und x_2 perspectiv liegen in dem von Px beschriebenen Strahlbüschel, so müssen die von ξ_1 und ξ_2 durchlaufenen Punktreihen projectiv sein, also muss ihre Verbindungslinie, d. h. yz einen Kegelschnitt umhüllen, welcher zugleich die Geraden AB und AC berührt. Derselbe Kegelschnitt wird auch von den Verbindungslinien xz und xy umhüllt, denn

die Strahlen Py und xz treffen AB in zwei conjugirten Punkten der oben ermittelten Involution auf AB und auch AC in zwei conjugirten Punkten derjenigen auf AC ; es trifft also auch xz die Träger AB und AC in zwei entsprechenden Punkten der beiden auf ihnen befindlichen Punktreihen ξ_1 und ξ_2 , und dasselbe gilt von xy . Die Seiten des mit dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ veränderlichen Dreiecks xyz umhüllen daher einen und denselben Kegelschnitt, welcher, wie unmittelbar einleuchtet, nicht nur AB und AC , sondern auch BC berührt; denn zu demselben Kegelschnitte führen auch AB und BC oder AC und BC ; auch handelt es sich um die sechs Seiten zweier demselben Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke, welche (Nr. 91) einen andern Kegelschnitt berühren. Wir haben hiernach folgenden Satz:

Wenn man durch einen der vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels einen beliebigen Kegelschnitt legt, so hat derselbe mit jedem Kegelschnitte des Büschels drei andere Punkte gemein, welche ein Dreieck bilden; die Seiten dieser sämtlichen Dreiecke umhüllen einen und denselben neuen Kegelschnitt, welcher zugleich demjenigen Dreieck eingeschrieben ist, das von den drei übrigen Grundpunkten des Büschels gebildet wird.

Dieser Satz, welcher in dem besonderen Fall, dass der durch einen der vier Grundpunkte gelegte Kegelschnitt ein Geradenpaar ist, das in dem Grundpunkte seinen Doppelpunkt hat, auf den vorhin bewiesenen hinausläuft, lässt sich auch in etwas anderer Form so aussprechen:

Wenn drei Kegelschnitte einen Punkt gemein haben, so haben je zwei derselben drei andere Punkte gemein, welche ein Dreieck bilden; die neun Seiten der hierdurch erhaltenen drei Dreiecke berühren einen und denselben Kegelschnitt. Eins der Dreiecke ist ABC , die andern sind zwei von den xyz . Umgekehrt:

Wenn einem Kegelschnitt drei Dreiecke umgeschrieben sind, so liegen die sechs Ecken je zweier derselben allemal auf einem neuen Kegelschnitt; die auf diese Weise erhaltenen drei neuen Kegelschnitte laufen durch einen und denselben Punkt.

Diese Umkehrung ergibt sich so. Die drei Dreiecke, welche demselben Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ umgeschrieben sind, seien $abc, a_1b_1c_1, a_2b_2c_2$; es seien die Kegelschnitte, die abc und $a_1b_1c_1$, abc und $a_2b_2c_2$, $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$ umgeschrieben sind, mit $(01), (02), (12)$ bezeichnet. Durch den vierten Schnitt der beiden ersten und die Punkte a_1, b_1, a_2, b_2 sei der Kegelschnitt $K^{(2)}$ gelegt, welcher (01) und (02) zum vierten Male in c_1', c_2' trifft; dann sind die drei Dreiecke $abc, a_1b_1c_1', a_2b_2c_2'$ demselben Kegelschnitte umgeschrieben, der aber mit $\mathfrak{R}^{(2)}$ identisch ist, da er mit ihm die Seiten von abc und a_1b_1, a_2b_2 als Tangenten gemein hat. Demnach

ist c_1' mit c_1 identisch als Schnitt der beiden zweiten Tangenten aus a_1, b_1 an $\mathfrak{K}^{(2)}$, ebenso c_2' mit c_2 und daher $K^{(2)}$ mit (12); d. h. (12) geht durch den vierten Schnitt von (01) und (02).

Der allgemeinste Satz, welcher aus der Verbindung eines Kegelschnittbüschels mit einem beliebig liegenden Kegelschnitt hervorgeht, kann erst später gewonnen werden (Nr. 346).

- 178 Wenn alle vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels in einen Punkt zusammenrücken, so dass in diesem die Kegelschnitte des Büschels sich vierpunktig berühren, so stellt die Tangente des Punktes alle sechs Seiten des Vierecks dar, und es giebt nur ein Geradenpaar im Büschel, dessen beide Geraden überdies in dieser Tangente sich vereinigt haben. Der Schnitt mit ihr ist also auf jeder Transversale der eine Doppelpunkt der vom Büschel eingeschnittenen Involution. Ist daher ein Kegelschnitt \mathfrak{K} gegeben und auf ihm der Punkt t mit der Tangente t und ausserdem ein beliebiger Punkt a , so construiren man auf allen Strahlen durch a in der Involution, von der der Schnitt mit t der eine Doppelpunkt ist und die beiden Schnitte mit \mathfrak{K} ein Paar bilden, den zu a conjugirten Punkt; sein Ort ist *der Kegelschnitt, welcher durch a und t geht und in letzterem Punkte den gegebenen Kegelschnitt \mathfrak{K} vierpunktig berührt.*

§ 41. Andere Entstehungsart des Kegelschnittbüschels.

- 179 Von einem Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten A, B, C, D sei ein beliebiges Individuum $K^{(2)}$ durch zwei Strahlbüschel erzeugt, von denen eines seinen Grundpunkt in B und das andere in einem beliebigen Punkte X des Kegelschnitts $K^{(2)}$ hat, so haben wir drei Paare entsprechender Strahlen dieser beiden erzeugenden Strahlbüschel: BC und XC, BD und XD, BA und XA . Halten wir nun die Gerade $XA = \mathfrak{G}$ fest, verändern aber X auf ihr, so entstehen nach und nach sämtliche Kegelschnitte des Büschels; und von den beiden projectiven Strahlbüscheln ist das eine B unveränderlich; das andere verändert seinen Grundpunkt auf einer festen Gerade \mathfrak{G} , geht aber beständig durch eine feste Punktreihe auf der Gerade CD , welche mit dem Strahlbüschel in B projectiv ist. Die drei oben angegebenen Strahlenpaare bestimmen drei Paare entsprechender Elemente für die projective Beziehung zwischen dem Büschel B und der Punktreihe auf \mathfrak{G} , und diese drei Paare verändern sich nicht, also auch nicht die projective Beziehung. Wir können daher folgende neue Entstehungsweise des Kegelschnittbüschels aussprechen:

In der Ebene ist ein festes Strahlbüschel

$B(abc \dots x \dots)$

und eine Gerade \mathfrak{A} als Träger einer festen mit dem Strahlbüschel projectiven Punktreihe $(abc \dots \xi \dots)$ gegeben, und es bewegt sich ein veränderlicher Punkt X auf einer gegebenen Gerade \mathfrak{G} als Grundpunkt eines mit der Punktreihe perspectiven Strahlbüschels $X(abcd \dots \xi \dots)$; dann wird jedesmal von den beiden projectiven Strahlbüscheln B und X ein Kegelschnitt erzeugt; alle diese Kegelschnitte gehen durch vier feste Punkte und bilden also ein Kegelschnittbüschel.

Die in der angegebenen Weise construirten Kegelschnitte gehen nämlich zunächst sämmtlich durch den festen Punkt B , sodann durch die beiden Doppelpunkte C und D derjenigen beiden auf dem Träger \mathfrak{A} befindlichen projectiven Punktreihen, von denen eine die gegebene $(abc \dots \xi \dots)$ ist, während die andere durch das feste Strahlbüschel $B(abc \dots x \dots)$ auf \mathfrak{A} ausgeschnitten wird, endlich noch durch einen vierten festen Punkt A , denjenigen nämlich, in welchem die Gerade \mathfrak{G} von dem Strahle des Strahlbüschels (B) getroffen wird, welcher dem Punkt $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ entspricht. Durch diese reelle Construction können wir ebenso gut zu einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten gelangen, wie bei der früheren (Nr. 162), als zu einem Kegelschnittbüschel, von dem nur zwei Grundpunkte reell und die beiden andern imaginär sind. Die Grundpunkte A und B sind immer reell; die Punkte C und D sind aber die Doppelpunkte zweier auf einander liegender projectiver Punktreihen auf dem Träger \mathfrak{A} und können ebenso gut reell wie imaginär sein (Nr. 31). Wir können die bestimmenden Gebilde offenbar so annehmen, dass der eine oder andere Fall eintritt, und beide Systeme von Kegelschnitten werden denselben Namen „Kegelschnittbüschel“ beanspruchen können; denn alle Eigenschaften, welche dem einen zukommen, müssen mit der Modalität, dass gewisse Elemente imaginär werden, in gleicher Weise auch dem andern zukommen.

Wir begnügen uns hier damit, aus der neuen Entstehungsart des ¹⁸⁰ Kegelschnittbüschels, welche auch zu einem Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten führt, die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels herzuleiten, dass jede Transversale durch dasselbe in einer Involution geschnitten wird. Diese Transversale \mathfrak{I} werde von dem Strahlbüschel $B(abc \dots x \dots)$ in der Punktreihe $a_1 b_1 c_1 \dots \xi_1 \dots$ geschnitten; die beiden Punktreihen auf \mathfrak{I} und \mathfrak{A} sind dann projectiv, und die Verbindungslinie $\xi\xi_1$ umhüllt daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher \mathfrak{I} und \mathfrak{A} berührt. Um die Schnittpunkte eines beliebigen

Kegelschnitts $K^{(2)}$ des Büschels mit der Transversale \mathfrak{T} zu ermitteln, haben wir solche zwei Strahlen $X\mathfrak{x}$ und x zu ermitteln, welche sich auf \mathfrak{T} schneiden; der Schnitt \mathfrak{x}_1 von x mit \mathfrak{T} liegt dann auf $X\mathfrak{x}$; also haben wir aus X an den eben ermittelten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ das Tangentenpaar zu legen; die Schnittpunkte dieser beiden Tangenten mit der Transversale \mathfrak{T} werden zugleich die Schnittpunkte derselben mit dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ sein. Nun ist aber \mathfrak{T} selbst eine Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ und es gilt der Satz (Nr. 110), dass die Tangentenpaare aus den Punkten X einer Gerade \mathfrak{G} an einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ um ihn eine Tangenteninvolution bilden, von welcher irgend eine feste Tangente \mathfrak{T} desselben in den Punktepaaren einer Involution getroffen wird; folglich wird die Transversale \mathfrak{T} von den Kegelschnitten $K^{(2)}$ des Büschels in Punktepaaren einer Involution geschnitten, was zu beweisen war. Diese Eigenschaft findet jetzt also ganz unabhängig davon statt, ob das Kegelschnittbüschel vier reelle Grundpunkte hat oder zwei reelle und zwei imaginäre.

181 Sobald das Kegelschnittbüschel vier reelle Grundpunkte hat, kommen drei Geradenpaare in ihm vor; das ergibt sich auch aus der jetzigen Herstellung des Büschels. Es seien C und D die beiden reellen Doppelpunkte der in \mathfrak{A} auf einander liegenden projectiven Punktreihen, so leuchtet ein, dass für den Punkt X_0 auf \mathfrak{G} , welcher in der Gerade BC sich befindet, die beiden den Kegelschnitt des Büschels erzeugenden Strahlbüschel perspectiv werden, der Kegelschnitt also in zwei Geraden zerfällt; dasselbe gilt für denjenigen Punkt X_0' , in welchem BD die Gerade \mathfrak{G} trifft. Diese beiden Geradenpaare sind nicht reell, wenn die Doppelpunkte C und D der beiden in \mathfrak{A} zusammenliegenden projectiven Punktreihen imaginär sind. Es kommt aber noch ein drittes Geradenpaar vor, welches dem Schnittpunkte X_0'' von \mathfrak{G} mit \mathfrak{A} entspricht. In diesem Falle artet die Projectivität aus, und der Kegelschnitt löst sich in die beiden Geraden BA und \mathfrak{A} auf. Dieses Geradenpaar ist reell, auch wenn die Doppelpunkte auf dem Träger \mathfrak{A} es nicht sind. Wir schliessen hieraus: In einem Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten giebt es nur ein *reelles Geradenpaar*, und dasselbe besteht aus der Verbindungslinie der beiden reellen Grundpunkte und einer bestimmten anderen Geraden \mathfrak{A} , welche als die Verbindungslinie der beiden imaginären Grundpunkte aufgefasst werden kann und *ideelle gemeinschaftliche Secante* genannt wird.

Stillschweigend haben wir solche ideellen gemeinsamen Secanten im Vorangehenden schon einmal angenommen.

182 Nimmt man irgend zwei Kegelschnitte K und K^1 des Büschels als gegeben an, so sind wir im Stande, die andere gemeinschaftliche

Secante, d. h. den andern Theil des Geradenpaares, von dem einer die gemeinschaftliche Secante ist, welche die reellen gemeinsamen Punkte A, B verbindet, zu construiren, unabhängig davon, ob jene andere gemeinschaftliche Secante eine eigentliche oder eine ideelle ist. Denn wegen der charakteristischen Eigenschaft des Büschels haben wir nur nöthig, auf einer beliebigen Transversale \mathfrak{T} die Schnittpunktepaare a und α , a^1 und α^1 der Kegelschnitte K und K^1 zu ermitteln und in der Involution, welche durch die Paare $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$ bestimmt wird, den Punkt σ zu bestimmen (Nr. 51), welcher dem Schnittpunkte $s = (AB, \mathfrak{T})$ conjugirt ist; alle Punkte σ , welche wir auf diese Weise construiren, müssen auf einer bestimmten Gerade \mathfrak{A} liegen, welche die gesuchte ist.

Diese Construction kann linear so ausgeführt werden:

Sind von dem Kegelschnitte K die Punkte A, B, p, q, r und von dem Kegelschnitt K^1 die Punkte A, B, p^1, q^1, r^1 gegeben, so ermittle man die andern Schnittpunkte π, π^1 von pp^1 mit den Kegelschnitten K, K^1 ; trifft pp^1 die Gerade AB in s , und ist σ der conjugirte Punkt zu s in der durch $p\pi, p^1\pi^1$ bestimmten Involution, so liegt σ auf der gesuchten Gerade. Verfährt man mit der Gerade qq^1 ebenso, so erhält man einen zweiten Punkt derselben, und sie ist durch diese beiden Punkte schon bestimmt.

Wir können uns auch, anstatt der Transversale \mathfrak{T} , eines beliebigen Kegelschnitts \mathfrak{K} bedienen, welcher durch A und B geht. Er treffe den Kegelschnitt K noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinie \mathfrak{B} , und K^1 in zwei Punkten, deren Verbindungslinie \mathfrak{B}^1 sei, so wird der Schnittpunkt $\sigma = \mathfrak{B}\mathfrak{B}^1$ auf der Gerade \mathfrak{A} liegen. Denn ziehen wir durch σ eine Transversale \mathfrak{T} , welche K in a und α , K^1 in a^1 und α^1 trifft und die Gerade AB in s , endlich den Kegelschnitt \mathfrak{K} in b und β , so sind erstens $a\alpha$, $b\beta$ und $s\sigma$ drei Punktepaare einer Involution, zweitens auch $a^1\alpha^1$, $b\beta$ und $s\sigma$; beide Involutionen müssen identisch sein, weil zwei Paare gemeinsam sind: $b\beta$ und $s\sigma$. Folglich sind auch $a\alpha$, $a^1\alpha^1$ und $s\sigma$ drei Paare in Involution; also liegt σ auf der andern* gemeinschaftlichen Secante \mathfrak{A} der beiden Kegelschnitte K und K^1 . Es ergibt sich dies aber auch aus dem Satze (Nr. 176), dass, wenn drei Kegelschnitte zwei Punkte gemeinsam haben, die drei andern gemeinsamen Secanten, die sie zu je zweien haben, in denselben Punkt zusammenlaufen.

* Wobei „andere“ in dem obigen Sinne zu verstehen ist: diejenige gemeinsame Secante, die mit AB ein Geradenpaar des Büschels bildet; denn bei vier reellen Schnittpunkten giebt es ja sechs (reelle) gemeinsame Secanten.

Hierdurch ist ein einfaches Mittel gegeben, die ideelle gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte, welche nur zwei reelle Schnittpunkte haben, zu construiren; sind nämlich K und K^1 die beiden gegebenen Kegelschnitte, welche die reellen Schnittpunkte A und B haben, so lege man durch A und B einen beliebigen Kegelschnitt \mathfrak{K} , der K in zwei andern Punkten trifft und K^1 ebenfalls; die beiden Verbindungslinien dieser je zwei Punkte treffen sich in einem Punkte σ derjenigen Gerade \mathfrak{A} , welche die gesuchte (ideelle) gemeinschaftliche Secante der gegebenen Kegelschnitte K und K^1 ist; es reicht also hin, einen zweiten Punkt σ mittelst eines andern Kegelschnitts \mathfrak{K}^1 zu construiren, um die Gerade \mathfrak{A} zu erhalten. Halten wir die Kegelschnitte \mathfrak{K} und K^1 fest und verändern K , indem wir ihn sämtliche Kegelschnitte des Büschels durchlaufen lassen, so bleibt der Punkt σ fest als Schnittpunkt der andern gemeinsamen Secante \mathfrak{A} des Büschels und derjenigen, welche \mathfrak{K} und K^1 haben; und wir erkennen hieraus die Gültigkeit eines Nr. 174 für den Fall eines Kegelschnittbüschels mit vier reellen Grundpunkten bewiesenen Satzes auch in dem Falle, dass nur zwei Grundpunkte reell und die beiden andern imaginär sind.

183 Um zu entscheiden, ob ein Kegelschnitt des Büschels *Ellipse, Hyperbel oder Parabel* ist, haben wir nur nachzusehen, wie oft in den beiden projectiven Strahlbüscheln, welche ihn erzeugen, zwei entsprechende Strahlen parallel laufen; die Parallele zu jedem Strahl x des festen Strahlbüschels B durch den entsprechenden Punkt \mathfrak{x} der gegebenen Punktreihe \mathfrak{A} trifft die Gerade \mathfrak{G} in einem solchen Punkte X , dass $X\mathfrak{x}$ und x zwei parallele entsprechenden Strahlen sind, also der Kegelschnitt, welcher dieser Lage von X entspricht, einen unendlich entfernten Punkt hat. *Nun umhüllen aber alle diese Parallelen, welche zu den Strahlen eines Büschels durch die entsprechenden Punkte einer projectiven Punktreihe gezogen sind, eine Parabel $P^{(2)}$, wie in Nr. 154 erkannt worden ist.*

Es können zwei Fälle eintreten: 1) Die Gerade \mathfrak{G} schneidet die Parabel $P^{(2)}$ nicht; alsdann sind sämtliche Kegelschnitte des Büschels Hyperbeln, weil durch jeden Punkt X der Gerade \mathfrak{G} ein Tangentenpaar an die Parabel geht, also der dem Punkte X zugehörige Kegelschnitt des Büschels zwei unendlich entfernte Punkte hat; oder 2) die Gerade \mathfrak{G} schneidet die Parabel $P^{(2)}$ in zwei reellen Punkten; dann giebt es in dem Kegelschnittbüschel eine Reihe von Hyperbeln und eine Reihe von Ellipsen, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden. Die letzteren gehören denjenigen beiden Punkten X der Gerade \mathfrak{G} zu, in welchen sie von der Parabel $P^{(2)}$ geschnitten wird; die zwischen den beiden Schnittpunkten liegenden Punkte X

können nur Ellipsen hervorrufen, da durch sie keine Tangenten der Parabel $P^{(2)}$ gehen; die ausserhalb jener beiden Schnittpunkte $P^{(2)}$ liegenden Punkte X der Gerade \mathcal{G} liefern nur Hyperbeln. Im ersten wie im zweiten Falle giebt es nur eine gleichseitige Hyperbel in dem Kegelschnittbüschel; diese entspricht dem Schnittpunkte der Gerade \mathcal{G} mit der Leitlinie der Parabel $P^{(2)}$, weil die Leitlinie der Ort aller rechtwinkligen Tangentenpaare an die Parabel ist. In dem besonderen Falle, dass die Gerade \mathcal{G} die Leitlinie selbst ist, besteht das Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln. Wenn aber die Gerade \mathcal{G} die Parabel $P^{(2)}$ berührt, findet sich in dem Büschel, welches sonst aus lauter Hyperbeln besteht, nur eine einzige Parabel vor, und die Reihe von Ellipsen fällt vollständig fort.

Die Parabel $P^{(2)}$ entscheidet auch darüber, ob das Kegelschnittbüschel vier reelle oder nur zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte hat, denn das aus B an diese Parabel gelegte Tangentenpaar trifft die Gerade \mathcal{A} offenbar in den beiden festen Punkten C und D , durch welche sämmtliche Kegelschnitte des Büschels gehen; liegt also der Punkt B ausserhalb der Parabel $P^{(2)}$, so hat das Büschel vier reelle Grundpunkte, liegt B innerhalb der Parabel, so hat es zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte. Wir könnten endlich für den Fall von vier reellen Grundpunkten auch aus der neuen Entstehungsweise das in Nr. 168 gefundene Kennzeichen herleiten, nach welchem aus der gegenseitigen Lage der vier Grundpunkte zu entscheiden ist, welcher der beiden Fälle 1) oder 2), die nach dem Obigen eintreten können, wirklich stattfindet. Doch überlassen wir dies dem Leser. Wenn dagegen das Büschel zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte hat, so zeigt es sich, dass der Fall 1) eintritt, sobald die Gerade \mathcal{A} , auf welcher die beiden imaginären Grundpunkte liegen, die beiden reellen Grundpunkte von einander trennt, der Fall 2) aber, sobald die beiden reellen Grundpunkte auf derselben Seite der Gerade \mathcal{A} liegen.

§ 42. Erzeugung des Kegelschnittbüschels mittelst zweier Involutionen.

Wir haben im Vorigen zwei Arten von Kegelschnittbüscheln 184 kennen gelernt, die in ihrer charakteristischen Eigenschaft übereinstimmen, aber in den sie bestimmenden Elementen verschieden sind, nämlich das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten und das Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten. Die sämmtlichen Kegelschnitte eines Büschels der einen,

wie der andern Art haben wir auf reellem Wege construiren gelehrt. Es giebt noch eine dritte Art von *Kegelschnittbüscheln*, nämlich mit vier imaginären Grundpunkten, und es kommt darauf an, auch für diesen Fall sämtliche Kegelschnitte eines solchen Büschels auf reellem Wege zu construiren. Diese Construction wird auch die beiden vorigen Fälle umfassen.

Nehmen wir zunächst ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten g', h', g'', h'' und betrachten die gemeinsame Secante $g'h'$. Die ihr zugehörige Involution conjugirter Punkte ist für alle Kegelschnitte des Büschels die nämliche; denn sie ist durch ihre Doppelpunkte g', h' vollständig bestimmt. Die Diagonale, welche die Diagonalepunkte $g = (g'g'', h'h'')$ und $h = (g'h'', h'g')$ des vollständigen Vierecks der Grundpunkte verbindet, ist in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels polar zu dem Diagonalepunkte $(g'h', g'h'')$ und enthält also die Pole von $g'h'$ sowohl wie von $g'h''$ in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels. Sei $K^{(2)}$ einer von ihnen und a, α die Punkte, in denen er von gh geschnitten wird, so wollen wir diese — falls sie reell sind — als Grundpunkte der $K^{(2)}$ erzeugenden projectiven Büschel annehmen. Da nun gh durch den Pol von $g'h'$ geht, so ist $a\alpha$ ein Paar der krummen Involution auf $K^{(2)}$, von welcher dieser Pol das Centrum und also $g'h'$ die Axe ist; und wir wissen, dass, wenn wir irgend einen Punkt des Kegelschnitts mit diesem Punktepaare $a\alpha$ verbinden, die Verbindungslinien in die Axe ein Paar $b\beta$ der Involution conjugirter Punkte, die ihr in Bezug auf $K^{(2)}$ zugehört, einschneiden (Nr. 109); durchläuft der Punkt den Kegelschnitt, so durchläuft $b\beta$ diese ganze Involution. Die beiden Punkte a, α auf gh haben also die Eigenschaft, dass die den Kegelschnitt erzeugenden projectiven Strahlbüschel um sie in $g'h'$ involutorische projective Punktreihen hervorrufen, und zwar ist die Involution gerade die der $g'h'$ in Bezug auf $K^{(2)}$ zugehörige (Nr. 109).

Weil aber gh auch durch den Pol von $g'h''$ geht, so gilt das Nämliche auch für diese Gerade und ihre Involution conjugirter Punkte.

Die Involution hingegen, welche durch das Kegelschnittbüschel in gh eingeschnitten wird, hat g, h zu Doppelpunkten, da die Schnitte mit zwei Geradenpaaren des Büschels sich je in ihnen vereinigen oder weil diese Punkte, als zwei Ecken eines allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsamen Polardreiecks, conjugirt in Bezug auf alle sind. Durchläuft $a\alpha$ diese Involution, so erhalten wir für alle Kegelschnitte des Büschels — oder streng genommen für alle diejenigen, welche gh reell schneiden — Grundpunkte erzeugender projectiver Strahlbüschel, welche in jede der beiden gemeinsamen Secanten $g'h', g'h''$, die zusammen

durch alle vier Grundpunkte gehen, die ihr in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels zugehörige Involution einschneiden. Weil gh die Polare des Schnittpunktes ($g'h', g''h''$) ist, so sind in den beiden Involutionen die Schnittpunkte mit gh conjugirt dem gemeinsamen Punkte der Träger.

Im vorliegenden Falle sind diese Involutionen beide hyperbolisch ¹⁸⁵ und ihre vier Doppelpunkte die allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsamen Punkte. Zu den beiden andern Arten von Kegelschnittbüscheln mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten oder mit vier imaginären müssen wir eine von ihnen oder beide elliptisch annehmen; und da kommt es nun darauf an, aus ihnen die dritte Involution zu gewinnen, in welcher je die beiden Grundpunkte der erzeugenden Büschel der verschiedenen Kegelschnitte conjugirt sind. Diese projectiven Büschel müssen in den Träger einer jeden der beiden Involutionen die beiden projectiven Punktreihen einschneiden, aus denen sie besteht.

Die beiden gegebenen Involutionen, deren reelle oder imaginäre Doppelpunkte die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels werden sollen, seien (y, η) und (z, ξ) auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; der Träger \mathfrak{A} der gesuchten Involution (x, ξ) muss dann die Punkte r und q auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ verbinden, welche dem gemeinsamen Punkte $p = \mathfrak{BC}$ in jenen Involutionen conjugirt sind.

Es sei $b\beta$ ein festes Paar der Involution (y, η) ; aus diesen Punkten projectiren wir die beiden projectiven Punktreihen der Involution (z, ξ) auf die Gerade \mathfrak{A} . Jedes Paar $z\xi$ dieser Involution giebt dann für die Projection sofort zwei Paare, indem man z aus b und ξ aus β , oder ξ aus b , z aus β projectiren kann. Die beiden projectiven Punktreihen, die auf \mathfrak{A} entstehen, sind aber involutorisch, denn nimmt man das Paar pq der (z, ξ) , so führt $bp, \beta q$ zu r, q und $bq, \beta p$ zu q, r ; mithin erhalten wir in qr ein involutorisches Paar, und demnach sind es alle (Nr. 37). Projectirt man also aus b, β die Involution (z, ξ) der Gerade \mathfrak{C} auf die Gerade \mathfrak{A} , so ergiebt sich ebenfalls eine Involution und qr ist ein Paar derselben. Jetzt sei $c\gamma$ ein festes Paar der (z, ξ) ; wird aus ihm die (y, η) auf die \mathfrak{A} projectirt, so ergiebt sich eine Involution, zu der ebenso qr als Paar gehört, aber auch die beiden Paare, die von $bc, \beta\gamma$ und von $b\gamma, \beta c$ eingeschritten werden. Alle drei gehören auch zur vorhinigen Involution, also sind beide identisch. Endlich sei $b_1\beta_1$ ein anderes Paar der (y, η) ; so giebt die Projection von (z, ξ) aus b_1, β_1 auf \mathfrak{A} wiederum eine Involution, zu welcher qr und die Schnittpunktepaare mit $b_1c, \beta_1\gamma$; $b_1\gamma, \beta_1c$ gehören; diese gehören aber zu unserer Involution auf \mathfrak{A} in Folge ihrer Entstehung aus $c\gamma$. Welches Paar aus (y, η) oder (z, ξ) auch genommen wird zur Projection je der andern Involution auf die Gerade \mathfrak{A} , immer ergiebt

sich auf dieser die nämliche Involution, die wir nun (x, ξ) nennen wollen. Und es erhellt, dass jede zwei von ihnen in derselben Weise zur dritten führen.

Einen Specialfall dreier solcher Involutionen haben wir schon gehabt, nämlich in den beiden Focalinvolutionen eines Kegelschnitts und der ausgezeichneten Involution I_∞ auf G_∞ (Nr. 138).

Die drei Involutionen (x, ξ) , (y, η) , (z, ζ) auf \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} haben demnach die Eigenschaft, dass, wenn x, y, z in gerader Linie liegen, für die drei conjugirten Punkte ξ, η, ζ dies gleichfalls gilt. Folglich liegen auch die Mittelpunkte der drei Involutionen in gerader Linie. Aber allgemeiner, irgend drei Paare $x\xi, y\eta, z\zeta$ sind immer sechs Punkte eines Kegelschnitts.

In der That, zur Involution auf \mathfrak{A} gehören $rq, x'\xi', x\xi$, wo x', ξ' die Schnitte mit yz und $\eta\xi$ sind; also ist: $(x'rx\xi) = (\xi'q\xi x) = (q\xi'x\xi)$ und mithin auch: $y(x'rx\xi) = \xi(q\xi'x\xi)$ oder, was dasselbe ist, $y(z\eta x\xi) = \xi(z\eta x\xi)$; daraus folgt die Behauptung.

Aber, was für uns das Wichtigste ist, zwei Punkte x, ξ eines Paares der Involution auf \mathfrak{A} sind so beschaffen, dass die Strahlen, welche von ihnen nach zwei conjugirten Punkten der Involution auf \mathfrak{B} gehen, auch \mathfrak{C} in zwei conjugirten Punkten der Involution dieser Gerade schneiden, oder anders gesagt, aus jenen Punkten werden die beiden Involutionen auf \mathfrak{B} , \mathfrak{C} durch die nämlichen projectiven Strahlbüschel projicirt. Und wir haben erhalten, was wir wollten: die Involution (x, ξ) , die durch die Paare der Grundpunkte der erzeugenden Strahlbüschel der Kegelschnitte entsteht, für welche die beiden gegebenen Involutionen (y, η) , (z, ζ) auf \mathfrak{B} , \mathfrak{C} gemeinsame Involutionen conjugirter Punkte sind, oder welchen die reellen oder imaginären Doppelpunkte dieser Involutionen gemeinsam sind; eine Construction, welche uns alle drei Arten von Kegelschnittbüscheln liefert.

186 Wir haben nun die Art der drei Involutionen zu untersuchen. Auf jeder der drei Geraden sind die Ecken des Dreiseits $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ conjugirt. Eine Gerade trifft bekanntlich (Nr. 55) zwei Seiten eines Dreiecks zwischen den Ecken, die dritte ausserhalb, oder alle drei ausserhalb. Nehmen wir also drei in gerader Linie gelegene Punkte a, b, c auf \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , welche alle ausserhalb liegen; die drei conjugirten α, β, γ liegen wieder in gerader Linie, und wir haben dann zwei Fälle: entweder liegen diese Punkte auch alle ausserhalb; dann sind alle drei Involutionen hyperbolisch; oder nur einer liegt ausserhalb; dann ist nur eine Involution hyperbolisch, die beiden andern sind elliptisch.

Die Involutionen sind daher entweder alle drei hyperbolisch, oder nur eine ist es, die beiden andern sind elliptisch.

Die Verbindungslinie zweier zu verschiedenen Involutionen gehöriger Doppelpunkte geht durch einen Doppelpunkt der dritten Involution. Diese vier Geraden bilden ein vollständiges Vierseit, in dem je zwei Doppelpunkte derselben Involution Gegenecken sind.

In Bezug auf die beiden Involutionen auf \mathfrak{B} , \mathfrak{C} haben wir drei Fälle:

I. *Sie sind beide hyperbolisch, dann ist es auch die dritte auf \mathfrak{A} ; alle vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels sind reell.*

II. *Sie sind verschiedenartig; dann ist die dritte elliptisch; zwei Grundpunkte sind reell, zwei imaginär.*

III. *Sie sind beide elliptisch; dann ist die dritte wiederum hyperbolisch; alle vier Grundpunkte sind imaginär.*

Durch die drei Involutionen wird jeder Gerade $l = xyz$ eine andere Gerade $\lambda = \xi\eta\zeta$ zugeordnet, aber auch jedem Punkte ein Punkt. Die Geraden, welche von einem Punkt P nach den Ecken von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gehen, mögen die Gegenseiten in x, y, z treffen und ξ, η, ζ seien deren conjugirte Punkte, so laufen auch die Verbindungslinien dieser mit den Gegenecken in einen Punkt Π zusammen. Wenn die drei Geraden yz, zx, xy je die dritten Seiten in x_1, y_1, z_1 schneiden, so liegen diese Punkte in einer geraden Linie, der harmonischen Polare von P (Nr. 55). Sind nun wiederum ξ_1, η_1, ζ_1 die conjugirten von x_1, y_1, z_1 , so liegen je in gerader Linie ξ_1, η, ζ ; ξ, η_1, ζ ; ξ, η, ζ_1 ; ξ_1, η_1, ζ_1 .

Folglich sind die Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\xi\eta\zeta$ perspectiv; Perspectivitätsaxe ist $\xi_1\eta_1\zeta_1$, und Perspectivitätscentrum ist Π . Entsprechende Punkte P und Π sind harmonische Pole entsprechender Geraden.

Dreht sich l um einen Punkt O , so bewegen sich y, z auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ perspectiv, also η und ζ projectiv, aber nicht perspectiv; denn in $p = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ vereinigen sich nicht entsprechende Punkte, da im allgemeinen keiner von den Strahlen des Büschels zugleich durch r und q geht; also umhüllt $\lambda = \eta\zeta$ einen Kegelschnitt, der \mathfrak{B} und \mathfrak{C} tangirt; für den durch p gehenden Strahl l fällt λ in $qr = \mathfrak{A}$.

Die Beziehung zwischen den entsprechenden Strahlen l und λ ist so, dass, wenn einer von ihnen ein Strahlbüschel beschreibt, der andere einen Kegelschnitt umhüllt, welcher $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ tangirt.

Bei den beiden Focalinvolutionen und I_∞ sind l und λ stets rechtwinklig und conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt.

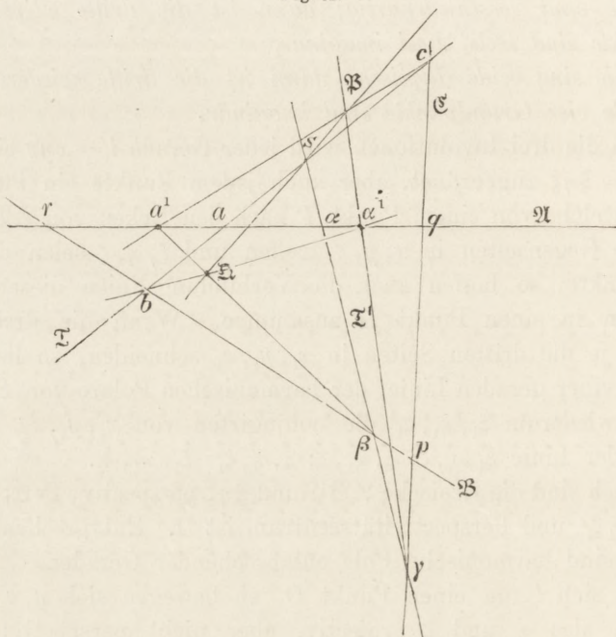
Kehren wir aber zum Kegelschnittbüschel zurück.

Durch einen Punkt \mathfrak{P} geht nur ein Kegelschnitt des Büschels; denn die beiden Involutionen, welche aus ihm die gegebenen Involutionen

(in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirter Punkte) auf \mathfrak{B} , \mathfrak{C} projiciren, haben ein Strahlenpaar gemein. Dies schneidet in \mathfrak{A} das Punktepaar aa ein, das zur Erzeugung des Kegelschnitts dient.

In den Fällen II und III, wo mindestens eine jener Involutionen elliptisch ist, ist dies Paar stets reell, in I kann es imaginär sein (Nr. 44); der fragliche Kegelschnitt kann imaginär schneiden. Dass ein durch \mathfrak{B} gehender Kegelschnitt und nur einer vorhanden, bedarf aber in diesem Falle, wo die Grundpunkte alle reell sind, keines Beweises.

Fig. 62.



189 Die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, dass eine beliebige Transversale von seinen Kegelschnitten in den Paaren einer Involution getroffen wird, lässt sich nun auch aus dieser allgemeinsten Construction des Büschels ableiten und ist also richtig, gleichviel ob die Grundpunkte alle vier reell sind oder nur zwei oder keiner.

Die Transversale \mathfrak{T} treffe (Fig. 62) die drei Geraden \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} in den Punkten a, b, c ; und α, β, γ seien zu diesen Punkten conjugirt in den drei Involutionen (x, ξ) , (y, η) , (z, ζ) auf \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , so liegen auch sie in einer Gerade \mathfrak{T}^1 . Zwei beliebige conjugirte Punkte a^1, a^1 der ersten Involution nehmen wir zu Grundpunkten der erzeugenden Büschel eines Kegelschnitts $K^{(2)}$ des Büschels.

Wir wissen, dass die sechs Punkte $a^1, \alpha^1, b, \beta, c, \gamma$, welche drei Paare der drei Involutionen bilden, auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen; folglich ergibt das *Pascal'sche* Sechseck $bca^1\beta\gamma\alpha^1$, dass

$$(bc, \beta\gamma) = \mathfrak{T} \mathfrak{T}^1 = s, \quad (ca^1, \gamma\alpha^1) = \mathfrak{P}, \quad (b\alpha^1, \beta a^1) = \mathfrak{Q}$$

auf einer Gerade liegen. Es seien ferner p, p_1 die Schnitte der Transversale \mathfrak{T} mit dem Kegelschnitte $K^{(2)}$ des Büschels, auf welchem auch \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} liegen, da sie Schnitte entsprechender Strahlen der erzeugenden Büschel a^1, α^1 sind; also ist:

$$a^1(\alpha^1, \mathfrak{P}, p, p_1) \wedge \mathfrak{Q}(\alpha^1, \mathfrak{P}, p, p_1) \wedge \mathfrak{Q}(\mathfrak{P}, \alpha^1, p_1, p);$$

demnach, wenn mit \mathfrak{T} geschnitten wird:

$$acpp_1 \wedge sbp_1p,$$

also sind die Punktepaare as, bc und pp_1 in Involution. Die beiden ersten Paare bleiben fest, wenn $K^{(2)}$ im Büschel sich bewegt; also beschreibt p, p_1 die durch sie festgelegte Involution.

Das Paar bc kommt von dem Geradenpaare $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, das Paar as aber von demjenigen Kegelschnitte des Büschels her, welcher durch die projectiven Büschel a, α erzeugt wird.

Das vollständige Viereck $\beta\gamma r q$ schneidet mit seinen Gegenseiten in \mathfrak{T} drei Paare in Involution, von denen zwei bc, as sind; so dass die Involution die vom Kegelschnittbüschel eingeschnittene ist.

Schneiden wir das Dreieck $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{T}$ mit den Transversalen \mathfrak{A} und \mathfrak{T}^1 , so ergibt sich wegen der Relation des *Menelaus* (Nr. 54):

$$\frac{ba}{ca} \cdot \frac{cq}{pq} \cdot \frac{pr}{br} = 1, \quad \frac{bs}{cs} \cdot \frac{c\gamma}{p\gamma} \cdot \frac{p\beta}{b\beta} = 1;$$

demnach:

$$(bcas) \cdot (cpq\gamma) \cdot (pbr\beta) = 1$$

und:

$$(bcas) = \frac{1 - (pqe\gamma)}{1 - (prb\beta)} \quad (\text{Nr. 8}).$$

Sind nun die beiden Involutionen auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, in denen $p, r; b, \beta$, bzw. $p, q; c, \gamma$ conjugirt sind, elliptisch, so sind $(prb\beta)$ und $(pqe\gamma)$ negativ, also ist $(bcas)$ positiv und die Involution (bc, as) hyperbolisch.

Ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten wird von jeder Transversale in einer hyperbolischen Involution geschnitten.

Auch aus der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnitt- 190
büschels kann man ableiten, dass durch jeden beliebigen Punkt P ein und nur ein einziger Kegelschnitt geht, welcher dem Büschel angehört; denn auf jeder Transversale durch P bestimmen die Kegelschnitte des Büschels eine Involution, welche schon durch irgend zwei Paare conjugirter

Punkte festgelegt wird. Der dem Punkte P conjugirte Punkt gehört dem einzigen Kegelschnitt des Büschels an, welcher durch P geht, und drehen wir die Transversale um P , so erhalten wir als Aufeinanderfolge der conjugirten Punkte den genannten Kegelschnitt. Es können durch P keine zwei verschiedenen Kegelschnitte des Büschels gehen, denn sonst müsste es in einer Involution zu einem Punkte mehr als einen conjugirten Punkt geben.

Es folgt ferner, dass *das Kegelschnittbüschel durch zwei Kegelschnitte vollständig bestimmt ist*, weil dieselben auf jeder Transversale die Involution durch zwei Paare conjugirter Punkte bestimmen.

Aber eine Transversale \mathfrak{T} braucht nicht von jedem Kegelschnitte des Büschels getroffen zu werden, d. h. es kann auch imaginäre Punktepaare in einer Involution geben. Um dieses Verhalten klarer zu übersehen, denken wir uns die beiden Schnittpunkte der Transversale \mathfrak{T} mit einem Kegelschnitte des Büschels als die Doppelpunkte derjenigen Involution, welche der Gerade \mathfrak{T} in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$ zugehört (Nr. 97); ist diese hyperbolisch, so sind die Schnittpunkte reell, ist sie elliptisch, so sind sie imaginär. Für jeden Kegelschnitt $K^{(2)}$ erhalten wir also auf der Transversale \mathfrak{T} eine andere Involution, und alle diese unendlich vielen Involutionen auf \mathfrak{T} stehen in dem Zusammenhange mit einander, dass ihre Doppelpunkte selbst eine Involution (x, ξ) bilden, welche von dem Kegelschnittbüschel auf \mathfrak{T} ausgeschnitten wird.

Nehmen wir nun einen beliebigen Hilfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in der Ebene an und projiciren aus einem Punkte B desselben die auf \mathfrak{T} gelegenen Involutionen auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ in krumme Involutionen, von denen jede ein Centrum P hat (Nr. 108). Wir verwandeln also eine jede Involution auf \mathfrak{T} in einen Punkt P oder ein Strahlbüschel P . Ist die betrachtete Involution auf \mathfrak{T} hyperbolisch, so muss P ausserhalb des Hilfskegelschnittes $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen. P ist jedesmal der Pol derjenigen Gerade, welche die beiden Schnittpunkte des Hilfskegelschnitts mit den Strahlen, welche von B nach den beiden Doppelpunkten einer auf \mathfrak{T} befindlichen Involution laufen, oder die Doppelpunkte der zugehörigen krummen Involution verbindet. Da nun jene Doppelpunkte auf \mathfrak{T} selbst eine Involution (x, ξ) bilden, welche durch das Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird, so laufen die Sehnen alle durch einen festen Punkt O , das Centrum der krummen Involution auf $\mathfrak{K}^{(2)}$, in die sich diese Involution projicirt, und der Punkt P bewegt sich also auf einer festen Gerade \mathfrak{L} , der Polare von O in Bezug auf den Hilfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$. Alle Involutionen auf \mathfrak{T} sind daher in die Punkte P einer bestimmten Gerade \mathfrak{L} verwandelt, der Art, dass, wenn wir nunmehr von irgend

einem Punkte P der Gerade \mathfrak{L} die Polare construiren und ihre auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegenen Punkte mit B verbinden, dieses Strahlenpaar die Transversale \mathfrak{T} in einem Punktepaar der Involution (x, ξ) trifft. Hieraus zeigt sich, dass, wenn diese Involution (x, ξ) auf \mathfrak{T} elliptisch ist, der Punkt O innerhalb des Hilfskegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen muss, also die Gerade \mathfrak{L} denselben gar nicht trifft, mithin alle jene unendlich vielen Involutionen auf \mathfrak{T} hyperbolisch sind, oder was dasselbe sagt: *Alle Kegelschnitte des Büschels treffen eine Transversale \mathfrak{T} in reellen Punktepaaren, sobald die Involution auf \mathfrak{T} elliptisch ist, welche die Schnittpunkte je eines Kegelschnitts des Büschels zu conjugirten Punkten hat.* Wenn dagegen die Involution (x, ξ) auf \mathfrak{T} hyperbolisch ist, so liegt O ausserhalb des Hilfskegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, die Gerade \mathfrak{L} schneidet ihn daher in zwei reellen Punkten, welche die beiden Gebiete auf \mathfrak{L} abgrenzen, innerhalb deren solche Punkte P liegen, die reelle Tangentenpaare an $\mathfrak{K}^{(2)}$ zulassen, und solche P , durch welche keine Tangente geht. Von den unendlich vielen Involutionen auf \mathfrak{T} sind die einen hyperbolisch und die andern elliptisch. Den Uebergang bilden zwei parabolische Involutionen, welche den Doppelpunkten von (x, ξ) zugehören; d. h. es giebt zwei Kegelschnitte des Büschels, welche die Transversale \mathfrak{T} berühren, wie bereits bekannt ist. *Ist also die Involution (x, ξ) , welche von den Kegelschnitten eines Büschels auf einer Transversale \mathfrak{T} ausgeschnitten wird, hyperbolisch, so treffen nicht alle Kegelschnitte desselben die \mathfrak{T} in reellen Punktepaaren. Die hyperbolische Punktinvolution hat also auch imaginäre Paare conjugirter Punkte.*

Die elliptische hingegen hat keine solchen Paare; der Uebergangsfall, die Paare mit vereinigten Punkten sind ja nicht vorhanden.

Es drängt sich hiernach die unabweisbare Frage auf, ob aus der 191 in diesem Paragraphen angegebenen Erzeugungsweise des Kegelschnittbüschels in allen Fällen sämmtliche Kegelschnitte *reell* hervorgehen, die in dem Büschel enthalten sind. In den Fällen II und III fanden wir (Nr. 188) durch jeden Punkt \mathfrak{P} zwei reelle Strahlen, welche ein Punktepaar der Involution (y, η) auf \mathfrak{B} und zugleich eins derjenigen (z, ξ) auf \mathfrak{C} projectiren, und ihre Schnitte a, a mit \mathfrak{A} sind die Grundpunkte der projectiven Büschel, welche den durch \mathfrak{P} gehenden Kegelschnitt des Büschels erzeugen. *Alle (reellen) Kegelschnitte des Büschels schneiden in diesen beiden Fällen II, III die Gerade \mathfrak{A} reell.* Im Falle II folgt dies nach dem eben erhaltenen Ergebnisse auch daraus, dass die Involution (x, ξ) auf \mathfrak{A} , die ja durch das Kegelschnittbüschel eingeschnitten wird, elliptisch ist. Bemerkenswerth aber ist es im dritten Falle, indem doch da die Involution auf \mathfrak{A} hyperbolisch ist und als solche imaginäre Punktepaare besitzt. Also: *Wenn das Kegelschnittbüschel vier imaginäre*

Grundpunkte hat, so schneiden alle (reellen) Kegelschnitte des Büschels die Gerade \mathfrak{A} reell, obwohl die eingeschrittene Involution hyperbolisch ist.

Jeder von den Kegelschnitten des Büschels hat daher auf \mathfrak{A} eine hyperbolische Involution conjugirter Punkte. Diese Involution ist ja die Projection, aus irgend einem Punkte des Kegelschnitts, der krummen Involution auf ihm, für welche \mathfrak{A} Axe und der Pol $p = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ Centrum ist. Durch diesen Pol gehen im Falle III die beiden imaginär schneidenden Geraden $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; also liegt er ausserhalb des Kegelschnitts, und beide Involutionen, die krumme und die gerade, sind hyperbolisch. Auch im Falle II, wo eine der beiden Geraden $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ imaginär schneidet, liegt er ausserhalb, und es gilt für die Involutionen (conjugirter Punkte) auf \mathfrak{A} und die Schnitte der Kegelschnitte mit dieser Gerade das Nämliche.

In diesen beiden Fällen II und III erhalten wir also durch unsere Construction alle Kegelschnitte des Büschels.

Anders ist es im Falle I, wo die Involution auf \mathfrak{A} auch hyperbolisch ist; da giebt es Punkte \mathfrak{P} , bei denen die oben genannten Strahlen und also auch die Punkte a, a imaginär sind, die durchgehenden Kegelschnitte die \mathfrak{A} nicht reell schneiden und daher nicht auf die jetzige Weise (reell) erzeugt werden; aber das ist natürlich in diesem Falle, wo die vier Grundpunkte reell sind und wir besser direct mit ihnen operiren, nicht bedenklich.

192 In den Fällen I und III, wo die Involution (x, ξ) auf \mathfrak{A} hyperbolisch ist, kommen deren Doppelpunkte nicht von Kegelschnitten des Büschels her, welche \mathfrak{A} berühren, sondern von Geradenpaaren desselben, die ihre Doppelpunkte in diesen Punkten haben. In der That, durch jeden dieser beiden Doppelpunkte gehen ja zwei Geraden, welche von jeder der beiden andern Involutionen auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ einen Doppelpunkt enthalten; sie gehen daher durch die vier Grundpunkte und bilden ein Geradenpaar des Büschels.

Im Falle I sind dies reelle Geradenpaare, und durch sie gehen die \mathfrak{A} reell schneidenden Hyperbeln des Büschels in imaginär schneidende (im anderen Asymptotenwinkel) über.

Im Falle III aber sind diese Geradenpaare imaginär, jedoch mit reellem Doppelpunkte, da die Involution (x, ξ) auf \mathfrak{A} hyperbolisch ist; dies sind Kegelschnitte, die sich auf einen einzigen reellen Punkt reducirt haben, unendlich klein gewordene Ellipsen, die man Null-Ellipsen nennen könnte, ebenso wie man von Nullkreisen spricht.*

* Nullkreise sind Geradenpaare aus reellem Doppelpunkte nach den absoluten Punkten.

Sie bilden den Uebergang von (reellen) Ellipsen zu imaginären Curven des Büschels, von denen also die imaginären Punktepaare der Involution auf \mathfrak{A} herrühren und mit denen wir uns später beschäftigen werden.

Im Falle II sind diese Geradenpaare auch imaginär, aber ohne reelle Doppelpunkte; jede der beiden Geraden enthält einen reellen Punkt, den einen oder andern reellen Grundpunkt.

Das dritte Geradenpaar, \mathfrak{BC} , ist immer reell; es entsteht bei dem Paare qr der Involution auf \mathfrak{A} ; die erzeugende Projectivität artet aus.

Das allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsame Polardreieck, das durch die Doppelpunkte der Geradenpaare, die Diagonalpunkte des Vierecks der Grundpunkte, gebildet wird, hat in allen drei Fällen die Ecke $p = \mathfrak{BC}$ und die Gegenseite \mathfrak{A} reell. In I und III ist es vollständig reell, in II aber nur die genannten Elemente p und \mathfrak{A} .

§ 43. Ueber die besondere Art der in einem Büschel enthaltenen Kegelschnitte.

Die Frage, ob gleichzeitig Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen in einem 193
Kegelschnittbüschel vorkommen, ist zwar schon in Nr. 163, 164 und 183 für den Fall, dass es vier oder wenigstens zwei reelle Grundpunkte besitzt, beantwortet worden, soll aber hier noch einmal unabhängig davon, ob die Grundpunkte reell oder paarweise imaginär sind, allgemeiner und umfassender erörtert werden, indem wir nur die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels voraussetzen.

Die Involution (u, v) auf der unendlich entfernten Gerade G_∞ wollen wir durch folgende zwei Punktepaare bestimmen, erstens die unendlich fernen Punkte des immer reellen Geradenpaares \mathfrak{BC} und zweitens die unendlich fernen Punkte der \mathfrak{A} und derjenigen Gerade \mathfrak{M} , welche die Mittelpunkte der drei Involutionen verbindet (Nr. 185); letztere bilden das Punktepaar as in Nr. 189. Sie sind die unendlich fernen Punkte einer Hyperbel des Büschels.

Jede Hyperbel des Büschels liefert ein reelles, jede Ellipse ein imaginäres Punktepaar für die Involution (u, v) , jede Parabel ein Paar mit vereinigten Punkten. Je nachdem diese Involution hyperbolisch oder elliptisch ist, enthält das Büschel zwei reelle Parabeln oder keine; nach den Doppelpunkten der Involution gehen die Axen der Parabeln.

Liegt ein Grundpunkt im Unendlichen, so ist die Involution parabolisch; das Büschel enthält nur eine Parabel.

Wir wollen die gegenseitige Lage der beiden obigen Punktepaare, durch welche wir die Involution (u, v) bestimmt denken, genauer untersuchen, oder der Strahlenpaare aus irgend einem Punkte nach

ihnen. Wir nehmen den Punkt $p = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Man braucht nur die Parallele durch p zu \mathfrak{M} zu ziehen und erkennt sofort, dass diese Strahlenpaare die elliptische oder hyperbolische Lage (Nr. 47) haben und also (u, v) eine elliptische oder hyperbolische Involution ist, je nachdem diese Parallele zwischen q und r durchgeht oder nicht (Fig. 62). Wir wissen, in den drei Involutionsen $(x, \xi), (y, \eta), (z, \zeta)$ auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind je die Ecken des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, nämlich q und r, r und p, p und q conjugirt.

Bezeichnen wir die drei Mittelpunkte der Involutionsen, welche in der Gerade \mathfrak{M} liegen, beziehentlich mit m_a, m_b, m_c , so wird, je nachdem die Involution auf \mathfrak{A} hyperbolisch oder elliptisch ist, m_a ausserhalb qr liegen oder zwischen q und r , und ebenso bei den beiden andern; von den Doppelpunkten liegt aber immer einer zwischen jedem Paare conjugirter Punkte und der andere ausserhalb; endlich wird jede Seite des Dreiecks durch die beiden in ihr befindlichen Ecken in ein endliches Stück und zwei unendliche zerlegt, z. B. \mathfrak{A} in die drei Strecken q bis ∞, r bis ∞ und q bis r .

194 I. Die beiden Involutionsen auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} und also auch die auf \mathfrak{A} seien hyperbolisch; das Kegelschnittbüschel hat vier reelle Grundpunkte, die Doppelpunkte auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} . Die Mittelpunktslinie \mathfrak{M} muss alle drei Dreiecksseiten in ihren Verlängerungen treffen, d. h. sie trifft entweder:

- | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|----|----------------|--------|---------|-----|-----|-----|----------|----------|----------------|----------------|-----|-----|-----|-----------|---|-----------|
| | 1) | \mathfrak{B} | in der | Strecke | von | r | bis | ∞ | und | \mathfrak{C} | in der | von | p | bis | $\infty,$ | | |
| oder | 2) | \mathfrak{B} | „ | „ | „ | „ | p | „ | ∞ | „ | \mathfrak{C} | „ | „ | „ | q | „ | $\infty,$ |
| „ | 3) | \mathfrak{B} | „ | „ | „ | „ | r | „ | ∞ | „ | \mathfrak{C} | „ | „ | „ | q | „ | $\infty,$ |
| „ | 4) | \mathfrak{B} | „ | „ | „ | „ | p | „ | ∞ | „ | \mathfrak{C} | „ | „ | „ | p | „ | $\infty;$ |

in den beiden Fällen 1) und 2) wird die mit \mathfrak{M} parallel durch p gelegte Gerade zwischen q, r durchgehen, in den Fällen 3) und 4) ausserhalb; also in 1) und 2) ist die zu untersuchende Involution (u, v) auf G_∞ elliptisch, in 3) und 4) hyperbolisch. Die beiden ersten Fälle unterscheiden sich aber von den beiden letzten rücksichtlich der Lage der vier Doppelpunkte, der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels, von denen der eine auf \mathfrak{B} oder \mathfrak{C} zwischen den Ecken liegt, der andere ausserhalb in demselben Theile, wie der Schnitt mit \mathfrak{M} , der ja in der Mitte zwischen ihnen sich befindet, folgendermassen: In jenen liegen die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels so, dass einer innerhalb des von den drei anderen gebildeten Dreiecks sich befindet; in diesen so, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet. Dies stimmt mit unserem früher (Nr. 164) gefundenen Kennzeichen überein.

II. Eine der beiden Involutionsen auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etwa die auf \mathfrak{B} sei hyperbolisch, die auf \mathfrak{C} und also auch die auf \mathfrak{A} elliptisch; das Kegel-

schnittbüschel hat zwei reelle Grundpunkte, die Doppelpunkte auf \mathfrak{B} , und zwei imaginäre auf \mathfrak{C} , der ideellen gemeinschaftlichen Secante oder dem zweiten Theil des reellen Geradenpaares, dessen einer Theil die eigentliche gemeinsame Secante \mathfrak{B} ist. Die Gerade \mathfrak{M} trifft \mathfrak{C} zwischen den Ecken und \mathfrak{B} ausserhalb; es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich \mathfrak{M} trifft entweder

- 1) \mathfrak{B} in der Strecke von p bis ∞ ,
 oder 2) \mathfrak{B} „ „ „ „ r „ ∞ ;

im ersten Falle wird die durch p zu \mathfrak{M} gezogene Parallele die Gerade \mathfrak{N} zwischen r und q treffen, im zweiten Falle ausserhalb qr , also ist im ersten Falle die zu untersuchende Involution elliptisch, im zweiten hyperbolisch; wir sehen aber zugleich, dass dort die ideelle gemeinschaftliche Secante zwischen den beiden reellen Grundpunkten durchgeht, hier nicht; also:

Ein Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten schneidet auf der unendlich entfernten Gerade eine elliptische Involution aus, wenn die ideelle gemeinschaftliche Secante, welche die imaginären Grundpunkte verbindet, zwischen den beiden reellen Grundpunkten hindurchgeht, dagegen eine hyperbolische, wenn dies nicht der Fall ist. (Nr. 183).

III. Beide Involutionen auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} seien elliptisch, die auf \mathfrak{N} also hyperbolisch; das Büschel hat vier imaginäre Grundpunkte. Die Gerade \mathfrak{M} muss die Dreiecksseiten \mathfrak{B} , \mathfrak{C} zwischen den Ecken treffen, daher \mathfrak{N} ausserhalb; das muss deshalb auch die zu ihr durch p gezogene Parallele thun; also ist die zu untersuchende Involution auf G_∞ hyperbolisch.

Ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten schneidet in die unendlich ferne Gerade eine hyperbolische Involution ein.

Das wissen wir freilich schon, denn es schneidet ja in jede Gerade eine solche Involution ein (Nr. 189).

Wir entnehmen aber hieraus, dass bei einem solchen Büschel der 195 Fall nicht eintreten kann, indem es aus lauter Hyperbeln besteht; die hyperbolische Involution auf G_∞ , die auch Paare mit imaginären Punkten und zwei mit vereinigten Punkten besitzt, weist auf Ellipsen und Parabeln im Büschel hin; zu den Ellipsen gehören die beiden imaginären Geradenpaare mit reellen Doppelpunkten (als Null-Ellipsen).

Da also immer zwei reelle Parabeln durch vier vermittelt zweier elliptischer Involutionen bestimmte imaginäre Punkte möglich sind, so können wir das für fünf reelle Punkte gefundene Kennzeichen über die Art des durch sie bestimmten Kegelschnitts (Nr. 167) sofort auf

den Fall von vier solchen imaginären Punkten und einem reellen übertragen. Sind drei reelle und zwei imaginäre gegeben, so wird der Träger der elliptischen Involution, welche letztere definiert, die Seiten des Dreiecks der reellen Punkte alle drei in den Verlängerungen schneiden oder eine. Unter den drei Büscheln, welche die imaginären und zwei von den reellen Punkten zu Grundpunkten haben, befindet sich daher mindestens eins, welches in die unendlich ferne Gerade eine hyperbolische Involution einschneidet und demzufolge zwei reelle Parabeln enthält. Auf dieses können wir dann unser Kennzeichen anwenden; sodass es für alle drei Fälle Giltigkeit hat.

196 Die Schnittpunkte eines Kegelschnitts und einer Gerade können wir durch ein immer reelles Gebilde vertreten lassen, nämlich die Involution, welche der Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört und deren Doppelpunkte sie sind. Der G_∞ gehört nun in Bezug auf einen Kegelschnitt diejenige Involution zu, in welcher die Involution der conjugirten Durchmesser des Kegelschnitts (Nr. 116) sie trifft. Letztere liegt im Endlichen, während die unendlich entfernte Gerade sich der Anschauung entzieht; wir fassen daher zweckmässiger die Involutionen der conjugirten Durchmesser für sämtliche Kegelschnitte des Büschels ins Auge und ziehen durch irgend einen Punkt B der Ebene die Parallelen zu den Paaren conjugirter Strahlen dieser sämtlichen Involutionen. Dadurch erhalten wir in B unendlich viele auf einander liegende Strahlinvolutionen, welche die G_∞ in denjenigen Involutionen treffen, die ihr in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels zugehören.

Ein durch B gelegter Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ wird von jeder dieser Involutionen in einer krummen Involution geschnitten, der ein Centrum P zugehört; das von P an $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegte Tangentenpaar liefert die Doppelstrahlen der Involution, die von B nach den Berührungspunkten gehen. Jede von den Involutionen liefert also einen bestimmten Punkt P , und der Ort der Punkte P für sämtliche kann dadurch bestimmt werden, dass wir P als den Pol derjenigen Sehne des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ auffassen, welche je die beiden Doppelstrahlen ausschneidet. Diese Doppelstrahlen bilden aber selbst eine Involution, welche nach der Involution (u, v) auf G_∞ hingeht. Jene Sehnen laufen daher durch einen festen Punkt O , und der Ort des Punktes P ist die Polare von O in Bezug auf den Hilfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, also eine Gerade (vergl. Nr. 190). Wir haben hiernach zunächst folgenden Satz:

Verschiebt man die Involutionen der conjugirten Durchmesser sämtlicher Kegelschnitte eines Büschels mit Beibehaltung der Richtung der Strahlenpaare nach irgend einem Punkte B eines beliebigen Kegelschnitts

$\mathfrak{K}^{(2)}$, so ergeben sich auf diesem krumme Involutionen, deren Centren eine Gerade \mathfrak{L} erfüllen.

Schneidet diese Gerade \mathfrak{L} den Hilfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ nicht, so besteht das Kegelschnittbüschel aus lauter Hyperbeln; aus jedem Punkte P der Gerade \mathfrak{L} kommt an $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein Tangentenpaar; die Geraden, welche von B nach den Berührungspunkten dieser Tangentenpaare gehen, liefern die Richtungen der Asymptoten dieser Hyperbeln. Da der Pol der Gerade \mathfrak{L} in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ in diesem Fall innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt, so ist die Involution (u, v) auf G_∞ elliptisch, oder die durch den Punkt B den Asymptoten sämtlicher Hyperbeln des Büschels parallel gezogenen Strahlenpaare bilden selbst eine elliptische Involution. Berührt die Gerade \mathfrak{L} den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, so zeigt dies an, dass alle Kegelschnitte des Büschels einen unendlich entfernten Punkt gemein haben, also einer der vier Grundpunkte des Büschels im Unendlichen liegt; das Kegelschnittbüschel enthält in diesem Fall eine einzige Parabel und lauter Hyperbeln; die Involution (u, v) auf G_∞ ist parabolisch.

Schneidet die Gerade \mathfrak{L} den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in zwei reellen Punkten, so besteht das Kegelschnittbüschel aus einer Reihe von Hyperbeln, einer Reihe von Ellipsen und zwei Parabeln, welche jene beide Reihen von einander trennen; denjenigen Punkten P nämlich, welche auf der Gerade \mathfrak{L} ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen, entsprechen die Hyperbeln des Büschels, denen, welche innerhalb $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen, die Ellipsen und den beiden Schnittpunkten der Gerade \mathfrak{L} mit $\mathfrak{K}^{(2)}$ die beiden Parabeln. In der That, der Punkt P erzeugt, wenn er ausserhalb $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt, in B eine hyperbolische Involution, und wenn er innerhalb $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt, eine elliptische, daher ist der ihm zugehörige Kegelschnitt des Büschels im ersten Falle Hyperbel, im zweiten Ellipse. Liegt P in einem der beiden Schnittpunkte der Gerade \mathfrak{L} mit $\mathfrak{K}^{(2)}$, so wird die Involution in B parabolisch, weil die beiden Doppelstrahlen zusammenfallen, und der zugehörige Kegelschnitt des Büschels aus demselben Grunde Parabel, weil seine beiden Schnittpunkte mit G_∞ sich vereinigen. Die Involution (u, v) auf G_∞ ist hyperbolisch, und ihre beiden Doppelpunkte geben die Richtungen der Axen der zum Büschel gehörigen Parabeln an.

Da jeder Punkt P der Gerade \mathfrak{L} die Involution in B hervorruft, die der Durchmesser-Involution des Kegelschnitts des Büschels parallel läuft, welchem P entspricht, und da alle Punkte P in derselben Gerade \mathfrak{L} liegen, so haben alle Involutionen in B ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Strahlen, die nach den Schnittpunkten der Gerade \mathfrak{L} mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ hingehen, also:

Sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels besitzen zwei besondere conjugirte Durchmesser, welche dieselben zwei festen Richtungen haben; diese Richtungen sind die der Axen derjenigen beiden Parabeln, welche in dem Büschel vorkommen, sie sind also mit diesen selbst reell oder imaginär.

Hieraus lassen sich die beiden Parabeln eines Büschels finden, sobald es durch irgend zwei Kegelschnitte gegeben ist. Man verlege nach einem beliebigen Punkt B parallel die Durchmesser-Involutionen der beiden gegebenen Kegelschnitte und bestimme das gemeinschaftliche Paar dieser beiden concentrischen Involutionen (Nr. 44, 113); dasselbe ist immer reell, sobald mindestens einer der beiden Kegelschnitte Ellipse ist, oder, falls beide Hyperbeln sind, sobald die beiden Asymptotenpaare, nach demselben Punkte parallel verlegt, hyperbolische Lage haben; haben sie aber elliptische Lage oder trennen sie sich, so besitzen die Involutionen kein gemeinsames Paar, das Büschel enthält keine Parabel und dann auch keine Ellipse.

197 Es ist von besonderem Interesse, die vorige Betrachtung in der Weise zu specialisiren, dass man für den Hilfskegelschnitt einen Kreis annimmt; dann wird je derjenige durch den veränderlichen Punkt P gehende Strahl, welcher Durchmesser des Kreises $\mathfrak{R}^{(2)}$ ist, ihn in zwei Punkten treffen, welche mit B verbunden die Axen der zugehörigen Involution geben, und zu den Verbindungslinien parallel sind die Axen des entsprechenden Kegelschnitts des Büschels.

Liegt P ausserhalb $\mathfrak{R}^{(2)}$, so entspricht ihm eine Hyperbel im Büschel; die Strahlen von B nach den Berührungspunkten der Tangenten aus P an $\mathfrak{R}^{(2)}$ sind dann den Asymptoten der Hyperbel, als den Doppelstrahlen der Durchmesser-Involution, parallel.

Wenn φ der spitze Winkel jener beiden Tangenten ist, so sind die beiden Winkel der Asymptoten der Hyperbel $90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ und $90^\circ + \frac{\varphi}{2}$. Liegt P im Unendlichen auf \mathfrak{L} , so ist $\varphi = 0^\circ$, und die Hyperbel ist eine gleichseitige oder rechtwinklige, und nur dem unendlich fernen Punkte von \mathfrak{L} entspricht eine gleichseitige Hyperbel.

198 Nehmen wir nun erstens an, dass \mathfrak{L} ganz ausserhalb $\mathfrak{R}^{(2)}$ liegt, das Büschel also aus lauter Hyperbeln besteht, — in welchem Falle, wie wir eben fanden (Nr. 195), nicht alle vier Grundpunkte imaginär sein können; — es sei dann m der Fusspunkt des Perpendikels aus dem Mittelpunkte von $\mathfrak{R}^{(2)}$ auf \mathfrak{L} . Der diesem Punkte zugehörige Werth von φ ist ein Maximum, und daher der spitze Asymptotenwinkel der zugehörigen Hyperbel ein Minimum, der stumpfe ein Maximum.

Wenn ein Kegelschnitt durch ein reelles Geradenpaar hindurchgeht, von Hyperbel wiederum zu Hyperbel, so geht der Asymptotenwinkel im engern Sinne, d. h. der, welcher die Hyperbel enthält, nicht in den Asymptotenwinkel über, sondern in den andern. Beim Geradenpaar haben sich sowohl die reellen Scheitel auf der Hauptaxe, als die imaginären auf der Nebenaxe im Doppelpunkte, der ja zugleich Mittelpunkt ist, vereinigt; beide Halbaxen-Quadrate sind 0 und wechseln also beim Durchgange durch das Geradenpaar ihr Vorzeichen: das bisher positive wird negativ und das bisher negative positiv, oder die Hauptaxe geht in die Nebenaxe, die Nebenaxe in die Hauptaxe über; kurz, die Hyperbel „geht in den andern Asymptotenwinkel“, wird also aus einer spitzwinkligen Hyperbel (welche im spitzen Asymptotenwinkel liegt) eine stumpfwinklige oder umgekehrt. Mithin kann dieser Uebergang von spitzwinkliger in stumpfwinklige Hyperbel in zwei Weisen erfolgen: discontinuirlich beim Durchgange durch ein (reelles) Geradenpaar, continuirlich beim Durchgange durch eine rechtwinklige Hyperbel; in diesem Falle wechselt der Asymptotenwinkel nicht.

Je nachdem nun das Büschel drei reelle Geradenpaare enthält oder nur eins (Fall I oder II), haben wir zwei Reihen stumpfwinkliger und zwei Reihen spitzwinkliger Hyperbeln, oder nur je eine. Und je nachdem die dem Punkte m entsprechende Hyperbel in eine Reihe der einen oder andern Art fällt, ist der Asymptotenwinkel ein grösster stumpfer, bezw. ein kleinster spitzer Winkel, und zwar nicht blos in seiner Reihe, sondern er ist auch grösser, bezw. kleiner als die Asymptotenwinkel der andern gleichartigen Reihe, falls diese vorhanden ist.

Der Asymptotenwinkel ϑ einer Hyperbel (im engeren Sinne) ist gegeben durch: $\tan \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a}$, wo a^2 und $-b^2$ die Halbaxen-Quadrate sind. Wenn zwei Hyperbeln im Verhältniss $\frac{b}{a}$ übereinstimmen, so haben sie nicht nur gleiche Asymptotenwinkel im engern Sinne, sondern sie sind überhaupt ähnlich. Denn ersichtlich ist die Punktreihe der Scheitel und Brennpunkte der einen ähnlich mit der der andern; daraus folgt, dass zu jedem Punkte x der einen ein Punkt x^1 der andern construirt werden kann, so dass die Dreiecke, welche x und x^1 mit den Brennpunkten bezw. bilden, ähnlich und von gleichem Umlaufungsinne sind; und dies lehrt wiederum, dass drei Punkte der einen Hyperbel und ihre so entsprechenden auf der andern ähnliche und gleichsinnige Dreiecke bilden.

Zu zwei Punkten auf \mathcal{Q} , welche von m gleichweit entfernt sind, gehören gleiche Werthe von φ ; folglich sind die spitzen (stumpfen)

Asymptotenwinkel der zugehörigen Hyperbeln gleich. Aber damit ist noch nicht gesagt, dass diese Hyperbeln auch in gleichen Asymptotenwinkeln liegen und ähnlich in dem eben erläuterten Sinne sind. Schon in diesem engern Sinne ist ein Geradenpaar mit einer Hyperbel, deren Asymptoten dieselben Winkel bilden wie seine Geraden, ähnlich zu nennen; *im weiteren Sinne nennt man dann auch Hyperbeln ähnlich, sobald die Asymptoten der einen dieselben Winkel bilden wie die der andern, wenn auch die Hyperbeln nicht in gleichen Winkeln liegen*, also die eine spitz-, die andere stumpfwinklig ist; z. B. also zwei conjugirte Hyperbeln. Man macht diese eigentlich nicht erlaubte Erweiterung, um manche Sätze bequemer aussprechen zu können.

Im engern Sinne sind also zwei Hyperbeln unseres Büschels, welche gleichweit von u entfernten Punkten der Gerade \mathcal{Q} entsprechen, nur dann ähnlich, wenn sie in gleichartige der obigen Reihen fallen; im weiteren Sinne nennt man sie auch ähnlich, wenn sie verschiedenartigen angehören. Nehmen wir z. B. aus dem Büschel ein (reelles) Geradenpaar und zwei beiderseitige Nachbarn, eine spitz- und eine stumpfwinklige Hyperbel; die ähnliche Curve des Geradenpaares sei etwa eine spitzwinklige Hyperbel; dann sind es ihre Nachbarn, die ähnlichen Curven der beiden Hyperbeln, auch; also ist die eine im engern, die andere im weiteren Sinne ähnlich. In diesem allgemeineren Sinne haben wir also den folgenden Satz aufzufassen:

Besteht ein Kegelschnittbüschel aus lauter Hyperbeln, so ist eine und im allgemeinen nur eine unter ihnen gleichseitig; eine andere ist dadurch ausgezeichnet, dass, je nachdem sie stumpf- oder spitzwinklig ist, ihr Asymptotenwinkel ein Maximum, bezw. Minimum ist. Diese beiden Hyperbeln theilen das Büschel in zwei Abtheilungen; jede (andere) Hyperbel der einen Abtheilung hat eine (nicht nothwendig im engern Sinne) ähnliche in der andern.

Die rechtwinklige Hyperbel und die reellen Geradenpaare (drei, bezw. eins) theilen das Büschel in zwei Reihen stumpfwinkliger und zwei spitzwinkliger Hyperbeln, bezw. nur in je eine von beiden Arten.

Enthält ein Büschel zwei gleichseitige Hyperbeln, so geht \mathcal{Q} ins Unendliche, schneidet den Kreis $\mathcal{R}^{(2)}$ nicht; alle Hyperbeln des Büschels sind gleichseitig; die G_∞ wird von einem solchen Büschel in der ausgezeichneten elliptischen Involution I_∞ geschnitten. Also können nicht alle vier Grundpunkte imaginär sein. Zwei gleichseitige Hyperbeln müssen sich mindestens zweimal (reell) schneiden; in der That, die unendlich fernen Punkte einer jeden von ihnen liegen zu verschiedenen Seiten der andern.

Die Gerade \mathcal{Q} schneide nunmehr den Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ reell, in p und q ; 199 das Kegelschnittbüschel besteht dann aus Hyperbeln, Ellipsen und zwei Parabeln, und alle vier Grundpunkte können imaginär sein: es giebt in diesem Falle zwei Null-Ellipsen, welche den Uebergang zu imaginären Curven bilden. Einem Punkt P von \mathcal{Q} im Innern von $\mathfrak{K}^{(2)}$ entspricht eine Ellipse; die durch ihn gehende kleinste Sehne des Kreises, welche auf dem durch P gehenden Durchmesser desselben senkrecht steht, schneidet in zwei Punkten, welche mit B verbunden Strahlen geben, die den gleichen conjugirten Durchmessern der Ellipse parallel sind; denn die Winkel zwischen diesen Strahlen werden durch die nach den Endpunkten des genannten Durchmessers gehenden, welche den Axen parallel sind, halbirt. Je näher wir dem Fusspunkte m kommen, desto grösser wird die durchgehende kleinste Sehne und der sie überspannende spitze Peripheriewinkel, also auch der spitze Winkel der gleichen conjugirten Durchmesser der Ellipse, d. i. der von der Hauptaxe halbirt ϑ , wenn es sich um eine reelle Ellipse handelt. Wir wissen: $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a}$; bei den Punkten p, q , denen die Parabeln des Büschels entsprechen, ist die kleinste Sehne 0, also auch ϑ . Das Verhältniss $\frac{b}{a}$ wächst also von 0 bis zu einem Maximum, das sich bei m ergibt. Die m entsprechende Ellipse hat mithin im Büschel das am meisten an 1 heranreichende Axenverhältniss $\frac{b}{a}$, nähert sich am meisten dem Kreise.*

Die kleinste Sehne für m ist pq ; also sind für diese ausgezeichnete Ellipse die gleichen conjugirten Durchmesser parallel zu den Axen der beiden Parabeln des Büschels und haben die festen Richtungen, in denen jeder Kegelschnitt desselben ein Paar conjugirter Durchmesser hat.

Wir können aber füglich diese Ellipse nur dann als dem Kreise am meisten sich nähernd bezeichnen, wenn sie eben reell ist; in den beiden Fällen I, II, wo mindestens zwei Grundpunkte reell und keine Uebergangscurven zu imaginären Curven, also auch keine imaginären Curven im Büschel vorhanden sind, ist sie dies immer. Im Falle III aber giebt es imaginäre Curven im Büschel, und es wird sich später zeigen, dass deren Durchmesser-Involutionen reell (und elliptisch) sind; also haben diese Curven reelle entsprechende Punkte auf \mathcal{Q} ; sie befinden sich auf einer Strecke, die durch die Punkte begrenzt wird, welche den Null-Ellipsen, den imaginären Geradenpaaren mit reellen

* Steiner, Journal f. Mathem. Bd. 2 S. 64, S. 55, S. 372; Gesammelte Werke Bd. 1 S. 123, Bd. 2 S. 679. — Die dritte Auflage bringt hier und bei der analogen Betrachtung für die Schaar eine wesentlich modificirte Darstellung.

Doppelpunkten entsprechen; und wenn m dieser Strecke angehört, so ist unsere Curve imaginär.*

Zu zwei innern Punkten von \mathcal{Q} , die gleichweit von m entfernt sind, gehören gleiche kleinste Sehnen, also *Ellipsen mit gleichem $\frac{b}{a}$* , wenn sie beide reell sind (oder beide imaginär); *man kann sie dann aus demselben Grunde, wie oben Hyperbeln mit gleichem $\frac{b}{a}$, im engeren Sinne ähnlich nennen, im weitern Sinne freilich auch eine reelle Ellipse und eine imaginäre Curve, wenn ihre gleichen conjugirten Durchmesser dieselben Winkel bilden.*

In Bezug auf die den äusseren Punkten von \mathcal{Q} entsprechenden Hyperbeln des Büschels gilt im allgemeinen ähnliches wie im vorigen Falle. Fassen wir zusammen, so haben wir:

Besteht ein Kegelschnittbüschel aus Hyperbeln und Ellipsen, welche durch zwei Parabeln getrennt werden, so giebt es unter den Hyperbeln eine einzige gleichseitige, und in den Fällen, wo mindestens zwei Grundpunkte reell sind, stets eine Ellipse, welche sich dem Kreise am meisten nähert; ihre gleichen conjugirten Durchmesser sind die conjugirten Durchmesser von festen Richtungen und den Axen der Parabeln parallel. Im dritten Falle, wo alle vier Grundpunkte imaginär sind, kann diese Ellipse imaginär sein; die reellen Ellipsen bilden in diesem Falle zwei getrennte Reihen, eingeschlossen je durch eine Parabel und eine Null-Ellipse; die ausgezeichnete Ellipse kann in einer dieser Reihen sich befinden; wenn nicht, so wächst in jeder das Axenverhältniss $\frac{b}{a}$ von der Parabel bis zur Null-Ellipse.

Die Hyperbeln zerfallen wiederum nach der Zahl der reellen Geradenpaare in vier, bezw. zwei Reihen mit abwechselnd spitz- und stumpfwinkligen Hyperbeln. In allen wächst, ähnlich wie Nr. 198 in denen,

* Die Halbaxen-Quadrate sind $-a^2, -b^2$; gehört $-a^2$ zur Hauptaxe, so ist $-a^2 > -b^2$, also $b > a$. Ist wiederum ϑ der von der Hauptaxe halbirte Winkel der gleichen conjugirten (imaginären) Halbmesser, so ist $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta = \frac{b}{a}$, also unecht und ϑ stumpf. Wie beim Uebergang der Hyperbel durch ein reelles Geradenpaar der Asymptotenwinkel vom spitzen zum stumpfen, $\frac{b}{a}$ von einem echten Bruche in einen unechten *discontinuirlich* übergeht, so geht auch hier, wenn von einer reellen Ellipse durch eine Null-Ellipse in eine imaginäre Curve übergegangen wird, ϑ aus einem spitzen in einen stumpfen Winkel, $\frac{b}{a}$ aus einem echten in einen unechten Bruch über.

Ist also die ausgezeichnete Curve, welche dem Fusspunkte m entspricht, imaginär, so hat ihr $\frac{b}{a}$ unter den unechten Werthen, welche den sämtlichen imaginären Curven des Büschels zukommen, den *kleinsten* Werth.

in welchen nicht die zweite ausgezeichnete Hyperbel sich befindet, das Verhältniss $\frac{b}{a}$ von einer Grenze bis zur andern.

Abgesehen von der gleichseitigen Hyperbel und der ausgezeichneten Ellipse, hat jede Curve des Büschels eine andere ihr — nicht nothwendig im engeren Sinne — ähnliche Curve in demselben; sie entsprechen gleichweit von m entfernten Punkten P von \mathcal{Q} .

Wenn die Gerade \mathcal{Q} durch den Mittelpunkt des Kreises $\mathcal{K}^{(2)}$ geht, 200 so befindet sich im Büschel ein Kreis, der diesem Mittelpunkte als Punkte P entspricht; denn diese Lage von P bewirkt die Rechtwinkligkeit aller conjugirten Durchmesser. Die Axen der Parabeln sind dann auch rechtwinklig; und wir finden das in Nr. 163 nur für Büschel mit vier reellen Grundpunkten gefundene Kennzeichen für alle drei Fälle richtig. Im Falle III aber braucht dieser Kreis nicht reell zu sein.

Das ist dann der einzige Kreis im Büschel; aber wir können doch zwei Kreise als die bestimmenden Kegelschnitte eines Büschels wählen. In diesem Falle werden die beiden ihnen im Büschel B entsprechenden Involutionen rechtwinklig und daher identisch; ihre beiden Punkte P vereinigen sich in dem Mittelpunkt von $\mathcal{K}^{(2)}$ und bestimmen keine Gerade \mathcal{Q} . Die den beiden Kreisen des Büschels zugehörigen Involutionen auf G_∞ werden auch identisch, ihre (imaginären) Doppelpunkte sind gemeinschaftliche Punkte der beiden Kreise. Das Büschel hat daher auf G_∞ zwei Grundpunkte, die beiden absoluten Punkte oder unendlich entfernten imaginären Kreispunkte (Nr. 62 und 141), und da alle Kegelschnitte des Büschels durch dieselben vier Grundpunkte gehen, so ist die Involution auf G_∞ für alle dieselbe, sie sind sämtlich Kreise: *Kommen zwei Kreise in einem Kegelschnittbüschel vor, so besteht dasselbe aus lauter Kreisen, und diese bilden das aus den Elementen bekannte Kreisbüschel mit eigentlicher oder ideeller gemeinschaftlicher Secante.* Die unendlich entfernte Gerade G_∞ ist selbst als eine ideelle gemeinschaftliche Secante aller Kreise anzusehen und macht den einen Theil des einzigen in dem Büschel enthaltenen (reellen) Geradenpaars aus, dessen anderer Theil die endliche gemeinschaftliche Secante (Potenzlinie des Kreisbüschels) ist. Das Kreisbüschel zeigt sich also hier als specieller Fall des Kegelschnittbüschels. Es enthält zwei Nullkreise, wenn die endlichen Grundpunkte imaginär sind.

Bei zwei (im engern oder weitern Sinne) ähnlichen Ellipsen sind 201 die Winkel der gleichen conjugirten Durchmesser die nämlichen; folglich ist die Figur von zwei Paaren conjugirten Durchmessern (Axen und die eben genannten conjugirten Durchmesser) bei der einen Ellipse congruent mit der entsprechenden Figur bei der andern, also die

ganze Durchmesser-Involution der einen congruent mit der der andern.

Dasselbe gilt bei zwei ähnlichen Hyperbeln, denn sie haben Asymptoten mit gleichen Winkeln und die Asymptoten bestimmen ja vollständig die Durchmesser-Involution als Doppelstrahlen derselben.

Die Durchmesser-Involutionen zweier (im engeren oder weiteren Sinne) ähnlicher Kegelschnitte können durch Drehung parallel gemacht werden. Die Curven heissen dann *ähnlich und ähnlich gelegen* (homothetisch). *Die der G_∞ zugehörige Involution ist beiden gemeinsam, also auch deren Doppelpunkte; die unendlich fernen Punkte der Curven; und umgekehrt, wenn zwei Kegelschnitte dieselben unendlich fernen Punkte haben, so haben sie dieselbe zugehörige Involution auf G_∞ , parallele Durchmesser-Involutionen und sind ähnlich und ähnlich gelegen.*

Sie bestimmen ein Büschel mit zwei unendlich fernen Grundpunkten, so dass alle Curven desselben ähnlich und ähnlich gelegen und gleichartig sind.

In einem beliebigen Büschel giebt es keine zugleich ähnlich liegenden ähnlichen Curven.

Die Construction einer Parabel aus Brennpunkt und Leitlinie lehrt, dass *alle Parabeln ähnlich sind*. Durch Parallelstellung der Axen macht man sie ähnlich gelegen und die zugehörigen (parabolischen) Involutionen auf G_∞ identisch.

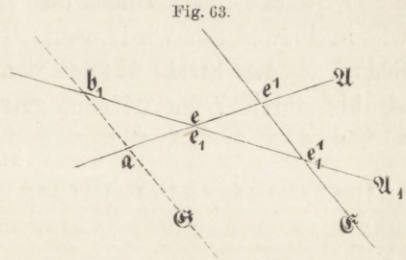
Es können aber zwei solche ähnlichen und ähnlich gelegenen Parabeln noch nach verschiedenen Seiten gewendet sein.

§ 44. Entstehung der Kegelschnittschaar aus der geraden Punktreihe.

202 Ehe wir in der Untersuchung des Kegelschnittbüschels weiter fortfahren, ist es angemessen, das polare Gebilde desselben, die *Kegelschnittschaar*, d. h. sämtliche Kegelschnitte, welche vier gemeinschaftliche Tangenten haben, näher ins Auge zu fassen.

Nehmen wir zwei gerade Träger \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 an und einen beliebigen Punkt B als das Perspectivitätscentrum zweier perspectiv liegender Punktreihen auf ihnen, denken wir uns, nachdem diese Beziehung durch den Punkt B hergestellt ist, die Träger fest, aber die beiden Punktreihen um zwei beliebige Strecken, ohne die Beziehung zu ändern, auf ihnen verschoben, so wird dadurch die vorige perspective Lage aufgehoben, und das Erzeugniss der beiden projectiven Punktreihen wird ein Kegelschnitt, welcher die Träger \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 zu Tangenten hat und noch eine dritte leicht angebbare Tangente, nämlich den Verbindungsstrahl derjenigen beiden Punkte e^1 , e_1^1 , in welche die beiden

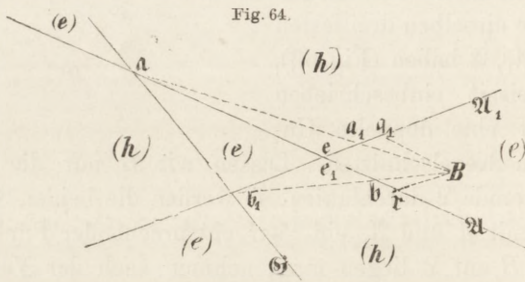
im Schnittpunkte vereinigten und in der perspectiven Lage entsprechenden Punkte e, e_1 durch die Verschiebung gelangen. Diese bestimmte Gerade \mathfrak{E} ist nur von der Grösse und Richtung der „Schiebstrecken“ abhängig, nicht von der Lage des Perspectivitätscentrums B . Verändern wir also die Lage des Punktes B in der ganzen Ebene, so erhalten wir dadurch immer neue Kegelschnitte bei derselben Verschiebung, und sämtlichen Punkten B der Ebene entsprechen unendlich viele Kegelschnitte, welche dieselben drei festen Tangenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{E}$ haben (Fig. 63), demselben Dreieck einbeschrieben sind. Dies ist eine doppelte Un-



endlichkeit von Kegelschnitten. Lassen wir B nur die sämtlichen Punkte einer Gerade \mathfrak{Q} durchlaufen, so werden die beiden Schnittpunkte dieser Gerade mit \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 ein Paar entsprechender Punkte δ und δ_1 sein, wo auch B auf \mathfrak{Q} liegen mag; nehmen nach der Verschiebung δ und δ_1 die Lagen δ^1 und δ_1^1 an, so ist der Verbindungsstrahl $\delta^1\delta_1^1 = \mathfrak{Q}^1$ eine Tangente für alle Kegelschnitte, welche den Punkten B auf der Gerade \mathfrak{Q} entsprechen; aus einer geraden Punktreihe entsteht also eine Kegelschnittschaar mit vier festen Tangenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{E}, \mathfrak{Q}^1$, und diese Kegelschnittschaar ist von einfacher Unendlichkeit, gleich mächtig mit einer geraden Punktreihe.

Um zu erkennen, ob für eine bestimmte Lage von B der durch 203 die Verschiebung entstehende Kegelschnitt Ellipse, Hyperbel oder Parabel wird, suchen wir diejenigen beiden Punkte a und b_1 auf den Trägern \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 auf, welche nach der Verschiebung in den Schnittpunkt der Träger hineinfallen; ae und b_1e_1 sind also die Schiebstrecken nach Grösse und Sinn, und durch diese sind die Punkte a und b_1 gegeben. Die Verbindungslinie ab_1 sei \mathfrak{G} ; durch die drei Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{G}$ und die unendlich entfernte Gerade G_∞ zerfällt die ganze Ebene in sieben Räume, den endlichen Dreiecksraum, die drei den Ecken anliegenden unendlichen Winkelräume und die drei den Seiten anliegenden unendlichen Räume. Es wird sich nun zeigen, dass, je nachdem der Punkt B in einem der vier ersten Räume oder in einem der drei letzten liegt, der entsprechende Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel wird, und dass die Uebergänge in eigenthümlicher Weise durch die vier begrenzenden Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{G}, G_\infty$ vermittelt werden. Wir bedürfen zu diesem Nachweis des in Nr. 80 erörterten Kennzeichens, welches entscheidet, ob der durch zwei projective Punktreihen

erzeugte Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel ist. Er ist Ellipse, wenn auf jedem der beiden Träger (oder einem, was ausreichend ist) der den vereinigten Punkten entsprechende Punkt (Berührungspunkt) innerhalb der Strecke liegt zwischen dem Schnittpunkt der Träger und dem Fluchpunkte (r , bzw. q_1), dagegen Hyperbel, wenn er ausserhalb dieser Strecke liegt. Haben also in Fig. 64 \mathcal{A} , \mathcal{A}_1 , \mathcal{G} dieselbe Bedeutung wie in Fig. 63, so wird, wenn B z. B. in einem der Scheitlräume (e) liegt und der Strahl \mathcal{A}_1 von dem Strahl Ba in a_1 und vom Parallelstrahle durch B zu \mathcal{A} in q_1 getroffen wird, a_1 zwischen b_1 , q_1 liegen,



was dann auch nach der Verschiebung der Fall ist; a_1 ist aber der entsprechende zu a , dieser gelangt durch die Verschiebung nach $\mathcal{A}\mathcal{A}_1$, also a_1 in den Berührungspunkt des durch die verschobenen Punktreihen erzeugten Kegelschnitts; folglich ist dieser eine Ellipse, weil a_1 zwischen b_1 und q_1 liegt. In gleicher Weise ergibt sich die obige Behauptung für die Lage von B in den andern Räumen (e) oder in den Räumen (h).

Wenn insbesondere B auf die Gerade \mathcal{G} zu liegen kommt, so werden a und b_1 entsprechende Punkte, welche also nach der Verschiebung in den Schnittpunkt $\mathcal{A}\mathcal{A}_1$ hineinfallen; in diesem Falle sind die beiden projectiven Punktreihen auch nach der Verschiebung perspectiv; der Kegelschnitt löst sich in diesem Uebergangsfalle in ein Punktepaar auf: das Perspectivitätscentrum und den Schnittpunkt $\mathcal{A}\mathcal{A}_1$. Und dies Punktepaar ist in der That (Nr. 80) als ein Uebergang von Ellipse zu Hyperbel anzusehen, indem die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten als unendlich schmale Ellipse oder die beiden unendlichen Strecken auf der Verbindungslinie als unendlich schmale Hyperbel aufgefasst werden können, mithin der ausgeartete Kegelschnitt gleichzeitig Ellipse und Hyperbel ist. Derselbe Uebergangsfall tritt auf, wenn B insbesondere in einen der beiden Träger \mathcal{A} und \mathcal{A}_1 hineinfällt, indem die projective Beziehung ausartet (Nr. 58); fällt nämlich B in \mathcal{A} hinein, so entspricht allen Punkten der Gerade \mathcal{A}_1

der Punkt B der Gerade \mathfrak{A} und allen Punkten der Gerade \mathfrak{A} der Schnittpunkt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ der Gerade \mathfrak{A}_1 ; diese Beziehung bleibt nach der Verschiebung ungeändert, und der Kegelschnitt löst sich daher in das Paar der Punkte auf, welche von dem Schnittpunkt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und dem Punkt B nach der Verschiebung eingenommen werden. Ein Gleiches tritt ein, wenn der Punkt B auf dem andern Träger \mathfrak{A}_1 liegt. Die Punkte B der drei abgrenzenden Geraden \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{G} liefern also sämtlich Kegelschnitte, welche in Punktepaare ausarten.

Es bleiben noch diejenigen Punkte B zu untersuchen, welche auf der vierten begrenzenden Gerade G_∞ liegen; hier tritt ein anderer Uebergang von Ellipse zu Hyperbel auf, nämlich durch die Parabel. Sobald B im Unendlichen liegt, wird die Beziehung der beiden Träger ähnlich, und dies muss auch nach der Verschiebung bleiben, weil die entsprechenden unendlich entfernten Punkte im Unendlichen bleiben; das Erzeugniss der verschobenen Punktreihen wird also eine Parabel (Nr. 78). Die allen Punkten B der unendlich entfernten Gerade G_∞ entsprechenden Parabeln bilden einen besonderen Fall der Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten, die *Parabelschaar*; diese Tangenten sind \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{G} und G_∞ , in welcher in diesem Falle \mathfrak{Q} und \mathfrak{Q}^1 sich vereinigen.

Die Gerade \mathfrak{Q} muss, wie sie auch liegen mag, in zwei elliptischen Räumen (e) und zwei hyperbolischen Räumen (h) enthalten sein (Fig. 64); denn durch die Geraden \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{G} und G_∞ werden vier Punkte auf ihr fixirt, zwischen denen vier Strecken liegen; zwei von diesen gehören elliptischen, die beiden andern dazwischen liegenden hyperbolischen Räumen an. Den drei Schnittpunkten der Gerade \mathfrak{Q} mit den Geraden \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{G} gehören Kegelschnitte zu, welche sich in Punktepaare auflösen; dem unendlich entfernten Punkt der Gerade \mathfrak{Q} entspricht die einzige Parabel, welche in der Kegelschnittschaar vorkommt. Umgekehrt ist es, wenn \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{G} , \mathfrak{Q}^1 als gemeinsame Tangenten (Grundtangenten) einer Kegelschnittschaar gegeben sind, leicht, durch Rück-schiebung die Gerade \mathfrak{Q} zu finden. Also haben wir folgendes Ergebnis:

Die sämtlichen Kegelschnitte einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten zerfallen in zwei Reihen von Ellipsen und zwei Reihen von Hyperbeln, die mit einander abwechseln; der Uebergang von einer Gruppe zu einer andern geschieht dreimal durch ein Punktepaar (die drei Paare Gegenecken des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits) und einmal durch eine Parabel, die einzige, welche in der Kegelschnittschaar vorkommt.

Wir haben gesehen, dass die beiden durch das Perspectivitäts- 204
centrum B parallel zu \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A} gezogenen Strahlen in den Punkten

r und q_1 dieselben treffen, und dass diese Punkte nach der Verschiebung ihre Eigenschaft behalten, Fluchtpunkte zu sein oder den unendlich entfernten Punkten zu entsprechen. Hieraus folgt, dass, während B die Gerade \mathcal{L} durchläuft, die Punkte r und q_1 zwei ähnliche Punktreihen beschreiben, ihre Verbindungslinie (nach der Verschiebung) also eine Parabel umhüllt; denken wir uns durch die verschobenen Punkte r, q_1 die Parallelstrahlen gezogen, welche sich in B^1 treffen mögen, so wird der Punkt B^1 zu den Geraden \mathcal{A} und \mathcal{A}_1 dieselbe relative Lage haben müssen, wie der Punkt B zu den durch a und b_1 gezogenen Parallelen von \mathcal{A}_1 und \mathcal{A} , denn diese gehen nach der Verschiebung in \mathcal{A}_1 und \mathcal{A} über; wenn also B eine gerade Linie \mathcal{L} durchläuft, so muss auch nach der Verschiebung B^1 eine bestimmte Gerade durchlaufen, welche zu \mathcal{A} und \mathcal{A}_1 dieselbe relative Lage hat, wie \mathcal{L} zu jenen beiden durch b_1 und a gehenden Parallelen. Nun ist B^1 immer die Ecke eines Parallelogramms, welches einem Kegelschnitte der Schaar umgeschrieben ist und zu zwei Seiten die festen Tangenten \mathcal{A} und \mathcal{A}_1 hat; die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes $e(e_1)$ mit B^1 wird also halbirt durch den Mittelpunkt M des Kegelschnitts, welcher dem Parallelogramm eingeschrieben ist, und da B^1 eine gerade Linie durchläuft, so muss auch M eine Gerade durchlaufen, die jener parallel ist, aber halb so weit von $e(e_1)$ absteht, als sie. Mittelpunkt eines in ein Punktepaar abgeflachten Kegelschnitts (der, wie wir oben sahen, zugleich unendlich schmale Ellipse und unendlich schmale Hyperbel ist) ist die Mitte der Strecke zwischen den Punkten. Wir schliessen hieraus:

Die Mittelpunkte sämtlicher Kegelschnitte einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten liegen auf einer Gerade, welche insbesondere auch die Mittelpunkte der drei Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits enthält. Dass diese drei Mitten in gerader Linie liegen, wissen wir (Nr. 56).

Diese Mittelpunktslinie zerfällt durch die drei Mitten der Diagonalen und den unendlich entfernten Punkt, den Mittelpunkt der einzigen Parabel der Schaar, in vier Abschnitte, welche abwechselnd die Mittelpunkte der beiden Reihen von Ellipsen und die Mittelpunkte der beiden Reihen von Hyperbeln enthalten.

205 Dieselbe Betrachtung, aus welcher die Kegelschnittschaar entsprang, zeigt auch, wie die Berührungspunkte eines Kegelschnitts der Schaar auf zweien von den gemeinschaftlichen Tangenten sich verändern. Fig. 64 zeigt, dass Ba und Bb_1 die Berührungspunkte a_1 und b bestimmen; also, wenn B eine Gerade \mathcal{L} durchläuft, so beschreiben aB und b_1B zwei perspective Strahlbüschel, mithin a_1 und b zwei projective Punktreihen auf \mathcal{A}_1 und \mathcal{A} , welche nach der Verschiebung in

perspective Lage gelangen, weil auch b_1 und a zwei entsprechende Punkte dieser beiden projectiven Punktreihen sind und diese Punkte nachher in den Schnittpunkt \mathcal{N}_1 fallen. Hieraus folgt der Satz:

Fasst man bei einer Kegelschnittschaar von vier festen Tangenten die Berührungspunkte ins Auge, welche der veränderliche Kegelschnitt auf irgend zweien von den vier festen Tangenten bestimmt, so sieht man, dass dieselben zwei projective Punktreihen bilden, welche perspectiv liegen; ihr Perspectivitätscentrum ist einer der drei Diagonalepunkte des vollständigen Vierseits, welches die vier gemeinschaftlichen Tangenten bilden, und zwar derjenige, welcher der Diagonale gegenüber liegt, die durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten geht.

Dieser Satz ist der analoge zu dem in Nr. 161 ausgesprochenen und kann ebenso aus den Eigenschaften des einem Kegelschnitte umgeschriebenen Vierseits (Nr. 73, 84) abgeleitet werden. Hier erkennen wir, dass jede von den Berührungspunkten gebildete Punktreihe zugleich projectiv ist mit der erzeugenden Punktreihe, welche B auf der Gerade \mathcal{Q} durchläuft.

Wir wollen nun jenen besonderen Fall ins Auge fassen, dass die 206 Gerade \mathcal{Q} , welche der Punkt B durchläuft, die unendlich entfernte Gerade G_∞ ist; in ihm wird die projective Beziehung immer Aehnlichkeit, also sind die entstehenden Kegelschnitte sämtlich Parabeln. Eine Parabel ergibt sich bei unserer Construction nur durch einen unendlich fernen Punkt B ; enthält daher eine Schaar zwei Parabeln, so wird \mathcal{Q} unendlich fern. Also:

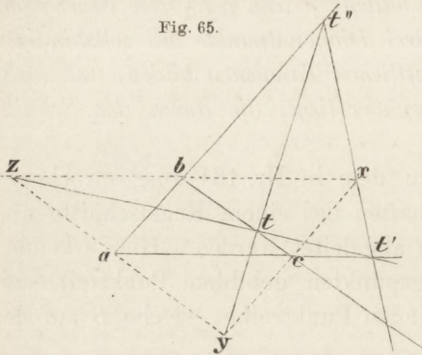
Wenn in einer Kegelschnittschaar zwei Parabeln vorkommen, so besteht die Schaar aus lauter Parabeln, die ausser der unendlich entfernten Gerade G_∞ , welche allen Parabeln gemeinschaftliche Tangente ist, noch drei gemeinschaftliche Tangenten haben und eine specielle Kegelschnittschaar bilden, so wie das Büschel gleichseitiger Hyperbeln ein besonderes Kegelschnittbüschel bildete (Nr. 165). Freilich ergibt sich dieser Satz unmittelbar daraus, dass jeder G_∞ berührende Kegelschnitt eine Parabel ist.

Unter diesen Parabeln giebt es drei besondere (Punktepaare), die in je eine einzige (doppelt zu zählende) Gerade übergehen, nämlich die drei durch die Ecken des endlichen Dreiseits abc parallel den Seiten desselben gezogenen Geraden. Die Mittelpunktslinie dieser Parabelschaar ist natürlich die unendlich entfernte Gerade. Von dem vollständigen Vierseit $abcG_\infty$ sind die Diagonalepunkte x, y, z die Ecken des Dreiseits der eben genannten Parallelen (Fig. 65).

Bei jeder dem Dreiseit abc eingeschriebenen Parabel gehen die Berührungsschnen beziehlich durch drei feste Punkte, durch die Ecken

des dem Dreieit abc parallel umgeschriebenen Dreiecks xyz . Nimmt man einen beliebigen Punkt t auf bc als Berührungspunkt einer eingeschriebenen Parabel, so sind die beiden andern Berührungspunkte $(zt, ac) = t'$ und $(yt, ab) = t''$; $t't''$ muss durch x gehen.

Fig. 65.



Bekanntlich laufen bei einem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Dreieit die Verbindungsstrahlen der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüber liegenden Seiten durch einen Punkt o (Nr. 67); wir können daher hier nach dem Orte des Punktes o fragen für sämtliche dem Dreieit eingeschriebenen Parabeln. Derselbe ist leicht zu ermitteln, wenn wir den Punkt t auf der Gerade bc bewegen und den Schnittpunkt (at, bt') verfolgen; da nämlich t und t' perspective Punkt-reihen durchlaufen, so beschreiben at und bt' projective Strahlbüschel; der Ort des Punktes o ist also ein Kegelschnitt, und da der Verbindungslinie ab in den beiden Strahlbüscheln bz und az entsprechen, so sind dies die Tangenten des gefundenen Kegelschnitts, welcher auch durch c geht und xy berührt; der Ort des Punktes o ist also die Ellipse, welche dem Dreieck abc um- und zugleich dem Dreieck xyz eingeschrieben ist, oder den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider Dreiecke zum Mittelpunkte hat; denn z. B. ax , welche bc halbirt, die Berührungsehne der von x kommenden Tangenten, ist ein Durchmesser der Ellipse.

Die einzige Parabel, welche einem gegebenen Vierseit $ABCD$ eingeschrieben werden kann, gehört vier verschiedenen Parabelschaaren, welche den Dreiseiten ABC, ACD, ABD, BCD eingeschrieben sind, gleichzeitig an; die vier diesen Dreiseiten parallel umgeschriebenen Dreiseite haben also ihre zwölf Ecken paarweise auf sechs Geraden, welche durch die drei Diagonalpunkte x, y, z des vollständigen Vierseits $ABCD$ gehen und die Berührungsehnen jener Parabel sind, wobei durch jeden der Punkte x, y, z immer zwei von diesen sechs Geraden gehen.

207 Die Parabelschaar, welche einem Dreieit eingeschrieben ist, und das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche einem Dreieck umgeschrieben sind (und zugleich durch seinen Höhenpunkt gehen), stehen in einem unmittelbaren Zusammenhange vermittelt des Principis der Polarisirung (Nr. 102). Beschreiben wir um einen der vier Grundpunkte

eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln als Mittelpunkt einen Kreis, so ist die Polarfigur des Hyperbelbüschels in Bezug auf diesen Kreis als Basis eine Parabelschaar; denn aus jeder gleichseitigen Hyperbel wird ein Kegelschnitt, der vier feste Tangenten hat, die Polaren der vier Grundpunkte des Büschels, und da der Mittelpunkt des Kreises zu seiner Polare in Bezug auf den Kreis die unendlich entfernte Gerade G_∞ hat, so muss der Polarkegelschnitt diese berühren, also Parabel sein; wir erhalten daher lauter Parabeln, die dem Dreieit eingeschrieben sind, welches von den drei Polaren der übrigen drei Grundpunkte des Hyperbelbüschels gebildet wird. Aus der dem Kreise zukommenden Eigenschaft, dass die Polare senkrecht steht auf der Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit dem Pol, weil die Durchmesser-Involution des Kreises rechtwinklig ist, geht hervor, dass der Mittelpunkt M des Basis-Kreises nicht nur Höhenpunkt des Dreiecks der drei andern Grundpunkte des Hyperbelbüschels, sondern auch Höhenpunkt des gemeinschaftlichen Dreieits der Parabelschaar ist. Da nun für jede gleichseitige Hyperbel die unendlich entfernten Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so werden ihre Polaren, d. h. die beiden in M sich schneidenden Tangenten der entsprechenden Parabel der Schaar ebenfalls zu einander rechtwinklig sein; der Ort des Schnittpunktes aller rechtwinkligen Tangentenpaare einer Parabel ist aber die Leitlinie (Nr. 132); also gehen die Leitlinien sämtlicher Parabeln der Schaar durch den Punkt M , d. h.: *Von sämtlichen einem gegebenen Dreieit eingeschriebenen Parabeln gehen die Leitlinien durch den Höhenpunkt dieses Dreieits.*

In der Leitlinie der einzigen Parabel, welche einem gegebenen Vierseit eingeschrieben werden kann, müssen die Höhenpunkte derjenigen vier Dreieite liegen, welche sich aus je dreien der vier Seiten des Vierseits bilden lassen. Dies giebt einen bekannten elementaren Satz über das vollständige Vierseit, welcher einer ganzen Reihe von Eigenschaften desselben angehört, deren eine oder andere wir gelegentlich als specielle Fälle allgemeinerer Eigenschaften erwähnen werden. Sie hängen zumeist mit der Parabel zusammen, welche dem vollständigen Vierseit eingeschrieben werden kann, oder treten als besondere Fälle der Eigenschaften unserer Kegelschnittschaar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten auf.*

Schliesslich wollen wir noch eine Eigenschaft der Parabelschaar 208 erwähnen, welche sich auf ihre Brennpunkte bezieht. Wir fanden

* Vergl. Steiner, Journal für Mathem. Bd. 2 S. 97; Gesammelte Werke Bd. 1 S. 128.

(Nr. 147), dass das Strahlenpaar von irgend einem Punkte a nach den Brennpunkten eines Kegelschnitts symmetrisch liegt zu dem Tangentenpaar aus a an den Kegelschnitt: beide Strahlenpaare haben dieselben Winkelhalbirenden. Ziehen wir nun bei irgend einer dem Dreieck abc eingeschriebenen Parabel durch die Ecke a die Parallele zur Axe, so wird die zu ihr in Bezug auf das Tangentenpaar ab, ac symmetrisch liegende Gerade durch den Brennpunkt F der Parabel gehen; ebenso die am Eckpunkt b in derselben Weise construirte Gerade. Verändern wir die eingeschriebene Parabel, indem wir sie die ganze Parabelschaar durchlaufen lassen, so beschreiben die beiden durch a und b zur jedesmaligen Parabelaxe gezogenen Parallelen zwei gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel; die symmetrisch liegende aF beschreibt aber ein mit dem ersten dieser Büschel gleiches und ungleichlaufendes Strahlbüschel, — sie erzeugen zusammen eine gleichseitig-hyperbolische Involution —, die symmetrisch liegende bF ein mit dem zweiten gleiches und ungleichlaufendes Strahlbüschel, also aF und bF wiederum zwei gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel, deren Erzeugniss ein Kreis ist; der Ort des Brennpunktes F ist also ein Kreis, welcher ausser durch a und b auch durch c geht, wie leicht zu sehen ist; also:

Die Brennpunkte sämmtlicher einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln liegen auf demjenigen Kreise, welcher dem Dreieck umgeschrieben ist (Nr. 146).

Durch dieselbe Ueberlegung erhalten wir den allgemeineren Satz: *Für alle Kegelschnitte, welche einem Dreieck eingeschrieben sind und den einen ihrer Brennpunkte auf einer geraden Linie haben, ist der Ort des andern Brennpunktes ein bestimmter Kegelschnitt, welcher dem gegebenen Dreieck umgeschrieben ist.**

Aus jenem speciellen Satze folgt, wegen der einzigen einem vollständigen Vierseit eingeschriebenen Parabel, welche zu gleicher Zeit vier Parabelschaaren angehört, dass die den vier Dreiseiten eines vollständigen Vierseits umgeschriebenen Kreise durch einen Punkt laufen, den Brennpunkt dieser Parabel. Ferner, da die Fusspunkte der aus dem Brennpunkt auf die Tangenten einer Parabel herabgelassenen Perpendikel in einer Geraden liegen, der Scheiteltangente der Parabel, so müssen die aus einem Punkte des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises auf die Dreiecksseiten herabgelassenen Perpendikel ihre Fusspunkte in gerader Linie haben, der sogenannten *Simpson'schen* Gerade. Die weitere Folgerung fürs Vierseit übergehen wir, sowie die bekannten elementaren Sätze, welche sich hieran anschliessen.

* Ueber den Ort der Brennpunkte sämmtlicher Kegelschnitte einer Schaar vergl. *Schröter*, Math. Annalen Bd. 5 S. 50.

§ 45. Charakteristische Eigenschaft der Kegelschnittschaar und einige Folgerungen aus derselben.

Der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, dass 209 jede Transversale von seinen Kegelschnitten in Paaren conjugirter Punkte einer Involution getroffen wird, steht die entsprechende der Kegelschnittschaar zur Seite:

Die Tangentenpaare aus einem beliebigen festen Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar sind Paare conjugirter Strahlen einer Involution.

Dies folgt unmittelbar aus der besprochenen Entstehung der Kegelschnittschaar (Nr. 202). Die Tangenten der verschiedenen Kegelschnitte der Schaar, welche durch einen Punkt P gehen, schneiden in \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 perspective Punktreihen ein; schieben wir zurück, so erhalten wir entsprechende Punkte zweier in allgemeinen nicht perspectiver projectiver Punktreihen; ihre Verbindungsstrahlen umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 zu Tangenten hat; so oft nun zwei dieser Verbindungsstrahlen in einem Punkte B von \mathfrak{L} sich schneiden, laufen die Verbindungslinien der verschobenen Punkte, Tangenten des Kegelschnitts der Schaar, welcher B entspricht, durch P .

Alle Tangentenpaare aus den Punkten B einer Gerade \mathfrak{L} an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ fixiren aber auf der Tangente \mathfrak{A} die Punktepaare einer Involution (Nr. 110), welche durch die Verschiebung eine Involution bleibt; die von P nach den Punktepaaren derselben hingehenden Strahlen bilden daher auch eine Involution.

Die Tangenten aus P an die drei Punktepaare der Schaar sind die Strahlen je nach den beiden Punkten; in Nr. 56 ist bewiesen worden, dass die Strahlenpaare nach den Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierseits in Involution sind. Dieser Beweis lässt sich verallgemeinern.

Seien $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paare von Gegenecken des vollständigen Vierseits und treffe das aus P an irgend einen Kegelschnitt der Schaar gelegte Tangentenpaar die Seite ab des Vierseits in x und y , die Seite $\alpha\beta$ in ξ und η , so findet zwischen den Schnittpunkten zweier Tangenten ab und $\alpha\beta$ des Kegelschnitts durch vier andere die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt: $(abxy) = (\beta\alpha\xi\eta)$, also ist auch $(abxy) = (\alpha\beta\eta\xi)$; die von P nach diesen vier Paaren von Punkten hingehenden Strahlen sind also vier Paare entsprechender Strahlen zweier projectiven Strahlbüschel, welche involutorisch sind, da dem Strahl Px der Strahl $P\eta y$,

dem Py der $P\xi x$ entspricht; mithin sind die drei Strahlenpaare Pa, Pa ; $Pb, P\beta$; Px, Py sechs Strahlen einer Involution; diese ist schon durch die zwei Paare $P(a, \alpha; b, \beta)$ vollständig bestimmt, welche fest bleiben, wenn der Kegelschnitt die ganze Schaar durchläuft; also liefern die Tangentenpaare aus P an sämtliche Kegelschnitte der Schaar immer andere Paare conjugirter Strahlen einer und derselben Involution.

Den entsprechenden Beweis für das Kegelschnittbüschel möge der Leser hinzufügen.

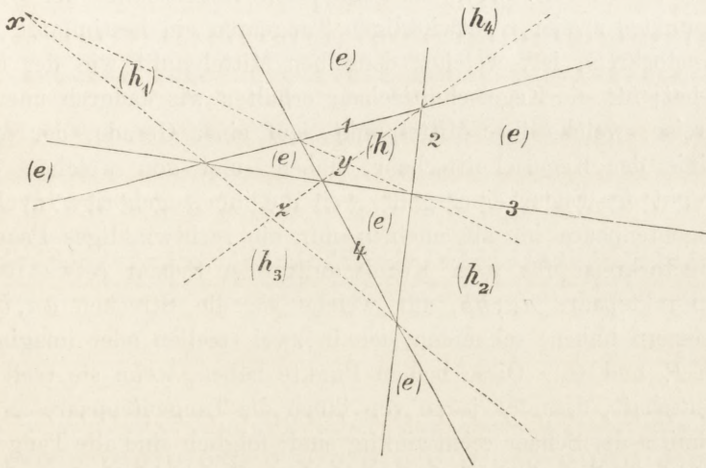
210 Das in Nr. 56 angegebene Kennzeichen, ob von einem Punkte P nach den Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierseits eine hyperbolische oder elliptische Involution geht, unterschied von den elf Räumen, in welche die ganze Ebene durch die vier Seiten des Vierseits zerschnitten wird (Fig. 27), fünf hyperbolische (h) und sechs elliptische (e); die ersteren sind diejenigen, in welche die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits hineinfallen, und letztere die übrig bleibenden, welche von keiner Diagonale getroffen werden. Wenn nun die Involution, welche von den Tangentenpaaren aus einem Punkte P an die Kegelschnitte der Schaar gebildet wird, hyperbolisch ist, so hat sie zwei reelle Doppelstrahlen; jeder dieser Doppelstrahlen muss daher in P selbst eine Tangente sein für einen Kegelschnitt der Schaar, weil das Tangentenpaar aus P an diesen Kegelschnitt zusammenfällt. Wir schliessen also: *Es giebt zwei Kegelschnitte, welche vier gegebene Geraden berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen; sie sind aber nur dann reell, wenn der gegebene Punkt in einem der fünf hyperbolischen von den Räumen liegt, in welche die vier gegebenen Geraden die Ebene zerschneiden, d. h. in einem derjenigen Räume, welche die drei Diagonalen des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits enthalten.* Liegt P auf einer der vier Geraden selbst, so giebt es nur einen Kegelschnitt, der sie berührt und durch diesen Punkt geht, weil dann die Involution parabolisch ist. Liegt P in einem der sechs elliptischen Räume, so sind die beiden Kegelschnitte imaginär. Die Aufgabe, diese beiden Kegelschnitte zu finden, ist also darauf zurückgeführt, die Doppelstrahlen einer bekannten Involution zu bestimmen (Nr. 34). Wir ersehen hieraus, dass *die Kegelschnitte einer Schaar nicht die ganze unendliche Ebene erfüllen, sondern nur die fünf hyperbolischen Räume, während die sechs elliptischen frei bleiben.*

Die fünf hyperbolischen Räume unterscheiden sich dadurch von einander, dass durch jeden Punkt von (h) (Fig. 66)* zwei Ellipsen

* Sie ist dieselbe wie Fig. 27, nur dass die verschiedenen Räume (h) besondere Bezeichnungen erhalten haben.

gehen, durch jeden Punkt von (h_1) und (h_2) zwei Hyperbeln, deren Aeste beziehentlich in diesen Räumen liegen, durch jeden Punkt von (h_3) eine Ellipse und eine Hyperbel, deren zweiter Ast in (h_4) gelegen ist, oder zwei in diesen Räumen gelegene Hyperbeln, je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb der Parabel der Schaar sich befindet, die auch in (h_3) enthalten ist, und durch jeden Punkt von (h_4) zwei ebenfalls in (h_3) und (h_4) befindliche Hyperbeln. Die für (h_3) gemachte Behauptung erhellt daraus, dass durch jeden unendlich fernen Punkt dieses Raumes nothwendig zwei Hyperbeln gehen.

Fig. 66.



Damit können wir die Frage nach den Kennzeichen beantworten, ²¹¹
wann fünf Geraden 1, 2, 3, 4, 5 eine Hyperbel oder Ellipse berühren.
 Wenn wir die fünfte Gerade, sie etwa um einen Punkt drehend, so bewegen, dass sie über eine Ecke des Vierseits 1234 geht, so geht der von ihr berührte Kegelschnitt aus der demselben eingeschriebenen Schaar aus einer Hyperbel durch das Punktepaar, zu dem die Ecke gehört, in eine Ellipse über oder umgekehrt. Wir gehen von einer Lage 5_0 der Gerade 5 aus, in der sie sowohl die Parabel Π_0 der Schaar (die sich in (h_3) befindet) nicht schneidet, als auch alle sechs Ecken des Vierseits auf derselben Seite hat, etwa einer Parallelen zu 3, welche durch die hyperbolischen Räume (h_1) und (h_4) geht. Die berührte Curve ist ersichtlich eine Hyperbel. Hat 5 eine andere Lage, so finden, wenn die Drehung von 5_0 nach 5 (um den Schnittpunkt) über i Ecken des Vierseits führt, i Wechsel von Hyperbel zu Ellipse oder umgekehrt statt, so lange nicht eine Tangente von Π_0 überschritten wird; denn auch dabei erfolgt ein Wechsel. Da nun andere Uebergänge in der Schaar nicht möglich sind, so folgt:

Wenn fünf Geraden 1, 2, 3, 4, 5 gegeben sind, so sei Π_0 die Parabel, welche 1, 2, 3, 4 berührt. Schneidet 5 diese Parabel nicht, so ist der von allen fünf Geraden berührte Kegelschnitt Hyperbel oder Ellipse, je nachdem 5 eine gerade oder ungerade Zahl von Ecken des Vierseits 1234 zu beiden Seiten hat; wenn aber 5 die Π_0 schneidet, so gilt das umgekehrte Kennzeichen.*

212 Eine weitere Frage ist: Wo muss der Punkt P liegen, damit die Involution der Tangentenpaare aus ihm an die Kegelschnitte der Schaar rechtwinklig sei?

Wir wissen (Nr. 131), dass für jeden Kegelschnitt der Ort des Schnittpunktes zweier rechtwinkligen Tangenten ein bestimmter Kreis, der Directorkreis, ist, welcher denselben Mittelpunkt wie der Kegelschnitt hat; für die Kegelschnittschaar erhalten wir dadurch unendlich viele Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, der Mittelpunktslinie der Kegelschnittschaar, haben, und von welchen durch jeden Punkt der Ebene einer geht, weil die ihm zugehörige Involution der Tangentenpaare im allgemeinen nur ein rechtwinkliges Paar hat. Die Directorkreise für zwei Kegelschnitte der Schaar (etwa für die beiden Punktepaare $a\alpha, b\beta$, für welche sie die Strecken $a\alpha, b\beta$ zu Durchmessern haben) schneiden sich in zwei (reellen oder imaginären) Punkten P_0 und Q_0 . Diese beiden Punkte haben, wenn sie reell sind, die Eigenschaft, dass für jeden von ihnen die Tangentenpaare an zwei Kegelschnitte der Schaar rechtwinklig sind; folglich sind alle Tangentenpaare rechtwinklig. Alle Directorkreise, den Kegelschnitten der Schaar zugehörig, gehen durch P_0, Q_0 und bilden daher ein Kreisbüschel; die der Parabel der Schaar zugehörige Leitlinie oder Directrix ist die Potenzlinie (endliche gemeinsame Secante) dieses Büschels. Sind P_0, Q_0 imaginär, so giebt es in der Ebene keinen Punkt, von dem eine rechtwinklige Involution an die Schaar kommt.

Aber auch in diesem Falle bilden die Directorkreise ein Kreisbüschel, welches die Leitlinie der einzigen in der Kegelschnittschaar enthaltenen Parabel zur Potenzlinie (ideellen gemeinschaftlichen Secante) hat; dies lässt sich auf folgende Weise erkennen. Wir wissen (Nr. 104), dass das Diagonaldreieck xyz des vollständigen Vierseits ein Polardreieck für jeden Kegelschnitt der Schaar ist, und (Nr. 133) dass der einem Polardreieck umgeschriebene Kreis immer den Directorkreis (bezw. die Leitlinie, wenn es sich um eine Parabel handelt) unter rechten Winkeln schneidet; folglich genügen alle Directorkreise den beiden Bedingungen, dass ihre Mittelpunkte in einer Geraden (der

* Möbius, Barycentrischer Calcul § 264 (Gesammelte Werke Bd. I S. 343).

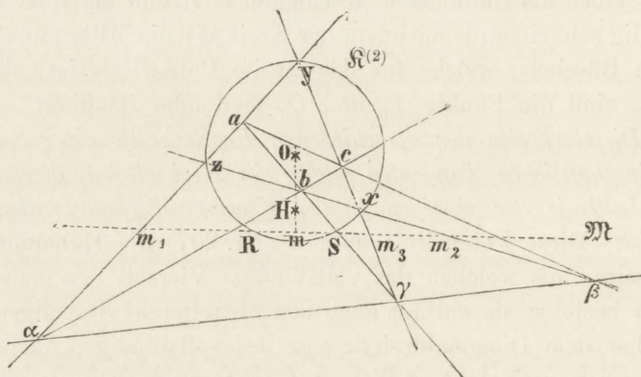
Mittelpunktlinie \mathfrak{M}) liegen, und dass sie einen festen Kreis, den um das Diagonaldreieck xyz beschriebenen, rechtwinklig schneiden, woraus nach bekannten Elementar-Sätzen folgt, dass sie ein Kreisbüschel bilden. Der um das Diagonaldreieck xyz beschriebene Kreis $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher seinen Mittelpunkt in der Potenzlinie des Kreisbüschels oder in der Leitlinie der einzigen Parabel der Kegelschnittschaar hat, gehört dem conjugirten Kreisbüschel an, d. h. dem Büschel der Kreise, welche aus den verschiedenen (äusseren) Punkten X der Potenzlinie des ersteren Büschels je mit der gemeinsamen Länge der Tangenten aus X an die Kreise desselben als Halbmesser geschlagen sind und daher diese Kreise rechtwinklig schneiden; je nachdem der Kreis $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Mittelpunktlinie \mathfrak{M} des ersten Büschels, welche für das zweite Potenzlinie ist, nicht trifft oder trifft, sind die Punkte P_0 und Q_0 reell oder imaginär. Also:

Die Directorkreise der verschiedenen Kegelschnitte einer Schaar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten bilden ein Kreisbüschel, dessen Potenzlinie die Leitlinie der einzigen in der Kegelschnittschaar vorkommenden Parabel ist. Diese Potenzlinie enthält (Nr. 207) die Höhenpunkte der vier Dreiseite, aus welchen das vollständige Vierseit der gemeinsamen Tangenten besteht; sie enthält auch den Mittelpunkt desjenigen Kreises $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher dem Diagonaldreieck xyz des vollständigen Vierseits umgeschrieben ist, und steht endlich senkrecht auf der Gerade \mathfrak{M} , welche die Mittelpunkte der Kegelschnitte der Schaar enthält und zugleich die Mittelpunktlinie des Kreisbüschels ist. *Die Potenzlinie ist eine eigentliche gemeinschaftliche Secante des Kreisbüschels, wenn der dem Diagonaldreieck xyz umgeschriebene Kreis $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Mittelpunktlinie nicht trifft; in diesem Falle gehen alle Kreise des Büschels durch dieselben beiden Punkte P_0 und Q_0 der Potenzlinie, und dies sind die einzigen Punkte in der Ebene, für welche die aus den Tangentenpaaren an die Kegelschnitte der Schaar gebildete Involution rechtwinklig ist.* Die Potenzlinie ist dagegen eine ideelle gemeinschaftliche Secante des Kreisbüschels, es giebt keine reellen Punkte in der Ebene von der verlangten Eigenschaft, sobald der Kreis $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Mittelpunktlinie \mathfrak{M} in zwei reellen Punkten R und S trifft. In diesem Falle sind die Punkte R und S selbst Nullkreise des Kreisbüschels, d. h. solche Directorkreise, für welche der Radius Null ist; dieser Fall tritt nur bei der gleichseitigen Hyperbel ein; *die Punkte R und S sind also die Mittelpunkte der beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche in der Kegelschnittschaar vorkommen können; wenn die Punkte R und S imaginär sind, giebt es keine gleichseitige Hyperbel in der Kegelschnittschaar.*

Wir wollen, hieran anschliessend, eine von den vier Seiten des ²¹³ vollständigen Vierseits verändern und den Ort der Mittelpunkte aller

gleichseitigen Hyperbeln aufsuchen, welche einem gegebenen Dreieck eingeschrieben sind. Sind wiederum die drei Paare von Gegenecken des vollständigen Vierseits $a\alpha, b\beta, c\gamma$ und die Diagonalepunkte x, y, z (Fig. 67), so wollen wir die Seite $\alpha\beta\gamma$ verändern und das Dreieck abc festhalten. Ohne indessen der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir die Seite $\alpha\beta\gamma$ so bewegen, dass der Punkt α fest bleibt; denn welches auch die dem Dreieck abc eingeschriebene gleichseitige Hyperbel sei, immer wird sich aus einem Punkte α der Tangente bc eine und

Fig. 67.



nur eine zweite Tangente legen lassen. Sind dann m_1, m_2, m_3 die Mitten der Diagonalen $a\alpha, b\beta, c\gamma$, welche in der Mittelpunktslinie \mathfrak{M} liegen, so bleibt m_1 bei der Bewegung fest; die Mittelpunktslinie \mathfrak{M} dreht sich also um den festen Punkt m_1 , das Polardreieck xyz verändert sich; es seien O der Mittelpunkt des um dasselbe beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$, R und S dessen Schnitte mit \mathfrak{M} — die Punkte, welche den gesuchten Ort erzeugen — und m der Fusspunkt des Lothes aus O auf \mathfrak{M} , die Mitte von RS . Dies Perpendikel Om ist je die Potenzlinie oder die Leitlinie der einzigen Parabel und enthält die Höhenpunkte der vier Dreiseite. Von diesen bleibt das Dreieck abc fest, dessen Höhenpunkt H sei; das Perpendikel Om dreht sich also um den festen Punkt H ; folglich ist der Ort des Punktes m der Kreis, welcher die festen Punkte H und m_1 zu Endpunkten eines Durchmessers hat, also:

$$Hm^2 + m_1m^2 = Hm_1^2.$$

Nun ist

$$Rm = mS$$

oder

$$Rm + Sm = 0$$

und

$$m_1m = m_1R + Rm = m_1S + Sm;$$

also:

$$\begin{aligned}
 m_1 m^2 &= (m_1 R + Rm) (m_1 S + Sm) \\
 &= m_1 R \cdot m_1 S + m_1 R \cdot Sm + m_1 S \cdot Rm + Rm \cdot Sm \\
 &= m_1 R \cdot m_1 S + Rm \cdot RS - Rm^2 \\
 &= m_1 R \cdot m_1 S + Rm^2;
 \end{aligned}$$

mithin haben wir:

$$\begin{aligned}
 Hm^2 + Rm^2 &= Hm_1^2 - m_1 R \cdot m_1 S, \\
 HR^2 = HS^2 &= Hm_1^2 - m_1 R \cdot m_1 S.
 \end{aligned}$$

Es ist aber $m_1 R \cdot m_1 S$ gleich der Potenz des Punktes m_1 in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$, und, weil dieser durch y und z geht, auch gleich $m_1 y \cdot m_1 z$; da y und z harmonisch liegen zu den Gegenecken a und α , deren Mitte m_1 ist, so haben wir gleichzeitig $m_1 y \cdot m_1 z = m_1 a^2 = m_1 \alpha^2$, also:

$$HR^2 = HS^2 = Hm_1^2 - m_1 a^2 = \text{const.}$$

Die Punkte R und S beschreiben daher bei der Bewegung einen Kreis um den festen Punkt H , dessen Radius r leicht zu ermitteln ist. Schlagen wir nämlich über $a\alpha$ als Durchmesser den Kreis, dessen Mittelpunkt m_1 und dessen Radius $m_1 a$ sein wird, so ist die Potenz des Punktes H in Bezug auf ihn gleich $Hm_1^2 - m_1 a^2 = r^2$. Es schneidet aber Ha diesen Kreis zum andern Male in dem Fusspunkte der Höhe aus a auf bc ; wenn daher die Fusspunkte der Höhen des Dreiecks abc mit a^1, b^1, c^1 bezeichnet werden, so ist die Potenz von H in Bezug auf diesen Kreis um m_1 auch $Ha \cdot Ha^1$, was, wie bekannt, gleich $Hb \cdot Hb^1$ und $Hc \cdot Hc^1$ ist; also ist

$$r^2 = Ha \cdot Ha^1 = Hb \cdot Hb^1 = Hc \cdot Hc^1.$$

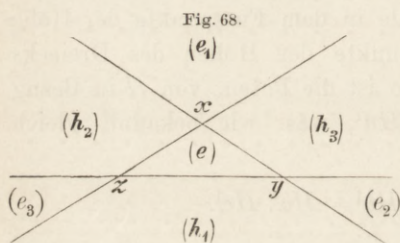
Dies Radiusquadrat ist nur positiv und der Kreis nur reell, wenn a und a^1 , ebenso b und b^1 , c und c^1 auf derselben Seite von H liegen, wenn also H ausserhalb des Dreiecks abc liegt oder, was dasselbe sagt, wenn das Dreieck abc stumpfwinklig ist; er reducirt sich auf einen Punkt beim rechtwinkligen Dreieck und wird imaginär beim spitzwinkligen. Für diesen Kreis ist ferner das Dreieck abc ein Polar-dreieck; denn $r^2 = Ha \cdot Ha^1$ sagt aus, dass a und a^1 in Bezug auf ihn conjugirt sind, also ist bc , die Senkrechte auf Ha in a^1 , die Polare von a . Wir haben mithin folgenden Satz:*

* *Steiner*, Journal für Mathem. Bd. 55 S. 371; Gesammelte Werke Bd. 2 S. 677. *Steiner* bezeichnet den Kreis als den äusseren Potenzkreis der beiden Kreise, von welchen der eine dem gegebenen Dreiecke, der andere dem Dreiecke, der Seitenmitten umgeschrieben ist (Neunpunktkreis des gegebenen Dreiecks); dazu vergl. Gesammelte Werke Bd. 1 S. 32, 33 und *Dörholt*, Ueber einem Dreiecke um- und eingeschriebene Kegelschnitte, Dissertation von Münster 1884, S. 68.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche demselben Dreieck eingeschrieben sind, liegen auf dem Kreise, der den Höhenpunkt des Dreiecks zu seinem Mittelpunkte und das Dreieck zu einem Polardreieck hat; dieser Kreis ist nur dann reell, wenn das Dreieck stumpf- (oder recht-) winklig ist, und das Quadrat seines Radius ist dann gleich dem constanten Rechteck aus den Abständen des Höhenpunktes von jeder Ecke und der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks. Es kann also einem spitzwinkligen Dreieck keine gleichseitige Hyperbel eingeschrieben werden, einem rechtwinkligen nur eine.

§ 46. Ueber die besondere Art der in einer Schaar enthaltenen Kegelschnitte.

214 Ueber die Art eines Kegelschnitts einer Schaar belehrt uns wieder die Art der Involution conjugirter Durchmesser. In dem Diagonaldreieck xyz des Vierseits der gemeinsamen Tangenten haben wir ein gemeinsames Polardreieck der Kegelschnitte der Schaar. In Nr. 134 ist schon erörtert, wie aus der Lage des Mittelpunkts m eines Kegelschnitts, zu welchem ein Polardreieck xyz gehört, auf die Art des Kegelschnitts geschlossen werden kann. Durch die Seiten von xyz



wird die Ebene in sieben Räume geteilt (Fig. 68): den Innenraum (e) , die drei Scheitelräume (e_1) , (e_2) , (e_3) und die drei Aussenräume (h_1) , (h_2) , (h_3) neben den Seiten. Die Punkte in den drei Scheitelräumen (e_1) , (e_2) , (e_3) sind Mittelpunkte von Ellipsen, die in (h_1) , (h_2) , (h_3) Mittelpunkte von Hyperbeln, während in den Innenraum (e) der Mittelpunkt keiner reellen Curve, zu der xyz als Polardreieck gehört, fallen kann.

Erinnern wir uns, dass, wenn m gegeben ist, wir für den betreffenden Kegelschnitt sofort drei Paare conjugirter Durchmesser haben: den Durchmesser mx , my , mz sind die Parallelen durch m zu yz , zx , xy conjugirt.

Bei unserer Kegelschnittschaar mit vier reellen gemeinsamen Tangenten befinden sich die Mittelpunkte der Kegelschnitte auf einer Gerade \mathfrak{M} . In den Innenraum (e) des Diagonaldreiecks xyz dringt diese Gerade \mathfrak{M} nicht ein; denn die beiden durch eine Diagonale, z. B. yz , verbundenen Gegenecken des Vierseits sind harmonisch zu den beiden Ecken y , z des Diagonaldreiecks; also liegen diese auf derselben Seite des Mittelpunkts zwischen jenen; durch diesen Mittelpunkt geht aber die Gerade \mathfrak{M} , also trifft sie alle drei Seiten von xyz

in den Verlängerungen und geht durch zwei von den Räumen (e_1) , (e_2) , (e_3) und zwei von den (h_1) , (h_2) , (h_3) .

Jeder Punkt der Mittelpunktsgerade \mathfrak{M} ist Mittelpunkt eines reellen Kegelschnitts der Schaar; diese enthält, wie wir schon wissen, zwei Reihen von Ellipsen und zwei Reihen von Hyperbeln (Nr. 203).

Während der Punkt m die Mittelpunktsgerade \mathfrak{M} durchläuft, beschreiben die Strahlen mx und my zwei perspective Strahlbüschel, und die conjugirten Durchmesser zu mx und my haben constante Richtungen.

Wir denken uns nun wieder die Durchmesserinvolutionen sämtlicher Kegelschnitte der Schaar parallel nach einem Punkte o verschoben und legen einen beliebigen Kegelschnitt $C^{(2)}$ durch denselben; dann liefert jede der nach o verlegten Involutionen einen Punkt P , das Centrum der krummen Involution, welche sie in $C^{(2)}$ einschneidet; zwei Strahlenpaare der Involution bestimmen ihn. Ziehen wir (Fig. 69) durch o die Parallele zu yz , welche den Kegelschnitt $C^{(2)}$ in α trifft, die Parallele zu zx , welche ihn in β , ferner durch o die Parallelen zu xm und ym , welche ihn in α^1 und β^1 treffen, so ist der Schnittpunkt von $\alpha\alpha^1$ und $\beta\beta^1$ der Punkt P , welcher der Involution der conjugirten Durchmesser für den Kegelschnitt (m) entspricht.

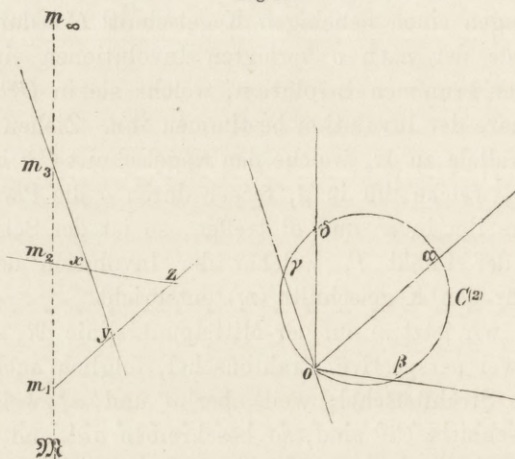
Verändern wir jetzt m auf der Mittelpunktslinie \mathfrak{M} , so beschreiben xm und ym zwei perspective Strahlbüschel, folglich auch $o\alpha^1$ und $o\beta^1$ zwei projective Strahlbüschel; weil aber o und α zwei feste Punkte des Hilfskegelschnitts $C^{(2)}$ sind, so beschreiben $o\alpha^1$ und $\alpha\alpha^1$ zwei projective Strahlbüschel, ebenso $o\beta^1$ und $\beta\beta^1$, folglich beschreiben auch $\alpha\alpha^1$ und $\beta\beta^1$ zwei projective Strahlbüschel; der Ort ihres Schnittpunktes P ist also ein Kegelschnitt $C_1^{(2)}$, welcher durch α und β geht. Dass er auch durch γ , den Schnittpunkt des parallel mit xy durch o gezogenen Strahles mit dem Kegelschnitte $C^{(2)}$, geht, ist einleuchtend, da wir statt α und β auch α und γ oder β und γ hätten wählen können; und wenn m in den Schnittpunkt der Mittelpunktslinie \mathfrak{M} mit xy rückt, gelangt der Punkt P nach γ . Fällt m in den unendlich entfernten Punkt der Mittelpunktslinie \mathfrak{M} , so nimmt der Punkt P die Lage des Punktes δ an, welcher der Schnittpunkt der durch o zur Mittelpunktslinie \mathfrak{M} gezogenen Parallelen mit $C^{(2)}$ ist; denn in diesen Punkt fallen dann α^1 und β^1 zusammen und daher auch P . Die Kegelschnitte $C^{(2)}$ und $C_1^{(2)}$ begegnen sich also in den vier (reellen) Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Wir haben demnach zunächst folgenden Satz gefunden:

Verschiebt man die Involutionen der conjugirten Durchmesser für sämtliche Kegelschnitte einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten mit Beibehaltung ihrer Richtung (ohne Drehung) nach einem Punkte o

eines beliebigen Kegelschnitts $C^{(2)}$, so bestimmt jede (in der neuen Lage) einen Punkt P , das Centrum der in $C^{(2)}$ eingeschnittenen krummen Involution. Der Ort der Punkte P für alle Kegelschnitte der Schaar ist ein bestimmter Kegelschnitt $C_1^{(2)}$, der mit $C^{(2)}$ diejenigen vier Punkte gemein hat, in welchen die durch o mit den drei Diagonalen des Vierseits und der Mittelpunktslinie \mathfrak{M} gezogenen Parallelen dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ begegnen.

Ist der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ einmal ermittelt, so haben wir eine leicht übersehbare Abhängigkeit einerseits zwischen den Kegelschnitten der Schaar oder ihren Mittelpunkten m auf \mathfrak{M} und ihren zugehörigen

Fig. 69.



Durchmesserinvolutionen und andererseits den sämtlichen Punkten P des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$. Die Mittelpunktslinie \mathfrak{M} , welche die Mitten m_1, m_2, m_3 der drei Diagonalen des Vierseits enthält, und deren unendlich entfernten Punkt wir mit m_∞ bezeichnen wollen (Fig. 69), wird durch die vier Punkte m_1, m_2, m_3, m_∞ in vier Stücke geteilt, und andererseits zerfällt der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ durch die vier auf ihm gelegenen Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in vier Stücke; es enthalten die Strecken $m_1 m_2, m_2 m_3, m_3 m_\infty, m_\infty m_1$ die Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte der Schaar, deren Durchmesserinvolutionen, nach o verlegt, Punkte P liefern, welche beziehungsweise die Stücke $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \delta\alpha$ des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ erfüllen. Für die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ selbst wird die Involution parabolisch, die vier Kegelschnitte, welche ihnen entsprechen, müssen also Parabeln sein. Eine eigentliche Parabel entspricht freilich nur dem Punkte δ ; die den drei Punkten α, β, γ entsprechenden Kegelschnitte der Schaar sind die drei Punktepaare (drei Paare Gegenecken des vollständigen Vierseits). Und ein solches Punktepaar oder die

doppelt gedachte Verbindungslinie desselben kann nicht blos, wie wir gesehen haben, als Ellipse oder Hyperbel (mit einer verschwindend kleinen Axe), sondern auch als eine specielle Parabel aufgefasst werden, denn sie hat zwei zusammenfallende unendlich entfernte Punkte, was das charakteristische Merkmal der Parabel ist; auch schon bei der Betrachtung der Parabelschaar (Nr. 206) traten solche Doppellinien als specielle Parabeln auf.

Je nachdem nun der Punkt P innerhalb oder ausserhalb des Hilfskegelschnitts $C^{(2)}$ liegt, ist die Involution in o oder die mit ihr parallele Durchmesserinvolution des Kegelschnitts der Schaar elliptisch oder hyperbolisch, dieser Kegelschnitt selbst demgemäss Ellipse oder Hyperbel. Wir erkennen von neuem das schon (Nr. 203, 214) gefundene Resultat, dass die Kegelschnittschaar aus zwei Reihen von Ellipsen und zweien von Hyperbeln besteht, welche mit einander abwechseln, so dass auf eine Reihe von Ellipsen eine von Hyperbeln u. s. w. folgt, und dass diese vier Reihen durch die Parabel und die drei Punktepaare von einander getrennt werden; denn, sobald der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ durch einen der vier Schnittpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geht, tritt er entweder aus der Region innerhalb des Kegelschnitts $C^{(2)}$ in die ausserhalb desselben oder umgekehrt.

Es seien zwei Geraden durch o gezogen; so trifft ihre Durchschnittssehne von $C^{(2)}$ den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ in zwei Punkten P und P^1 , welche zwei Kegelschnitten der Schaar entsprechen. Zu jeden zwei Richtungen giebt es zwei Kegelschnitte in der Schaar, welche conjugirte Durchmesser von diesen Richtungen haben. *Daher haben die Kegelschnitte der Schaar insbesondere auch paarweise parallele Axen.* Solche Paare von Kegelschnitten mit parallelen Axen erhalten wir dadurch, dass wir nach o eine rechtwinklige Involution legen; das Centrum der von ihr in $C^{(2)}$ eingeschnittenen krummen Involution sei μ . Jeder durch μ gezogene Strahl trifft $C_1^{(2)}$ in zwei solchen Punkten P und P^1 , deren entsprechende Kegelschnitte aus der Schaar parallele Axen haben.

Eine Tangente von $C_1^{(2)}$ in P liefert in $C^{(2)}$ zwei Schnittpunkte, die mit o verbunden ein besonderes Paar conjugirter Durchmesser des dem P entsprechenden Kegelschnitts bestimmen; mit diesem Paare wird kein Paar conjugirter Durchmesser irgend eines andern Kegelschnittes der Schaar parallel sein. *Also hat jeder Kegelschnitt der Schaar ein besonderes Paar conjugirter Durchmesser, welches mit keinem Paar conjugirter Durchmesser irgend eines der übrigen parallel ist, und es giebt zwei Kegelschnitte, bei denen dies besondere Paar die Axen sind; wie die beiden aus dem Punkte μ an den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ gelegten Tangenten lehren.*

217 Die Polare \mathcal{Q} von μ in Bezug auf $C^{(2)}$ trifft den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ in zwei Punkten P und P^1 ; jeder derselben hat die Eigenschaft, dass sein Tangentenpaar an $C^{(2)}$ in zwei Punkten berührt, die mit o verbunden zwei rechtwinklige Strahlen liefern, denn die Verbindungslinie der Berührungspunkte geht durch μ . Die Strahlen aus o sind aber die Doppelstrahlen der Involution in o , welche dem P zugehört; und sie ist gleichseitig hyperbolisch, also entsprechen den Punkten P und P^1 gleichseitige Hyperbeln. Es giebt mithin in der Kegelschnittschaar zwei oder eine oder keine *gleichseitige Hyperbel*, je nachdem \mathcal{Q} und $C_1^{(2)}$ sich schneiden oder berühren oder nicht treffen. (Vergl. Nr. 212.)

218 Nehmen wir an, dass zwei Kegelschnitte einer Schaar mit den Mittelpunkten m und m^1 ähnlich und ähnlich gelegen seien, also parallele Durchmesser-Involutionen haben, so müssen mx und m^1x parallel sein, weil sie die Durchmesser, die durch m und m^1 parallel zu yz gezogen sind, zu conjugirten haben; d. h. jene Strahlen müssen sich vereinigen und ebenso my und m^1y ; die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M} = mm^1$ fällt also in die Gerade xy . Es sind dann x und y auf zwei Diagonalen des Vierseits die Mitten, folglich muss der dritte Diagonalpunkt z unendlich fern sein; und umgekehrt, wenn ein Diagonalpunkt des vollständigen Vierseits der gemeinsamen Tangenten unendlich fern ist, so fällt die Mittelpunktslinie \mathfrak{M} mit der gegenüberliegenden Diagonale zusammen. Diese Gerade $\mathfrak{M} = xy$ und der Strahl vom jeweiligen Mittelpunkte nach dem unendlich fernen Diagonalpunkte z bilden ein Paar conjugirter Durchmesser von festen Richtungen, in das alle drei in Nr. 214 erwähnten Paare in dem jetzigen Falle sich vereinigen. Der Punkt z und der unendlich ferne Punkt von \mathfrak{M} sind in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt; die beiden Kegelschnitte der Schaar, die durch irgend einen unendlich fernen Punkt gehen, gehen daher auch noch durch den zu ihm in Bezug auf jene harmonischen und sind folglich ähnlich und ähnlich gelegen.

Zwei ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte der Schaar haben, weil die nach o verlegten Durchmesser-Involutionen zusammenfallen, denselben entsprechenden Punkt P ; an Stelle des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ tritt eine doppelte Gerade.

Wir schliessen aus dem Vorangehenden:

Unter den Kegelschnitten der Schaar giebt es im allgemeinen keine zwei, welche ähnlich und ähnlich liegend sind; wenn es aber insbesondere ein solches Paar giebt, so sind auch die übrigen paarweise ähnlich und ähnlich liegend. Dieser besondere Fall tritt ein, wenn zwei Diagonalen des Vierseits parallel sind; die Mittelpunktslinie \mathfrak{M} fällt dann mit der dritten Diagonale zusammen.

Geht die doppelte Gerade, in welche $C_1^{(2)}$ übergegangen ist, durch den Punkt μ , so giebt es *zwei Kreise* in der Kegelschnittschaar.

Bemerken wir das allgemeine Ergebniss:

219

Die Kegelschnitte einer Schaar schneiden in eine Gerade, die durch einen Diagonalpunkt des Vierseits der gemeinsamen Tangenten geht, eine Involution ein, welche diesen Punkt und den Schnittpunkt mit der gegenüberliegenden Diagonale zu Doppelpunkten hat; und zwar gehen durch jedes Paar der Involution zwei Kegelschnitte der Schaar.

Das entsprechende gilt für die Tangentenpaare an die Kegelschnitte eines Büschels aus einem Punkte auf einer Diagonale des Vierecks der gemeinsamen Punkte.

Eine besondere Einfachheit gewinnt die obige Untersuchung 220 (Nr. 215), wenn wir für den Hilfskegelschnitt $C^{(2)}$ einen Kreis annehmen. Für diesen wird der Punkt μ der Mittelpunkt, und alle solche Punkte P , die gleichweit vom Mittelpunkte abstehen, also auf einem concentrischen Kreise liegen, geben in o gleiche Involutionen. Liegt nämlich der Punkt P ausserhalb des Kreises $C^{(2)}$, so liefern die Tangenten aus ihm an $C^{(2)}$ zwei Berührungspunkte, deren Verbindungsstrahlen mit o die Doppelstrahlen der Involution sind; ihre Winkel bleiben dieselben, wenn P den concentrischen Kreis durchläuft. Liegt hingegen P innerhalb $C^{(2)}$, so giebt die kleinste durch ihn gezogene Sehne zwei Punkte, nach denen die beiden conjugirten Strahlen der Involution gehen, deren Winkel durch die Axen derselben halbirt werden; denn diese gehen nach den Punkten von $C^{(2)}$, die von dem durch P gehenden Durchmesser herrühren. Die Figur dieser vier Strahlen bleibt sich congruent, wenn P einen concentrischen Kreis beschreibt.

Ein mit dem Kreise $C^{(2)}$ concentrischer Kreis trifft den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ in vier solchen Punkten P , deren entsprechende Kegelschnitte ähnlich (nicht nothwendig im engeren Sinne) sind, weil die diesen vier Kegelschnitten der Schaar zugehörigen Durchmesser-Involutionen gleich sind; und zwar wird ein Kreis, dessen Radius grösser ist als der von $C^{(2)}$, in Punkten den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ treffen, welche vier ähnliche Hyperbeln der Kegelschnittschaar liefern, während ein Kreis, dessen Radius kleiner ist als der von $C^{(2)}$, in solchen Punkten trifft, welche vier ähnliche Ellipsen der Kegelschnittschaar liefern.

Weil $C_1^{(2)}$ den Kreis $C^{(2)}$ in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ trifft (Fig. 69), so erkennt man, dass z. B. ein Schnittpunkt, der zwischen α und β liegt, noch einen zweiten so gelegenen nach sich zieht. Also gehören von vier solchen ähnlichen Kegelschnitten immer zwei einer der vier oben hervor gehobenen Reihen und die beiden andern der zweiten gleichartigen

Reihe an. Bei jeder der vier Reihen in der Kegelschnittschaar wird es einmal vorkommen, dass die beiden ähnlichen Kegelschnitte zusammenfallen, indem durch das Wachsen oder Abnehmen des Radius eines mit $C^{(2)}$ concentrischen Kreises die zwei Schnittpunkte desselben mit einem der vier Curvenstücke $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ einander genähert werden können, bis sie zuletzt zusammenfallen; ein solcher Kreis wird den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ berühren, sein nach dem Berührungspunkte gezogener Radius wird also eine Normale des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ sein, und jene alleinstehenden Kegelschnitte werden daher bestimmt durch die Fusspunkte der Normalen, welche sich aus dem Mittelpunkte μ des Hilfskreises $C^{(2)}$ an den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ ziehen lassen. Es giebt daher (Nr. 152) vier solche Kreise um μ , deren Berührungspunkte die Fusspunkte der aus μ an $C_1^{(2)}$ gezogenen Normalen sind; diese Berührungspunkte, die Schnittpunkte von $C_1^{(2)}$ mit einer gewissen gleichseitigen Hyperbel, sind so beschaffen, dass unter den Abständen der Punkte des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ von μ der ihrige ein Maximum oder Minimum ist.

Zwei von den vier Theilen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ von $C_1^{(2)}$ liegen im Innern des Kreises $C^{(2)}$, und ersichtlich sind zwei Kreise um μ vorhanden, welche diese Bogen berühren. Die Berührungspunkte sind die dem Mittelpunkte μ von C^2 nächsten Punkte; also kommen die entsprechenden Involutionen der rechtwinkligen am nächsten. In jeder der beiden Reihen von Ellipsen haben wir zwei (reelle), welche dem Kreise am nächsten kommen, deren Axenverhältniss $\frac{b}{a}$ also am grössten ist. Jede der beiden Reihen von Hyperbeln ist durch zwei Curven begrenzt, bei denen der Asymptotenwinkel ϑ (vergl. Nr. 198, 199) den Werth 0 hat; denn das gilt sowohl bei der Parabel wie beim Punktepaar. Folglich muss es dazwischen einen extremen Werth geben; also sind auch die beiden andern Berührungen von $C_1^{(2)}$ mit Kreisen um μ reell. Besitzt nun die Schaar zwei reelle gleichseitige Hyperbeln, so geht in derjenigen Reihe von Hyperbeln, zu welcher die eine gehört, der Winkel ϑ von 0° durch 90° bis zu einem am weitesten von 90° entfernten stumpfen Winkel und kehrt durch 90° zurück zu 0° , so dass die zweite gleichseitige Hyperbel derselben Reihe angehört. In der andern Reihe hingegen oder, wenn keine reellen gleichseitigen Hyperbeln in der Schaar enthalten sind, in beiden Reihen von (lauter spitzwinkligen) Hyperbeln giebt es eine solche Hyperbel, deren Asymptotenwinkel ein Maximum ist, am meisten sich dem rechten nähert.

Mithin ergiebt sich:

Unter den Kegelschnitten von vier gemeinsamen Tangenten sind immer vier einander ähnlich, und von vier solchen ähnlichen Ellipsen oder Hyperbeln fallen je zwei in jede der beiden Reihen von Ellipsen, bezw. Hyperbeln, so dass in jeder von den vier Reihen die Kegelschnitte paarweise ähnlich sind. In jeder Reihe giebt es aber einen einzelnen Kegelschnitt, welcher keinem derselben Reihe ähnlich ist; und zwar ist dies in jeder der beiden Reihen von Ellipsen eine solche Ellipse, welche dem Kreise am nächsten kommt, wofern sie nicht selbst ein Kreis ist. Bei den Reihen von Hyperbeln sind zwei Fälle zu unterscheiden; je nachdem die beiden gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbeln der Schaar reell sind oder nicht, besteht die eine Reihe aus lauter spitzwinkligen Hyperbeln, die andere aus spitzwinkligen, den beiden rechtwinkligen und dann stumpfwinkligen Hyperbeln, oder beide Reihen enthalten nur spitzwinklige Hyperbeln. Für die ausgezeichnete Hyperbel ist der Asymptotenwinkel ein Maximum, spitz oder stumpf, je nachdem die Reihe nur spitzwinklige oder auch stumpfwinklige Hyperbeln enthält.*

Unter den Kreisen um μ , deren vier Schnitte mit $C_1^{(2)}$ je die vier ähnlichen Curven liefern, befindet sich die (doppelte) unendlich ferne Gerade; deren beiden Schnitten mit C_1^2 entsprechen die beiden (reellen oder imaginären) gleichseitigen Hyperbeln. Sind sie reell, so ist $C_1^{(2)}$ eine Hyperbel, und den ausserhalb $C^{(2)}$ gelegenen Punkten des einen und andern Astes entsprechen spitz-, bezw. stumpfwinklige Hyperbeln, und man sieht, dass auch Aehnlichkeit im weiteren Sinne möglich ist.

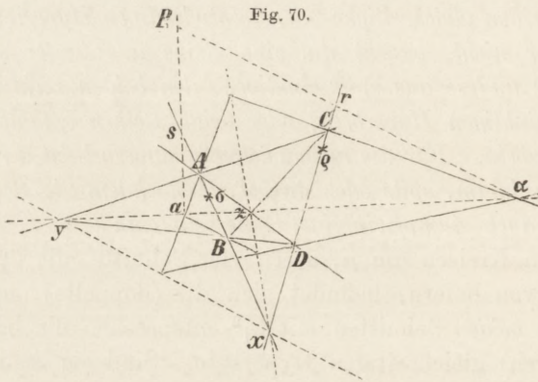
Die Ergänzung der vorigen Betrachtungen für den Fall imaginärer gemeinschaftlicher Tangentenpaare der Kegelschnittschaar kann erst später (§ 50) gegeben werden, nachdem die Polar-Eigenschaften einer Schaar ermittelt sind.

§ 47. Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels.

Das oben (Nr. 204) gefundene Resultat, dass die Mittelpunkte ²²¹ einer Kegelschnittschaar auf einer Gerade liegen, sowie das schon früher (Nr. 166) erhaltene Ergebniss, dass die Mittelpunkte eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln auf einem Kreise liegen, führt darauf hin, auch für das allgemeine Kegelschnittbüschel den Ort der Mittelpunkte aufzusuchen, oder, indem wir verallgemeinern und dualisiren, die vier Fragen zu beantworten: Was ist der Ort des Poles einer festen Gerade in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar? Was ist der Ort der Polaren eines festen Punktes in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte einer Schaar oder eines Büschels?

* Vergl. Steiner, Journal f. Mathem. Bd. 55 S. 374; Gesamm. Werke Bd. 2 S. 680.

Indem wir zuvörderst von einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten A, B, C, D ausgehen, wollen wir den Ort der Polaren eines festen Punktes P in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte desselben ermitteln. Ist xyz das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $ABCD$ (Fig. 70), so erhalten wir (Nr. 161) leicht einen Kegelschnitt des Büschels, indem wir die Verbindungslinie eines beliebigen Punktes a der Diagonale yz mit A als Tangente des Kegelschnitts ansehen; aB ist dann die Tangente in B , und verbinden wir



den Schnittpunkt der Gerade aA und der Diagonale xz mit C , den Schnittpunkt der Gerade aB und der Diagonale xz mit D , so treffen sich diese beiden Geraden, welche die Tangenten in C und D am Kegelschnitte sind, auf der Diagonale yz in einem Punkte α ; a und α liegen harmonisch zu y, z , u. s. w.

Um nun zu irgend einem Punkte P in der Ebene die Polare zu erhalten in Bezug auf den Kegelschnitt des Büschels, der in A von Aa berührt wird, ziehe ich die Gerade aP , welche in s die Berührungsehne AB trifft, und bestimme zu s den vierten harmonischen Punkt σ in Bezug auf A und B ; dann wird, weil a der Pol von AB ist, σ der Pol von aP sein; zweitens ziehe ich die Gerade $P\alpha$, welche in r die Sehne CD trifft, und bestimme zu r den vierten harmonischen Punkt ρ in Bezug auf C, D ; dann wird ρ der Pol von $P\alpha$ sein, folglich $\rho\sigma$ die Polare von P . Halten wir diese Construction fest und verändern den Kegelschnitt des Büschels, indem wir den Punkt a auf der Diagonale yz fortrücken, so beschreiben a, α eine Involution, deren Doppelpunkte y, z sind, weil a, α beständig zu y und z harmonisch liegen; ebenso beschreiben s, σ sowie r, ρ Involutionen, deren Doppelpunkte A und B , bezw. C und D sind. Mithin erzeugen a und α zwei projective Punktreihen, ebenso s und σ , sowie r und ρ ; nun

liegen die Punktreihen s und a perspectiv in Bezug auf das Perspectivitätscentrum P , ebenso r und α ; daher sind die Punktreihen σ und ρ projectiv und zwar perspectiv, weil in den Schnittpunkt x der Träger AB und CD zwei entsprechende Punkte hineinfallen (wenn a nämlich auf AB fällt, also α in CD , u. s. w.); folglich läuft die Verbindungslinie $\rho\sigma$ durch einen festen Punkt. Die Polaren des Punktes P in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels laufen daher durch einen festen Punkt Q und bilden ein Strahlbüschel, welches projectiv ist mit der von dem Punkte a beschriebenen Punktreihe, d. h. mit dem von den Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in einem der vier Grundpunkte gebildeten Strahlbüschel. Der Punkt Q kann jetzt leicht gefunden werden, indem wir P mit den Diagonalknoten x, y, z verbinden und zu jedem dieser Strahlen und dem in dem Diagonalknoten sich kreuzenden Geradenpaar des Büschels den vierten harmonischen Strahl construiren; diese drei Strahlen — die Polaren von P nach den drei Geradenpaaren — müssen sich in dem Punkte Q treffen.

Die Punkte P und Q heissen „conjugirte Punkte in Bezug auf das Kegelschnittbüschel“, denn aus der Polarentheorie (Nr. 100) geht hervor, dass auch die Polaren von Q in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels durch P gehen; jeder der beiden Punkte P und Q ist zum andern in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt. Auch die Polare von P in Bezug auf den durch P gehenden Kegelschnitt des Büschels, d. h. seine Tangente in P , muss durch Q gehen und ebenso für den durch Q gehenden Kegelschnitt des Büschels die Tangente in Q durch P . Die Verbindungslinie PQ wird also von zwei Kegelschnitten des Büschels in den Punkten P und Q berührt oder auf der Verbindungslinie PQ sind P und Q die Doppelpunkte der Involution, welche von dem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird (Nr. 168).

Das gefundene Resultat lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Die Polaren eines festen Punktes P in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels von vier festen Grundpunkten A, B, C, D laufen durch einen und denselben festen Punkt Q , so dass P und Q conjugirt sind in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels und auch die Polaren von Q sämtlich durch P laufen. Für irgend zwei Punkte P und P^1 in der Ebene bilden die Polaren zwei Strahlbüschel Q und Q^1 , welche allemal projectiv sind, indem je zwei Polaren in Bezug auf denselben Kegelschnitt des Büschels entsprechende Strahlen werden.

Das Strahlbüschel Q ist insbesondere auch projectiv mit dem von den Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in einem der vier Grundpunkte gebildeten und also auch, wenn wir auf die Entstehung des Kegelschnittbüschels aus dem Strahlbüschel zurückgehen, mit demjenigen Strahlbüschel P (Nr. 162), aus welchem wir das Kegelschnittbüschel abgeleitet haben.

222 Hieraus folgt weiter, wenn wir zwei Punkte P und P^1 festhalten und die Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels construiren, deren Schnittpunkt der Pol der Verbindungslinie PP^1 sein muss, dass der Ort des Poles einer festen Gerade PP^1 in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels, des Schnittpunktes entsprechender Strahlen der beiden projectiven Strahlbüschel Q und Q^1 , ein *Kegelschnitt* ist. Dieser Kegelschnitt ist zugleich der Ort derjenigen Punkte, welche in Bezug auf das Kegelschnittbüschel den sämtlichen Punkten der festen Gerade PP^1 conjugirt sind; denn die Punkte Q, Q^1 , welche zu den Punkten P, P^1 conjugirt sind, liegen auf diesem Kegelschnitt als Scheitel der erzeugenden Büschel; der Ort der Pole der Gerade PP^1 wird sich aber nicht ändern, wenn an Stelle von P und P^1 irgend zwei andere Punkte derselben genommen werden. Und der Kegelschnitt entsteht also auch durch die projectiven Büschel um die Pole der Gerade in Bezug auf zwei Kegelschnitte des Büschels, in denen sich die Polaren nach denselben für die verschiedenen Punkte der Gerade entsprechen.

Dem Kegelschnitt gehören daher die sechs Punkte an, welche auf den Seiten des vollständigen Vierecks den Schnittpunkten mit der Gerade harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf die Ecken, denn sie sind den Schnittpunkten conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels. Ferner sind die drei Diagonalpunkte x, y, z ebenfalls Punkte des gefundenen Kegelschnitts, weil sie die Pole der festen Gerade in Bezug auf die drei Geradenpaare des Kegelschnittbüschels sind, oder auch jeder von ihnen die gegenüberliegende Diagonale zur gemeinsamen Polare in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels hat und daher conjugirt ist zu dem Schnitte der Gerade mit dieser Polare.

Endlich können wir noch zwei Punkte dieses Kegelschnitts angeben (welche aber imaginär werden können), nämlich die Doppelpunkte der Involution, welche das Kegelschnittbüschel auf der festen Gerade ausschneidet; denn diese Punkte sind, wie wir vorhin gesehen haben, conjugirt in Bezug auf das Kegelschnittbüschel.

Wir haben daher folgendes Ergebniss: *Die Pole einer festen Gerade \mathcal{G} in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels von vier festen (reellen) Grundpunkten liegen auf einem Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$, welcher*

dem *Diagonaldreieck* xyz des von den vier Grundpunkten gebildeten vollständigen Vierecks umgeschrieben ist und die sechs Punkte enthält, die den Schnittpunkten der Gerade \mathcal{G} mit den sechs Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf das Eckenpaar; durch diese neun Punkte ist der Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ schon mehr als bestimmt. Der Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ ist zugleich der Ort sämtlicher Punkte Q , welche den Punkten P der Gerade \mathcal{G} in Bezug auf das Kegelschnittbüschel conjugirt sind.

Die Involution, in der \mathcal{G} von dem Kegelschnittbüschel geschnitten wird, hat zu dem „Polarkegelschnitt“ $\mathcal{G}^{(2)}$ eine eigenthümliche Beziehung. Trifft nämlich irgend ein Kegelschnitt des Büschels die Gerade \mathcal{G} in den Punkten P und p , so gehen seine Tangenten in P und p durch die conjugirten Punkte Q und q in Bezug auf das Kegelschnittbüschel und schneiden sich in einem Punkte s , dem Pol von \mathcal{G} in Bezug auf den angenommenen Kegelschnitt des Büschels; der Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ geht durch die drei Punkte Q , q und s . Da nun P und Q conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels sind und ebenso p und q , so müssen nach dem in Nr. 104 bewiesenen Satze von Hesse auch die Schnittpunkte (Pp, Qq) und (Pq, pQ) conjugirt für alle Kegelschnitte des Büschels sein; der erste Punkt (Pp, Qq) liegt aber auf der Gerade \mathcal{G} , folglich muss der andere, sein conjugirter in Bezug auf das Kegelschnittbüschel, auf dem Kegelschnitte $\mathcal{G}^{(2)}$ liegen; mithin schneiden sich Pq und pQ in einem Punkte r von $\mathcal{G}^{(2)}$. Wir haben jetzt vier Punkte Q, q, s, r auf dem Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$; zwei Diagonalepunkte dieses Vierecks sind die Punkte P und p , folglich sind sie conjugirt in Bezug auf $\mathcal{G}^{(2)}$. Dasselbe gilt für jedes Schnittpunktpaar eines Kegelschnitts des Büschels mit der Gerade \mathcal{G} ; wir haben also folgenden Satz:

Die Kegelschnitte eines Büschels treffen eine Gerade \mathcal{G} in Punktepaaren, welche allemal conjugirte Punkte sind in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$, welcher die Pole von \mathcal{G} in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels enthält. Diese Schnittpunktpaare bilden also auf \mathcal{G} die Involution, welche dem Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ zugehört; $\mathcal{G}^{(2)}$ geht durch ihre Doppelpunkte.

Dies folgt aber auch daraus, dass die Schnittpunkte von \mathcal{G} mit $\mathcal{G}^{(2)}$ in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt, also zu allen den Schnittpunktpaaren harmonisch sind. Hierin haben wir einen neuen Beweis für die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels.

Jeder Punkt von $\mathcal{G}^{(2)}$ ist also einerseits zu einem bestimmten Punkt von \mathcal{G} conjugirt auf das Kegelschnittbüschel, andererseits Pol

der Gerade \mathcal{G} in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt desselben. Schneidet eine Gerade den Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ in Q und Q^1 , so ist sie die Polare in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt des Büschels, für welchen Q (Q^1) Pol von \mathcal{G} ist, zu dem Punkte von \mathcal{G} , zu welchem Q^1 (Q) in Bezug auf das Büschel conjugirt ist. Jede Tangente an $\mathcal{G}^{(2)}$ ist also Polare des ihrem Berührungspunkte in Bezug auf das Büschel conjugirten Punktes von \mathcal{G} in Bezug auf den Kegelschnitt des Büschels, für welchen derselbe Berührungspunkt Pol von \mathcal{G} ist.

223 Durch das Kegelschnittbüschel wird ein eigenthümliches eindeutiges Entsprechen von Punkten in der Ebene vermittelt. Jedem Punkt P in der Ebene des Kegelschnittbüschels entspricht ein bestimmter conjugirter Punkt Q , welcher wiederum die Eigenschaft hat, dass sein conjugirter Punkt P ist. Bewegt sich P auf einer Gerade \mathcal{G} , so durchläuft der conjugirte Punkt Q einen Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$, welcher dem gemeinschaftlichen Polardreieck xyz des Kegelschnittbüschels umgeschrieben ist; dreht sich \mathcal{G} um einen festen Punkt P , so beschreibt der Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ ein Kegelschnittbüschel von vier festen Punkten x, y, z und Q , von denen Q dem festen Punkte P conjugirt ist. Allen Geraden \mathcal{G} in der Ebene entsprechen sämtliche Kegelschnitte (von doppelter Unendlichkeit), welche durch die drei Punkte x, y, z gehen. Es kommt in der Ebene viermal vor, dass zwei conjugirte Punkte P und Q zusammenfallen, und dies geschieht in den vier Grundpunkten des Kegelschnittbüschels. Nimmt insbesondere P die Lage eines der drei Diagonalkpunkte, z. B. x ein, so wird sein conjugirter Punkt Q unbestimmt, indem er jeder Punkt der Verbindungslinie der beiden übrigen Diagonalkpunkte y, z sein kann. Der Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ zerfällt in ein Geradenpaar, sobald \mathcal{G} durch einen der drei Diagonalkpunkte, z. B. durch x geht, und von diesem Geradenpaar ist allemal der eine Theil die gegenüberliegende Diagonale yz , der andere der vierte harmonische der \mathcal{G} zugeordnete Strahl durch x in Bezug auf die beiden Geraden des Paares (x) des Büschels.

Weil einer Gerade ein Kegelschnitt entspricht, so heisst die eindeutige Verwandtschaft *vom 2. Grad* oder *quadratisch*; die eben betrachtete hat noch die besondere Eigenschaft, dass jede zwei Punkte sich in beiderlei Sinne entsprechen; und deshalb heisst sie in Erweiterung des Begriffs zweier involutorischer projectiver Gebilde, deren Elemente sich in beiderlei Sinne entsprechen, auch *involutorisch*.*

* Eine eindeutige (aber nicht involutorische) Verwandtschaft 2. Grades zwischen Punkten der Ebene fand Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander (Berlin 1832) Nr. 59; Gesammelte Werke Bd. 1 S. 407.

Die im Obigen entwickelten allgemeinen Polar-Eigenschaften des 224
Kegelschnittbüschels sind nur bewiesen für den Fall eines Büschels mit vier reellen Grundpunkten. Dass sie auch bestehen bleiben, wenn zwei oder alle vier Grundpunkte imaginär werden, können wir nachweisen, indem wir zu der in § 42 angegebenen Entstehungsart des Kegelschnittbüschels zurückgehen; wir sahen dort, dass, wenn zwei Involutionen (b, β) und (c, γ) auf den Geraden \mathfrak{B} und \mathfrak{C} gegeben sind, unendlich viele Kegelschnitte sich auf reelle Weise construiren lassen, für welche sie die den Geraden \mathfrak{B} und \mathfrak{C} zugehörigen sind, und dass diese sämtlichen Kegelschnitte ein Büschel bilden, welches die vier Doppelpunkte der Involutionen zu Grundpunkten hat. Diese Construction liefert alle drei Arten von Kegelschnittbüscheln und lässt auch ebenso unmittelbar die vorhin bewiesenen Polar-Eigenschaften derselben erkennen. Durch einen beliebigen Punkt P giebt es, wie wir wissen, ein einziges Strahlenpaar, welches sowohl durch zwei conjugirte Punkte der einen, als auch durch zwei conjugirte Punkte der andern Involution geht, nämlich das gemeinsame Strahlenpaar der Strahlinvolutionen, die aus P die Punktinvolutionen auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} projeciren, und zwar ist dies Paar immer reell, sobald beide oder nur eine der beiden Involutionen elliptisch ist. Nur in dem Falle, dass beide hyperbolisch sind, braucht dies Paar nicht reell zu sein; dies ist aber gerade der Fall von vier reellen Grundpunkten des Büschels, den wir schon erledigt haben.

In den beiden andern Fällen mit zwei reellen und zwei imaginären oder mit vier imaginären Grundpunkten möge dies reelle Strahlenpaar durch die conjugirten Punkte b, β der ersten und durch die conjugirten Punkte c, γ der zweiten Involution gehen. Da nun jene sowohl wie diese in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind, so sind es nach dem Satze von *Hesse* auch die Punkte $(bc, \beta\gamma) = P$ und $(b\gamma, c\beta) = Q$; oder die Polaren von P in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels laufen durch denselben festen Punkt Q , was zu beweisen war.

Das Weitere ergibt sich jetzt leicht in folgender Weise. Lassen 225
wir einen Punkt P auf einer Gerade \mathfrak{G} sich bewegen, so wird der conjugirte Punkt Q in Bezug auf das Büschel schon dadurch bestimmt, dass wir von P die Polaren in Bezug auf zwei bestimmte Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ ermitteln und ihren Schnittpunkt Q aufsuchen. Die Polaren von sämtlichen Punkten P der Gerade \mathfrak{G} in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ laufen aber durch einen Punkt und bilden ein Strahlbüschel, welches projectiv ist mit der von P beschriebenen Punktreihe (Nr. 102). Dasselbe gilt von den Polaren des

veränderlichen Punktes P in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$, folglich sind auch die beiden von den Polaren beschriebenen Strahlbüschel unter sich projectiv, mithin der Ort des Punktes Q ein Kegelschnitt. Bewegt sich also der Punkt P auf einer Gerade \mathfrak{G} , so durchläuft sein conjugirter Punkt Q in Bezug auf das Kegelschnittbüschel einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{G}^{(2)}$, welcher auch die Pole der Gerade \mathfrak{G} in Bezug auf die Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ als Grundpunkte der ihn erzeugenden Strahlbüschel enthält; da aber die beiden Kegelschnitte ganz willkürlich aus dem Kegelschnittbüschel herausgenommen sind, und für jede zwei anderen derselbe Kegelschnitt $\mathfrak{G}^{(2)}$ als Ort der conjugirten Punkte Q sich ergeben muss, so enthält derselbe die Pole der Gerade \mathfrak{G} in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels. Wir schliessen wie oben, dass die Tangente in einem Punkte Q von $\mathfrak{G}^{(2)}$ die Polare des Punktes auf \mathfrak{G} ist, dem er in Bezug auf das Büschel conjugirt ist, in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt desselben, für welchen Q Pol von \mathfrak{G} ist.

Wenn nun \mathfrak{G} die Träger \mathfrak{B} , \mathfrak{C} der obigen Involutionen in b und c schneidet, und β , γ diesen Punkten in den Involutionen conjugirt sind, so sind ja b und β , c und γ für alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt; also liegen β und γ auf dem der Gerade \mathfrak{G} zugehörigen Kegelschnitte $\mathfrak{G}^{(2)}$. Nach dem obigen Satze von Hesse sind dann auch $(bc, \beta\gamma) = r$ und $(b\gamma, c\beta) = s$ conjugirt; da r auf \mathfrak{G} liegt, so gehört auch s dem $\mathfrak{G}^{(2)}$ an. Auch der Punkt $p = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gehört ihm an; mögen wir ihn als Doppelpunkt des Geradenpaars $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ des Büschels betrachten, oder auch als conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels zu dem Schnittpunkte von \mathfrak{G} mit der Gerade \mathfrak{A} , welche die dritte durch die beiden gegebenen Involutionen inducirte Involution trägt und die Polare von p in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels ist.

Zu diesen vier Punkten von $\mathfrak{G}^{(2)}$ können wir mittelst des obigen Ergebnisses noch die Tangente in p fügen; sie ist die Polare dieses Punktes $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$, welchem p in Bezug auf das Büschel conjugirt ist, in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt desselben, für den p Pol von \mathfrak{G} ist, d. h. für das Geradenpaar $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, also der vierte harmonische Strahl \mathfrak{T} in Bezug auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} zu dem Strahle von p nach $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$.

Das Viereck $ps\beta\gamma$ ist dem Kegelschnitte $\mathfrak{G}^{(2)}$ eingeschrieben; seine Diagonalepunkte sind $b = (p\beta, s\gamma)$, $c = (p\gamma, s\beta)$ und $m = (\beta\gamma, ps)$; daher ist der letzte der Pol von $\mathfrak{G} = bc$ in Bezug auf $\mathfrak{G}^{(2)}$, also harmonisch zu dem Schnitte $r = (\beta\gamma, \mathfrak{G})$ in Bezug auf β und γ . Projiciren wir ihn aus c auf die Gerade, welche β mit $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ verbindet, so ergiebt sich der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ in Bezug auf β und den Schnitt mit \mathfrak{C} , durch den ersichtlich die Tangente \mathfrak{T} geht. Auf der Diagonale cm muss diese sich aber mit derjenigen in β schneiden, also fällt letztere

mit der Gerade aus β nach $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ zusammen; und ebenso geht die in γ durch $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$. Daher ist $\beta\gamma$ die Polare von $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ in Bezug auf $\mathfrak{G}^{(2)}$ und enthält den Pol von \mathfrak{A} . Projicirt man also die beiden Punkte β, γ des Kegelschnitts $\mathfrak{G}^{(2)}$ aus den beiden andern s und p auf die Gerade \mathfrak{A} , so erhält man zwei Punktepaare der ihr in Bezug auf $\mathfrak{G}^{(2)}$ zugehörigen Involution. Diese Schnittpunktepaare mit $c\beta, b\gamma$ und mit $b\beta, c\gamma$ sind aber, wie wir wissen, zwei Punktepaare der dritten Involution auf \mathfrak{A} , die in der früher beschriebenen Weise aus denen auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} abgeleitet wird.

Diese dritte auf \mathfrak{A} durch die beiden gegebenen Involutionen inducirte Involution — die Schnittinvolution des Büschels mit \mathfrak{A} , deren Punktepaare aus den Grundpunkten je der beiden projectiven Strahlbüschel bestehen, vermittelt derer wir bei dieser Herstellung des Kegelschnittbüschels seine verschiedenen Kegelschnitte erzeugt haben — gehört der Gerade \mathfrak{A} in Bezug auf einen jeden der Kegelschnitte $\mathfrak{G}^{(2)}$ zu, die den verschiedenen Geraden \mathfrak{G} durch das Büschel zugeordnet werden.

Ihre Doppelpunkte sind ja auch die Doppelpunkte der beiden weiteren (reellen oder imaginären) Geradenpaare des Büschels und als solche auf allen $\mathfrak{G}^{(2)}$ gelegen.

Die Polaren zu zwei Punkten P und P^1 in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels bilden zwei projective Strahlbüschel Q und Q^1 , indem entsprechende Strahlen die Polaren in Bezug auf denselben Kegelschnitt sind; denn sie erzeugen den zur Gerade $\mathfrak{G} = PP^1$ gehörigen Kegelschnitt $\mathfrak{G}^{(2)}$.

Also sind alle diese doppelt unendlich vielen Polarenbüschel unter einander projectiv. Fällt der Pol in einen Grundpunkt, so ergibt sich das Büschel der Tangenten in demselben.

Schneidet man die zu P, P^1 gehörigen Polarenbüschel mit der Gerade PP^1 , so ergibt sich, indem die durch das Kegelschnittbüschel in dieselbe eingeschnittene Involution eine beliebige ist:

Werden in Bezug auf alle Elementenpaare einer Involution zu zwei festen Elementen des Trägers die vierten harmonischen construirt, so entstehen projective Gebilde.

Sind P und Q in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel conjugirt und ist p durch Q gezogen, so erhält man den Kegelschnitt des Büschels, für welchen p Polare von P ist, dadurch, dass man auf allen Geraden durch P das gemeinsame Paar der beiden Involutionen aufsucht, von denen die eine durch das Büschel eingeschnitten ist, während für die andere P und der Schnitt mit p Doppelpunkte sind.

§ 48. Ueber den Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels.

227 *Der Kegelschnitt $\mathfrak{G}^{(2)}$, welcher in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel der unendlich fernen Gerade G_∞ entspricht, ist der Ort der Mittelpunkte der verschiedenen Kegelschnitte des Büschels; er heisse $\mathfrak{M}^{(2)}$; andererseits entsteht er durch die Punkte, welche den unendlich fernen Punkten in Bezug auf das Büschel conjugirt sind. Lassen wir das Büschel wiederum aus den beiden Involutionen auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} entstehen, so sind nach dem obigen Ergebnisse die Mittelpunkte m_b, m_c dieser Involutionen, welche den Schnitten mit G_∞ conjugirt sind, ferner der Punkt $p = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und der Schnittpunkt s der Parallelen durch m_b zu \mathfrak{C} , durch m_c zu \mathfrak{B} vier Punkte des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$, und der Diagonalschnitt m des eingeschriebenen Parallelogramms pm_bsm_c ist der Mittelpunkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$. Tangente in p ist der harmonische Strahl in Bezug auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} zu der Parallelen aus p mit dem Träger der dritten aus jenen beiden Involutionen abgeleiteten Involution, der also nach der Mitte zwischen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ geht; und diese Involution auf \mathfrak{A} , die durch das Büschel eingeschnittene, gehört der Gerade \mathfrak{A} in Bezug auf $\mathfrak{M}^{(2)}$ zu.*

Ebenso ist diejenige, welche in G_∞ (die Gerade, welcher $\mathfrak{M}^{(2)}$ zugeordnet ist) eingeschnitten wird, die dem $\mathfrak{M}^{(2)}$ zugehörige. Sie wird also in G_∞ auch durch die Involution der Durchmesser von $\mathfrak{M}^{(2)}$ eingeschnitten; und *jeden zwei conjugirten Durchmessern von $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind die Asymptoten einer Hyperbel des Büschels parallel, den Axen also von $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Asymptoten der einzigen gleichseitigen Hyperbel im Büschel.*

Wenn $\mathfrak{M}^{(2)}$ eine Hyperbel ist, so sind ihre Asymptoten u, v zu jedem Paare conjugirter Durchmesser x, ξ harmonisch; diese wiederum sind parallel den Asymptoten einer Hyperbel des Büschels und u, v daher parallel zu zwei conjugirten Durchmessern dieser Hyperbel; so ergeben sich die beiden festen Richtungen conjugirter Durchmesser, welche, wie wir früher fanden, allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsam sind (Nr. 196), für die Hyperbeln.

Die Punkte des einen Astes der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind Mittelpunkte von Hyperbeln, die des andern Mittelpunkte von Ellipsen des Büschels, während die beiden unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{M}^{(2)}$ zu den beiden Parabeln gehören und deren Axen, den Asymptoten von $\mathfrak{M}^{(2)}$ parallel, jene festen Richtungen haben.

Ist hingegen $\mathfrak{M}^{(2)}$ Ellipse, so enthält das Büschel nur Hyperbeln, da durch jeden (reellen) unendlich fernen Punkt eine Hyperbel aus dem Büschel geht und die Uebergangsform fehlt.

Die Art der vom Büschel in G_∞ eingeschnittenen Involution, 228 welche die dieser Gerade in Bezug auf $\mathfrak{M}^{(2)}$ zugehörige ist, entscheidet über die Art von $\mathfrak{M}^{(2)}$. In Nr. 194 haben wir das Kennzeichen gehabt, daher ergibt sich:

1) Wenn die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels alle reell sind, so ist die Mittelpunktscurve eine *Hyperbel* oder *Ellipse*, je nachdem jeder von den Grundpunkten ausserhalb oder einer innerhalb des Dreiecks der drei andern liegt. Fällt einer ins Unendliche, so ist nur diejenige Curve des Büschels Parabel, die in ihm die G_∞ berührt; das Büschel besteht aus lauter Hyperbeln und einer einzigen Parabel; $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist *Parabel*.

Die Mittelpunktscurve geht durch die drei Diagonalepunkte des Vierecks der Grundpunkte und durch die Mitten der Seiten, von denen jede, als Mittelpunkt der Involution auf der Seite, welche allen Kegelschnitten des Büschels zugehört, gemeinsam conjugirt zum unendlich fernen Punkte der Seite ist. Die drei Linien, welche die Mitten von zwei Gegenseiten verbinden (z. B. m_b, m_c auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$), laufen in den Mittelpunkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$ zusammen und halbiren sich in ihm. Wir haben den Satz:

Die drei Linien, welche die Mitten der Gegenseiten eines vollständigen Vierecks verbinden, laufen in einen Punkt zusammen, der sie alle drei halbirt und Mittelpunkt des Kegelschnitts ist, der durch die sechs Seitenmitten und die Diagonalepunkte des Vierecks geht und Ort der Mittelpunkte der dem Vierecke umgeschriebenen Kegelschnitte ist.

Dieser Punkt ist ersichtlich der Schwerpunkt der vier Ecken des Vierecks.

2) Wenn nur zwei von den Grundpunkten reell sind, so ist $\mathfrak{M}^{(2)}$ *Hyperbel* oder *Ellipse*, je nachdem die ideelle gemeinsame Secante (welche die imaginären Grundpunkte verbindet) die reellen Grundpunkte nicht trennt oder trennt, und Parabel wiederum, wenn einer von diesen im Unendlichen liegt.

$\mathfrak{M}^{(2)}$ geht durch den Schnittpunkt dieser beiden gemeinschaftlichen Secanten, durch die Mittelpunkte der beiden Involutionen auf ihnen, die allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsam sind, durch die vierte Ecke des Parallelogramms; wir haben damit seinen Mittelpunkt, ferner die Tangente im erstgenannten Punkte und die zugehörige Involution auf der dritten Gerade \mathfrak{A} , welche im vorliegenden Falle elliptisch ist; die beiden Secanten sowohl wie die beiden andern Seiten des genannten Parallelogramms schneiden Punktepaare derselben ein. Letzteres gilt auch im vorigen und im dritten Falle, nur dass da diese Involution hyperbolisch ist, was dann noch zwei reelle Punkte für $\mathfrak{M}^{(2)}$ giebt.

3) In diesem dritten Falle, wo alle vier Grundpunkte imaginär sind, ist, wie wir wissen (Nr. 194), die Schnittinvolution mit G_x immer hyperbolisch, die *Mittelpunktcurve* ist also immer eine *Hyperbel*.

Die reellen Doppelpunkte der Involution auf \mathfrak{A} sind Doppelpunkte imaginärer Geradenpaare, Mittelpunkte von Null-Kegelschnitten des Büschels. Die einzige eigentliche gemeinsame Secante des vorigen Falls ist nun auch ideell geworden.

229 Wir fanden (Nr. 166), dass die Mittelpunktscurve eines Büschels von lauter gleichseitigen Hyperbeln ein Kreis ist; umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so besteht, weil der Kreis zu den Ellipsen gehört, das Büschel nur aus Hyperbeln; aber die durch dasselbe in G_x eingesechnittene Involution ist identisch mit der zum Kreise $\mathfrak{M}^{(2)}$ gehörigen, d. i. der ausgezeichneten Involution I_x (Nr. 62), deren conjugirte Punkte unendlich fern in senkrechten Richtungen liegen; also sind alle Hyperbeln des Büschels gleichseitig.

Wegen der elliptischen Curve $\mathfrak{M}^{(2)}$ kann nur Fall 1) oder 2) eintreten; in dem Falle 1), wo die vier Grundpunkte des Büschels reell sind, also drei Geradenpaare in dem Büschel existiren, deren jedes aus zwei rechtwinkligen Geraden besteht, folgt die schon a. a. O. gefundene Bedingung: die vier Grundpunkte müssen so liegen, dass einer (jeder) der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist. Diese Bedingung lässt sich aber etwas anders fassen, so dass sie auch in dem Falle 2) von nur zwei reellen Grundpunkten bleibt; seien nämlich A, B, C, D die vier Grundpunkte und D im Innern von ABC gelegen, so befindet sich der Fusspunkt x von CD auf AB zwischen A und B und es ist:

$$xA \cdot xB + xC \cdot xD = 0 \quad (\text{Nr. 165}).$$

Anstatt der Punkte C und D , welche die Doppelpunkte der allen Kegelschnitten des Büschels gemeinschaftlichen Involution auf CD sind, können wir zwei andere Punkte einführen, die Mitte m von CD (den Mittelpunkt dieser Involution) und den dem Punkte x conjugirten Punkt ξ , der zu x in Bezug auf C, D harmonisch ist; denn nach Nr. 12 V. haben wir:

$$xC \cdot xD = xm \cdot x\xi,$$

also auch

$$xA \cdot xB + xm \cdot x\xi = 0;$$

die vier Punkte A, B, m, ξ müssen daher so liegen, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist.

Der Mittelpunktskreis ist der *Feuerbach'sche* Kreis für jedes von den vier Grundpunkts-Dreiecken; der vierte Grundpunkt ist der Höhenpunkt; so dass sich hier aus der bekannten gegenseitigen Lage

des Schwerpunktes, des Höhenpunktes eines Dreiecks und des Mittelpunkts des *Feuerbach'schen* Kreises* ergibt, was oben (Nr. 228) allgemein gefunden, dass der Mittelpunkt des Mittelpunktskreises Schwerpunkt der vier Grundpunkte ist.

Soll nun in dem Falle 2) das Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln werden (oder $\mathfrak{M}^{(2)}$ ein Kreis), und denken wir uns dasselbe durch die beiden den Kegelschnitten zugehörigen Involutionen auf den Geraden des einzigen reellen Geradenpaars erzeugt, so ist zunächst erforderlich, dass die ideelle gemeinschaftliche Secante zwischen den beiden reellen Grundpunkten A, B hindurchgehe und die Gerade AB in x rechtwinklig schneide; ist ξ der conjugirte Punkt zu x in der auf dieser ideellen Secante befindlichen elliptischen Involution und m der Mittelpunkt derselben, so muss:

$$xA \cdot xB + xm \cdot x\xi = 0$$

sein, oder die vier Punkte A, B, m, ξ müssen so liegen, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist; während im Falle 1) m ausserhalb $x\xi$ lag, liegt im Falle 2) m zwischen x, ξ . Dass in der That zwei so gelegte Involutionen ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln erzeugen, lässt sich leicht nachweisen, indem wir zeigen, dass der Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte m, m' der beiden Involutionen, den Schnittpunkt x ihrer Träger geht und, wenn ξ' zu x in Bezug auf A, B harmonisch ist, die Gerade von x nach der Mitte von $\xi\xi'$ tangirt und durch die vierte Ecke des Rechtecks $mxm's$ geht, ein Kreis ist. Wir haben nur zu zeigen, dass jene Tangente zum Durchmesser xs senkrecht ist. Da aber m' die Mitte von AB ist, so folgt vermöge der eben benutzten Relation von Nr. 12:

$$xA \cdot xB = x\xi' \cdot xm' = -xm \cdot x\xi,$$

und daraus, dass die Dreiecke $x\xi\xi'$ und $xm'm$ ähnlich sind; woraus die Behauptung sich ergibt.

Wir wollen nun den Fall erörtern, dass der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ in ein Geradenpaar zerfällt. Sind die vier Grundpunkte des Büschels reell, so sind auch die sechs Mitten der Seiten dieses vollständigen Vierecks reell; der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ enthält aber dieselben, und damit er in ein Geradenpaar zerfalle, müssen wenigstens drei jener Mitten auf einer Gerade liegen. Dies ist nur auf zwei Arten möglich, entweder haben drei in einer Ecke zusammenstossende Seiten ihre Mitten in einer Gerade, dann müssen die drei übrigen

* *Baltzer*, Elemente der Mathematik, Planimetrie § 12.

Ecken des Vierecks selbst auf einer Gerade liegen, also alle Kegelschnitte des Büschels sind Geradenpaare, und das Kegelschnittbüschel löst sich in eine feste Gerade und ein Strahlbüschel auf; dieser Fall kann uns weiter nicht interessiren, weil wir es dann nicht mit einem eigentlichen Kegelschnittbüschel zu thun haben.

Oder drei nicht von derselben Ecke ausgehende Seiten des vollständigen Vierecks haben ihre Mitten auf einer Gerade; bei drei Seiten, die drei von den vier Ecken verbinden, ist das nicht möglich.

Sind es aber z. B. folgende: AB, BC, CD , so folgt daraus, dass die Gegenseiten AC, BD parallel sind, also *eine Ecke des gemeinschaftlichen Polardreiecks im Unendlichen liegt*. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zerfällt dann in der That in ein Geradenpaar, von dem der eine Theil die Verbindungslinie der beiden übrigen im Endlichen bleibenden Ecken dieses Dreiecks und der andere Theil diejenige Gerade ist, welche zwischen den beiden parallelen Seiten des Vierecks in der Mitte mit ihnen parallel läuft. Diese gerade Linie enthält aber keinen Mittelpunkt eines eigentlichen Kegelschnitts des Büschels.

In Bezug auf ein Geradenpaar hat nämlich eine durch seinen Doppelpunkt gehende Gerade unendlich viele Pole, alle Punkte des Strahls, der zu dieser Gerade in Bezug auf die beiden Geraden des Paares harmonisch ist; daher hat ein Paar paralleler Geraden alle Punkte der Mittelparallelen zu Mittelpunkten. Sind daher zwei Gegenseiten des Vierecks der Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels parallel, so zerfällt $\mathfrak{M}^{(2)}$ in die Mittelparallele des Paares paralleler Seiten, und die Diagonale, welche die beiden endlichen Diagonalpunkte verbindet. Diese, die Polare des unendlich fernen Diagonalpunkts in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels, ist gemeinsamer Durchmesser und enthält die Mittelpunkte der eigentlichen Kegelschnitte des Büschels. Ihr unendlich ferner Punkt gehört zur einzigen eigentlichen Parabel, die andere ist in jenes Paar paralleler Geraden ausgeartet.

Sind sogar zweimal zwei Gegenseiten parallel, so besteht $\mathfrak{M}^{(2)}$ aus den beiden Mittelparallelen; alle eigentlichen Kegelschnitte des Büschels haben ihren Mittelpunkt in demjenigen des Parallelogramms der Grundpunkte.

Auch für ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten kann der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ nur zerfallen, wenn das einzig reelle Geradenpaar, welches in dem Büschel vorkommt, zu einem Paar von Parallellinien wird, also ihr Schnittpunkt, d. h. ein Punkt des gemeinschaftlichen Polardreiecks, in die Unendlichkeit geht; der Mittelpunktskegelschnitt zerfällt dann wie oben. Bei vier imaginären Grundpunkten kann auch eine derjenigen Ecken des gemeinsamen

Polardreiecks, welche Doppelpunkte imaginärer Geradenpaare sind, unendlich fern werden; die Mittelparallele verbindet die Mittelpunkte der beiden Involutionen auf \mathfrak{B} , \mathfrak{C} und ist reell.

Noch mehr specialisirt sich das Kegelschnittbüschel, wenn ein Theil eines Geradenpaares, welches in demselben vorkommt, in die Unendlichkeit geht.

Diesen Fall haben wir schon in Nr. 201 betrachtet: alle Kegelschnitte des Büschels haben auf G_∞ dieselbe Involution und sind ähnlich und ähnlich gelegen. Ein Kreisbüschel mit eigentlicher oder ideeller gemeinschaftlicher Secante im Endlichen ist ein Specialfall hiervon: die gemeinsame Involution auf der unendlich fernen gemeinsamen Secante ist die ausgezeichnete I_∞ , deren conjugirte Punkte in rechtwinkligen Richtungen liegen und deren imaginäre Doppelpunkte die absoluten Punkte sind.

Die Mittelpunktscurve $\mathfrak{M}^{(2)}$ eines Büschels ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte besteht aus der Seite des gemeinsamen Polardreiecks, welche die beiden endlichen Diagonalpunkte verbindet und wiederum die Mittelpunkte der eigentlichen Kegelschnitte des Büschels enthält, und der G_∞ ; denn da sich G_∞ mit der einen Gerade des Paares paralleler Geraden vereinigt, so ist mit ihr auch der vierte harmonische Strahl, die Mittelparallele, zusammengefallen.

Schliesslich möge noch der besondere Fall in Betracht gezogen werden, wenn der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ eine *gleichseitige Hyperbel* 231 wird. Die Involution auf G_∞ , welche von dem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird, ist die, welche dieser Hyperbel zugehört, und hat daher ihre Doppelpunkte in zu einander rechtwinkligen Richtungen. Aus Nr. 196, 197 wissen wir, dass sie aus dem Punkte B auf dem dortigen Hilfskreise $\mathfrak{R}^{(2)}$ durch die Strahlinvolution projicirt wird, deren Paare nach den Berührungspunkten der aus den verschiedenen Punkten von \mathfrak{Q} kommenden Tangentenpaare dieses Kreises gehen; also gehen ihre rechtwinkligen Doppelstrahlen nach den Schnitten von \mathfrak{Q} mit $\mathfrak{R}^{(2)}$ und diese Gerade durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{R}^{(2)}$; dieser Mittelpunkt ruft dann in B eine rechtwinklige Involution hervor, so dass ihm im Kegelschnittbüschel ein Kreis entspricht; und umgekehrt, sobald in einem Kegelschnittbüschel ein Kreis vorkommt, geht \mathfrak{Q} durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{R}^{(2)}$, die Doppelpunkte der in G_∞ eingeschnittenen Involution sind in rechtwinkligen Richtungen gelegen, die Mittelpunktscurve $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist eine gleichseitige Hyperbel.

Die Asymptoten der Mittelpunkthyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ geben die allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsamen festen Richtungen conjugirter

Durchmesser. Also sind in unserem Falle die Axen der Kegelschnitte des Büschels parallel. Daher haben wir den Satz:

Wenn unter den Kegelschnitten eines Büschels ein Kreis enthalten ist, so haben die Axen sämtlicher Kegelschnitte des Büschels zwei bestimmte zu einander rechtwinklige Richtungen, welche die Richtungen der Axen der beiden in dem Büschel enthaltenen Parabeln und auch die Richtungen der Asymptoten derjenigen gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind, welche die Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Büschels enthält. Und umgekehrt, wenn $\mathfrak{M}^{(2)}$ eine gleichseitige Hyperbel ist, so ist im Büschel ein Kreis enthalten. Diesen kann man auch so finden: Es sei Q der conjugirte Punkt in Bezug auf das Büschel zu einem Punkte P , der unendlich fern ist in keiner der beiden Axen-Richtungen, und p durch Q senkrecht zur Richtung nach P gezogen; so ist der Kegelschnitt des Büschels, für welchen p Polare von P ist, Kreis, weil er zwei Paare rechtwinkliger conjugirter Durchmesser hat.

Fasst man eine der beiden festen Richtungen ins Auge, so bildet der Kreis den Uebergang von Ellipsen, deren Hauptaxen sie haben, zu solchen, bei denen sie die der Nebenaxen ist; von beiden Abtheilungen von Ellipsen geht es durch die Parabeln zu Hyperbeln, und bei diesen findet der Wechsel durch die (3 oder 1) reellen Geradenpaare statt (Nr. 198).

232 Für ein Geradenpaar sind die Axen die Halbierungswinkel der Winkel, also hat man den elementaren Satz:

*Halbirt man bei einem Kreisviereck die Winkel und Nebenwinkel jedes der drei Gegenseitenpaare, so sind von den sechs Halbierungslinien drei und drei parallel, und die drei einen stehen auf den drei andern senkrecht.** Diese beiden zu einander rechtwinkligen Richtungen sind zugleich die der Axen sämtlicher Kegelschnitte, welche durch die vier Ecken des Kreisvierecks gehen.

Hiervon lässt sich eine nützliche Anwendung machen: Ist ein Kegelschnitt gezeichnet, so findet man leicht die Richtungen seiner Axen, indem man ihn mit einem Kreis in vier Punkten schneidet; die Halbierungslinien der Winkel und Nebenwinkel eines Geradenpaares durch die vier Punkte sind den Axen des gegebenen Kegelschnitts parallel. Halten wir diesen fest und zwei von den Schnittpunkten mit dem Kreise, verändern aber den Kreis selbst, so dass er ein Kreisbüschel durchläuft, dann wird, weil von einem Geradenpaar die eine Gerade und die Halbierungslinien der Winkel unveränderte Richtungen

* Steiner, Geometrische Aufgaben und Lehrsätze, Journal f. Mathem., Bd. 2, S. 97; Gesammelte Werke Bd. 1 S. 128.

behalten, auch die andere Gerade sich parallel bleiben; also: Legt man durch zwei feste Punkte eines Kegelschnitts beliebig viele Kreise, so hat jeder derselben mit dem Kegelschnitt noch eine zweite (eigentliche oder ideelle) gemeinschaftliche Secante, deren Richtung dieselbe bleibt. Dies ist ein specieller Fall eines in Nr. 174 bewiesenen Satzes.

Lassen wir die beiden Punkte des Kegelschnitts, durch welche das Kreisbüschel gelegt wurde, zusammenfallen, so dass die Kreise in demselben Punkte P den Kegelschnitt berühren, also ihre Mittelpunkte auf der Normale des Kegelschnitts in P haben, so folgt: Zieht man in einem Punkte P eines Kegelschnitts Tangente und Normale und beschreibt das Büschel von Kreisen, welche ihre Mittelpunkte in der Normale haben und durch den Punkt P gehen, so hat ein jeder derselben mit dem Kegelschnitt noch eine zweite (eigentliche oder ideelle) gemeinschaftliche Secante, welche sich parallel bleibt von solcher Richtung, dass sie und die Tangente in P Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind, dessen Basis auf der einen oder andern Axe liegt. Unter den Kreisen befindet sich einer, für welchen von den beiden noch übrigen Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt eine P selbst wird, und dieser muss der Krümmungskreis für den Punkt P des Kegelschnitts sein, weil er durch drei unendlich nahe Punkte desselben geht (Nr. 156). Man findet hieraus folgende einfache Construction des Krümmungskreises, welche von den in § 38 angegebenen wesentlich verschieden ist: Um für einen Punkt P eines gegebenen Kegelschnitts den Krümmungskreis zu erhalten, ziehe man die Tangente in P und eine zweite Gerade durch P so, dass sie und die Tangente ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Basis auf einer Axe liegt; trifft diese zweite Gerade den Kegelschnitt zum andern Male in P' , so lege man durch P und P' den Kreis, welcher seinen Mittelpunkt auf der Normale von P hat; dies ist der gesuchte Krümmungskreis an dem Punkte P des Kegelschnitts. Hieran knüpft sich der elegante *Joachimsthal'sche* Beweis eines auf die Krümmungskreise eines Kegelschnitts bezüglichen Theorems von *Steiner*.*

Wir haben gefunden (Nr. 198, 199), dass in einem Kegelschnittsbüschel ähnliche Kegelschnitte paarweise auftreten; wir wollen nun zeigen, dass die Mittelpunkte ähnlicher Kegelschnitte auf dem Mittelpunkts-Kegelschnitte $\mathfrak{M}^{(2)}$ eine Involution bilden, deren Centrum unendlich fern ist.

* *Joachimsthal*, Journal für Mathem. Bd. 36, S. 95; *Steiner*, ebenda Bd. 66, S. 237, Gesammelte Werke Bd. 2, S. 698.

Es sei \mathfrak{P} ein Punkt der unendlich fernen Gerade G_∞ , und u, v irgend ein Punktepaar der Involution, in der diese Gerade vom Büschel geschnitten wird (Nr. 193); u der vierte harmonische zu \mathfrak{P} in Bezug auf u, v ; wir projectiren diese vier Punkte wieder auf den Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ aus dem Punkt B desselben, wie in Nr. 197, nach $\mathfrak{P}', u'; u', v'$, die auch harmonisch sind. Die Punkte u', v' sind die Doppelpunkte der krummen Involution auf $\mathfrak{K}^{(2)}$, welche von der nach B parallel verlegten Durchmesser-Involution desjenigen Kegelschnitts des Büschels herrührt, auf welchem u, v liegen; und der Pol von $u' v'$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist der Punkt P auf der Gerade \mathfrak{L} , der diesem Kegelschnitte entspricht. Da \mathfrak{P}', u' zu u', v' harmonisch sind, geht $\mathfrak{P}' u'$ durch diesen P . Durchläuft also der Kegelschnitt das Büschel, so bewegen sich u und u' projectiv, ebenso u' und P , also auch u und P . Ferner ist u der unendlich ferne Punkt des Durchmessers jenes Kegelschnitts des Büschels, der die Polare von \mathfrak{P} ist; also bewegt sich auch dieser Durchmesser projectiv mit P ; und da er in die Mittelpunktscurve $\mathfrak{M}^{(2)}$ je den Mittelpunkt des Kegelschnitts einschneidet, sich um den Punkt \mathfrak{Q} auf $\mathfrak{M}^{(2)}$ drehend, der zu \mathfrak{P} in Bezug auf das Büschel conjugirt ist, so bewegen sich auch der Punkt P auf \mathfrak{L} und der Mittelpunkt auf $\mathfrak{M}^{(2)}$ projectiv.

Nun ergab sich, dass die zu ähnlichen Kegelschnitten des Büschels gehörigen Punkte P gleich weit entfernt sind von dem Fusspunkte m des Lothes aus dem Mittelpunkte des Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ auf die Gerade \mathfrak{L} ; also bilden sie die Punktepaare einer gleichseitig-hyperbolischen Involution auf \mathfrak{L} . Diese geht durch die Projectivität zwischen der Reihe der Punkte P auf \mathfrak{L} und der Reihe der Mittelpunkte auf $\mathfrak{M}^{(2)}$ in eine Involution auf $\mathfrak{M}^{(2)}$ über, in der also die Mittelpunkte ähnlicher Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind.

Aehnlich sind auch die beiden Parabeln; also sind die unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{M}^{(2)}$ in dieser Involution conjugirt, und daher ist das Centrum unendlich fern.*

§ 49. Polar-Eigenschaften der Kegelschnittschaar.

234 Wir definiren, in dualer Weise zu § 42, eine Kegelschnittschaar durch zwei Strahlinvolutionen um die Punkte A und B^{**} , welche für

* Steiner, Journal für Mathematik Bd. 55 S. 356 III 8; Gesammelte Werke Bd. 2 S. 679.

** Es mag hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass diese Bezeichnung nicht der früheren (§ 42) entspricht; dort lagen die Involutionen auf \mathfrak{B} und \mathfrak{C} , und die auf \mathfrak{A} war die dritte abgeleitete, während hier die Involutionen um A und B die ursprünglichen (die Schaar definirenden) sind und die um C die abgeleitete. Die Veränderung wäre zu umständlich gewesen. St.

alle Kegelschnitte der Schaar die diesen Punkten zugehörigen sind. Diese führen zu einer dritten Involution um den Punkt C , in dem sich die beiden Strahlen schneiden, welche dem gemeinsamen Strahle AB conjugirt sind. In dieser dritten Involution sind je zwei Strahlen conjugirt, von denen der eine nach dem Schnittpunkte irgend zweier Strahlen a, b von A, B , der andere nach dem Schnittpunkte der conjugirten Strahlen α, β geht. Dass dadurch eine Involution um C entsteht, kann man ähnlich wie in Nr. 185 beweisen, und wir haben die entsprechende Eigenschaft, dass zu drei Strahlen a, b, c von A, B, C , die in einen Punkt zusammenlaufen, drei Strahlen α, β, γ conjugirt sind, für welche dasselbe gilt.

Aus je zwei von den drei Involutionen geht die dritte in derselben Weise hervor.

Wie früher bei den Involutionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ drei beliebige Paare conjugirter Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, so sind hier drei Paare conjugirter Strahlen Tangenten eines Kegelschnitts.

Die drei Involutionen schneiden in einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher dem Dreiecke ABC umgeschrieben ist, drei krumme Involutionen ein, deren Centren a, b, c seien. Diese liegen in einer Geraden. P sei ein Punkt von $\mathfrak{R}^{(2)}$; die Strahlen, welche den AP, BP, CP conjugirt sind, treffen sich wiederum in einem Punkte Π ; dem $\mathfrak{R}^{(2)}$ mögen sie in a, b, c begegnen; dann sind P, a und B, C zwei Paare der krummen Involution, die von der Strahlinvolution A herrührt, also ist (Pa, BC) das Centrum a , ebenso ist $(Pb, CA) = b$, $(Pc, AB) = c$.

Wir haben die beiden *Pascal'schen* Sechsecke $aPbBCA, bPcCAB$, daher liegen sowohl die Schnittpunkte:

$$(Pa, BC) = a, \quad (Pb, CA) = b, \quad (Aa, Bb) = \Pi,$$

als auch die Schnittpunkte:

$$(Pb, CA) = b, \quad (Pc, AB) = c, \quad (Bb, Cc) = \Pi$$

in gerader Linie; demnach alle vier Punkte in gerader Linie, insbesondere a, b, c .

Also gilt der Satz:

Die drei Strahlinvolutionen A, B, C stehen auch in dem Zusammenhange, dass sie in einen dem Dreiecke ABC umgeschriebenen Kegelschnitt krumme Involutionen einschneiden, deren bezw. auf BC, CA, AB gelegene Centren in gerader Linie liegen.

Auf diese Weise wird also jedem ABC umgeschriebenen Kegelschnitte eine Gerade \mathfrak{G} zugeordnet.

Aber auch umgekehrt erhalten wir zu jeder Geraden \mathfrak{G} einen ABC umgeschriebenen Kegelschnitt. Wir ziehen nach jedem Punkte p von \mathfrak{G}

die drei Strahlen a, b, c aus A, B, C ; die drei conjugirten α, β, γ laufen in einen Punkt Π zusammen; um dessen Ort zu ermitteln, genügt es, a, b, α, β zu betrachten. Die Strahlen a, b bewegen sich perspectiv, also die conjugirten projectiv und der Punkt Π durchläuft einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher durch A und B geht, aber auch durch C ; denn in diesen Punkt kommt Π , wenn p in den Schnittpunkt $c = (AB, \mathfrak{G})$ gelangt.

Es komme p in den Schnitt $a = (BC, \mathfrak{G})$; der conjugirte Strahl von BC ist BA , und dessen zweiter Schnitt mit $\mathfrak{R}^{(2)}$ ist A ; dieser Punkt muss der zweite Schnitt des conjugirten zu Aa sein; demnach ist letzterer die Tangente an $\mathfrak{R}^{(2)}$ in A ; und A und der zweite Schnitt a' von Aa sind conjugirt in der krummen Involution auf $\mathfrak{R}^{(2)}$, die von der Involution A herrührt; ein zweites Paar derselben ist B, C . Daher ist $a = (Aa', BC)$ das Centrum dieser krummen Involution, und ebenso b das derjenigen, die von der Involution B , und c das der dritten, welche von der Involution C herrührt. Also steht \mathfrak{G} zu dem aus ihr abgeleiteten und ABC umgeschriebenen Kegelschnitte in der oben beschriebenen Beziehung, dass sie die drei Involutioncentren enthält.

Ferner, wenn einem Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ ein Dreieck ABC eingeschrieben ist, dessen Seiten von einer Transversale in α, β, γ geschnitten werden, so stehen die drei Involutionen um A, B, C , deren Schnitte mit $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Centren α, β, γ haben, in dieser Beziehung; denn die aus zweien, etwa A, B , abgeleitete dritte muss $\mathfrak{R}^{(2)}$ in einer Involution schneiden, deren Centrum auf AB in gerader Linie mit α, β liegt, also γ ist. Da nun die Strahlen von drei Strahlenpaaren aus A, B, C den nämlichen Kegelschnitt tangiren, so haben wir:

Wenn die Seiten BC, CA, AB eines einem Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ eingeschriebenen Dreiecks von einer Transversale in α, β, γ geschnitten werden und drei bez. durch diese Punkte gezogene Geraden den $\mathfrak{R}^{(2)}$ in $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1$ schneiden, so sind $A\alpha, A\alpha^1, B\beta, B\beta^1, C\gamma, C\gamma^1$ Tangenten eines Kegelschnitts.

235 Wenn wir nun zwei conjugirte Strahlen c, γ der Involution C als die Träger zweier projectiver Punktreihen auffassen, welche von zwei veränderlichen conjugirten Strahlen x, ξ der Involution A fixirt werden (oder auch von zwei conjugirten Strahlen y, η der Involution B), so erzeugen diese beiden projectiven Punktreihen einen Kegelschnitt, welcher die Träger c und γ berührt und die Strahlen x, ξ zu conjugirten hat; denn es sind die Schnittpunkte $cx, \gamma\xi$ entsprechende Punkte der beiden projectiven Punktreihen, aber ebenso sind es $c\xi, \gamma x$; die beiden Verbindungsstrahlen und c, γ bilden ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Vierseit, von dem zwei Diagonalen x und ξ sind;

folglich sind diese conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt; daher ist die Involution A die dem Punkte A für den construirten Kegelschnitt zugehörige, und analoges gilt für B . Der Kegelschnitt hat also die beiden gegebenen Involutionen zu den ihm zugehörigen und gehört daher nach unserer Definition der Schaar an. Verändern wir das Paar c, γ , so erhalten wir in den Fällen 2) und 3) (vergl. Nr. 191) alle Kegelschnitte der Schaar durch reelle Construction. Die Strahlenpaare α, ξ der dritten Involution sind die Tangentenpaare aus dem Punkte C an die Kegelschnitte der Schaar; die Verbindungslinie AB ist die Polare des Punktes C für sämtliche Kegelschnitte der Schaar, da in C sich zwei zu AB in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirte Strahlen schneiden; sie sind auch in der Involution C conjugirt, und nimmt man sie zu Trägern der projectiven Punktreihen, so erhalten wir eine ausgeartete Projectivität, für welche A, B die singulären Punkte sind; Erzeugniss und daher Mitglied der Schaar ist dies Punktepaar (A, B) .

Wir wissen, dass die Strahlinvolutionen entweder alle drei hyperbolisch sind oder nur eine und die beiden andern elliptisch. Wir können dies auch daraus entnehmen, dass die drei Involutionscentren a, b, c die Schnitte einer Gerade mit den Seiten des Dreiecks ABC sind, also entweder alle drei auf den Verlängerungen liegen oder nur eins. Folglich liegen alle drei ausserhalb eines dem ABC umgeschriebenen Kegelschnitts oder nur eins. Unmittelbar ersichtlich ist das, wenn dieser Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, auf deren einem Aste alle drei Punkte A, B, C liegen; aber man überzeugt sich leicht, dass dies auch in dem Falle richtig ist, wo zwei von ihnen dem einen, der dritte dem andern Aste einer Hyperbel angehören.

Sind x, ξ und y, η conjugirte Strahlen aus den beiden Involutionen A und B und daher zugleich conjugirt in Bezug auf jeden Kegelschnitt der Schaar, so erhalten wir aus ihnen nach dem *Hesse'schen* Satze ein drittes Paar: $(xy, \xi\eta), (x\eta, \xi y)$, welches ebenfalls ein Paar conjugirter Strahlen sein muss für sämtliche Kegelschnitte der Schaar, d. h. die Pole von einer dieser beiden Geraden für alle Kegelschnitte der Schaar liegen auf der andern, und solcher Paare conjugirter Geraden können wir durch Veränderung der Paare x, ξ und y, η unendlich viele in doppelter Mannigfaltigkeit herstellen.

Es entsteht die Frage, ob jede Gerade \mathcal{G} mit der einen Gerade eines solchen Geradenpaares zusammenfällt, oder ob jede Gerade \mathcal{G} eine gemeinsame conjugirte Gerade in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar hat.

Die beiden Involutionen A und B schneiden in \mathcal{G} zwei Involutionen, und wenn mindestens eine von jenen und also auch eine von diesen elliptisch ist, so haben diese beiden Punktinvolutionen ein reelles Paar gemeinsam. Indem wir daher zunächst von dem Falle absehen, wo beide Involutionen A und B hyperbolisch und alle vier gemeinsame Tangenten der Kegelschnitte der Schaar reell sind, haben wir in den beiden andern Fällen auf \mathcal{G} zwei reelle Punkte s, t von der Beschaffenheit, dass sowohl As und At in der Involution A , als auch Bs und Bt in der Involution B conjugirt und daher jene Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt sind und ebenso diese. Daraus folgt nach dem obigen Satze, dass auch \mathcal{G} als die Verbindungslinie von (As, Bs) und (At, Bt) zu der Gerade \mathfrak{H} conjugirt ist, welche (As, Bt) und (At, Bs) verbindet. Damit ist die Frage für die beiden Fälle, wo von den vier gemeinsamen Tangenten nur zwei reell sind oder gar keine, beantwortet und erkannt, dass die Pole einer Gerade in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar eine andere Gerade erfüllen.

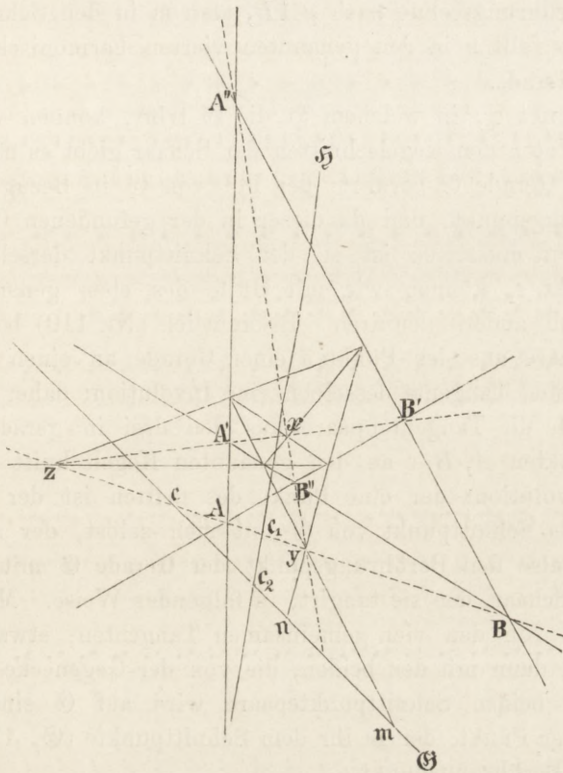
Zieht man nach einem der Punkte s, t die Strahlen aus A und B , so gehen die conjugirten in den Involutionen nach dem andern; dies beweist, dass s und t auch auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ liegen, den wir aus \mathcal{G} in obiger Weise abgeleitet haben. Das diesem Kegelschnitte eingeschriebene Viereck $ABst$ lehrt dann, dass der Diagonalpunkt $(AB, st) = (AB, \mathcal{G}) = c$ und die Verbindungslinie \mathfrak{H} der beiden andern Diagonalpunkte (As, Bt) und (At, Bs) Pol und Polare in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(2)}$ sind.

237 Für den Fall von vier reellen gemeinsamen Tangenten der Schaar ziehen wir, um die gemeinsame conjugirte Gerade einer gegebenen Gerade \mathcal{G} reell zu erkennen, Eigenschaften des vollständigen Vierseits jener Tangenten heran.

Besteht dieses Vierseit aus den Geraden $AA'A''$, $AB'B''$, $BB'A''$, $BA'B''$, so dass die drei Gegeneckenpaare AB , $A'B'$, $A''B''$ und die Diagonalpunkte x, y, z sind (Fig. 71), so liegen die Berührungspunkte irgend eines demselben eingeschriebenen Kegelschnitts (Nr. 84) paarweise mit den Diagonalpunkten in gerader Linie und bilden also ein vollständiges Viereck, dessen Diagonaldreieck ebenfalls xyz ist. Wenn nun irgend eine Gerade \mathcal{G} gegeben ist, so construiren wir den Pol derselben in Bezug auf einen dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt, indem wir die Berührungssehnen der durch A' , bzw. B' gehenden Tangentenpaare die Gerade \mathcal{G} in m, n treffen lassen, sodann zu dem Tangentenpaar aus A' und zu $A'm$ den vierten harmonischen Strahl, ebenso zu dem Tangentenpaar aus B' und zu $B'n$ den vierten

harmonischen Strahl herstellen und den Schnittpunkt p dieser beiden vierten harmonischen Strahlen aufsuchen; dann ist p der Pol von \mathcal{G} in Bezug auf denjenigen dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt, dessen Berührungssehnen für die Construction verwendet sind. Diese beiden Berührungssehnen schneiden sich in dem Diagonalpunkte y und sind zu yx und yz harmonisch; bei der Veränderung des Kegelschnitts

Fig. 71.



beschreiben also m und n eine Involution, denn sie sind stets harmonisch zu den Schnitten von \mathcal{G} mit diesen Diagonalen; folglich erzeugen $A'm$ und $B'n$ zwei projective Strahlbüschel. Ferner sind $A'm$ und $A'p$ harmonisch zu dem Tangentenpaar durch A' , also beschreiben bei der Veränderung des Kegelschnitts die Strahlen $A'm$ und $A'p$ zwei projective Strahlbüschel, ebenso auch $B'n$ und $B'p$, folglich auch $A'p$ und $B'p$, deren Schnittpunkt der gesuchte Pol p ist. Diese beiden von $A'p$ und $B'p$ beschriebenen projectiven Strahlbüschel liegen aber perspectiv, weil auf der Verbindungslinie ihrer Grundpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen; dies tritt nämlich in dem besonderen Fall ein, wenn die eine Berührungssehne durch A'

selbst geht, mithin $A'y$ wird, die andere also $B'y$, der Kegelschnitt der Schaar aber in das Punktepaar $A'B'$ ausartet. Der Ort des Pols p ist daher der Durchschnitt zweier perspectiven Strahlbüschel, also eine Gerade.

Diese Gerade \mathfrak{S} geht durch diejenigen drei Punkte der Diagonalen AB , $A'B'$, $A''B''$, welche den Schnittpunkten mit \mathfrak{G} harmonisch zugeordnet sind je in Bezug auf die beiden Gegenecken; denn kommt z. B. die Berührungssehne nach yAB , also m in den Schnitt c von \mathfrak{G} mit AB , so fällt p in den genannten vierten harmonischen Punkt c_1 auf dieser Gerade.

Den Punkt c_2 , in welchem \mathfrak{S} die \mathfrak{G} trifft, können wir ebenfalls angeben. Unter den Kegelschnitten der Schaar giebt es nämlich einen, welcher die Gerade \mathfrak{G} berührt; der Pol von \mathfrak{G} in Bezug auf ihn ist der Berührungspunkt, und da dieser in der gefundenen Ortsgerade \mathfrak{S} von p liegen muss, so ist er der Schnittpunkt derselben mit \mathfrak{G} . Diesen Punkt c_2 können wir mit Hilfe des eben genannten Kegelschnitts noch anders definiren. Bekanntlich (Nr. 110) bestimmen die Tangentenpaare aus den Punkten einer Gerade an einen Kegelschnitt auf einer festen Tangente desselben eine Involution; daher erhalten wir auf \mathfrak{G} durch die Tangentenpaare aus den drei in gerader Linie gelegenen Punkten A, B, c an den genannten Kegelschnitt drei Punktepaare in Involution; der eine Punkt des dritten ist der Berührungspunkt c_2 , als Schnittpunkt von \mathfrak{G} mit sich selbst, der andere ist c . Wir finden also den Berührungspunkt der Gerade \mathfrak{G} mit dem Kegelschnitt der Schaar, den sie tangirt, in folgender Weise. Man schneidet \mathfrak{G} mit zwei von den vier gemeinsamen Tangenten, etwa den aus A kommenden, dann mit den beiden, die von der Gegenecke B kommen; durch diese beiden Schnittpunktepaare wird auf \mathfrak{G} eine Involution bestimmt; der Punkt, der in ihr dem Schnittpunkte (\mathfrak{G}, AB) conjugirt ist, ist der Berührungspunkt.

Wir erinnern uns weiter, dass, wenn $\mathfrak{R}^{(2)}$ und \mathfrak{G} in der obigen Weise (Nr. 234) zusammengehören, der Punkt $a = (BC, \mathfrak{G})$ das Centrum der von der Involution A herrührenden krummen Involution auf $\mathfrak{R}^{(2)}$ ist; nach den Berührungspunkten der Tangenten aus a an $\mathfrak{R}^{(2)}$ gehen die Doppelstrahlen jener Involution, die nach der jetzigen Voraussetzung reell sind, die zwei von A kommenden gemeinsamen Tangenten der Schaar; die Berührungssehne, als Polare von a , enthält den Pol von \mathfrak{G} nach $\mathfrak{R}^{(2)}$, und diejenige krumme Involution auf $\mathfrak{R}^{(2)}$, von welcher er das Centrum ist, wird aus irgend einem Punkte des $\mathfrak{R}^{(2)}$ auf die Gerade \mathfrak{G} in die derselben in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(2)}$ zugehörige Involution projicirt; die Berührungspunkte bilden ein Paar von ihr. Daher sind die Schnitte der von A

kommenden gemeinsamen Tangenten mit \mathcal{G} conjugirt in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$, ebenso die der gemeinsamen Tangenten, die von B kommen. Demnach ist die oben besprochene Involution die der Gerade \mathcal{G} in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehörige, und auch das dritte Paar besteht aus für $\mathfrak{K}^{(2)}$ conjugirten Punkten. Der Punkt c_2 also, in welchem \mathcal{G} von dem sie berührenden Kegelschnitte der Schaar tangirt wird, oder der Punkt, in dem \mathcal{G} von ihrer gemeinsamen conjugirten Gerade \mathfrak{H} geschnitten wird, ist zum Punkt $c = (AB, \mathcal{G})$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ conjugirt. Da nun aber der vierte harmonische Punkt c_1 zu c in Bezug auf A, B auch auf \mathfrak{H} liegt, so ist nun auch für den Fall von vier reellen gemeinsamen Tangenten der Schaar klar gestellt, dass \mathfrak{H} die Polare von c in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist.

Ferner haben wir nun für alle Fälle die Richtigkeit des Satzes erkannt:

Die Pole einer Gerade \mathcal{G} in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer neuen Gerade \mathfrak{H} , und also auch die Pole von \mathfrak{H} auf der Gerade \mathcal{G} , oder: Die Geraden \mathcal{G} und \mathfrak{H} sind conjugirt in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte der Schaar und heissen daher: „conjugirte Geraden in Bezug auf die Kegelschnittschaar“.

Zu jeder Gerade \mathcal{G} in der Ebene einer Kegelschnittschaar gehört 238 demnach eine bestimmte conjugirte Gerade, insbesondere zu der unendlich entfernten Gerade G_∞ die Mittelpunktslinie \mathfrak{M} , auf welcher die Mittelpunkte sämtlicher Kegelschnitte der Schaar liegen.

Die Polare des Schnittpunktes P zweier solcher conjugirten Geraden \mathcal{G} und \mathfrak{H} in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt der Schaar bildet mit \mathcal{G} und \mathfrak{H} ein Polardreieck desselben; alle Kegelschnitte der Schaar haben das Polardreieck gemein, dessen Ecken x, y, z sind; folglich berühren (Nr. 105) die Polaren des Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar den Kegelschnitt, welcher die Seiten von xyz und $\mathcal{G}, \mathfrak{H}$ tangirt.

Diese Eigenschaft gilt auch, wenn das Diagonaldreieck xyz nicht vollständig reell ist, und auch wenn der Punkt P nicht als Schnittpunkt von zwei reellen conjugirten Geraden $\mathcal{G}, \mathfrak{H}$ aufgefasst werden kann; denn nicht jeder Punkt ist Schnitt von zwei *reellen* conjugirten Geraden $\mathcal{G}, \mathfrak{H}$.

Wenn wir zu einem gegebenen Punkte P die Polare in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt der Schaar construiren und zu ihr wiederum die conjugirte Gerade in Bezug auf die Schaar, so muss die letztere Gerade nothwendig durch P gehen. Umgekehrt, wenn wir irgend eine Gerade \mathcal{G} durch P ziehen, so muss die ihr conjugirte Gerade \mathfrak{H} in Bezug auf die Kegelschnittschaar nothwendig die Polare

von P in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar sein. Denn die Polaren des Punktes $\mathcal{G}\mathfrak{S}$ in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte der Schaar umhüllen nach dem Obigen einen gewissen Kegelschnitt, welcher \mathcal{G} und \mathfrak{S} berührt, und die Schnittpunkte sämtlicher Tangenten dieses Kegelschnitts mit \mathcal{G} sind die Pole von \mathfrak{S} in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar; diese erfüllen aber die Gerade \mathcal{G} ganz, und unter ihnen kommt also auch P vor; es sind mithin P und \mathfrak{S} Pol und Polare für einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar. Hieraus geht hervor, dass der Ort der Polaren des Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar identisch ist mit dem Ort derjenigen Geraden \mathfrak{S} , welche sämtlichen durch P gehenden Geraden \mathcal{G} in Bezug auf die Kegelschnittschaar conjugirt sind. Wir werden also, um jenen Ort zu bestimmen, eine veränderliche Gerade \mathcal{G} um den festen Punkt P drehen und den Ort der conjugirten Gerade \mathfrak{S} aufsuchen.

Nun haben wir die Gerade \mathfrak{S} als die Polare desjenigen Punktes c , in welchem \mathcal{G} von AB getroffen wird, in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ erkannt. $\mathfrak{R}^{(2)}$ geht immer durch die drei Punkte A, B, C ; dreht sich nun \mathcal{G} um einen festen Punkt P , so ist der Punkt Π , in dem die Strahlen von A, B (und C) zusammenlaufen, die den nach P gehenden conjugirt sind, allen Kegelschnitten $\mathfrak{R}^{(2)}$ gemeinsam, und wir haben ein Büschel mit vier reellen Grundpunkten. Die beiden Tangenten in A und B an dem Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ treffen sich in einem Punkte S , dessen Ort die Diagonale des vollständigen Vierecks $AB\Pi$ ist, welche die Schnittpunkte $(A\Pi, BC)$ und $(B\Pi, AC)$ verbindet. Die Polare von c in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(2)}$ geht aber durch S und den vierten harmonischen Punkt c_1 zu c in Bezug auf A und B . Bei der Bewegung von \mathcal{G} durchlaufen die Punkte S und c_1 zwei projective Punktreihen; zu der Tangente AS ist nämlich in der Involution A der Strahl nach dem Schnittpunkte $\alpha = (BC, \mathcal{G})$ conjugirt (Nr. 234). Wenn sich also \mathcal{G} um den festen Punkt P dreht, so beschreiben α und c perspective Punktreihen auf BC und AB , folglich der vierte harmonische Punkt c_1 eine mit α projective Punktreihe, weil c und c_1 eine hyperbolische Involution auf AB durchlaufen; ferner beschreibt $A\alpha$ ein Strahlbüschel, welches projectiv ist mit der Punktreihe c , und AS ein mit $A\alpha$ projectives Strahlbüschel, weil $A\mathfrak{S}$ und $A\alpha$ immer conjugirt in der Involution A sind; also sind die von S und c_1 durchlaufenen Punktreihen projectiv, und der Ort der Verbindungslinie $Sc_1 = \mathfrak{S}$ ist ein Kegelschnitt, welcher insbesondere auch AB , sowie $A\Pi$ und $B\Pi$ berührt; denn AB wird von c_1 durchlaufen; und wenn z. B. der Punkt S bei seiner Bewegung auf jener Diagonale in den Schnitt mit $A\Pi$ ge-

langt, so muss, weil $A\Pi$, AP und AS , $A\alpha$ in der Involution A conjugirt sind, α auf AP fallen, und diese ist die \mathfrak{G} ; daher liegt c in A und folglich auch c_1 , und c_1S ist $A\Pi$. AB ist Polare von P in Bezug auf das Punktepaar (A, B) der Schaar.

Dieser Kegelschnitt heisst *der Polarkegelschnitt des Punktes P in Bezug auf die Kegelschnittschaar*.

Die Polaren eines Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Schaar umhüllen also einen Kegelschnitt, welcher zugleich der Ort aller Geraden \mathfrak{H} ist, die zu sämmtlichen durch P gehenden Geraden \mathfrak{G} in Bezug auf die Kegelschnittschaar conjugirt sind. Hat die Kegelschnittschaar vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, so berührt dieser Polarkegelschnitt von P allemal die drei Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits und ausserdem diejenigen sechs Strahlen, welche man erhält, wenn man durch jede der sechs Ecken des vollständigen Vierseits den vierten harmonischen Strahl construirt in Bezug auf das Seitenpaar zu dem Verbindungsstrahl der Ecke mit P . Liegt P ausserhalb des Polarkegelschnitts, so ist das aus ihm an denselben gelegte Tangentenpaar ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf die Schaar, und es giebt zwei reelle Kegelschnitte der Schaar, welche durch P gehen, und deren Tangenten in P eben diese beiden Strahlen sind; denn für jeden der beiden conjugirten Strahlen ist der Punkt P der Schnitt mit dem andern, also sein Berührungspunkt mit dem Kegelschnitte der Schaar, den er tangirt.

Die Pole einer Gerade \mathfrak{G} in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer Gerade \mathfrak{H} und bilden eine gerade Punktreihe; die Pole einer zweiten Gerade \mathfrak{G}' bilden eine zweite gerade Punktreihe auf \mathfrak{H}' . Betrachten wir in diesen beiden Punktreihen als entsprechende Punkte die Pole von \mathfrak{G} und \mathfrak{G}' in Bezug auf denselben Kegelschnitt der Schaar, so sind die beiden Punktreihen auf \mathfrak{H} und \mathfrak{H}' allemal projectiv, der von ihnen erzeugte Kegelschnitt ist der Polarkegelschnitt des Punktes $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ in Bezug auf die Schaar.

Ferner lässt der Polarkegelschnitt die charakteristische Eigenschaft der Kegelschnittschaar in unmittelbarer Weise hervortreten; der eines beliebigen Punktes P heisse $P^{(2)}$. Nehmen wir zuerst an, dass P ausserhalb $P^{(2)}$ liegt, so gehen durch P zwei Tangenten an $P^{(2)}$, welche zugleich conjugirte Geraden in Bezug auf die Schaar, also zu den Tangenten aus P an jeden Kegelschnitt der Schaar harmonisch gelegen sind. Die sämmtlichen Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte der Schaar bilden daher eine hyperbolische Involution, welche zusammenfällt mit derjenigen, die dem Punkt P in Bezug auf den

Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ zugehört, und deren Doppelstrahlen jene Tangenten von P an $P^{(2)}$ sind.

Wenn dagegen P innerhalb des Polarkegelschnitts $P^{(2)}$ liegt, so bilden die Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte der Schaar eine elliptische Involution, welche mit der zusammenfällt, die dem Punkt P in Bezug auf $P^{(2)}$ zugehört. In der That, es seien $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ die Tangenten aus P an einen Kegelschnitt der Schaar und \mathcal{Q} die Polare von P in Bezug auf ihn; sei ferner \mathfrak{H} die conjugirte Gerade von \mathcal{G} in Bezug auf die Schaar, und \mathfrak{H}' die von \mathcal{G}' , so geht \mathfrak{H} durch den Berührungspunkt von \mathcal{G} , und \mathfrak{H}' durch den von \mathcal{G}' , d. h. die Verbindungslinie $(\mathcal{G}\mathfrak{H}, \mathcal{G}'\mathfrak{H}')$ ist identisch mit \mathcal{Q} . Der Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ muss aber die drei Geraden $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ und \mathcal{Q} berühren, weil \mathcal{Q} die Polare von P ist in Bezug auf einen Kegelschnitt der Schaar und \mathfrak{H} und \mathfrak{H}' die conjugirten Geraden von \mathcal{G} und \mathcal{G}' sind, welche sich in P treffen. Da nun $\mathcal{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathcal{G}', \mathfrak{H}'$ zwei Paare conjugirter Geraden in Bezug auf die Schaar sind, so werden auch $(\mathcal{G}\mathcal{G}', \mathfrak{H}\mathfrak{H}')$ und $(\mathcal{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathcal{G}')$ ein drittes Paar conjugirter Geraden in Bezug auf die Schaar sein, und weil von diesen die erstere durch P geht, so wird die letztere $P^{(2)}$ berühren; wir haben also jetzt vier Tangenten von $P^{(2)}$, nämlich:

$$\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}', \quad (\mathcal{G}\mathfrak{H}, \mathcal{G}'\mathfrak{H}'), \quad (\mathcal{G}\mathfrak{H}', \mathcal{G}'\mathfrak{H}).$$

Von diesem dem Kegelschnitt $P^{(2)}$ umgeschriebenen Viereck sind die Geraden \mathcal{G} und \mathcal{G}' zwei Diagonalen, folglich sind sie conjugirt in Bezug auf den Polarkegelschnitt $P^{(2)}$, und da alle durch P gehenden Paare conjugirter Strahlen in Bezug auf denselben eine Involution bilden, so folgt der Satz:

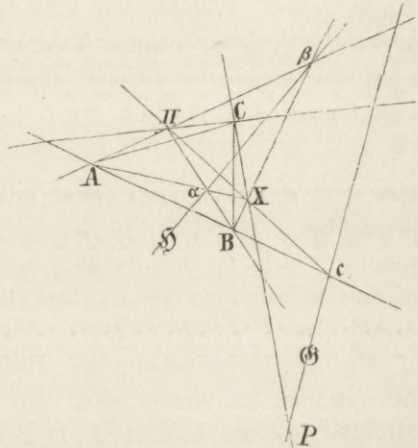
Die Tangentenpaare aus einem beliebigen Punkte P an die Kegelschnitte einer Schaar bilden eine Involution, welche identisch ist mit derjenigen, die dem Punkte P in Bezug auf seinen Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ zugehört; also je zwei Tangenten aus P an einen Kegelschnitt der Schaar sind conjugirt in Bezug auf den Polarkegelschnitt $P^{(2)}$.

240 Der Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ eines Punktes P in Bezug auf die Kegelschnittschaar ist insbesondere, wie wir gesehen haben, dem gemeinschaftlichen Polardreiseit aller Kegelschnitte der Schaar eingeschrieben; dieses Dreiseit ist aber nur reell, wenn die Involution C hyperbolisch ist, und besteht aus ihren Doppelstrahlen und der Verbindungslinie AB . In beiden Fällen aber gilt, dass *die Involution C diejenige ist, welche dem Punkte C in Bezug auf irgend einen Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ zugehört*. Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir den Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ eines beliebigen Punktes P auf etwas andere Weise herstellen. Die zu den Strahlen AP, BP, CP conjugirten

Strahlen in den drei Involutionen A, B, C schneiden sich in einem Punkte Π ; ziehen wir durch P eine Gerade \mathcal{G} , welche AB in c trifft (Fig. 72), so wird Πc die feste Gerade CP in einem Punkte X treffen, so dass durch die fünf Punkte A, B, C, Π, X der der Gerade \mathcal{G} in der obigen Weise zugehörige Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ bestimmt wird; denn da CP und $C\Pi$ ein Paar conjugirter Strahlen der Involution C sind, so muss die Sehne, welche ihre zweiten Schnitte mit $\mathcal{R}^{(2)}$ verbindet, durch den Punkt c gehen; der eine ist Π , folglich ist X der andere; die Polare \mathcal{H} von c in Bezug auf $\mathcal{R}^{(2)}$ ist die Diagonale des eingeschriebenen Vierecks $AB\Pi X$, welche die Schnittpunkte $(AX, \Pi B) = \alpha$, $(BX, \Pi A) = \beta$ verbindet; sie umhüllt, wenn \mathcal{G} sich um P dreht, den Polarkegelschnitt $P^{(2)}$.

Diese Construction gestattet, leicht die Veränderung zu überblicken, welche die Figur durch die Drehung von \mathcal{G} erfährt; es beschreibt nämlich c eine gerade Punktreihe auf AB , X eine mit ihr projective Punktreihe auf CP , α

Fig. 72.



und β mit X , also auch mit einander projective Punktfolgen auf ΠB und ΠA ; folglich umhüllt \mathcal{H} einen Kegelschnitt $P^{(2)}$, welcher ΠA und ΠB berührt. Er hat auch AB zur Tangente; denn \mathcal{H} kommt auf AB zu liegen, wenn \mathcal{G} mit PC zusammenfällt. Auf den beiden Trägern ΠA und ΠB sind mithin einmal A und B und dann β und α je ein Paar entsprechender Punkte der beiden projectiven Punktfolgen, daher liegt der Schnittpunkt $(A\alpha, B\beta) = X$

auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Träger (Nr. 65); folglich ist, da X die Gerade PC durchläuft, PC die Polare von Π in Bezug auf den Polarkegelschnitt $P^{(2)}$. Ferner bilden ΠA , ΠB , AB , $\alpha\beta$ ein diesem Kegelschnitt umgeschriebenes Viereck, von dem zwei Diagonalen XA , XB sind; XA und XB sind also conjugirt in Bezug auf $P^{(2)}$, insbesondere also auch CA und CB ; aber auch CP und $C\Pi$ sind conjugirt, weil Π der Pol von CP ist. Folglich bestimmen diese beiden Paare conjugirter Strahlen die dem Kegelschnitt $P^{(2)}$ zugehörige Involution in C , und diese coincidirt mit der Involution C ; denn in letzterer sind CA , CB conjugirt, und nach P und Π laufen conjugirte Strahlen von allen drei Involutionen A, B, C .

Die oben ausgesprochene Behauptung ist also erwiesen, und der Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ des Punktes P in Bezug auf die Schaar ist nunmehr dadurch bestimmt, dass er dem Dreieck $AB\Pi$ eingeschrieben ist und ΠA und ΠB in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen sie von PC getroffen werden.

241 Zu der Involution der Tangentenpaare aus einem Punkte P an die Kegelschnitte der Schaar gehören auch die Paare aus den beiden Strahlen nach A und B und aus den Strahlen nach C und Π , wo, wie bisher, Π der gemeinsame Punkt der Strahlen α, β aus A, B ist, die zu den nach P gehenden a, b in den Involutionen A, B conjugirt sind. In der That, wenn wir, wie in Nr. 235, einen Kegelschnitt der Schaar mittelst der projectiven Punktreihen auf zwei conjugirten Strahlen c, γ erzeugen, so sind $(\alpha c, \alpha \gamma) = t, (bc, \beta \gamma) = t', c, \gamma$ vier Tangenten des Kegelschnitts. Da nun (Nr. 234) die sechs Geraden $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ einen Kegelschnitt berühren, so lehrt das umgeschriebene Sechseit $abc\alpha\beta\gamma$, dass $(ab, \alpha\beta) = P\Pi, t'$ und t durch denselben Punkt gehen. Wenden wir nun unsern Involutionssatz auf die Schaar mit den vier gemeinsamen Tangenten t, t', c, γ an und zwar auf jenen auch der gegebenen Schaar angehörigen Kegelschnitt und die beiden Punktepaare $(ct', \gamma t)$ und $(c\gamma, tt')$ der jetzigen Schaar. Nun ist $(P, ct') = b = PB, (P, \gamma t) = a = PA; (P, c\gamma) = PC, (P, tt') = P\Pi$; diese Strahlenpaare sind daher mit dem Tangentenpaare aus P an den betrachteten Kegelschnitt der Schaar in Involution; sie bleiben fest, wenn er sich in der Schaar ändert, gehören somit zur Tangenteninvolution* und dienen zu ihrer Bestimmung. Sie bilden das Doppelverhältniss $P(A, B, C, \Pi)$, zu dem wir also nur die fünf Punkte A, B, C, P, Π brauchen, die übrigens auch zur Festlegung der drei Involutionen hinreichen, denn für jede haben wir zwei Strahlenpaare: für alle drei das je nach P, Π gehende, und für die um A z. B. noch das Paar $A(B, C)$.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ seien die Schnitte von $P\Pi$ mit BC, CA, AB ; wir schneiden das Büschel P mit AB und projectiren aus C auf $P\Pi$; dies giebt: $P(A, B, C, \Pi) = P(B, A, \Pi, C) = (B, A, \mathfrak{C}, [PC, AB]) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, P)^{**}$
 $= (\mathfrak{A}, \Pi, \mathfrak{C}, P) \cdot (\Pi, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, P) = B(C, \Pi, A, P) \cdot A(\Pi, C, B, P)$;

also:
$$P(A, B, C, \Pi) = \frac{B(A, P, C, \Pi)}{A(B, P, C, \Pi)} = \frac{1 - B(A, C, P, \Pi)}{1 - A(B, C, P, \Pi)}$$

* $P(A, B)$ sind die Tangenten an das eine Punktepaar der Schaar.

** Heben wir dies als interessantes Ergebniss hervor:

Wenn ein Dreieck ABC , ein Punkt X und eine durch ihn gehende Gerade x gegeben sind, so seien a, b, c die Verbindungslinien von X mit A, B, C , und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Schnitte von x mit BC, CA, AB ; dann ist immer $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}X) = (abcx)$.

Im Grunde ist diese Betrachtung die polare zu derjenigen von Nr. 189 mit einigen Modificationen. Wir schliessen wie dort, dass, wenn die beiden Involutionen A, B elliptisch, also die gemeinsamen Tangenten sämtlich imaginär sind, die Involution der Tangentenpaare aus jedem Punkte hyperbolisch ist; weil dann $B(A, C, P, \Pi)$ und $A(B, C, P, \Pi)$ negativ sind und deshalb $P(A, B, C, \Pi)$ positiv ist.

Wir können die obige Formel auch schreiben:

$$A(B, P, C, \Pi) \cdot P(A, B, C, \Pi) \cdot B(P, A, C, \Pi) = 1,$$

oder, C und P vertauschend:

$$A(B, C, P, \Pi) \cdot B(C, A, P, \Pi) \cdot C(A, B, P, \Pi) = 1,$$

und haben eine interessante Beziehung für fünf Punkte einer Ebene, welche Möbius gefunden hat.* In anderer Gruppierung lautet sie:

$$P(A, B, \Pi, C) \cdot \Pi(A, B, C, P) \cdot C(A, B, P, \Pi) = 1.$$

So lehrt sie, dass, wenn die dritte Involution C hyperbolisch ist, also sowohl wenn die vier gemeinsamen Tangenten alle reell, als wenn sie alle imaginär sind, die beiden von den Punkten P, Π kommenden Tangenteninvolutionen stets gleichartig, hingegen im mittleren Falle von nur zwei reellen gemeinsamen Tangenten, wo die dritte Involution elliptisch ist, ungleichartig sind.

Wenn eine von den beiden Involutionen A, B hyperbolisch ist, etwa die um B , so seien d, d' die reellen Doppelstrahlen, während wir die beiden Paare conjugirter Strahlen $B(A, C; P, \Pi)$ kürzer mit $a, c; p, \pi$ bezeichnen wollen. Wir haben das Doppelverhältniss $B(A, P, C, \Pi)$ oder (a, p, c, π) zu untersuchen.

Infolge der Involution ist:

$$(acd\pi) = (cadp) = (acpd);$$

die Multiplication mit $(acpd)$ giebt:

$$(acp\pi) = (acpd)^2,$$

also:

$$(apc\pi) = 1 - (acpd)^2 = [1 - (acpd)] [1 + (acpd)] \\ = [1 - (acpd)] [1 - (acpd')],$$

da

$$(acpd) = (acpd') (acd'd) = - (acpd');$$

demnach:

$$(apc\pi) = (apcd) (apcd') = (apcd)^2 (apdd').$$

Somit hat $(apc\pi)$ dasselbe Vorzeichen wie $(apdd')$; und letzteres ist positiv oder negativ, je nachdem P in demselben Scheitelwinkel-

* Möbius, Barycentrischer Calcul (Gesammelte Werke Bd. I) § 199. Vergl. auch: Aufgaben und Sätze (am Ende dieses Buches) Nr. 9.

paar der Doppelstrahlen d, d' liegt wie A oder nicht, und dasselbe gilt also für $(apc\pi)$ oder $B (A, P, C, \Pi)$. Ist die andere Involution A elliptisch, so können wir $A (B, P, C, \Pi)$ wieder wie oben durch $1 - A (B, C, P, \Pi)$, eine positive Grösse, ersetzen, und $P (A, B, C, \Pi)$ ist von gleichem Vorzeichen mit $B (A, P, C, \Pi)$.

Wenn also zwei von den gemeinsamen Tangenten einer Kegelschnittschaar reell, die beiden andern imaginär sind, so ist die Tangenteninvolution, die von einem Punkte an die Schaar kommt, hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem dieser Punkt in demselben Scheitelwinkelpaar der reellen Tangenten liegt wie der reelle Schnittpunkt der beiden imaginären, oder nicht.

Ist aber auch die andere Involution A hyperbolisch: mit den Doppelstrahlen e, e' , so haben wir den Nenner $A (B, P, C, \Pi)$ ebenso zu behandeln; er ist positiv oder negativ, je nachdem P in demselben Scheitelwinkelpaar ee' liegt wie B , oder nicht. Nennen wir die Scheitelräume von ee' , in denen B liegt, \mathfrak{E} , die andern \mathfrak{E}' , und ebenso bei dd' die, in welchen A liegt, \mathfrak{D} , die andern \mathfrak{D}' , so erkennt man leicht, dass die vier Tangenten d, d', e, e' die Ebene in elf Gebiete von vier verschiedenen Arten theilen, die, ohne dass wohl genauere Erläuterung erforderlich ist, mit $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'\mathfrak{E}$ bezeichnet werden können. Bei Punkten P in den Gebieten $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'$ haben $B (A, P, C, \Pi)$ und $A (B, P, C, \Pi)$ das nämliche Vorzeichen; also ist $P (A, B, C, \Pi)$ positiv und die Tangenteninvolution hyperbolisch, während sie bei Punkten der Gebiete $\mathfrak{D}\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'\mathfrak{E}$ elliptisch ist. Man erkennt sofort, dass die Diagonale AB des Vierseits $dd'ee'$ nur durch Gebiete $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ geht, und wird sich leicht überzeugen, dass auch die beiden andern Diagonalen nur durch hyperbolische Gebiete gehen; wir kommen, wie nothwendig, auf das Kennzeichen (Nr. 56, 210) für die Art der Involution nach den drei Gegeneckenpaaren eines Vierseits oder an die Kegelschnitte der ihm eingeschriebenen Schaar.

§ 50. Die Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten.

243 Die in § 46 durchgeführte Untersuchung, welche über die Art der in einer Kegelschnittschaar enthaltenen Kegelschnitte Aufschluss gab, beruhte wesentlich darauf, dass diese ein reelles gemeinschaftliches Polardreieck xyz besitzt, hat also nur Gültigkeit, wenn sie entweder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten hat oder vier imaginäre. Es bleibt daher eine Lücke für den Fall, wenn die Schaar zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten besitzt, und diese

Lücke auszufüllen ist der gegenwärtige Paragraph bestimmt, in welchem die dort gewonnenen Resultate von einem neuen Gesichtspunkte aus den allgemeinen Polareigenschaften der Kegelschnittschaar nochmals abgeleitet werden sollen, unabhängig davon, ob das gemeinsame Polardreieck xyz ganz oder nur zum Theil reell ist.

Gehen wir von der allgemeinsten Erzeugung der Kegelschnittschaar aus vermittelt der beiden Involutionen A und B , von welchen die Involution C in der Nr. 234 erörterten Weise abhängt, so haben wir gelernt, zu jeder Gerade \mathcal{G} die conjugirte \mathcal{H} in Bezug auf die Schaar vermittelt dieser Involutionen zu construiren; die conjugirte \mathcal{M} der unendlich entfernten Gerade G_∞ enthält die Mittelpunkte m sämtlicher Kegelschnitte der Schaar. Der unendlich entfernte Punkt m_∞ dieser Gerade \mathcal{M} ist der Mittelpunkt der einzigen in der Schaar vorkommenden Parabel; von diesem Punkte m_∞ wollen wir den Polarkegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ in Bezug auf die Schaar bestimmen. Er muss eine *Parabel* sein, weil die Polare G_∞ von m_∞ in Bezug auf die einzige in der Schaar vorkommende Parabel eine Tangente von $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist; diese Parabel berührt \mathcal{M} , weil \mathcal{M} die conjugirte Gerade zu G_∞ ist und G_∞ durch m_∞ geht; sie berührt AB ; die Involution C ist die ihr zugehörige, wie bei jedem Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ (Nr. 240). Jede Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ trifft \mathcal{M} in einem Punkte m , welcher Mittelpunkt eines bestimmten Kegelschnitts der Schaar ist, für den sie Polare von m_∞ ist; sie bildet mit \mathcal{M} zusammen ein Paar conjugirter Durchmesser dieses Kegelschnitts und mit \mathcal{M} und G_∞ ein Polardreieck desselben. Ziehen wir ferner mC und die Parallele durch m zu AB , so haben wir ein zweites immer reelles Paar conjugirter Durchmesser dieses Kegelschnitts der Schaar, weil C und AB Pol und Polare für sämtliche Kegelschnitte der Schaar sind. Durch diese beiden Paare conjugirter Durchmesser ist die Involution der conjugirten Durchmesser für den Kegelschnitt der Schaar, dessen Mittelpunkt m ist, vollständig bestimmt, und ihre Art giebt Aufschluss über die des Kegelschnitts. Wir können hiernach, indem wir eine veränderliche Tangente an der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ herumbewegen, den Verlauf jener Involution, also die Art der Kegelschnitte verfolgen und gelangen unabhängig von der Realität des gemeinsamen Polardreiecks, von welchem C und AB immer reell sind, zu den Resultaten des § 46, die aber für den Fall nur zweier reeller gemeinschaftlichen Tangenten der Schaar eine Modification erleiden.

Zuvörderst ist nun nöthig, die Construction der Gerade \mathcal{M} und der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, von denen alles abhängt, genauer anzugeben. Die Gerade \mathcal{M} wird nach § 49 so gefunden: Wir ziehen die Parallelen durch A zu BC und durch B zu AC ; ihre conjugirten Strahlen in

den Involutionen A und B mögen sich in S schneiden; die Gerade, welche S mit der Mitte von AB verbindet, ist \mathfrak{M} .

Denn die beiden conjugirten Strahlen sind die Tangenten in A und B an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher der unendlich fernen Gerade G_∞ zugeordnet ist (Nr. 234); ihr Schnitt S liegt also auf der Polare des Punktes (G_∞, AB) in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$, d. h. auf der zu G_∞ conjugirten Gerade \mathfrak{M} , die ja auch durch den vierten harmonischen Punkt zu (G_∞, AB) in Bezug auf A, B geht (Nr. 237).

Ziehen wir sodann durch A und B die Parallelen zu \mathfrak{M} und die zu ihnen conjugirten Strahlen in den Involutionen A und B , welche sich in Π_0 treffen, endlich durch C die Parallele zu \mathfrak{M} , welche Π_0A und Π_0B in α und β trifft, so ist derjenige Kegelschnitt, welcher dem Dreieck Π_0AB eingeschrieben ist und die Seiten Π_0A, Π_0B in den Punkten α und β berührt, die gesuchte Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ (Nr. 240). Sie berührt auch \mathfrak{M} und zwar, wie leicht zu erkennen ist, in dem Punkte m_h , welcher die Mitte des Abschnitts ist, den Π_0A und Π_0B auf \mathfrak{M} ausschneiden; dieser Punkt m_h ist der Mittelpunkt derjenigen Hyperbel der Schaar, welche die Gerade \mathfrak{M} zu einer Asymptote hat, also durch den Punkt m_∞ geht. Denn die zweite Tangente aus einem Punkte m von \mathfrak{M} an $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist die Polare von m_∞ in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt der Schaar, der in jenem Punkte seinen Mittelpunkt hat, also der conjugirte Durchmesser zu \mathfrak{M} ; bei m_h haben sich die beiden Tangenten, also die beiden conjugirten Durchmesser vereinigt; \mathfrak{M} ist Asymptote. Die Verbindungslinie Π_0m_h ist mit der Axe von $\mathfrak{P}^{(2)}$ parallel. Der Punkt m auf \mathfrak{M} und der unendlich entfernte Punkt p_∞ der zweiten Tangente aus m an $\mathfrak{P}^{(2)}$ beschreiben zwei projective Punkt-reihen, weil \mathfrak{M} und G_∞ , als Tangenten von $\mathfrak{P}^{(2)}$, von allen übrigen Tangenten derselben projectiv geschnitten werden. Bezeichnen wir noch den unendlich entfernten Punkt von AB durch c_∞ , so sind nach dem Obigen mC und mc_∞ ein Paar, $mm_\infty = \mathfrak{M}$ und mp_∞ ein zweites Paar conjugirter Durchmesser desjenigen Kegelschnitts der Schaar, dessen Mittelpunkt m ist, und durch diese beiden Paare ist die Durchmesserinvolution bestimmt.

244 Wir verlegen, wie in Nr. 215, diese Involution parallel mit sich nach irgend einem Punkte o eines Hilfskegelschnitts $C^{(2)}$; es ergibt sich auf $C^{(2)}$ eine krumme Involution mit dem Centrum P , und je nachdem dieser Punkt ausserhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitte $C^{(2)}$ liegt, ist die Involution hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch.

Den Ort der Punkte P für alle Kegelschnitte der Schaar ermitteln wir folgendermassen. Die durch o zu mm_∞ und mc_∞ gezogenen

Parallelen treffen $C^{(2)}$ in den festen Punkten δ und γ ; die zu $m p_\infty$ durch o gezogene Parallele beschreibt ein Strahlbüschel, welches perspectiv liegt mit der Punktreihe p_∞ , und die zu $m C$ gezogene Parallele durch o beschreibt ein Strahlbüschel, welches mit der Punktreihe m projectiv ist; da nun die Punktreihen m und p_∞ projectiv sind, so durchbohren die beiden letzten Strahlbüschel den Kegelschnitt $C^{(2)}$ in Punkten, welche bezw. mit den festen Punkten δ und γ auf $C^{(2)}$ verbunden zwei projective Strahlbüschel liefern; der Schnittpunkt je zweier entsprechender Strahlen derselben ist aber P , folglich ist der Ort der Punkte P ein neuer Kegelschnitt $C_1^{(2)}$, welcher mit $C^{(2)}$ die beiden Punkte γ und δ gemein hat. Die Punkte P dieses Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ bestimmen je Sehnen von $C^{(2)}$, deren Schnittpunkte mit o verbunden Involutionen in o liefern, welche den Durchmesser-Involutionen der Kegelschnittschaar parallel sind; denjenigen Punkten von $C_1^{(2)}$, welche ausserhalb $C^{(2)}$ liegen, entsprechen also Hyperbeln in der Kegelschnittschaar, den Punkten von $C_1^{(2)}$ innerhalb $C^{(2)}$ Ellipsen und den beiden Punkten γ und δ Parabeln, und zwar ist nur die dem Punkte δ entsprechende eine eigentliche Parabel, während die dem Punkte γ entsprechende das Punktepaar (A, B) oder die Doppellinie AB ist, welche als Parabel aufgefasst werden kann.

Zur weiteren Untersuchung müssen nun zwei Fälle unterschieden werden, nämlich ob der Punkt C 1) innerhalb oder 2) ausserhalb der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt. Da die dem Punkte C in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ zugehörige Involution diejenige ist, welche von den beiden als gegeben angenommenen Involutionen A und B abhängt, und im Falle 1) elliptisch, im Falle 2) hyperbolisch ist, so hat die Kegelschnittschaar im ersten Falle zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, im zweiten Falle entweder vier imaginäre oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten. Im ersten Falle können nun die Kegelschnitte $C^{(2)}$ und $C_1^{(2)}$ ausser den Punkten γ und δ keinen Punkt weiter gemeinschaftlich haben, oder es kann weiter keine von den Durchmesser-Involutionen parabolisch werden; denn damit eine Involution parabolisch sei, müssen zwei beliebige Strahlen derselben einen und denselben conjugirten Strahl haben, welcher dann zu allen Strahlen der conjugirte ist; es müssten also auch $m m_\infty$ und $m c_\infty$ denselben conjugirten Strahl haben, der eine conjugirte Strahl ist die zweite Tangente aus m an $\mathfrak{P}^{(2)}$, der andere der Strahl nach C ; diese müssten also zusammenfallen. Da aber C innerhalb der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt, so geht keine Tangente durch ihn, also schliessen wir: *Eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten zerfällt nur in eine Reihe von Ellipsen und eine von Hyperbeln, welche*

von einander getrennt werden einmal durch die einzige in der Schaar vorkommende Parabel und das andere Mal durch das einzige in ihr vorkommende Punktepaar.

Im zweiten Falle dagegen haben die beiden Kegelschnitte $C^{(2)}$ und $C_1^{(2)}$ ausser den Punkten γ und δ noch zwei andere Punkte gemein, welche parabolischen Involutionen entsprechen; die beiden aus C an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ gelegten Tangenten sind die Doppellinien von zwei Punktepaaren der Schaar und bilden mit AB zusammen das reelle gemeinschaftliche Polardreieck oder die drei Diagonalen des entweder ganz reellen oder ganz imaginären vollständigen Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar eingeschrieben ist. In diesem Falle haben wir die im § 46 gefundenen Ergebnisse: Die Kegelschnittschaar besteht aus zwei Reihen von Ellipsen und zweien von Hyperbeln, die durch die Parabel und die drei Punktepaare von einander getrennt werden, u. s. f.

Auch die weiteren interessanten Folgerungen, welche sich aus der Untersuchung des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ in § 46 ergaben, bleiben in unserem jetzigen Falle einer Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten bestehen mit einfachen Modificationen, welche sich leicht ergeben.

Es ist der Vollständigkeit wegen noch der Uebergangsfall zu untersuchen, wenn der Punkt C auf der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ selbst liegt; in diesem Fall ist die Involution C parabolisch, die beiden Doppelstrahlen fallen in eine Gerade zusammen, die Tangente in C an der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$. Diese Strahlen sind aber zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar eingeschrieben ist, und da sie zugeordnete harmonische Strahlen mit CA und CB sind, so muss der Strahl, in welchem sie zusammenfallen, entweder durch A oder durch B gehen. Wenn er durch B geht, so fallen die durch B gehenden Seiten des vollständigen Vierseits auch zusammen, also wird die Involution B ebenfalls parabolisch; d. h. die Kegelschnittschaar nimmt den speciellen Charakter an, in einem festen Punkte B beständig dieselbe feste Tangente BC und ausserdem zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, die durch A gehen, zu besitzen, je nachdem die Involution A hyperbolisch oder elliptisch ist. Die Kegelschnittschaar specialisirt sich also in diesem Uebergangsfalle derart, dass zwei von den gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallen.

245 Eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen gemeinsamen Tangenten d, d' , die sich in A schneiden (Nr. 242), und zwei imaginären, die sich in B schneiden, besteht aus einer Reihe von Ellipsen und einer Reihe von Hyperbeln. Jene befinden sich ersichtlich in demjenigen Winkel dd' , der den Punkt B enthält, diese in diesem Winkel und seinem

Scheitelwinkel; denn B ist für alle innerer Punkt. Den Uebergang bilden die Parabel Π_0 der Schaar, die sich ebenfalls im ersteren Winkel befindet, und das einzige reelle Punktepaar (A, B) der Schaar.

Wir gehen von einer Tangente aus, die jene Scheitelwinkel durchschneidet; die berührte Curve der Schaar ist eine Hyperbel; und ähnlich wie in Nr. 211 erhalten wir:

Wenn drei reelle Tangenten 1, 2, 5 und zwei imaginäre 3, 4 gegeben sind (letztere durch eine elliptische Involution), so ist, wofern 5 die Parabel Π_0 der Schaar 1234 nicht schneidet, der durch sie bestimmte Kegelschnitt der Schaar Hyperbel oder Ellipse, je nachdem 5 die Punkte 1 2 und 3 4 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten hat; wofern aber 5 jene Parabel schneidet, so gilt das umgekehrte Kennzeichen.

Und analoges gilt, wenn 1, 2, 3, 4 alle vier imaginär sind, und 1, 2, bezw. 3, 4 durch elliptische Involutionen definirt.

Durch die Parabel Π_0 gehen hier die Ellipsen der Schaar über in Hyperbeln, welche die Punkte 12 und 34 innerhalb desselben Astes, durch das Punktepaar (12, 34) aber in solche, welche sie innerhalb verschiedener Aeste haben. Diese beiden Reihen von Hyperbeln werden auf der andern Seite begrenzt durch das eine, bezw. das andere imaginäre Punktepaar (mit reeller Doppellinie), und sie haben zwischen sich die andere Reihe von „Ellipsen“, die aber in Wirklichkeit lauter imaginäre Curven sind und als Ellipsen wegen der imaginären Schnitte mit G_∞ aufgefasst werden können.

Von reellen Ellipsen hat die Schaar mit vier imaginären gemeinsamen Tangenten nur eine Reihe.

§ 51. Conjugirte Kegelschnittbüschel.

Die in § 42 angegebene Erzeugung des Kegelschnittbüschels aus 246 zwei Involutionen, welche gleichzeitig sämtlichen Kegelschnitten des Büschels zugehören, führt unmittelbar zu einer eigenthümlichen Verbindung von drei Kegelschnittbüscheln, welche conjugirt genannt werden und von denen zwei conjugirte Kreisbüschel* und ein mit ihnen verbundenes Büschel gleichseitiger Hyperbeln einen Specialfall bilden.

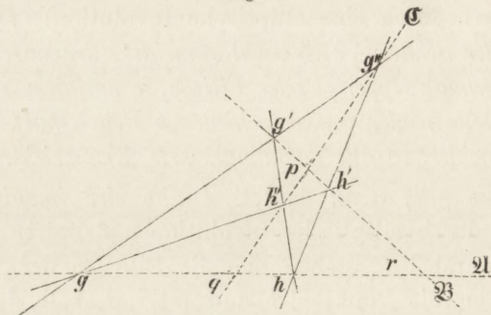
Indem wir bei der folgenden Untersuchung dieser Eigenschaften nur einen Fall ins Auge fassen und zwar der Einfachheit wegen denjenigen, für welchen die wesentlichsten Theile der Figur reell sind, wird es nach Anleitung der vorigen Auseinandersetzungen keine Schwierigkeit

* Steiner: Einige geometrische Betrachtungen, Journal f. Math. Bd. 1, Seite 168, Gesammelte Werke Bd. 1, Seite 25.

mehr haben, die übrigen Fälle, in welchen gewisse Theile der Figur imaginär werden, zu behandeln und die dabei eintretenden Modificationen zu ermitteln.

Wir gehen von zwei hyperbolischen Involutionsen (x, ξ) und (y, η) auf den Trägern \mathfrak{A} und \mathfrak{B} aus, mit den Doppelpunkten g, h und g', h' (Fig. 73), also von einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grund-

Fig. 73.



punkten g, h, g', h' . Von diesen beiden Involutionsen hängt nun eine dritte in der uns bekannten Weise ab; dem Schnittpunkte $r = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ seien in den beiden Involutionsen auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Punkte q und p conjugirt; dann ist $pq = \mathfrak{C}$ der Träger der dritten Involution (z, ξ) , in welcher die Schnittpunkte von \mathfrak{C} mit den Verbindungslinien xy und $\xi\eta$ oder $x\eta$ und $y\xi$ immer conjugirt sind, unter andern auch p und q . Sie ist (Nr. 186) in dem unserer Betrachtung zu Grunde gelegten Falle, wo (x, ξ) und (y, η) hyperbolisch sind, ebenfalls hyperbolisch; ihre Doppelpunkte g'', h'' sind diejenigen Punkte, in welchen gg' und gh' oder auch hh' und hg' die Gerade \mathfrak{C} treffen, so dass also:

$$(gg', hh') = g'', \quad (gh', hg') = h''$$

ist und die sechs Doppelpunkte g, h, g', h', g'', h'' die Ecken eines vollständigen Vierseits sein müssen, dessen drei Diagonalen die Träger $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind. Die beiden Involutionsen auf \mathfrak{A} und \mathfrak{B} erzeugen ein Kegelschnittbüschel, welches die vier Grundpunkte g, h, g', h' hat; die Kegelschnitte dieses Büschels treffen \mathfrak{C} in je zwei Punkten z, ξ ihrer Involution, haben also g'', h'' zu conjugirten Punkten. Jede zwei conjugirten Punkte z, ξ sind Grundpunkte zweier projectiven Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen nach conjugirten Punkten x, ξ oder y, η gehen, und welche einen Kegelschnitt des Büschels $(ghg'h')$ erzeugen (Nr. 185).

Es liegt jetzt nahe, ebenso ein zweites Kegelschnittbüschel aus den beiden Involutionsen (x, ξ) und (z, ξ) und ein drittes aus den (y, η)

und (z, ξ) hervorgehen zu lassen; diese drei Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten

$$g', h', g'', h''; \quad g', h', g, h; \quad g, h, g', h'$$

wollen wir mit

$$[\mathfrak{A}], \quad [\mathfrak{B}], \quad [\mathfrak{C}]$$

bezeichnen und *conjugirte Kegelschnittbüschel* nennen. Solche drei Kegelschnittbüschel bieten eine Reihe von merkwürdigen Eigenschaften dar, welche im Folgenden abgeleitet werden sollen.

Durch einen beliebigen Punkt s in der Ebene gehen drei Kegelschnitte A, B, C , welche beziehungsweise den drei conjugirten Büscheln angehören; von diesen drei Kegelschnitten schneiden sich je zwei ausser in den drei ersichtlichen Punkten noch in einem jedesmaligen vierten, nämlich:

$$\begin{array}{l} B \text{ und } C \text{ in den Punkten } g, h, s \text{ und } \sigma, \\ C \text{ „ } A \text{ „ „ „ } g', h', s \text{ „ } \sigma', \\ A \text{ „ } B \text{ „ „ „ } g'', h'', s \text{ „ } \sigma''. \end{array}$$

Die drei Punkte $\sigma, \sigma', \sigma''$ liegen in gerader Linie. Durch den Punkt s giebt es nämlich im allgemeinen zwei Strahlen, die sowohl \mathfrak{A} wie \mathfrak{B} in je einem Paare conjugirter Punkte der auf ihnen befindlichen Involationen, folglich auch \mathfrak{C} in einem Paare der ihrigen treffen. Allerdings können, da (x, ξ) und (y, η) hyperbolisch angenommen sind, jene beiden Strahlen durch s auch imaginär werden, welchen Fall wir nachher untersuchen wollen. Seien zuerst diese beiden Strahlen durch s reell und so beschaffen, dass, wenn der eine die Träger $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ in a, b, c trifft, der andere ihnen in den conjugirten Punkten α, β, γ begegnet, dann liegen die Punkte:

$$(a\beta, b\alpha) = \sigma'', \quad (a\gamma, c\alpha) = \sigma', \quad (b\gamma, c\beta) = \sigma$$

in gerader Linie (Nr. 66). Sie sind jene vierten Schnittpunkte. Denn weil sowohl a, α , als auch b, β für das Büschel $[\mathfrak{C}]$ conjugirt sind, so sind es auch $(ab, \alpha\beta) = s$ und $(a\beta, b\alpha) = \sigma''$; ebenso ist σ der conjugirte Punkt zu s für das Büschel $[\mathfrak{A}]$ und σ' für das Büschel $[\mathfrak{B}]$. Die Tangenten in s an den drei Kegelschnitten A, B, C gehen also bezw. durch $\sigma, \sigma', \sigma''$; es trifft aber der Kegelschnitt A die Gerade \mathfrak{A} in den Punkten a und α , denn die beiden Strahlbüschel mit den Grundpunkten a und α , welche nach den Paaren conjugirter Punkte (y, η) oder (z, ξ) hingehen, erzeugen den Kegelschnitt A , weil ab und $\alpha\beta$ sich in s treffen; aus dieser Erzeugung folgt, dass auch $(a\beta, \alpha b) = \sigma''$ ein Punkt dieses Kegelschnitts ist. Ebenso trifft der Kegelschnitt B die Gerade \mathfrak{B} in den Punkten b und β , und $(b\alpha, \beta a) = \sigma'$ ist ein Punkt auf ihm, und da die Kegelschnitte A und B bereits die drei Punkte

s, g'', h'' gemein haben, so ist σ'' ihr vierter gemeinschaftlicher Punkt. In gleicher Weise folgt, dass $(b\gamma, c\beta) = \sigma$ der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte B und C , und endlich, dass $(c\alpha, a\gamma) = \sigma'$ der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte A und C ist. Die Strahlen $sabc, s\alpha\beta\gamma$, welche nach conjugirten Punkten der drei Involutionen gehen, sind zu den Strahlen harmonisch, welche nach den Doppelpunkten $g, h; g', h'; g'', h''$ gehen; da diese die Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, so sind jene Strahlen die Doppelstrahlen der Involution der Tangentenpaare aus s an die Kegelschnitte der Schaar, welche diesem Vierseit eingeschrieben ist. Wir haben also folgendes Ergebniss:

Hat man drei conjugirte Kegelschnittbüschel, so geht durch einen beliebigen Punkt s in der Ebene aus jedem Büschel ein Kegelschnitt; diese drei Kegelschnitte A, B, C haben zu je zweien noch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt, und zwar B und C den Punkt σ , C und A den Punkt σ' , A und B den Punkt σ'' . Die drei Punkte $\sigma, \sigma', \sigma''$ liegen in einer Gerade \mathcal{Q} , und die drei Strahlen $s\sigma, s\sigma', s\sigma''$ sind die Tangenten der Kegelschnitte A, B, C im Punkte s ; die Punkte $\sigma, \sigma', \sigma''$ sind ferner die conjugirten Punkte von s in Bezug auf die drei conjugirten Büschel. Die drei Kegelschnitte A, B, C treffen endlich bezw. die Träger $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ der drei Involutionen in drei Paaren conjugirter Punkte $a\alpha, b\beta, c\gamma$, und von diesen sechs Punkten liegen zweimal je drei, nämlich a, b, c und α, β, γ , in einer Gerade; diese beiden Geraden gehen durch s .

Die sechs Grundpunkte der drei conjugirten Kegelschnittbüschel bilden ein vollständiges Vierseit, und es giebt eine Kegelschnittschaar, welche dem letzteren eingeschrieben ist; die beiden Geraden abc und $\alpha\beta\gamma$ durch s sind die Doppelstrahlen der Involution der Tangentenpaare aus s an die Kegelschnittschaar und daher die Tangenten der durch s gehenden Kegelschnitte dieser Schaar. Der Polarkegelschnitt von s in Bezug auf diese Kegelschnittschaar berührt die Geraden abc und $\alpha\beta\gamma$ und ist ausserdem dem Diagonaldreieck pqr des vollständigen Vierseits eingeschrieben; die Punkte $\sigma, \sigma', \sigma''$ sind die Pole der drei Strahlen sp, sq, sr in Bezug auf den genannten Polarkegelschnitt, und die Gerade \mathcal{Q} ist also die Polare von s in Bezug auf ihn. Denn z. B. $a\alpha\beta\beta$ ist ein diesem Polarkegelschnitt umgeschriebenes Vierseit, da nicht bloss ab und $\alpha\beta$, wie eben gesagt, ihn berühren, sondern auch $a\alpha = \mathfrak{A}$ und $b\beta = \mathfrak{B}$ als Polaren von s in Bezug auf zwei Punktepaare der Schaar; also ist $\sigma''sr$, sein Diagonaldreieck, ein Polardreieck des Kegelschnitts.

248 Wir müssen jetzt dieselben Resultate auch für den andern möglichen Fall nachweisen, wenn nämlich die beiden durch den angenommenen Punkt s gehenden Strahlen, welche die Träger der drei Involutionen $(x, \xi), (y, \eta), (z, \zeta)$ gleichzeitig in drei Paaren conjugirter

Punkte treffen, *nicht* reell sind. Hierzu construiren wir den dem s conjugirten Punkt in Bezug auf das Büschel $[\mathfrak{A}]$, dessen Grundpunkte g', h', g'', h'' sind und dessen gemeinschaftliches Polardreieck ghp ist; wenn wir also sg, sh, sp ziehen und die vierten harmonischen Strahlen zu ihnen je in Bezug auf die in g, h, p sich schneidenden Gegenseiten des Vierecks $g'h'g''h''$ bestimmen, so sind diese drei Strahlen die Polaren von s in Bezug auf die drei Geradenpaare des Büschels $[\mathfrak{A}]$ und schneiden sich in dem zu s conjugirten Punkte σ ; also sind die vier Strahlen $g (g', h'; s, \sigma)$ vier harmonische Strahlen, ebenso auch $h (g', h'; s, \sigma)$ und in gleicher Weise $g (g'', h''; s, \sigma)$ und $h (g'', h''; s, \sigma)$. Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse $g (g', h', s, \sigma)$ und $h (g', h', s, \sigma)$ folgt aber, dass die sechs Punkte g, h, g', h', s, σ auf einem Kegelschnitt liegen, und dasselbe gilt für die sechs Punkte $g, h, g'', h'', s, \sigma$. Diese beiden Kegelschnitte B und C , welche den Büscheln $[\mathfrak{B}]$ und $[\mathfrak{C}]$ angehören und durch s gehen, schneiden sich also in dem vierten Punkte σ , welcher der conjugirte ist zu s in Bezug auf das Büschel $[\mathfrak{A}]$ und also in der Tangente des durch die fünf Punkte g', h', g'', h'', s gelegten Kegelschnitts A in dem Punkte s sich befindet. Die analoge Eigenschaft ergibt sich für A und B , A und C , und somit bestätigt sich der erste Theil des obigen Satzes.

Da die fünf Punkte g', h', g'', h'', s auf einem Kegelschnitte A liegen, von dem $s\sigma$ eine Tangente ist, so sind, wenn wir eine Strahlinvolution durch die beiden Paare $sg', sh'; sg'', sh''$ bestimmen, weil deren Durchbohrungssehnen $g'h'$ und $g''h''$ mit A sich in p treffen, sp und $s\sigma$ ein drittes Paar dieser Involution (Nr. 110). Sie hat, wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierseits, auch sg und sh zu conjugirten Strahlen und ist diejenige Involution, welche von den Tangentenpaaren aus s an die Kegelschnittschaar gebildet wird, die dem vollständigen Vierseit $ghg'h'g''h''$ eingeschrieben ist, oder (Nr. 239) diejenige, welche dem Polarkegelschnitt des Punktes s in Bezug auf diese Kegelschnittschaar zugehört; folglich sind sp und $s\sigma$ conjugirte Strahlen für den genannten Polarkegelschnitt. Andererseits berührt dieser Polarkegelschnitt die Seiten des Diagonaldreiecks pqr , und $p\sigma$ ist, wie wir gesehen haben, der vierte harmonische Strahl zu ps in Bezug auf pq und pr , zwei Gegenseiten des Vierecks $g'h'g''h''$; also sind ps und $p\sigma$ conjugirt in Bezug auf den Polarkegelschnitt und daher σ der Pol von sp in Bezug auf denselben. In gleicher Weise ergibt sich, dass der Pol von qs der Punkt σ' und der von rs der Punkt σ'' ist, und da die drei Strahlen ps, qs, rs durch einen Punkt s gehen, so müssen die drei Pole $\sigma, \sigma', \sigma''$ in einer Gerade \mathfrak{L} liegen, welche die Polare von s ist.

Hierdurch ist der zweite Theil des obigen Satzes erwiesen und damit zugleich folgender Satz gewonnen:

Wenn man die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits $gh, g'h', g''h''$ mit einem beliebigen Punkte s verbindet und zu jedem dieser Strahlen den vierten harmonischen Strahl in Bezug auf die beiden in der Ecke sich schneidenden Seiten des Vierseits construirt, so liegen die drei Punkte, in denen sich die zu Gegenecken gehörigen vierten harmonischen Strahlen begegnen, in einer Gerade.

Ein besonderer Fall des dualen Satzes ist bekannt, nämlich: *Die Verbindungslinien der Mitten der drei Gegenseitenpaare eines vollständigen Vierecks laufen durch einen Punkt (Schwerpunkt).*

249 Die drei conjugirten Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{C}]$ haben weitere bemerkenswerthe Eigenschaften. Legt man aus irgend einem Punkte a der Gerade \mathfrak{A} das Tangentenpaar an einen Kegelschnitt B des Büschels $[\mathfrak{B}]$, dessen Grundpunkte g, h, g'', h'' sind, mit den Berührungspunkten t, t' , so geht die Polare tt' von a in Bezug auf B durch den conjugirten Punkt α der Involution (x, ξ) , weil α der vierte harmonische Punkt zu $a; g, h$ ist. Die vier Punkte $g, h; t, t'$ auf dem Kegelschnitt B besitzen aber die Eigenschaft, dass sie mit irgend einem andern Punkte desselben verbunden vier harmonische Strahlen liefern (Nr. 86); folglich sind ebensowohl $g''(g, h; t, t')$, als auch $h''(h, g; t, t')$ vier harmonische Strahlen und aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse ergibt sich, dass die vier Punkte $g', h'; t, t'$, von denen g', h' die Schnitte $(g''g, h''h)$ und $(g''h, h''g)$ sind, mit g'', h'' auf einem Kegelschnitt A liegen und vier harmonische Punkte auf ihm sind (Nr. 86), folglich tt' durch den Pol von $g'h'$ gehen muss; der Pol von $g'h'$ in Bezug auf den Kegelschnitt A muss aber auf gh liegen, weil pgh ein Polardreieck für diesen Kegelschnitt ist; also ist der Punkt $(tt', gh) = \alpha$ dieser Pol, und $\alpha g'$ und $\alpha h'$ sind Tangenten des Kegelschnitts A in den Punkten g', h' . Da ferner pgh das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $g'h'g''h''$ ist und die Tangenten des dem letzteren umgeschriebenen Kegelschnitts A in g', h' sich auf der Diagonale gh im Punkte α treffen, so müssen auch seine Tangenten in g'', h'' sich auf der Diagonale gh schneiden in dem zu $g, h; \alpha$ harmonischen Punkte, also in a . Der Kegelschnitt A hat daher ag'' und ah'' zu Tangenten in den Punkten g'' und h'' . Fassen wir das Gefundene zusammen, so ergibt sich: Legt man aus irgend einem Punkte a der Gerade \mathfrak{A} das Tangentenpaar an einen Kegelschnitt B des Büschels $[\mathfrak{B}]$, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte A , welcher durch die vier Punkte g', h', g'', h'' geht und ag'' , ah'' zu Tangenten hat; verändern wir daher den Kegelschnitt B in $[\mathfrak{B}]$,

halten aber den Punkt a fest, so verändern sich die Berührungspunkte t, t' , während der Kegelschnitt A , auf welchem sie liegen müssen, derselbe bleibt; also:

Legt man aus irgend einem Punkte a der Gerade \mathfrak{A} an sämtliche Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{B}]$ die Tangentenpaare, so ist der Ort ihrer Berührungspunkte ein bestimmter Kegelschnitt A des Büschels $[\mathfrak{A}]$, welcher ag'', ah'' zu Tangenten hat, also \mathfrak{C} zur Polare von a hat. Weil dieser Kegelschnitt A aber auch $\alpha g'$ und $\alpha h'$ zu Tangenten hat, so folgt:

Legt man aus irgend einem Punkte α der Gerade \mathfrak{A} an sämtliche Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{C}]$ die Tangentenpaare, so ist der Ort ihrer Berührungspunkte ein bestimmter Kegelschnitt A des Büschels $[\mathfrak{A}]$, welcher $\alpha g', \alpha h'$ zu Tangenten hat; und zwar entsteht, wenn a und α harmonisch liegen zu g, h , für den Punkt a und das Büschel $[\mathfrak{B}]$ derselbe Kegelschnitt A , wie für den Punkt α und das Büschel $[\mathfrak{C}]$, ebenso auch für den Punkt a und das Büschel $[\mathfrak{C}]$ derselbe Kegelschnitt A , wie für den Punkt α und das Büschel $[\mathfrak{B}]$. Die Kegelschnitte A und A sind verschieden; sie gehören beide dem Büschel $[\mathfrak{A}]$ an, der erstere hat ag'', ah'' zu Tangenten, der andere $\alpha g', \alpha h'$ und zugleich der erstere $\alpha g', \alpha h'$, der andere ag'', ah'' .

Wir sehen hieraus, wie das Büschel $[\mathfrak{A}]$ aus dem conjugirten Büschel $[\mathfrak{B}]$ oder $[\mathfrak{C}]$ hervorgeht; in gleicher Weise entsteht das Büschel $[\mathfrak{B}]$ aus den Büscheln $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{C}]$ und endlich das Büschel $[\mathfrak{C}]$ aus den Büscheln $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{B}]$. Geht man andererseits von einem beliebigen Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten aus, so kann man die beiden ändern zu ihm conjugirten Büschel dadurch ableiten, dass man ein Geradenpaar des ersten Kegelschnittbüschels und in der einen Gerade desselben einen Punkt a annimmt und aus a die Tangentenpaare an sämtliche Kegelschnitte des Büschels legt; dann liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, welcher mit der Veränderung von a das eine conjugirte Büschel erzeugt; in gleicher Weise liefert die andere Gerade das dritte conjugirte Büschel. Kommen in dem gegebenen Büschel drei reelle Geradenpaare vor, so giebt es dreimal solche drei conjugirten Büschel, im Ganzen also sieben Kegelschnittbüschel, da das ursprüngliche dreimal zählt.

Die beiden oben betrachteten Kegelschnitte A und A stehen mit ²⁵⁰ den beiden Punkten a und α , welchen sie entsprechen, in einem eigenthümlichen Zusammenhange. Da der Ort der Berührungspunkte aller an die Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{B}]$ aus dem Punkte a gelegten Tangentenpaare der Kegelschnitt A ist, so wird es, wenn irgend eine durch a gelegte Transversale den Kegelschnitt A in den Punkten t

und τ trifft, zwei Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{B}]$ geben, welche die Transversale in den Punkten t und τ berühren, und es sind daher t und τ die Doppelpunkte der Involution, welche von den Kegelschnitten des Büschels $[\mathfrak{B}]$ auf der Transversale ausgeschnitten wird. Betrachten wir nun den Kegelschnitt A , der durch g', h', g'', h'' geht, und dessen Tangenten ag', ah' sind; möge jene Transversale ihn in r und ρ treffen, so sind g', h', r, ρ vier harmonische Punkte dieses Kegelschnitts (Nr. 86), also die Doppelverhältnisse $g''(g', h', r, \rho)$ und $h''(h', g', r, \rho)$ einander gleich. Also schliessen wir, wie oben, dass die sechs Punkte g, h, r, ρ, g'', h'' auf einem Kegelschnitte liegen, welcher natürlich dem Büschel $[\mathfrak{B}]$ angehört; es sind daher r, ρ conjugirt in jener Involution auf der Transversale, welche t und τ zu Doppelpunkten hat; r, ρ liegen folglich zu t, τ harmonisch, und zugeordnet sind von diesen vier Punkten je die auf demselben von den Kegelschnitten A und A gelegenen Punkte. Jede durch den Punkt a gezogene Transversale trifft demnach die beiden Kegelschnitte A und A in vier harmonisch gelegenen Punkten, von denen je die beiden Schnittpunkte mit demselben Kegelschnitt zugeordnete sind; dasselbe gilt für den Punkt α . Wir haben daher den Satz:

Legt man aus irgend einem Punkte a einer gemeinschaftlichen Secante eines Kegelschnittbüschels die Tangentenpaare an dasselbe, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt A ; legt man aus dem conjugirten Punkte α zu a in Bezug auf das Büschel ebenfalls die Tangentenpaare an die Kegelschnitte des Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf einem andern Kegelschnitt A ; die beiden Kegelschnitte A und A haben zu den Punkten a und α die eigenthümliche Lage, dass jede durch a oder α gehende Transversale von den beiden Kegelschnitten in vier harmonischen Punkten getroffen wird, von denen je zwei Schnittpunkte desselben Kegelschnitts zugeordnete sind.

Von drei conjugirten Kegelschnittbüscheln hat, wegen Nr. 186, entweder jedes vier reelle Grundpunkte, oder zwei haben zwei reelle und zwei imaginäre und das dritte lauter imaginäre Grundpunkte. Von dieser letzteren Art wird der gleich zu erwähnende Specialfall sein.

251 Neben die conjugirten Kegelschnittbüschel stellen sich polar die conjugirten Kegelschnittschaaren. Es bleibt noch übrig, den in Nr. 246 erwähnten besonderen Fall von drei conjugirten Kegelschnittbüscheln mit dem hier behandelten allgemeinen Falle in Verbindung zu setzen. Nehmen wir nämlich an, dass von den drei erzeugenden Involutionen (x, ξ) , (y, η) und (z, ζ) eine die ausgezeichnete Involution I_∞ auf G_∞ sei, deren conjugirte Punkte in zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen und deren Doppelpunkte die absoluten Punkte sind; ist (x, ξ)

diese Involution, dagegen (y, η) eine beliebige hyperbolische Involution mit den Doppelpunkten g', h' , so wird der Träger \mathcal{C} der dritten Involution diejenige Gerade sein, welche in dem Mittelpunkte p von (y, η) , der dem unendlich entfernten conjugirt ist, d. h. in der Mitte von $g'h'$ senkrecht steht auf \mathfrak{B} , und die dritte Involution (z, ξ) auf \mathcal{C} , welche elliptisch sein muss (Nr. 186), wird erhalten, indem wir durch y einen beliebigen Strahl yz und durch η den darauf senkrechten $\eta\xi$ ziehen, welche \mathcal{C} in z und ξ treffen; p ist ebenfalls der Mittelpunkt dieser Involution, und z, ξ liegen nach entgegengesetzten Seiten von p so, dass

$$py \cdot p\eta + pz \cdot p\xi = 0$$

ist, d. h. die Potenzen der beiden Involutionen auf \mathfrak{B} und \mathcal{C} gleich, aber entgegengesetzt sind. Wir kennen drei solche Involutionen von der Theorie der Brennpunkte eines Kegelschnitts her (Nr. 138).

Die von solchen drei Involutionen erzeugten conjugirten Kegelschnittbüschel nehmen einen besonders einfachen Charakter an, indem zwei von ihnen *conjugirte Kreisbüschel* werden, und das dritte ein *Büschel gleichseitiger Hyperbeln* wird, welches in den Elementen unerwähnt zu bleiben pflegt. In der That, das Büschel $[\mathcal{C}]$ wird ein gewöhnliches Kreisbüschel, für welches die beiden reellen Punkte g', h' auf \mathfrak{B} Grundpunkte sind, weil die absoluten Punkte auf G_∞ allen Kegelschnitten dieses Büschels gemeinschaftlich sind, letztere also alle Kreise werden; diese Kreise haben ihre Mittelpunkte auf \mathcal{C} und treffen \mathcal{C} in je zwei conjugirten Punkten der Involution (z, ξ) . Das Büschel $[\mathfrak{B}]$ wird ebenfalls ein Kreisbüschel mit der ideellen gemeinschaftlichen Secante \mathcal{C} ; es hat nämlich seine Mittelpunkte auf \mathfrak{B} , und jeder Kreis desselben trifft \mathfrak{B} in je zwei conjugirten Punkten y, η der gegebenen Involution; die Kreise dieses Büschels haben also die Strecken zwischen je zwei conjugirten Punkten $y\eta$ zu Durchmessern. Die Doppelpunkte g', h' repräsentiren insbesondere die Nullkreise dieses Büschels. Die beiden genannten Kreisbüschel heissen bekanntlich conjugirte Kreisbüschel und jeder Kreis des einen schneidet jeden des andern rechtwinklig.

Diese Rechtwinkligkeit ergibt sich aus den Eigenschaften der allgemeinen Figur folgendermassen. Die Berührungspunkte der Tangenten aus einem Punkte b von \mathfrak{B} an die Kreise des Büschels $[\mathcal{C}]$ liegen auf einem Kreise des Büschels $[\mathfrak{B}]$ und zwar dem, welcher b zum Mittelpunkte hat; denn die dritte Gerade $\mathfrak{A} = G_\infty$ ist Polare von b . Also schneidet dieser Kreis alle Kreise von $[\mathcal{C}]$ rechtwinklig, und so jeder Kreis von $[\mathfrak{B}]$. Ebenso kann man von einem Punkte von \mathcal{C} ausgehen.

Sind nun b und β in der Involution (y, η) auf \mathfrak{B} conjugirt, also Schnitte eines Kreises des Büschels $[\mathfrak{B}]$, so sind die beiden Kreise von $[\mathfrak{B}]$, deren Mittelpunkte sie sind, so beschaffen, dass jede Transversale durch den einen oder andern Mittelpunkt beide harmonisch schneidet, mithin zu einander orthogonal (Nr. 13). Für die analog beschaffenen Kreise des Büschels $[\mathfrak{C}]$ kann man, wegen der reellen Grundpunkte auf \mathfrak{B} , diese Orthogonalität unmittelbar erkennen.

Unsere allgemeine Figur lehrt aber auch, dass die beiden Kreise aus $[\mathfrak{B}]$ und $[\mathfrak{C}]$, welche durch einen Punkt s gehen, sich in ihm rechtwinklig schneiden. Denn die Strahlen $abc, \alpha\beta\gamma$ durch s sind im vorliegenden Falle, wo zwei von den Involutionen elliptisch sind und die eine die I_x , reell und rechtwinklig; folglich sind $sb\sigma''\beta$ und $sy\sigma'c$ Rechtecke und ähnlich; daraus ergibt sich, dass die Diagonalen $s\sigma''$, $s\sigma'$, das sind die Tangenten der beiden Kreise im Punkte s , zu einander senkrecht sind.

Das dritte Büschel $[\mathfrak{A}]$ endlich hat die reellen Punkte g', h' auf \mathfrak{B} zu Grundpunkten und die Involution (z, ξ) auf \mathfrak{C} zur gemeinsam zugehörigen; es besteht aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, da es den früher (Nr. 229) aufgestellten Bedingungen dafür genügt, dass ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln sei. Ueberdies schneidet es ja die $\mathfrak{A} = G_x$ in der Involution I_x : die unendlich fernen Punkte einer jeden seiner Curven liegen in zwei zu einander senkrechten Richtungen. Der Punkt p ist der Pol von \mathfrak{A} in Bezug auf alle diese Hyperbeln, also gemeinsamer Mittelpunkt; der Mittelpunktskreis reducirt sich daher auf diesen Punkt, und je zwei durch ihn gehende rechtwinklige Strahlen sind die Asymptoten einer Hyperbel des Büschels; da sie ausserdem durch die reellen Punkte g', h' geht, so ist sie leicht zu construiren. (Vgl. § 61.)

§ 52. Besondere Fälle von Kegelschnitt-Büscheln und -Schaaren: Kegelschnitte, die sich doppelt berühren, confocale Kegelschnitte.

252 Die Kegelschnitt-Büschel und -Schaaren bieten eine Anzahl von besonderen Fällen dar. Wir haben bereits als besondere Fälle die einem Dreieit eingeschriebene Parabelschaar, das Büschel gleichseitiger Hyperbeln und das Kreisbüschel gefunden. In diesem Paragraphen sollen noch einige besondere Fälle anderer Art untersucht werden.

Wenn von den beiden erzeugenden Involutionen (x, ξ) und (y, η) auf den Trägern \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , welche sämtlichen Kegelschnitten des Büschels gleichzeitig zugehören, eine, die auf \mathfrak{A} , parabolisch ist, d. h. ihre beiden Doppelpunkte g, h in g zusammenfallen, so hat dieser Punkt

zu seinem conjugirten jeden beliebigen andern von \mathfrak{A} (Nr. 38); die Gerade \mathfrak{C} , welche die conjugirten Punkte des Schnittpunktes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in beiden Involutionen verbindet, geht also durch g , und die dritte Involution (z, ξ) auf \mathfrak{C} wird auch parabolisch und hat ebenfalls in g zusammenfallende Doppelpunkte. *Alle Kegelschnitte des Büschels berühren daher die Gerade \mathfrak{A} in dem Punkte g und gehen ausserdem durch die reellen oder imaginären Doppelpunkte der andern gegebenen Involution (y, η) auf \mathfrak{B} .* Das gemeinschaftliche Polardreieck des Büschels reducirt sich in diesem Falle auf den Schnittpunkt r der Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und den doppelt zu zählenden Punkt g , in welchem die beiden Doppelpunkte der Involution z, ξ sich vereinigt haben, die beiden andern Ecken des Polardreiecks. Von den drei unter den Kegelschnitten des Büschels vorkommenden Geradenpaaren ist das eine $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$; die beiden andern fallen in dasjenige zusammen, dessen Geraden von g nach g', h' gehen. Der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels geht durch den Schnittpunkt r von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , durch den Mittelpunkt m_b der Involution auf \mathfrak{B} , durch den Punkt g , in welchem er die Gerade \mathfrak{C} zur Tangente hat. Falls die Involution auf \mathfrak{B} hyperbolisch ist und die Doppelpunkte g', h' hat, geht er auch durch die Mitten der beiden Strecken gg' und gh' . Wenn sie dagegen elliptisch ist, so ist er durch die vorigen Bedingungen noch nicht vollständig bestimmt; wir wissen aber, dass die Mitte von gm_b der Mittelpunkt des gesuchten Kegelschnitts sein muss, denn g ist m_a (Nr. 227); es wird also die Tangente in m_b parallel laufen mit \mathfrak{C} , und hierdurch ist der Mittelpunktskegelschnitt unzweideutig bestimmt. Zugleich erkennen wir, dass er Hyperbel sein muss, das Büschel also aus einer Reihe von Ellipsen und einer von Hyperbeln besteht, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; denn die ideelle gemeinsame Secante \mathfrak{B} trennt die beiden (vereinigten) reellen Grundpunkte nicht (Nr. 228). Im ersteren Falle hingegen ist der Mittelpunktskegelschnitt Hyperbel oder Ellipse, je nachdem die Verbindungslinie \mathfrak{A} der vereinigten Grundpunkte in das Dreieck $gg'h'$ nicht eintritt oder eintritt.

Aehnlich verhält es sich mit einer Kegelschnittschaar, bei welcher ²⁵³ eine der beiden erzeugenden Strahlinvolutionen parabolisch ist, und deren Kegelschnitte eine und dieselbe Gerade in einem festen Punkte berühren, während sie ausserdem zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten haben. Wir unterlassen hier die nähere Ausführung, weil sowohl jenes specielle Büschel, als auch diese besondere Schaar von geringerem Interesse ist, als die noch specielleren, zu denen wir gelangen, wenn wir beide erzeugenden Punktinvolutionen oder beide erzeugenden Strahlinvolutionen parabolisch annehmen; dann tritt in

beiden Fällen dasselbe Gebilde auf, welches *gleichzeitig als Kegelschnitt-Büschel und -Schaar* angesehen werden muss und daher auch die Eigenschaften beider Gebilde mit einigen Modificationen in sich vereinigt. Sind nämlich zwei parabolische Punktinvolutionen auf den Trägern \mathfrak{A} und \mathfrak{B} gegeben und die Doppelpunkte der ersten in g , die der zweiten in g' vereinigt, so *besteht das Kegelschnittbüschel aus sämtlichen Kegelschnitten, welche in g und g' dieselben Tangenten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} haben, also sich selbst in diesen beiden Punkten (doppelt) berühren*. Wir können gleichzeitig die Punkte g und g' als Grundpunkte zweier parabolischen Strahlinvolutionen auffassen, deren Doppelstrahlen beziehlich in die Strahlen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sich vereinigt haben; die Kegelschnitte der durch diese beiden Involutionen erzeugten Schaar berühren sämtlich \mathfrak{A} und \mathfrak{B} beziehlich in den Punkten g und g' und werden daher mit den Kegelschnitten jenes Büschels identisch.

Von den drei Geradenpaaren des Büschels *sich doppelt berührender Kegelschnitte* besteht eins aus den beiden gemeinsamen Tangenten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , während die beiden andern sich in eins vereinigt haben und in diesem wiederum die beiden Geraden in die Berührungssehne gg' zusammengefallen sind; in ihr haben sich zwei Paare Gegenseiten des Vierecks der Grundpunkte vereinigt (Nr. 172). Von den drei Punktepaaren der Schaar besteht eins aus den beiden Berührungspunkten g, g' , während die vier Punkte der übrigen in den Schnittpunkt $r = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der gemeinsamen Tangenten zusammenfallen, der also ein (doppeltes) Punktepaar mit zwei vereinigten Punkten darstellt. Dieser Punkt möge der *Berührungspol* heissen.

Jede Gerade \mathfrak{Q} schneidet eine „Büschel-Schaar“ sich doppelt berührender Kegelschnitte in einer Involution, und ebenso bilden die Tangentenpaare aus jedem Punkte P an diese Kegelschnitte eine Involution. Beide Involutionen sind stets hyperbolisch (Nr. 172); der eine Doppelpunkt der ersteren ist immer der Schnittpunkt mit der Berührungssehne gg' , die Schnitte mit den Tangenten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} bilden ein Paar, und der vierte harmonische Punkt in Bezug auf dieses Paar zu jenem Punkte, der andere Doppelpunkt, ist der *Berührungspunkt der Transversale mit dem einzigen Kegelschnitte der Büschel-Schaar, der sie berührt*. Für die andere Involution ist der eine Doppelstrahl der von P nach dem Berührungspole r gehende, ein Strahlenpaar geht nach g, g' , und der zweite Doppelstrahl, der vierte harmonische zu Pr in Bezug auf $P(g, g')$, ist die *Tangente des einzigen durch P gehenden Kegelschnitts der Büschel-Schaar*. Man sieht, wie in dieser Weise die Eigenschaft des allgemeinen Büschels, dass zwei von seinen Kegelschnitten eine Gerade berühren, mit der der Schaar, dass nur einer von ihren Kegel-

schnitten es thut, sich vereinigt, und ebenso die Eigenschaft der Schaar, dass zwei ihrer Kegelschnitte durch einen Punkt gehen, mit der des Büschels, bei welchem es nur einer thut.

Die Mittelpunkte der Kegelschnitte liegen, weil diese eine Schaar bilden, auf einer Gerade, offenbar der Verbindungslinie des Punktes r , der Mitte zweier auf die Länge 0 reducirter Diagonalen, und der Mitte von gg' ; der andere Bestandtheil des Mittelpunktskegelschnitts des Büschels, neben dieser Gerade, ist die Gerade gg' ; denn für dieses Geradenpaar kann jeder Punkt der Gerade, in der sich seine Geraden vereinigt haben, als Mittelpunkt (überhaupt als Pol einer jeden Gerade) angesehen werden, da die Gerade ja auch Polare eines jeden Punktes ist.

Die Kegelschnitte dieser Büschel-Schaar zerfallen in eine Reihe von Ellipsen und eine Reihe von Hyperbeln, welche von einander getrennt werden einmal durch das Punktepaar gg' und das andere Mal durch die einzig vorkommende Parabel, deren Mittelpunkt der unendlich entfernte Punkt der vorhin construirten Mittelpunktsgerade ist. Ihre sämtlichen Kegelschnitte haben den Berührungspol und die Berührungsehne zu Pol und Polare, die Involution, welche dem ersteren, und diejenige, welche der letzteren zugehört, sind für alle dieselben, und beide Involutionen liegen perspectiv. Hiernach lässt sich diese Büschel-Schaar auch in anderer Weise erzeugen: 254

Wenn eine Punktinvolution auf dem Träger \mathcal{L} und eine mit ihr perspective Strahlinvolution, deren Grundpunkt o ist, gegeben sind, so bilden sämtliche Kegelschnitte, in Bezug auf welche diese beiden Gebilde die dem Punkte o und der Gerade \mathcal{L} zugehörigen Involutionen sind, eine Büschel-Schaar von Kegelschnitten, die sich doppelt berühren.

Sind beide Involutionen hyperbolisch, so berühren sich alle Kegelschnitte in den beiden Doppelpunkten der ersten Involution und haben in ihnen die Doppelstrahlen der zweiten zu gemeinschaftlichen Tangenten; sind dagegen beide elliptisch, so ist die Büschel-Schaar nichtsdestoweniger vollständig bestimmt und kann reell construiert werden; in diesem Falle sagen wir der Analogie wegen: Die Kegelschnitte haben eine *imaginäre doppelte Berührung*. Die oben angegebenen Eigenschaften behalten ihre Gültigkeit; denn, da für alle Kegelschnitte der Büschel-Schaar o und \mathcal{L} Pol und Polare sind, so ist, wenn s der Schnitt einer beliebigen Transversale mit \mathcal{L} und σ der ihm conjugirte in der Punktinvolution ist, $o\sigma$ die Polare von s für sämtliche Kegelschnitte der Schaar; wenn also die Transversale in t die Polare $o\sigma$ trifft, so liegen s und t harmonisch zu sämtlichen Punktepaaren, in welchen die Transversale von den Kegelschnitten der Büschel-Schaar getroffen wird. Und wenn wir andererseits durch einen beliebigen Punkt den Strahl nach o

ziehen, so ist der Schnittpunkt des ihm in der Strahlinvolution conjugirten Strahles mit \mathcal{Q} sein gemeinsamer Pol; daher sind jener Strahl und der vom beliebigen Punkte nach diesem Pole gezogene harmonisch zu allen Tangentenpaaren aus dem angenommenen Punkte an die Kegelschnitte der Büschel-Schaar. Jene Punktepaare auf der Transversale bilden also ebenso eine Involution, wie diese Tangentenpaare aus dem Punkte.

Die reelle Construction dieser einander doppelt berührenden Kegelschnitte für den Fall, dass die beiden Berührungspunkte und also auch die gemeinschaftlichen Tangenten imaginär sind, ergibt sich folgendermassen:

Jeder Strahl durch den Berührungspol o schneidet die Büschel-Schaar in einer hyperbolischen Involution, von welcher o und der Schnitt mit der Berührungsehne die Doppelpunkte sind. Für jeden von den Kegelschnitten der Büschel-Schaar ist das Schnittpunktepaar p, π aus dieser Involution auch ein Punktepaar der krummen Involution, welche o zum Centrum und \mathcal{Q} zur Axe hat. Projiciren wir es aus irgend einem Punkte des Kegelschnitts auf die Gerade \mathcal{Q} , so ergibt sich ein Punktepaar der gegebenen Involution auf dieser Gerade, als der ihr in Bezug auf alle Kegelschnitte der Büschel-Schaar zugehörigen. Durchläuft jener Punkt den Kegelschnitt, so durchläuft dieses Punktepaar die ganze Involution auf \mathcal{Q} , und die beiden Strahlen durch p, π beschreiben projective Büschel, deren Erzeugniss der Kegelschnitt ist. Man erhält also einen Kegelschnitt der Büschel-Schaar, wenn man auf einer Transversale durch den Berührungspol o zwei zu diesem und dem Schnitte mit der Berührungsehne harmonisch gelegene Punkte p, π als Grundpunkte projectiver Strahlbüschel nimmt, deren entsprechende Strahlen nach conjugirten Punkten x, ξ der gegebenen Involution auf \mathcal{Q} gehen. Die Punkte $(px, \pi\xi)$ und $(p\xi, \pi x)$ erzeugen den Kegelschnitt. Und da sie Projectionen des Punktepaars x, ξ aus p (oder π) auf den Kegelschnitt sind, so bilden sie selbst ein Punktepaar der krummen Involution auf ihm, d. h. liegen mit o in gerader Linie.

Jedes Punktepaar p, π der hyperbolischen Involution auf dem Strahle durch o führt so zu einem Kegelschnitte der Büschel-Schaar, und *es reichen in dem Falle, der uns jetzt beschäftigt, wo die doppelte Berührung imaginär ist, die reellen Punktepaare dieser Involution hin, um zu allen reellen Kegelschnitten der Büschel-Schaar zu gelangen*; die imaginären Punktepaare sind sämmtlich Schnitte imaginärer Kegelschnitte. Denn o liegt innerhalb aller reellen Kegelschnitte der Büschel-Schaar, da seine Polare \mathcal{Q} imaginär schneidet. Im andern Falle, wo die doppelte Berührung reell ist, werden wir aus einem einzigen Strahle durch o nicht alle reellen Kegelschnitte der Büschel-Schaar erhalten;

aber da ist unsere Construction weniger wichtig, weil dann ja einfacher die reellen Berührungspunkte als Grundpunkte der erzeugenden Büschel genommen werden können. Selbstverständlich können wir die besprochene Erzeugung auch dualisiren.

Wenn die beiden Berührungen reell sind, so liegen die einen Curven in dem einen Scheitelwinkelpaar der gemeinsamen Tangenten, die andern im andern; dasjenige von diesen Winkelpaaren, in welchem nicht die endliche Strecke zwischen den Berührungspunkten sich befindet, enthält nur Hyperbeln, denn diese allein haben ausserhalb gelegene Sehnen. Die andere Reihe enthält Ellipsen und Hyperbeln und eine Parabel als Uebergang von jenen zu diesen. Zu den Hyperbeln der ersten Reihe findet von den Ellipsen der zweiten der Uebergang statt durch das Punktepaar der Berührungspunkte, bezw. die doppelte Verbindungslinie desselben, von den Hyperbeln aber durch das Geradenpaar der gemeinsamen Tangenten. Die Hyperbeln der ersten Reihe haben die beiden Berührungspunkte auf verschiedenen Aesten, die der zweiten auf demselben Aste.

Im Falle der imaginären doppelten Berührung enthält die Büschel-Schaar auch imaginäre Curven, zu denen von den Ellipsen durch die Nullcurve o (imaginäres Geradenpaar mit reellem Doppelpunkt), von den Hyperbeln durch die Doppelgerade (imaginäres Punktepaar) der Uebergang stattfindet.

Aus der Gemeinsamkeit der beiden perspectiven Involutionen ergibt sich sofort, dass *alle Kegelschnitte der Büschel-Schaar nicht bloss ein einziges, sondern unendlich viele Polardreiecke gemeinsam haben, welchen allen der Berührungspol und die Berührungssehne gemeinschaftlich sind*, während die Paare der veränderlichen Ecken und Seiten jene Involutionen durchlaufen. 255

Wenn der Berührungspol im Unendlichen liegt, so ist die Berührungssehne Durchmesser aller Kegelschnitte der Büschel-Schaar; diese sind concentrisch, da sie alle den Mittelpunkt der Involution auf \mathcal{Q} zum Mittelpunkte m haben, und sämmtlich Hyperbeln, falls diese elliptisch ist. \mathcal{Q} und mo sind für alle Kegelschnitte conjugirt; die Asymptoten bilden also eine Involution mit diesen Strahlen als Doppelstrahlen.

Ist aber die Berührungssehne unendlich fern, so ist der Berührungspol gemeinsamer Mittelpunkt und die gegebene Involution um ihn gemeinsame Durchmesser-Involution.

Die Kegelschnitte der Büschel-Schaar sind dann ähnlich (ev. im weiteren Sinne) *und ähnlich gelegen und concentrisch*, mit gemeinsamen (reellen oder imaginären) Asymptoten, alle Ellipsen oder alle Hyperbeln, je nach der Art der gegebenen Involutionen. Ein Specialfall hiervon ist

die Büschel-Schaar concentrischer Kreise, wo die Strahlinvolution eine rechtwinklige und die Punktinvolution die I_∞ ist.*

256 Aus dem Vorstehenden geht u. a. die Lösung der Aufgabe hervor: *Durch drei gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, welcher einen gegebenen Kegelschnitt $K^{(2)}$ doppelt berührt.***

Es giebt vier Kegelschnitte, welche diesen Bedingungen genügen; doch zeigt es sich, dass dieselben nur dann reell sind, wenn entweder alle drei gegebenen Punkte p, q, r innerhalb oder alle drei ausserhalb des gegebenen Kegelschnitts liegen. Die drei Verbindungslinien pq, qr, rp treffen nämlich den Kegelschnitt $K^{(2)}$ je in zwei andern Punkten, welche als ein zweites Paar conjugirter Punkte einer Involution aufgefasst werden können. Liegen nun p, q, r innerhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$, so werden auf pq, qr, rp drei hyperbolische Involutionen bestimmt; diese befinden sich genau in derselben Lage, wie die drei zusammengehörigen Involutionen $(x, \xi), (y, \eta), (z, \zeta)$ auf den Trägern $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ in Nr. 183 flg., weil in jeder die Schnittpunkte mit den beiden andern Geraden conjugirt sind und einmal drei Paare conjugirter Punkte auf einem Kegelschnitte liegen; denn dadurch ist die dritte Involution aus den beiden andern bestimmt. Die drei Paare Doppelpunkte $gh, g'h', g''h''$ liegen daher zu je dreien auf vier geraden Linien:

$$gg'g'', gh'h'', hg'h'', hh'g''.$$

Jede dieser vier Geraden trifft nun den Kegelschnitt $K^{(2)}$ in zwei solchen Punkten, in welchen ihn ein durch p, q, r und diese Punkte selbst gelegter Kegelschnitt doppelt berührt (reell oder imaginär); denn ein Kegelschnitt, welcher durch p gelegt wird und $K^{(2)}$ in den beiden Schnittpunkten einer dieser vier Geraden doppelt berührt, muss durch q und r gehen, weil die Büschel-Schaar der in jenen Punkten den $K^{(2)}$ berührenden Kegelschnitte, zu welcher auch $K^{(2)}$ gehört, in pq, qr die obigen Involutionen einschneidet. Also hat die vorgelegte Aufgabe vier reelle Lösungen, sobald die drei Involutionen auf pq, qr, rp hyperbolisch sind; dies ist aber der Fall, wenn entweder die drei Punkte p, q, r innerhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$ liegen, oder alle drei ausserhalb.

Es ist nämlich unmittelbar klar, dass die Involution, die auf der Verbindungslinie zweier Punkte durch diese und die Schnitte mit einem Kegelschnitte $K^{(2)}$ bestimmt wird, elliptisch ist, wenn der eine Punkt innen, der andere aussen liegt, und ebenso, dass sie hyperbolisch, wenn beide innen liegen, oder so aussen, dass die Schnittpunkte reell

* Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* Nr. 94.

** Poncelet, a. a. O. Nr. 418 — 422.

sind. Es bleibt uns der Fall, dass sie so aussen liegen, dass die Schnittpunkte imaginär sind; die Doppelpunkte sind dann das gemeinsame Paar der hyperbolischen Involution der zu den verbundenen Punkten harmonischen Punkte und der elliptischen Involution der in Bezug auf $K^{(2)}$ conjugirten Punkte, die ja zu den Schnittpunkten harmonisch sind. Da eine der Involutionen elliptisch ist, so ist dies Paar reell.

Sobald aber von den drei gegebenen Punkten p, q, r einer innerhalb und die beiden andern ausserhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$ liegen, oder umgekehrt, ist nur eine von den drei Involutionen auf pq, qr, rp hyperbolisch, die beiden andern sind elliptisch; von den sechs Ecken des vollständigen Vierseits g, g', g'', h, h', h'' ist also nur ein Paar Gegenecken reell, und die vier Seiten sind imaginär; die Aufgabe lässt also keine reelle Lösung zu.

Es seien $K^{(2)}, K_1^{(2)}$ zwei Kegelschnitte aus der Büschel-Schaar; ²⁵⁷ eine Transversale treffe den ersteren in den Punkten t und t_1 , die Berührungssehne \mathcal{Q} in s ; schneiden sich die Tangenten in t und t_1 an dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ in dem Punkte r , so ist ro die Polare von s für beide Kegelschnitte; die vier Strahlen $rt, rt_1; ro, rs$ sind harmonisch.

Trifft nun die Tangente in t den andern Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in x, ξ , die in t_1 aber in x_1, ξ_1 , so trifft die Verbindungslinie xs den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in demjenigen zweiten Punkte, welcher der vierte harmonische, dem x zugeordnete ist in Bezug auf s und den Schnittpunkt (xs, ro) . Dieser vierte harmonische Punkt muss aber auf dem vierten harmonischen Strahl zu $rx; ro, rs$ liegen, und da dies der Strahl rt_1 ist, welcher den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in x_1 und ξ_1 trifft, so muss xs den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in x_1 oder ξ_1 treffen; geht also xs durch x_1 , so muss auch ξs durch ξ_1 gehen, und es schneiden sich $x\xi_1$ und $x_1\xi$ in einem Punkte p der Gerade ro , indem prs ein Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ ist. Wir haben hieraus folgenden Satz:

Hat man zwei einander doppelt berührende Kegelschnitte und zieht zwei beliebige Tangenten an den einen, welche den andern in den Punktepaaren $x\xi$ und $x_1\xi_1$ treffen, so liegt von den Schnittpunkten $(xx_1, \xi\xi_1), (x\xi_1, x_1\xi)$ der eine auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne \mathcal{Q} , der andere aber, sowie der Punkt $(x\xi, x_1\xi_1)$ auf der Polare des ersten, welche durch den Berührungspol o geht. Der erste Punkt liegt mit den Berührungspunkten der beiden Tangenten in gerader Linie.

Halten wir jetzt eine der beiden Tangenten, die in t_1 , fest und bewegen die andere am Kegelschnitt $K^{(2)}$ herum, so beschreiben $x_1sx, \xi_1s\xi$ projective Strahlbüschel, die zugleich mit dem von t_1st beschriebenen Strahlbüschel projectiv sind. Wir schliessen daraus folgenden Satz:

Bewegt sich bei zwei einander doppelt berührenden Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ eine veränderliche Tangente an dem einen $K^{(2)}$ herum, so beschreiben die Punkte x und ξ , in denen sie je den andern $K_1^{(2)}$ schneidet, zwei projective krumme Punktreihen auf diesem Kegelschnitt, und der Berührungspunkt der Tangente beschreibt auf dem ersten Kegelschnitt eine zu diesen Punktreihen projective krumme Punktreihe, die Tangente selbst ein projectives Tangentenbüschel.

Es gilt auch die Umkehrung: *Hat man zwei krumme projective Punktreihen auf demselben Kegelschnitt, so umhüllt die Verbindungslinie entsprechender Punkte einen neuen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte (reelle oder imaginäre) Berührung hat und zwar in den Doppelpunkten der Projectivität.**

In der That, den beiden krummen projectiven Punktreihen ist eine Gerade \mathcal{Q} zugeordnet (Nr. 108), auf welcher, wenn $x, \xi; y, \eta$ irgend zwei Paare entsprechender Punkte sind, stets der Schnittpunkt $(x\eta, y\xi) = s$ liegt. Infolge dessen geht seine Polare, die Verbindungslinie von $(x\xi, y\eta) = r$ und $(xy, \xi\eta)$, durch den Pol o von \mathcal{Q} ; or und os sind zwei conjugirte Strahlen der Involution, die dem Punkte o in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, und die Schnitte mit \mathcal{Q} also conjugirte Punkte der perspectiven Involution auf \mathcal{Q} .

Die reellen oder imaginären Schnitte von \mathcal{Q} mit dem Kegelschnitte sind die zusammenfallenden entsprechenden Punkte der beiden projectiven krummen Punktreihen.

In der Büschel-Schaar von Kegelschnitten, welchen dieselbe Involution auf \mathcal{Q} und dieselbe um o zugehört, wie dem gegebenen, oder der Kegelschnitte, welche diesen in seinen Schnitten mit \mathcal{Q} doppelt berühren, giebt es einen, welcher $x\xi$ berührt (Nr. 253). Für ihn sind ro und rs auch conjugirt, und daher ist die zweite Tangente aus r der vierte harmonische, dem $rx\xi$ zugeordnete Strahl, d. h. wegen des Vierecks $x\xi y\eta$ die Gerade ry oder $y\eta$. Verändern wir y, η , so verändern sich zwar r und s , aber der eben bestimmte Kegelschnitt bleibt derselbe; es berühren daher alle Verbindungsstrahlen $y\eta$ entsprechender Punkte der beiden krummen projectiven Punktreihen einen Kegelschnitt, welcher ihren Träger doppelt berührt, was zu beweisen war. Jeder von diesen Strahlen hat zum Berührungspunkte den vierten harmonischen Punkt, der dem Schnittpunkte mit der Berührungssehne \mathcal{Q} zugeordnet ist, wie die Involution beweist, in welcher er die Büschel-Schaar schneidet. Auf jeder der gemeinsamen Tangenten der beiden

* Nur in diesem Paragraphen treten in den früheren Auflagen von Kegelschnitten getragene projective Punktreihen auf.

Kegelschnitte haben sich die Schnitte mit dem gegebenen, entsprechende Punkte der Projectivität, im Berührungspunkte vereinigt.

Auf die zahlreichen Folgerungen wollen wir nicht eingehen.* 258
Wir bemerken nur, dass zwei besondere Fälle dieser allgemeineren Betrachtung in dem Laufe unserer Untersuchungen von besonderer Wichtigkeit geworden sind. Im ersten Falle zerfällt der Kegelschnitt in zwei Geraden, wo dann die beiden Gebilde zwei gerade projective Punktreihen werden und ihr Erzeugniss ein Kegelschnitt ist, welcher mit dem Geradenpaar der Träger eine doppelte Berührung hat. Im zweiten Falle haben die beiden krummen Gebilde auf dem Kegelschnitt die besondere *involutionische Lage*, dass einem Punkte x oder η des Kegelschnitts, als Element des einen und des andern Gebildes aufgefasst, in dem jedesmaligen zweiten ein und derselbe Punkt als ξ oder y entspricht. Wir haben es mit der krummen Involution zu thun, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte laufen in das Centrum zusammen. Dieses Büschel, doppelt gerechnet, weil jeder von seinen Strahlen zweimal Verbindungslinie: $x\xi$ und $y\eta$, ist, ist an Stelle des eingehüllten Kegelschnitts getreten: er ist in ein Punktepaar mit zwei zusammengefallenen Punkten ausgeartet.

In gleicher Weise ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projectiver krummer Tangentenbüschel um den nämlichen Kegelschnitt ein Kegelschnitt, der denselben doppelt berührt.

Wenn ein Kegelschnitt $K^{(2)}$ und ein Punkt o gegeben sind, so kann man auf jedem Strahle durch o den Punkt η bestimmen, der, wenn ξ, ξ' die Schnitte mit $K^{(2)}$ sind, dem Doppelverhältnisse $(\xi\xi'o\eta)$ einen gegebenen Werth k verschafft. Auf demselben Strahle haben wir einen zweiten Punkt η' , für welchen $(\xi'\xi'o\eta') = k$ ist; aus: $(\xi\xi'o\eta) = (\xi'\xi'o\eta')$ folgt, dass η, η' ein Paar in derjenigen Involution bilden, von der $\xi\xi'$ ein Paar und o der eine Doppelpunkt ist; der andere liegt auf der Polare \mathcal{Q} von o nach $K^{(2)}$. Um den Ort der Punkte η, η' zu ermitteln, seien $\xi_0, \xi'_0, \eta_0, \eta'_0$ auf einem festen Strahle durch o und zwar ξ_0, ξ'_0 auf $K^{(2)}$ so construirt, dass $(\xi_0\xi'_0o\eta_0) = (\xi'_0\xi_0o\eta'_0) = k$. Aus den Gleichheiten $(\xi_0\xi'_0o\eta_0) = (\xi\xi'o\eta)$ und $(\xi'_0\xi_0o\eta'_0) = (\xi'\xi'o\eta')$ folgt, dass die Geraden $\xi_0\xi, \xi'_0\xi', \eta_0\eta, \eta'_0\eta'$ durch einen Punkt p gehen; und ebenso gehen $\xi_0'\xi, \xi_0\xi', \eta_0'\eta, \eta_0\eta'$ durch einen Punkt q . Diese Punkte liegen, wie man leicht findet, auf der Polare von o nach $K^{(2)}$ und sind conjugirt in Bezug auf diesen Kegelschnitt, also ist opq ein Polardreieck; und

* Wir verweisen in dieser Beziehung auf die Abhandlung *Goepel's*, Journal für Mathematik Bd. 36 S. 317, und die Erweiterung derselben von *H. Schröter*, ebenda Bd. 54 S. 31, sowie die beiden Abhandlungen von *Milnowski*, Zeitschrift f. Mathem. u. Phys. Jahrg. 18, S. 288 und im Gymn.-Programm von Tilsit 1870.

wenn der Strahl $ox\xi'y'$ sich bewegt, so durchlaufen p und q die dem $K^{(2)}$ zugehörige Involution, also zwei projective Punktreihen. Daher beschreiben η_0p und $\eta_0'q$ projective Strahlbüschel und ihr Schnittpunkt η einen *Kegelschnitt*; ebenso η' . Diese Kegelschnitte sind aber identisch; denn, da p und q sich involutorisch bewegen, so können sie vertauscht werden; dadurch geht aber $\eta = (\eta_0p, \eta_0'q)$ in $\eta' = (\eta_0q, \eta_0'p)$ über. Indem nun $\eta_0, \eta_0', \eta, \eta'$ dem erzeugten Kegelschnitte angehören, hat er das Diagonaldreieck opq dieses Vierecks zum Polardreieck und bekommt bei der Bewegung von $o\eta\eta'$ die dem Punkte o und der Gerade \mathcal{Q} in Bezug auf $K^{(2)}$ zugehörigen Involutionen auch zu den seinigen; d. h. er geht mit $K^{(2)}$ in den Schnitten von \mathcal{Q} eine doppelte Berührung ein.

Aus: $(\xi\xi'o\eta) = k$ und $(\xi'\xi'o\eta') = k$ folgt: $(\xi\xi'\eta\eta') = \frac{1}{k^2}$. Die beiden Kegelschnitte werden also von den durch o gehenden Strahlen nach constantem Doppelverhältnisse geschnitten; dass dasselbe positiv ist, wenn alle vier Punkte ξ, ξ', η, η' reell sind, lehrt die hyperbolische Schnittinvolution. Bei imaginärer doppelter Berührung sind die vier Punkte stets reell, wenn die Kegelschnitte es sind; bei reeller aber nur dann, wenn diese zur nämlichen der beiden Reihen gehören. Gehören sie zu verschiedenen Reihen, so wird das Doppelverhältniss imaginär, ausser, wenn die beiden Schnittpunktepaare harmonisch sind.

260 Man kann für irgend zwei Kegelschnitte der Büschel-Schaar die Constanz des Doppelverhältnisses der Schnittpunkte der verschiedenen Strahlen durch den Berührungspol direct einsehen. Es seien $\xi, \xi'; \eta, \eta'$ die Schnitte eines solchen Strahls l , und $\xi_1, \xi_1'; \eta_1, \eta_1'$ die eines andern l_1 , so liegen sowohl die Schnittpunkte $(\xi\xi_1, \xi'\xi_1')$ und $(\xi\xi_1', \xi'\xi_1)$, als auch $(\eta\eta_1, \eta'\eta_1')$ und $(\eta\eta_1', \eta'\eta_1)$ auf der Berührungsehne \mathcal{Q} , die einen conjugirt in Bezug auf den einen, die andern in Bezug auf den andern Kegelschnitt; also gehören beide Paare zur gemeinsamen Involution auf \mathcal{Q} . Andererseits sind sie aber auch harmonisch gelegen zu den Schnitten von \mathcal{Q} mit l, l_1 . Folglich fallen die beiden Paare zusammen; woraus, wenn etwa $(\xi\xi_1, \xi'\xi_1')$ mit $(\eta\eta_1, \eta'\eta_1')$ identisch ist, sofort die Gleichheit von $(\xi\xi'\eta\eta')$ und $(\xi_1\xi_1'\eta_1\eta_1')$ folgt.

Die Tangente in η' an den zweiten Kegelschnitt trifft \mathcal{Q} in dem Pole von l in Bezug auf beide; ist also das Doppelverhältniss -1 , so dass η und η' conjugirt in Bezug auf den erstern sind, so ist sie Polare von η nach demselben, und ebenso die von η Polare von η' .

Von zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten, welche von den Strahlen durch den Berührungspol harmonisch geschnitten werden, ist jeder zu sich selbst polar in Bezug auf den andern. Sie gehören, wenn

die Berührung reell ist, zu verschiedenen Scheitelwinkelpaaren der gemeinsamen Tangenten, und wenn sie imaginär ist, so ist einer von ihnen imaginär.

Umgekehrt, wenn der eine von zwei Kegelschnitten zu sich selbst polar ist in Bezug auf einen andern, so müssen sie sich in jedem gemeinsamen Punkt, also doppelt berühren; denn die Tangente eines gemeinsamen Punktes an den ersten muss als Polare nach diesem auch den zweiten tangiren, also in demselben Punkte.

Aber nicht bloß die Strahlen des doppelten Strahlenbüschels o , das zur Büschel-Schaar gehört, schneiden zwei Kegelschnitte $K^{(2)}$, $K_1^{(2)}$ derselben nach constantem Doppelverhältnisse, sondern die Tangenten jedes dritten Kegelschnitts $K_2^{(2)}$ der Büschel-Schaar thun es. Es möge genügen, dies für den Fall reeller doppelter Berührung zu beweisen. Die Tangenten des dritten Kegelschnitts rufen auf $K^{(2)}$ projective Punktreihen hervor, in denen die Berührungspunkte der Büschel-Schaar sich selbst entsprechend sind. Diese seien \mathfrak{T} , \mathfrak{T}' ; ferner mögen zwei Tangenten t, t_1 von $K_2^{(2)}$ den $K^{(2)}$ in $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$; $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1'$ schneiden, wobei wir annehmen, dass \mathfrak{x} in \mathfrak{x}_1 , \mathfrak{x}' in \mathfrak{x}_1' continuirlich übergehe; dann ist:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 \overline{\wedge} \mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_1',$$

also auch:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{x}\mathfrak{x}' \overline{\wedge} \mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1',$$

und wenn wir aus \mathfrak{T} auf t und t_1 projeciren und annehmen, dass t und t_1 die Berührungsehne in $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1$, die gemeinsamen Tangenten in v, v' ; v_1, v_1' treffen, so giebt sich:

$$v\mathfrak{f}\mathfrak{x}\mathfrak{x}' \overline{\wedge} v_1\mathfrak{f}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1',$$

und bei der Projection aus \mathfrak{T}' :

$$\mathfrak{f}v'\mathfrak{x}\mathfrak{x}' \overline{\wedge} \mathfrak{f}_1v_1'\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1'.$$

Also ist:

$$\mathfrak{f}v\mathfrak{v}'\mathfrak{x}\mathfrak{x}' \overline{\wedge} \mathfrak{f}_1v_1v_1'\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1'.$$

Bei $K_1^{(2)}$ mögen $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_1'$ an Stelle von \mathfrak{x}, \dots treten; mithin ist:

$$\mathfrak{f}v\mathfrak{v}'\mathfrak{y}\mathfrak{y}' \overline{\wedge} \mathfrak{f}_1v_1v_1'\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_1';$$

daher sind die beiden Projectivitäten identisch, und wir haben:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{y}\mathfrak{y}' \overline{\wedge} \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1'\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_1',$$

wie behauptet wurde.

Als besondere Fälle von Kegelschnitt-Büscheln und -Schaaren 261 könnten wir noch diejenigen untersuchen, bei welchen die Kegelschnitte in einem gegebenen Punkte eine dreipunktige Berührung haben und a) durch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt gehen, oder b) eine vierte gemeinschaftliche Tangente haben; endlich, wenn die Kegelschnitte des Büschels (oder der Schaar) in einem gegebenen Punkte

eine vierpunktige Berührung haben. Doch wollen wir die nähere Untersuchung dieser besonderen Fälle dem Leser überlassen und hier nur noch eine specielle Kegelschnittschaar erwähnen, welche häufiger auftritt.

Wenn nämlich die beiden erzeugenden Involutionen A und B einer Kegelschnittschaar (Nr. 234) rechtwinklig sind; so haben die Kegelschnitte dieser Schaar die Grundpunkte A und B zu gemeinschaftlichen Brennpunkten; denn es giebt in der Ebene eines Kegelschnitts nur zwei reelle Punkte, für welche die zugehörigen Involutionen in Bezug auf den Kegelschnitt rechtwinklig sind, und dies sind die Brennpunkte des Kegelschnitts (Nr. 137). Also bilden sämtliche Kegelschnitte, welche A und B zu gemeinschaftlichen Brennpunkten haben, eine besondere Kegelschnittschaar mit vier imaginären Tangenten; die Brennpunkte sind das einzige reelle Paar Gegenecken dieses imaginären Vierseits. Die Kegelschnitte haben auch die beiden imaginären Brennpunkte auf der Nebenaxe gemein: die beiden andern endlichen Ecken dieses Vierseits, oder die Doppelpunkte der zweiten Focalinvolution. Denn durch die reellen Brennpunkte ist ja die Hauptaxe, der Mittelpunkt, die Nebenaxe und ihre Focalinvolution bestimmt, indem diese durch die beiden rechtwinkligen Involutionen um die reellen Brennpunkte in die Nebenaxe eingeschnitten wird.

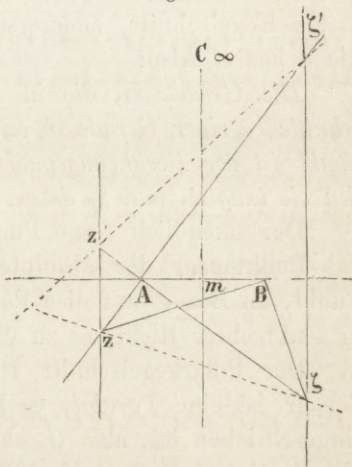
Wir nennen eine solche Kegelschnittschaar eine *Schaar confocaler Kegelschnitte* und gelangen zur reellen Construction derselben nach den früheren allgemeinen Betrachtungen auf folgende Weise. Die dritte von den beiden gegebenen rechtwinkligen Involutionen A und B abhängige Involution C wird von besonderer Art, indem ihr Grundpunkt derjenige unendlich entfernte Punkt C_∞ ist, welcher in senkrechter Richtung zu AB liegt, als Schnittpunkt der beiden Strahlen, die in den Involutionen A und B dem gemeinsamen Strahle AB conjugirt sind. Ist $x\xi$ ein Paar von A und $y\eta$ eins von B , so liegen die Punkte xy und $\xi\eta$ (oder $x\eta$ und ξx) mit A, B auf einem Kreise, der also auf der Nebenaxe seinen Mittelpunkt hat, und zwar diametral gegenüber, so dass die Strahlen aus C_∞ nach ihnen, welche in der dritten Involution conjugirt sind, gleich weit von der Nebenaxe abstehen. *Die dritte Involution ist also gleichseitig-hyperbolisch und hat die Nebenaxe und die unendlich ferne Gerade G_∞ zu Doppelstrahlen.* Diese beiden Strahlen und die Gerade AB bilden das gemeinschaftliche Polardreieck für alle Kegelschnitte der Schaar.

Nehmen wir zwei conjugirte Strahlen dieser Involution C_∞ , d. h. zwei von der Nebenaxe gleich weit abstehende parallele Geraden, und drehen um A (oder B) einen rechten Winkel, dessen Schenkel diese

Parallelen in den Punkten z, ζ (und z', ζ') durchbohren, so umhüllt die Verbindungslinie $z\zeta$ einen Kegelschnitt der Schaar, dessen Tangenten in zwei gegenüberliegenden Scheiteln die beiden Parallelen sind (Fig. 74). Verändern wir dieses Paar, so erhalten wir sämtliche Kegelschnitte der confocalen Schaar; diese zerfällt demnach in eine Reihe von Ellipsen und eine von Hyperbeln, je nachdem jenes Parallelenpaar ausserhalb der Strecke AB liegt oder zwischen A und B hindurchgeht.

Diese beiden Reihen werden von einander getrennt einmal durch das Punktepaar AB oder seine doppelt gedachte Verbindungslinie, und zweitens durch die doppelt gedachte unendlich entfernte Gerade G_∞ (imaginäres Punktepaar der beiden absoluten Punkte, der dritten Gegenecken des imaginären Tangentenvierseits); in ihr haben wir die Parabel zu suchen, welche in der Schaar vorkommen muss, denn sie „berührt“ G_∞ , sogar mit jedem ihrer Punkte. Eine eigentliche Parabel besitzt die Schaar nicht. Das dritte ebenfalls imaginäre Punktepaar mit der Nebenaxe als doppelter Verbindungslinie ist ein Grenzfall der Hyperbeln, durch welche von diesen zu den imaginären Curven der Schaar übergegangen wird (Nr. 318).

Fig. 74.



Gemeinsam conjugirt zur unendlich fernen Gerade G_∞ in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar ist jeder Strahl durch den Mittelpunkt m ; also ist jeder Punkt Mittelpunkt eines Kegelschnitts der Schaar, aber immer des unendlich fernen Punktepaars, denn in Bezug auf dasselbe hat G_∞ als Doppellinie alle Punkte zu Polen; für die eigentlichen Kegelschnitte und die beiden endlichen Punktepaare ist nur m , die Mitte zwischen A und B , Mittelpunkt.

Die Winkel zwischen den Tangenten aus einem Punkte P an ²⁶² einen Kegelschnitt der Schaar haben dieselben beiden zu einander rechtwinkligen Halbierungsstrahlen, wie die Winkel zwischen den Strahlen PA und PB ; folglich bilden die Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte der confocalen Schaar eine *gleichseitig-hyperbolische Involution*, deren Doppelstrahlen die zu einander senkrechten Halbierungsstrahlen der Winkel zwischen PA, PB sind. *Es giebt also durch den beliebigen Punkt P immer zwei reelle Kegelschnitte der Schaar, von denen einer Ellipse, der andere Hyperbel ist; sie schneiden sich rechtwinklig in diesem Punkte.* Wir erkennen hieraus, dass in einer Schaar confocaler Kegel-

schnitte weder zwei Ellipsen, noch zwei Hyperbeln einen reellen gemeinschaftlichen Punkt haben können, dass aber jede Ellipse jede Hyperbel in vier reellen (in Bezug auf m und die Axen symmetrisch liegenden) Punkten trifft, und dass sie sich in allen rechtwinklig durchschneiden.

Die beiden Doppelstrahlen sind conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar. Wenn nun \mathcal{G} gegeben ist, so giebt es einen Kegelschnitt in der Schaar, der sie berührt; die Tangente des zweiten durch den Berührungspunkt gehenden Kegelschnitts der Schaar ist einerseits senkrecht zu \mathcal{G} , mithin die Normale in dem Punkt für den ersten Kegelschnitt, andererseits aber zur \mathcal{G} conjugirt in Bezug auf die Schaar. Also:

Die Gerade \mathcal{H} , die in Bezug auf eine Schaar confocaler Kegelschnitte zu einer Gerade \mathcal{G} conjugirt ist, ist senkrecht zu ihr; der Fusspunkt ist der Berührungspunkt der \mathcal{G} mit dem Kegelschnitt der Schaar, den sie tangirt, und \mathcal{H} dessen Normale.

Der unendlich ferne Punkt von \mathcal{H} ist Pol von \mathcal{G} in Bezug auf das Punktepaar der absoluten Punkte, d. i. der vierte harmonische Punkt, in Bezug auf dies Punktepaar, zu dem Punkte (\mathcal{G} , G_∞), also in senkrechter Richtung zu \mathcal{G} unendlich fern.

Der Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ eines Punktes P in Bezug auf die Schaar ist eine *Parabel*, weil er dem gemeinschaftlichen Polardreieit eingeschrieben ist, also G_∞ berührt. Diese Parabel berührt also auch die gemeinsamen Axen der Kegelschnitte der Schaar, daher geht ihre Leitlinie durch m ; die beiden Halbirungslinien der Winkel von PA , PB sind in Bezug auf die Schaar conjugirt, mithin auch Tangenten des Polarkegelschnitts von P ; folglich liegt auch P auf der Directrix, und diese ist Pm . Der Brennpunkt der Parabel findet sich also auch leicht, indem man von diesem der Parabel umgeschriebenen vollständigen Vierseit denjenigen Diagonalepunkt aufsucht, welcher nicht in der Diagonale mP liegt.

Die beiden conjugirten Kegelschnittschaaren (§ 51), welche zu der Schaar confocaler Kegelschnitte gehören und durch die Involutionen A und C_∞ , B und C_∞ erzeugt werden, bestehen, wie leicht zu sehen ist, aus Parabeln, weil G_∞ ein Doppelstrahl von C_∞ ist; und zwar wird die eine Schaar gebildet von sämtlichen Parabeln, welche A zum Brennpunkt und eine durch B gehende Gerade zur Leitlinie haben, die andere Schaar von sämtlichen Parabeln, welche B zum Brennpunkt und eine durch A gehende Gerade zur Leitlinie haben; alle diese Parabeln berühren die Nebenaxe, den zweiten Doppelstrahl der Involution C_∞ .

Wir erwähnen noch, dass, wenn von den beiden erzeugenden Involutionen A und B nur *eine* rechtwinklig, die andere beliebig ist, eine Schaar von Kegelschnitten sich ergibt, welche einen Brennpunkt gemeinschaftlich haben und ausserdem zwei reelle oder imaginäre Tangenten, je nachdem die zweite Involution hyperbolisch oder elliptisch ist.

§ 53. Gemischte Kegelschnittsysteme.

Wenn wir Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts als Bestimmungsstücke desselben annehmen, so ist der Kegelschnitt durch fünf dieser Elemente ein- oder mehrdeutig bestimmt und zwar: durch fünf Punkte oder fünf Tangenten eindeutig (Nr. 63, 69), durch vier Punkte und eine Tangente oder durch vier Tangenten und einen Punkt zweideutig (Nr. 171), endlich durch drei Punkte und zwei Tangenten oder durch drei Tangenten und zwei Punkte vierdeutig (Nr. 172). Von den Systemen von Kegelschnitten, die nur durch vier Bestimmungsstücke bestimmt sind, haben wir bisher nur zwei zu einander duale in Betracht gezogen: das Kegelschnittbüschel als den Inbegriff aller durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte und die Kegelschnittschaar als den Inbegriff aller vier Geraden berührenden Kegelschnitte mit Berücksichtigung auch der Fälle, in denen unter den vier gemeinschaftlichen Punkten oder Tangenten sich imaginäre befinden. Wir haben zwei weitere duale Gebilde: a) sämtliche Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte gehen und eine feste Gerade berühren, und b) sämtliche Kegelschnitte, welche drei feste Geraden berühren und durch einen festen Punkt gehen; sodann ein sich selbst duales, also alleinstehendes Gebilde: c) sämtliche Kegelschnitte, welche zwei feste Geraden berühren und durch zwei feste Punkte gehen. Diese drei Gebilde, welche „gemischte Kegelschnittsysteme“ heissen mögen, sollen jetzt näher untersucht werden.

Ebenso wie Steiner durch projective Drehung (Nr. 162) das Kegelschnittbüschel aus dem Strahlbüschel entstehen lässt, kann man ein gemischtes Kegelschnittsystem von drei Punkten und einer Tangente aus einem Tangentenbüschel, d. h. den sämtlichen Tangenten eines Kegelschnitts in folgender Art erzeugen. Auf einem Kegelschnitte $K^{(2)}$ seien B und B_1 zwei beliebige Punkte; eine beliebige Tangente t von $K^{(2)}$ nehmen wir als den perspectiven Durchschnitt zweier perspectiven Strahlbüschel um B und B_1 ; durch die Veränderung der Tangente t am Kegelschnitt $K^{(2)}$ erhalten wir unendlich viele Projectivitäten zwischen den Strahlbüscheln B, B_1 in perspectiver Lage; dazu kommt

die Projectivität zwischen denselben Büscheln, welche den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugen. Durch Drehung der Büschel um B und B_1 bringen wir diese letzteren projectiven Büschel in perspective Lage, so dass die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Gerade \mathcal{L} liegen; dann werden zwei solche Strahlbüschel, welche vor der Drehung eine Tangente t zum perspectiven Durchschnitt hatten, sich im allgemeinen nicht mehr in perspectiver Lage befinden, also einen Kegelschnitt erzeugen. Alle diese Kegelschnitte gehen durch B und B_1 ; sie gehen ausserdem durch einen dritten festen Punkt C , den Schnittpunkt derjenigen beiden Strahlen, welche vor der Drehung in der Verbindungslinie BB_1 vereinigt und für alle diese projectiven Beziehungen entsprechend waren. Endlich berühren diese Kegelschnitte sämtlich die Gerade \mathcal{L} , weil vor der Drehung alle t den Kegelschnitt $K^{(2)}$ berührten; aus den gemeinschaftlichen Punkten von t und $K^{(2)}$ werden nämlich nach der Drehung die Schnittpunkte des aus t entspringenden Kegelschnitts mit \mathcal{L} , und da jene beiden zusammenfallen, so müssen auch diese beiden zusammenfallen. Wir erhalten also in der That ein System von Kegelschnitten, welche alle drei Punkte B, B_1, C und eine Tangente \mathcal{L} gemeinsam haben, gewissermassen auf organischem Wege aus den sämtlichen Tangenten eines Kegelschnitts.

In ganz analoger Weise kann das duale Kegelschnittsystem von drei Tangenten und einem Punkte, welche allen Kegelschnitten gemeinschaftlich sein sollen, aus einer krummen Punktreihe, d. h. den sämtlichen Punkten eines Kegelschnitts $K^{(2)}$ erzeugt werden. \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 seien zwei Tangenten von $K^{(2)}$; durch einen veränderlichen Punkt p dieses Kegelschnitts als Perspectivitätscentrum werden die Punktreihen auf ihnen perspectiv gemacht; zu den unendlich vielen Projectivitäten, die sich so ergeben, kommt noch die derselben Punktreihen, durch welche $K^{(2)}$ erzeugt wird. Wir verschieben die Punktreihen auf ihren Trägern so, dass zwei entsprechende Punkte der letzten Projectivität sich in $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ vereinigen; die andern Projectivitäten, mit der neuen Lage der entsprechenden Punkte, werden dann je einen Kegelschnitt erzeugen. Alle so erhaltenen Kegelschnitte berühren \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 und eine dritte Gerade \mathcal{C} , die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte auf \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 , in welche die im Schnittpunkte vereinigten durch die Verschiebung gekommen sind; endlich gehen sämtliche aus den Punkten p entspringenden Kegelschnitte durch einen festen Punkt P , das Perspectivitätscentrum der beiden projectiven Punktreihen auf \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 , welche vor der Verschiebung den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugten und durch die Verschiebung perspectiv geworden sind. Wir erhalten also ein System von Kegelschnitten mit drei gemeinschaftlichen Tan-

genten \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{C} und einem gemeinschaftlichen Punkte P , hervorgegangen aus den sämtlichen Punkten p eines Kegelschnitts.

Auch umgekehrt können wir, sobald die bestimmenden Elemente ²⁶⁴ eines solchen Kegelschnittsystems, also a) drei Punkte B, B_1, C und eine Gerade \mathfrak{Q} oder b) drei Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}$ und ein Punkt P gegeben sind, den Kegelschnitt $K^{(2)}$ herstellen, aus dessen Tangenten oder Punkten das ganze Gebilde durch Drehung oder Verschiebung hervorgeht. Wir denken uns nämlich im Falle a) um B und B_1 zwei perspective Strahlbüschel, welche die Gerade \mathfrak{Q} zum perspectiven Durchschnitt haben, und drehen diese beiden Strahlbüschel, deren projective Beziehung dadurch bestimmt ist, um solche Winkel, dass die Strahlen BC und B_1C zusammenfallen, dann erzeugen die Strahlbüschel den Kegelschnitt $K^{(2)}$; oder b) wir denken uns \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 als die Träger zweier perspectiver Punktreihen, welche P zu ihrem Perspectivitätscentrum haben, und verschieben die Träger auf sich selbst um solche Strecken, dass die Schnittpunkte $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ in den Schnittpunkt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ hineinfallen; dann erzeugen jene beiden nicht mehr perspectiven Punktreihen den Kegelschnitt $K^{(2)}$.

Bezeichnen wir zur Abkürzung das System der Kegelschnitte, ²⁶⁵ welche durch drei Punkte gehen und eine gerade Linie berühren, mit $S(3p, 1l)$ und das der Kegelschnitte, welche drei gerade Linien berühren und durch einen Punkt gehen, mit $S(3l, 1p)$, so ergibt sich zunächst der Doppelsatz:

<i>Durch einen beliebigen Punkt gehen zwei Kegelschnitte des Systems $S(3p, 1l)$.</i>	<i>Eine beliebige Gerade berühren zwei Kegelschnitte des Systems $S(3l, 1p)$.</i>
--	--

Denn fassen wir zum Beweise des Satzes links irgend zwei Tangenten t des erzeugenden Kegelschnitts $K^{(2)}$ auf, so entspringen aus diesen beiden Tangenten zwei Kegelschnitte des Systems $S(3p, 1l)$, welche ausser den drei Punkten B, B_1, C noch denjenigen vierten Punkt gemein haben, in welchem sich nach der Drehung die beiden Strahlen von B und B_1 treffen, welche zum Schnittpunkte der beiden Tangenten t hingehen; da durch einen beliebigen Punkt o zwei Tangenten t an den Kegelschnitt $K^{(2)}$ möglich sind, so gehen auch durch einen beliebigen Punkt o' zwei Kegelschnitte von $S(3p, 1l)$; und analog ergibt sich der Satz rechts. Ferner haben wir:

<i>Eine beliebige Gerade wird von vier Kegelschnitten des Systems $S(3p, 1l)$ berührt.</i>	<i>Durch einen beliebigen Punkt gehen vier Kegelschnitte des Systems $S(3l, 1p)$.</i>
---	--

Denn (links) die perspective Strahlbüschel B und B_1 , für welche die Gerade \mathfrak{G} perspective Durchschnitt ist, erzeugen vor der Drehung

einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ und sovieler Tangenten t , als die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ gemeinschaftlich haben, werden durch die Drehung in Kegelschnitte verwandelt, welche die Gerade \mathfrak{G} berühren, also vier. Damit bestätigen sich die am Anfange von Nr. 263 erwähnten Sätze.

Auch über die Art der in dem Systeme $S(3p, 1l)$ vorkommenden Kegelschnitte giebt die obige Entstehungsweise Aufschluss; da nämlich alle Punkte, welche nach der Drehung in die Unendlichkeit gelangen, vor derselben auf einem Kreise liegen (dem „Drehkreise“ Nr. 163), welcher das Erzeugniss zweier gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel ist, so werden alle diejenigen Tangenten t des erzeugenden Kegelschnitts $K^{(2)}$, welche den Drehkreis in zwei reellen Punkten schneiden, in Hyperbeln, diejenigen, welche ihn berühren, in Parabeln und diejenigen, welche ihn nicht treffen, in Ellipsen verwandelt; solche Tangenten t , welche durch den Mittelpunkt des Drehkreises gehen, werden nach der Drehung in gleichseitige Hyperbeln übergehen, weil die unendlich entfernten Punkte unter rechtwinkligen Richtungen erscheinen. Wir haben also folgendes Ergebniss:

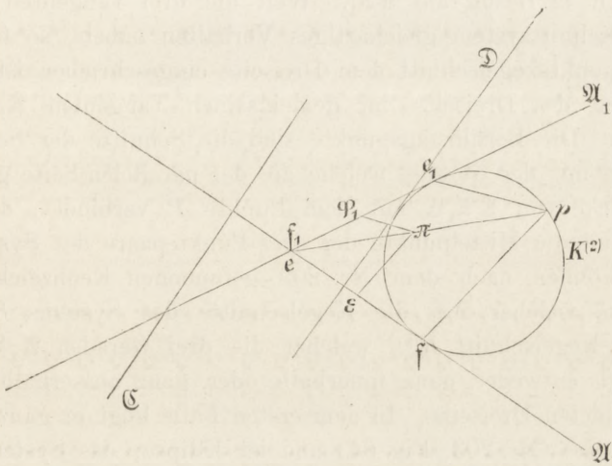
In dem gemischten Kegelschnittsysteme $S(3p, 1l)$ kommen höchstens vier Parabeln vor, welche dann zwei Reihen von Ellipsen und zwei Reihen von Hyperbeln von einander trennen; unter den Hyperbeln befinden sich zwei gleichseitige. Insbesondere enthält das System drei Geradenpaare, welche ihre Doppelpunkte in der Gerade \mathfrak{L} haben und jedesmal aus zwei Geraden bestehen, von denen eine die Verbindungslinie zweier von den drei Punkten ist und die andere die Verbindungslinie des dritten mit dem Schnittpunkte der Gerade \mathfrak{L} und der vorigen Verbindungslinie. Diese drei Geradenpaare entspringen nämlich aus denjenigen beiden Tangenten t des Kegelschnitts $K^{(2)}$, welche in den Punkten B, B_1 berühren, weil die projective Beziehung hier ausartet und diese Ausartung durch die Drehung nicht aufgehoben wird, und aus der Tangente des Kegelschnitts $K^{(2)}$ in demjenigen Punkte D , in welchem sich vor der Drehung zwei Strahlen schnitten, welche nach derselben in die Verbindungslinie BB_1 hineinfallen, weil für diese t die perspective Lage erhalten bleibt.

Ebenso enthält das System $S(3l, 1p)$ drei Punktepaare: sie bestehen je aus dem Schnittpunkte zweier von den drei gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}$ und dem Punkte, in dem die dritte von der Gerade getroffen wird, die jenen Schnittpunkt mit dem gemeinsamen Punkte P verbindet.

266 Für dies System $S(3l, 1p)$ lässt sich leicht der Ort der Mittelpunkte sämtlicher Kegelschnitte ermitteln; ziehen wir nämlich durch irgend einen Punkt p des Kegelschnitts $K^{(2)}$ die Parallelen zu den Trägern \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_1 , so treffen dieselben in den Punkten r und q_1 , und

diese behalten ihre Eigenschaft, Fluchtpunkte (Nr. 24) zu sein, auch nach der Verschiebung. Wir erhalten dadurch nach der Verschiebung ein zweites Parallelogramm, welches dem jedesmaligen Kegelschnitt des Systems umgeschrieben und dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts ist. Lässt man alle Punkte der Ebene an den beiden Verschiebungen theilnehmen, die man ja hinter einander vollziehen kann, so wird jeder um eine Strecke verschoben, welche in Länge, Richtung und Sinn mit der Resultirenden der beiden Verschiebungsstrecken übereinstimmt, wofern wir zur kürzeren Beschreibung diesen bekannten Begriff aus der Statik entlehnen. Die Verschiebung aber aus dem Mittelpunkt des ersten Parallelogramms nach dem des

Fig. 75.



andern geschieht um die halb so grosse Strecke von derselben Richtung und demselben Sinne. Der Ort des Mittelpunkts des zweiten Parallelogramms ist deshalb congruent zu dem des Mittelpunktes des ersten und daher ein dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ ähnlicher Kegelschnitt, weil letzterer dies ist. Denn bezeichnen wir (Fig. 75) den Schnittpunkt der Träger $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ mit e (oder f_1) und die Berührungspunkte mit f und e_1 , so erzeugen bei der Bewegung von p die Strahlbüschel $f p$ und $e_1 p$ den Kegelschnitt $K^{(2)}$; bezeichnen wir aber mit ϵ und φ_1 die Mitten der Strecken ef und $e_1 f_1$, mit π die Mitte von ep , so sind $\epsilon \pi, \varphi_1 \pi$ parallel bzw. mit $f p$ und $e_1 p$, erzeugen also einen dem $K^{(2)}$ ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitt von halb so grossen Dimensionen, welcher in ϵ und φ_1 die Träger $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ berührt. Nach der Verschiebung nimmt dieser Kegelschnitt zwar eine andere Lage ein, bleibt aber dem $K^{(2)}$ ähnlich; wir haben mithin folgendes Resultat:

Sämmtliche Kegelschnitte des Systems $S(3l, 1p)$ haben ihre Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte, welcher ähnlich ist dem Kegelschnitt $K^{(2)}$.

Die Gerade \mathfrak{D} , welche diejenigen entsprechenden Punkte der den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden projectiven Punktreihen verbindet, die nach der Verschiebung in den Punkt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ fallen, ist Tangente von $K^{(2)}$. Die Parallele zu ihr in halb so grosser Entfernung vom Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ berührt also den zu $K^{(2)}$ ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitt, aus dem durch die oben beschriebene Verschiebung der Mittelpunktskegelschnitt sich ergibt. Die genannte Tangente geht in eine parallele über und zwar, wie man erkennt, wenn man ihren Schnitt mit \mathfrak{A} oder \mathfrak{A}_1 bei der Verschiebung verfolgt, in diejenige, welche halb so weit von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ entfernt ist wie \mathfrak{C} ; denn \mathfrak{C} und \mathfrak{D} liegen ja symmetrisch in Bezug auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$. Weil die drei Tangenten \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{C} zum Kegelschnittsystem gleichartiges Verhalten haben, so folgt, dass der Mittelpunktskegelschnitt dem Dreiseite eingeschrieben ist, das die Seitenmitten des Dreiseits der gemeinsamen Tangenten \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{C} zu Ecken hat. Die Berührungspunkte sind die Schnitte der Seiten jenes Dreiseits je mit der Gerade, welche die der parallelen Seite gegenüberliegende Ecke von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ mit dem Punkte P verbindet; denn diese Schnitte sind die Mittelpunkte der drei Punktepaare des Systems.

Wir können nach dem Nr. 203 gefundenen Kennzeichen leicht entscheiden, welcher Art die Kegelschnitte des Systems $S(3l, 1p)$ sind. Der Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher die drei Geraden \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{D} berührt, liegt entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des von ihnen gebildeten Dreiseits. In dem ersten Falle liegt er ganz in einem der Räume (e) (Nr. 203, Fig. 64) und ist Ellipse; das System besteht also aus lauter Ellipsen, und auch der Mittelpunktskegelschnitt ist eine Ellipse. Im zweiten Falle ist der Kegelschnitt $K^{(2)}$ entweder Ellipse und liegt dann ganz in einem der Räume (h), welche den Seiten des Dreiseits anliegen; das System besteht aus lauter Hyperbeln, und der Mittelpunktskegelschnitt ist Ellipse; oder der Kegelschnitt $K^{(2)}$ ist Hyperbel und liegt dann mit einem Zweige in einem Raume (h) und mit dem andern in dem gegenüberliegenden Raume (e); das System besteht aus einer Reihe von Ellipsen und einer Reihe von Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; der Mittelpunktskegelschnitt ist Hyperbel, und ihre beiden unendlich entfernten Punkte sind die Mittelpunkte der in der Schaar vorkommenden Parabeln.

Jenes Kennzeichen giebt auch unmittelbar Aufschluss über die Art des Kegelschnittsystems je nach der Lage der es bestimmenden Elemente, der drei Geraden \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{C} und des Punktes P . Die drei

oben aufgezählten Fälle treten ein, wenn P im Innern des von den drei gemeinsamen Tangenten gebildeten Dreiecks oder in einem der Scheitelräume oder in einem der drei an die Seiten anstossenden Räume liegt.

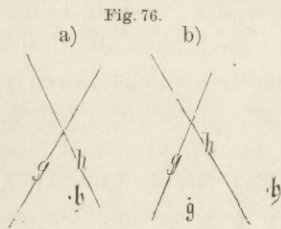
Wir brechen hier die Betrachtung der beiden noch wenig untersuchten Kegelschnittsysteme $S(3p, 1l)$ und $S(3l, 1p)$ ab. Die gegebene Entstehungsweise derselben scheint eine ergiebige und empfehlenswerthe Quelle für ihre Untersuchung; sie lässt uns aber im Stich, wenn von den drei Punkten oder drei Geraden zwei imaginär sind, d. h. a) wenn ein Punkt p , eine Gerade l und eine elliptische Punktinvolution gegeben ist und alle Kegelschnitte, welche durch p gehen, l berühren und die gegebene Involution zur zugehörigen haben, das System bilden; oder b) wenn eine Gerade l , ein Punkt p und eine elliptische Strahlinvolution gegeben sind und das System aus allen Kegelschnitten besteht, welche l berühren, durch p gehen und die gegebene Involution zur zugehörigen haben. Zur Construction der Kegelschnitte dieser Systeme können wir gelangen bei a), indem wir einen veränderlichen Punkt p die Gerade l durchlaufen lassen und jedesmal den Kegelschnitt construiren, welcher in p die l berührt, durch p geht und die gegebene Punktinvolution zur zugehörigen hat (Nr. 111); bei b), indem wir einen veränderlichen Strahl t um p drehen und jedesmal den Kegelschnitt construiren, welcher in p den t berührt, ausserdem l berührt und die gegebene Strahlinvolution zur zugehörigen hat.

* Wir haben noch das dritte gemischte Kegelschnittsystem $S(2p, 2l)$ ²⁶⁷ von zwei festen Punkten und zwei festen Tangenten zu betrachten oder, wenn wir uns von der Realität dieser Paare unabhängig machen wollen, *das System aller Kegelschnitte, welche gleichzeitig eine gegebene Punkt- und eine gegebene Strahlinvolution zu den ihnen zugehörigen haben.*

Ein solches System bilden z. B. alle Kreise, welche zwei gegebene Geraden berühren, da sie auf der unendlich entfernten Gerade G_∞ ausserdem zwei imaginäre gemeinschaftliche Punkte haben (Nr. 62, 142). Dies Kreissystem zerfällt in zwei getrennte Systeme, deren Kreise in den einen und den andern Scheitelwinkeln der gegebenen Geraden liegen.

Sind gegeben eine Strahlinvolution (x, ξ) , deren Grundpunkt B ist, und eine Punktinvolution (y, η) auf dem Träger \mathfrak{A} , so kommt es einmal vor, dass zwei conjugirte Strahlen der ersteren durch zwei conjugirte Punkte der letzteren gehen. Diese Punkte bilden das gemeinsame Paar der gegebenen Punktinvolution und derjenigen, welche durch die Strahlinvolution in ihre Gerade eingeschnitten wird, und

jene Strahlen ebenso das gemeinsame Paar der zu diesen perspectiven Involutionen um B . Diese Punkte und Strahlen sind immer reell, sobald eine oder beide Involutionen elliptisch sind, oder, wenn sie beide hyperbolisch sind mit den Doppelstrahlen g, h und den Doppelpunkten g, h , falls die letzteren durch die ersteren nicht getrennt werden, d. h. die Punkte g, h entweder in demselben Winkelraume oder in zwei Scheitlräumen von den vier durch g und h gebildeten Winkelräumen enthalten sind (Fig. 76a).



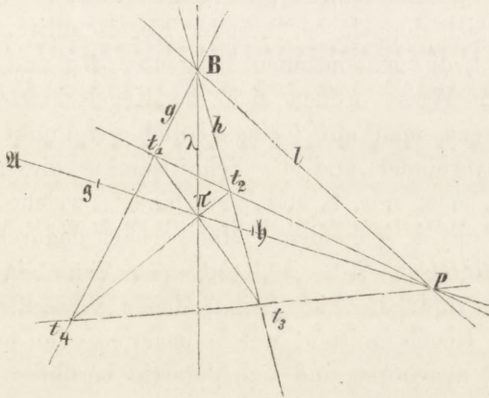
Wenn aber g und h in zwei neben einander liegenden Winkelräumen enthalten sind (Fig. 76b), so sind jene perspectiv liegenden Paare conjugirter Elemente nicht reell. Dann giebt es aber auch keinen reellen Kegelschnitt, welcher g und h berührt und durch g und h geht; denn ein Kegelschnitt, welcher g, h berührt und durch g geht, ist vollständig in den Scheitlräumen enthalten, in welchen g liegt, mag er Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein, und kann also nicht durch einen Punkt h gehen, welcher in einem der Neben-Scheitlräume liegt. Sehen wir daher von diesem-illusorischen Falle ab.

Die in den andern Fällen stets reellen Paare $l\lambda, p\pi$ conjugirter Elemente, welche perspectiv liegen und zwar so, dass l durch p, λ durch π geht, beherrschen das Kegelschnittsystem. Weil p und π conjugirt in Bezug auf jeden Kegelschnitt desselben sind, so geht die Polare von p durch π ; sie muss aber andererseits auch den Pol von l enthalten, weil l durch p geht; der Pol von l muss ferner auf der Geraden λ liegen, weil l und λ conjugirte Geraden für alle Kegelschnitte des Systems sind. Es sind also nur zwei Möglichkeiten vorhanden: entweder ist π selbst der Pol von l , oder, wenn er es nicht ist, so muss λ die Polare von p sein; die Kegelschnitte des Systems zerfallen daher in zwei getrennte Systeme; für das eine sind p und λ Pol und Polare, für das andere sind π und l Pol und Polare. Bezeichnen wir diese beiden Systeme durch $[p, \lambda]$ und $[\pi, l]$, so ergiebt sich folgendes Verhalten: Weil in dem Systeme $[p, \lambda]$ die Polare λ von p durch B geht, so muss auch die Polare von B durch p gehen, und weil der Pol p von λ auf \mathfrak{A} liegt, so muss auch der Pol von \mathfrak{A} auf λ liegen, dagegen im Systeme $[\pi, l]$ geht die Polare von B beständig durch π , und der Pol von \mathfrak{A} liegt immer auf l . Wir haben also folgendes Resultat:

Das gemischte Kegelschnittsystem von zwei festen Tangenten, deren Schnittpunkt B , und zwei festen Punkten, deren Verbindungslinie \mathfrak{A} ist, zerfällt in zwei getrennte Systeme von Kegelschnitten. Die Polaren von B

in Bezug auf die verschiedenen Kegelschnitte des Systems (Berührungselven der festen Tangenten) gehen je durch einen festen Punkt, bei dem einen Theilsysteme durch p , bei dem andern durch π , welche beiden Punkte auf \mathfrak{A} liegen; die Pole der Gerade \mathfrak{A} (Schnittpunkte der Tangenten in den festen Punkten) liegen je auf einer Gerade λ , bezw. l , welche beide Geraden durch B gehen. Die Geraden λ und l gehen bezw. durch die Punkte π und p ; sie sind den beiden festen Tangenten und p und π den beiden festen Punkten harmonisch zugeordnet.

Fig. 77.



Bei den Kreisen, welche zwei feste Geraden berühren, sind l, λ die Halbierungslinien der Winkel derselben und p und π die unendlich fernen Punkte dieser Halbierungslinien.

Für den vollständig reellen Fall, wenn beide Involutionen B und \mathfrak{A} hyperbolisch, also die gemeinsamen Tangenten und Punkte g, h und g', h' des Kegelschnittsystems reell sind, gilt, dass jeder Kegelschnitt des einen Theilsystems mit einem desselben gepaart ist und diesem Paare ein Paar im andern Systeme zugehört. Ziehen wir nämlich (Fig. 77) irgend einen Strahl durch p , welcher g und h in den Punkten t_1 und t_2 trifft, so wird auch, wenn t_3, t_4 die Schnitte $(t_1 \pi, h)$ und $(t_2 \pi, g)$ sind, die Verbindungslinie $t_3 t_4$ durch p laufen müssen, denn die Strahlen $g, h; l, \lambda$ sind harmonisch, und aus der harmonischen Eigenschaft des Vierecks folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung. Es giebt hiernach zwei Kegelschnitte des Systems $[p, \lambda]$, von denen der eine in t_1, t_2 , der andere in t_3, t_4 die Geraden g, h berührt und durch g', h' geht; andererseits giebt es aber auch zwei Kegelschnitte des Systems $[\pi, l]$, von denen einer in t_1, t_3 , der andere in t_2, t_4 die Geraden g, h berührt und ausserdem durch g', h' geht. Die beiden Kegelschnitte aus dem einen System berühren die beiden aus dem

ändern je in einem der vier Punkte t_1, t_2, t_3, t_4 ; diese vier Punkte liegen ferner mit den festen Punkten g, h in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, weil g und h harmonisch sind zu p und π , zwei Diagonalknoten des vollständigen Vierecks $t_1 t_2 t_3 t_4$. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ hat $Bp\pi$ zum Polardreieck, folglich ist $p\pi$ die Polare von B in Bezug auf ihn, und daher sind Bg und Bh seine Tangenten in den Punkten g und h . Verändern wir den durch p gezogenen Strahl, so verändert sich auch das Viereck der vier Berührungspunkte t_1, t_2, t_3, t_4 und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; ersteres behält das feste Diagonaldreieck $Bp\pi$ und ein Gegenseitenpaar gh unverändert, der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ beschreibt eine Büschel-Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte, welche in den Punkten g und h die gemeinsamen Tangenten Bg und Bh haben.

In analoger Weise ordnen sich die Kegelschnitte zu zwei und zwei Paaren, wenn man auf l einen beliebigen Punkt p nimmt, ihn mit g und h verbindet und die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrahlen mit λ bzw. mit h und g verbindet, welche beiden Linien sich wiederum auf l schneiden. Man erhält dadurch ein Vierseit, dessen Diagonaldreieck $\mathfrak{A}l\lambda$ ist, und von dem ein Paar Gegenecken g und h sind; die vier Seiten dieses Vierseits sind die Tangenten von vier Kegelschnitten, welche paarweise den beiden Systemen $[p, \lambda]$ und $[\pi, l]$ angehören und sich derartig berühren, dass jeder aus dem einen Systeme die beiden andern aus dem andern berührt. Die vier Seiten dieses Vierseits und die beiden Geraden g und h sind sechs Tangenten eines Kegelschnitts, der $\mathfrak{A}l\lambda$ zum Polardreieck hat und daher die Geraden g und h in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen sie von \mathfrak{A} geschnitten werden; verändern wir den Punkt p auf der Gerade l , so verändert sich sowohl jenes Vierseit, als auch dieser Kegelschnitt, und letzterer durchläuft eine Büschel-Schaar einander doppelt berührender Kegelschnitte, deren beide Berührungspunkte die Schnittpunkte von g und h mit der Gerade \mathfrak{A} sind.

§ 54. Die gemeinschaftlichen Punkte, Tangenten und das gemeinsame Polardreieck zweier beliebig angenommenen Kegelschnitte.

268 Zwei Kegelschnitte in derselben Ebene können höchstens vier gemeinschaftliche Punkte und vier gemeinschaftliche Tangenten haben; denn durch fünf dieser Elemente ist der Kegelschnitt eindeutig bestimmt, d. h. zwei Kegelschnitte, welche z. B. fünf Punkte gemeinschaftlich haben, müssen identisch sein. Die Frage nach der Realität dieser gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten sowie die Construction derselben ist für viele geometrische Untersuchungen unerlässlich, ins-

besondere für die Construction des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschaar, welche beiden Gebilde durch zwei Kegelschnitte vollständig und eindeutig bestimmt werden. Es soll daher diese Frage nachträglich beantwortet werden.

Ein Kegelschnitt theilt die unendliche Ebene in zwei Gebiete, welche wir das äussere und innere Gebiet nennen; ersteres wird erfüllt von sämtlichen Tangenten des Kegelschnitts, letzteres von keiner getroffen. Die Tangenten durchstreifen das äussere Gebiet doppelt, denn von jedem Punkte desselben kommen zwei von ihnen. Bei der Hyperbel bildet das äussere Gebiet ein zusammenhängendes Ganze von unendlicher Ausdehnung; das innere Gebiet besteht aus zwei getrennten (im Unendlichen zusammenhängenden) Theilen ebenfalls von unendlicher Ausdehnung. Die Bewegung der Tangente mit ihrem Berührungspunkte längs der Hyperbel zeigt den Zusammenhang der beiden Hyperbelzweige im Unendlichen (Nr. 81). Das innere Gebiet der Ellipse ist von endlicher Ausdehnung, das äussere von unendlicher; bei der Parabel sind beide von unendlicher Ausdehnung.

Bei zwei Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ können drei wesentlich verschiedene Fälle rücksichtlich ihrer gegenseitigen Lage eintreten: 1) das innere Gebiet des einen ist ganz in dem inneren Gebiete des anderen enthalten und zugleich enthält das äussere Gebiet des ersteren ganz das äussere Gebiet des letzteren, d. h. der eine Kegelschnitt liegt ganz innerhalb des anderen; oder 2) das innere Gebiet des einen liegt ganz in dem äusseren Gebiet des anderen und zugleich enthält das äussere Gebiet des ersteren ganz das innere des anderen, d. h. jeder der beiden Kegelschnitte liegt ganz ausserhalb des anderen; oder 3) das innere Gebiet des einen greift über in das innere Gebiet des anderen. In den Fällen 1) und 2) können die Kegelschnitte keinen reellen Punkt gemeinschaftlich haben, im Falle 3) müssen sie gemeinschaftliche Punkte haben und zwar nothwendig zwei oder vier; denn ein auf dem einen Kegelschnitt sich bewegendes Punkt muss aus dem äusseren Gebiete des anderen in das innere Gebiet desselben übertreten; er muss aber auch wiederum aus dem inneren Gebiet in das äussere zurückkehren, von wo wir ihn ausgehen liessen, da wir den Kegelschnitt continuirlich in einem Zuge durchlaufen können (mit zweimaligem Durchgange durch das Unendliche bei der Hyperbel). Der Punkt muss also mindestens zweimal die Grenze überschreiten, kann es aber auch viermal thun, d. h. *zwei Kegelschnitte haben entweder keinen oder zwei oder vier gemeinschaftliche Punkte**; haben sie einen gemein-

* Selbstverständlich sind damit *reelle* gemeinsame Punkte (oder Tangenten) gemeint.

schaftlichen Punkt, so müssen sie noch einen zweiten Punkt gemeinschaftlich haben, können aber auch noch weitere haben; haben sie drei Punkte gemein, so müssen sie noch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt haben (Nr. 173).

Hieraus folgt das duale Ergebniss: *Haben zwei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Tangente, so müssen sie noch eine zweite haben, können aber auch noch drei gemeinschaftliche Tangenten haben. Denn wenn wir zwei Kegelschnitte mit einer gemeinschaftlichen Tangente in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt als Basis polarisiren (Nr. 102), so erhalten wir zwei neue Kegelschnitte, welche einen Punkt gemein haben, folglich nothwendig noch einen zweiten oder drei andere Punkte; die ursprünglichen beiden Kegelschnitte haben daher nothwendig noch eine zweite gemeinschaftliche Tangente, oder noch drei. Hieraus folgt: Zwei Kegelschnitte haben entweder keine oder zwei oder vier gemeinschaftliche Tangenten.*

Wenn zwei Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ eine Gerade in zwei reellen einander trennenden Punktepaaren treffen, so müssen sie einander schneiden. Denn von den beiden Punkten eines der beiden Paare liegt der eine innerhalb, der andere ausserhalb des andern Kegelschnitts; folglich muss ein Durchschneiden der beiden Curven stattfinden. Trifft also eine Gerade zwei sich nicht schneidende Kegelschnitte reell, so sind die Schnittpunktepaare Punktepaare einer hyperbolischen Involution. Wenn mindestens eins dieser Paare imaginär ist, so gehören sie ebenfalls zu einer solchen Involution; denn die Doppelpunkte werden durch das reelle gemeinsame Paar der beiden Involutionen gebildet, die der Gerade in Bezug auf die Curven zugehören und von denen mindestens eine elliptisch ist. Wir erkennen, was wir beim Kegelschnittbüschel schon gefunden (Nr. 189):

Ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten wird von jeder Gerade in einer hyperbolischen Involution geschnitten.

269 Wie gemeinschaftliche Punkte und Tangenten bei zwei Kegelschnitten paarweise auftreten, erkennen wir am deutlichsten, indem wir das gemeinsame Polardreieck aufsuchen. Jeder Punkt hat in Bezug auf jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ eine bestimmte Polare; suchen wir solche Punkte auf, für welche die beiden Polaren zusammenfallen; und andererseits suchen wir solche Geraden auf, welche für beide Kegelschnitte denselben Pol haben. Eine Lösung der ersten Frage giebt ersichtlich zugleich eine Lösung der zweiten, und zwei Lösungen geben sofort eine dritte; denn seien x und X Pol und Polare in Bezug auf beide Kegelschnitte und ebenso y und Y , so

muss der Schnittpunkt XY und die Verbindungslinie xy ein drittes Paar Pol und Polare für sie sein.

Die Büschel der Polaren der Punkte p einer Gerade \mathcal{G} in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ um die Pole o und o_1 von \mathcal{G} sind der Punktreihe auf \mathcal{G} projectiv (Nr. 102), also unter einander und erzeugen einen Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$, welcher durch o und o_1 geht und die Eigenschaft besitzt, dass sich in jedem seiner Punkte q die Polaren eines gewissen Punktes p der Gerade \mathcal{G} in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ schneiden (Nr. 222); mithin treffen sich auch die Polaren jedes Punktes q des Kegelschnitts $\mathcal{G}^{(2)}$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in einem Punkte p der Gerade \mathcal{G} . Der einer zweiten Gerade \mathcal{G}_1 in derselben Weise zugehörige Kegelschnitt sei $\mathcal{G}_1^{(2)}$. Die beiden Kegelschnitte $\mathcal{G}^{(2)}$ und $\mathcal{G}_1^{(2)}$ haben den Punkt Q gemein, in dem sich die Polaren des Schnittpunktes $P = \mathcal{G}\mathcal{G}_1$ in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ treffen, also noch einen oder drei andere gemeinschaftliche Punkte, welche die Lösung der vorgelegten Frage darbieten. In der That, es sei x ein gemeinschaftlicher Punkt der Kegelschnitte $\mathcal{G}^{(2)}$ und $\mathcal{G}_1^{(2)}$ ausser dem bekannten Q , so müssen, weil x in $\mathcal{G}^{(2)}$ liegt, seine Polaren rücksichtlich $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ sich in einem Punkte ξ der Gerade \mathcal{G} treffen, und weil x in $\mathcal{G}_1^{(2)}$ liegt, müssen sie sich in einem Punkte ξ_1 der Gerade \mathcal{G}_1 treffen; die Punkte ξ und ξ_1 fallen aber nicht zusammen in P , weil sonst x in Q läge; folglich müssen die Polaren von x rücksichtlich beider Kegelschnitte $K^{(2)}$, $K_1^{(2)}$ in die Gerade $\xi\xi_1$ hineinfallen, d. h. x ist ein Punkt der gesuchten Art. Und umgekehrt, jeder Punkt der gesuchten Art muss, weil seine beiden identischen Polaren sich sowohl auf \mathcal{G} , als auf \mathcal{G}_1 treffen, den beiden Kegelschnitten $\mathcal{G}^{(2)}$ und $\mathcal{G}_1^{(2)}$ gemeinsam sein.

Wir schliessen also: *Es giebt drei Punkte x, y, z der Art, dass für jeden von ihnen die Polaren rücksichtlich zweier gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zusammenfallen; von diesen drei Punkten muss einer immer reell sein.*

Nehmen wir an, sie seien alle drei reell; wenn die Polare von x in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in ξ und ξ_1 bzw. die Geraden \mathcal{G} , \mathcal{G}_1 trifft und die Polare von y in η und η_1 , so muss auch der Schnittpunkt $(\xi\xi_1, \eta\eta_1)$ ein solcher Punkt sein, dass er dieselbe Polare xy in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$, $K_1^{(2)}$ hat. Es giebt aber nur noch einen einzigen dritten Punkt dieser Art, nämlich z , den vierten Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte $\mathcal{G}^{(2)}$ und $\mathcal{G}_1^{(2)}$, folglich muss der Punkt $(\xi\xi_1, \eta\eta_1)$ mit z coincidiren und seine Polare, welche in ξ und ξ_1 resp. die Geraden \mathcal{G} und \mathcal{G}_1 trifft, die Verbindungslinie xy sein; es ist also z der Pol von xy und in gleicher Weise x der Pol von yz und y der Pol

von zx . Die drei Punkte x, y, z liegen daher so, dass jeder der Pole der Verbindungslinie der beiden andern ist; d. h. sie bilden ein Polardreieck für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$.

Hierdurch ist zugleich die zweite oben aufgestellte Frage beantwortet, nämlich nach solchen Geraden, deren Pole in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zusammenfallen; denn eine so beschaffene Gerade muss die Träger \mathcal{G} und \mathcal{G}_1 in zwei derartigen Punkten p und p_1 treffen, dass der Schnittpunkt der Polaren von p in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ mit dem Schnittpunkt der Polaren von p_1 zusammenfällt, und solcher Geraden giebt es, wie wir gesehen haben, nur die drei $\xi\xi_1, \eta\eta_1, \zeta\zeta_1$ oder X, Y, Z . Wir haben also folgendes Resultat:

Es giebt drei Geraden X, Y, Z der Art, dass für jede derselben die Pole rücksichtlich zweier gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zusammenfallen. Von diesen drei Geraden muss eine immer reell sein; sind alle drei reell, so bilden sie ein Polardreieck für die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, d. h. der Pol jeder ist der Schnittpunkt der beiden andern.

270 Da von dem gemeinschaftlichen Polardreieck $xyz = XYZ$ entweder alle Ecken und Seiten reell sind oder nur eine Ecke x und die gegenüberliegende Seite X , so brauchen wir auch nur diese beiden immer reellen Elemente, deren Construction oben angegeben ist, zu ermitteln und können die übrigen auf folgende Art aus ihnen finden. Die Polare X von x ist der Träger zweier verschiedenen Involutionen, welche beziehungsweise den Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zugehören; besitzen dieselben ein reelles gemeinschaftliches Paar, so liefert dasselbe die Punkte y und z .

Wenn die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ keinen reellen Punkt gemeinsam haben, so befinden sie sich in einer der Lagen, die wir oben mit 1) und 2) bezeichnet haben. Bei der Lage 1), bei welcher der eine Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ ganz innerhalb des andern $K^{(2)}$ enthalten ist, kann der reelle Punkt x entweder im Innern von $K_1^{(2)}$ und dann auch im Innern von $K^{(2)}$ liegen, oder im Innern von $K^{(2)}$, aber ausserhalb $K_1^{(2)}$, oder ausserhalb beider Kegelschnitte. In den beiden ersten Fällen ist mindestens eine der Involutionen auf X elliptisch; also ist das gemeinsame Paar yz reell. Im dritten Falle trifft X beide Kegelschnitte reell, die Involutionen sind beide hyperbolisch; aber bei der jetzt vorausgesetzten Lage der beiden Kegelschnitte sind die Schnittpunktpaare, die Paare der Doppelpunkte der Involutionen, so gelegen, dass eins das andere einschliesst; also sind y und z ebenfalls reell.

Bei der Lage 2), wo $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ aus einander liegen, befindet sich x entweder innerhalb des einen und ausserhalb des andern, oder ausserhalb beider; im ersteren Falle ist eine von den Involutionen auf X elliptisch, im andern Falle sind beide hyperbolisch; aber die Paare der Doppelpunkte schliessen sich aus oder — wenn mindestens einer von den Kegelschnitten eine Hyperbel ist — eins schliesst das andere ein; mithin sind in beiden Fällen y und z reell. Also schliessen wir:

Zwei Kegelschnitte, welche keinen reellen Punkt gemeinsam haben, haben ein vollständig reelles gemeinschaftliches Polardreieck.

Andererseits haben zwei Kegelschnitte mit vier (reellen) gemeinsamen Punkten immer ein gemeinsames Polardreieck, das Diagonaldreieck des von den vier Schnittpunkten gebildeten vollständigen Vierecks.

Also bleibt dafür, dass die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ von dem gemeinsamen Polardreieck allein x und X reell haben, der einzige Fall übrig, dass die Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben; und in der That gilt:

Wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben, so ist von dem gemeinschaftlichen Polardreiecke nur ein Punkt x und seine Gegenseite X reell. Denn wäre das gemeinsame Polardreieck $xyz = XYZ$ vollständig reell, so würde jeder beliebige von den beiden reellen gemeinsamen Punkten sofort zu drei anderen führen, nämlich wenn a dieser Punkt ist und ξ der Schnittpunkt (ax, X) , zu dem dem Punkte a in Bezug auf x und ξ zugeordneten vierten harmonischen Punkte und zu zwei andern aus y und Y , z und Z analog construirten Punkten. Es kann mithin, wenn nur zwei Schnittpunkte vorhanden sind, das Polardreieck nicht vollständig reell sein, sondern nur x und X ; und zugleich müssen die beiden reellen gemeinschaftlichen Punkte mit x in gerader Linie liegen; und umgekehrt: Wenn von dem gemeinschaftlichen Polardreieck zweier Kegelschnitte allein eine Ecke x und seine Gegenseite X reell sind, so müssen die beiden Kegelschnitte zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Punkte haben.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte. Wenn zwei Kegelschnitte vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, so haben sie ein vollständig reelles gemeinschaftliches Polardreieck, nämlich das Diagonaldreieck des von jenen vier Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits. Ebenso: *Wenn zwei Kegelschnitte keine reelle gemeinschaftliche Tangente haben, so müssen sie ein reelles gemeinsames Polardreieck besitzen.* Denn polarisiren wir die beiden gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, von welchen angenommen wird, dass sie keine reelle gemeinschaftliche Tangente haben,

so erhalten wir zwei neue Kegelschnitte, welche keinen reellen Punkt gemein haben; und da diese ein reelles gemeinschaftliches Polardreieck haben, so müssen auch jene ein solches haben, indem aus Pol und Polare eines Kegelschnitts durch Polarisirung allemal wieder Polare und Pol des Polarerzeugnisses wird (Nr. 102), also auch aus einem Polardreieck ein Polardreiseit, das ja zugleich ein Polardreieck ist.

Wenn endlich die gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, so kann ihr gemeinschaftliches Polardreieck nicht ganz reell sein, sondern nur X und x ; denn wären alle drei Seiten X, Y, Z reell, so könnten wir wieder aus irgend einer α der beiden reellen gemeinsamen Tangenten drei andere ableiten, indem wir am Schnittpunkt αX den vierten harmonischen Strahl construiren, welcher dem α in Bezug auf X und den Verbindungsstrahl $(\alpha X, x)$ zugeordnet ist, und ebenso bei Y und Z verfahren. Also: *Wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, so ist von ihrem gemeinschaftlichen Polardreiseit allein eine Seite X und ihre Gegenseite x reell, und auf X treffen sich die beiden reellen gemeinsamen Tangenten; und auch umgekehrt: Wenn allein X und x reell sind, so müssen die Kegelschnitte zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben. Hieraus folgt in Verbindung mit dem Obigen: Zwei Kegelschnitte, welche nur zwei reelle Schnittpunkte haben, müssen zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten besitzen, und umgekehrt.* (Vgl. Nr. 327.)

272 Hieraus ersehen wir, dass bei zwei beliebigen Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ rücksichtlich ihrer gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten überhaupt folgende fünf Fälle eintreten können:

A) Das gemeinschaftliche Polardreieck $xyz = XYZ$ ist vollständig reell:

- I. Die beiden Kegelschnitte haben keinen reellen Punkt und keine reelle Tangente gemeinschaftlich.
- II. Die beiden Kegelschnitte haben keinen reellen Punkt, aber vier reelle Tangenten gemeinschaftlich.
- III. Die beiden Kegelschnitte haben vier reelle Punkte, aber keine reelle Tangente gemeinschaftlich.
- IV. Die beiden Kegelschnitte haben vier reelle Punkte und vier reelle Tangenten gemeinschaftlich.

B) Von dem gemeinschaftlichen Polardreieck ist nur eine Ecke x und die Gegenseite X , ihre Polare, reell:

- V. Die beiden Kegelschnitte haben nur zwei reelle Punkte und gleichzeitig nur zwei reelle Tangenten gemeinschaftlich.

Wir wollen nun untersuchen, *wie in diesen fünf Fällen das gemeinsame Polardreieck zu den beiden Kegelschnitten gelegen ist.* Von einem Polardreiecke eines Kegelschnitts liegt (Nr. 107) immer eine Ecke innerhalb, die beiden andern ausserhalb, und die Seiten aus jener schneiden reell, die dritte nicht. Also sind für ein vollständig reelles gemeinsames Polardreieck zweierlei Fälle möglich: entweder ist die innere Ecke für den einen Kegelschnitt auch innere für den andern und dann sind die andern beiden Ecken für beide äussere Punkte, oder die innern Ecken sind verschieden für die beiden Kegelschnitte und jede eine äussere für den andern, und die dritte dann äusserer Punkt für beide. Also:

(α)	(β)
x innerhalb $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$,	x ausserhalb $K^{(2)}$, innerhalb $K_1^{(2)}$,
y ausserhalb beider,	y innerhalb $K^{(2)}$, ausserhalb $K_1^{(2)}$,
z ausserhalb beider;	z ausserhalb beider;
X schneidet weder $K^{(2)}$, noch $K_1^{(2)}$,	X trifft nur $K^{(2)}$,
Y schneidet beide,	Y trifft nur $K_1^{(2)}$,
Z schneidet beide;	Z trifft beide.

Machen wir uns zunächst klar, dass die beiden Lagen 1) und 2) in Nr. 268 von zwei Kegelschnitten ohne reelle Schnittpunkte mit den jetzigen Fällen I und II identisch sind. In der Lage 1), wo ein Kegelschnitt, etwa $K^{(2)}$, den andern umschliesst, kann keine Tangente des $K^{(2)}$ den $K_1^{(2)}$ berühren, da sie in das Innere von $K^{(2)}$ nicht eintreten darf. Alle Tangenten von $K^{(2)}$ treffen $K_1^{(2)}$ nicht, alle von $K_1^{(2)}$ hingegen treffen $K^{(2)}$; es fehlt jedesmal die andere Art, also auch die Uebergangsform, eine gemeinsame Tangente.

Wie auch bei der Lage 2) das gemeinsame Polardreieck sein mag, ob von der Art (α) oder der Art (β) , mindestens ein Eckpunkt z ist vorhanden, welcher ausserhalb beider Kegelschnitte liegt; die gegenüberliegende Seite Z schneidet beide. Seien $A, B; A_1, B_1$ die Schnittpunkte. Diese Paare liegen bei der jetzigen Voraussetzung entweder aus einander und begrenzen dann beide Innensehnen, oder eine Aussensehne (einer Hyperbel), etwa AB , umschliesst eine Innensehne A_1B_1 ; denn in andern Fällen würden Punkte möglich sein, die auf der einen Curve oder in ihrem Innern sich befinden und auch im Innern der andern liegen, was gegen die Voraussetzung ist. Die Tangente in A an $K^{(2)}$ geht durch z , hat also ihren Pol in Bezug auf $K_1^{(2)}$ auf Z und zwar im vierten harmonischen Punkte zu A in Bezug auf A_1, B_1 , der in beiden Fällen zwischen A_1, B_1 , also im Innern von $K_1^{(2)}$ liegt; daher schneidet jene Tangente von $K^{(2)}$ den $K_1^{(2)}$ nicht. Also hat $K^{(2)}$ Tan-

genten, welche $K_1^{(2)}$ nicht treffen; da aber dieser Kegelschnitt ausserhalb $K^{(2)}$ liegt, so sendet jeder von seinen Punkten reelle Tangenten an $K^{(2)}$; folglich hat $K^{(2)}$ auch Tangenten, welche $K_1^{(2)}$ schneiden, und daher sind auch gemeinsame Tangenten vorhanden. Die Tangente in B an $K^{(2)}$ schneidet $K_1^{(2)}$ ebenfalls nicht, hingegen die beiden aus A_1 (oder B_1) kommenden von $K^{(2)}$ schneiden $K_1^{(2)}$ und berühren in Punkten, die auf $K^{(2)}$ zu A, B harmonisch liegen. Durchläuft man also $K^{(2)}$ (oder $K_1^{(2)}$), so hat man viermaligen Wechsel zwischen $K_1^{(2)}$ ($K^{(2)}$) schneidenden und nicht schneidenden Tangenten, mithin vier gemeinsame Tangenten. So fällt Lage 1) unter Fall I, Lage 2) unter Fall II, und da 1) und 2) alle Fälle zweier sich nicht schneidender Kegelschnitte umfassen und sich ausschliessen, ebenso Fall I und II, so ist Fall I mit 1), Fall II mit 2) identisch. Demnach:

*Wenn zwei Kegelschnitte weder Punkte, noch Tangenten gemeinsam haben, so liegt der eine ganz im Innern des andern. Haben sie keine Punkte, wohl aber Tangenten und dann vier gemeinsam, so liegt jeder im Aussengebiete des andern.**

Jetzt erkennen wir auch genauer, dass im Falle I das gemeinsame Polardreieck von der Art (α) sein muss; denn wenn $K_1^{(2)}$ der vom andern Kegelschnitt $K^{(2)}$ umschlossene Kegelschnitt ist, so ist ein Punkt, wie x bei (β), der innerhalb $K_1^{(2)}$ und ausserhalb $K^{(2)}$ liegt, nicht möglich. Die in Nr. 270 noch für möglich gehaltene Lage eines Eckpunktes innerhalb $K^{(2)}$ und ausserhalb $K_1^{(2)}$ ist also nicht möglich.

In dem Falle II ist hingegen das Polardreieck von der Art (β); denn ein Punkt wie x bei (α), innerhalb beider Kegelschnitte, ist bei dieser Lage der Kegelschnitte nicht möglich.

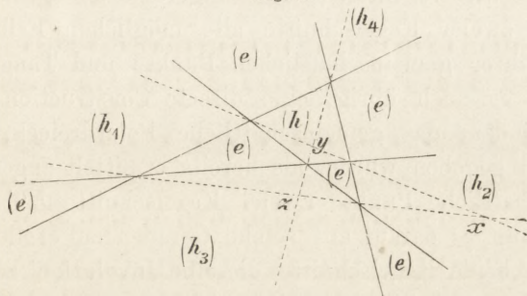
In dem Falle III ist das Polardreieck ebenfalls von der Art (β). Denn die Polarcuren $\mathfrak{R}^{(2)}, \mathfrak{R}_1^{(2)}$ befinden sich in dem Falle II. Ihr gemeinsames Polardreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ ist von der Art (β); \mathfrak{x} ist ausserhalb $\mathfrak{R}^{(2)}$, innerhalb $\mathfrak{R}_1^{(2)}$, \mathfrak{y} umgekehrt und \mathfrak{z} ausserhalb beider; also trifft X nur $K^{(2)}$, Y nur $K_1^{(2)}$ und Z beide. Alle Tangenten eines jeden der beiden Kegelschnitte treffen den andern. Ein Beispiel hiervon sind zwei confocale ungleichartige Kegelschnitte, während gleichartige vom Falle I sind.

Im Falle IV ist wiederum das Polardreieck von der Art (α). Die Kegelschnitte der ganzen Schaar mit den vier reellen gemeinschaftlichen

* Den Beweis, dass jeder von zwei aus einander liegenden Kegelschnitten (z. B. zwei conjugirten Hyperbeln) Tangenten hat, die den andern nicht treffen, verdanke ich dem Collegen London; Schröter hat das für selbstverständlich gehalten und ohne Beweis Fall II und Lage 2) für identisch angenommen, ebenso Fall I und Lage 1).
St.

Tangenten erfüllen (Nr. 210) nur die fünf hyperbolischen Räume (h) des Vierseits, während die sechs elliptischen (e) frei bleiben (Fig. 78)*; und auf diese fünf hyperbolischen Räume, durch welche die drei Diagonalen des Vierseits gehen, vertheilen sich die Kegelschnitte der Schaar in zwei Reihen von Ellipsen und zwei von Hyperbeln in der Art, dass die eine Reihe von Ellipsen ganz in dem Raume (h), die eine von Hyperbeln ganz in den Räumen (h_1) und (h_2), die zweite Reihe von Ellipsen ganz in (h_3) und die zweite von Hyperbeln ganz in (h_3) und (h_4) enthalten ist.

Fig. 78.



Wenn also zwei Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ der Schaar reelle Schnittpunkte haben sollen, wie in IV, so müssen sie (Nr. 210) entweder beide in (h), oder beide in (h_1) und (h_2), oder beide in (h_3), oder beide in (h_3) und (h_4), oder der eine in (h_3), der andere in (h_3) und (h_4) enthalten sein.

Die Diagonalepunkte x, y, z befinden sich natürlich auch in den Räumen (h), und zwar y in (h), x in (h_2) oder (h_1), z in (h_3); sind daher beide Kegelschnitte in (h_1) und (h_2) enthalten, so sind y und z ausserhalb beider gelegen, in den andern Fällen gilt dies für x und y ; also ist das Polardreieck xyz von der Art (α).

Im Falle V, wo nur x und X reell sind, muss X beide Kegelschnitte reell schneiden und zwar so, dass die Schnittpunktpaare einander trennen; weil sonst die beiden X zugehörigen Involutionen ein reelles gemeinsames Paar yz hätten; x liegt daher ausserhalb beider Kegelschnitte.

Es ist noch zu bemerken, dass, während die Lage der Fälle I, 273 II, IV, V bei jeder Art von zwei Kegelschnitten (Ellipse, Parabel, Hyperbel) auftreten kann, der Fall III nur möglich ist, wenn wenigstens einer der beiden Kegelschnitte Hyperbel ist. Das hätten wir oben schon erkennen können, als wir III durch Polarisation aus II ableiteten; der

* Sie ist mit Fig. 66 identisch.

Mittelpunkt der Basis muss nothwendig ausserhalb einer der beiden aus einander liegenden Polarcurven $\mathfrak{R}^{(2)}$, $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ sich befinden.

Im allgemeinen giebt es also nur ein gemeinsames Polardreieck, von dem entweder alle Ecken und Seiten reell sind oder nur eine Ecke und ihre Gegenseite; wir erinnern aber, dass (Nr. 255), wenn die Kegelschnitte eine reelle oder imaginäre doppelte Berührung eingehen, unendlich viele Polardreiecke gemeinsam sind mit dem Berührungspole als fester Ecke und der Berührungssehne als fester Gegenseite.

274 Nachdem wir vermittelst des aufgefundenen gemeinschaftlichen Polardreiecks zweier Kegelschnitte alle möglichen Fälle hinsichtlich der Realität ihrer gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten erörtert haben, bleibt es noch übrig, eine directe Construction der letzteren aufzufinden, indem das gemeinschaftliche Polardreieck, dessen Construction oben gegeben wurde, als bereits ermittelt angenommen wird. Um gemeinschaftliche Punkte zweier Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ aufzufinden, kommt es darauf an, solche Geraden zu ermitteln, welchen in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Involution zugehört; denn eine derartige Gerade ist eigentliche oder ideelle gemeinschaftliche Secante der Kegelschnitte, je nachdem die Involution hyperbolisch oder elliptisch ist. Um andererseits gemeinschaftliche Tangenten zweier Kegelschnitte zu finden, handelt es sich darum, Punkte zu ermitteln, denen in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Involution zugehört; denn die reellen oder imaginären Doppelstrahlen einer solchen Involution sind gemeinschaftliche Tangenten der Kegelschnitte.

Jene Geraden und diese Punkte aufzufinden, giebt uns das gemeinschaftliche Polardreieck ein Hilfsmittel an die Hand; denn ein Eckpunkt x desselben und seine Gegenseite X besitzen die Eigenschaft, dass auf irgend einem durch x gezogenen Strahl der Schnittpunkt γ mit X und der Punkt x conjugirte Punkte für beide Kegelschnitte sind, also die beiden Involutionen auf diesem durch x gezogenen Strahl, welche den Kegelschnitten zugehören, das Punktepaar $x\gamma$ zu einem gemeinschaftlichen Paar conjugirter Punkte haben. Drehen wir jetzt den Strahl um x , so kann es vorkommen, dass auf ihm noch ein zweites Paar conjugirter Punkte beiden Involutionen gemeinsam wird; und dann müssen sie identisch sein, und wir haben eine gemeinschaftliche Secante.

Wir construiren wieder, wie oben, den Kegelschnitt $\mathfrak{G}^{(2)}$, dessen Punkte q den Punkten p einer Gerade \mathfrak{G} in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gemeinsam conjugirt sind, und der dem gemeinsamen Polardreieck umgeschrieben ist. Dem Punkte x entspricht der Schnittpunkt ξ der

Gerade \mathcal{G} mit X , den Punkten y, z (wenn sie reell sind) die Schnittpunkte η, ξ der Gerade \mathcal{G} mit Y und Z . Da p und q immer conjugirt sind für $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, und x und ξ ebenso, so folgt aus dem Hesse'schen Satze, dass die Schnittpunkte $(xp, \xi q) = q^1$ und $(xq, \xi p) = p^1$ ebenfalls conjugirt für beide Kegelschnitte sind; weil aber der letztere p^1 auf \mathcal{G} liegt, so muss der erstere auf $\mathcal{G}^{(2)}$ liegen, d. h. die Verbindungsstrahlen xp und ξq treffen sich in einem Punkte q^1 des Kegelschnitts $\mathcal{G}^{(2)}$, dessen conjugirter Punkt p^1 auf \mathcal{G} derjenige ist, in welchem xq die Gerade \mathcal{G} trifft, oder mit andern Worten: Verbinden wir x mit einem Paar conjugirter Punkte p und q , bezw. auf \mathcal{G} und $\mathcal{G}^{(2)}$, so treffen die Verbindungsstrahlen $\mathcal{G}^{(2)}$ zum zweiten Male und \mathcal{G} in einem neuen Paar conjugirter Punkte p^1 und q^1 . Hieraus geht hervor, dass diese beiden Strahlen xp und xq bei der gleichzeitigen Bewegung von p und q eine Involution erzeugen. Denn xp und xq treffen $\mathcal{G}^{(2)}$ in den Punkten q^1 und q , deren Verbindungssehne durch den festen Punkt ξ geht. Jeder Strahl durch x und der ihm conjugirte in dieser Involution treffen bezw. den Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ und die Gerade \mathcal{G} (und auch umgekehrt) in zwei Punkten q und p , welche für $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gleichzeitig conjugirt sind. Jeder von den Doppelstrahlen der Involution hat daher nicht bloss den Punkt x und den Schnittpunkt ξ mit X zu gemeinsam conjugirten Punkten, sondern auch den Schnitt p mit \mathcal{G} und den zweiten Schnitt q mit $\mathcal{G}^{(2)}$; es gehört ihm also dieselbe Involution in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zu; er ist, wenn reell, eigentliche oder ideelle gemeinschaftliche Secante derselben. Diese Doppelstrahlen werden dadurch leicht ermittelt, dass wir durch ξ die Tangenten an den Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ legen und die Berührungspunkte α, α^1 mit x verbinden. Die vollständige Auflösung der Aufgabe: „Die gemeinschaftlichen Punkte zweier beliebig gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zu finden“ lässt sich also folgendermassen zusammenfassen:

Man nehme von den Punkten p einer beliebigen Gerade \mathcal{G} die Polaren in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, welche sich paarweise in einem veränderlichen Punkte q treffen, dessen Ort ein bestimmter Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ ist; dasselbe mache man mit einer zweiten Gerade \mathcal{G}_1 , dadurch erhält man einen zweiten Kegelschnitt $\mathcal{G}_1^{(2)}$. Die Kegelschnitte $\mathcal{G}^{(2)}$ und $\mathcal{G}_1^{(2)}$ haben einen reellen Punkt Q gemein, den Schnittpunkt der Polaren von $\mathcal{G}\mathcal{G}_1 = P$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$. Sie haben daher im allgemeinen noch drei andere Punkte x, y, z gemein (von denen wenigstens einer x und die Gerade X , auf welcher die beiden andern liegen, reell sein muss). Die drei Verbindungslinien $yz = X, zx = Y, xy = Z$ treffen \mathcal{G} in den Punkten ξ, η, ζ ; die Tangentenpaare aus diesen

Punkten an den Kegelschnitt $\mathfrak{G}^{(2)}$ gelegt mögen die Berührungspunkte $\alpha, \alpha^1; \beta, \beta^1; \gamma, \gamma^1$ haben, dann sind die sechs Geraden $x\alpha, x\alpha^1; y\beta, y\beta^1; z\gamma, z\gamma^1$ die sechs gemeinschaftlichen Secanten der beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ und müssen sich zu je dreien in vier Punkten treffen, welche die gesuchten sind.*

Hieraus ergibt sich nebenbei ein Satz, welcher auch auf directem Wege zu beweisen ist:

Eine Transversale treffe die Seiten yz, zx, xy eines einem Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ eingeschriebenen Dreiecks in ξ, η, ζ ; sind dann $\alpha, \alpha^1; \beta, \beta^1; \gamma, \gamma^1$ die Berührungspunkte der Tangentenpaare aus ξ, η, ζ an $\mathfrak{R}^{(2)}$, so schneiden sich die sechs Verbindungsstrahlen $x\alpha, x\alpha^1, y\beta, y\beta^1, z\gamma, z\gamma^1$ zu je dreien in vier Punkten und sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks, dessen drei Diagonalepunkte x, y, z sind.

275 Die analoge Construction der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ ist nach dem Dualitätsprincip unmittelbar herzustellen; mit den bereits construirten Linien und Punkten können wir sie ein wenig abkürzen. Es wird der Kegelschnitt $P^{(2)}$ construiert, welcher die Polaren von $P = \mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ berührt und dem Dreieck XYZ eingeschrieben ist; dies ist der Kegelschnitt, der in dualer Weise zur Schaar $K^{(2)}K_1^{(2)}$ und zum Punkte P gehört, wie $\mathfrak{G}^{(2)}$ zum Büschel $K^{(2)}K_1^{(2)}$ und zur Gerade \mathfrak{G} . Er wird von den Geraden eingehüllt, die den Strahlen des Büschels P in Bezug auf die Schaar conjugirt sind, sowie von den Polaren des Punktes P in Bezug auf die verschiedenen Kegelschnitte derselben; während $\mathfrak{G}^{(2)}$ von den Punkten erzeugt wird, die in Bezug auf das Büschel zu den Punkten von \mathfrak{G} conjugirt sind, sowie auch von den Polen der Gerade \mathfrak{G} in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte desselben. Der zweite dem $\mathfrak{G}_1^{(2)}$ analoge ist nicht mehr nöthig, da wir das Polardreieck XYZ schon haben.

Die drei Strahlen Px, Py, Pz schneiden diesen Kegelschnitt $P^{(2)}$ in sechs Punkten, deren Tangenten an $P^{(2)}$ bezüglich $a, a^1; b, b^1; c, c^1$ heissen mögen; die Schnittpunkte $Xa, Xa^1; Yb, Yb^1; Zc, Zc^1$ sind die

* Die Lösung unserer Aufgabe ist nur eine Zurückführung auf eine andere auch nicht mit Zirkel und Lineal lösbare; um nämlich die vier Schnittpunkte zweier beliebigen Kegelschnitte $K^{(2)}, K_1^{(2)}$ zu finden, müssen wir drei Schnittpunkte x, y, z zweier andern Kegelschnitte $\mathfrak{G}^{(2)}, \mathfrak{G}_1^{(2)}$ ermitteln, welche einen bekannten vierten Punkt Q gemein haben. Diese Zurückführung ist in der Natur der Sache begründet und nicht zu eliminiren; sie ist gleichbedeutend mit der Zurückführung der Lösung der biquadratischen auf die der cubischen Gleichung; wie denn überhaupt in unserer Untersuchung eine geometrische Lösung der biquadratischen vermittelt einer cubischen und quadratischer Gleichungen enthalten ist.

drei Paare Gegenecken des vollständigen Vierseits, welches durch die vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte $K^{(2)}, K_1^{(2)}$ gebildet wird und zu seinen drei Diagonalen X, Y, Z hat.

Wenn o, o_1 die Pole von \mathcal{G} in Bezug auf $K^{(2)}, K_1^{(2)}$ sind, so haben die beiden Kegelschnitte $\mathcal{G}^{(2)}$ und $P^{(2)}$ die Lage, dass der erstere den beiden Dreiecken xyz und Qoo_1 umgeschrieben, der letztere ihnen eingeschrieben ist; denn Q ist conjungirt zu P in Bezug auf das Büschel, oo_1 zu \mathcal{G} in Bezug auf die Schaar, Qo und Qo_1 sind die Polaren von P in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$.

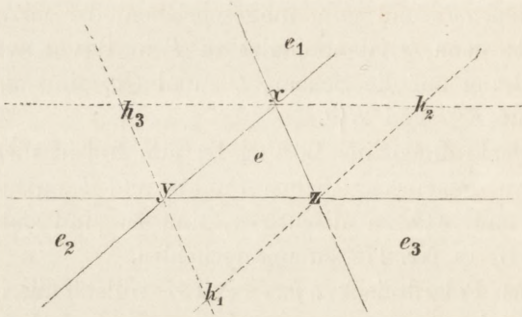
Die gegebene allgemeine Lösung ist nun hinsichtlich der Realität 276 der construirten gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zu discutiren, und es sind dabei die obigen Fälle A) und B) in Nr. 272 zu unterscheiden.

A) Ist das Polardreieck $xyz = XYZ$ vollständig reell, so kann eine gerade Linie \mathcal{G} zu ihm nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten gelegen sein: entweder trifft sie alle drei Seiten in ihren Verlängerungen, oder nur eine in der Verlängerung und die beiden andern zwischen den Ecken des Dreiecks. Da der Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ dem Dreieck xyz umgeschrieben ist, so müssen die drei Schnittpunkte ξ, η, ζ der Gerade \mathcal{G} mit den Dreiecksseiten entweder alle drei ausserhalb $\mathcal{G}^{(2)}$ liegen oder nur einer ausserhalb und die beiden andern innerhalb. Das ist, wie wir schon gelegentlich erkannt haben (Nr. 235), auch richtig, wenn $\mathcal{G}^{(2)}$ Hyperbel ist und die drei Ecken nicht alle auf demselben Aste liegen. Von den sechs Berührungspunkten $\alpha, \alpha^1; \beta, \beta^1; \gamma, \gamma^1$ sind mithin entweder alle, oder nur zwei reell, und es giebt daher auch entweder sechs reelle gemeinschaftliche Secanten oder nur zwei für die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$; d. h. die beiden Kegelschnitte haben entweder vier reelle Schnittpunkte oder keinen, in dem letzteren Falle aber zwei (reelle) ideelle gemeinschaftliche Secanten.

Andererseits kann ein Punkt P zu einem Dreiseit XYZ nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten gelegen sein: entweder treffen seine Verbindungslinien mit den Ecken x, y, z des Dreiseits alle drei Seiten in Punkten zwischen den Ecken desselben, oder von diesen Schnittpunkten liegt nur einer zwischen den Ecken des Dreiseits und die beiden andern in den Verlängerungen der Seiten. Hiernach können wir beurtheilen, in welche Räume die drei zusammengehörigen Strahlen Px, Py, Pz hineinfallen, und müssen dazu 16 verschiedene Fälle unterscheiden. Es seien wiederum e der Innenraum des Dreiecks xyz , e_1, e_2, e_3 die drei Scheitelräume, h_1, h_2, h_3 die drei an den Seiten anliegenden (Fig. 79). Da nun jede durch eine der drei Ecken des Dreiecks gezogene Gerade immer nur zwei zusammengehörige Räume e_1

und h_1 , oder e_2 und h_2 , oder e_3 und h_3 und ausserdem einen von den vier Räumen e, h_1, h_2, h_3 treffen kann, so vertheilen sich drei Strahlen Px, Py, Pz auf 13 verschiedene Arten auf diese Räume in folgender Weise:

Fig. 79.



Räume	1	$\bar{2}$	3	4	5	$\bar{6}$	7	8	9	$\bar{10}$	11	12	13
$e_1 h_1 e$	Px	Px	Px	Px	Px								
$e_2 h_2 e$	Py					Py	Py	Py	Py				
$e_3 h_3 e$	Pz									Pz	Pz	Pz	Pz
$e_1 h_1 h_2$		Pz		Pz			Pz	Pz					
$e_1 h_1 h_3$		Py	Py								Py	Py	
$e_2 h_2 h_3$						Px		Px			Px		Px
$e_2 h_2 h_1$			Pz		Pz	Pz			Pz				
$e_3 h_3 h_1$				Py	Py					Py			Py
$e_3 h_3 h_2$							Px		Px	Px		Px	

Ziehen wir nämlich durch x, y, z die Parallelen zu den Gegenseiten, so wird dadurch jeder der drei Räume h in vier Räume zerlegt, wodurch wir im Ganzen 16 Räume erhalten. Der Lage des Punktes P in je einem dieser 16 Räume entsprechen 16 Fälle, die sich aber auf die obigen 13 reduciren, weil dreimal die Lage des Punktes P in zwei verschiedenen Räumen eine gleiche Lage von Px, Py, Pz hervorruft; sobald nämlich P in dem Scheitelraum e_1 oder in dem Theilraum von h_1 , der von den Verlängerungen der durch y und z gezogenen Parallelen über den Schnittpunkt hinaus eingeschlossen wird, sich befindet, wird die Lage von Px, Py, Pz gleichartig, nämlich die mit $\bar{2}$ bezeichnete.

Der Kegelschnitt $P^{(2)}$, welcher dem Dreieck xyz eingeschrieben ist, kann nur so gelegen sein, dass er ganz enthalten ist in einem der Räume:

1) 2) 3) 4)
 e, h_1, h_2, h_3

oder in den beiden Räumen:

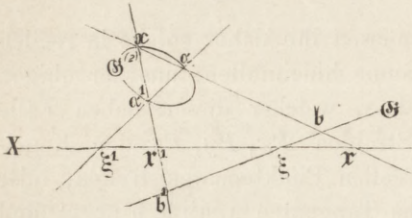
5) 6) 7)
 e_1 und h_1, e_2 und h_2, e_3 und $h_3.$

Von den drei Strahlen Px, Py, Pz müssen ihn daher solche in reellen Punkten treffen, welche in diese Räume hineinfallen; aus der obigen Tabelle erkennen wir aber leicht, dass, welcher dieser sieben Fälle auch angenommen wird, die drei Strahlen Px, Py, Pz den Kegelschnitt $P^{(2)}$ entweder alle drei in reellen Punktepaaren treffen, oder nur einer von ihnen. Von den sechs Tangenten $a, a^1; b, b^1; c, c^1$ sind also auch entweder alle oder nur zwei reell, und von dem vollständigen Vierseit der vier gemeinschaftlichen Tangenten existirt daher entweder nur ein Paar Gegenecken oder drei Paare, d. h. die beiden Kegelschnitte haben entweder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten oder keine; in dem letzteren Falle existiren aber zwei reelle Punkte, welche als ein Paar Gegenecken des imaginären vollständigen Vierseits anzusehen sind. Wir erkennen hieraus, dass bei A) in der That nur die vier oben mit I., II., III., IV. bezeichneten Fälle auftreten können und auch wirklich auftreten müssen, wie die angegebene Construction es erheischt. Wir sehen dabei von speciellen Fällen ab, indem einige der construirten Punkte oder Linien zusammenfallen können, welche dann als doppelt aufzufassen sind.

B) Ist von dem gemeinschaftlichen Polardreiecke der gegebenen 277 Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nur eine Ecke x und ihre Gegenseite X reell, so schneidet X den Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ nicht; denn schnitte sie ihn, so wären die Schnittpunkte y, z reell, was nicht der Fall ist. Alle Punkte der Gerade X liegen also ausserhalb des Kegelschnitts $\mathcal{G}^{(2)}$, mithin auch der Punkt ξ , in welchem \mathcal{G} von X getroffen wird; es giebt also aus ξ ein reelles Tangentenpaar an $\mathcal{G}^{(2)}$, und die Berührungspunkte α, α^1 , mit x verbunden, geben ein Gegenseitenpaar des vollständigen Vierecks der vier gemeinschaftlichen Punkte von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$. Von den beiden Geraden $x\alpha$ und $x\alpha^1$ muss nun die eine in zwei reellen gemeinschaftlichen Punkten die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ treffen, die andere in zwei imaginären. Denn wir können die beiden Involutionen auf ihnen bestimmen, von denen jede beiden Kegelschnitten gleichzeitig zugehört, und werden finden, dass die eine hyperbolisch, die andere elliptisch sein muss. Mögen nämlich (Fig. 80) die Geraden $x\alpha$ und $x\alpha^1$ der Gerade X in γ und γ^1 begegnen und der Gerade \mathcal{G} in \flat und \flat^1 , so bestimmen die Punktepaare $x\gamma$ und $\alpha\flat$ auf der ersten,

$x\xi^1$ und $\alpha^1 b^1$ auf der zweiten die Involutionen, welche den Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gemeinsam zugehören. Die Geraden \mathcal{G} und X treffen sich in ξ , und $\alpha\alpha^1$ ist die Polare von ξ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$, weil die Tangenten aus ξ in α und α^1 berühren; trifft diese also die X in ξ^1 , so sind

Fig. 80.



$x\xi^1$ und $\xi\xi^1$ zwei Punktepaare derjenigen Involution, welche der Gerade X in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ zugehört, und zwar $x\xi^1$, weil $\alpha\alpha^1$ ein Paar der krummen Involution auf $\mathcal{G}^{(2)}$ sind, deren Axe X ist und deren Centrum

der auf $\alpha\alpha^1$ gelegene Pol von X ist. Diese Involution ist elliptisch, weil die Schnittpunkte y, z von X und $\mathcal{G}^{(2)}$ imaginär sind; folglich muss, wenn ξ zwischen x, x^1 liegt, ξ^1 ausserhalb dieser Strecke liegen und umgekehrt. Nun liegen α, α^1, ξ^1 in einer Gerade und b, b^1, ξ in einer zweiten Gerade, und diese Punkte sind je drei Schnittpunkte mit den Seiten des Dreiecks $x\xi x^1$. Die Schnittpunkte ξ, ξ^1 werden durch die Ecken x, x^1 getrennt; von denen einer Gerade mit den Seiten eines Dreiecks liegt entweder keiner oder zwei zwischen den Ecken. Hieraus folgt: Wenn wir in einem Dreieck $x\xi x^1$ auf jeder Seite die Ecken als ein Paar conjugirter Punkte einer Involution auffassen und zwei beliebige Geraden X und \mathcal{G} jede Dreiecksseite in einem zweiten Paar conjugirter Punkte treffen lassen, so müssen die drei dadurch hervorgerufenen Involutionen auf den Dreiecksseiten entweder alle drei hyperbolisch, oder zwei elliptisch und eine hyperbolisch sein. Es sind eben drei Involutionen in der Abhängigkeit, mit der wir es wiederholt zu thun gehabt haben. Da von unsern drei Involutionen auf den Seiten von $x\xi x^1$, welche durch die Geraden X und \mathcal{G} bestimmt werden, die eine ($x\xi^1, \xi\xi^1$) elliptisch ist, so muss von den beiden andern die eine elliptisch, die andere hyperbolisch sein. Folglich haben die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in dem Falle B) zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte, aber ein reelles Paar gemeinschaftlicher Secanten, welche durch x gehen und von denen die eine die reellen Schnittpunkte, die andere die imaginären verbindet.

Wir können in ähnlicher Weise zeigen, dass in diesem Falle B) andererseits auf der Gerade X zwei solche reelle Punkte existiren, dass für jeden derselben die in Bezug auf die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zugehörigen Involutionen identisch werden, und dass von diesen Involutionen die eine hyperbolisch, die andere elliptisch ist. Die Doppelstrahlen der ersteren sind die beiden reellen gemeinschaftlichen

Tangenten von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, während die der anderen imaginär sind, aber als reellen Schnittpunkt auf X den Grundpunkt der andern Involution haben. Allein es bedarf hier keines so umständlichen Nachweises mehr, weil durch Polarisation des bereits gefundenen Resultates das andere unmittelbar zu Tage tritt.

Wir sind durch diese Untersuchung in den Stand gesetzt, wenn ²⁷⁸ zwei beliebige Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gegeben sind, sowohl das Büschel, als auch die Schaar Kegelschnitte herzustellen, welche durch sie bestimmt werden. Hierzu bedarf es nur der oben angegebenen Construction eines immer reellen gemeinschaftlichen Paares von Pol und Polare, x und X , und dann des reellen Geradenpaares durch x und des reellen Punktepaares auf X , von denen ersteres ein Paar gemeinschaftlicher Secanten der beiden Kegelschnitte und letzteres ein Paar Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten ist; d. h. jenes wie dieses enthält zwei Involutionen, welche für beide Kegelschnitte zugleich die zugehörigen sind. Diese beiden Involutionen, mögen sie nun elliptisch oder hyperbolisch sein, geben, wie wir in §§ 42 und 49 gesehen haben, eine unmittelbare reelle Construction an die Hand für alle Kegelschnitte einerseits des Büschels und andererseits der Schaar, welche durch die beiden gegebenen $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ bestimmt werden.

Schliesslich bemerken wir noch, dass durch die vorstehende Untersuchung zu den aus den Elementen bekannten Figuren des vollständigen Vierecks und Vierseits neue hinzutreten, indem Ecken und Seiten, Diagonalepunkte und Diagonalen derselben paarweise imaginär, d. h. durch elliptische Involutionen vertreten werden; und zwar giebt es drei wesentlich verschiedene Arten dieser beiden Figuren.

Das vollständige Viereck hat:

I. vier reelle Ecken, sechs reelle Seiten oder drei Paare Gegenseiten, welche sich in drei reellen Diagonalepunkten paarweise treffen.

II. keine reelle Ecke, zwei reelle Seiten, und zwar Gegenseiten, die sich in einem reellen Diagonalepunkte treffen; die beiden andern Paare Gegenseiten sind imaginär, aber ihre Durchschnittspunkte sind reell und die beiden übrigen reellen Diagonalepunkte.

Das vollständige Vierseit hat:

I. vier reelle Seiten, sechs reelle Ecken oder drei Paare Gegenecken, welche paarweise verbunden drei reelle Diagonalen liefern.

II. keine reelle Seite, zwei reelle Ecken, und zwar Gegenecken, deren Verbindungslinie eine reelle Diagonale ist; die beiden andern Paare Gegenecken sind imaginär, aber ihre Verbindungslinien sind reell und die beiden übrigen reellen Diagonalen.

III. zwei reelle Ecken und zwei imaginäre Ecken, ein reelles Paar Gegenseiten, von denen eine die beiden reellen, die andere die beiden imaginären Ecken enthält; einen reellen Diagonalpunkt, den Schnittpunkt jener reellen Gegenseiten; die beiden andern Paare Gegenseiten sind imaginär und auch die beiden andern Diagonalpunkte, aber die Verbindungslinie der letzteren ist reell.

III. zwei reelle Seiten und zwei imaginäre Seiten, ein reelles Paar Gegenecken, von denen die eine der Schnittpunkt der beiden reellen, die andere der Schnittpunkt der beiden imaginären Seiten ist; eine reelle Diagonale, die Verbindungslinie dieser reellen Gegenecken; die beiden andern Paare Gegenecken sind imaginär und auch die beiden andern Diagonalen, aber der Schnittpunkt der letzteren ist reell.

Da das vollständige Viereck (links) in allen drei Fällen ein reelles Paar Gegenseiten hat, so können wir diese als die Träger zweier Involutionen ansehen, deren Doppelpunkte die Ecken des vollständigen Vierecks sind, und hiernach tritt der Fall I ein, wenn beide Involutionen hyperbolisch, der Fall II, wenn beide elliptisch, und der Fall III, wenn eine elliptisch, die andere hyperbolisch ist; ebenso kann das vollständige Vierseit (rechts) als gebildet von den Doppelstrahlen zweier Strahlinvolutionen angesehen werden, und es treten die drei oben angeführten Fälle ein, je nachdem beide hyperbolisch, beide elliptisch oder eine hyperbolisch und die andere elliptisch ist.

279 Die Tangentenpaare aus einem beliebigen Punkte P an die Kegelschnitte eines Büschels bilden nicht eine Involution; jeder Strahl durch P berührt vielmehr zwei Kegelschnitte des Büschels, und die Zuordnung zweier denselben Kegelschnitt des Büschels berührenden Strahlen durch P ist eine complicirtere. Die Tangentenpaare aber, die an die Kegelschnitte eines Büschels aus einer Ecke des gemeinsamen Polardreiecks kommen, bilden eine Involution; denn jedes dieser Paare ist harmonisch zu den beiden Seiten des Dreiecks durch die Ecke. Und es berührt ja auch jeder Strahl durch die Ecke nur einen Kegelschnitt des Büschels; denn der zweite Doppelpunkt der Schnittinvolution rührt von dem in der Ecke befindlichen Doppelpunkte eines Geradenpaares des Büschels her.

Ebenso wird eine Kegelschnittschaar von einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks in einer Involution geschnitten.

So erhalten wir, wenn zwei Kegelschnitte ein reelles gemeinsames Polardreieck haben, da sie sowohl ein Büschel als eine Schaar bestimmen, drei Involutionen auf den Seiten und drei um die Ecken desselben, die aber alle hyperbolisch sind.

Zu zwei andern Tripeln von Involutionen, die mit einem reellen gemeinsamen Polardreiecke xyz zweier Kegelschnitte verbunden sind, gelangt man in folgender Weise. Wir haben in Nr. 274 erkannt, dass, wenn p, q in Bezug auf beide Curven conjugirt sind, die Strahlen aus einer Ecke x des Polardreiecks nach p, q sich involutorisch bewegen; in dieser Involution sind auch die beiden Seiten xy und xz conjugirt, denn dem Punkte y (oder z) ist in Bezug auf beide Kegelschnitte jeder Punkt von xz (oder xy) conjugirt. So ergeben sich drei Strahl-*involutionen um x, y, z , in denen je die Seiten conjugirt sind, mit der Beschaffenheit, dass den Strahlen aus x, y, z nach irgend einem Punkte p stets die Strahlen nach dem in Bezug auf beide Kegelschnitte conjugirten Punkte q gepaart sind, also drei Involutionen in der wiederholt besprochenen Abhängigkeit.* Und ebenso ergeben sich drei derartige Involutionen auf den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks.

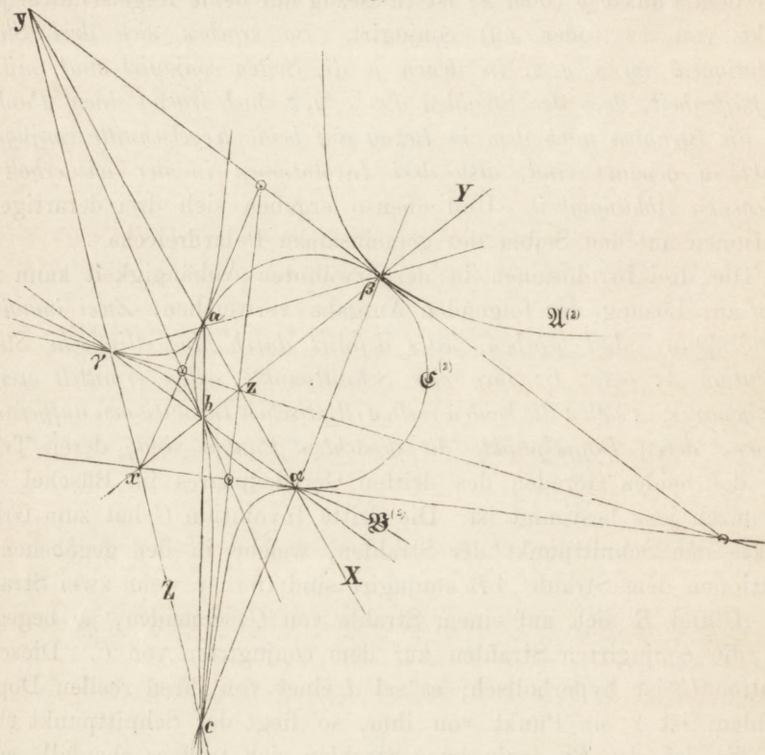
Die drei Involutionen in der erwähnten Abhängigkeit kann man auch zur Lösung der folgenden Aufgabe verwerthen: *Zwei imaginäre Geradenpaare sind gegeben, jedes definiert durch eine elliptische Strahl-*involution A , bezw. B ; ihre vier Schnittpunkte sollen ermittelt werden, oder genauer, es sollen die beiden reellen elliptischen Involutionen aufgefunden werden, deren Doppelpunkte die gesuchten Punkte sind, deren Träger also die beiden Geraden des dritten Geradenpaares im Büschel sind, das durch jene bestimmt ist. Die dritte Involution C hat zum Grundpunkte den Schnittpunkt der Strahlen, welche in den gegebenen Involutionen dem Strahle AB conjugirt sind; ferner wenn zwei Strahlen von A und B sich auf einem Strahle von C schneiden, so begegnen sich die conjugirten Strahlen auf dem conjugirten von C . Diese Involution C ist hyperbolisch; es sei d einer von ihren reellen Doppelstrahlen; ist γ ein Punkt von ihm, so liegt der Schnittpunkt γ^1 , in dem die den $A\gamma, B\gamma$ conjugirten Strahlen sich treffen, ebenfalls auf d ; mithin sind γ, γ^1 conjugirt in den Involutionen, welche in d von den A und B eingeschnitten werden; dasselbe gilt für C und (AB, d) . Daher sind diese Involutionen identisch. Wir haben in den Involutionen auf den beiden Doppelstrahlen die gesuchten.**

§ 55. Harmonisch zugeordnete Kegelschnitte.

Ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ wird von zwei Seiten eines zugehörigen 280 Polardreiecks $xyz = YYZ$ reell getroffen, von der dritten nicht; es möge X in a und α , Y in b und β den $\mathfrak{C}^{(2)}$ schneiden (Fig. 81), dann liegen der Schnittpunkt $(ab, \alpha\beta) = c$ und der Schnittpunkt $(a\beta, \alpha b) = \gamma$ beide auf der Polare Z von $z = (a\alpha, b\beta)$; z, c, γ bilden ein zweites

Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, weil sie die Diagonalepunkte des ihm eingeschriebenen vollständigen Vierecks $a\alpha b\beta$ sind; die vier Punkte $a, \alpha; b, \beta$ sind harmonische Punkte auf $\mathfrak{C}^{(2)}$, und auf den drei Geraden X, Y, Z sind $a, \alpha; y, z$, bzw. $b, \beta; z, x$ und $c, \gamma; x, y$ ebenfalls harmonisch. Die hierdurch hergestellte Figur bietet interessante Eigenschaften dar.

Fig. 81.



Ebenso, wie der Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ durch die vier Punkte a, α, b, β geht und in ihnen xa, xa, yb, yb zu Tangenten hat, lassen sich zwei andere Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ herstellen, von denen der erstere durch b, β, c, γ geht und in diesen Punkten die Tangenten $yb, y\beta, zc, z\gamma$ hat, der andere aber durch c, γ, a, α geht und die Tangenten $zc, z\gamma, xa, xa$ hat. Denn der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$, welcher in b und β die Tangenten yb und $y\beta$ hat und ausserdem durch c geht, wodurch er vollständig bestimmt ist, muss, weil er y und Y zu Pol und Polare hat und γ der vierte harmonische Punkt zu $y, x; c$ ist, auch durch γ gehen. Er muss ferner, weil auch $x, z; b, \beta$ vier harmonische Punkte sind, auch x und X zu Pol und Polare haben, folglich auch z und Z , also xyz zu einem Polardreiecke; da die Gerade Z den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$

in c und γ trifft, so müssen die Tangenten in diesen Punkten durch den Pol z gehen; der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ besitzt also die behauptete Eigenschaft und in gleicher Weise $\mathfrak{B}^{(2)}$. Solche drei Kegelschnitte:

$\mathfrak{A}^{(2)}$	durch die Punkte	b, β, c, γ	mit den Tangenten	$y\beta, y\beta, zc, z\gamma,$
$\mathfrak{B}^{(2)}$	" " "	c, γ, a, α	" " "	$zc, z\gamma, xa, x\alpha,$
$\mathfrak{C}^{(2)}$	" " "	a, α, b, β	" " "	$xa, x\alpha, yb, y\beta$

heissen *harmonisch zugeordnete Kegelschnitte*; jeder von ihnen berührt die beiden andern doppelt, und die Berührungspunkte sind die drei Paare Gegenecken $a\alpha, b\beta, c\gamma$ eines vollständigen Vierseits; das Diagonal-dreieck xyz desselben ist für alle drei Kegelschnitte ein Polardreieck. Von dessen drei Seiten sind für jeden zwei die Berührungssehnen mit den beiden andern Kegelschnitten; für die zugehörige Involution auf der dritten haben wir ausser den Ecken des Polardreiecks noch ein zweites Paar conjugirter Punkte in den beiden auf ihr gelegenen Gegenecken des Vierseits; denn sie sind Diagonalepunkte des dem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks der beiden andern Gegeneckenpaare. So gehört zu $\mathfrak{C}^{(2)}$ auf Z die Involution $(xy, c\gamma)$, zu $\mathfrak{A}^{(2)}$ auf X die Involution $(yz, a\alpha)$ und zu $\mathfrak{B}^{(2)}$ auf Y die Involution $(zx, b\beta)$.

Die vier Punkte auf jedem der drei Kegelschnitte, welche jedesmal zwei Paare Gegenecken des vollständigen Vierseits sind, bilden immer ein Quadrupel von vier harmonischen Punkten (Nr. 86), denn z. B. $b\beta$ geht durch den Pol x von $a\alpha$ nach $\mathfrak{C}^{(2)}$. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \mathfrak{C}^{(2)}$ erscheinen mithin als drei harmonische Kegelschnitte, welche den drei Vierecken $b\beta c\gamma, c\gamma a\alpha, a\alpha b\beta$ umgeschrieben sind, die aus jenem Vierseit gebildet werden können, wobei stets Gegenecken dieses Vierseits zugeordnet sind (Nr. 86); aus diesem Grunde heissen sie harmonisch zugeordnete Kegelschnitte.

Gleichzeitig erscheinen dieselben drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \mathfrak{C}^{(2)}$ aber auch als drei harmonische Kegelschnitte, welche den drei Vierseiten eingeschrieben sind, die in einem vollständigen Viereck liegen; bezeichnen wir nämlich die sechs Tangenten

mit	$xa,$	$x\alpha,$	$y\beta,$	$y\beta,$	$zc,$	$z\gamma$
	$A,$	$A,$	$B,$	$B,$	$C,$	$\Gamma,$

so ist ersichtlich, dass diese sechs Strahlen ein vollständiges Viereck bilden, d. h. zu je dreien sich in vier Punkten treffen, wobei A und A , B und B , C und Γ die drei Paare von Gegenseiten sind; denn ebenso wie

a, b, c	in einer Gerade liegen,	treffen sich	A, B, Γ	in einem Punkt,
a, β, γ	" " "	" " "	A, B, C	" " "
α, b, γ	" " "	" " "	A, B, C	" " "
α, β, c	" " "	" " "	A, B, Γ	" " "

weil
$$\left. \begin{array}{l} a, \alpha, b, \beta, c, \gamma \\ A, A, B, B, C, C \end{array} \right\} \text{ Pole und Polaren in Bezug auf } \mathfrak{C}^{(2)},$$

in gleicher Weise

$$\left. \begin{array}{l} a, \alpha, b, \beta, c, \gamma \\ A, A, B, B, C, C \end{array} \right\} \text{ Pole und Polaren in Bezug auf } \mathfrak{A}^{(2)},$$

und endlich

$$\left. \begin{array}{l} a, \alpha, b, \beta, c, \gamma \\ A, A, B, B, C, C \end{array} \right\} \text{ Pole und Polaren in Bezug auf } \mathfrak{B}^{(2)} \text{ sind.}$$

281 Der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ ist also ein dem Vierseit $BBC\Gamma$ eingeschriebener harmonischer Kegelschnitt, wobei die Seitenpaare B und B , C und Γ zugeordnet sind; ebenso ist $\mathfrak{B}^{(2)}$ ein dem Vierseit $C\Gamma AA$ eingeschriebener harmonischer Kegelschnitt und $\mathfrak{C}^{(2)}$ ein dem Vierseit $AA BB$ eingeschriebener. Es giebt aber (Nr. 85) nur einen einzigen harmonischen Kegelschnitt, welcher bei gegebener Zuordnung einem gegebenen Vierseit eingeschrieben oder einem Viereck umgeschrieben ist; und zugleich ersehen wir aus der letzten Zusammenstellung, dass das vollständige Viereck und das vollständige Vierseit Polarfiguren rücksichtlich jedes der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ sind, indem nur die drei einfachen Vierecke, aus denen das vollständige Vierseit besteht, den drei einfachen Vierseiten, aus welchen das vollständige Viereck besteht, in verschiedener Weise bei ihnen entsprechen; da also auch die einfachen Vierseite die Polarfiguren der einfachen Vierecke sind, so müssen die jenen eingeschriebenen harmonischen Kegelschnitte die Polarfiguren der diesen umgeschriebenen harmonischen Kegelschnitte sein. Es folgt hieraus, dass die drei harmonisch zugeordneten Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ die merkwürdige Eigenschaft besitzen, dass jeder als seine eigene Polarfigur erscheint, wenn er in Bezug auf einen der beiden andern polarisirt wird.

Um z. B. die Polarfigur des Kegelschnitts $\mathfrak{A}^{(2)}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$ zu erhalten, müssen wir von den vier Punkten b, β, c, γ und den in ihnen gezogenen Tangenten B, B, C, Γ die Polaren und Pole rücksichtlich $\mathfrak{B}^{(2)}$ nehmen; erstere sind beziehlich B, B, C, Γ und letztere β, b, c, γ ; der Polarkegelschnitt geht also durch dieselben vier Punkte und hat dieselben vier Tangenten in ihnen, wie der polarisirte; er coincidirt daher mit ihm. Dasselbe ergiebt sich, wenn wir den dritten Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ als Basis nehmen. Dieser eigenthümliche Zusammenhang der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ lässt sich noch deutlicher überblicken, wenn wir von den Punkten eines dieser Kegelschnitte die Polaren in Bezug auf einen zweiten aufsuchen, welche selbst Tan-

genten des ersten sein müssen, und wenn wir zugleich die Berührungspunkte der letzteren ermitteln.

Die Polare irgend eines Punktes α auf dem Kegelschnitt $\mathcal{A}^{(2)}$ in Bezug auf $\mathcal{B}^{(2)}$ muss eine Tangente von $\mathcal{A}^{(2)}$ sein; sie möge den Berührungspunkt α' haben; dann wird die Polare von α' in Bezug auf $\mathcal{B}^{(2)}$ ebenfalls eine Tangente von $\mathcal{A}^{(2)}$ sein und offenbar den Punkt α zum Berührungspunkt haben; nennen wir t_α und $t_{\alpha'}$ diese beiden Tangenten in α und α' am Kegelschnitt $\mathcal{A}^{(2)}$ und ihren Schnittpunkt ξ , so sind α und $t_{\alpha'}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathcal{B}^{(2)}$ Pol und Polare, ebenso auch α' und t_α , folglich auch ξ und $\alpha\alpha'$; in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathcal{A}^{(2)}$ sind aber ebenfalls ξ und $\alpha\alpha'$ Pol und Polare, weil seine Tangenten in α und α' durch ξ gehen. Der Punkt ξ und die Gerade $\alpha\alpha'$ sind daher gemeinschaftlich für beide Kegelschnitte $\mathcal{A}^{(2)}$ und $\mathcal{B}^{(2)}$ Pol und Polare, sie gehören nicht dem gemeinschaftlichen Polardreiecke xyz an; also haben die Kegelschnitte $\mathcal{A}^{(2)}$ und $\mathcal{B}^{(2)}$ zwei und somit unendlich viele gemeinschaftliche Polardreiecke, und dies ist (Nr. 255) nicht anders möglich, als wenn sie eine doppelte Berührung haben.

Sie haben in der That eine doppelte Berührung in den Punkten c und γ ; z und Z sind Pol und Polare für beide Kegelschnitte gleichzeitig und haben in Bezug auf beide dieselben Involutionen; alle Polardreiecke, welche beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich sind, müssen daher eine Ecke in z und eine Seite in Z haben, und es folgt daraus, dass der Punkt ξ in Z liegen und die Verbindungslinie $\alpha\alpha'$ durch z laufen muss. Um also die Polare eines beliebigen Punktes α des Kegelschnitts $\mathcal{A}^{(2)}$ in Bezug auf $\mathcal{B}^{(2)}$ zu erhalten, ziehen wir αz , welche in α' dem $\mathcal{A}^{(2)}$ zum andern Male begegnet; dann ist die Tangente in α' an $\mathcal{A}^{(2)}$ die Polare von α in Bezug auf $\mathcal{B}^{(2)}$; um gleicherweise die Polare von α in Bezug auf $\mathcal{C}^{(2)}$ zu erhalten, ziehen wir αy , welche in α'' dem $\mathcal{A}^{(2)}$ zum andern Male begegnet; die Tangente in α'' an $\mathcal{A}^{(2)}$ ist dann die Polare von α in Bezug auf $\mathcal{C}^{(2)}$; hieraus folgt zugleich, dass die Verbindungslinie $\alpha'\alpha''$ durch x gehen muss (Nr. 106). *Jeder durch x gehende Strahl trifft also den Kegelschnitt $\mathcal{A}^{(2)}$ in zwei solchen Punkten, dass die Tangenten derselben die Polaren in Bezug auf $\mathcal{B}^{(2)}$ und $\mathcal{C}^{(2)}$ von einem und demselben dritten Punkte des Kegelschnitts $\mathcal{A}^{(2)}$ sind, und das Analoge gilt von y und $\mathcal{B}^{(2)}$, sowie von z und $\mathcal{C}^{(2)}$.*

Ferner lassen sich die Mittelpunkte der drei Kegelschnitte $\mathcal{A}^{(2)}$, $\mathcal{B}^{(2)}$, $\mathcal{C}^{(2)}$ leicht ermitteln; da $\alpha\alpha$ die Berührungssehne und x ihr Pol für die Kegelschnitte $\mathcal{B}^{(2)}$ und $\mathcal{C}^{(2)}$ ist, so muss, wenn μ die Mitte jener Sehne ist, $x\mu$ durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathcal{B}^{(2)}$ und $\mathcal{C}^{(2)}$ gehen; ist μ' die Mitte der Sehne $b\beta$, so muss $y\mu'$ durch die

Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ gehen, folglich ist der Schnittpunkt $(x\mu, y\mu')$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$; ist endlich μ'' die Mitte der Sehne $c\gamma$, so geht $z\mu''$ durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$, und daher ist:

$$\begin{aligned} (y\mu', z\mu'') &= \mathfrak{M} \text{ der Mittelpunkt des Kegelschnitts } \mathfrak{A}^{(2)}, \\ (z\mu'', x\mu) &= \mathfrak{M}' \text{ " " " " } \mathfrak{B}^{(2)}, \\ (x\mu, y\mu') &= \mathfrak{M}'' \text{ " " " " } \mathfrak{C}^{(2)}. \end{aligned}$$

Die drei Punkte μ, μ', μ'' liegen als die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits auf einer Gerade (Nr. 56, 204). Da wir von den drei harmonisch zugeordneten Kegelschnitten ein ihnen gemeinsames Polardreieck xyz und die Mittelpunkte $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$ kennen, so lässt sich nach Nr. 134, 214 auch die Art der Kegelschnitte bestimmen. Denn die drei Mitten μ, μ', μ'' der Diagonalen $a\alpha, b\beta, c\gamma$ des vollständigen Vierseits liegen auf den Verlängerungen der Seiten des Diagonaldreiecks xyz ; es sind nämlich y, z zu a, α harmonisch, und die Mitte des einen Paares zugeordneter Punkte $a\alpha$ liegt offenbar ausserhalb des andern Paares (als Mittelpunkt einer hyperbolischen Involution, zu welcher dies Paar gehört). Es sind also die Schnitte μ, μ', μ'' der Gerade, auf der diese Punkte liegen, mit den Seiten yz, zx, xy von xyz auf den Verlängerungen gelegen. Das Vierseit aller vier Geraden hat $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ zum Diagonaldreieck; und von den drei Diagonalpunkten liegt bekanntlich der eine auf beiden in ihm sich schneidenden Diagonalen zwischen den verbundenen Gegenecken, der zweite nur auf einer und der dritte auf keiner. Nennen wir wieder den Innenraum von xyz und die Scheitelräume elliptisch und die an den Seiten anliegenden hyperbolisch, weil sie die Mittelpunkte der Ellipsen (ev. imaginärer), bzw. Hyperbeln enthalten, zu denen xyz als Polardreieck gehört, so zeigt die obige Lage der drei Punkte μ auf den Seiten, dass mindestens zwei von den drei Mittelpunkten $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$ in hyperbolischen Räumen liegen, diejenigen, welche als Diagonalpunkte des Vierseits mindestens auf einer Diagonale zwischen den Ecken liegen.

Von drei harmonisch zugeordneten Kegelschnitten müssen also entweder alle drei Hyperbeln, oder einer Ellipse und die beiden andern Hyperbeln sein.

Es giebt ein sehr einfaches Beispiel der zweiten Art von drei harmonisch zugeordneten Kegelschnitten. Ist nämlich z der Mittelpunkt des als Ellipse angenommenen Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$, und sind die Seiten X, Y des Polardreiecks die Axen der Ellipse, so sind die beiden andern harmonisch zugeordneten Kegelschnitte zwei Hyperbeln, von

denen die eine die Ellipse in den Scheiteln der grossen Axe, die andere in den Scheiteln der kleinen Axe berührt, beide aber die conjugirten Durchmesser der Ellipse von gleicher Länge zu Asymptoten haben und daher conjugirte Hyperbeln sind. Sie werden gleichseitig, wenn $\mathfrak{C}^{(2)}$ ein Kreis ist.

In eigenthümlicher Art tritt zu den harmonisch zugeordneten Kegelschnitten $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ noch ein vierter imaginärer Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$, von dem man sagen kann, dass er dieselben Beziehungen zeigt, wie die drei reellen (vgl. Nr. 299). Wir haben nämlich oben drei Zuordnungen der Punkte $a, \alpha; b, \beta; c, \gamma$ zu den Geraden $A, A; B, B; C, C$ erkannt, nach denen diese die Polaren jener sind; durch jede dieser Zuordnungen wurde ein Kegelschnitt bestimmt, freilich durch zu viele Bedingungen, die sich aber nicht widersprechen. Jetzt können wir noch eine vierte Zuordnung festsetzen, dass nämlich

$$a, \alpha, b, \beta, c, \gamma \text{ Pole}$$

und

$$A, A, B, B, C, C \text{ Polaren}$$

in Bezug auf einen zu suchenden Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$ seien. XYZ ist für ihn Polardreieck; auf den Seiten kennen wir die Involutionen, welche ihm zugehören; z. B. auf X sind y, z conjugirt und a, α , da $x\alpha = A$ die Polare von a ist (oder $xa = A$ die von α). Diese Paare trennen sich, wegen der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierseits; ebenso auf Y, Z . Also sind die drei Involutionen elliptisch, und der Kegelschnitt kann nicht reell sein. Wir erkennen dies aber auch, indem wir seinen Mittelpunkt aufsuchen; die elliptische Involution, von welcher yz und $\alpha\alpha$ zwei Paare conjugirter Punkte sind, hat nämlich zum Mittelpunkt denjenigen Punkt m , in welchem yz von xM getroffen wird, denn sie gehört auch dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ zu, und da x und X Pol und Polare für $\mathfrak{A}^{(2)}$ sind, so muss xM durch m gehen.

Nun ist, wegen der eben genannten Involution, $(mayz) = (\infty \alpha zy)$; also:

$$\frac{my}{mz} = \frac{ay}{az} : \frac{\alpha z}{\alpha y} = - \left(\frac{ay}{az} \right)^2,$$

da $(a\alpha yz) = -1$ ist; haben m' und m'' die analoge Bedeutung auf Y, Z , so ist ebenso:

$$\frac{m'z}{m'x} = - \left(\frac{bz}{bx} \right)^2, \quad \frac{m''x}{m''y} = - \left(\frac{cx}{cy} \right)^2;$$

es liegen aber a, b, c in gerader Linie, also ist:

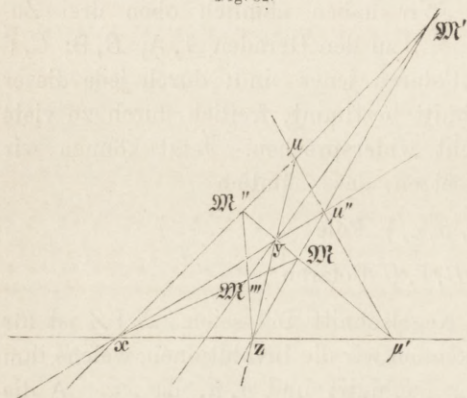
$$\frac{ay}{az} \cdot \frac{bz}{bx} \cdot \frac{cx}{cy} = + 1,$$

und daher:

$$\frac{my}{mz} \cdot \frac{m'z}{m'x} \cdot \frac{m'x}{m'y} = -1;$$

folglich laufen $mx, m'y, m''z$ oder $Mx, M'y, M''z$ in einen Punkt M''' zusammen. Durch diesen Punkt M''' als Mittelpunkt und das Polar-dreieck xyz ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$ vollständig bestimmt; er muss aber imaginär sein, weil M''' in das Innere des Dreiecks xyz hineinfällt (Nr. 134). Denn die drei Punkte μ, μ', μ'' liegen, wie wir oben

Fig. 82.



gesehen haben, in einer Gerade, welche die Seiten des Dreiecks in ihren Verlängerungen trifft; da nun (Fig. 82) die Punkte $x, \mu; y, \mu'; z, \mu''$ die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, dessen Diagonalen sich in M, M', M'' schneiden, so werden xM und $x\mu$ harmonisch getrennt durch xy und xz , und da $x\mu$ die Linie yz im Punkte μ ausserhalb yz trifft, so muss xM dieselbe

zwischen y, z treffen; ebenso muss yM' die Seite zx zwischen ihren Endpunkten treffen und gleicherweise die dritte zM'' die xy ; der Schnittpunkt M''' liegt daher nothwendig innerhalb des Dreiecks xyz . Aus dem Umstande, dass die drei Strahlen xM, yM', zM'' sich in einem Punkte M''' schneiden oder xyz das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $M'M''M'''M''''$ ist, geht hervor, dass für den durch den Mittelpunkt M''' und das Polar-dreieck xyz bestimmten imaginären Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$ in der That

$$a, \alpha, b, \beta, c, \gamma \text{ Pole}$$

und

$$A, A, B, B, \Gamma, C \text{ Polaren}$$

sind. Denn, weil M''' Mittelpunkt ist, so sind der Punkt $(X, xM''') = m$ und der unendlich ferne Punkt auf X conjugirt; wegen des Polar-dreiecks xyz sind es y und z , also gehört die obige Involution in Bezug auf $\mathfrak{D}^{(2)}$ zur Gerade X , und auch a und α sind conjugirt, woraus sich A und A als Polaren von a und α ergeben.

Fügen wir diesen vierten imaginären Kegelschnitt den oben untersuchten dreien hinzu, so haben wir für diese vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitte folgende Zusammengehörigkeit von Pol und Polare:

für	$\mathfrak{A}^{(2)}$	$\mathfrak{B}^{(2)}$	$\mathfrak{C}^{(2)}$	$\mathfrak{D}^{(2)}$
Pol . . .	$a \alpha b \beta c \gamma$	$a \alpha b \beta c \gamma$	$a \alpha b \beta c \gamma$	$a \alpha b \beta c \gamma$
Polare . .	$A A B B C \Gamma$	$A A B B C \Gamma$	$A A B B C \Gamma$	$A A B B C \Gamma$

Aus dieser Zusammenstellung tritt aber klar vor Augen, dass ²⁸⁴ jeder der vier Kegelschnitte seine eigene Polarfigur in Bezug auf einen der übrigen ist. Denn durch Polarisation wird aus Pol und Polare für die eine Figur Polare und Pol für die Polarfigur; wenn wir daher einen der vier Kegelschnitte in Bezug auf einen andern polarisieren, so suchen wir von den Punkten a, α, \dots und den Geraden A, A, \dots , wie sie bei dem gewählten Kegelschnitte zusammengehören, die Polaren und Pole in Bezug auf die gewählte Basis und gelangen dadurch wieder zu denselben Geraden und denselben zugehörigen Punkten; z. B. wenn $\mathfrak{D}^{(2)}$ in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$ polarisiert wird, gehen die Pole und Polaren a und A, α in A, b und B, β und B, c und Γ, γ und C über in A und a, A und α, B und β, B und b, C und γ, Γ und c , welche Polaren und Pole in Bezug auf $\mathfrak{D}^{(2)}$ sind. Der Kegelschnitt muss also seine eigene Polarfigur sein, weil er durch diese sechs Paare von Polen und Polaren schon mehr als bestimmt ist.

Auch für den imaginären Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$ tritt die Eigenschaft der doppelten Berührung zu Tage; er hat nämlich mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ den Punkt x und die Gerade X als Pol und Polare gemeinschaftlich, und die Involution auf X , welche durch die Paare yz und $a\alpha$ bestimmt wird, ist ebenfalls beiden Kegelschnitten zugehörig; sie haben daher eine ideelle doppelte Berührung (Nr. 254) und X zur gemeinschaftlichen Berührungssehne, x zum Berührungspole; ebenso $\mathfrak{D}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$: Y und $y, \mathfrak{D}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$: Z und z .

Die vier Kegelschnitte bilden also auf drei Weisen zwei Paare sich doppelt berührender Kegelschnitte, je mit derselben Berührungssehne und demselben Berührungspole; es gehören zusammen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{B}^{(2)} \text{ und } \mathfrak{C}^{(2)}, \mathfrak{A}^{(2)} \text{ und } \mathfrak{D}^{(2)} \text{ mit } x \text{ und } X, \\ &\mathfrak{C}^{(2)} \text{ „ } \mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)} \text{ „ } \mathfrak{D}^{(2)} \text{ „ } y \text{ „ } Y, \\ &\mathfrak{A}^{(2)} \text{ „ } \mathfrak{B}^{(2)}, \mathfrak{C}^{(2)} \text{ „ } \mathfrak{D}^{(2)} \text{ „ } z \text{ „ } Z \end{aligned}$$

als Berührungspol und Berührungssehne.

Aus dem Obigen geht hervor, wie die vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitte bei dem völlig reellen vollständigen Vierseit, dessen drei Paare Gegenecken $a, \alpha; b, \beta; c, \gamma$ und dessen Diagonalepunkte x, y, z sind, zum Vorschein kommen; eine sehr einfache und natürliche Entstehungsweise werden wir in § 57 kennen lernen. Wir übergangen hier

die Erörterung der Modificationen, welche eintreten, wenn das vollständige Vierseit nicht mehr völlig reell angenommen wird, sondern nach der Art II oder III von Nr. 278 beschaffen ist.

285 In dem von uns angenommenen Fall tritt zu der Eigenschaft, dass jeder der vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitte seine eigene Polarfigur in Bezug auf jeden der drei andern ist, noch eine allgemeinere; bezeichnen wir das vollständige Vierseit, dessen vier Seiten $abc, a\beta\gamma, ab\gamma, \alpha\beta c$ sind, mit \mathfrak{B} und das vollständige Viereck, dessen vier Ecken $AB\Gamma, ABC, ABC, AB\Gamma$ sind, mit V , so sind \mathfrak{B} und V Polarfiguren in Bezug auf jeden der vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitte, aber jedesmal entsprechen sich Ecken und Seiten in anderer Weise, wie aus dem oben zusammengestellten Schema von Polen und Polaren der vier Kegelschnitte abzulesen ist. Es zeigt sich nun weiter, dass *irgend ein dem Vierseit \mathfrak{B} eingeschriebener Kegelschnitt zu seiner Polarfigur in Bezug auf jeden der vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitte einen und denselben dem Viereck V umgeschriebenen Kegelschnitt hat*. Da nämlich vier Punkte einer Gerade dasselbe Doppelverhältniss haben, wie ihre vier Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt, so wird, wenn irgend ein dem Vierseit \mathfrak{B} eingeschriebener Kegelschnitt die Seite abc in p berührt, die Polare von p in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$ diejenige Gerade \mathfrak{Q} sein, welche aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse: $(abcp) = (ABC\mathfrak{Q})$ construirt ist; diese Gerade ist gleichzeitig die Polare eines Punktes p' der Gerade $\alpha\beta c$ in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$, wenn $(ABC\mathfrak{Q}) = (\alpha\beta cp')$ ist; aus der Gleichheit: $(abcp) = (\alpha\beta cp')$ folgt, dass sich $aa, b\beta, pp'$ in einem Punkte schneiden oder p, p' mit $z = (aa, b\beta)$ in einer Gerade liegen. Der angenommene Kegelschnitt, welcher dem Vierseit \mathfrak{B} eingeschrieben ist und abc in p berührt, muss aber (Nr. 84) $\alpha\beta c$ in p' berühren, denn die Berührungsehne pp' muss durch denjenigen Diagonalpunkt des Vierseits gehen, auf dessen gegenüberliegender Diagonale der Schnittpunkt (c) der berührten Seiten liegt; und die Polare von p in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$ ist identisch mit der Polare von p' in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$, nämlich die Gerade \mathfrak{Q} ; folglich ist die Polarfigur des angenommenen Kegelschnitts in Bezug auf die Basis $\mathfrak{A}^{(2)}$ und in Bezug auf die Basis $\mathfrak{B}^{(2)}$ derselbe dem Viereck V umgeschriebene Kegelschnitt; und Gleiches folgt für die andern Basen.

286 Hieran knüpft sich umgekehrt die Aufgabe: *Zu zwei beliebig gegebenen Kegelschnitten einen dritten zu finden, in Bezug auf welchen der eine von jenen beiden Kegelschnitten die Polarfigur des andern ist.**

* Diese Aufgabe hat Steiner in einer am 26. März 1846 in der Berliner Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung behandelt, wovon nur die Anzeige in den Monats-Berichten von 1846 und im Journal für Math., Bd. 32, S. 79

Es liegt nach dem Obigen nahe, zu vermuthen, dass es vier Basen geben wird, welche die gegenseitige Lage von vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitten besitzen, und diese Vermuthung bestätigt sich. Zuvörderst ist klar, dass, wenn die beiden gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, von denen einer (jeder) die Polarcurve des andern sein soll, eine reelle gemeinschaftliche Tangente haben, sie nothwendig auch einen reellen Schnittpunkt haben müssen, denn der Pol jener in Bezug auf die angenommene Basis muss sowohl ein Punkt von $K^{(2)}$, wie von $K_1^{(2)}$ sein; es folgt hieraus, dass von den in Nr. 272 unterschiedenen allgemeinen Fällen, welche bei der gegenseitigen Lage zweier Kegelschnitte eintreten können, die Fälle II und III, in denen $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ vier reelle Schnittpunkte und keine reelle gemeinschaftliche Tangente oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten und keinen reellen Schnittpunkt haben, sofort auszuschliessen sind, also nur die Fälle I und IV, in denen das reelle gemeinschaftliche Polardreieck nach der Art (α) liegt, und der Fall V, in dem es nur theilweise reell ist, übrig bleiben.

Die Fälle I und IV, in welchen die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ keinen reellen Schnittpunkt und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, oder vier reelle Schnittpunkte und vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, lassen sich zusammen behandeln; das reelle gemeinschaftliche Polardreieck sei xyz ; Pol und Polare eines Kegelschnitts, in Bezug auf irgend eine Basis polarisirt, werden Polare und Pol für die Polarcurve; wenn also x und X gleichzeitig für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, deren einer die Polarfigur des andern sein soll, Pol und Polare sind, so müssen in Bezug auf eine solche Basis die entsprechenden Elemente X' und x' auch für $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gleichzeitig Polare und Pol sein; dasselbe gilt von y und Y , z und Z , deren entsprechende Elemente in Bezug auf die Basis Y' und y' , Z' und z' seien. Da aber x, y, z und X, Y, Z Ecken und Gegenseiten eines Dreiecks sind, so folgt dies auch für X', Y', Z' und x', y', z' ; also wird $x'y'z' = X'Y'Z'$ Polardreieck für $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$. Nun haben aber $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nur ein gemeinschaftliches Polardreieck; es coincidirt daher $x'y'z'$ mit xyz .

Aber dies Coincidiren kann auf zweierlei Weise erfolgen; nehmen wir erstens an, dass x' auf eine ungleichnamige Ecke, etwa y , falle, so heisst das: $yz = X$ geht durch ihren Pol $x' = y$ in Bezug auf die Basis, berührt sie also in demselben; liessen wir nun y' in z fallen,

(Gesammelte Werke Bd. 2 S. 367) sich findet. Eine analytische Behandlung des Problems hat *Rosanes* in seiner Inaugural-Dissertation: De polarium reciprocarum theoria observationes, Breslau 1865, geliefert.

so wäre auch dieser Punkt von X ein Punkt der Basis (mit der Tangente $Y = zx$), was nicht mehr möglich ist. Also muss y' auf x fallen, und in diesem Punkte tangirt die Basis dann die $Y = xz$; die dritte Ecke z' fällt auf z . Im ersten Falle decken sich also nur einmal gleichnamige Punkte, im andern Falle aber zweimal und in Folge dessen dreimal. Im ersten Falle geht die Basis durch zwei Ecken, x und y , des gemeinsamen Polardreiecks von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ und berührt in ihnen die Seiten xz, yz desselben. Und dieser Fall ist möglich; denn die Polarisation in Bezug auf jede derartige Basis $\mathfrak{R}^{(2)}$ transformirt einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher xyz zum Polardreieck hat, in einen andern $K_1^{(2)}$, für den das ebenfalls gilt. Aber die beiden Kegelschnitte befinden sich dann in der speciellen Lage, dass sie sich doppelt berühren, welche Lage sie als beliebig gegebene Kegelschnitte nicht haben.

Hat nämlich $K^{(2)}$ mit Z zwei reelle Punkte p, q gemeinsam, so sind diese zu x, y harmonisch; also gehen sie durch die Polarisation in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(2)}$, für welchen z und Z Pol und Polare sind, in qz, pz über; weil aber z und Z auch Pol und Polare in Bezug auf $K^{(2)}$ und auf die Polarcurve $K_1^{(2)}$ sind, so berühren pz, qz den $K^{(2)}$ in p, q und haben als Tangenten von $K_1^{(2)}$ die p, q zu Berührungspunkten; die doppelte Berührung ist für diesen Fall bewiesen. Wenn aber $K^{(2)}$ die Z nicht reell schneidet, so hat die zugehörige Involution, welche elliptisch ist, mit der, von welcher x, y die Doppelpunkte sind, ein reelles Paar r, s gemeinsam. Diese in Bezug auf $K^{(2)}$ conjugirten Punkte gehen, nach $\mathfrak{R}^{(2)}$ polarisirt, in die Geraden sz, rz über, welche in Bezug auf $K_1^{(2)}$ conjugirt sind; ebenso x, y , welche in Bezug auf $K^{(2)}$ conjugirt sind, in zx, zy , welche in Bezug auf $K_1^{(2)}$ conjugirt sind. Daher haben die zu $K^{(2)}$ gehörigen Involutionen auf Z und um z mit den zu $K_1^{(2)}$ gehörigen die Paare $r, s; x, y$, bez. $z(r, s; x, y)$ gemeinsam und sind identisch, d. h. $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ berühren sich doppelt mit Z als Berührungsschne und z als Berührungspol.

Zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte können als Basis der Polarisation, die jeden in den andern überführt, einen Kegelschnitt haben, der in irgend zwei conjugirten Punkten der gemeinsamen zugehörigen Involution auf der Berührungsschne die Strahlen nach dem Berührungspole tangirt.

Haben aber die Kegelschnitte $K^{(2)}, K_1^{(2)}$ nicht diese besondere Lage, so muss in Bezug auf die Coincidenz der beiden Dreiecke $xyz, x'y'z'$ der andere Fall eintreten, dass durchweg gleichnamige Punkte sich decken*; da dann $x' = x$ der Pol von yz nach der Basis ist u. s. w.,

* In den früheren Auflagen war nur dieser allgemeine Fall erwähnt.

so wird dies Dreieck xyz auch Polardreieck für diese. Bei beliebiger Lage der gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}, K_1^{(2)}$ ist ihr gemeinsames Polardreieck auch Polardreieck für die Basis jeder Polarisation, die den einen in den andern überführt.

Wir wissen ferner (Nr. 272), dass in den Fällen I und IV von 287 dem gemeinschaftlichen Polardreiecke xyz ein Eckpunkt z innerhalb beider Kegelschnitte liegt und die durch ihn gehenden beiden Seiten X, Y die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in reellen Punktepaaren schneiden, während die dritte Z , welche die Punkte x und y enthält, keinen von beiden Kegelschnitten trifft. Möge die Seite X dem Kegelschnitte $K^{(2)}$ in p und π , dem $K_1^{(2)}$ in p_1 und π_1 , dagegen Y dem Kegelschnitte $K^{(2)}$ in r und q , dem $K_1^{(2)}$ in r_1 und q_1 begegnen; die Punkte p und π , p_1 und π_1 sind Paare conjugirter Punkte einer hyperbolischen Involution, deren Doppelpunkte z und y sind, und ebenso r und q , r_1 und q_1 Paare conjugirter Punkte einer zweiten, deren Doppelpunkte z und x sind. Die Tangenten in den Punkten p, π, p_1, π_1 sind $xp, x\pi, xp_1, x\pi_1$ und in den Punkten r, q, r_1, q_1 die Geraden yr, yq, yr_1, yq_1 . Wenn nun der Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ die Polarfigur von $K^{(2)}$ sein soll in Bezug auf eine noch zu suchende Basis, so muss die Polare von p in Bezug auf diese Basis, welche mit $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ das Polardreieck xyz gemeinsam hat, einmal durch x gehen, weil p auf X liegt, und andererseits eine Tangente der Polarfigur $K_1^{(2)}$ sein; sie muss also eine der beiden Tangenten xp_1 oder $x\pi_1$ sein, und ebenso muss die Polare von π in Bezug auf die zu suchende Basis eine der beiden Tangenten $x\pi_1$ oder xp_1 sein. Das Gleiche gilt für den andern Strahl Y . Die Polare von r in Bezug auf die noch unbekannt Basis muss yr_1 oder yq_1 sein und die Polare von q : yq_1 oder yr_1 . Hiernach stellen sich nur vier Möglichkeiten heraus; für die unbekannt Basis sind entweder

- oder 1) $p, p_1; \pi, \pi_1; r, r_1; q, q_1$,
 oder 2) $p, p_1; \pi, \pi_1; r, q_1; q, r_1$,
 oder 3) $p, \pi_1; \pi, p_1; r, r_1; q, q_1$,
 oder 4) $p, \pi_1; \pi, p_1; r, q_1; q, r_1$

je zwei conjugirte Punkte.

Dem entsprechend werden sich vier Basen ermitteln lassen, indem auf den Seiten X, Y die Involutionen bekannt sind, welche einer jeden zugehören müssen. Auf X bilden nämlich die vier Punkte p, π, p_1, π_1 zwei Punktepaare $p\pi, p_1\pi_1$ der obigen hyperbolischen Involution (h_1), deren Doppelpunkte y und z sind; andererseits rufen dieselben vier Punkte, paarweise als conjugirte Punkte aufgefasst, noch zwei neue Involutionen hervor (Nr. 42), von denen eine elliptisch, die andere

hyperbolisch ist; diejenige, bei welcher p und p_1 , π und π_1 conjugirt sind, sei die hyperbolische (h_1) , und diejenige, bei welcher p und π_1 , π und p_1 conjugirt sind, sei die elliptische (e_1) . In gleicher Weise werden auf der Seite Y durch die vier Punkte $r, \varrho, r_1, \varrho_1$ drei Involutionsen hervorgerufen, von denen die erste (h_2) durch die Paare r und ϱ , r_1 und ϱ_1 bestimmt wird und hyperbolisch ist mit den Doppelpunkten z und x , während von den beiden übrigen eine, eine hyperbolische (h_2) , durch die Punktepaare r und r_1 , ϱ und ϱ_1 , die andere, eine elliptische (e_2) , durch die Punktepaare r und ϱ_1 , ϱ und r_1 bestimmt wird. Die gesuchte Basis hat daher auf den beiden Seiten X und Y

entweder 1) die Involutionsen $(h_1), (h_2)$,
 oder 2) „ „ $(h_1), (e_2)$,
 „ 3) „ „ $(e_1), (h_2)$,
 „ 4) „ „ $(e_1), (e_2)$

zu zugehörigen.

Die beiden hyperbolischen Involutionsen (h_1) und (h_2) auf X und Y haben Doppelpunkte, welche wir beziehungsweise mit a, α und b, β bezeichnen wollen.

Aus Nr. 42 wissen wir, dass y, z , die Doppelpunkte von (h_1) , je ein Paar von (h_1) und (e_1) , a, α , die von (h_1) , je ein Paar in (h_1) und (e_1) bilden und ebenso x, z je ein Paar in (h_2) , (e_2) und b, β je ein Paar in (h_2) und (e_2) .

Weil a, α harmonisch liegen zu z, y und b, β zu z, x , so treffen sich die Verbindungslinien ab und $\alpha\beta$ in einem Punkte c der Gerade xy und ebenso $a\beta, \alpha b$ sich in einem Punkte γ derselben Gerade xy ; also sind die Punkte $a\alpha, b\beta, c\gamma$ die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits \mathfrak{B} , dessen Diagonaldreieck xyz ist.

288 Nach diesen Erörterungen werden sich jetzt die vier Basen ergeben, in Bezug auf welche $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ Polarfiguren sein sollen. Fassen wir zunächst den ersten Fall der beiden hyperbolischen Involutionsen (h_1) und (h_2) ins Auge, so muss die gesuchte Basis die Eigenschaft besitzen, dass in Bezug auf sie von p die Polare xp_1 , von π die Polare $x\pi_1$ und auch von p_1 die Polare xp , von π_1 die Polare $x\pi$ ist; dadurch wird X Polare von x und (h_1) zugehörige Involution auf X ; die Basis muss also xa und $x\alpha$ in den Punkten a und α berühren. Sie muss ebenso yb und $y\beta$ in den Punkten b und β berühren.

Es giebt aber einen solchen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, wie die Umkehrung der obigen Betrachtung über harmonisch zugeordnete Kegelschnitte zeigt; wir legen $\mathfrak{C}^{(2)}$ zunächst durch a, α und b , so dass er in a und α die Geraden xa und $x\alpha$ berührt; dadurch wird $a\alpha = yz = X$ Polare

von x , und β , der dem b in Bezug auf x, z harmonisch zugeordnet ist, der zweite Schnitt mit xz , und weil z, y zu a, α harmonisch sind, so wird y Pol von xz und $yb, y\beta$ berühren in b, β .

In Bezug auf $\mathfrak{C}^{(2)}$ polarisirt, gehen die Punkte p, π, r, ϱ von $K^{(2)}$ und ihre von x , bezw. y kommenden Tangenten über in die Tangenten $xp_1, x\pi_1, yr_1, y\varrho_1$ von $K_1^{(2)}$ und ihre Berührungspunkte $p_1, \pi_1, r_1, \varrho_1$, also $K^{(2)}$ in $K_1^{(2)}$.

Nachdem dieser am einfachsten zu construirende Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ hergestellt ist, bei welchem die zugehörigen Involutionen auf X, Y die hyperbolischen $(h_1), (h_2)$ sind, leiten wir die drei andern Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \mathfrak{D}^{(2)}$ in der Weise aus $\mathfrak{C}^{(2)}$ ab, wie es im ersten Theil dieses Paragraphen erörtert wurde, und erhalten in ihnen die drei Kegelschnitte, denen die Involutionen auf X, Y und die zu ihnen perspectivischen aus x, y in den andern Combinationen, wie sie oben aufgezählt wurden, zugehören. $\mathfrak{A}^{(2)}$ berührt $yb, y\beta$ in b, β , hat also (h_2) auf Y und die zu ihr perspective aus y zu zugehörigen, ferner aber auch (Nr. 280) die durch $zy, a\alpha$ bestimmte (e_1) auf X und die zu ihr perspective aus x ; $\mathfrak{B}^{(2)}$ berührt $xa, x\alpha$ in a, α und hat damit (h_1) auf X und die zu ihr perspective Involution aus x zu zugehörigen, ferner die durch $zx, b\beta$ auf Y bestimmte (e_2) und die perspective aus y ; endlich $\mathfrak{D}^{(2)}$ die Involutionen (e_1) und (e_2) auf X, Y und die zu ihnen perspectivischen aus x, y (Nr. 283).

Und weil sie diese Involutionen zu den zugehörigen haben, so ergibt sich, wie bei $\mathfrak{C}^{(2)}$, dass die Polarisation in Bezug auf einen jeden von ihnen $K^{(2)}$ in $K_1^{(2)}$ überführt; z. B. die in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$ führt die Punkte p, π, r, ϱ von $K^{(2)}$ und ihre Tangenten $xp, x\pi, yr, y\varrho$ in die Tangenten $x\pi_1, xp_1, yr_1, y\varrho_1$ von $K_1^{(2)}$ und ihre Berührungspunkte $\pi_1, p_1, r_1, \varrho_1$ über.

Diese vier Basen haben die Eigenschaft von vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitten, welche sich auf das vollständige Vierseit beziehen, dessen drei Paare Gegenecken $a\alpha, b\beta, c\gamma$ sind, und dessen Diagonaldreieck xyz ist. Eine von ihnen ist imaginär, die drei andern sind reell und entweder alle drei Hyperbeln oder eine Ellipse und die beiden übrigen Hyperbeln. Wir können nunmehr folgendes Resultat aussprechen:

Sind zwei beliebige Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gegeben, so können vier andere Kegelschnitte von der Beschaffenheit gefunden werden, dass für jeden von ihnen als Basis die gegebenen Kegelschnitte Polarfiguren von einander sind. Diese vier Basen sind vier harmonisch zugeordnete Kegelschnitte. Haben $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ entweder vier reelle Schnittpunkte und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, oder vier reelle gemeinschaft-

liche Tangenten und keinen reellen Schnittpunkt, so ist keine der Basen reell; haben dagegen $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ entweder vier reelle Schnittpunkte und vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, oder keinen reellen Schnittpunkt und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, so sind von den vier Basen drei reell und eine imaginär; die drei reellen Basen sind entweder alle drei Hyperbeln, oder eine ist Ellipse und die beiden andern sind Hyperbeln.

Haben $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ endlich zwei reelle Schnittpunkte und zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten, so sind von den vier Basen nur zwei reell und entweder beide Hyperbeln, oder die eine Ellipse, die andere Hyperbel.*

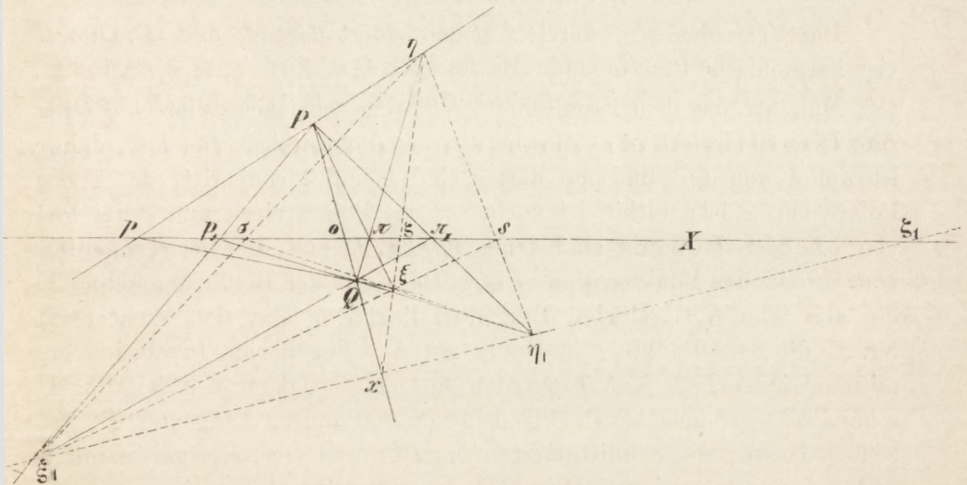
289 Die letzte Behauptung, welche wir in den Satz schon mit aufgenommen haben, ist noch zu beweisen. In dem Falle B) (Nr. 272), wenn die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nur zwei reelle Schnittpunkte und zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, ist von dem gemeinschaftlichen Polardreiecke reell nur eine Ecke x und die Gegenseite X . Die Punktepaare $p, \pi; p_1, \pi_1$, in denen diese die Kegelschnitte trifft, müssen reell sein und einander trennen, so dass p_1 zwischen p und π, π_1 ausserhalb $p\pi$ liegt, wie in Nr. 272 gezeigt ist. Die Kegelschnitte haben ferner eine eigentliche gemeinschaftliche Secante, welche durch ihre beiden reellen Schnittpunkte P, Q und durch x geht, und eine ideelle gemeinschaftliche Secante, die ebenfalls durch x geht; die erstere treffe X in o , die letztere in ω . Der Schnitt s der reellen gemeinsamen Tangenten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ und der ebenfalls reelle σ der imaginären liegen auf X ; dem Punkte σ gehört in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ dieselbe elliptische, dem Punkt s dieselbe hyperbolische Involution zu.

Die Punkte p, π, p_1, π_1 stehen nun zu den vier Punkten o, ω, s, σ in einer Beziehung, die wir nun erörtern müssen. Es sind nämlich zunächst o und ω conjugirte Punkte der durch die beiden Paare $p\pi$ und $p_1\pi_1$ bestimmten elliptischen Involution, weil xo und $x\omega$ ein Geradenpaar des durch $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ bestimmten Büschels bilden, und es sind auch s und σ conjugirt in dieser Involution. Denn zu der Involution der Tangentenpaare, die von x an die Kegelschnitte der

* In den früheren Auflagen stand nur der letztere Fall; aber man erkennt sofort durch eine collineare Transformation, bei welcher als Fluchtgerade eine beide Basen reell schneidende Gerade (eine Gerade, die einen Punkt der einen mit einem der andern verbindet) genommen wird, dass man diesen Fall in den andern überführen kann. Im Beweise haben (2. Aufl. S. 402 unten) Annahmen über die Lage der Punkte P, Q, o, p, q , die nicht die allein möglichen sind, zu dem irrigen Ergebnisse geführt.

durch $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ bestimmten Schaar kommen, gehören $x(p, \pi; p_1, \pi_1; s, \sigma)$, von denen $xs, s\sigma$ nach dem Punktepaare (s, σ) der Schaar gehen; also sind auch $p, \pi; p_1, \pi_1; s, \sigma$ in Involution. Die beiden ersten Paare lehren, dass dies auch die Schnittinvolution von X mit dem Büschel $K^{(2)} K_1^{(2)}$ ist; also gehört zu ihr auch das Paar $o\omega$.

Fig. 83.



Die vier Punkte p, π, p_1, π_1 bestimmen ausser der erwähnten elliptischen Involution, in anderer Weise zu Paaren geordnet, zwei hyperbolische Involutionen, nämlich durch die Paare $pp_1, \pi\pi_1$, bezw. $p\pi_1, \pi p_1$.

Für die elliptische Involution (e) sind conjugirt:

$$1) \quad p, \pi; p_1, \pi_1; o, \omega; s, \sigma,$$

für die eine hyperbolische (h):

$$2) \quad p, p_1; \pi, \pi_1; o, s; \omega, \sigma,$$

für die andere (h'):

$$3) \quad p, \pi_1; \pi, p_1; o, \sigma; s, \omega.$$

1) ist bewiesen.

Um 2) und 3) nachzuweisen, wollen wir umgekehrt den Punkt s als conjugirten Punkt von o in der Involution (h) construiren und zeigen, dass für den so construirten Punkt s die ihm zugehörige Involution rücksichtlich beider Kegelschnitte $K^{(2)}, K_1^{(2)}$ dieselbe wird; woraus dann folgt, dass er der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlichen Tangenten ist. Wir bestimmen dazu, weil P, Q auf einer Gerade durch o liegen, nach Nr. 51 die Schnittpunkte $(P\pi, Qp) = \xi, (Pp_1, Q\pi_1) = \xi_1$ (Fig. 83); dann trifft $\xi\xi_1$ den Träger X in demjenigen Punkte s ,

welcher dem o conjugirt ist in (h) ; wir erhalten denselben Punkt s auch, indem wir die Schnittpunkte $(Pp, Q\pi) = \eta$ und $(P\pi_1, Qp_1) = \eta_1$ aufsuchen und $\eta\eta_1$ ziehen, welche Linie auch durch s gehen muss.

Ebenso erhalten wir durch die Involution (h') den Punkt σ als Schnitt von X mit $\xi\eta_1$ oder mit $\xi_1\eta$; wir haben also:

$$(\xi\xi_1, \eta\eta_1) = s, \quad (\xi\eta_1, \xi_1\eta) = \sigma.$$

Dass $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ durch x gehen, folgt daraus, dass $P, Q; o, x$ vier harmonische Punkte sind. Es sei noch $(\xi\eta, X) = \zeta$, $(\xi_1\eta_1, X) = \zeta_1$.

Nun hat das dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ eingeschriebene Viereck $PQp\pi$ zum Diagonaldreieck $o\xi\eta$; dies ist also ein Polardreieck für $K^{(2)}$, daher ist o Pol von $\xi\eta$, und auf dieser sind x und ζ conjugirt, da X die Polare von x ist; mithin ist auch $ox\zeta$ ein Polardreieck und ζ der Pol von ox oder PQ . Es sind daher $xp, x\pi, P\zeta, Q\zeta$ die vier Tangenten von $K^{(2)}$ in den Punkten p, π, P, Q . Da s auf der Berührungsschne X der aus x an $K^{(2)}$ gelegten Tangenten liegt, so lässt sich leicht nach Nr. 95 die dem Punkte s in Bezug auf $K^{(2)}$ zugehörige Involution ermitteln, indem wir jene Tangenten $xp, x\pi$ als Träger der den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden Punktreihen von den andern Tangenten $P\zeta, Q\zeta$ treffen lassen; die Schnittpunkte $(xp, P\zeta)$ und $(x\pi, P\zeta)$ geben mit s verbunden zwei conjugirte Strahlen der genannten Involution, und die Punkte $(xp, Q\zeta)$ und $(x\pi, Q\zeta)$ ebenfalls.

Analog verfahren wir beim Kegelschnitt $K_1^{(2)}$; $xp_1, x\pi_1, P\zeta_1, Q\zeta_1$ sind vier Tangenten desselben und die Schnittpunkte $(xp_1, P\zeta_1)$ und $(x\pi_1, P\zeta_1)$ geben mit s verbunden zwei conjugirte Strahlen der dem Punkt s in Bezug auf $K_1^{(2)}$ zugehörigen Involution und ebenso die Punkte $(xp_1, Q\zeta_1)$ und $(x\pi_1, Q\zeta_1)$.

Diese beiden Strahlenpaare fallen aber mit den vorhinigen zusammen; denn, da ξ, ξ_1, s in gerader Linie liegen, so sind die beiden Strahlbüschel $P(\pi p_1 os)$ und $x(\zeta\xi_1 os)$ perspectiv, also sind die Punktreihen $\pi p_1 os$ und $\zeta\xi_1 os$ projectiv, mithin auch die Strahlbüschel $x(\pi p_1 os)$ und $P(\zeta\xi_1 os)$; da P, o, x in einer Geraden liegen, so liegen diese Büschel perspectiv, d. h. die Punkte:

$$(x\pi, P\zeta), (xp_1, P\zeta_1) \text{ und } s$$

liegen in einer Geraden und in gleicher Weise

$$(xp, P\zeta), (x\pi_1, P\zeta_1) \text{ und } s$$

in einer zweiten Geraden. Diese beiden Strahlen sind aber nach dem Vorigen conjugirt sowohl in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$, als auch in Bezug auf $K_1^{(2)}$. In derselben Weise zeigen wir, dass die Punkte:

$$(x\pi, Q\xi), (xp_1, Q\xi_1) \text{ und } s$$

im einer Gerade und ebenso

$$(xp, Q\xi), (x\pi_1, Q\xi_1) \text{ und } s$$

im einer zweiten Gerade liegen, und dass diese beiden Geraden conjugirt im Bezug auf beide Kegelschnitte sind. Wir haben also durch s zwei Paare conjugirter Geraden in Bezug auf beide Kegelschnitte (X und x s ist ein drittes Paar), mithin hat der Punkt s für beide Kegelschnitte dieselbe zugehörige Involution; d. h. er ist der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher Tangenten von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$.

In analoger Weise zeigt sich für den Punkt $\sigma = (\xi\eta_1, \xi_1\eta)$, dass mit ihm sowohl

$$(x\pi, P\xi) \text{ und } (x\pi_1, P\xi_1),$$

als auch

$$(xp, P\xi) \text{ und } (xp_1, P\xi_1),$$

sowie auch

$$(x\pi, Q\xi) \text{ und } (x\pi_1, Q\xi_1)$$

und

$$(xp, Q\xi) \text{ und } (xp_1, Q\xi_1)$$

je in einer Gerade liegen; also ist auch der Punkt σ ein solcher, dass ihm rücksichtlich beider Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ dieselbe Involution zugehört.

Endlich ist leicht zu erkennen, dass von den beiden Involutionen (s) und (σ) die erstere hyperbolisch, die letztere elliptisch ist; denn die aus den vier Punkten p, π, p_1, π_1 abgeleiteten Involutionen:

die elliptische (e), bestimmt durch die Paare $p\pi, p_1\pi_1$,

die hyperbolische (h), „ „ „ „ $pp_1, \pi\pi_1$,

die hyperbolische (h'), „ „ „ „ $p\pi_1, \pi p_1$,

stehen in der Verbindung mit einander, wie sie in Nr. 42 beschrieben ist: wenn zu dem Punkte o in den Involutionen (e), (h), (h') bezw. die Punkte ω, s, σ conjugirt sind, so sind auch s und σ in (e), σ und ω in (h), ω und s in (h') conjugirt.

Weil s und σ conjugirt in (e) sind, so werden sie durch p und π von einander getrennt; der eine liegt ausserhalb, der andere innerhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$ und die Involutionen, welche ihnen in Bezug auf ihn zukommen, sind verschiedenartig, die eine hyperbolisch, die andere elliptisch. Wir nehmen die Bezeichnung so eingerichtet an, dass s der äussere und σ der innere Punkt ist. Die Doppelstrahlen der hyperbolischen Involution sind die beiden reellen gemeinschaftlichen Tangenten \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$.

Nachdem diese Auseinandersetzung vorausgeschickt worden ist, 290 erinnern wir, dass, wenn es eine Basis geben soll, für welche der

Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ die Polarfigur von $K^{(2)}$ ist, die Polare X' von x und der Pol x' von X in Bezug auf dieselbe, da x und X Pol und Polare in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ sind, Polare und Pol in Bezug auf $K_1^{(2)}$ und $K^{(2)}$ sein, also, da nur ein gemeinsames Paar Pol und Polare vorhanden ist, mit X und x zusammenfallen müssen. Daher sind x und X , welche allein gemeinsam Pol und Polare für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ sind, auch Pol und Polare für jede solche Basis; deshalb geht die Polare des Punktes p auf X in Bezug auf die Basis durch x und ist zugleich eine Tangente von $K_1^{(2)}$, also entweder xp_1 oder $x\pi_1$, und die Polare von π ist alsdann die Gerade $x\pi_1$ oder xp_1 . Es stellen sich für die Basis folgende Bedingungen heraus: 1) entweder gehört ihr die Involution (h) zu, d. h. p und p_1 , π und π_1 sind conjugirte Punkte für sie, und da diese Involution hyperbolisch ist, so geht, wenn ihre Doppelpunkte a und α sind, die gesuchte Basis durch a und α und hat xa und $x\alpha$ zu Tangenten in diesen Punkten; oder 2) der Basis gehört die Involution (h') zu, d. h. p und π_1 , π und p_1 sind conjugirte Punkte für sie, und, wenn die Doppelpunkte dieser ebenfalls hyperbolischen Involution a' , α' sind, so muss die Basis durch a' , α' gehen und xa' , $x\alpha'$ zu Tangenten in diesen Punkten haben.

Durch diese Bedingungen ist die Basis noch nicht vollkommen bestimmt. Fügen wir aber hinzu, dass für eine reelle Basis die Polare eines reellen Schnittpunktes der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ eine reelle gemeinschaftliche Tangente derselben sein muss, so ist — P , Q sind die reellen gemeinsamen Punkte, \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} die reellen gemeinsamen Tangenten von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ — entweder \mathfrak{P} die Polare von P und \mathfrak{Q} von Q , oder \mathfrak{Q} die Polare von P und \mathfrak{P} von Q ; in jedem der beiden Fälle ist also s der Pol von PQ , und s und o sind conjugirte Punkte und ebenso σ und ω . Hieraus erkennen wir, dass der Fall der Involution (h') keine reelle Basis liefern kann, denn bei dieser sind s und ω , σ und o je zwei conjugirte Punkte, was dem eben Gefundenen widerspricht. Es bleibt hiernach nur der Fall 1) übrig; die Involution (h) hat o und s , ω und σ zu conjugirten, a und α zu Doppelpunkten; die Punkte o und s liegen also harmonisch zu a , α und werden durch sie getrennt.

Um nun eine Basis zu erhalten, für welche $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ Polarfiguren von einander sind, müssen entweder P und \mathfrak{P} und gleichzeitig Q und \mathfrak{Q} oder P und \mathfrak{Q} und gleichzeitig Q und \mathfrak{P} Pol und Polare in Bezug auf die Basis sein; die eigentliche gemeinschaftliche Secante xo , welche durch P und Q geht, treffe \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} in den Punkten p und q ; dann sind sowohl P und Q harmonische Punkte zu x und o , als auch p und q , denn \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} sind harmonisch zu X und sx ; es sind da-

her x und o die Doppelpunkte der hyperbolischen Involution, von der zwei Paare conjugirter Punkte P und Q , p und q sind. Diese vier Punkte bestimmen noch zwei andere Involutionen, von denen eine elliptisch, die andere hyperbolisch ist; die hyperbolische sei (Pp, Qq) und habe die Doppelpunkte b, β ; die elliptische sei (Pq, Qp) . Nach dem Satze von Nr. 42 sind die Punkte x, o conjugirt in diesen beiden Involutionen und b, β in der elliptischen.

Wir fanden oben, dass die Basis jedenfalls durch a, α geht und 291 in diesen Punkten von $xa, x\alpha$ berührt wird; damit gehört sie einer Büschel-Schaar sich doppelt (reell) berührender Kegelschnitte an. Transformirt sie P in \mathfrak{P} und Q in \mathfrak{Q} , so sind P und p , Q und q für sie conjugirt; also gehört ihr die hyperbolische Involution (Pp, Qq) zu, und sie geht durch die Doppelpunkte b, β derselben. Transformirt sie aber P in \mathfrak{Q} , Q in \mathfrak{P} , so gehört ihr die elliptische Involution zu, die wir auch durch die Paare $xo, b\beta$ bestimmen können.

Durch diese Bedingungen wird nicht zu viel verlangt; denn, dass die Punkte o und x conjugirt sind, was in beiden Fällen geschehen soll, folgt ja daraus, dass xa und $x\alpha$ in a, α berührt werden, mithin $a\alpha$, auf der o liegt, Polare von x ist. Also ist nur noch erforderlich, dass ein weiteres Paar der einen oder andern Involution in Bezug auf die Basis conjugirt seien, was durch einen Kegelschnitt der Büschel-Schaar erfüllt wird.

Weil nun den beiden Basen die Involution (h) auf X , in welcher p und p_1 , π und π_1 conjugirt sind, zugehört und x Pol von X für sie ist, so transformiren sie die Punkte p und π von $K^{(2)}$ und ihre Tangenten $xp, x\pi$ in die Tangenten p_1x, π_1x von $K_1^{(2)}$ und ihre Berührungspunkte p_1, π_1 . In (h) sind o und s conjugirt; folglich ist s , der auf X liegt, Pol von ox in Bezug auf beide Basen. Zu der ersten Basis gehört die Involution (Pp, Qq) auf ox mit den Doppelpunkten b, β . Also transformirt sie die Punkte P, Q von $K^{(2)}$ in die Tangenten $ps = \mathfrak{P}$, $qs = \mathfrak{Q}$ von $K_1^{(2)}$, und, weil ebenso zur zweiten die Involution (Pq, Qp) gehört, so transformirt diese jene Punkte in die Tangenten $qs = \mathfrak{Q}$, $ps = \mathfrak{P}$ von $K_1^{(2)}$. Die Polarcurve von $K^{(2)}$ wird also von p_1x, π_1x in p_1, π_1 tangirt, ebenso wie $K_1^{(2)}$, und hat mit $K_1^{(2)}$ noch die Tangenten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ gemeinsam; also ist sie mit $K_1^{(2)}$ identisch.

Weil s zu o in Bezug auf a, α und x zu o in Bezug auf b, β harmonisch sind, so ist xs die dem Diagonalkunkte $o = (a\alpha, b\beta)$ des Vierecks $aab\beta$ gegenüberliegende Diagonale und enthält die beiden andern Diagonalkunkte $c = (ab, \alpha\beta)$ und $\gamma = (a\beta, \alpha b)$, welche zu x und s harmonisch liegen.

Da in Bezug auf die zweite Basis b und β conjugirt sind, so ist βs Polare von b und ihr Schnitt mit abc conjugirt zu b . Er ist der vierte harmonische zu b in Bezug auf a und c , denn zu diesen vier Punkten liegen die vier harmonischen Punkte $a, \alpha; o, s$ (aus β) perspectiv. Also geht die zweite Basis durch c und ebenso durch γ . Die beiden Basen sind harmonisch zugeordnete Kegelschnitte, da sie je durch zwei Gegeneckenpaare $a, \alpha; b, \beta$; bzw. $a, \alpha; c, \gamma$ eines vollständigen Vierseits gehen und auf ihnen diese beiden Punktepaare harmonisch liegen, denn $b\beta$ und $c\gamma$ gehen durch den gemeinsamen Pol x von aa .

Nachdem nun erkannt ist, dass beide Basen die Geraden $xa, x\alpha$ in a, α berühren und die eine durch b, β , die andere durch c, γ geht, sind sie als *reelle* Curven nachgewiesen. Da ferner der durch den Berührungspol x gehenden Gerade xo in Bezug auf die eine eine hyperbolische, in Bezug auf die andere eine elliptische Involution zugehört, so können nicht beide Ellipsen sein; denn zwei Ellipsen aus einer Büschel-Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte werden von einem Strahle durch den Berührungspol gleichartig geschnitten, da sie in dem nämlichen Winkel der gemeinsamen Tangenten liegen (Nr. 254). Die andern Fälle aber, dass beide Basen Hyperbeln oder dass die eine Ellipse, die andere Hyperbel ist, sind beide möglich.

Vierter Abschnitt.

Das Polarsystem und das Kegelschnittnetz.

§ 56. Erklärung und Construction des Polarsystems.

Die in den §§ 29 und 30 auseinandergesetzten Polareigenschaften 292 des Kegelschnitts haben eine eigenthümliche Beziehung von sämtlichen Punkten der Ebene zu sämtlichen Geraden derselben und eine paarweise Verkettung der Punkte einer Gerade sowie der Strahlen durch einen Punkt zu einer Involution ans Licht gebracht. Dreht man eine Gerade um einen festen Punkt, so verändert sich die Involution auf ihr; die zu dem festen Punkt conjugirten Punkte für jede dieser Involutionsen liegen auf einer Gerade (Polare des festen Punktes); nehmen wir auf dieser Gerade verschiedene Punkte und fassen die ihnen zugehörigen Involutionsen auf, so laufen die zu der Gerade in jeder von ihnen conjugirten Strahlen durch einen festen Punkt (Pol der Gerade), der mit dem zuerst angenommenen Punkte zusammenfällt. Diese Zusammengehörigkeit der Punkte und Geraden einer Ebene lässt sich nun auch unabhängig vom Kegelschnitt herstellen und führt zu dem Begriff des Polarsystems.

Sämmtliche Punkte und Geraden in einer Ebene sollen derartig mit einander verflochten werden, dass auf jeder Gerade und um jeden Punkt eine Involution entsteht; je zwei conjugirte Punkte oder Strahlen einer solchen Involution sollen *conjugirte Punkte*, *conjugirte Strahlen im Polarsystem* heissen. Ferner sollen für alle durch einen Punkt B gehenden Strahlen diejenigen Punkte, welche dem B conjugirt sind in den auf diesen Strahlen befindlichen Involutionsen, auf einer und derselben Gerade \mathcal{A} liegen und zugleich alle diejenigen Strahlen, welche dem Strahl \mathcal{A} conjugirt sind in denjenigen Involutionsen, deren Grundpunkte auf \mathcal{A} liegen, durch einen und denselben Punkt und zwar durch den vorgenannten Punkt B gehen. Der Punkt B und die Gerade \mathcal{A} sollen *Pol und Polare* im Polarsysteme heissen.

Ein solches Polarsystem Π stellen wir auf folgende Weise her. Es seien (Fig 84) auf zwei Geraden b und c , die sich in \mathcal{A} schneiden, Involutionen gegeben, in denen dem gemeinsamen Punkte \mathcal{A} die Punkte \mathcal{C} , \mathcal{B} conjugirt sind. Eine Gerade s treffe b und c in b_1 und c_1 , denen b_1 und c_1 conjugirt sind; so ist der Schnittpunkt $\mathcal{S} = (\mathcal{B}b_1, \mathcal{C}c_1)$ der Pol von s in Π . Ist umgekehrt \mathcal{S} gegeben, so schneide man b, c mit $\mathcal{B}\mathcal{S}$ und $\mathcal{C}\mathcal{S}$ in b_1, c_1 , denen b, c conjugirt seien; deren Verbindungsline ist s .

Durch \mathcal{S} legen wir eine Gerade s' , welche wiederum die b, c in b', c' treffe; die conjugirten Punkte seien b'_1, c'_1 ; der Pol \mathcal{S}' ist $(\mathcal{B}b'_1, \mathcal{C}c'_1)$. Wegen der beiden Involutionen ist

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\mathcal{C}b'_1) = (\mathcal{C}\mathcal{A}b_1b') \\ \text{und} & (\mathcal{A}\mathcal{B}c'_1) = (\mathcal{B}\mathcal{A}c_1c'); \end{aligned}$$

ferner ist

$$(\mathcal{C}\mathcal{A}b_1b') = (c_1\mathcal{A}\mathcal{B}c'),$$

weil diese Punktreihen perspectiv liegen in Bezug auf das Centrum \mathcal{S} ; also ist

$$(\mathcal{A}\mathcal{C}b'_1) = (c\mathcal{B}\mathcal{A}c'_1) = (\mathcal{A}c'_1c\mathcal{B});$$

daher laufen $\mathcal{C}c'_1, \mathcal{B}b'_1, bc$ in einen Punkt zusammen, oder \mathcal{S}' liegt auf s .

Wenn also die Gerade s' durch den Pol \mathcal{S} von s in Π geht, so liegt ihr Pol \mathcal{S}' auf s .

Hat man zweimal Polare und Pol: s und \mathcal{S} , s_1 und \mathcal{S}_1 in Π , so sind auch ss_1 und $\mathcal{S}\mathcal{S}_1$ Pol und Polare.

Ferner folgt: Dreht sich s' um einen Punkt \mathcal{S} , so durchläuft der Pol \mathcal{S}' dessen Polare s , und zwar bewegen sie sich projectiv; denn zum Büschel s' ist perspectiv die Punktreihe b' , zu dieser projectiv die Punktreihe b'_1 , und zu dieser perspectiv die Punktreihe \mathcal{S}' auf s , indem \mathcal{B} in letztem Falle das Centrum der Perspectivität ist; also sind das Büschel s' und die Punktreihe \mathcal{S}' projectiv.

Ebenso folgt: Bewegt sich \mathcal{S} auf s' , so dreht sich s um \mathcal{S}' , und die Punktreihe \mathcal{S} und das Strahlbüschel s sind projectiv; denn erstere ist mit der Punktreihe b_1 auf b perspectiv, diese mit der Punktreihe b projectiv und diese mit dem Strahlbüschel s um \mathcal{S}' perspectiv.

Schneiden wir daher, \mathcal{E} und s wiederum als fest ansehend, die Gerade s mit dem beweglichen Strahl s' in \mathcal{E}'' und verbinden \mathcal{E} mit dem beweglichen Punkt \mathcal{E}' durch s'' , so sind \mathcal{E}'' und s'' auch Pol und Polare. Perspectiv sind das Büschel s' und die Punktreihe \mathcal{E}'' , die Punktreihe \mathcal{E}' und das Büschel s'' ; also sind auch die beiden auf s gelegenen Punktreihen \mathcal{E}' und \mathcal{E}'' projectiv, und ebenso die beiden Büschel s' und s'' um \mathcal{E} ; und jene wie diese sind involutorisch; denn \mathcal{E}'' ergibt sich aus \mathcal{E}' als Schnitt von s mit der Polare s' von \mathcal{E}' ; ebenso ist aber \mathcal{E}' Schnitt der Polare s'' von \mathcal{E}'' . In derselben Weise wie \mathcal{E}'' aus \mathcal{E}' entsteht, ergibt sich \mathcal{E}' aus \mathcal{E}'' ; die beiden Punkte entsprechen sich in beiderlei Sinn oder involutorisch.

Auf jeder Gerade s entsteht daher eine Involution, in der zwei Punkte conjugirt sind, von denen einer und infolge dessen jeder auf der Polare des andern liegt.

Und durch zwei solche conjugirten Punkte \mathcal{E}' , \mathcal{E}'' gehen die Strahlen s'' , s' des Büschels \mathcal{E} , von denen also jeder durch den Pol des andern geht; also erzeugen auch diese eine Involution um \mathcal{E} , die zu der auf s perspectiv ist.

Nennt man nun auch im Polarsystem, wie in der Polarität in Bezug auf einen Kegelschnitt, *zwei Punkte conjugirt*, wenn der eine und dann jeder von ihnen auf der Polare des andern liegt, und ebenso *zwei Strahlen conjugirt*, wenn der eine und dann jeder von ihnen durch den Pol des andern geht, so hat man:

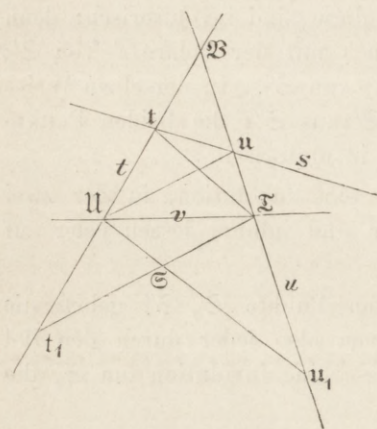
Jede Gerade trägt eine Involution, in der zwei im Polarsystem Π conjugirte Punkte auch conjugirt sind. Jeder Punkt trägt eine Involution, in der zwei im Polarsystem conjugirte Strahlen auch conjugirt sind. Gehören die Gerade und der Punkt als Polare und Pol zusammen, so sind die beiden Involutionen perspectiv, und zwar derartig, dass bei jedem Strahlenpaare der einen Involution und Punktepaare der andern, welche incidiren, die nicht incidirenden Elemente Polare und Pol sind; s' , die durch \mathcal{E}'' geht, ist Polare von \mathcal{E}' und s'' die von \mathcal{E}' , der auf s' liegt.

Die Doppelstrahlen der einen gehen durch die Doppelpunkte der andern, und die beiden Involutionen sind von gleicher Art.

Die ursprünglichen Involutionen auf b und c gehören zu den jetzt gefundenen; denn die Polare s von \mathcal{E} geht stets durch den Punkt auf b , der in der gegebenen Involution auf dieser Gerade dem Punkte $(b, \mathcal{B}\mathcal{E})$ conjugirt ist; liegt \mathcal{E} selbst auf b , so fällt er mit diesem letzteren Punkte zusammen, und der ihm in der gegebenen Involution conjugirte wird zu ihm auch im Polarsystem conjugirt.

Wir können die beiden Involutionen auf b, c ersetzen durch die dem Polarsystem angehörigen auf irgend zwei in demselben conjugirten Strahlen t, u (Fig. 85). Sei \mathfrak{B} deren Schnitt und \mathfrak{ll} , \mathfrak{T} die ihm in den Involutionen conjugirten Punkte, so ist $v = \mathfrak{T}\mathfrak{ll}$ die Polare von \mathfrak{B} , ferner geht, weil \mathfrak{T} auf v liegt, seine Polare durch \mathfrak{B} ; der Pol von u muss

Fig. 85.



auf t liegen, weil diese Strahlen conjugirt sind, also geht die Polare von \mathfrak{T} durch ihn und hat so mit t zwei Punkte gemein; Polare von \mathfrak{T} ist daher t und die von \mathfrak{ll} ist u . Ist nun wieder s eine beliebige Gerade, welche t und u in t und u trifft, so geht die Polare von t einerseits durch \mathfrak{T} , den Pol von t , andererseits durch den Punkt t_1 , der in der Involution auf t dem t conjugirt ist; also ist sie $\mathfrak{T}t_1$, ebenso ist $\mathfrak{ll}u_1$ die von u , wenn u_1 dem u in der Involution auf u conjugirt ist; und der Schnitt-

punkt $(\mathfrak{T}t_1, \mathfrak{ll}u_1)$ ist der Pol \mathfrak{S} von s . Man hat ihn aus den beiden jetzigen Involutionen genau in derselben Weise erhalten, wie aus denen auf b, c , von welchen wir ausgegangen sind.

Man kann aber auch von zwei Strahlinvolutionen des Polarsystems um conjugirte Punkte ausgehen. Die Punkte \mathfrak{T} und \mathfrak{ll} der vorangehenden Betrachtung sind conjugirt; und in der Involution um \mathfrak{T} sind conjugirt v, u ; $\mathfrak{T}\mathfrak{S}t_1$, $\mathfrak{T}t$, in der um \mathfrak{ll} : v, t ; $\mathfrak{ll}\mathfrak{S}u_1$, $\mathfrak{ll}u$. Ist also \mathfrak{S} gegeben, so verbinden wir ihn mit \mathfrak{T} , \mathfrak{ll} , schneiden die zu diesen Strahlen conjugirten in den beiden Involutionen mit t, u in t, u ; die Verbindungsline tu ist die Polare s . Denn dies ist die duale Construction zu derjenigen, durch welche wir, mittelst der Involutionen auf t, u , den Pol \mathfrak{S} aus s ableiteten.

294 Wenn wir zu zwei conjugirten Punkten $\mathfrak{T}, \mathfrak{ll}$ ebenso, wie bei der Polarität in Bezug auf einen Kegelschnitt, als dritten Punkt den Schnittpunkt \mathfrak{B} ihrer Polaren t, u hinzufügen, so erhalten wir eine Figur, die wir auch hier *Polardreieck* oder *Polardreieck* von II nennen: jede Ecke hat die Gegenseite zur Polare, jede zwei Ecken, jede zwei Seiten sind conjugirt, aus denselben Gründen wie damals. Wir wollen, insbesondere wegen einer später einzuführenden Benennung, sie auch *Tripel conjugirter Punkte*, bezw. *Strahlen von II* nennen. Zwei zu einander perspective Involutionen des Polarsystems auf einer Gerade und um ihren Pol liefern unendlich viele Polardreiecke, welche diese

Gerade und diesen Punkt zu gemeinsamen Gegenelementen haben, während die andern Ecken und Seiten die beiden Involutionen durchlaufen.

Sind \mathfrak{P} und \mathfrak{P}_1 , \mathfrak{Q} und \mathfrak{Q}_1 conjugirt im Polarsystem, so dass die Polare p von \mathfrak{P} durch \mathfrak{P}_1 , die Polare q von \mathfrak{Q} durch \mathfrak{Q}_1 geht, so seien \mathfrak{P}' , \mathfrak{Q}' die Schnitte von $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ mit diesen beiden Polaren; folglich sind $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ zwei Paare der Involution auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$. Es sei ferner $pq = \mathfrak{S}$ und $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{I}$, so gehen von dem Vierecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ zwei Paare von Gegenseiten durch jene Punktepaare auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, also bilden auch die Schnittpunkte mit dem dritten Gegenseitenpaar $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ ein Paar der Involution und sind conjugirt im Polarsystem, d. h. die Punkte $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \mathfrak{S}\mathfrak{I})$. Da \mathfrak{S} Pol von $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ist, so geht die Polare von $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1)$ durch \mathfrak{S} , andererseits durch $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \mathfrak{S}\mathfrak{I})$, ist demnach $\mathfrak{S}\mathfrak{I}$, so dass der auf ihr gelegene Punkt \mathfrak{I} zu $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1)$ conjugirt ist.

Wenn also in einem Polarsystem sowohl \mathfrak{P} und \mathfrak{P}_1 , als auch \mathfrak{Q} und \mathfrak{Q}_1 conjugirt sind, so sind es auch $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1)$ (Hesse's Satz, Nr. 104), und das Vierseit, von dem diese drei Punktepaare die der Gegenecken sind, heisst ein *Polvierseit* des Polarsystems

Dual ergibt sich der Begriff des *Polvierecks*, bei dem zweimal zwei Gegenseiten conjugirt sind und infolge dessen auch die dritten.

Es seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ drei Punkte und p, p_1, p_2 ihre Polaren in Π , so sei $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2, p) = p$, $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}, p_1) = p_1$. Somit haben wir zwei Paare conjugirter Punkte \mathfrak{P}, p ; \mathfrak{P}_1, p_1 ; folglich sind auch conjugirt $(\mathfrak{P}p_1, \mathfrak{P}_1p) = \mathfrak{P}_2$ und $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1, pp_1) = p_2$; die Polare p_2 geht also durch p_2 , der Schnitt $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1, p_2)$ liegt auf pp_1 oder mit $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2, p)$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}, p_1)$ in gerader Linie.

Das Dreieck dreier Punkte und das Dreieck ihrer drei Polaren im Polarsystem liegen perspectiv.

Man kann auch den Beweis genau so führen wie in Nr. 104, wo auch der Hesse'sche Satz benutzt wird.

Ferner wird ebenso wie in Nr. 105 bewiesen, dass die Ecken von zwei Polardreiecken des Polarsystems auf einem Kegelschnitte liegen und ihre Seiten einen andern Kegelschnitt berühren, dass jedem Kegelschnitte, dem ein Polardreieck von Π ein- oder umgeschrieben ist, unendlich viele Polardreiecke ein- oder umgeschrieben und einem zweiten Kegelschnitte um- oder eingeschrieben sind. Zwei solche Kegelschnitte sind Polarfiguren von einander in Π . Denn allgemein gehen, wie bei der Polarität in Bezug auf einen Kegelschnitt, die Punkte und zugehörigen Tangenten eines Kegelschnitts in die Tangenten und zugehörigen Berührungspunkte eines andern Kegelschnitts über.

Auf einem Kegelschnitt $K^{(2)}$ werde ein Punkt \mathfrak{S} bewegt und seine Polare s in Bezug auf Π mit $K^{(2)}$ je in $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ geschnitten, so umhüllen die Geraden $\mathfrak{S}\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\mathfrak{s}'$ einen zweiten Kegelschnitt. Wenn nämlich zunächst drei Lagen von \mathfrak{S} genommen werden: $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$, so sind das Dreieck $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ und das Dreieck $s\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ perspectiv, also $(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2, s), (\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}, \mathfrak{s}_1), (\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1, \mathfrak{s}_2)$ in einer Geraden gelegen, und nun haben wir den Satz in Nr. 234 über ein einem Kegelschnitte eingeschriebenes Dreieck, durch dessen Schnitte mit einer Transversale Secanten in den Kegelschnitt gelegt werden, anzuwenden, um zu erkennen, dass die sechs Geraden $\mathfrak{S}\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\mathfrak{s}', \mathfrak{S}_1\mathfrak{s}_1, \mathfrak{S}_1\mathfrak{s}'_1, \mathfrak{S}_2\mathfrak{s}_2, \mathfrak{S}_2\mathfrak{s}'_2$ einen Kegelschnitt berühren. Es sei \mathfrak{T} der zweite Schnitt der Polare von \mathfrak{s} , dann berühren ebenso $\mathfrak{s}\mathfrak{S}, \mathfrak{s}\mathfrak{T}, \mathfrak{S}_1\mathfrak{s}_1, \mathfrak{S}_1\mathfrak{s}'_1, \mathfrak{S}_2\mathfrak{s}_2, \mathfrak{S}_2\mathfrak{s}'_2$ einen Kegelschnitt, der aber mit dem vorherigen identisch ist, weil er fünf Tangenten mit ihm gemeinsam hat. Indem wir ihn nunmehr durch $\mathfrak{S}\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\mathfrak{s}', \mathfrak{S}\mathfrak{T}, \mathfrak{S}_1\mathfrak{s}_1, \mathfrak{S}_1\mathfrak{s}'_1$ bestimmt denken, sehen wir, dass, wenn \mathfrak{S}_2 auf $K^{(2)}$ sich bewegt, alle die $\mathfrak{S}_2\mathfrak{s}_2, \mathfrak{S}_2\mathfrak{s}'_2$ einen und denselben Kegelschnitt berühren.

Sämmtliche Geraden, welche zwei in einem Polarsystem Π conjugirte Punkte verbinden, die auf einem gegebenen Kegelschnitte liegen, umhüllen einen andern Kegelschnitt.

Handelt es sich um das Polarsystem eines Kegelschnitts $C^{(2)}$, so sind diese Geraden diejenigen, welche $C^{(2)}$ und $K^{(2)}$ in zwei zu einander harmonischen Punktepaaren schneiden, und wir erhalten den schon in Nr. 87 besprochenen Kegelschnitt, welcher auch die acht Tangenten in den vier gemeinsamen Punkten von $K^{(2)}$ und $C^{(2)}$ tangirt.

Anmerkung. Wir machen noch auf eine Betrachtung aufmerksam, welche zwar nicht in den systematischen Gang unserer Untersuchung passt, weil sie das Operationsfeld der Ebene verlässt und auf die Kugeloberfläche übergeht, aber besonders geeignet erscheint, das Wesen des Polarsystems an einem sehr einfachen Falle anschauen und aus diesem auf die Eigenschaften des ebenen Polarsystems schliessen zu lassen. Wir nennen auf der Kugelfläche zwei solche Punkte conjugirt, welche einen Abstand von 90° von einander haben; zu einem beliebigen Punkte x der Kugelfläche gehören also unendlich viele conjugirte, die auf einem grössten Kreise X , dem Aequator zu dem Pole x , liegen; auf diesem grössten Kreise bilden sodann solche Paare von Punkten, die um 90° von einander abstehen, eine (elliptische) Involution; ein Tripel conjugirter Punkte bilden die Ecken eines Kugeloctanten. Zwei grösste Kreise, deren Ebenen rechtwinklig auf einander stehen, heissen conjugirt; zu einem grössten Kreise giebt es daher unendlich viele conjugirte, welche alle durch dieselben beiden diametral gegenüberliegenden Punkte der Kugelfläche hindurchgehen; alle Paare recht-

winkliger Ebenen, die durch denselben Durchmesser gehen, bilden eine Ebeneninvolution und ihre Schnitte mit der Kugelfläche eine Involution grösster Kreise; ein Tripel conjugirter „Strahlen“ begrenzt einen Octanten der Kugelfläche. Zu einem Pol x gehört eine bestimmte Polare X , der zugehörige Aequator, zu diesem aber Pol und Gegenpol, die Endpunkte des auf der Ebene des Aequators senkrechten Kugeldurchmessers.

Projiciren wir vom Mittelpunkte der Kugel das Polarsystem der Kugelfläche auf eine beliebige Ebene, so erhalten wir ein Polarsystem besonderer Art, Pol und Polare werden bestimmt durch einen Durchmesser und die darauf senkrechte Diametralebene der Kugel; wir finden die Eigenschaften des Polarsystems bestätigt. Nehmen wir insbesondere für die Projectionsebene die unendlich entfernte Ebene (E_∞), die durch räumliche Betrachtungen sich ebenso ergibt, wie in der Ebene die unendlich ferne Gerade G_∞ , so erhalten wir ein Polarsystem von besonderer Wichtigkeit: *das unendlich entfernte orthogonale (circulare) Polarsystem*; jeder Strahl im Raume und irgend eine auf ihm senkrechte Ebene schneiden E_∞ in einem Punkt und einer Gerade, welche Pol und Polare dieses besonderen Polarsystems sind. Je drei unendlich entfernte Punkte, die in drei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, bilden ein Tripel conjugirter Punkte desselben; seine Kerncurve (§ 57) ist der imaginäre unendlich entfernte Kreis, durch welchen alle Kugeln des Raumes gehen.

§ 57. Der Kern-Kegelschnitt; hyperbolisches und elliptisches Polarsystem.

Es ist von besonderem Interesse, in einem Polarsystem II solche ²⁹⁶ Punkte, deren Polaren durch sie selbst gehen, oder solche Strahlen, deren Pole auf ihnen selbst liegen, sowie den Ort dieser und jener zu ermitteln. Wir treffen jeden Punkt der Ebene, indem wir eine doppelte Bewegung ausführen, einmal auf einer beliebigen Gerade \mathcal{G} einen veränderlichen Punkt bewegen und dann diese Gerade um einen beliebigen in ihr festgehaltenen Punkt herumdrehen. Wenn nun der Punkt B auf der Gerade \mathcal{G} sich bewegt, so beschreibt seine Polare \mathcal{A} ein Strahlbüschel, welches im veränderlichen Punkte B die Gerade \mathcal{G} trifft. Die Punkte B und \mathcal{B} bilden eine Involution, und wenn dieselbe hyperbolisch ist, so sind ihre Doppelpunkte von der verlangten Beschaffenheit, dass ihre Polaren durch sie selbst gehen. Ist ein solcher Doppelpunkt s gefunden, so wird in der zum Polarsystem gehörigen Involution jeder durch ihn gehenden Gerade dieser Punkt s der eine Doppelpunkt

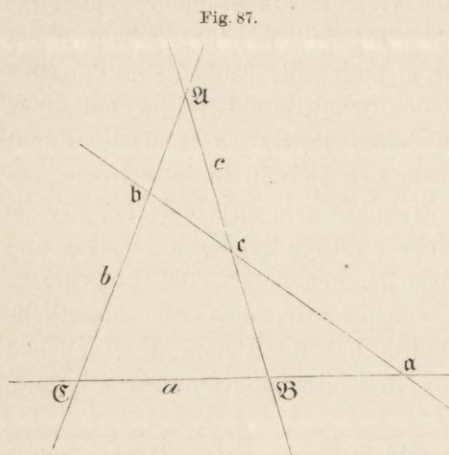
schnitts $K^{(2)}$; dies sind offenbar die Polaren der Punkte s und t in Π , welche durch s und t selbst gehen. Folglich ist pqr ein Tripel conjugirter Punkte nicht nur für Π , sondern auch für $K^{(2)}$; a und α , als Diagonalepunkte des eingeschriebenen Vierecks $stxy$, sind conjugirt für $K^{(2)}$, also $p\alpha$, pa Polaren von a und α für $K^{(2)}$, wie für Π ; daher muss die Verbindungslinie des Punktes $(sr, p\alpha)$ mit x die Tangente im Punkte x für den Kegelschnitt $K^{(2)}$ sein und den Schnittpunkt (tr, pa) enthalten. Der Punkt $(sr, p\alpha)$ hat in Π zu seiner Polare sa , und der Punkt (tr, pa) zu seiner Polare $t\alpha$, und da sich sa und $t\alpha$ in x treffen, so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte $(sr, p\alpha)$ und (tr, pa) die Polare des Punktes x in Π , welche nothwendig durch x selbst hindurchgehen muss und, wie wir eben gesehen haben, die Tangente in x am Kegelschnitt $K^{(2)}$ ist. So ersehen wir, dass für sämtliche Punkte x des gefundenen Kegelschnitts $K^{(2)}$ die Polare in Π allemal die Tangente dieses Punktes x an $K^{(2)}$ ist, und können folgendes Resultat aussprechen:

Der Ort solcher Punkte eines Polarsystems, deren Polaren durch sie selbst gehen, ist ein Kegelschnitt, und alle Strahlen, deren Pole auf ihnen selbst liegen, umhüllen denselben Kegelschnitt, indem ein Punkt dieses Kegelschnitts und die zugehörige Tangente Pol und Polare im Polarsystem sind. Dieser Kegelschnitt enthält die Doppelpunkte aller der Involutionen des Polarsystems auf den sämtlichen Geraden, und seine Tangenten sind die Doppelstrahlen der Involutionen um sämtliche Punkte. Er heisst der Kern oder die Basis des Polarsystems, und letzteres ist nichts anderes, als das Polarsystem für diesen Kern-Kegelschnitt, d. h. Pol und Polare für den Kegelschnitt sind allemal Pol und Polare für das gegebene Polarsystem.

Die Untersuchung ging von der Voraussetzung aus, dass die auf ²⁹⁷ der willkürlich angenommenen Gerade \mathcal{G} befindliche Involution von Π hyperbolisch sei mit den Doppelpunkten s und t ; wir haben also, um den Kern-Kegelschnitt zu finden, überhaupt eine solche Gerade \mathcal{G} aufzusuchen, deren Involution hyperbolisch ist. Wenn eine existirt, so giebt es unendlich viele, und der Ort ihrer Doppelpunkte ist der Kern-Kegelschnitt. Ob es aber immer eine solche Gerade geben muss, oder ob unter Umständen gar keine hyperbolische Involution in Π vorkommt, wollen wir an der Nr. 292 gegebenen Construction des Polarsystems zu erkennen suchen.

Sind die Involutionen, welche auf den Geraden b, c , die für das Polarsystem conjugirt sein sollen, beide hyperbolisch oder auch nur eine von ihnen, so hat das Polarsystem einen reellen Kern; wenn dagegen beide elliptisch sind, so ist die Frage zu entscheiden, ob sonst

in Π hyperbolische Involutionen vorkommen, oder nicht. Es mögen (Fig. 87) \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} dieselbe Bedeutung haben, wie in Fig. 84, so dass $a = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die Polare von \mathfrak{A} ist, so wird im jetzigen Falle auch die dem



Strahle a zugehörige Involution von Π elliptisch sein. Um sie zu bestimmen, nehmen wir auf b einen beliebigen Punkt b zwischen \mathfrak{A} und \mathfrak{C} und auf c einen beliebigen Punkt c zwischen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , so dass die Verbindungslinie bc also nothwendig in einem Punkte α ausserhalb $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ den Strahl a trifft; die conjugirten Punkte b_1 und c_1 zu b und c in den beiden gegebenen Involutionen müssen, da diese elliptisch sind, ausserhalb $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, bzw. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ liegen.

Der Pol \mathfrak{S} von abc ist der Schnittpunkt ($\mathfrak{B}b_1, \mathfrak{C}c_1$), also seine Verbindungslinie mit \mathfrak{A} die Polare von a , und deren Schnitt α_1 mit a conjugirt zu a ; das Viereck $b_1c_1\mathfrak{A}\mathfrak{S}$ lehrt, dass α_1 zu dem Schnitte von b_1c_1 mit a in Bezug auf \mathfrak{B} , \mathfrak{C} harmonisch ist. Wegen der genannten Lage von b_1, c_1 muss dieser Schnitt ausserhalb $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ liegen und α_1 infolge dessen zwischen \mathfrak{B} , \mathfrak{C} . Da nun \mathfrak{B} und \mathfrak{C} auch conjugirt sind, so ist, wie behauptet wurde, die Involution auf a elliptisch.

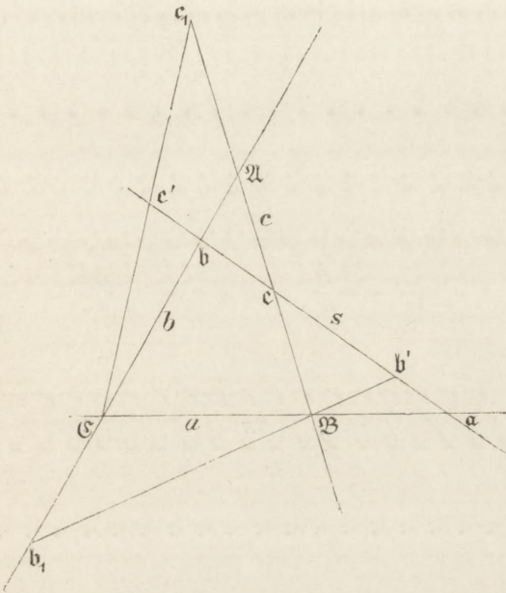
In gleicher Weise erkennt man, dass, wenn die beiden gegebenen Involutionen auf b und c hyperbolisch sind, die auf a elliptisch, wenn dagegen eine von jenen hyperbolisch, die andere elliptisch ist, die dritte auf a hyperbolisch sein muss. Wir schliessen hieraus:

Von den drei auf einem Tripel conjugirter Strahlen des Polarsystems befindlichen Involutionen sind entweder alle drei elliptisch, oder eine ist elliptisch und die beiden andern sind hyperbolisch; und daher auch: Von den drei einem Tripel conjugirter Punkte zugehörigen Involutionen sind entweder alle drei elliptisch, oder eine ist elliptisch und die beiden andern sind hyperbolisch.

In dem zu untersuchenden Falle, wo alle drei den Tripelstrahlen a, b, c zugehörigen Involutionen elliptisch sind, zeigt sich nun, dass auf jeder Gerade die ihr zugehörige Involution elliptisch sein muss, also überhaupt kein reeller Punkt des Kern-Kegelschnitts existirt. Wir können von den drei elliptischen Involutionen, welche von den

Seiten des Polardreiecks $abc = \mathfrak{ABC}$ getragen werden, irgend zwei als zur Construction des Netzes gegeben ansehen. Eine Gerade s kann, wie wir wissen, nur zwei wesentlich verschiedene Lagen zu jenem Dreieck haben: 1) sie schneidet zwei Dreiecksseiten zwischen den Eckpunkten, die dritte in der Verlängerung, und dann benutzen wir die zwischen den Ecken getroffenen Seiten zur Construction, oder 2) sie schneidet alle drei Seiten in ihren Verlängerungen. Untersuchen wir zunächst den ersten Fall und nehmen an, s treffe \mathfrak{AC} in b und \mathfrak{AB} in c zwischen den Eckpunkten des Dreiecks (Fig. 88a).

Fig. 88 a.



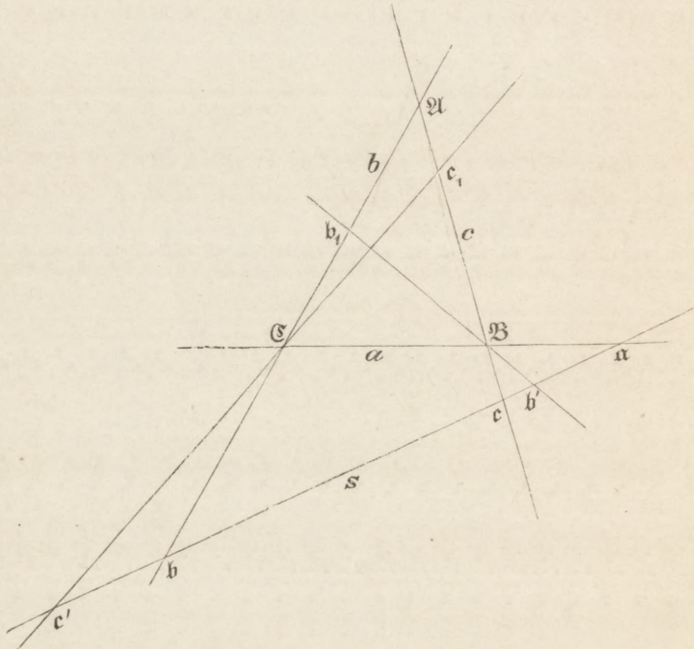
Zur Involution auf s gelangt man folgendermassen: es seien b_1, c_1 in den Involutionen auf b, c die conjugirten Punkte zu b, c ; dann sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ die Polaren von b, c und daher die Schnitte b', c' mit s zu b , bzw. c conjugirt, so dass die Involution auf s durch die beiden Paare $b\mathfrak{B}'$, $c\mathfrak{C}'$ bestimmt ist. Da b_1 ausserhalb \mathfrak{AC} liegt, weil die Involution auf b elliptisch ist, so muss b' innerhalb der endlichen Strecke ca liegen, wo a der Schnitt von s mit a ist*, gleichgültig, ob b_1 jenseits \mathfrak{C} oder jenseits \mathfrak{A} liegt. Ebenso liegt c_1 ausserhalb \mathfrak{AB} , folglich kann c' nur ausserhalb der Strecke ba sich befinden. Also liegen die beiden

* Er ist auf der Seite von \mathfrak{B} liegend angenommen; liegt er auf der Seite von \mathfrak{C} , so hat man nur die Vertauschung von b und c und die daraus sich ergebenden weiteren Vertauschungen vorzunehmen.

Paare bb' , cc' elliptisch. Wenn hingegen (Fig. 88b) b , c ausserhalb \mathcal{AC} , \mathcal{AB} liegen und also auch a ausserhalb \mathcal{BC} (auf der Seite von \mathcal{B}), so liegen b_1 , c_1 innerhalb, also b' innerhalb ac , c' ausserhalb ab ; mithin liegen bb' , cc' wiederum elliptisch.

Folglich sind alle Involutionen elliptisch, und der Basis-Kegelschnitt ist nicht reell. Wenn er reell wäre, so müssten ja auch die Involutionen auf zwei Seiten (und um zwei Ecken) eines Polardreiecks hyperbolisch sein.

Fig. 88b.



Aus der im Vorangehenden besprochenen Construction der Involution auf s entnehmen wir nochmals, dass, wenn eine der gegebenen Involutionen, z. B. die auf b , hyperbolisch ist und s durch einen ihrer Doppelpunkte B geht, in den sich dann b und b_1 vereinigen, auch b und b' zusammenfallen, also dieser Doppelpunkt auch Doppelpunkt für die Involutionen aller durch ihn gehenden Strahlen ist. Wenn ein Punkt Doppelpunkt der Involution auf einer durch ihn gehenden Gerade ist, so ist er es auf allen.

Der zweite Doppelpunkt auf jedem Strahle s durch B ist, wenn B' der andere Doppelpunkt auf b , c der Schnitt von s mit c und c_1 diesem in der Involution auf c conjugirt ist, der Schnitt von $B'c_1$ mit s ; denn er muss der vierte harmonische Punkt sein, der dem

ersten Doppelpunkt B in Bezug auf c und $c' = (\mathcal{C}_1, s)$ zugeordnet ist, und ergibt sich durch Projection der vier harmonischen Punkte $B, B', \mathcal{A}, \mathcal{C}$ aus c_1 auf s . Die Strahlen $Bc, B'c_1$ beschreiben projective Büschel, durch die der Ort dieser zweiten Doppelpunkte, der Kern-Kegelschnitt, entsteht.

Wir haben also zwei wesentlich verschiedene Arten von Polarsystemen zu unterscheiden: 298

a) Das *elliptische Polarsystem* enthält nur elliptische Involutionen auf allen Geraden und um alle Punkte.

b) Das *hyperbolische Polarsystem* enthält theils elliptische, theils hyperbolische Involutionen; bei einem Tripel conjugirter Strahlen und Punkte sind immer zwei Involutionen hyperbolisch und die dritte elliptisch; die Doppelpunkte aller Punktinvolutionen liegen auf dem Kern-Kegelschnitt, und die Doppelstrahlen aller Strahlinvolutionen berühren denselben Kern-Kegelschnitt; das Polarsystem ist das Polarsystem für diesen Kegelschnitt.

Wie eine elliptische Involution zwei imaginäre Punkte oder Strahlen definirt, so sagen wir entsprechend von *einem elliptischen Polarsystem*, das selbst vollständig reell ist, dass *es einen imaginären Kern- oder Basis-Kegelschnitt definirt* oder auch dessen *reeller Repräsentant* ist. Jedermal, wenn man zu einem imaginären Kegelschnitt gelangt, wird es wünschenswerth sein, diesen reellen Repräsentanten zu haben. Es ist für die synthetische Behandlung geometrischer Probleme von grosser Bedeutung, ein völlig reelles Gebilde zu besitzen, welches an Stelle eines imaginären Kegelschnitts zu setzen ist.

Die imaginäre Curve kann imaginäre *Ellipse* genannt werden, da sie ebenso wie die reelle Ellipse die G_∞ in imaginären Punkten schneidet.

Beachten wir, dass das Polarsystem nicht elliptisch oder hyperbolisch heisst, wenn der Kegelschnitt (reelle) Ellipse oder Hyperbel ist. Für beide Curven als Basiscurven (sowie auch für die Parabel) ist das Polarsystem hyperbolisch.

Nehmen wir zur Bestimmung eines Polarsystems zwei hyperbolische 299 Involutionen auf b, c , sei z der Schnittpunkt und y demselben in der ersten, x in der zweiten Involution conjugirt, seien ferner B, B' die Doppelpunkte jener und C, C' die Doppelpunkte dieser, so haben wir auf b, c zwei neue Involutionen, die eine bestimmt durch zy, BB' , die andere durch zx, CC' , welche elliptisch sind, weil die bestimmenden Paare harmonisch gelegen sind. Dadurch hat man auf jedem der Träger zwei Involutionen, eine hyperbolische und eine elliptische; und indem man zwei auf verschiedenen Trägern befindliche zur Bildung eines

Polarsystems verwendet, was auf vier Arten geschehen kann, erhält man vier verschiedene Polarsysteme, die in eigenthümlicher Verbindung mit einander stehen; ihre Kern-Kegelschnitte sind nämlich vier *harmonisch zugeordnete Kegelschnitte* (§ 55), von denen drei reell, der vierte imaginär ist. Wenn wir die Involutionen auf den beiden Trägern durch (h) , (e) , (h_1) , (e_1) bezeichnen und die vier Verbindungen:

$$(h)(h_1), \quad (h)(e_1), \quad (e)(h_1), \quad (e)(e_1)$$

auf den conjugirten Trägern b , c zur Erzeugung der Polarsysteme verwenden, so werden die drei ersten hyperbolisch, das letzte elliptisch.

Die Richtigkeit der Behauptung folgt unmittelbar aus der Construction der vier Mittelpunkte der Polarsysteme, der Pole der unendlich fernen Gerade; denn da xyz ein gemeinschaftliches Polardreieck für alle ist, so sind sie vollkommen bestimmt, sobald man noch den Mittelpunkt kennt. Seien μ und μ_1 die Mittelpunkte von (h) und (h_1) , so ist der Mittelpunkt ν der Involution (e) der vierte harmonische zu $y, z; \mu$. Denn die Kreise, welche die Strecken BB', yz , deren Endpunkte harmonisch sind, zu Durchmesser haben, schneiden sich orthogonal; μ ist der Mittelpunkt des ersteren, also berühren die Tangenten aus ihm an den andern in den gemeinsamen Punkten, und die gemeinsame Secante (oder Potenzlinie) ist seine Polare in Bezug auf den zweiten Kreis; ihr Fusspunkt, der Mittelpunkt ν der durch BB', yz bestimmten Involution (e) , in welcher das Kreisbüschel durch b geschnitten wird, ist also der vierte harmonische Punkt zu den drei genannten Punkten. Ebenso ist der Mittelpunkt ν_1 von (e_1) der vierte harmonische zu $z, x; \mu_1$; folglich haben wir:

$$\begin{aligned} (x\mu, y\mu_1) &= \mathfrak{M}, & (x\mu, y\nu_1) &= \mathfrak{M}', \\ (x\nu, y\mu_1) &= \mathfrak{M}'', & (x\nu, x\nu_1) &= \mathfrak{M}''' \end{aligned}$$

als Mittelpunkte dieser vier Polarsysteme. Dies ist aber nach Nr. 283 (Fig. 82) genau die Lage der vier Mittelpunkte von vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitten, welche das Polardreieck xyz gemeinschaftlich haben.

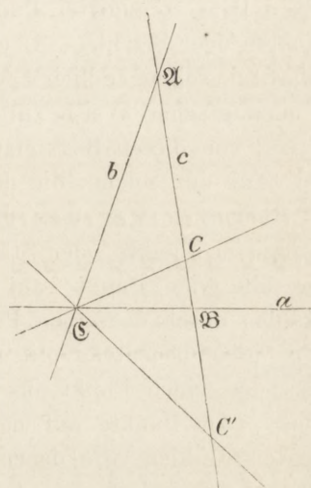
300 Wir wollen jetzt noch einige besondere Fälle erwähnen. Beim hyperbolischen Polarsystem wird der doppelt unendliche Inbegriff der Geraden, welche theils elliptische, theils hyperbolische Involutionen enthalten, in diese beide Gattungen getrennt durch eine einfach unendliche Reihe von solchen Geraden, welche parabolische Involutionen tragen.

Bei einer parabolischen Involution fallen die beiden Doppelpunkte zusammen, und dem einzigen Doppelpunkt ist jeder andere Punkt der

(Gerade conjugirt. Die Geraden mit solchen Involutionsen sind die Tangenten des Kern-Kegelschnitts. Ebenso giebt es unter den doppelt unendlich vielen Punkten, deren Involutionsen theils elliptisch, theils hyperbolisch sind, eine einfach unendliche Reihe solcher Punkte, bei denen sie parabolisch sind; dies sind die Punkte des Kern-Kegelschnitts, und sie bilden die Grenze zwischen dem einen und dem andern Gebiet. In jeder Tangente des Kern-Kegelschnitts ist der Berührungspunkt der einzige Doppelpunkt der Involution, und für jeden Punkt desselben ist die Tangente der einzige Doppelstrahl.

In besonderer Weise vereinfacht sich das hyperbolische Polarsystem, wenn wir von den beiden erzeugenden Involutionsen eine parabolisch annehmen, so jedoch, dass der Schnittpunkt \mathcal{A} der Träger nicht der Doppelpunkt ist; die auf b sei parabolisch, der \mathcal{A} conjugirte Punkt \mathcal{C} ist dann ihr Doppelpunkt (Fig. 89), weil er zu jedem beliebigen Punkte conjugirt ist; die Polare $a = \mathcal{B}\mathcal{C}$ von \mathcal{A} wird alsdann nach der Construction des Polarsystems eine Involution enthalten, welche ebenfalls parabolisch ist und ihren Doppelpunkt in \mathcal{C} hat. Um den Kern eines solchen besonderen Polarsystems zu finden, kommt es darauf an, zu wissen, ob die zweite auf c gegebene Involution hyperbolisch oder elliptisch ist. Wenn sie hyperbolisch ist mit den Doppelpunkten C und C' , so zeigt die obige Construction des Kern-Kegelschnitts, dass derselbe in die beiden Geraden $\mathcal{C}C, \mathcal{C}C'$ zerfällt; von jeder beliebigen Gerade wird der Pol der feste Punkt \mathcal{C} und von jedem beliebigen Punkte geht die Polare durch \mathcal{C} .

Fig. 89.



Die Involution, welche in \mathcal{C} ihren Grundpunkt hat und mit der auf c gegebenen perspectiv liegt, schneidet daher sämtliche Geraden in denjenigen Involutionsen, welche ihnen im Polarsystem zugehören. Wenn dagegen die auf c gegebene Involution elliptisch ist, so reducirt sich der Kern-Kegelschnitt auf den einzigen Punkt \mathcal{C} ; alle Involutionsen sind elliptisch mit Ausnahme derjenigen, welche auf den durch \mathcal{C} laufenden Strahlen liegen, und diese sind sämtlich parabolisch; wir können auch sagen, dass in diesem Falle der Kern-Kegelschnitt ein *imaginäres Geradenpaar* ist, gebildet durch die Doppelstrahlen der Involution, welche aus \mathcal{C} die gegebene Involution auf c projectirt.

Im Grunde hat man es in beiden Fällen nur mit *einer* Strahlinvolution zu thun, und conjugirt sind in dem ausgearteten Polarsystem jede zwei Punkte, die auf conjugirten Strahlen dieser Involution liegen.

Werden beide erzeugenden Involutionen parabolisch angenommen mit den Doppelpunkten \mathfrak{C} , \mathfrak{B} , so zieht sich der Kern-Kegelschnitt auf eine einzige doppelt zu zählende Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zusammen.

Die duale Betrachtung, bei welcher von zwei Strahlinvolutionen ausgegangen wird, von denen (mindestens) eine parabolisch ist, führt zu einem Punktepaare aus zwei reellen oder imaginären oder vereinigten Punkten als Kern.

§ 58. Verschiedene Bestimmungs-Arten des Polarsystems.

301 Wenn wir als bestimmende Elemente des Polarsystems annehmen: 1) ein Paar conjugirter Punkte oder Strahlen, 2) eine Involution von Punkten oder Strahlen, 3) ein Punkt und eine Gerade, welche Pol und Polare sein sollen, endlich 4) ein Polardreieck, so lassen sich diese Elemente in mannigfacher Weise zur Bestimmung des Polarsystems zusammenstellen; von diesen Bestimmungsarten wollen wir einige hier anführen, und zwar nur solche, die das Polarsystem eindeutig bestimmen.

Bemerken wir, dass der Fall 2) die Bedeutung von zwei Paaren conjugirter Punkte oder Strahlen hat, jedoch in der besonderen Lage, dass alle vier Punkte auf derselben Gerade liegen, bzw. alle vier Strahlen durch denselben Punkt gehen. Dasselbe gilt für den Fall 3); er ist gleichbedeutend mit zwei Paaren conjugirter Punkte, von denen jedes den einen Punkt im Pole hat, während die beiden andern beliebige zwei Punkte auf der Polare sind, oder mit zwei Paaren conjugirter Strahlen, von denen jedes den einen Strahl in der Polare hat, während die andern zwei beliebige Strahlen durch den Pol sind. Der Fall 4) ist mit drei Paaren conjugirter Punkte, in je zwei Ecken des Polardreiecks gelegen, oder mit drei Paaren conjugirter Strahlen, in je zwei Seiten dieses Dreiecks befindlich, gleichbedeutend.

Die in Nr. 292 zur Construction des Polarsystems angenommenen Bestimmungsstücke waren

1) *zwei conjugirte Strahlen b und c des Polarsystems und auf jedem die Involution, welche dem Polarsystem zugehört, oder zwei conjugirte Punkte und um jeden die Involution des Polarsystems.*

Hieraus ergibt sich sofort eine zweite Bestimmungsart durch

2) *ein Polardreieck \mathfrak{ABC} und eine beliebige Gerade t mit der ihr zugehörigen Involution; denn die Seiten $a = \mathfrak{BC}$, $b = \mathfrak{CA}$, $c = \mathfrak{AB}$*

des Polardreiecks mögen t in a, b, c treffen; seien a', b', c' zu diesen Punkten conjugirt in der Involution von t , so treffen sich $a'A, b'B, c'C$, die Polaren von a, b, c , in einem Punkt \mathfrak{T}^* , dem Pole von t , und zugleich treffen sie bezw. a, b, c in solchen Punkten a_1, b_1, c_1 , welche auf diesen Geraden den a, b, c conjugirt sind; da nun je zwei Ecken des Polardreiecks ein Paar conjugirter Punkte sind, so kennen wir die Involutionen auf zwei conjugirten Strahlen des Polarsystems, also nach 1) dieses selbst.

In dualer Weise ist das Polarsystem durch ein Polardreieck und eine Strahlinvolution bestimmt.

Ferner ergibt es sich, dass es auch bestimmt wird durch

3) ein Polardreieck \mathfrak{ABC} und ein Paar von Pol und Polare \mathfrak{T} und t ; denn wenn t die Seiten $\mathfrak{AC}, \mathfrak{AB}$ in b, c trifft und b_1, c_1 die Schnittpunkte $(\mathfrak{T}\mathfrak{B}, \mathfrak{AC}), (\mathfrak{T}\mathfrak{C}, \mathfrak{AB})$ sind, so sind b und b_1, c und c_1 conjugirt; und wir kennen die Involutionen auf zwei conjugirten Strahlen.

Umständlicher wird die Bestimmung des Polarsystems durch

4) ein Polardreieck \mathfrak{ABC} und zwei beliebige Paare p und π, p_1 und π_1 , welche conjugirte Punkte sein sollen. Hier können wir so verfahren, dass wir durch π eine beliebige Gerade ziehen, dieselbe als Polare von p auffassen, wodurch dann nach 3) das Polarsystem bestimmt ist, und für dasselbe die Polare zu p_1 construiren; verändern wir dann die durch π angenommene Gerade, so verändert sich auch die zuletzt construirte Polare; sobald es vorkommt, dass sie durch den gegebenen Punkt π_1 geht, ist das Polarsystem den gegebenen Bedingungen gemäss bestimmt.

a, b, c seien, wie oben, die Seiten von \mathfrak{ABC} ; b werde von $p\mathfrak{B}$ und $p_1\mathfrak{B}$ in b und b_1, c von $p\mathfrak{C}, p_1\mathfrak{C}$ in c, c_1 getroffen; wenn wir nun durch π eine Gerade \mathfrak{L} ziehen, welche b und c in b' und c' trifft, so haben wir auf b die durch \mathfrak{AC}, bb' bestimmte Involution und auf c die durch \mathfrak{AB}, cc' bestimmte. In jener sei b_1' dem b_1 , in dieser c_1' dem c_1 conjugirt, so ist $b_1'c_1'$ die Polare von p_1 . Indem wir nunmehr die Gerade \mathfrak{L} um den Punkt π drehen, verändern sich b' und c' und mit ihnen b_1', c_1' ; nach Nr. 51 wissen wir, dass b' und b_1' projective Punktreihen beschreiben, deren Doppelemente \mathfrak{A} und \mathfrak{C} sind; ebenso beschreiben c' und c_1' projective Punktreihen mit den Doppelpunkten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ; b' und c' durchlaufen aber perspective Punktreihen, deren

* Sei \mathfrak{T} zunächst der Schnittpunkt $(a'A, b'B)$; so lehrt das Viereck $\mathfrak{ABC}\mathfrak{T}$, das von t in der gegebenen Involution geschnitten wird, dass auch $c'C$ durch \mathfrak{T} geht.

Perspectivitätscentrum π ist, folglich beschreiben auch b_1' und c_1' projective Punktreihen auf den Trägern b und c , und dieselben liegen perspectiv; denn sobald b' nach \mathfrak{A} kommt, geht auch c' dahin, nach dem Vorigen aber auch b_1' und c_1' , mithin fallen in den Schnittpunkt der Träger entsprechende Punkte der projectiven Punktreihen; also läuft $b_1'c_1'$ durch einen festen Punkt o , der durch zwei beliebig gewählte Lagen für \mathfrak{Q} leicht zu construiren ist. Auch sehen wir, dass diese Polare $b_1'c_1' = \mathfrak{Q}_1$ des Punktes p_1 ein Strahlbüschel beschreibt, welches projectiv ist mit dem von \mathfrak{Q} beschriebenen. Durch den letzten gegebenen Punkt π_1 giebt es also nur eine einzige Gerade \mathfrak{Q}_1 , nämlich die Verbindungslinie $\pi_1 o$; ziehen wir nach der Construction des Punktes o den Strahl $\pi_1 o$ und nehmen diese Gerade als Polare von p_1 , so ist das Polarsystem durch dieses Paar von Pol und Polare und durch das Polardreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ nach 3) völlig bestimmt und genügt den verlangten Bedingungen. Es ist also vollständig und eindeutig bestimmt durch die gegebenen Bestimmungsstücke, und seine Construction, wenn auch etwas umständlich, doch allein mittelst des Lineals ausführbar. Am einfachsten gestaltet sie sich, wenn wir für die eine Lage von \mathfrak{Q} die Gerade $\pi\mathfrak{B}$, und für die andere Lage $\pi\mathfrak{C}$ nehmen; dann fällt das eine Mal c' nach \mathfrak{B} , folglich auch c_1' nach \mathfrak{B} , das andere Mal b' nach \mathfrak{C} und auch b_1' nach \mathfrak{C} , und der Punkt o wird auf folgende Art gefunden.

Sind das Polardreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und das Paar conjugirter Punkte p, π gegeben, so ziehe man $\mathfrak{B}\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}p, \mathfrak{B}\pi$, wodurch man zwei Paare Strahlen enthält, welche eine Involution bestimmen, und suche in ihr den zu $\mathfrak{B}p_1$ conjugirten Strahl; zweitens ziehe man $\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}p, \mathfrak{C}\pi$, wodurch man zwei Strahlenpaare einer andern Involution erhält, in welcher man den dem Strahle $\mathfrak{C}p_1$ conjugirten aufsuche; dieser und der vorige schneiden sich im gesuchten Punkte o . Man erhält auch eine dritte Involution um \mathfrak{A} durch die Strahlenpaare $\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}p, \mathfrak{A}\pi$, und der zu $\mathfrak{A}p_1$ conjugirte Strahl in ihr muss ebenfalls durch o gehen.

Hieraus ergibt sich der Satz: *Für alle Polarsysteme, welche ein Tripel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und ein Paar conjugirter Punkte p, π gemeinschaftlich haben, laufen die Polaren eines und desselben Punktes p_1 durch einen festen Punkt (o)* Nr. 329.

Eine einfachere Lösung unserer Aufgabe ergibt sich aus der Eigenschaft, dass die sechs Ecken zweier Polardreiecke eines Polarsystems auf einem Kegelschnitt liegen und gleichzeitig die sechs Seiten einen Kegelschnitt berühren (Nr. 295). Sind demnach das Polardreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und zwei Paare conjugirter Punkte $p\pi$ und $p_1\pi_1$ gegeben, so legen wir durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, p, \pi$ den Kegelschnitt $K^{(2)}$ und durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, p_1, \pi_1$

den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$; dieselben haben noch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt x , welcher linear zu construiren ist (Nr. 173). Alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$, welche dem Dreiseit $\mathfrak{ABC} = abc$ eingeschrieben sind und gleichzeitig die Verbindungslinie $p\pi$ berühren, bilden eine Kegelschnitt-Schaar $S(\mathfrak{K}^{(2)})$, und die Tangentenpaare aus dem Punkte x an die Kegelschnitte dieser Schaar eine Involution (Nr. 209), welche in $K^{(2)}$ eine krumme Involution einschneidet, deren Centrum o sei. In gleicher Weise bilden alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welche demselben Dreiseit eingeschrieben sind und die Verbindungslinie $p_1\pi_1$ berühren, eine Kegelschnitt-Schaar $S(\mathfrak{K}_1^{(2)})$, und die Tangentenpaare aus dem Punkte x an sie rufen auf $K_1^{(2)}$ eine krumme Involution hervor mit dem Centrum o_1 . Die Verbindungslinie $oo_1 = X$ ist alsdann die Polare von x in dem durch die gegebenen Stücke bestimmten Polarsystem, und dieses ist daher nach 3) vollständig bekannt, da man ein Polardreieck und ein Paar von Pol x und Polare X kennt. Man kann noch den dritten Tripelpunkt zu p, π finden, indem man den besonderen Kegelschnitt construirt, welcher die Seiten des Dreiecks \mathfrak{ABC} und die Geraden $p\pi$ und X berührt; die zweiten Tangenten aus p und π an ihn treffen sich in dem gesuchten Punkte. In ähnlicher Weise findet man den dritten Tripelpunkt zu p_1, π_1 .

5) Zwei Polardreiecke \mathfrak{ABC} und $\mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^1\mathfrak{C}^1$ umfassen mehr Elemente, 303 als zur Bestimmung des Polarsystems erforderlich und ausreichend sind; wenn diese sechs Punkte aber der Bedingung genügen, dass sie auf einem Kegelschnitt liegen, so ist wiederum das Polarsystem vollständig und eindeutig durch sie bestimmt. Es genügt alsdann, zu seiner Construction das Polardreieck \mathfrak{ABC} und das Paar von Pol und Polare: \mathfrak{A}^1 und $\mathfrak{B}^1\mathfrak{C}^1$ zu wählen, wodurch nach 3) das Netz bestimmt wird; \mathfrak{B}^1 und \mathfrak{C}^1 sind von selbst conjugirt.

An die in 1) enthaltene Bestimmungsweise des Polarsystems durch zwei Involutionen, deren Träger conjugirt sind, knüpft sich noch eine neue Bestimmungsart durch zwei verschiedenartige Involutionen, welche perspectiv liegen und Pol und Polare zu Trägern haben. Dadurch allein ist aber das Polarsystem noch nicht völlig bestimmt; es ist noch ein Paar conjugirter Punkte oder Strahlen erforderlich; also:

6) Eine Strahlinvolution mit dem Grundpunkt \mathfrak{I} , die durch sie auf einer Gerade t ausgeschnittene Punktinvolution, mit der Bedingung, dass \mathfrak{I} und t Pol und Polare des Polarsystems seien, und endlich noch ein beliebiges Paar conjugirter Punkte p, π bestimmen das Polarsystem vollständig. Treffe nämlich $p\pi$ die Gerade t in s , und sei σ der conjugirte Punkt zu s in der auf t gegebenen Involution, so wird $\mathfrak{I}\sigma$ die

Polare von s sein, also $p\pi$ in einem solchen Punkte σ' treffen, dass $p\pi$, $s\sigma'$ zwei Paare conjugirter Punkte sind, welche die dem Polarsystem zugehörige Involution auf dieser Gerade bestimmen; nehmen wir daher zwei conjugirte Punkte der Involution auf t , so bilden diese mit \mathfrak{I} ein Polardreieck; ausserdem haben wir die Involution auf $p\pi$, und das Polarsystem ist nach 2) bestimmt.

• In dualer Weise ist es bestimmt, wenn statt der conjugirten Punkte zwei conjugirte Strahlen gegeben sind.

7) Zwei beliebige Paare von Pol und Polare: \mathfrak{I} und t , \mathfrak{I}_1 und t_1 und ein Paar conjugirter Punkte p , π bestimmen das Polarsystem ebenfalls eindeutig.

Ersichtlich sind $tt_1 = \mathfrak{I}_2$ und $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1 = t_2$ auch Pol und Polare; bezeichnen wir die Schnitte t_2t , t_2t_1 mit \mathfrak{T} , \mathfrak{T}_1 , so haben wir auf t_2 zwei Paare conjugirter Punkte $\mathfrak{I}\mathfrak{T}$, $\mathfrak{I}_1\mathfrak{T}_1$, also die Involution und zugleich die mit ihr perspective Involution um \mathfrak{I}_2 , den Pol von t_2 ; wir haben ausserdem noch ein Paar conjugirter Punkte $p\pi$, so dass nach dem vorigen Falle 6) das Polarsystem vollständig und eindeutig bestimmt wird.

8) Drei beliebige Paare von Pol und Polare: \mathfrak{I} und t , \mathfrak{I}_1 und t_1 , \mathfrak{I}_2 und t_2 enthalten mehr Elemente, als zur Bestimmung eines Polarsystems erforderlich sind.

Wir kennen die Abhängigkeit der sechs Stücke: Sind τ , τ_1 , τ_2 die Ecken t_1t_2 , t_2t , tt_1 des Dreiseits der Polaren, so müssen die beiden Dreiecke $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2$ und $\tau\tau_1\tau_2$ perspectiv liegen, so dass $\mathfrak{I}\tau$, $\mathfrak{I}_1\tau_1$, $\mathfrak{I}_2\tau_2$ in einen Punkt zusammenlaufen (Nr. 294). Wenn die Stücke dieser Bedingung genügen, so braucht man auf t_2 nur einen beliebigen Punkt als conjugirt zu \mathfrak{I}_2 anzunehmen und hat es dann mit der Construction 7) zu thun.

Zu einem Punkt P findet man die Polare folgendermassen: Man schneidet die Verbindungslinie von $(P\mathfrak{I}, t_1)$ und $(P\mathfrak{I}_1, t)$ mit $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1$ in x , die Verbindungslinie von $(P\mathfrak{I}_1, t_2)$, $(P\mathfrak{I}_2, t_1)$ mit $\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2$ in y , die Verbindungslinie von $(P\mathfrak{I}_2, t)$ und $(P\mathfrak{I}, t_2)$ mit $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_2$ in z , so sind x, y, z drei Punkte der Polare von P .

304 9) Zwei Involutionen auf t, t' (die nicht conjugirt sein sollen) und zwei conjugirte Punkte p, π bestimmen ein Polarsystem. Es sei (Fig. 90) \mathfrak{B} der Schnitt tt' und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1'$ seien ihm in den Involutionen conjugirt, so dass $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'$ die Polare von \mathfrak{B} ist. Die Verbindungslinie $p\pi$ schneide t in \mathfrak{I} , t' in \mathfrak{I}' , denen in den Involutionen von t und t' die Punkte \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_1' conjugirt seien.

Von der Involution auf $p\pi$ kennen wir das Paar $p\pi$; sehen wir zunächst von demselben ab, so müssen die in ihr zu \mathfrak{I} und \mathfrak{I}'

der durch R geht; weil \mathfrak{I}_2 und \mathfrak{I}'_2 projective Punktreihen durchlaufen, in denen \mathfrak{I}' und \mathfrak{I} sich entsprechen. Die krumme Punktreihe auf demselben wird aus den drei Punkten P, Q, R , die ihm angehören, in die Reihen der $\mathfrak{I}'_2, \mathfrak{I}_2, p$ projectiv; folglich sind diese projectiv, und da die Reihen der Punkte $\mathfrak{I}'_2, \mathfrak{I}_2$ mit denen der Punkte O, O' beziehentlich perspectiv sind, diese aber wiederum mit dem von \mathfrak{Q} beschriebenen Strahlbüschel, so ist auch dieses mit der Reihe der Punkte p projectiv. Der Strahl in ihm, der in dieser Projectivität (welche durch drei Lagen der Gerade \mathfrak{L} festgelegt ist) dem Punkte π als p entspricht, ist der gesuchte, welcher zu derjenigen Involution auf $p\pi$ führt, in der auch diese Punkte p und π conjugirt sind. Ist die richtige Gerade \mathfrak{L} gefunden, so ist die Construction auf 8) zurückgeführt. Man sieht, dass auch in dem jetzigen Falle das Polarsystem vollständig und eindeutig bestimmt ist.

In dualer Weise ist das Polarsystem durch zwei beliebige Strahlinvolutionen (deren Grundpunkte nicht conjugirte Punkte sein sollen) und ein Paar conjugirter Strahlen vollständig und eindeutig bestimmt.

Eine einfachere und weit übersichtlichere, wenn auch nicht mehr lineare Construction lässt sich auf folgende Weise ableiten.

Sei $x\xi$ ein veränderliches Punktepaar der auf dem Träger t gegebenen Involution, $x_1\xi_1$ ein solches auf t_1 (des vorhinigen t') und $p\pi$ das einzeln gegebene Paar conjugirter Punkte; verbinden wir den ersten Punkt p mit den Paaren $x\xi$ und $x_1\xi_1$ durch Strahlenpaare, so erhalten wir um p zwei auf einander liegende Involutionen, welche ein gemeinschaftliches Strahlenpaar haben. Dieses kann nur dann imaginär werden, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind; ein Fall, den wir nachher erledigen wollen. Ist das gemeinschaftliche Strahlenpaar durch p ermittelt und trifft es t und t_1 in den Punktepaaren $x^p\xi^p, x_1^p\xi_1^p$, so dass also $(x^p x_1^p, \xi^p \xi_1^p) = p$ ist, dann bestimmen wir den Punkt $(x^p \xi_1^p, \xi^p x_1^p) = \pi^1$ und erhalten, da p und π^1 nach Hesse's Satz (Nr. 294) conjugirte Punkte des Polarsystems sind, die Verbindungslinie $\pi\pi^1$ als Polare von p .

In gleicher Weise operiren wir, indem wir den Punkt π an Stelle von p setzen; trifft nun das gemeinsame Strahlenpaar die t und t_1 in den Punktepaaren $x^\pi\xi^\pi, x_1^\pi\xi_1^\pi$, so dass $(x^\pi x_1^\pi, \xi^\pi \xi_1^\pi) = \pi$ und $(x^\pi \xi_1^\pi, \xi^\pi x_1^\pi) = p^1$ wird, dann ist pp^1 die Polare von π ; der Schnittpunkt $(\pi\pi^1, pp^1) = p$ ist also der Pol der Verbindungslinie $p\pi$, und wir haben ein Polardreieck $p\pi p$ und ausserdem eine der beiden Involutionen $(x\xi)$ oder $(x_1\xi_1)$, wodurch das Polarsystem nach 2) vollständig bestimmt ist.

Nur in dem Falle, dass beide Involutionen $t(x\xi)$ und $t_1(x_1\xi_1)$ hyperbolisch sind, kann die Construction wegen imaginärer Elemente

illusorisch werden; dies ist aber gerade der einfachste Fall; dann muss nämlich das Polarsystem hyperbolisch sein und der Kern-Kegelschnitt durch die vier Doppelpunkte a, α, a_1, α_1 der gegebenen hyperbolischen Involutionen gehen. Betrachten wir ausserdem p, π als die Doppelpunkte einer hyperbolischen Involution auf $p\pi = \mathcal{Q}$, so können wir durch die drei Punkte a, α, a_1 und je zwei conjugirte Punkte dieser Involution die Kegelschnitte legen, welche nothwendig durch einen vierten festen Punkt s laufen müssen (Nr. 170); ist s ermittelt, so wird der durch a, α, a_1, α_1 und s gelegte Kegelschnitt der Kern-Kegelschnitt des Polarsystems, also dieses vollständig bestimmt sein.

Nicht linear ist diese Construction wegen der Ermittlung der gemeinsamen Strahlenpaare zweier Involutionen oder der Doppelpunkte von hyperbolischen Involutionen.

10) *Drei beliebige Involutionen auf den Trägern v, t, t' enthalten mehr Elemente, als zur Bestimmung des Polarsystems ausreichend sind; wir wollen die Bedingung ermitteln, welche erfüllt werden muss, damit sie in demselben Polarsystem möglich sind; wir können sie sofort aus 9) entnehmen. Zu jedem der drei Schnitte $\mathcal{B} = tt', \mathcal{I} = vt, \mathcal{I}' = vt'$ werden in den beiden betreffenden Involutionen die conjugirten ermittelt: $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1; \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2; \mathcal{I}'_1, \mathcal{I}'_2$; die Bedingung ist, dass die drei Punkte $(\mathcal{B}_1 \mathcal{B}'_1, v), (\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2, t'), (\mathcal{I}'_1 \mathcal{I}'_2, t)$ in gerader Linie liegen.*

11) *Eine Involution auf dem Träger t , einmal Pol und Polare \mathcal{I}_1 und t_1 und ein Paar conjugirter Punkte p und π bestimmen das Polarsystem. Sei nämlich der Schnittpunkt $tt_1 = \mathcal{B}$ und \mathcal{B}_1 sein conjugirter Punkt in der gegebenen Involution, so wird $\mathcal{I}_1 \mathcal{B}_1$ die Polare von \mathcal{B} sein und t_1 in einem solchen Punkte \mathcal{B} treffen, dass $\mathcal{I}_1 \mathcal{B} \mathcal{B}$ ein Polardreieck ist; nehmen wir auf t irgend ein Paar conjugirter Punkte $\pi_1 p_1$ der gegebenen Involution, so haben wir zur Construction des Polarsystems ein Polardreieck und zwei Paare conjugirter Punkte, wodurch es also bestimmt wird und nach 4) zu construiren ist; dass dabei die Punkte p_1, π_1 mit einer Ecke \mathcal{B} in gerader Linie liegen, ändert im Wesentlichen nichts in der Construction.*

Die duale Bestimmung ist die durch einmal Pol und Polare, eine Strahlinvolution und zwei conjugirte Strahlen.

Wir können auch in folgender Weise construiren.

Ist $x\xi$ ein veränderliches Paar conjugirter Punkte der auf t gegebenen Involution, so sind die Schnittpunkte $(px, \pi\xi) = y$ und $(p\xi, \pi x) = \eta$ ebenfalls conjugirte Punkte nach dem Hesse'schen Satze und beschreiben bei der Veränderung von x, ξ einen Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$, während die Verbindungslinie $y\eta$ durch einen festen Punkt o der Gerade $p\pi$ läuft, den vierten harmonischen, dem Schnittpunkte $(t, p\pi)$ zugeordneten

Punkt. Ist der Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ ermittelt, so wird die Verbindungslinie $o\mathfrak{T}_1$ ihn in einem Punktepaare y^0, η^0 treffen; diese Gerade trifft ferner t_1 in einem Punkte b_1 , und die beiden Punktepaare $y^0\eta^0$ und \mathfrak{T}_1b_1 bestimmen eine Involution, welche dem Polarsystem zugehört. Wir haben also zwei Geraden mit den ihnen zugehörigen Involutionen, und ausserdem einmal Pol und Polare, wodurch das Polarsystem mehr als bestimmt ist und auf verschiedene Arten leicht hergestellt werden kann.

12) Eine Involution (x, ξ) auf dem Träger t und drei Paare conjugirter Punkte p und π , p_1 und π_1 , p_2 und π_2 bestimmen das Polarsystem.

Da p, π und x, ξ zwei Paare conjugirter Punkte sind, so sind auch $(px, \pi\xi) = y$, $(p\xi, \pi x) = \eta$ conjugirte Punkte, und in dem vollständigen Viereck $p\pi x\xi$ geht die Verbindungslinie $y\eta$ durch die beiden vierten harmonischen Punkte, welche zu dem Schnittpunkte der beiden Geraden $p\pi$ und $x\xi = t$ zugeordnet harmonisch liegen in Bezug auf p, π , bezw. x, ξ . Der erste Punkt o auf $p\pi$ bleibt fest, wenn $x\xi$ sich ändert, so dass $y\eta$ sich um ihn dreht.

Die Punkte y und η erzeugen, wie eben in 11), einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, weil px und $\pi\xi$ projective Strahlbüschel beschreiben und in ihnen auch $p\xi$ und πx entsprechende Strahlen sind. Jeder durch o gehende Strahl trifft daher diesen leicht herzustellenden Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ in einem Paare conjugirter Punkte des zu construirenden Polarsystems. Setzen wir an Stelle des Punktepaars $p\pi$ das zweite gegebene $p_1\pi_1$ und operiren mit ihm in derselben Weise, so erhalten wir einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ und einen Punkt o_1 auf $p_1\pi_1$ von solcher Beschaffenheit, dass jeder durch o_1 gehende Strahl den Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ in einem Paare conjugirter Punkte des Polarsystems trifft. Auf der Verbindungslinie oo_1 , welche den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ in s und σ , den $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ in s_1 und σ_1 treffe, haben wir zwei Paare conjugirter Punkte des Polarsystems, welche auf ihr die demselben zugehörige Involution bestimmen. Da ausserdem die Gerade t mit ihrer Involution gegeben ist, so haben wir nunmehr zwei Involutionen auf t und oo_1 , ausserdem noch ein Paar conjugirter Punkte $p_2\pi_2$, und durch diese Stücke ist das Polarsystem nach 9) vollkommen bestimmt.

Es ist hierbei noch der Fall zu berücksichtigen, dass eines oder beide Punktepaare $s\sigma, s_1\sigma_1$ imaginär werden; sie werden dann vertreten durch die elliptischen Involutionen, welche dem Träger oo_1 in Bezug auf die bekannten Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ zugehören. Die beiden Involutionen, von denen mindestens eine elliptisch ist, haben ein reelles Punktepaar gemeinsam, das die Doppelpunkte der gesuchten in diesem Falle hyperbolischen Involution liefert.

Dual hierzu ist die Bestimmung des Polarsystems durch eine Strahlinvolution und drei Paare conjugirter Strahlen.

13) Ein Paar von Pol und Polare \mathfrak{I} und t und ausserdem drei Paare conjugirter Punkte p und π , p_1 und π_1 , p_2 und π_2 bestimmen das Polarsystem.

Zu dem Punkte \mathfrak{I} ist jeder beliebige Punkt p von t conjugirt; daher sind auch die Schnittpunkte $(\mathfrak{I}p, \pi p) = x$, $(\mathfrak{I}\pi, pp) = \xi$ conjugirte Punkte, und wenn wir p auf der Gerade t verändern, so erhalten wir unendlich viele Paare conjugirter Punkte x und ξ , von denen der eine eine Punktreihe auf $\mathfrak{I}p$, der andere auf $\mathfrak{I}\pi$ durchläuft, und beide Punktreihen sind projectiv, weil sie mit der von p beschriebenen Punktreihe perspectiv liegen. Die Verbindungslinie $x\xi$ umhüllt daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher, wie leicht zu sehen ist, die Geraden $\mathfrak{I}p$ und $\mathfrak{I}\pi$ in denjenigen Punkten berührt, in welchen sie von t getroffen werden; da er ausserdem $p\pi$ berührt, so ist er durch diese Bedingungen vollständig bestimmt. Wir können ihn umgekehrt benutzen, um den Verlauf des veränderlichen Paares conjugirter Punkte $x\xi$ des gesuchten Polarsystems besser zu übersehen. Verbinden wir irgend einen Punkt o der Berührungssehne t mit einem Paar entsprechender Punkte x, ξ , so erhalten wir nach Nr. 95 durch o Strahlenpaare, die eine Involution bilden und zwar diejenige, welche dem Punkte o in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört. Es wird also jedes Strahlenpaar dieser bekannten Involution die Geraden $\mathfrak{I}p, \mathfrak{I}\pi$ in zwei conjugirten Punkten des gesuchten Polarsystems treffen. Diese Involution (o) wird hyperbolisch oder elliptisch sein je nach der Lage des Punktes o auf der Berührungssehne t . Wir können aber, da die Berührungspunkte reell sind, o immer so wählen, dass sie elliptisch wird.

Wenn wir nun das zweite gegebene Paar $p_1\pi_1$ nehmen und in derselben Weise verfahren, wie eben mit $p\pi$, so erhalten wir einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welcher $p_1\pi_1$ zur Tangente hat und $\mathfrak{I}p_1$ und $\mathfrak{I}\pi_1$ in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen sie von t getroffen werden. Jedem Punkte o der Berührungssehne t gehört eine Involution in Bezug auf $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zu, und von einem Strahlenpaar desselben trifft der eine Strahl Bp_1 in x_1 , der andere $B\pi_1$ in ξ_1 , so dass x_1, ξ_1 zwei conjugirte Punkte des gesuchten Polarsystems sind.

Die beiden Involutionen, welche denselben Punkte o auf t in Bezug auf beide Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zugehören, haben ein gemeinschaftliches Strahlenpaar, das reell ist, wenn o mindestens innerhalb eines der beiden Kegelschnitte liegt. Trifft von diesem Strahlenpaare der eine Strahl Bp und Bp_1 in x und x_1 , der andere $B\pi$ und $B\pi_1$

in ξ und ξ_1 , so liegt der Schnittpunkt $(xx_1, \xi\xi_1) = o$ auf t , und da $x\xi$ und $x_1\xi_1$ zwei Paare conjugirter Punkte des gesuchten Polarsystems sind, so sind auch o und der Schnittpunkt $(x\xi_1, \xi x_1) = \omega$ conjugirte Punkte. Folglich werden, da \mathfrak{I} und t Pol und Polare sind, auch o und $\mathfrak{I}\omega$ Pol und Polare und o und $(t, \mathfrak{I}\omega)$ conjugirt sein. Wir können also die Involution auf t herstellen, sowie die zu ihr perspective um \mathfrak{I} ; und da wir ausserdem noch ein drittes bisher nicht benutztes Paar conjugirter Punkte $p_2 \pi_2$ zur Bestimmung des Polarsystems gegeben haben, so ist dasselbe nach 6) bekannt und zu construiren.

306

Es bleibt uns jetzt noch die allgemeinste Aufgabe zu lösen übrig, wenn 14) fünf beliebige Paare conjugirter Punkte zur Bestimmung des Polarsystems gegeben sind. Um es aus diesen Bestimmungsstücken auf eindeutige Weise zu construiren, wiederholen wir, sie etwas anders behandelnd, die Fälle 7) und 13), welche die Construction vorbereiten.

a) Zur Bestimmung des Polarsystems sind gegeben: Zwei Punkte \mathfrak{I} und \mathfrak{I}_1 , ihre Polaren t und t_1 und ein Paar conjugirter Punkte \mathfrak{I}_2, τ_2 ; die Polare t_2 von \mathfrak{I}_2 soll also durch τ_2 gehen. Das Dreieck $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2$ und das von den drei Polaren t, t_1, t_2 dieser Punkte gebildete Dreieck müssen perspectiv liegen, d. h. die drei Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2, t), (\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}, t_1), (\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1, t_2)$$

liegen auf einer Gerade. Durch die beiden ersten Punkte ist dieselbe schon bestimmt; der Punkt, in welchem sie $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1$ trifft, muss auf t_2 liegen, also seine Verbindungslinie mit τ_2 die Polare t_2 sein. Haben wir sonach dreimal Pol und Polare: \mathfrak{I}, t ; \mathfrak{I}_1, t_1 ; \mathfrak{I}_2, t_2 , so können wir zu einem beliebigen Punkte \mathfrak{I}_3 die Polare t_3 nach demselben Verfahren construiren, indem wir uns das Dreieck $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_3$ und sein Polardreieck, ferner $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3$ und sein Polardreieck, endlich noch $\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3$ und sein Polardreieck in der nothwendigen perspective Lage denken und dadurch für t_3 drei Punkte finden, von denen zwei schon zur Bestimmung dieser Gerade hinreichen. Die Construction lässt sich also folgendermassen hinschreiben:

Gegeben: \mathfrak{I} und t , \mathfrak{I}_1 und t_1 , \mathfrak{I}_2 und τ_2 .

Bestimme:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2, t) &= s_{12}, & (\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}, t_1) &= s_{20}, & (\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1, s_{12} s_{20}) &= s_{01}, \\ & & \tau_2 s_{01} &= t_2, \\ (\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_3, t) &= s_{13}, & (\mathfrak{I}_3\mathfrak{I}, t_1) &= s_{30}, & (\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1, s_{13} s_{30}) &= \sigma_{01}, \\ (\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3, t) &= \sigma_{23}, & (\mathfrak{I}_3\mathfrak{I}, t_2) &= \sigma_{30}, & (\mathfrak{I}\mathfrak{I}_2, \sigma_{23} \sigma_{30}) &= \sigma_{02}, \\ (\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3, t_1) &= s_{23}, & (\mathfrak{I}_3\mathfrak{I}_1, t_2) &= \sigma_{31}, & (\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2, s_{23} \sigma_{31}) &= \sigma_{12}; \end{aligned}$$

dann liegen die drei Punkte $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}$ auf der Gerade t_3 , der Polare des Punktes \mathfrak{I}_3 für das oben bestimmte Polarsystem.

Wir denken uns jetzt von den gegebenen Stücken die Gerade t_1 um einen festen Punkt τ_1 gedreht, so dass für jede Lage von t_1 ein anderes Polarsystem entsteht, und ermitteln nach der vorigen Construction für jedes derselben die dem Punkte \mathfrak{I}_3 zugehörige Polare t_3 ; so wird sich zeigen, dass alsdann auch t_3 um einen festen Punkt π_3 sich dreht und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von t_1 beschriebenen projectiv ist. In der That, bei der Bewegung von t_1 um den festen Punkt τ_1 bleiben die Punkte $s_{12}, s_{13}, \sigma_{23}$ fest, der Punkt s_{20} durchläuft eine gerade Punktreihe auf dem Träger $\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}$, ebenso s_{01} auf dem Träger $\mathfrak{I} \mathfrak{I}_1$, die Gerade t_2 beschreibt also ein Strahlbüschel um τ_2 , welches mit dem von t_1 beschriebenen projectiv ist; s_{30} und σ_{30} durchlaufen daher auf dem Träger $\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}$ Punktreihen, die gleichfalls mit dem Strahlbüschel (t_1) projectiv sind, und die Punkte σ_{01}, σ_{02} durchlaufen endlich auf den Trägern $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}$ projective Punktreihen; diese beiden Punktreihen liegen aber perspectiv, weil in den Schnittpunkt \mathfrak{I} ihrer Träger zwei entsprechende Punkte fallen. Nehmen wir nämlich insbesondere an, dass die bewegliche Gerade t_1 durch \mathfrak{I} geht, so gelangt unter dieser Annahme s_{30} nach \mathfrak{I} , ebenso auch s_{20} und s_{01} , also geht auch t_2 durch \mathfrak{I} , mithin kommen in diesem Falle auch σ_{01}, σ_{30} und σ_{02} nach \mathfrak{I} ; es fallen daher zwei entsprechende Punkte σ_{01} und σ_{02} nach \mathfrak{I} . Die Verbindungslinie entsprechender Punkte, d. h. die Gerade t_3 läuft folglich durch einen festen Punkt π_3 und beschreibt ein mit (t_1) projectives Strahlbüschel. Fügen wir jetzt zur Bestimmung des Polarsystems noch die neue Bedingung hinzu, dass die Polare von \mathfrak{I}_3 durch einen gegebenen Punkt τ_3 gehe, d. h. \mathfrak{I}_3 und τ_3 conjugirte Punkte seien, so giebt es unter den unzählig vielen Polarsystemen nur ein *einziges*, welches den Bedingungen genügt, dass

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{I} \text{ und } t \text{ Pol und Polare,} \\ \mathfrak{I}_1 \text{ und } \tau_1, \mathfrak{I}_2 \text{ und } \tau_2, \mathfrak{I}_3 \text{ und } \tau_3 \text{ conjugirte Punkte seien;} \end{array} \right.$$

und wir gelangen zur Bestimmung dieses Polarsystems, indem wir den vorhin ermittelten Punkt π_3 mit τ_3 verbinden und $\pi_3 \tau_3 = t_3$ als Polare von \mathfrak{I}_3 annehmen, so dass alsdann das Polarsystem auf die vorige Art durch die Bestimmungsstücke \mathfrak{I} und t , \mathfrak{I}_3 und t_3 , \mathfrak{I}_2 und τ_2 (oder auch \mathfrak{I}_1 und τ_1) construirt wird. Es bleibt nun übrig, für das durch die gegebenen Stücke bestimmte Polarsystem zu einem gegebenen Punkte \mathfrak{I}_4 die Polare t_4 zu construiren, und hierzu ist es erforderlich, den Punkt π_3 zu kennen, welchen wir so ermitteln, dass wir zwei beliebige Lagen von t_1 durch den Punkt τ_1 annehmen und vermöge der obigen Construction die zugehörigen Lagen von t_3 bestimmen, deren gemeinschaftlicher Punkt π_3 sein wird. Diese Construction wird aller-

dings etwas weitläufig, aber ohne alle Schwierigkeit, und wir werden uns die Mühe nicht ersparen können, sie hinzuschreiben:

Gegeben: \mathfrak{I} und t , \mathfrak{I}_1 und τ_1 , \mathfrak{I}_2 und τ_2 , \mathfrak{I}_3 und τ_3 ; es soll zu \mathfrak{I}_4 die Polare t_4 construirt werden; wir ziehen durch τ_1 zwei beliebige Geraden t'_1, t''_1 und bestimmen folgende Schnittpunkte und Verbindungs-

$$\begin{aligned} (\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2, t) &= s_{12}, & (\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}, t'_1) &= s_{20}', & (\mathfrak{I} \mathfrak{I}_1, s_{12} s_{20}') &= s_{01}', \\ & & \tau_2 s_{01}' &= t_2', & & \\ (\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2, t) &= s_{12}, & (\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}, t''_1) &= s_{20}'', & (\mathfrak{I} \mathfrak{I}_1, s_{12} s_{20}'') &= s_{01}'', \\ & & \tau_2 s_{01}'' &= t_2'', & & \\ (\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_3, t) &= s_{13}, & (\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}, t'_1) &= s_{30}', & (\mathfrak{I} \mathfrak{I}_1, s_{13} s_{30}') &= \sigma_{01}', \\ (\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3, t'_1) &= s_{23}', & (\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_1, t'_1) &= \sigma_{31}', & (\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2, s_{23}' \sigma_{31}') &= \sigma_{12}', \\ & & \sigma_{01}' \sigma_{12}' &= t_3', & & \\ (\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_3, t) &= s_{13}, & (\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}, t''_1) &= s_{30}'', & (\mathfrak{I} \mathfrak{I}_1, s_{13} s_{30}'') &= \sigma_{01}'', \\ (\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3, t''_1) &= s_{23}'', & (\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_1, t''_1) &= \sigma_{31}'', & (\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2, s_{23}'' \sigma_{31}'') &= \sigma_{12}'', \\ & & \sigma_{01}'' \sigma_{12}'' &= t_3'', & t_3' t_3'' &= \pi_3, & \pi_3 \tau_3 &= t_3, \\ (\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3, t) &= s_{23}, & (\mathfrak{I} \mathfrak{I}_2, t_3) &= s_{02}, & (\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}, s_{23} s_{02}) &= s_{30}, \\ & & \tau_2 s_{30} &= t_2, & & \\ (\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_4, t) &= s_{34}, & (\mathfrak{I}_4 \mathfrak{I}, t_3) &= s_{40}, & (\mathfrak{I} \mathfrak{I}_3, s_{34} s_{40}) &= \sigma_{03}, \\ (\mathfrak{I}_4 \mathfrak{I}_2, t) &= s_{42}, & (\mathfrak{I} \mathfrak{I}_4, t_2) &= \sigma_{04}, & (\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}, s_{42} \sigma_{04}) &= \sigma_{02}, \\ & & \sigma_{03} \sigma_{02} &= t_4. & & \end{aligned}$$

Dies ist die Construction der gesuchten Geraden t_4 , möglichst kurz ausgedrückt und mit Aufgabe vollkommener Symmetrie, indem von den Geraden t'_3, t''_3, t_4 nur je zwei zu ihrer Bestimmung erforderliche Punkte ermittelt sind, der dritte, leicht angebbare, aber fortgelassen ist.

307 Wir denken uns jetzt diese Figur einer neuen, letzten Veränderung unterworfen, indem wir die Gerade t um einen festen Punkt τ drehen, und untersuchen die von dieser Bewegung abhängige Veränderung der Gerade t_4 ; es wird sich dabei zeigen, dass sie um einen festen Punkt π_4 sich dreht und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von t beschriebenen projectiv ist. Hieraus wird dann folgen, dass, wenn zur vollständigen Bestimmung des Polarsystems noch die neue Bedingung hinzutritt: t_4 solle durch einen gegebenen Punkt τ_4 gehen, das Polarsystem, wie oben angegeben, durch fünf Paare conjugirter Punkte: \mathfrak{I} und τ , \mathfrak{I}_1 und τ_1 , \mathfrak{I}_2 und τ_2 , \mathfrak{I}_3 und τ_3 , \mathfrak{I}_4 und τ_4 völlig bestimmt ist und in eindeutiger Weise hergestellt werden kann. Das Verfolgen der Bewegung von t_4 in der zuletzt ausgeführten Construction ist ohne Schwierigkeit, wenn auch etwas umständlich. Aus dem obigen Schema erkennen wir zunächst, dass s_{12} , s_{13} und s_{23} gerade Punktreihen durch-

laufen, welche mit dem von der Gerade t beschriebenen Strahlbüschel perspectiv sind; die Punkte s_{20}' , s_{20}'' , s_{30}' , s_{30}'' , s_{23}' und s_{23}'' bleiben fest; daher werden s_{01}' , s_{01}'' projective Punktreihen auf $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1$, also t_2' und t_2'' projective Strahlbüschel beschreiben, die mit dem Strahlbüschel (t) projectiv sind. Hiernach durchlaufen auch σ_{01}' und σ_{12}' projective Punktreihen auf den Trägern $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2$; in den Schnittpunkt \mathfrak{I}_1 dieser Träger fallen aber zwei entsprechende Punkte hinein; denn sobald der Strahl t durch \mathfrak{I}_1 geht, fallen s_{12} , s_{13} , s_{01}' , σ_{31}' , σ_{01}' und σ_{12}' ebenfalls in \mathfrak{I}_1 hinein; die Verbindungslinie $\sigma_{01}'\sigma_{12}'$ oder t_3' läuft also durch einen festen Punkt π_3' und in gleicher Weise die Gerade t_3'' durch einen festen Punkt π_3'' , und beide beschreiben Strahlbüschel, welche mit dem ursprünglichen Strahlbüschel (t), also auch unter einander projectiv sind. Es zeigt sich aber noch weiter, dass dieselben perspectiv liegen; denn sobald insbesondere t durch \mathfrak{I}_1 geht, fallen, wie wir gesehen haben, t_2' und t_2'' zusammen in die Gerade $\tau_2\mathfrak{I}_1$; t_3' und t_3'' müssen auch durch \mathfrak{I}_1 gehen. Ausserdem können wir von der Gerade t_3' noch einen dritten Punkt σ_{02}' bestimmen, nämlich:

$$(\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3, t) = \sigma_{23}', \quad (\mathfrak{I}_3\mathfrak{I}, t_2') = \sigma_{30}', \quad (\mathfrak{I}\mathfrak{I}_2, \sigma_{23}'\sigma_{30}') = \sigma_{02}',$$

und von der Gerade t_3'' den Punkt σ_{02}'' :

$$(\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3, t) = \sigma_{23}'', \quad (\mathfrak{I}_3\mathfrak{I}, t_2'') = \sigma_{30}'', \quad (\mathfrak{I}\mathfrak{I}_2, \sigma_{23}''\sigma_{30}'') = \sigma_{02}''.$$

Weil nun in dem Falle, dass t durch \mathfrak{I}_1 geht, die Geraden t_2' und t_2'' zusammenfallen, so werden die Punkte σ_{30}' und σ_{30}'' offenbar auch zusammenfallen und hiernach auch σ_{02}' und σ_{02}'' ; da die Geraden t_3' , t_3'' in dem genannten Falle schon den Punkt \mathfrak{I}_1 gemein haben und ausserdem noch den Punkt σ_{02} , welchen wir so erhalten:

$$(\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3, \tau\mathfrak{I}_1) = \sigma_{23}^0, \quad (\mathfrak{I}_3\mathfrak{I}, \tau_2\mathfrak{I}_1) = \sigma_{30}^0, \quad (\mathfrak{I}\mathfrak{I}_2, \sigma_{23}^0\sigma_{30}^0) = \sigma_{02}^0,$$

so fallen sie ganz zusammen, und es liegen daher die beiden Strahlbüschel (t_3') und (t_3'') perspectiv, weil zwei entsprechende Strahlen auf einander fallen; die Punkte π_3' und π_3'' müssen daher in gerader Linie liegen mit \mathfrak{I}_1 , und das Erzeugniss der beiden von t_3' und t_3'' beschriebenen Strahlbüschel, d. h. der Ort des Punktes π_3 ist eine gerade Punktreihe, welche mit dem Strahlbüschel (t) projectiv ist. Da hiernach $t_3 = \tau_3\pi_3$ ein mit (t) projectives Strahlbüschel beschreibt, so durchlaufen s_{23} und s_{02} projective Punktreihen auf den Trägern $\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3$ und $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_2$; die Verbindungslinie $s_{23}s_{02}$ umhüllt daher einen Kegelschnitt, welcher diese Geraden berührt. Er berührt gleichzeitig $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_3$; denn sobald t durch \mathfrak{I}_3 geht, muss t_3 durch \mathfrak{I} gehen; dies folgt sowohl aus der Grundeigenschaft des Polarsystems, als auch aus dem obigen Constructionsschema, weil in dem Falle, dass t durch \mathfrak{I}_3 geht, die Punkte σ_{01}' und σ_{01}'' nach \mathfrak{I} gelangen, also zwei entsprechende t_3'

und t_3'' sich in \mathfrak{I} treffen, π_3 nach \mathfrak{I} gelangt und t_3 durch \mathfrak{I} geht. Der Kegelschnitt, welchen die Verbindungslinie $s_{23}s_{02}$ umhüllt, ist also dem Dreieck $\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_3\mathfrak{I}$ eingeschrieben, und die Tangente $\mathfrak{I}_3\mathfrak{I}$ wird von der veränderlichen Tangente $s_{23}s_{02}$ in einem Punkte s_{30} getroffen, welcher eine gerade Punktreihe durchläuft, die mit der von s_{23} oder s_{02} durchlaufenen Punktreihe projectiv ist (Nr. 63). Hieraus folgt, dass auch t_2 ein mit (t) projectives Strahlbüschel beschreibt. Endlich ergibt sich in gleicher Weise, dass s_{34} und s_{40} und auch σ_{03} , s_{42} , σ_{04} und σ_{02} projective Punktreihen durchlaufen; die beiden von σ_{03} und σ_{02} auf den Trägern $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_3$ und $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_2$ durchlaufenen Punktreihen liegen aber perspectiv, weil in den Schnittpunkt \mathfrak{I} der Träger zwei entsprechende Punkte fallen; denn sobald t durch \mathfrak{I}_4 geht, gelangen sowohl σ_{03} als auch σ_{02} nach \mathfrak{I} , fallen also in diesem Punkte zusammen; hieraus schliessen wir, dass die Verbindungslinie $\sigma_{03}\sigma_{02} = t_4$ durch einen festen Punkt π_4 läuft und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von t beschriebenen projectiv ist. Dieses Resultat lässt sich als Satz so aussprechen:

Es gibt unendlich viele Polarsysteme von der Beschaffenheit, dass viermal zwei gegebene Punkte \mathfrak{I} und τ , \mathfrak{I}_1 und τ_1 , \mathfrak{I}_2 und τ_2 , \mathfrak{I}_3 und τ_3 conjugirte Punkte sind. Wenn man zu irgend einem festen Punkte \mathfrak{I}_4 für jedes von ihnen die Polare t_4 construirt, so laufen diese sämtlichen Geraden t_4 durch einen festen Punkt π_4 und bilden ein Strahlbüschel; irgend zwei solcher Strahlbüschel sind allemal projectiv und entsprechende Strahlen derselben Polaren der beiden \mathfrak{I}_4 in Bezug auf dasselbe Polarsystem. Eine solche Reihe von Polarsystemen besitzt also dieselbe Eigenschaft, wie ein Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten (Nr. 221), und in der That bilden ihre Kern-Kegelschnitte ein solches Büschel (vergl. Nr. 333). Fügen wir nun noch die fünfte Bedingung hinzu, dass die Polare des gegebenen Punktes \mathfrak{I}_4 durch einen gegebenen Punkt τ_4 gehen soll, so giebt es nur ein einziges Polarsystem, welches diesen fünf Bedingungen gleichzeitig genügt, dass

c) \mathfrak{I} und τ , \mathfrak{I}_1 und τ_1 , \mathfrak{I}_2 und τ_2 , \mathfrak{I}_3 und τ_3 , \mathfrak{I}_4 und τ_4
fünf Paare conjugirter Punkte seien.

Zu der Construction dieses Polarsystems ermitteln wir den Punkt π_4 , indem wir die vorhin angegebene Construction zweimal ausführen für zwei beliebige durch den Punkt τ gezogene Geraden t, t' , zwei besondere Lagen von t ; wir erhalten dadurch zwei Geraden t_4', t_4'' , welche sich in dem gesuchten Punkte π_4 schneiden; die Verbindungslinie $\tau_4\pi_4 = t_4$ ist dann die Polare des Punktes \mathfrak{I}_4 in dem zu bestimmenden Polarsystem, und indem wir die vorige Construction noch einmal anwenden unter Annahme der Bestimmungsstücke: \mathfrak{I}_4 und t_4 , \mathfrak{I}_3 und τ_3 ,

\mathfrak{I}_2 und τ_2 , \mathfrak{I}_1 und τ_1 (oder \mathfrak{I} und τ), sind wir im Stande, zu jedem beliebigen Punkte \mathfrak{I}_5 die Polare t_5 in dem Polarsystem zu construiren, also das ganze Polarsystem herzustellen. Die Ausführung dieser Construction wird zwar sehr weitläufig, ist aber ohne theoretische Schwierigkeit, und wir glauben sie übergehen zu dürfen, weil der Verlauf derselben aus dem oben angegebenen, dreimal zu wiederholenden Constructionsschema sich ergibt.

§ 59. Durchmesser und Mittelpunkt, die Involution der conjugirten Durchmesser und die Axen des Polarsystems.

Wir haben schon in Nr. 299 den Pol der unendlich entfernten 308 Gerade G_∞ in einem Polarsystem Π als den *Mittelpunkt* M desselben bezeichnet. Er ist in den Involutionen aller durch ihn gehenden Geraden je dem unendlich fernen Punkte conjugirt, also der Mittelpunkt.

Ein beliebiger Punkt \mathfrak{M} ist nur auf einer durch ihn gehenden Gerade t der Mittelpunkt der zugehörigen Involution, nämlich auf der Gerade, die durch ihn parallel zu seiner Polare geht. Ist er es auf zweien, so verbindet seine Polare deren unendlich ferne Punkte und ist deshalb die G_∞ .

Auf einer Gerade t sei \mathfrak{M} der Mittelpunkt der Involution, die Polare m von \mathfrak{M} ist dann parallel zu t ; in der zu \mathfrak{M} gehörigen Involution sei t_1 der t conjugirt; sie enthält den Pol von t und dieser ist $t_1 m$. Er ist zum gemeinsamen unendlich fernen Punkt von t und m conjugirt, daher Mittelpunkt der Involution auf m . Ebenso ist \mathfrak{M} diesem unendlich fernen Punkte conjugirt; daher ist t_1 die Polare desselben; der Mittelpunkt M der Involution auf t_1 ist somit auch diesem unendlich fernen Punkte conjugirt, d. h. auch Mittelpunkt der Involution auf der Gerade, die durch M parallel zu t und m geht, also Mittelpunkt des Polarsystems.

Ferner sollen sämmtliche Geraden, welche durch den Mittelpunkt M gehen, *Durchmesser des Polarsystems*, die conjugirten Strahlen der dem Punkte M im Polarsystem zugehörigen Involution *conjugirte Durchmesser* und die Axen dieser Involution die *Axen des Polarsystems* genannt werden.

Für jeden von zwei conjugirten Durchmessern des Polarsystems ist der unendlich ferne Punkt des andern der Pol, und er enthält die Mittelpunkte der Involutionen auf allen Geraden, welche zu dem andern parallel sind.

Wenn man also in einer beliebigen Richtung zwei oder mehrere parallele Geraden in der Ebene eines Polarsystems zieht, so liegen die

Mittelpunkte der ihnen zugehörigen Involutionen auf einem Durchmesser des Polarsystems; verändert man die angenommene Richtung, so laufen alle Durchmesser durch einen festen Punkt, den Mittelpunkt des Polarsystems, und je zwei Durchmesser, von denen einer der angenommenen Richtung parallel ist, der andere die Mittelpunkte der Involutionen aller Geraden von dieser Richtung enthält, sind conjugirte Strahlen einer Involution oder conjugirte Durchmesser, indem auch umgekehrt die dem letzteren parallelen Geraden ihre Mittelpunkte auf dem ersteren haben.

Fällt der Mittelpunkt M eines Polarsystems selbst ins Unendliche, so liegt er auf seiner Polare und ist also ein Punkt des Kerns; das Polarsystem ist daher hyperbolisch und der Kern-Kegelschnitt offenbar eine Parabel.

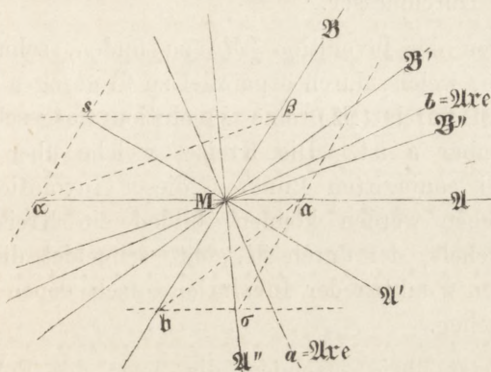
Liegt dagegen der Mittelpunkt M des Polarsystems nicht im Unendlichen, so ist die ihm zugehörige Involution entweder hyperbolisch oder elliptisch; ist sie hyperbolisch, so fallen in jeden der beiden Doppelstrahlen zwei conjugirte Strahlen zusammen, und da der unendlich entfernte Punkt des einen Strahls der Pol des andern ist, so liegt der unendlich entfernte Punkt eines Doppelstrahls zugleich auf seiner Polare, ist daher ein Punkt des Kerns; das Polarsystem ist also hyperbolisch und der Kern-Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist die Involution des Mittelpunkts M dagegen elliptisch, so können zwei Fälle eintreten: Entweder ist das Polarsystem hyperbolisch und der Kern-Kegelschnitt eine Ellipse, oder jenes ist elliptisch und dieser imaginär. Der erste Fall tritt ein, sobald die auf irgend einem Durchmesser befindliche Involution des Polarsystems hyperbolisch, der letzte Fall, sobald sie elliptisch ist; alsdann sind auch die Involutionen sämtlicher Durchmesser im ersten Fall hyperbolisch, im letzten elliptisch.

Wir bemerken noch, dass die einem beliebigen Punkte \mathfrak{T} zugehörige Involution immer ein Paar conjugirter Strahlen besitzt, welche einem Paar conjugirter Durchmesser parallel laufen, und dass sogar der eine jener Strahlen mit dem einen dieser Durchmesser zusammenfällt; denn ziehen wir $\mathfrak{T}M$, so läuft der conjugirte Durchmesser parallel mit dem zu $\mathfrak{T}M$ conjugirten Strahle der Involution (\mathfrak{T}). Hieraus folgt, dass in allen Involutionen, deren Grundpunkte auf einem und demselben Durchmesser liegen, die dem Durchmesser conjugirten Strahlen eine feste Richtung haben, nämlich die des conjugirten Durchmessers.

309 Die Involutionen auf zwei conjugirten Durchmessern sind nach Nr. 303 1) zur Bestimmung des Polarsystems ausreichend; stellen wir uns dann die Aufgabe, die Axen mit den auf ihnen befindlichen Involutionen zu construiren. Durch den Mittelpunkt und den unendlich

entfernten Punkt ist auf jedem Durchmesser bereits ein Paar conjugirter Punkte gegeben; durch ein zweites Paar wird also die Involution vollständig bestimmt. Seien (Fig. 91) \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die sich in M schneidenden gegebenen conjugirten Durchmesser, auf dem ersteren die conjugirten Punkte a und α , auf dem letzteren b und β gegeben. Setzen wir den Fall eines *elliptischen Polarsystems* voraus, weil wir

Fig. 91.



mit diesem früher beim Polarsystem eines reellen Kegelschnitts nichts zu thun gehabt haben; dann müssen a und α und ebenso b und β auf entgegengesetzten Seiten von M liegen; das Product $Ma \cdot M\alpha$ ist die Potenz der auf dem Durchmesser \mathfrak{A} befindlichen Involution und ist eine negative Grösse, weil Ma und $M\alpha$ entgegengesetzte Richtung haben (der Gang der Untersuchung bleibt übrigens im Wesentlichen ungeändert für jede andere Annahme über die Lage der Punkte $a, \alpha; b, \beta$). Wir bezeichnen diese Potenz des auf dem Durchmesser \mathfrak{A} befindlichen Punktsystems durch

$$P_{\mathfrak{A}} = Ma \cdot M\alpha$$

und ebenso die auf \mathfrak{B} durch

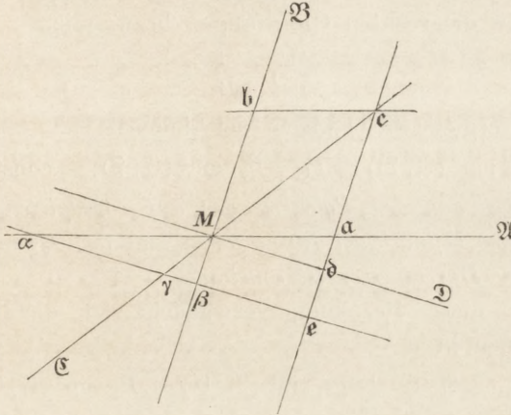
$$P_{\mathfrak{B}} = Mb \cdot M\beta.$$

Wäre z. B. die Involution auf \mathfrak{A} hyperbolisch, so würde die Potenz $P_{\mathfrak{A}}$ positiv und gleich dem Quadrate des Halbmessers des Kern-Kegelschnitts auf dem Durchmesser \mathfrak{A} sein.

Um die Axen des Polarsystems zu finden, müssen wir die dem Mittelpunkte M zugehörige Involution, von der wir bis jetzt nur ein Paar conjugirter Strahlen haben, vollständig kennen und ihre Axen ermitteln, welche die gesuchten Axen sind. Die Polare des Punktes a ist nun die durch α zu \mathfrak{B} gezogene Parallele und die Polare von b die durch β zu \mathfrak{A} gezogene Parallele, der Schnittpunkt s dieser beiden Parallelen also der Pol von $a\beta$; der unendlich entfernte Punkt von $a\beta$

Wenn zwei conjugirte Durchmesser \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und die Potenzen $P_{\mathfrak{A}}$, $P_{\mathfrak{B}}$ ³¹⁰ der Involutionen conjugirter Punkte auf ihnen gegeben sind, so kann man die Potenz $P_{\mathfrak{C}}$ der Involution auf einem beliebigen dritten Durchmesser \mathfrak{C} durch sie ausdrücken. Durch einen Punkt c von \mathfrak{C} (Fig. 93) ziehen wir die Parallelen zu \mathfrak{B} , \mathfrak{A} , welche bezw. \mathfrak{A} , \mathfrak{B} in a , b schneiden; diesen seien α , β in den gegebenen Involutionen conjugirt, so dass

Fig. 93.



$M\alpha \cdot M\alpha = P_{\mathfrak{A}}$, $Mb \cdot M\beta = P_{\mathfrak{B}}$. Jene beiden Parallelen sind die Polaren von α , β , also $\alpha\beta$ die von c und ihr Schnitt γ mit \mathfrak{C} zu c conjugirt; $P_{\mathfrak{C}} = Mc \cdot M\gamma$. Wir führen noch den zu \mathfrak{C} conjugirten Durchmesser \mathfrak{D} ein, die Parallele zu $\alpha\beta$ durch M ; d sei sein Schnitt mit ca , und e der von $\alpha\beta$ mit ca . Ersichtlich ist

$$\frac{de}{dc} \left(\frac{da}{de} + \frac{ac}{de} \right) = 1;$$

ersetzt man jedes der drei Verhältnisse durch ein (auch dem Vorzeichen nach) gleiches, so hat man:

$$\frac{M\gamma}{Mc} \left(\frac{Ma}{M\alpha} + \frac{Mb}{M\beta} \right) = 1.$$

Nun ist:

$$\frac{M\gamma \cdot Ma}{Mc \cdot M\alpha} = \frac{Mc \cdot M\gamma}{Ma \cdot M\alpha} \cdot \left(\frac{Ma}{Mc} \right)^2 = \frac{P_{\mathfrak{C}}}{P_{\mathfrak{A}}} \cdot \frac{\sin^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})}{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})},$$

$$\frac{M\gamma \cdot Mb}{Mc \cdot M\beta} = \frac{P_{\mathfrak{C}}}{P_{\mathfrak{B}}} \cdot \frac{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})}{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}.$$

Also ist:

$$I. \quad \frac{\sin^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})}{P_{\mathfrak{A}}} + \frac{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})}{P_{\mathfrak{B}}} = \frac{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{P_{\mathfrak{C}}}.$$

Addirt man dazu die für den zu \mathfrak{C} senkrechten Durchmesser \mathfrak{C}' geltende Beziehung, so ergibt sich:

$$\frac{1}{P_{\mathfrak{C}}} + \frac{1}{P_{\mathfrak{C}'}} = \frac{1}{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})} \left(\frac{1}{P_{\mathfrak{A}}} + \frac{1}{P_{\mathfrak{B}}} \right) = \text{const.} = \frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b}.$$

Also ist die Summe der reciproken Potenzen der Involutionen auf zwei rechtwinkligen Durchmessern constant.

Wenn wieder \mathfrak{D} der zu \mathfrak{C} conjugirte Durchmesser ist, so hat man:

$$\frac{\sin^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})}{P_{\mathfrak{A}}} + \frac{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})}{P_{\mathfrak{B}}} = \frac{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{P_{\mathfrak{C}}}, \quad \frac{\sin^2(\mathfrak{D}, \mathfrak{A})}{P_{\mathfrak{C}}} + \frac{\sin^2(\mathfrak{C}, \mathfrak{A})}{P_{\mathfrak{D}}} = \frac{\sin^2(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})}{P_{\mathfrak{A}}},$$

$$\frac{\sin^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{D})}{P_{\mathfrak{A}}} + \frac{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})}{P_{\mathfrak{B}}} = \frac{\sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{P_{\mathfrak{D}}}, \quad \frac{\sin^2(\mathfrak{D}, \mathfrak{B})}{P_{\mathfrak{C}}} + \frac{\sin^2(\mathfrak{C}, \mathfrak{B})}{P_{\mathfrak{D}}} = \frac{\sin^2(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})}{P_{\mathfrak{B}}}.$$

Multiplieirt man die rechten Gleichungen bezw. mit

$$\frac{1}{P_{\mathfrak{B}}}, \quad \frac{1}{P_{\mathfrak{A}}}$$

und addirt, so ergibt sich, wegen der linken:

$$\text{II. } P_{\mathfrak{A}} \cdot P_{\mathfrak{B}} \sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = P_{\mathfrak{C}} \cdot P_{\mathfrak{D}} \sin^2(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) = \text{const.} = P_a \cdot P_b.$$

Das Product aus den Potenzen der auf conjugirten Durchmessern eines Polarsystems befindlichen Involutionen und dem Quadrate des Sinus des Winkels der Durchmesser ist constant.

Vermittelst dieser Beziehung verwandeln sich die linken der vier obigen Relationen in:

$$P_{\mathfrak{A}} \sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) + P_{\mathfrak{B}} \sin^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = P_{\mathfrak{D}} \sin^2(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}),$$

$$P_{\mathfrak{A}} \sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) + P_{\mathfrak{B}} \sin^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{D}) = P_{\mathfrak{C}} \sin^2(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}).$$

Nehmen wir hierin für $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ die Axen a, b , so ergibt sich durch Addition:

$$\text{III. } P_{\mathfrak{A}} + P_{\mathfrak{B}} = P_a + P_b = \text{const.}$$

Die Summe der Potenzen der Involutionen auf zwei conjugirten Durchmessern ist constant.

Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei conjugirte Durchmesser, $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ zwei andere und \mathfrak{C} ein beliebiger Durchmesser, so ist:

$$P_{\mathfrak{A}} \sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) + P_{\mathfrak{B}} \sin^2(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = P_{\mathfrak{A}'} \sin^2(\mathfrak{A}', \mathfrak{C}) + P_{\mathfrak{B}'} \sin^2(\mathfrak{B}', \mathfrak{C}) = \text{const.},$$

denn beide Summen sind gleich $P_{\mathfrak{D}} \sin^2(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$, wo \mathfrak{D} zu \mathfrak{C} conjugirt ist.

Die Relationen II und III sind die Verallgemeinerungen der bekannten Eigenschaften conjugirter Durchmesser eines reellen Kegelschnitts; an Stelle des Halbmesser-Quadrats ist der allgemeinere Begriff der Potenz der Involution conjugirter Punkte auf dem Durchmesser getreten.

In Bezug auf das Vorzeichen von $P_{\mathfrak{A}}$ und $P_{\mathfrak{B}}$ verhalten sich alle Paare conjugirter Durchmesser gleichartig. Entweder sind durchweg beide negativ (elliptisches Polarsystem, imaginäre Ellipse) oder beide positiv (hyperbolisches Polarsystem mit einer [reellen] Ellipse als Kern) oder die eine Potenz ist positiv, die andere negativ (hyperbolisches Polarsystem mit einer Hyperbel als Kern).

Wenn die Involutionen, welche nach Nr. 292 auf zwei Geraden b, c zur Herstellung eines Polarsystems Π gelegt sind, den Schnittpunkt \mathfrak{A} zum gemeinsamen Mittelpunkt haben, so dass $\mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ im Unendlichen liegen, so wird dieser Punkt \mathfrak{A} der Mittelpunkt M des Polarsystems. Wir stellen ein zweites Polarsystem Π' her, indem wir auf dieselben Geraden Involutionen legen, welche ebenfalls diesen Punkt $\mathfrak{A} = M$ zum Mittelpunkt haben, deren Potenzen aber entgegengesetzt gleich sind denen des vorigen. Sind dann wieder b, c die Schnitte einer beliebigen Gerade s mit b, c , so liegen die ihnen in dem einen Falle conjugirten Punkte b_1, c_1 symmetrisch in Bezug auf M zu den im andern Falle conjugirten b_1', c_1' ; folglich liegen auch die beiden Pole $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ von s , in diesem Falle die vierten Ecken der Parallelogramme $b_1 M c_1, b_1' M c_1'$, symmetrisch in Bezug auf M .

Die Pole derselben Gerade in beiden Polarsystemen liegen symmetrisch in Bezug auf den gemeinsamen Mittelpunkt, in Folge dessen auch die Polaren desselben Punktes.

Jeder unendlich ferne Punkt hat daher denselben polaren Durchmesser in beiden Polarsystemen, oder *beide Polarsysteme haben dieselbe Durchmesserinvolution.*

Indem wir einen Durchmesser mit den beiden Polen eines seiner Punkte schneiden, erkennen wir, dass *auf jedem Durchmesser die beiden Potenzen der Involutionen conjugirter Punkte oder die Halbmesserquadrate entgegengesetzt gleich sind.*

Sind die Involutionen auf b, c für Π ungleichartig, so sind sie es auch für Π' , und die Kerncurven sind *conjugirte Hyperbeln*. Sind jene hyperbolisch und die Kerncurve von Π eine (reelle) Ellipse, so sind diese elliptisch und die Kerncurve eine imaginäre Ellipse, die man auch *conjugirt* zur ersteren nennt.

Combinirt man jede von den beiden Involutionen auf b mit entgegengesetzt gleichen Potenzen mit jeder der beiden auf c , so ergeben sich vier harmonisch zugeordnete Polarsysteme (Nr. 299), deren Kerncurven zwei conjugirte Hyperbeln und zwei conjugirte Ellipsen sind.

§ 60. Die Brennpunkte des Polarsystems.

Wir haben auch hier wiederum solche Punkte aufzusuchen, deren zugehörige Involutionen in einem Polarsystem Π rechtwinklig sind.* Eine

* Die folgende Untersuchung unterscheidet sich noch weniger als die vorangehende von der analogen früheren: Punkte, Tangenten und Normalen des Kerns lassen wir unberücksichtigt. Für den Anfänger ist wohl aber doch diese den Kegelschnitt nicht voraussetzende Wiederholung nicht überflüssig.

und die Involution (x) wird nicht rechtwinklig sein. Verändern wir indessen den Punkt x auf der Axe, so kann es sich ereignen, dass dies Senkrechtstehen eintritt, und ein solcher Punkt x , für welchen dies der Fall ist, muss die gewünschte Eigenschaft besitzen. Bei der Bewegung von x können wir noch die Richtung der durch ihn gehenden Geraden Y ganz willkürlich annehmen; es wird aber für die Betrachtung zweckmässig sein, ihre Richtung beizubehalten, also Y parallel mit sich zu verschieben; die Allgemeinheit der Betrachtung wird dadurch nicht beeinträchtigt. In der Involution auf X , in welcher y und z conjugirt sind, ist offenbar u der Mittelpunkt, und wegen der Eigenschaft der constanten Potenz einer Involution haben wir:

$$uy \cdot uz = \text{const.}$$

In dem Dreieck xyz ist xu eine Höhe, die beiden andern Höhen yy' und zz' schneiden sich daher in einem Punkte ξ der ersteren, d. h. der in Betracht gezogenen Axe des Polarsystems. Aehnliche Dreiecke geben ferner: $uy \cdot uz = ux \cdot \xi u = \text{const.}$

Wenn wir also den Punkt x festhalten und das Paar conjugirter Punkte y, z auf seiner Polare X die Involution durchlaufen lassen, so bleibt der Höhenpunkt ξ des Polardreiecks xyz derselbe feste Punkt.

Die Fusspunkte y' und z' der aus y und z auf die Seiten dieses Dreiecks gefällten Perpendikel besitzen die Eigenschaft, dass $y'y$ und $y'z$, ebenso $z'y$ und $z'z$ je zwei conjugirte Strahlen des Polarsystems sind, da sie auf einander senkrecht stehen, die Axen der den Punkten y' und z' zugehörigen Involutionen sind. Bei der Veränderung von y und z beschreiben nun y' und z' den Kreis, dessen Durchmesser $x\xi$ ist. Für jeden Punkt dieses Kreises sind die Verbindungslinien mit x und ξ die Axen der ihm zugehörigen Involution.

Um die Veränderung zu verfolgen, welche mit der Bewegung des Punktes x eintritt, müssen wir ermitteln, wie der Punkt ξ mit x sich verändert. Mit x verändert sich zunächst X , indem es sich beständig parallel bleibt und $Mx \cdot Mu = \text{const.}$ ist; weil die durch x gezogene Gerade Y ihre Richtung behält, so bewegt sich der Pol y auf dem zu dieser Richtung conjugirten Durchmesser My ; das Perpendikel yy' bleibt sich parallel, und es bleiben daher die Verhältnisse $\frac{My}{M\xi}$ und $\frac{Mu}{My}$ und daher auch $\frac{Mu}{M\xi}$ constant. Dies giebt:

$$Mx \cdot M\xi = \text{const.};$$

und hieraus schliessen wir, dass die Punkte x und ξ conjugirte Punkte einer bestimmten neuen auf der Axe befindlichen Involution sind, welche denselben Mittelpunkt M hat wie die der conjugirten Punkte

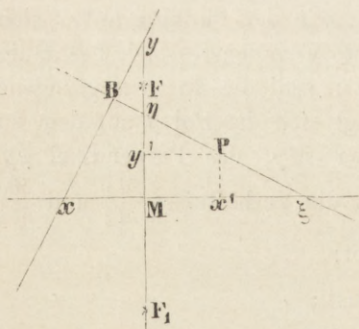
auf der betrachteten Axe. Die neue Involution wollen wir, wie früher, die *Focalinvolution* der Axe nennen.

312 Soll die dem Punkte x zugehörige Involution rechtwinklig sein, so muss auch das Polardreieck xyz bei x rechtwinklig sein, d. h. der Höhenpunkt ξ dieses Dreiecks muss mit der Ecke x zusammenfallen, und umgekehrt, nur dann, wenn es geschieht, sind Y und Z rechtwinklig zu einander. Es kommt also darauf an, die Doppelpunkte der Focalinvolution zu finden. Es giebt mithin auf jeder Axe des Polarsystems höchstens zwei Punkte von solcher Beschaffenheit, dass die ihnen zugehörigen Involutionen rechtwinklig sind. Die über den Strecken $x\xi$ der Focalinvolution als Durchmesser beschriebenen Kreise bilden ein Kreisbüschel und zwar mit einer eigentlichen gemeinschaftlichen Secante, wenn die Involution (x, ξ) elliptisch ist, mit einer ideellen, wenn sie hyperbolisch ist, indem die beiden Doppelpunkte die Grenzpunkte (Null-Kreise) des Kreisbüschels sind. Immer giebt es durch einen Punkt B nur einen einzigen, stets reellen Kreis, welcher dem Büschel angehört. Wir haben oben gesehen, dass für jeden Punkt B eines solchen Kreises, welcher über einem $x\xi$ als Durchmesser beschrieben ist, die Verbindungslinien mit x und ξ die Axen der ihm zugehörigen Involution sind. Da aber jedem Punkte B für Π nur eine Involution zugehört und auch durch jeden Punkt B nur ein bestimmter Kreis des Kreisbüschels hindurchgeht, so können wir umgekehrt schliessen:

Die Axen der Involution, welche in einem Polarsystem Π irgend einem Punkte zugeordnet ist, treffen jede der Axen von Π in einem Punktepaar einer festen Involution, der Focalinvolution dieser Axe.

Hierdurch wird die Focalinvolution (x, ξ) auf eine zweite, sehr einfache Weise bestimmt und zwar für jede der Axen des Polarsystems

Fig. 95.



in gleichartiger Weise, denn die eine der Betrachtung zu Grunde gelegte Axe hat vor der andern nichts voraus, und durch einen bestimmten Punkt B giebt es nur ein einziges Paar Axen derjenigen Involution, welche dem Punkte B im Polarsystem zugehört. Schneiden also die Axen der den beliebigen Punkte B zugehörigen Involution in x und ξ die eine, in y und η die andere Axe des Polarsystems, so bestimmen x, ξ und der

Mittelpunkt M die eine, y, η und der Mittelpunkt M die andere Focalinvolution auf den Axen von Π ; und es ist jetzt leicht ersichtlich,

dass von diesen beiden Involutionen die eine hyperbolisch und die andere elliptisch sein muss; denn sobald x und ξ auf derselben Seite von M gelegen sind, müssen y und η auf entgegengesetzten Seiten von M liegen und umgekehrt (Fig. 95). Die vier Punkte x, ξ, y, η liegen nämlich so, dass jeder von ihnen der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, und es findet demzufolge die Bedingung statt:

$$Mx \cdot M\xi + My \cdot M\eta = 0;$$

die beiden Producte, die Potenzen der Focalinvolutionen, sind also entgegengesetzt gleich.

Von den beiden Focalinvolutionen ist also die eine hyperbolisch, die andere elliptisch. Die Doppelpunkte der ersteren, F und F_1 , sind die einzigen reellen Punkte in der Ebene von Π , für welche die zugehörige Involution rechtwinklig ist; sie heissen die Brennpunkte des Polarsystems.

Auf der andern Axe haben wir zwei imaginäre Brennpunkte. Die unendlich ferne Gerade G_∞ wird ja auch von den Axen der den verschiedenen Punkten zugehörigen Involutionen in den Punktepaaren einer festen Involution I_∞ geschnitten, und wir können die imaginären Doppelpunkte dieser Involution, die absoluten Punkte, als ein drittes — festes — Brennpunktepaar eines jeden Polarsystems ansehen.

Es bleibt noch übrig, den gemeinsamen absoluten Werth der 313 beiden entgegengesetzt gleichen Potenzen der Focalinvolutionen zu bestimmen oder den Abstand jedes der Brennpunkte F, F_1 von dem Mittelpunkt M , von dem er das Quadrat ist; er ist leicht durch die Potenzen P_a und P_b derjenigen beiden Involutionen auszudrücken, welche den Axen a, b des Polarsystems zugehören. Nehmen wir von den beiden Axen der dem Punkte B zugehörigen Involution die eine, welche in x und y die Axen a, b von Π treffen möge, so wird ihr Pol P auf der andern liegen müssen (Fig. 95), welche in ξ und η die Axen a, b trifft. Die Polare von x muss nun durch P gehen und senkrecht stehen auf Mx ; wenn also das aus P auf Mx herabgelassene Perpendikel diese Gerade in x' trifft, so ist $Mx \cdot Mx' = P_a$ und ebenso $My \cdot My' = P_b$, wo y' der Fusspunkt des Lothes aus P auf My , der Polare von y , ist. Ersichtlich ist:

$$\frac{M\eta}{M\xi} = \frac{y'\eta}{y'P} = \frac{y'\eta}{Mx'} = \frac{M\eta - My'}{Mx'},$$

und setzen wir dies Verhältniss in die oben gefundene Relation:

$$Mx \cdot M\xi + My \cdot M\eta = 0$$

oder

$$\frac{M\eta}{M\xi} = -\frac{Mx}{My}$$

ein, so folgt:

$$My \cdot My' - Mx \cdot Mx' = -Mx \cdot M\xi = My \cdot M\eta$$

oder:

$$\begin{cases} Mx \cdot M\xi = P_a - P_b, \\ My \cdot M\eta = P_b - P_a. \end{cases}$$

Auf jeder der beiden Axen von Π ist die Potenz der Focalinvolution gleich der Potenz der Involution conjugirter Punkte auf ihr vermindert um die Potenz der Involution conjugirter Punkte auf der andern Axe.

Ist $P_b > P_a$, so ist $\sqrt{P_b - P_a}$ die Entfernung der beiden reellen Brennpunkte vom Mittelpunkte.

Für die Ellipse und die conjugirte imaginäre Curve findet sich derselbe Satz über die Brennpunkte, der in Nr. 139 für zwei conjugirte Hyperbeln ausgesprochen wurde.

Es ist vorhin erwähnt worden, dass die Kreise, welche über dem Strecken $x\xi$ zwischen je zwei conjugirten Punkten einer Focalinvolution als Durchmesser beschrieben werden, ein Kreisbüschel bilden, dessen Grenzpunkte (Nullkreise) die Brennpunkte des Polarsystems sind. Wir erhalten hiernach für die beiden Axen a, b zwei Kreisbüschel, von denen eins zur ideellen, das andere zur eigentlichen gemeinschaftlichen Secante die eine und die andere Axe des Polarsystems und zur Centrale die jedesmalige zweite Axe hat; da die Potenz des Punktes M in Bezug auf die Kreise des einen Büschels gleich aber entgegengesetzt der Potenz desselben Punktes in Bezug auf die Kreise des andern Büschels ist, so schneidet jeder Kreis des einen jeden des andern Büschels rechtwinklig, und die Kreise über $x\xi$ und $y\eta$ als Durchmesser stehen daher in der bekannten Beziehung zu einander, dass sie zwei *conjugirte Kreisbüschel* bilden. Wir können dies als Satz folgendermassen aussprechen:

Die beiden Brennpunkte auf der einen Axe des Polarsystems und die Schnittpunkte der andern mit den Axen der Involution, welche einem beliebigen Punkte im Polarsystem zugehört, liegen stets auf einem Kreise.

Das dritte zu den beiden conjugirten Kreisbüscheln zugehörige Kegelschnittbüschel, welches aus sämtlichen gleichseitigen Hyperbeln besteht, die M zum Mittelpunkt haben und durch die Brennpunkte F, F_1 gehen (Nr. 251), tritt bei dieser Betrachtung ebenfalls hervor, wenn man G_∞ als dritte Axe des Polarsystems hinzunimmt. Hat man die Axen der einem beliebigen Punkte P in Bezug auf das Polarsystem zugehörigen Involution und zieht durch M die Parallelen zu ihnen, so giebt es eine gleichseitige Hyperbel, welche diese beiden Parallelen zu Asymptoten hat und durch P geht; alle diese Hyperbeln bilden ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln mit zwei reellen (F, F_1) und zwei imaginären Grundpunkten. Wir erhalten eine solche gleichseitige

Hyperbel, wenn wir (Fig. 94) bei dem obigen Polardreieck xyz die Bewegung eintreten lassen, dass wir Y parallel mit sich verschieben und aus dem jedesmaligen Pole y von Y das Perpendikel auf Y fällen, dessen Fusspunkt y' die gleichseitige Hyperbel beschreibt.

§ 61. Einige Eigenschaften der Axen der Involutionen, welche den Punkten in einem Polarsystem zugehören.

Wir wenden uns jetzt der Frage nach dem Gesetze zu, dem die ³¹⁴ Axen der Strahleninvolutionen eines Polarsystems Π unterworfen sind. Jede Gerade \mathfrak{A} ist Axe einer Involution; denn wenn x der Punkt ist, in dem sie eine Axe b von Π trifft, und ξ der ihm in der Focalinvolution von b conjugirte, so trifft das Perpendikel \mathfrak{B} aus ξ auf die Gerade \mathfrak{A} diese in demjenigen Punkte p , für welchen \mathfrak{A} und die auf ihr Senkrechte \mathfrak{B} die Axen der zugehörigen Involution sind.

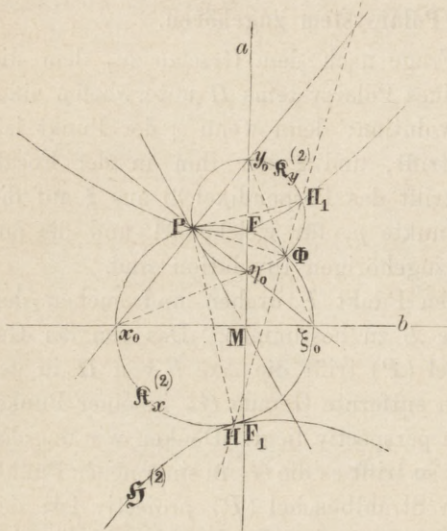
Wir lassen \mathfrak{A} sich um einen Punkt P drehen und suchen den Ort der zugehörigen zweiten Axe \mathfrak{B} zu bestimmen. Das von der Gerade \mathfrak{A} beschriebene Strahlbüschel (P) trifft die Axe b von Π in der Punktreihe (x) und die unendlich entfernte Gerade G_∞ in einer Punktreihe, die mit der Punktreihe (x) perspectiv liegt. Denken wir uns das Strahlbüschel (P) um 90° gedreht, so trifft es die G_∞ in einer neuen Punktreihe, welche ebenfalls mit dem Strahlbüschel (P) projectiv ist; der dem x in der Focalinvolution auf b conjugirte Punkt ξ beschreibt eine Punktreihe (ξ), welche ebenfalls mit der Punktreihe (x) projectiv ist, und die Perpendikel aus den ξ auf den jedesmaligen Strahl \mathfrak{A} sind nichts anderes, als Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen auf den Trägern b und G_∞ , von denen letztere die von dem um 90° gedrehten Strahlbüschel (P) ausgeschnittene ist. Die der Axe \mathfrak{A} zugehörige zweite Axe \mathfrak{B} umhüllt daher einen Kegelschnitt und zwar eine *Parabel*, weil G_∞ eine Tangente desselben ist; diese Parabel berührt die beiden endlichen Axen a und b des Polarsystems, und der Mittelpunkt M des Polarsystems ist daher ein Punkt der Leitlinie dieser Parabel, weil durch ihn zwei rechtwinklige Tangenten an sie gehen. Der Punkt P liegt auch in der Leitlinie, denn die Axen der ihm zugehörigen Involution berühren auch die Parabel; also ist PM die Leitlinie.

Wir können auch leicht den Brennpunkt dieser Parabel ermitteln; die Axen der dem Punkte P zugehörigen Involution mögen b in x_0, ξ_0 und a in y_0, η_0 treffen (Fig. 96),* dann gehören die beiden über x_0, ξ_0 und y_0, η_0 als Durchmesser beschriebenen Kreise den beiden vorhin

* Die Figur ist so gezeichnet, dass b die Axe mit den imaginären Brennpunkten wird.

(Nr. 313) erwähnten conjugirten Kreisbüscheln an. Diese beiden Kreise haben aber ausser dem Punkte P noch einen zweiten (reellen) Punkt Φ gemein, welcher der Brennpunkt unserer Parabel ist; denn da der Brennpunkt einer Parabel, welche einem Dreieck eingeschrieben ist,, auf dem dem Dreieck umgeschriebenen Kreise liegt (Nr. 208) und

Fig. 96.



wir hier zwei der Parabel umgeschriebene Dreiecke $Px_0\xi_0$ und $Py_0\eta_0$ haben, so muss einer der gemeinschaftlichen Punkte der ihnen umgeschriebenen Kreise der gesuchte Brennpunkt der Parabel sein; da aber P als Punkt der Leitlinie es nicht sein kann, so muss es Φ sein.

Von den vier Punkten x_0, y_0, ξ_0, η_0 ist, wie schon bemerkt, jeder der Höhenpunkt des Dreiecks der drei andern; also sind auch $x_0\eta_0$ und $y_0\xi_0$ rechtwinklig, ihr Schnittpunkt liegt auf beiden Kreisen und ist Φ ; mithin ist Φ der dritte

Diagonelpunkt des vollständigen Vierecks $x_0y_0\xi_0\eta_0$, dessen beide andern P und M sind. Die Gerade, welche die Fusspunkte der aus Φ auf die Axen a, b gefällten Perpendikel verbindet, ist also nach bekannter Eigenschaft der Parabel die Tangente am Scheitel derselben und läuft parallel der Leitlinie PM . Die hier auftretende Parabel ist uns demnach durch Leitlinie und Brennpunkt vollständig bekannt. Fassen wir das Ergebniss der Untersuchung zusammen:

In Bezug auf ein Polarsystem Π ist jede Gerade \mathcal{A} Axe einer demselben zugehörigen Involution; die andere Axe \mathcal{B} wird gefunden, indem man zu dem Schnitt x von \mathcal{A} mit einer Axe von Π den conjugirten Punkt ξ in der Focalinvolution auf dieser Axe bestimmt und aus ξ das Perpendikel auf \mathcal{A} herablässt; dieses Perpendikel ist die andere Axe \mathcal{B} und der Schnittpunkt $\mathcal{A}\mathcal{B} = p$ derjenige Punkt von \mathcal{A} , dessen Involution \mathcal{A} und \mathcal{B} zu Axen hat. Bewegt man die Gerade \mathcal{A} um einen Punkt P , so umhüllt \mathcal{B} eine Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$. Diese Parabel hat PM , die Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkte M des Polarsystems, zur Leitlinie und berührt sowohl die beiden Axen des Polarsystems, als auch die beiden Axen der Involution, welche dem Punkte P zugehört.

Jedem Punkte P in der Ebene entspricht also eine Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$; bewegt sich P auf einer Geraden \mathfrak{A}_0 , so durchläuft $\mathfrak{P}^{(2)}$ eine Parabelschaar; die gemeinsamen Tangenten sind die unendlich entfernte Gerade G_∞ , die beiden Axen a, b des Polarsystems und diejenige Gerade \mathfrak{B}_0 , welche zur andern Axe \mathfrak{A}_0 hat; die Leitlinien dieser Parabeln laufen durch den festen Punkt M .

Suchen wir den Zusammenhang der zu P gehörigen Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ 315 mit den beiden conjugirten Kreisbüscheln zu erkennen, denen wir noch das dritte conjugirte Büschel gleichseitiger Hyperbeln hinzufügen, so finden wir die in § 51 gefundenen Eigenschaften dreier conjugirten Kegelschnittbüschel für diesen besonderen Fall vollständig bestätigt. Ein Kegelschnitt, welchem die beiden Focalinvolutionen (x, ξ) und (y, η) auf den Axen b, a des Polarsystems zugehören, ist allemal eine gleichseitige Hyperbel, welche M , der in beiden Involutionen dem unendlich fernen Punkte conjugirt ist, zum Mittelpunkt hat. Denn nach der in Nr. 112 angegebenen Construction geht durch einen gegebenen Punkt P nur ein einziger Kegelschnitt, welcher die Involutionen (x, ξ) und (y, η) zu zugehörigen hat, und dieser Kegelschnitt wird gefunden, indem man das einzige Strahlenpaar durch P aufsucht, welches gleichzeitig sowohl die eine, wie die andere Axe in einem Paare conjugirter Punkte ihrer Focalinvolution trifft. In unserm Falle ist dieses Strahlenpaar immer reell, nämlich das Axenpaar der dem Punkte P zugehörigen Involution, welches in x_0, ξ_0 die Axe b und in y_0, η_0 die Axe a trifft.

Die Punkte $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$, in welchen diese beiden Strahlen die Polare des Schnittpunkts $ab = M$, d. h. G_∞ treffen, also die unendlich entfernten Punkte jener beiden rechtwinkligen durch P gehenden Strahlen sind Punkte des gesuchten Kegelschnitts; und dieser ist eine gleichseitige Hyperbel, weil er zwei unendlich entfernte Punkte in zu einander rechtwinkligen Richtungen hat. Diese beiden Punkte, die Brennpunkte F, F_1 des Polarsystems und der Punkt P bestimmen vollständig den Kegelschnitt.

Nennen wir die beiden Kreise, welche x_0, ξ_0 und y_0, η_0 zu Durchmessern haben, $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_y^{(2)}$, die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ (Fig. 96), so hat $\mathfrak{H}^{(2)}$ mit jedem der beiden Kreise noch einen reellen gemeinschaftlichen Punkt ausser P . Diese Punkte H, H_1 sind leicht zu finden; x_0, ξ_0 sind nämlich conjugirt für die Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ und P ein Punkt derselben; die Strahlen Px_0 und $P\xi_0$ treffen die Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ in den beiden unendlich entfernten Punkten $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$, deren Verbindungsline (G_∞) den Pol von x_0, ξ_0 in Bezug auf die Hyperbel enthält, weil x_0, ξ_0 durch M geht.

Folglich sind \mathfrak{U} , \mathfrak{B} conjugirt in der krummen Involution auf $\mathfrak{H}^{(2)}$, von welcher dieser Pol das Centrum ist; trifft also die Parallele durch x_0 zu $P\xi_0$, welche durch \mathfrak{B} geht, die Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ zum zweiten Male in H , so wird aus H die genannte krumme Involution in die Involution conjugirter Punkte auf $x_0\xi_0 = b$ projicirt, mithin, weil \mathfrak{B} in x_0 projicirt wird, \mathfrak{U} nach ξ_0 , d. h. die Parallele durch ξ_0 zu Px_0 , die nach \mathfrak{U} geht, geht auch durch H . Dieser Punkt H von $\mathfrak{H}^{(2)}$ liegt gleichzeitig auf dem Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)}$, denn er ist der diametral gegenüberliegende Punkt zu P auf diesem Kreise oder, was dasselbe bedeutet, der zweite Schnittpunkt der Tangente in P am Kreise $\mathfrak{R}_y^{(2)}$ mit dem Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)}$. In gleicher Weise trifft die Tangente in P am Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)}$ den Kreis $\mathfrak{R}_y^{(2)}$ in einem Punkte H_1 der Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$; die beiden Punkte H und H_1 liegen in gerader Linie mit Φ , dem zweiten Schnittpunkte der Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_y^{(2)}$, denn die Mittelpunkte dieser beiden Kreise sind die Mitten der Strecken PH und PH_1 , und die Centrale halbirt die gemeinschaftliche Secante $P\Phi$; da sie zugleich auf ihr senkrecht steht, so ist auch die Gerade, in welcher die Punkte H, H_1, Φ liegen, zur Gerade $P\Phi$ rechtwinklig.

Ferner zeigt sich, dass $P\Phi$ die Tangente im Punkte P an der Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ ist, denn da x_0, ξ_0 ein Paar conjugirter Punkte sind in Bezug auf $\mathfrak{H}^{(2)}$ und y_0, η_0 ein zweites Paar, so sind

$$(x_0y_0, \xi_0\eta_0) = P \quad \text{und} \quad (x_0\eta_0, \xi_0y_0) = \Phi$$

ein drittes Paar; und da P selbst auf $\mathfrak{H}^{(2)}$ liegt, so ist $P\Phi$ Tangente in P . Die Gerade $HH_1\Phi$ ist die Polare des Punktes P in Bezug auf die ihm entsprechende Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, denn P liegt auf der Leitlinie dieser Parabel, deren Pol der Brennpunkt Φ ist; ferner steht $HH_1\Phi$ senkrecht auf $P\Phi$; folglich ist sie die Polare von P . Die Schnittpunkte von HH_1 mit den beiden durch P gehenden rechtwinkligen Strahlen Px_0 und $P\xi_0$ sind daher deren Berührungspunkte mit der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, und hieraus folgt, dass H und H_1 die Pole der durch P zu b und a gezogenen Parallelen in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ sind, ebenso wie Φ der Pol von PM ist. Wir können hiernach folgendes Ergebniss zusammenstellen:

Die auf den Geraden b, a, G_x befindlichen Involutionen (x, ξ) , (y, η) , (z, ζ) , welche von den Axenpaaren sämmtlicher Involutionen eines Polarsystems Π ausgeschnitten werden, die beiden Focalinvolutionen und die I_x , bestimmen paarweise zusammengefasst drei conjugirte Kegelschnittbüschel, so dass die Kegelschnitte eines Büschels je zwei von den Involutionen zu zugehörigen haben. Diese Büschel sind die zwei conjugirten Büschel der Kreise, welche über den $x\xi$ und $y\eta$ als Durchmesser

beschrieben sind, und der Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche durch je zwei unendlich entfernte Punkte z, ξ , die in rechtwinkligen Richtungen zu einander liegen, sowie durch die beiden reellen Brennpunkte F, F_1 des Polarsystems gehen und seinen Mittelpunkt M zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben. Durch einen beliebigen Punkt P gehen drei Kegelschnitte dieser Büschel: zwei Kreise $\mathfrak{K}_x^{(2)}, \mathfrak{K}_y^{(2)}$ und eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$; treffen nämlich die Axen der dem Punkte P zugehörigen Involution in x_0, ξ_0 die Axe b , in y_0, η_0 die a , in z_∞, ξ_∞ die G_∞ , so ist $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ der über x_0, ξ_0 als Durchmesser beschriebene Kreis, $\mathfrak{K}_y^{(2)}$ der über y_0, η_0 als Durchmesser beschriebene Kreis und $\mathfrak{H}^{(2)}$ die durch $z_\infty, \xi_\infty, F, F_1$ und P gelegte gleichseitige Hyperbel.

Die $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ haben (ausser den absoluten Punkten) die reellen Brennpunkte auf a , die $\mathfrak{K}_y^{(2)}$ die imaginären auf b , die $\mathfrak{H}^{(2)}$ die einen und andern Brennpunkte gemeinsam.

Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_x^{(2)}, \mathfrak{K}_y^{(2)}, \mathfrak{H}^{(2)}$ durch P haben zu je zweien noch einen vierten reellen Punkt gemein, nämlich $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_y^{(2)}$ den Punkt Φ , $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ den Punkt H , $\mathfrak{K}_y^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ den Punkt H_1 . Die drei Punkte H, H_1, Φ liegen in einer Geraden, welche die Polare des Punktes P in Bezug auf die oben betrachtete Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist, und die drei Strahlen $PH, PH_1, P\Phi$ sind die Tangenten der beiden Kreise $\mathfrak{K}_x^{(2)}, \mathfrak{K}_y^{(2)}$ und der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ in dem gemeinschaftlichen Punkte P . Die Punkte H, H_1, Φ sind auch die Pole der drei Strahlen, welche von P nach den Ecken bG_∞, aG_∞, ab des Dreiecks abG_∞ hingehen, in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$.

Weil jede Gerade \mathfrak{A} eine Axe für eine in dem Polarsystem befindliche Involution ist und der Punkt p , welchem diese Involution zugehört, nach dem Obigen leicht gefunden wird als Schnittpunkt der zweiten Axe \mathfrak{B} mit \mathfrak{A} , so bietet sich die Frage dar, welches der Ort des Punktes p ist, wenn wir die Gerade \mathfrak{A} um einen festen Punkt P drehen. Da \mathfrak{B} bei dieser Bewegung eine Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ beschreibt, so entsteht durch p der Ort der Fusspunkte der Perpendikel aus P auf die Tangenten dieser Parabel, d. h. die Fusspunktcurve der Parabel in Bezug auf den Punkt P . Diese ist eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$. Lassen wir, um diese Ordnung zu erkennen, auf einer beliebigen Geraden \mathfrak{Q} einen veränderlichen Punkt ξ sich bewegen, ziehen $P\xi$ und die darauf Senkrechte in ξ , so umhüllt die letztere offenbar eine zweite Parabel $\mathfrak{P}_1^{(2)}$, welche P zum Brennpunkte und \mathfrak{Q} zur Tangente im Scheitel hat. Die beiden Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ haben in der unendlich entfernten Geraden G_∞ eine gemeinschaftliche Tangente, mithin noch drei andere; die Schnittpunkte derselben mit der Geraden \mathfrak{Q} sind Punkte des gesuchten Ortes, dieser ist also von der dritten Ordnung.

Jeden Strahl \mathfrak{A} durch den festen Punkt P trifft die zu ihm senkrechte (einzige) Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ in dem Punkte p , welcher continuirlich die ganze Curve $C^{(3)}$ beschreibt; auf jedem durch P gehenden Strahl \mathfrak{A} giebt es also nur einen solchen Punkt p des Ortes $C^{(3)}$. Insbesondere gelangt der Strahl \mathfrak{A} bei seiner Drehung um P einmal in die Lage \mathfrak{A}_0 einer der beiden Axen der Involution, welche dem Punkte P im Polarsystem zugehört; die andere Axe \mathfrak{B}_0 trifft ihn dann in P selbst, und P ist daher auch ein Punkt des Ortes; zweitens gelangt aber auch der veränderliche Strahl \mathfrak{A} in die Lage von \mathfrak{B}_0 , und der veränderliche Punkt p fällt also zum zweiten Mal nach P ; hieraus erkennen wir, dass der Punkt P ein *Doppelpunkt* der Curve $C^{(3)}$ ist. Die Verbindungslinie Pp ist immer Sehne der Curve $C^{(3)}$ und geht also, sobald \mathfrak{A} in die Lage von \mathfrak{A}_0 oder \mathfrak{B}_0 kommt, in die Tangente an $C^{(3)}$ für den Doppelpunkt P über, weil in jedem dieser Fälle p in P fällt. Die beiden Tangenten in dem Doppelpunkte der Curve $C^{(3)}$ stehen daher auf einander senkrecht.

Es ist leicht, einige besondere Punkte der Curve $C^{(3)}$ anzugeben. Sie geht durch die Brennpunkte F, F_1 des Polarsystems, denn die Gerade PF und die Senkrechte auf ihr in F sind auch ein Paar Axen, weil die dem Punkte F zugehörige Involution rechtwinklig ist. Ebenso geht sie durch die beiden imaginären Brennpunkte auf der zweiten Axe und die beiden absoluten Punkte auf der dritten Axe G_∞ . Ferner geht $C^{(3)}$ durch die Fusspunkte der beiden Perpendikel aus P auf die beiden endlichen Axen a, b , weil die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ diese Axen zu Tangenten hat; sodann geht $C^{(3)}$ durch den unendlich entfernten Punkt der Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, indem G_∞ als die einzige Tangente der Parabel, welche auf dieser senkrecht steht, anzusehen ist. Endlich sind noch zwei Punkte der Curve $C^{(3)}$ in dem Falle anzugeben, dass das Polarsystem hyperbolisch ist. Dann kann es nämlich zwei reelle Tangenten aus P an den Kern-Kegelschnitt des Netzes geben, deren Berührungspunkte der $C^{(3)}$ angehören, weil Tangente und Normale ein Axenpaar einer dem Kegelschnitt zugehörigen (parabolischen) Involution bilden. Der Polare von P im Polarsystem gehört also eine Involution zu, deren Doppelpunkte auf der Curve $C^{(3)}$ liegen.

Noch zu erwähnen sind einige besondere Fälle, in denen die betrachtete Curve $C^{(3)}$ zerfällt. Wenn P auf einer Axe des Polarsystems angenommen wird, z. B. auf b , wo wir dann x diese besondere Lage des Punktes P nennen wollen, so treffen alle durch x gehenden Strahlen \mathfrak{A} die Axe b in demselben Punkte x , und die Perpendikel aus dem conjugirten Punkte ξ der Focalinvolution auf b schneiden jene Strahlen \mathfrak{A} in Punkten p , welche auf dem Kreise liegen, der $x\xi$ zum

Durchmesser hat. Dieser Kreis $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ ist ein Theil der Curve $C^{(3)}$, und der andere ist die Axe b selbst, denn für jeden ihrer Punkte ist sie selbst und die auf ihr Senkrechte das Axenpaar der zugehörigen Involution, und b geht beständig durch den angenommenen Punkt x . Die Curve dritter Ordnung zerfällt also in diesem Falle in einen Kreis $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ und die Gerade b ; die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ zerfällt in zwei Punkte, den Punkt ξ und den unendlich entfernten Punkt von a . In analoger Weise zerfällt $C^{(3)}$ in einen Kreis $\mathfrak{K}_y^{(2)}$ und die Gerade a , falls der angenommene Punkt P auf dieser Axe liegt.

Wird P auf der unendlich entfernten Gerade G_∞ angenommen, so zerfällt die Curve $C^{(3)}$ in diese Gerade selbst und eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$, denn sobald P im Unendlichen liegt, werden sämtliche durch ihn gehenden Strahlen \mathfrak{A} parallel; suchen wir zu jedem Schnittpunkt x einer Gerade \mathfrak{A} mit b den conjugirten Punkt ξ in der Focalinvolution auf b und fällen aus ihm das Perpendikel auf \mathfrak{A} , so bleibt auch dieses Perpendikel \mathfrak{B} zu sich parallel, und da x, ξ projective Punktreihen durchlaufen, so beschreiben \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zwei projective Strahlbüschel, deren Grundpunkte im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen; ihr Erzeugniss ist daher eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$. Und $\mathfrak{K}_x^{(2)}, \mathfrak{K}_y^{(2)}, \mathfrak{H}^{(2)}$ gehören den oben erwähnten drei conjugirten Büscheln an; denn es ist ersichtlich, dass die Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ durch die Brennpunkte F, F_1 des Polarsystems geht und die Tangenten in ihren unendlich entfernten Punkten sich in M , dem Mittelpunkte desselben, schneiden, dieser also zugleich Mittelpunkt von $\mathfrak{H}^{(2)}$ ist. Wir können die gewonnenen Resultate folgendermassen zusammenfassen:

Jede Gerade \mathfrak{A} ist Axe für eine dem Polarsystem zugehörige Involution; der Grundpunkt p derselben beschreibt, während \mathfrak{A} sich um einen Punkt P dreht, eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, welche P zum Doppelpunkt und in diesem zwei zu einander rechtwinklige Tangenten hat, nämlich die Axen derjenigen Involution, welche dem Punkte p zugehört. Diese Curve $C^{(3)}$ geht durch die Brennpunkte des Polarsystems, durch die Fusspunkte der aus P auf die beiden endlichen Axen desselben herabgelassenen Perpendikel, durch den unendlich entfernten Punkt der Verbindungslinie PM des festen Punktes P mit dem Mittelpunkte M des Polarsystems, durch die beiden absoluten Punkte und durch die beiden Doppelpunkte derjenigen Involution, welche der Polare des Punktes P zugehört. Insbesondere zerfällt sie, sobald der Punkt P auf einer der drei Axen des Polarsystems a, b, G_∞ angenommen wird, und zwar in die jedesmalige Axe und einen Kegelschnitt, welcher für die Axen b und a je ein Kreis $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_y^{(2)}$, für die Axe G_∞ eine gleich-

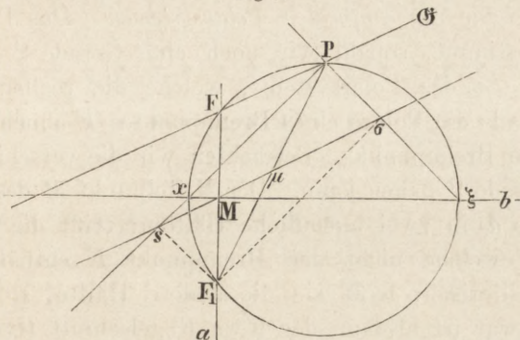
seitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ ist. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_x^{(2)}$, $\mathfrak{K}_y^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$ gehören drei conjugirten Kegelschnittbüscheln an (§ 51).

317 Schliesslich wollen wir noch die Frage beantworten, welchen Ort die Axen der im Polarsystem befindlichen Involutionen aller Punkte umhüllen, welche auf einer Gerade \mathfrak{G} liegen; wir brauchen, um die Klasse dieses Ortes zu bestimmen, nur zu untersuchen, wie viele solcher Axen durch einen Punkt P gehen. Die vorhin betrachtete Curve $C^{(3)}$, welche dem Punkte P entspricht, schneidet die Gerade \mathfrak{G} in drei Punkten, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, dass ihre Verbindungslinien mit P drei Axen solcher Involutionen sind, welche ihnen zugehören. Also ist der gesuchte Ort eine Curve dritter Klasse $K^{(3)}$; sie berührt die Gerade \mathfrak{G} selbst und zwar in demjenigen Punkte p , in dem sie von der zweiten Axe der Involution getroffen wird, welche die Gerade \mathfrak{G} zu einer Axe hat. Denn da \mathfrak{G} Axe einer einzigen Involution im Polarsystem ist, so berührt sie $K^{(3)}$, und durch jeden Punkt von ihr gehen also drei Tangenten, von denen die eine \mathfrak{G} fest bleibt; bewegt sich nun ein veränderlicher Punkt auf \mathfrak{G} , so fällt, wenn er nach p gelangt, von den beiden andern Tangenten noch eine in \mathfrak{G} , also gehen durch ihn zwei unendlich nahe Tangenten, und p ist der Berührungspunkt von \mathfrak{G} mit $K^{(3)}$. Tangenten von $K^{(3)}$ sind ferner die beiden endlichen Axen a, b des Polarsystems und die in den Schnittpunkten derselben mit \mathfrak{G} je zur andern Axe gezogenen Parallelen; auch die unendlich entfernte Gerade G_∞ berührt $K^{(3)}$. Es zerfällt diese Curve, wenn die Gerade \mathfrak{G} durch einen der beiden Brennpunkte des Polarsystems, z. B. F , geht. In diesem Falle ist nämlich jedes durch F gehende Paar zu einander rechtwinkliger Strahlen ein Axenpaar des Polarsystems, weil die Involution für den Brennpunkt F rechtwinklig ist; die Curve $K^{(3)}$ zerfällt daher in den Punkt F und einen Kegelschnitt, nämlich eine Parabel, welche den andern Brennpunkt F_1 zu ihrem Brennpunkt und die Gerade \mathfrak{G} zur Leitlinie hat.

Dies zeigt sich in folgender elementaren Weise. Sei P ein beliebiger Punkt der durch F gehenden Gerade \mathfrak{G} (Fig. 97), so finden wir die Axen der dem Punkte P im Polarsystem zugehörigen Involution dadurch, dass wir durch P, F, F_1 den Kreis legen; derselbe treffe die andere Axe b , welche die Brennpunkte nicht enthält, in den Punkten x und ξ ; dann sind (Nr. 313) Px und $P\xi$ die Axen der Involution für P , deren Ort, während P sich auf \mathfrak{G} bewegt, gesucht wird. Da nun b in der Mitte M von FF_1 senkrecht auf FF_1 steht, so sind in dem Kreise die Winkel $\angle F P x$ und $\angle x P F_1$ einander gleich; ziehen wir durch M die Parallele zu \mathfrak{G} , welche Px und $P\xi$ in s und σ , PF_1 in μ treffe, so wird also $\angle F P x = \angle P s \mu = \angle s P \mu$; folglich $\mu s = \mu P$ und, weil

das Dreieck $sP\sigma$ bei P rechtwinklig ist, $s\mu = \mu P = \mu\sigma$; ferner ist, weil M die Mitte von FF_1 , auch μ die Mitte von F_1P , und hieraus folgt, dass F_1s und $F_1\sigma$ senkrecht stehen auf Px und $P\xi$ und auch auf einander. Um nun zu erkennen, wie die Geraden Px und $P\xi$ (oder nur eine von ihnen) sich verändern, wenn P auf der Gerade \mathcal{G} fortrückt, brauchen wir nur zu bemerken, dass s und σ auf der festen

Fig 97.



Gerade, welche durch M parallel zu \mathcal{G} gezogen ist, sich bewegen und die auf F_1s und $F_1\sigma$ in s und σ errichteten Perpendikel eben jene Strahlen Px und $P\xi$ sind. Hieraus erkennen wir, dass dieselben eine Parabel umhüllen, welche F_1 zum Brennpunkt und \mathcal{G} zur Leitlinie hat, auch die Axe b des Polarsystems berührt (Nr. 145).

Drehen wir die Gerade \mathcal{G} um den Punkt F , so verändert sich auch die entsprechende Parabel, behält aber immer denselben Brennpunkt F_1 und die Tangente b ; ihre Tangenten im Scheitel gehen durch den festen Punkt M , und die Scheitel liegen auf einem Kreise, welcher MF_1 zum Durchmesser hat.

Demnach haben wir:

Die Axen der Involutionen im Polarsystem für alle Punkte, welche auf einer beliebigen Gerade \mathcal{G} liegen, umhüllen eine Curve dritter Klasse $K^{(3)}$, welche die Gerade \mathcal{G} selbst in demjenigen Punkte berührt, für welchen \mathcal{G} eine Axe der ihm zugehörigen Involution ist; die Curve $K^{(3)}$ berührt auch die drei Axen a, b, G_∞ des Polarsystems. Sie zerfällt allemal, sobald \mathcal{G} durch einen der beiden Brennpunkte desselben, z. B. F , geht, in diesen Punkt F und eine Parabel, welche den andern Brennpunkt F_1 zu ihrem Brennpunkt und die Gerade \mathcal{G} zu ihrer Leitlinie hat.

Wir bemerken noch, dass die ganze Betrachtung dieses Paragraphen 318 allein abhängt von den drei Axen b, a, G_∞ des Polarsystems und den auf ihnen befindlichen Involutionen $(x, \xi), (y, \eta), (z, \zeta)$, deren Doppelpunkte die Brennpunkte des Polarsystems sind. Von diesen drei Involutionen

ist die eine (z, ξ) auf G_∞ ein für allemal bekannt, ihre Doppelpunkte die absoluten Punkte, die beiden andern auf den endlichen Axen haben gleiche, aber entgegengesetzte Potenz und denselben Mittelpunkt, und nur eine von ihnen ist hyperbolisch und hat zu Doppelpunkten die reellen Brennpunkte F und F_1 des Polarsystems. Durch diese Stücke ist aber das Polarsystem nicht vollkommen bestimmt, sondern es giebt unendlich viele Polarsysteme, welchen sie zugehören; diese bilden eine *Schaar von confocalen Polarsystemen*. Das Polarsystem ist erst völlig bestimmt, sobald wir noch eine Gerade \mathcal{Q} senkrecht auf derjenigen Axe a des Polarsystems, welche die reellen Brennpunkte F, F_1 enthält, als die Polare eines Brennpunktes F annehmen (die *Leitlinie* für diesen Brennpunkt). Betrachten wir die verschiedenen Lagen, welche die Gerade \mathcal{Q} haben kann. Der Mittelpunkt M des Polarsystems theilt die Axe a in zwei unendliche Hälften; trifft die Gerade \mathcal{Q} diejenige Hälfte, welche nicht den Brennpunkt F enthält, so ist das Polarsystem elliptisch, trifft sie die andere Hälfte, so ist es hyperbolisch, und zwar ist alsdann der Kern-Kegelschnitt Hyperbel, sobald \mathcal{Q} die Axe a zwischen M und F trifft, dagegen Ellipse, sobald \mathcal{Q} diese Hälfte der Axe ausserhalb MF trifft. In der Schaar von confocalen Polarsystemen ist also ausser den reellen Kegelschnitten, welche sich in eine Reihe von Ellipsen und eine Reihe von Hyperbeln trennen (Nr. 261), noch eine Unendlichkeit von elliptischen Polarsystemen (imaginären Kegelschnitten) enthalten. In der ganzen Schaar ist nun nach der obigen Untersuchung für einen beliebigen Punkt P das Axenpaar der Involution, welche ihm in jedem der Polarsysteme zugehört, immerfort dasselbe, und es bleiben ebenso die conjugirten Büschel der Kreise $\mathfrak{K}_x^{(2)}, \mathfrak{K}_y^{(2)}$ und der gleichseitigen Hyperbeln $\mathfrak{H}^{(2)}$ ungeändert, sowie auch sämtliche Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}$, welche den Punkten P entsprechen, und die Curven $C^{(3)}$ und $K^{(3)}$. Hieraus folgt u. A. nach den oben gefundenen Resultaten der Satz:

Die Berührungspunkte sämtlicher Tangentenpaare aus einem festen Punkte P an die Kegelschnitte einer Schaar von confocalen Kegelschnitten liegen auf einer Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, welche P zum Doppelpunkt und in diesem zwei zu einander rechtwinklige Tangenten hat.

§ 62. Zwei Polarsysteme. Büschel und Schaar von Polarsystemen.

319 Nehmen wir zwei Polarsysteme (in derselben Ebene) an, so entsprechen jedem Punkte P zwei Polaren für das eine und das andere Polarsystem; wenn sich diese Polaren in dem Punkte Q schneiden, dann müssen auch die Polaren von Q sich in dem Punkte P schneiden;

P und Q sind daher *conjugirte Punkte für beide Polarsysteme*. Zu jedem Punkte P gehört demgemäss ein bestimmter conjugirter Punkt Q und umgekehrt zu Q der conjugirte Punkt P . Bewegen wir den Punkt P auf einer beliebigen Gerade \mathcal{G} , so durchläuft der Punkt Q einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ — analog zu $\mathcal{G}^{(2)}$ in Nr. 222 —; jedem Punkte der Gerade \mathcal{G} ist ein Punkt dieses Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$ conjugirt. Denn die Polaren der Punkte P auf der Gerade \mathcal{G} in Bezug auf das erste Polarsystem beschreiben ein Strahlbüschel (π), welches mit der Punktreihe, die P durchläuft, projectiv ist. Ebenso beschreiben die Polaren der Punktreihe (P) in Bezug auf das zweite Polarsystem ein Strahlbüschel (π_1), welches mit der Punktreihe (P) projectiv ist. Die Strahlbüschel (π) und (π_1) sind daher unter sich projectiv, und je zwei entsprechende Strahlen schneiden sich in demjenigen Punkte Q , welcher dem jedesmaligen P conjugirt ist. Der Ort, sämmtlicher conjugirten Punkte Q zu den auf der Gerade \mathcal{G} liegenden Punkten P ist daher ein Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, der durch die Pole π und π_1 der Gerade \mathcal{G} rücksichtlich der beiden gegebenen Polarsysteme geht. Jeder Gerade \mathcal{G} gehört hiernach ein Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ zu, der diejenigen Punkte Q enthält, welche den Punkten P der Gerade \mathcal{G} rücksichtlich der beiden gegebenen Polarsysteme conjugirt sind. Zwei beliebigen Geraden \mathcal{G} und \mathcal{G}_1 , welche sich in dem Punkte P_0 schneiden mögen, gehören zwei Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ zu, welche die conjugirten Punkte der Punkte jener Geraden enthalten. Die Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ haben einen reellen Punkt Q_0 gemeinschaftlich, den, welcher dem Punkte $P_0 = \mathcal{G} \mathcal{G}_1$ conjugirt ist. Sie haben daher noch einen zweiten reellen Punkt x , oder noch drei reelle Punkte x, y, z gemeinschaftlich. Diese besitzen eine besondere Eigenschaft in Bezug auf die beiden gegebenen Polarsysteme.

Weil nämlich der Punkt x auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ liegt, so müssen seine beiden Polaren sich in einem Punkte der Gerade \mathcal{G} treffen; weil er gleichzeitig auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ liegt, so müssen sie sich auch in einem Punkte der Gerade \mathcal{G}_1 treffen; in dem Punkte P_0 , dem einzigen, der \mathcal{G} und \mathcal{G}_1 gemeinschaftlich ist, treffen sie sich aber nicht, denn x ist verschieden von Q_0 , daher müssen die beiden Polaren von x zusammenfallen. Folglich besitzt der Punkt x (und ebenso auch y und z , wenn sie reell sind) die Eigenschaft, dass seine Polare in Bezug auf beide Polarsysteme dieselbe Gerade ist. Diese drei Punkte x, y, z und ihre Polaren X, Y, Z hängen in einfacher Weise mit einander zusammen. Während im allgemeinen jedem Punkte P der Ebene nur ein einziger bestimmter Punkt Q rücksichtlich beider Polarsysteme conjugirt ist, ist zu dem Punkte x jeder Punkt von X conjugirt, weil seine Polaren in X zusammenfallen. Gäbe es noch einen Punkt u ,

der für beide Polarsysteme dieselbe Polare U hat, so würde er im beiden den Schnitten von U mit \mathfrak{G} und \mathfrak{G}_1 conjugirt, also den beidem Kegelschnitten $\mathfrak{K}^{(2)}, \mathfrak{K}_1^{(2)}$ gemein sein, so dass diese fünf Punkte gemeinschaftlich hätten: Q_0, x, y, z, u ; was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Wir nehmen den einen immer reellen Punkt x und seine reelle Polare X für beide Polarsysteme; der Gerade X gehören dann in diesen zwei (im allgemeinen verschiedene) Involutionen zu, welche ein (reelles oder imaginäres) gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte y, z besitzen. Sind diese reell, so sind sie mit den obigen Punkten y und z identisch, denn zu dem Punkt y ist dann in beiden Polarsystemen sowohl der Punkt z als auch der Punkt x conjugirt, und zx ist also die Polare Y von y für beide Netze; ebenso $xy = Z$ die Polare von z für beide Polarsysteme, die Punkte y und z besitzen also die obige Beschaffenheit und müssen mit den noch einzig möglichen der Art identisch sein. Es folgt hieraus, dass die drei Punkte x, y, z ein Polardreieck bilden, welches beiden Polarsystemen gemeinschaftlich ist, und dass ihre Polaren die gegenüberliegenden Seiten des von ihnen gebildeten Dreiecks sind:

$$yz = X, \quad zx = Y, \quad xy = Z; \quad YZ = x, \quad ZX = y, \quad XY = z.$$

Umgekehrt sind die Geraden X, Y, Z , von denen nothwendig eine reell sein muss, die einzigen Geraden in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass ihre Pole für beide Polarsysteme zusammenfallen, und sie bilden ein Polardreieck, welches beiden Netzen gemeinschaftlich ist. Dass zwei beliebig gegebene Polarsysteme ausser einem Polardreieck nicht noch ein Paar von Pol und Polare gemeinschaftlich haben können, geht auch daraus hervor, dass das Netz vollständig und eindeutig bestimmt ist durch ein Polardreieck und ein beliebiges Paar von Pol und Polare (Nr. 301).

Was die Realität des gemeinschaftlichen Polardreiecks zweier Polarsysteme betrifft, so ist, wie wir gesehen haben, eine seiner drei Ecken x und ihre Polare X , die Gerade, auf welcher die beiden andern liegen, allemal reell; diese selbst y und z sind stets reell, sobald eins oder beide gegebenen Polarsysteme elliptisch sind, weil einer jeden Gerade in Bezug auf ein elliptisches Polarsystem eine elliptische Involution zugehört und zwei auf einander liegende Involutionen ein reelles gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte haben, wenn wenigstens eine von ihnen elliptisch ist; wenn dagegen beide Polarsysteme hyperbolisch sind, so können y und z imaginär werden; dies ist aber der Fall zweier reellen Kegelschnitte, welcher in § 54 genau discutirt ist.

Zwei Polarsysteme, von denen mindestens eins elliptisch ist, haben immer ein reelles gemeinschaftliches Polardreieck. Oder, ein reeller und ein imaginärer Kegelschnitt oder zwei imaginäre Kegelschnitte haben immer ein reelles gemeinsames Polardreieck.

Die Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$, welche sämtlichen Geraden \mathfrak{G} entsprechen, ³²⁰ gehen durch die drei ausgezeichneten Punkte x, y, z ; denn weil irgend eine Gerade \mathfrak{G} die X in einem Punkte trifft, dessen conjugirter rück-sichtlich beider Polarsysteme x ist, muss der Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ durch x gehen, u. s. f. Auch umgekehrt besitzt irgend ein durch die Punkte x, y, z gelegter Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Eigenschaft, dass die Punkte, welche seinen Punkten conjugirt sind, auf einer Gerade \mathfrak{G} liegen. Denn es seien Q', Q'' zwei beliebige Punkte eines dem Dreieck xyz umgeschriebenen Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$ und P', P'' deren conjugirte Punkte, so hat die Verbindungslinie $P'P''$, als Gerade \mathfrak{G} aufgefasst, sämtliche Punkte Q , welche ihren Punkten P conjugirt sind, auf dem durch die fünf Punkte Q', Q'', x, y, z eindeutig bestimmten Kegel-schnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$.

Durch die beiden Polarsysteme ist nicht allein die eben angedeutete Beziehung hergestellt, in der jedem Punkte P ein Punkt Q conjugirt ist und jeder Gerade \mathfrak{G} ein durch drei feste Punkte x, y, z gehender Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ entspricht, sondern auch zugleich die duale Beziehung, nach der jeder Gerade eine Gerade und jedem Punkte ein dem festen Dreieck XYZ eingeschriebener Kegelschnitt entspricht; denn eine Gerade \mathfrak{G} hat zu Polen in den beiden Polarsystemen zwei Punkte π und π_1 , deren Verbindungslinie \mathfrak{H} die Eigenschaft besitzt, dass ihre beiden Pole wiederum auf \mathfrak{G} liegen; \mathfrak{G} und \mathfrak{H} heissen daher *conjugirte Strahlen der beiden Polarsysteme*, und wenn \mathfrak{G} sich um einen festen Punkt P dreht, so umhüllt \mathfrak{H} einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ — analog zu $P^{(2)}$ in Nr. 239 —, welcher dem festen Dreieck XYZ eingeschrieben ist. Das Ergebniss der bisherigen Untersuchung kann daher folgendermassen zusammengefasst werden:

Sind zwei Polarsysteme gegeben, so schneiden sich die Polaren eines beliebigen Punktes P in Bezug auf sie in dem in Bezug auf beide Polarsysteme conjugirten Punkte Q , dessen Polaren sich wiederum in P treffen. Bewegt sich der Punkt P auf einer Gerade \mathfrak{G} , so durchläuft der conjugirte Punkt Q einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$. Sämtliche Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ laufen durch drei feste Punkte x, y, z . Diese bilden das beiden Polarsystemen gemeinschaftliche Tripel conjugirter Punkte (Polardreieck); ihre Polaren sind:

$$X = yz, \quad Y = zx, \quad Z = xy.$$

Die Punkte x, y, z sind im allgemeinen die einzigen von solcher Beschaffen-

heit, dass für sie die Polaren rücksichtlich beider Polarsysteme zusammenfallen. Sie sind reell, sobald beide oder eins der beiden gegebenen Polarsysteme elliptisch ist; sind beide hyperbolisch, so können zwei Tripelpunkte y, z imaginär sein, während der dritte x und seine Polare X immer reell ist. Die der Gerade X rücksichtlich beider Polarsysteme zugehörigen Involutionen haben als gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte y und z . Andererseits gehören einer beliebigen Gerade \mathcal{G} rücksichtlich beider Polarsysteme zwei Pole zu, deren Verbindungslinie \mathcal{H} der conjugirte Strahl zu \mathcal{G} in Bezug auf beide Polarsysteme heisst, und zur Verbindungslinie ihrer Pole wiederum \mathcal{G} hat. Dreht sich \mathcal{G} um einen Punkt P , so umhüllt \mathcal{H} einen Kegelschnitt $\mathcal{C}^{(2)}$. Sämmtliche Kegelschnitte $\mathcal{C}^{(2)}$ berühren drei feste Geraden X, Y, Z , welche das beiden Polarsystemen gemeinschaftliche Tripel conjugirter Strahlen bilden und im allgemeinen die einzigen Geraden von solcher Beschaffenheit sind, dass ihre Pole rücksichtlich beider Polarsysteme zusammenfallen. Das Tripel XYZ coincidirt mit dem Tripel xyz .

321 Es ist nicht ohne Interesse, solche Lagen der Gerade \mathcal{G} aufzusuchen, für welche der zugehörige Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ eine Parabel, gleichseitige Hyperbel, ein Kreis oder ein Geradenpaar wird. Entfernt sich \mathcal{G} in die Unendlichkeit, so geht der Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ in einen besonderen Kegelschnitt $\mathcal{M}^{(2)}$ über, welcher die Mittelpunkte m, m_1 beider Polarsysteme und das gemeinschaftliche Polardreieck xyz enthält und durch diese fünf Punkte vollständig bestimmt ist. Dieser Kegelschnitt enthält diejenigen Punkte, welche den unendlich entfernten Punkten rücksichtlich beider Polarsysteme conjugirt sind, und umgekehrt liegen die den Punkten des Kegelschnitts $\mathcal{M}^{(2)}$ conjugirten Punkte im Unendlichen; er entscheidet also über die Art des Kegelschnitts $\mathcal{R}^{(2)}$. Jeder Gerade \mathcal{G} , welche den Kegelschnitt $\mathcal{M}^{(2)}$ in zwei reellen Punkten trifft, entspricht als Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ eine *Hyperbel*, jeder Gerade \mathcal{G} , welche $\mathcal{M}^{(2)}$ nicht trifft, eine *Ellipse*. Den Tangenten des Kegelschnitts $\mathcal{M}^{(2)}$ entsprechen *Parabeln*, und auch umgekehrt entspricht jeder Parabel, die dem Dreieck xyz umgeschrieben ist, eine Gerade \mathcal{G} , welche den Kegelschnitt $\mathcal{M}^{(2)}$ berührt.

Um zweitens eine solche Gerade \mathcal{G} zu finden, deren entsprechender Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ eine gleichseitige Hyperbel ist, nehmen wir auf G_∞ zwei solche Punkte z und ξ , die in zu einander senkrechten Richtungen liegen.

Die Punkte z, ξ haben zu Polaren im ersten Polarsystem zwei durch den Mittelpunkt m gehende Strahlen, welche bei der Veränderung von z, ξ in der Involution I_∞ eine Involution um m beschreiben, welche zu I_∞ projectiv ist. Diese Involution, in der die Axen des

ersten Polarsystems conjugirt sind, schneidet in $\mathfrak{M}^{(2)}$ eine krumme Involution ein, und zwei conjugirte Punkte derselben sind in Bezug auf das erste Polarsystem zu den beiden conjugirten Punkten von I_∞ conjugirt, deren Polaren nach ihnen gehen. Dieselben Punkte sind aber zu diesen Punkten conjugirt in Bezug auf das zweite Polarsystem, weil $\mathfrak{M}^{(2)}$ der der Gerade G_∞ entsprechende Kegelschnitt ist; folglich ist auch die krumme Involution auf $\mathfrak{M}^{(2)}$ bei beiden Polarsystemen die nämliche. Ihr Centrum P_0 ergibt sich in folgender Weise.

Die Axen des ersten Polarsystems durchbohren den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinie bestimmt wird, ebenso liefern die Axen des zweiten eine Durchbohrungssehne in $\mathfrak{M}^{(2)}$; und der Schnittpunkt dieser beiden Sehnen ist der gesuchte Punkt P_0 . Jede durch P_0 gehende Gerade trifft den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ in zwei solchen Punkten, deren conjugirte im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen; einer solchen Gerade entspricht also eine gleichseitige Hyperbel als Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$. Es giebt daher unendlich viele Geraden \mathfrak{G} , deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ *gleichseitige Hyperbeln* sind; sie gehen durch einen festen Punkt P_0 , dessen Construction eben angegeben ist. Der conjugirte Punkt Q_0 zu P_0 muss der Höhenpunkt des Dreiecks xyz sein, weil alle gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreieck umgeschrieben sind, durch den Höhenpunkt desselben gehen (Nr. 165), woraus eine neue einfache Construction von P_0 sich ergibt.

Hiernach wird es auch möglich, eine solche Gerade \mathfrak{G} zu finden, deren entsprechender Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ ein Kreis wird. Seien nämlich t und τ zwei conjugirte Punkte jener Involution auf $\mathfrak{M}^{(2)}$, deren Verbindungslinie also durch P_0 geht, so entsprechen den beiden Tangenten in t und τ am Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zwei Parabeln, deren unendlich entfernte Punkte in rechtwinkligen Richtungen liegen. Diese beiden Parabeln, welche durch x, y, z gehen, haben als vierten gemeinschaftlichen Punkt einen solchen, der nothwendig mit x, y, z auf einem Kreise liegt (Nr. 163), und der conjugirte Punkt zu ihm rücksichtlich der beiden Polarsysteme ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten in t und τ am Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$. Dieser liegt auf der Polare des Punktes P_0 in Bezug auf $\mathfrak{M}^{(2)}$, und jeder Punkt dieser Polare \mathfrak{G}_0 besitzt umgekehrt die Eigenschaft, dass sein conjugirter auf dem dem Dreieck xyz umgeschriebenen Kreise liegt. Es giebt also nur eine einzige Gerade \mathfrak{G}_0 von solcher Beschaffenheit, dass der ihr entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ ein *Kreis* wird, und diese besondere Gerade \mathfrak{G}_0 ist die Polare des vorhin ermittelten Punktes P_0 in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$.

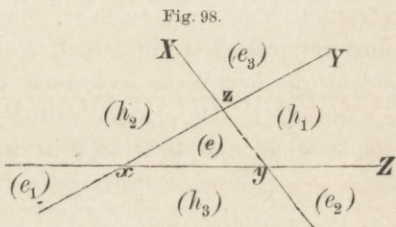
322 Suchen wir endlich solche Geraden \mathcal{G} auf, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathcal{R}^{(2)}$ in Geradenpaare ausarten. Den Punkten einer derartigen Gerade müssen in den beiden gegebenen Polarsystemen zwei Strahlbüschel von Polaren (π) und (π_1) zugehören, welche perspectiv liegen, also in der Verbindungslinie ihrer Grundpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt haben; eine solche Gerade \mathcal{G} muss also einen Punkt enthalten, dessen beide Polaren zusammenfallen. Es giebt nur drei Punkte der Art x, y, z ; der Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ kann mithin nur dann in zwei Geraden zerfallen, wenn die Gerade \mathcal{G} durch einen der drei Eckpunkte des gemeinschaftlichen Polardreiecks geht; und umgekehrt, sobald \mathcal{G} durch einen dieser Eckpunkte, z. B. x , geht, wird der entsprechende Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ ein Geradenpaar, dessen einer Theil die Gerade X ist. Suchen wir den andern Theil auf; dieser muss eine Gerade g sein, welche durch x geht; denn demjenigen Punkte von \mathcal{G} , welcher in X liegt, entspricht als conjugirter Punkt x . Die Gerade g ist also bestimmt, sobald wir nur irgend einen Punkt der durch x gehenden Gerade \mathcal{G} kennen, indem sein conjugirter mit x verbunden den Strahl g liefert. Wenn wir die Gerade \mathcal{G} um x drehen, so verändert sich auch g , indem sie sich um x dreht; es ist leicht zu erkennen, dass \mathcal{G} und g conjugirte Strahlen einer neuen Involution sind, deren Grundpunkt x ist, d. h.: Wenn wir einen beliebigen Punkt P und seinen conjugirten Punkt Q mit x verbinden, so sind allemal $xP = \mathcal{G}$ und $xQ = g$ zwei conjugirte Strahlen einer Involution (x). In der That, wir haben nur nöthig, P auf einer beliebigen Gerade \mathcal{G} zu bewegen, wobei Q den ihr entsprechenden Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ durchläuft, welcher durch x (und y, z) geht und von zwei projectiven Strahlbüscheln (π) und (π_1) erzeugt wird, die mit der von P durchlaufenen Punktreihe projectiv sind; da x auf dem Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ liegt, so beschreibt auch xQ ein mit πQ oder $\pi_1 Q$, also auch mit xP projectives Strahlbüschel; es beschreiben also xP und xQ zwei auf einander liegende projective Strahlbüschel; dieselben erzeugen nun eine Involution, weil sowohl Q der conjugirte Punkt zu P ist, als auch P der conjugirte Punkt zu Q . Diese Involution (x), welche von dem Strahlenpaar \mathcal{G}, g erzeugt wird, hat auch die durch x gehenden beiden Geraden Y und Z zu conjugirten Strahlen; denn sobald für P ein Punkt auf Y genommen wird, ist sein conjugirter allemal y , mithin sind Y und $xy = Z$ conjugirte Strahlen der Involution (x). In gleicher Weise erhalten wir zwei Involutionen (y) und (z).

Die drei Involutionen (x), (y), (z) hängen in der Weise von einander ab, dass durch zwei von ihnen die dritte mitbestimmt ist; denn wenn das gemeinschaftliche Polardreieck xyz der beiden gegebenen

Polarsysteme und irgend ein Paar conjugirter Punkte P und Q bekannt sind, sind auch die drei Involutionen $(x), (y), (z)$ vollständig bekannt, weil man in zwei Seiten des Dreiecks und den von ihrer Ecke nach P und Q gehenden Strahlen allemal zwei Paare conjugirter Strahlen einer solchen Involution hat, wodurch sie bestimmt ist. Sobald wir nun in zweien dieser Involutionen, z. B. (x) und (y) , ausser den selbstverständlichen Paaren Y, Z und Z, X noch je ein Paar conjugirter Strahlen kennen, \mathfrak{G} und g in (x) , \mathfrak{G}' und g' in (y) , dann sind die Schnittpunkte $\mathfrak{G}\mathfrak{G}' = P$ und $gg' = Q$ conjugirte Punkte und geben mit z verbunden zwei conjugirte Strahlen der dritten Involution (z) , welche dadurch bestimmt wird; auch die Schnittpunkte $\mathfrak{G}g' = P'$ und $\mathfrak{G}'g = Q'$ sind conjugirte Punkte und geben ein zweites Paar. Der Zusammenhang der drei Involutionen ist also der uns bekannte:

Wenn drei Strahlen dieser Involutionen $(x), (y), (z)$ durch einen Punkt P gehen, so treffen sich die ihnen conjugirten Strahlen in einem Punkte Q , welcher der conjugirte Punkt zu P ist in Bezug auf die beiden gegebenen Polarsysteme.

Wir wissen, dass, wenn die drei Punkte x, y, z und die drei Involutionen reell sind, nur zwei Fälle möglich sind: 1) entweder sind alle drei hyperbolisch, oder 2) nur eine ist es und die beiden andern sind elliptisch. Wir können dies aber nochmals leicht erkennen. Bezeichnen wir die sieben Räume, die durch das Dreieck $xyz = XYZ$ entstehen, wie in der Figur 98



und drücken durch e, h aus, dass die Involution elliptisch, bezw. hyperbolisch ist, so giebt die folgende Tabelle Auskunft über die Beschaffenheit der drei Involutionen $(x), (y), (z)$ nach der Lage der conjugirten Punkte P, Q :

Liegt P in dem Raume:

		$\overbrace{(e) (e_1) (e_2) (e_3) (h_1) (h_2) (h_3)}$						
		(e)	(e_1)	(e_2)	(e_3)	(h_1)	(h_2)	(h_3)
Liegt Q in dem Raume:	(e)	$h h h$	$h e e$	$e h e$	$e e h$	$h e e$	$e h e$	$e e h$
	(e_1)	$h e e$	$h h h$	$e e h$	$e h e$	$h h h$	$e e h$	$e h e$
	(e_2)	$e h e$	$e e h$	$h h h$	$h e e$	$e e h$	$h h h$	$h e e$
	(e_3)	$e e h$	$e h e$	$h e e$	$h h h$	$e h e$	$h e e$	$h h h$
	(h_1)	$h e e$	$h h h$	$e e h$	$e h e$	$h h h$	$e e h$	$e h e$
	(h_2)	$e h e$	$e e h$	$h h h$	$h e e$	$e e h$	$h h h$	$h e e$
	(h_3)	$e e h$	$e h e$	$h e e$	$h h h$	$e h e$	$h e e$	$h h h$

Wir erkennen aus dieser Tabelle, dass der Fall dreier hyperbolischen Involutionen (x) , (y) , (z) nur dann eintritt, wenn die beiden conjugirten Punkte P , Q entweder beide in demselben Raume von jenen sieben oder gleichzeitig in einem Paar von Räumen: (e_1) und (h_1) , (e_2) und (h_2) , (e_3) und (h_3) enthalten sind. Hieraus folgt, dass, wenn eins oder beide gegebenen Polarsysteme elliptisch sind (der Kern-Kegelschnitt imaginär), nur der zweite Fall eintreten kann, dass von den Involutionen (x) , (y) , (z) eine hyperbolisch, die beiden andern elliptisch sind. Wir fanden (Nr. 297), dass, wenn ein Polarsystem elliptisch ist, auf allen Strahlen die Involutionen elliptisch sind. Das gemeinsame Polardreieck ist im vorliegenden Falle reell. Nehmen wir in dem Raume (e) einen Punkt P , so treffen Py und Pz , bezw. die Geraden Y und Z zwischen den Punkten x, z und x, y ; diese sind in den Involutionen conjugirt; also muss die Polare von P in dem elliptischen Polarsystem die Seiten xz und xy in ihren Verlängerungen treffen, d. h. sie darf in die Region (e) nicht eintreten; wo also auch der Punkt Q auf dieser Polare angenommen werden mag, er kann nicht in (e) liegen. Nehmen wir zweitens P in der Region (e_1) an, so muss seine Polare in dem elliptischen Polarsystem die Seiten xz und xy zwischen den Eckpunkten treffen; sie darf also in die Regionen (e_1) und (h_1) nicht eintreten; dasselbe gilt, wenn P in der Region (h_1) angenommen wird, und in gleicher Weise erkennen wir es für die Regionen (e_2) und (h_2) , (e_3) und (h_3) . Die Lagen von P und Q , bei denen $\mathfrak{H}\mathfrak{H}\mathfrak{H}$ eintritt, sind mithin nicht möglich. Es ist also klar, dass, *wofern wenigstens eins der beiden gegebenen Polarsysteme elliptisch ist, von den drei Involutionen (x) , (y) , (z) eine hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen.*

Wenn beide Polarsysteme hyperbolisch sind und von dem gemeinschaftlichen Polardreieck nur ein Eckpunkt x reell, die beiden andern y und z (auf X) imaginär sind, so lässt sich erkennen, dass die Involution (x) hyperbolisch sein muss. Lassen wir nämlich einen veränderlichen Punkt P eine Gerade \mathfrak{G} durchlaufen und verfolgen den conjugirten Punkt Q auf dem entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher durch x geht, so beschreiben xP und xQ die Involution (x) ; ξ sei das Centrum der krummen Involution, in welcher $\mathfrak{R}^{(2)}$ von ihr geschnitten wird. Wenn Q' der zweite Schnitt von xP mit $\mathfrak{R}^{(2)}$ ist, so sind Q , Q' in dieser krummen Involution conjugirt, und QQ' geht durch ξ ; andererseits hat aber der Punkt Q' zu seinem conjugirten einen Punkt P' , welcher auf \mathfrak{G} liegen muss (weil Q' auf $\mathfrak{R}^{(2)}$ liegt), und zugleich auf dem zu $xQ' = xP$ conjugirten Strahl der Involution (x) , d. h. auf xQ ; also ist P' der Schnittpunkt von \mathfrak{G} mit xQ . Wir

haben daher zwei Paare conjugirter Punkte rücksichtlich beider Polarsysteme: P und Q , P' und Q' , und demnach ein drittes Paar: (PP', QQ') und $(PQ', P'Q) = x$ (Nr. 294); folglich muss (PP', QQ') auf X liegen und, da $PP' = \mathfrak{G}$ ist, der Schnittpunkt $\mathfrak{G}X$ sein. Dieser Punkt bleibt fest, während P und Q sich auf \mathfrak{G} und $\mathfrak{R}^{(2)}$ verändern; es läuft also QQ' durch den festen Punkt $\xi = \mathfrak{G}X$. Wenn nun die Punkte y und z , d. h. die Schnittpunkte der Gerade X mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, imaginär sind, so muss X ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$ gelegen sein, durch den Punkt ξ von X gehen zwei reelle Tangenten an $\mathfrak{R}^{(2)}$; die Involution (x) ist daher hyperbolisch, indem ihre Doppelstrahlen die aus x nach den Berührungspunkten dieser Tangenten gezogenen Strahlen sind.

Die Involutionen (x) , (y) , (z) haben eine besondere Bedeutung für die beiden Polarsysteme. Da nämlich irgend zwei conjugirte Strahlen \mathfrak{G} und \mathfrak{g} der Involution (x) nach dem Obigen von solcher Beschaffenheit sind, dass die zu den Punkten P des einen nach beiden Polarsystemen conjugirten Punkte Q auf dem andern liegen, so folgt, dass, wenn die Involution (x) hyperbolisch ist, jeder ihrer Doppelstrahlen s, t die Eigenschaft besitzen muss, dass ihm rücksichtlich beider Polarsysteme dieselbe Involution zugehört, oder mit andern Worten, dass er eine gemeinschaftliche Secante für ihre Kern-Kegelschnitte ist; denn ein solcher Doppelstrahl enthält zwei zusammenfallende conjugirte Strahlen $\mathfrak{G}, \mathfrak{g}$, und die Punkte P des einen haben ihre conjugirten Q rücksichtlich beider Polarsysteme auf dem andern; also bilden P, Q auf dem Doppelstrahl eine Involution, welche beiden Polarsystemen zugehört. Nehmen wir den Fall an, dass zwei Involutionen (x) und (y) hyperbolisch seien und die erste die Doppelstrahlen s, t , die zweite die Doppelstrahlen s_1, t_1 habe, dann wird der Schnittpunkt S , z. B. von s und s_1 , seinen conjugirten rücksichtlich beider Polarsysteme sowohl in s haben, als auch in s_1 ; folglich muss er S selbst sein; es fallen also in S zwei conjugirte Punkte P, Q zusammen, und es muss daher auch zS ein Doppelstrahl der Involution (z) sein, was damit übereinstimmt, dass die Involutionen $(x), (y), (z)$ entweder sämmtlich hyperbolisch sein müssen, oder nur eine hyperbolisch und die beiden andern elliptisch. Schneiden sich s und t_1 in dem Punkte S_1 , so ist zS_1 der zweite Doppelstrahl von (z) ; da nur zwei Doppelstrahlen möglich sind, so müssen in diesen auch die Schnittpunkte $tt_1 = S_2$ und $ts_1 = S_3$ liegen. Die sechs Doppelstrahlen der drei Involutionen $(x), (y), (z)$ schneiden sich, wenn sie reell sind, zu je dreien in vier Punkten S, S_1, S_2, S_3 , deren jeder die Eigenschaft besitzt, dass er mit seinem conjugirten rücksichtlich beider Polarsysteme zusammenfällt. Diese

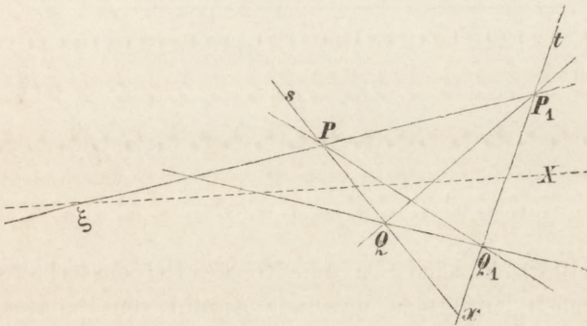
vier Punkte sind dann zugleich die Doppelpunkte der Involutionen auf diesen sechs Geraden, welche in Bezug auf beide Polarsysteme je dieselben Involutionen haben. Die Punkte S, S_1, S_2, S_3 sind daher den Kern-Kegelschnitten beider Polarsysteme gemeinschaftlich, und das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $SS_1S_2S_3$ ist das gemeinschaftliche Polardreieck xyz . Dies stimmt mit der oben gemachten Bemerkung überein, dass sie nur reell sein können, wenn beide Polarsysteme hyperbolisch sind, weil nur in diesem Falle drei hyperbolische Involutionen $(x), (y), (z)$ eintreten können; aber nicht für jede zwei hyperbolischen Polarsysteme (reelle Kegelschnitte) müssen die Involutionen $(x), (y), (z)$ alle drei hyperbolisch sein; die Untersuchung dieses reellen Falles ist aber in § 54 durchgeführt worden.

Hier zeigt sich indessen der bemerkenswerthe Umstand, dass auch zwei elliptische Polarsysteme (imaginäre Kegelschnitte) allemal ein reelles Paar gemeinschaftlicher Secanten, d. h. zwei solche sich in x schneidende Geraden [die Doppelstrahlen s, t der Involution (x)] besitzen, deren zugehörige Involutionen für die Polarsysteme identisch sind. Diese beiden Involutionen müssen immer elliptisch sein, sobald eins oder beide gegebenen Polarsysteme elliptisch sind, sie können aber auch beide elliptisch sein, wenn beide Polarsysteme hyperbolisch sind; im letzteren Fall kann indessen auch eine elliptisch und die andere hyperbolisch, oder beide hyperbolisch sein, d. h. die Kern-Kegelschnitte können keinen, zwei oder vier Punkte gemein haben.

Gehen wir von der stets reellen Ecke x des Polardreiecks aus, deren Involution (x) hyperbolisch ist und die Doppelstrahlen s, t hat, so können wir aus der Annahme, dass von den Involutionen auf s und t 1) beide elliptisch, 2) eine elliptisch und die andere hyperbolisch ist, 3) beide hyperbolisch sind, auf die Realität oder Imaginarietät der beiden übrigen Ecken y, z auf X schliessen. Nehmen wir nämlich von der beiden Polarsystemen gleichzeitig zugehörigen Involution auf s irgend ein Paar conjugirter Punkte P, Q und auf t irgend ein Paar P_1, Q_1 (Fig. 99), so können wir die Verbindungslinie PP_1 als \mathcal{G} auffassen, deren entsprechender Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch x, Q, Q_1 geht und zum Schnittpunkte der Tangenten in Q und Q_1 den Punkt ξ hat, in welchem PP_1 der X begegnet, da Q, Q_1 die Doppelpunkte der Involution auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ sind. X trifft also PP_1 in dem Pol der Gerade QQ_1 rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, oder PP_1 und QQ_1 treffen X in zwei conjugirten Punkten der Involution, welche der Gerade X in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört. Diese ist nun, wie wir wissen, für alle möglichen Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ immer eine und dieselbe; ihre Doppelpunkte sind die beiden übrigen Ecken y und z . Ein zweites Paar conjugirter Punkte

dieser Involution erhalten wir, indem wir die Schnittpunkte von PQ_1 und QP_1 mit X bestimmen, und hieraus folgt denn auch ein drittes Paar nach der bekannten Eigenschaft des vollständigen Vierecks, nämlich die Schnittpunkte von PQ und P_1Q_1 mit X . Die drei Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks PQP_1Q_1 treffen demnach die Gerade X in drei Paaren conjugirter Punkte derjenigen Involution, deren Doppelpunkte y, z sind, und sie ist immer dieselbe, wie übrigens die Paare PQ und P_1Q_1 auf den Doppelstrahlen s und t gewählt werden.

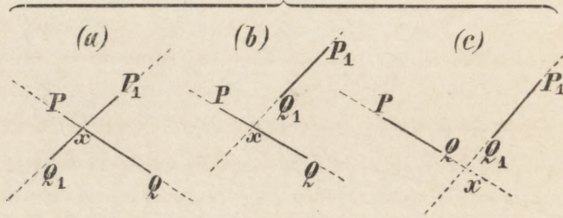
Fig. 99.



Um zu entscheiden, ob die Involution auf X hyperbolisch oder ³²⁴ elliptisch wird, haben wir das bekannte Kennzeichen (Nr. 52) anzuwenden, nach welchem die von den Gegenseitenpaaren eines vollständigen Vierecks auf einer Transversale X bestimmte Involution hyperbolisch ist, sobald eine gerade Anzahl, elliptisch, sobald eine ungerade Anzahl von Ecken zu beiden Seiten der Transversale liegt, oder umgekehrt, je nachdem die vier Ecken so liegen, dass jede ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, oder eine innerhalb des von den andern gebildeten Dreiecks gelegen ist. Die beiden Involutionen auf den Geraden s und t werden nun durch je zwei Paare conjugirter Punkte bestimmt, von denen das eine PQ auf s , P_1Q_1 auf t ist, das andere aber aus dem gemeinschaftlichen Punkte x und dem jeweiligen Schnittpunkt mit X besteht. Der Punkt x ist ein Diagonalpunkt des vollständigen Vierecks PQP_1Q_1 , als Schnittpunkt von PQ und P_1Q_1 ; sollen also die genannten Involutionen auf s und t beide elliptisch sein, so lehrt die unmittelbare Anschauung, dass von den vier Punkten P, Q, P_1, Q_1 eine gerade oder ungerade Anzahl auf beiden Seiten von X liegen muss, je nach der Lage derselben. Es können nämlich hinsichtlich der Lage der vier Punkte P, Q, P_1, Q_1 zu x drei Fälle eintreten: entweder a) liegt x innerhalb beider Strecken PQ und P_1Q_1 , oder b) innerhalb der einen

und ausserhalb der andern, oder c) ausserhalb beider (Fig. 100). In dem Falle a) muss, damit beide Involutionen auf s und t elliptisch seien, X ausserhalb PQ und ausserhalb P_1Q_1 die Geraden s und t treffen, also nothwendig alle vier Punkte P, Q, P_1, Q_1 auf der einen und keinen auf der andern Seite von sich haben; weil bei dieser Lage jeder der vier Punkte ausserhalb des Dreiecks der andern liegt, ist die Involution auf X hyperbolisch. In dem Falle b), wenn x innerhalb PQ und ausserhalb P_1Q_1 angenommen wird, muss, damit beide In-

Fig. 100.



volutionen elliptisch seien, X die Strecke PQ ausserhalb und P_1Q_1 innerhalb treffen, also eine ungerade Anzahl von Punkten zu beiden Seiten von sich haben; dann ist aber die Involution auf X wiederum hyperbolisch, weil P, Q, P_1, Q_1 so liegen, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet. In dem Falle c) endlich, wo x ausserhalb beider Strecken PQ und P_1Q_1 liegt, also die vier Punkte so gelegen sind, dass jeder ausserhalb des von den andern gebildeten Dreiecks sich befindet, muss, damit beide Involutionen elliptisch seien, X sowohl PQ , als auch P_1Q_1 zwischen diesen Punkten treffen, also zwei Punkte auf der einen und zwei auf der andern Seite von sich haben; die Involution auf X ist daher wiederum hyperbolisch, und wir erkennen daraus, dass sie allemal hyperbolisch wird, sobald die Involutionen auf s und t beide elliptisch sind. Die Punkte y und z sind also in diesem Falle reell.

In ähnlicher Weise können wir leicht einsehen, dass, wenn die Involutionen auf s und t beide hyperbolisch sind, ebenfalls für alle drei Lagen a), b), c) die Involution auf X hyperbolisch ist, also y und z reell sind; was auch von vorn herein klar ist, weil dann alle vier Punkte S, S_1, S_2, S_3 reell sind und xyz zum Diagonaldreieck haben. Wenn dagegen drittens von den Involutionen auf s und t die eine hyperbolisch, die andere elliptisch ist, so ist für alle drei Lagen a), b), c) die Involution auf X elliptisch, also sind y und z imaginär, wie die unmittelbare Anschauung lehrt, während von den vier Punkten S, S_1, S_2, S_3 nur zwei reell, die beiden andern imaginär sind. Die

eben ausgeführte Betrachtung kommt auch mit der in Nr. 186 angestellten überein.

Die erlangten Resultate lassen sich nunmehr in folgender Weise 325 zusammenfassen:

Unter den sämtlichen Kegelschnitten $\mathfrak{R}^{(2)}$, welche den Geraden \mathfrak{G} rücksichtlich der beiden gegebenen Polarsysteme entsprechen und dem gemeinsamen Polardreieck xyz umgeschrieben sind, giebt es Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Denken wir uns denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ construirt, welcher der unendlich entfernten Gerade G_∞ entspricht und, ausser durch die Ecken jenes Dreiecks, durch die Mittelpunkte m, m_1 der beiden Polarsysteme bestimmt wird, so entsprechen sämtlichen Tangenten dieses Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ Parabeln, solchen Geraden \mathfrak{G} , welche $\mathfrak{M}^{(2)}$ in zwei reellen Punkten schneiden, Hyperbeln und solchen Geraden \mathfrak{G} , welche $\mathfrak{M}^{(2)}$ nicht schneiden, Ellipsen. Unter den Hyperbeln giebt es unendlich viele gleichseitige; sie entsprechen allen solchen Geraden \mathfrak{G} , welche durch einen bestimmten Punkt P_0 gehen; dies ist der Durchschnittspunkt der beiden Durchbohrungs-Sehnen des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ durch die Axenpaare der beiden Polarsysteme. Sein conjugirter Punkt Q_0 , durch welchen alle gleichseitigen Hyperbeln ausser durch x, y, z gehen, ist der Höhenpunkt des Dreiecks xyz . Unter den Ellipsen giebt es einen einzigen Kreis; er entspricht derjenigen Gerade \mathfrak{G}_0 , welche die Polare des Punktes P_0 in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist.

Geht die Gerade \mathfrak{G} insbesondere durch eine der Ecken des gemeinschaftlichen Polardreiecks, z. B. durch x , so zerfällt der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ in zwei Geraden, von denen die eine immer die Polare X von x und die andere eine Gerade g ist, welche ebenfalls durch x geht. Diejenigen Punkte Q , welche den Punkten P einer solchen durch x gehenden Gerade \mathfrak{G} conjugirt sind, liegen auf der Gerade g und umgekehrt. Drehen wir die Gerade \mathfrak{G} um den festen Punkt x , so dreht sich auch g um denselben, und \mathfrak{G}, g sind conjugirte Strahlen einer Involution (x). Zwei conjugirte Strahlen einer solchen Involution erhalten wir auch, indem wir x mit irgend einem Paare conjugirter Punkte P, Q verbinden; insbesondere sind die beiden durch x gehenden Seiten des gemeinsamen Polardreiecks conjugirt in (x). Wir erhalten auf diese Weise, wenn die Ecken x, y, z alle drei reell sind, drei Involutionen (x), (y), (z), welche entweder alle drei hyperbolisch oder von denen nur eine hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sind. Wenn von den Eckpunkten nur einer, x , reell ist, so ist die Involution (x) immer hyperbolisch.

Die beiden Doppelstrahlen s, t einer solchen Involution sind solche Geraden, für welche die den beiden Polarsystemen zugehörigen Involutionen identisch werden; es giebt also nur zwei oder sechs solcher Geraden. In

dem letzteren Falle schneiden sich die sechs Doppelstrahlen $s, t; s_1, t_1; s_2, t_2$ der drei hyperbolischen Involutionen $(x), (y), (z)$ zu je dreien in vier Punkten S, S_1, S_2, S_3 , die ein vollständiges Viereck bilden, dessen Diagonaldreieck xyz ist. Die Punkte S, S_1, S_2, S_3 sind die einzigen von solcher Beschaffenheit, dass jeder von ihnen mit seinem conjugirten rücksichtlich beider Polarsysteme zusammenfällt; sie sind zugleich die Doppelpunkte derjenigen Involutionen, welche den Geraden $s, t \dots$ rücksichtlich beider Polarsysteme zugleich zugehören. Von diesen vier ausgezeichneten Punkten S, S_1, S_2, S_3 sind entweder alle vier oder nur zwei oder keiner reell.

Gehen wir von einem allemal reellen Eckpunkte x des gemeinsamen Polardreiecks aus, dessen Involution (x) hyperbolisch ist und die Doppelstrahlen s, t hat, so können die beiden Involutionen auf s und t entweder beide elliptisch sein, dann sind alle vier Punkte S, S_1, S_2, S_3 imaginär, aber die beiden übrigen Eckpunkte y und z reell; oder von jenen beiden Involutionen auf s und t ist eine hyperbolisch und die andere elliptisch, dann sind zwei Punkte S, S_1 reell, die beiden andern S_2, S_3 imaginär und die beiden übrigen Eckpunkte y und z auch imaginär; oder drittens beide Involutionen auf s und t sind hyperbolisch, dann sind alle vier Punkte S, S_1, S_2, S_3 reell und auch die übrigen Eckpunkte y, z . Wenn die beiden Polarsysteme hyperbolisch sind, so sind die Punkte S, S_1, S_2, S_3 die Durchschnittspunkte ihrer Kern-Kegelschnitte, xyz ihr gemeinschaftliches Polardreieck und die Doppelstrahlen $s, t; s_1, t_1; s_2, t_2$ der drei Involutionen $(x), (y), (z)$ die sechs gemeinschaftlichen Secanten der beiden Kegelschnitte. Aber auch wenn eins oder beide Polarsysteme elliptisch sind, ist das gemeinschaftliche Polardreieck xyz immer reell und von den drei Involutionen $(x), (y), (z)$ eine hyperbolisch, die beiden andern sind elliptisch, also ein Paar gemeinschaftlicher Secanten s, t , d. h. zwei solche Geraden, für deren jede die den Polarsystemen zugehörigen beiden Involutionen identisch sind, immer reell.

Es ist noch zu bemerken, dass aus der vorigen Betrachtung auch das umgekehrte Resultat sich ergibt: Wenn von dem beiden Polarsystemen gemeinschaftlichen Polardreieck allein x und X reell (y und z imaginär) sind, ein Fall, der nur bei zwei hyperbolischen Polarsystemen eintreten kann und zur Folge hat, dass immer die Involution (x) hyperbolisch ist, also die reellen Doppelstrahlen s und t hat, so muss von den beiden Involutionen auf s und t , welche den Polarsystemen gemeinschaftlich zugehören, die eine hyperbolisch, die andere elliptisch sein, denn wäre dies nicht, so müssten y und z reell sein. Also müssen die beiden Kern-Kegelschnitte der Polarsysteme, damit y und z imaginär seien, zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte haben.

Vermöge der dem Polarsystem innewohnenden Dualität lässt sich eine der vorigen gleichlaufende Betrachtung anstellen, indem man die Paare conjugirter Geraden $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ in Bezug auf beide Polarsysteme betrachtet und die Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ untersucht, welche allen Punkten P entsprechen und sämtlich dem Dreiseit XYZ eingeschrieben sind. Diese Betrachtung ist der obigen nach dem Dualitätsprincip so gleichförmig nachzubilden, dass es genügt, die Resultate hervorzuheben und nur die abweichenden Punkte etwas näher zu beleuchten.

Die Pole einer beliebigen Gerade \mathfrak{G} in Bezug auf die beiden gegebenen Polarsysteme bestimmen die conjugirte Gerade \mathfrak{H} , und wenn \mathfrak{G} sich um einen Punkt P dreht, so umhüllt \mathfrak{H} einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$. Insbesondere ist der unendlich entfernten Gerade G_∞ diejenige Gerade \mathfrak{M}_0 conjugirt, welche die Mittelpunkte beider Polarsysteme verbindet, und allen Punkten P dieser Gerade \mathfrak{M}_0 entsprechen daher Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$, welche *Parabeln* sind. Einem Punkte P , welcher auf einer Seite des gemeinschaftlichen Polardreiecks liegt, z. B. auf X , entspricht ein Punktepaar (x, p) , wo p auf X liegt. Verändern wir den Punkt P auf der Gerade X , so verändert sich auch p auf derselben, und es erzeugt das Punktepaar Pp eine Involution (X) . Irgend zwei conjugirte Geraden $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ treffen eine Seite X des gemeinsamen Polardreiecks immer in zwei conjugirten Punkten P, p der Involution (X) , und die Gerade \mathfrak{M}_0 trifft daher die X in dem Mittelpunkt m derselben. Hieraus folgt, dass, wenn die drei Seiten X, Y, Z sämtlich reell sind, von den drei Involutionen $(X), (Y), (Z)$ entweder alle drei hyperbolisch, oder eine hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sind; denn z. B. auf X sind immer die beiden Eckpunkte y, z conjugirt in (X) , und die Gerade \mathfrak{M}_0 kann die Seiten des Dreiecks xyz nur in drei solchen Punkten m, m_1, m_2 treffen, welche entweder alle drei auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten, oder von denen nur einer auf der Verlängerung und die beiden andern auf den Dreiecksseiten selbst liegen. Da nun m, m_1, m_2 die Mittelpunkte der drei Involutionen $(X), (Y), (Z)$ und $y, z; z, x; x, y$ je ein Paar conjugirter Punkte derselben sind, so ergibt sich die obige Behauptung.

In dem Falle, dass von den drei Seiten nur eine X und der Schnittpunkt x der beiden andern, der Pol von X , reell ist, lässt sich leicht zeigen, dass die Involution (X) hyperbolisch ist. Der Punkt x liegt innerhalb des einem beliebigen Punkte P entsprechenden Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$, weil die Tangenten Y, Z aus ihm imaginär sind. Ziehen wir nun durch P irgend eine Gerade \mathfrak{G} und construiren die conjugirte Gerade \mathfrak{H} , eine Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$, so bestimmen $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$

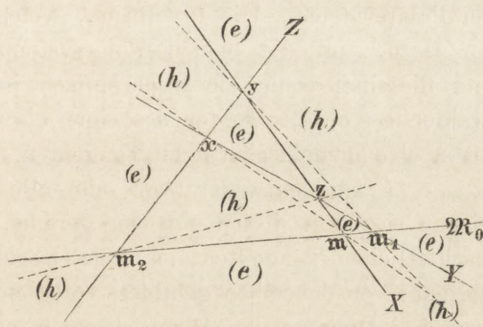
zwei conjugirte Punkte s und σ der Involution (X) . Durch s geht eine zweite Tangente \mathfrak{H}' an $\mathfrak{C}^{(2)}$, deren conjugirte Gerade \mathfrak{G}' die $P\sigma$ sein muss. Wir haben also zwei Paare conjugirter Geraden $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$, finden aus ihnen ein drittes Paar $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}', \mathfrak{H}\mathfrak{H}')$ und $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}')$, und da von diesen beiden Geraden die erstere durch $P = \mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ geht, so muss die letztere $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}')$ den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ berühren. Nun ist aber $\mathfrak{G}\mathfrak{H}'$ nichts anderes als s und $\mathfrak{H}\mathfrak{G}'$ nichts anderes als σ , folglich $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}') = s\sigma = X$, und die conjugirte Gerade $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}', \mathfrak{H}\mathfrak{H}')$ muss daher durch x gehen, d. h. $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ muss auf der Verbindungslinie Px liegen. Diese Gerade Px bleibt nun fest, während wir die Gerade \mathfrak{G} , also auch $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}'$ und \mathfrak{H}' verändern; wenn wir aus den Punkten der Gerade Px die Tangentenpaare $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ legen, so treffen dieselben die feste Tangente X dieses Kegelschnitts in Punktepaaren σs der vorhin gefundenen Involution (X) (Nr. 110). Diese von der Gerade Px abhängende Involution ist elliptisch, wenn die Gerade Px den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ nicht schneidet, hyperbolisch, wenn sie ihn in zwei reellen Punkten trifft. Da der Punkt x in unserem Falle innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$ liegt, so muss Px denselben in zwei reellen Punkten schneiden, also die Involution (X) hyperbolisch sein, was zu beweisen war.

327 Wenn wir entscheiden wollen, ob der einem Punkte P entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ Ellipse oder Hyperbel wird, so brauchen wir nur diejenigen Punkte P in der Ebene aufzusuchen, für welche $\mathfrak{C}^{(2)}$ in einen jener beiden Grenzübergänge zwischen Ellipse und Hyperbel, Parabel oder Punktepaar, ausartet. Diese Orte kennen wir aber; sie sind die Gerade \mathfrak{M}_0 , deren Punkten P Parabeln als Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ entsprechen, und die drei Seiten X, Y, Z (wenn sie sämmtlich reell sind), deren Punkten P Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ entsprechen, welche in Punktepaare ausarten. Die vier Geraden X, Y, Z, \mathfrak{M}_0 theilen die Ebene in elf Regionen, und den Punkten P innerhalb derselben Region entsprechen immer Kegelschnitte derselben Art; wir haben aber zu untersuchen, welchen Regionen Hyperbeln und welchen Ellipsen entsprechen. Hierüber erhalten wir unter der Annahme, dass alle drei Geraden X, Y, Z reell sind, Auskunft, indem wir die Involutionen $(X), (Y), (Z)$ ins Auge fassen, welche bestimmt sind durch je ein Paar conjugirter Punkte: $y, z; z, x; x, y$ und die Mittelpunkte: m, m_1, m_2 , nämlich die Schnittpunkte von \mathfrak{M}_0 mit X, Y, Z (Fig. 101).

Es sei um einen beliebigen Punkt P eine Gerade \mathfrak{G} gedreht, welche X, Y, Z in den Punkten a, b, c treffe, so liegen die diesen conjugirten Punkte α, β, γ in den drei Involutionen $(X), (Y), (Z)$ auf der conjugirten Gerade \mathfrak{H} , welche den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ umhüllt.

Wir können diesen auch als das Erzeugniß zweier projectiver Punkt-
reihen, z. B. auf den Trägern Y und Z , auffassen, indem wir die
Punkte β und γ verfolgen; um dann den Berührungspunkt des Kegel-
schnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$ mit der Gerade Y zu erhalten, ziehen wir Py , welche Y
in τ treffe, und nehmen den zu τ conjugirten Punkt t in der Invo-
lution (Y) , welcher der gesuchte Berührungspunkt ist, da er in den
projectiven Punktreihen dem Punkte $x = YZ$ als Punkt von Z ent-
spricht.

Fig. 101.



Um denjenigen Punkt β auf Y zu finden, welcher dem unendlich
entfernten auf Z entspricht, ziehen wir Pm_2 , welche in b die Ge-
rade Y treffe, und bestimmen den conjugirten β zu b in (Y) . Jetzt
können wir das in Nr. 80 angegebene Kennzeichen in Anwendung
bringen: Liegt t in der Strecke $x\beta$, so ist der Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$
Ellipse, liegt t ausserhalb $x\beta$, so ist er Hyperbel. Von den elf
Regionen, in welche die Ebene durch die Geraden X, Y, Z, M_0 zer-
theilt wird, sind infolge dessen fünf „hyperbolisch“ (h) und die übrigen
sechs „elliptisch“ (e) ; d. h. der dem Punkte P entsprechende Kegel-
schnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ ist Hyperbel, sobald P in einem der Räume (h) liegt, da-
gegen Ellipse, sobald er in einem der Räume (e) liegt. Die Räume (h)
sind diejenigen, in welche die drei Diagonalen des von den Geraden
 X, Y, Z, M_0 gebildeten vollständigen Vierseits ganz hineinfallen,
während die Räume (e) von den Diagonalen nicht getroffen werden;*
um jeden Eckpunkt des vollständigen Vierseits gruppiren sich immer
zwei elliptische Scheitelräume und zwei hyperbolische. Wir unter-
lassen der Kürze wegen die Untersuchung des Falles, in welchem vom
gemeinsamen Polardreieck nur eine Seite X und der Schnittpunkt x
der beiden andern reell ist; die beiden Geraden X und M_0 theilen
dann die Ebene nur in vier unendliche Räume, zwei Paare Scheitel-

* Vergl. Figur 78 (in Nr. 272).

räume; dasjenige Paar Scheitelräume, in deren einem x liegt, enthält alle solche Punkte P , deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ Hyperbeln werden, das andere Paar Scheitelräume diejenigen, denen Ellipsen entsprechen. Auch möge dem Leser die Aufsuchung derjenigen besonderem Punkte P überlassen bleiben, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ Kreise oder gleichseitige Hyperbeln sind.

Die drei Involutionen (X) , (Y) , (Z) , von denen entweder eine oder alle drei hyperbolisch sein müssen, haben zu Doppelpunkten: $\bar{s}, t; \bar{s}_1, t_1; \bar{s}_2, t_2$, Punkte von besonderer Wichtigkeit in Bezug auf die beiden gegebenen Polarsysteme. Die Involution, welche einem dieser sechs Punkte in Bezug auf die beiden Polarsysteme zugehört, ist nämlich eine und dieselbe; wenn sie hyperbolisch ist, so sind ihre beiden Doppelstrahlen sowohl Tangenten des einen als auch des andern Kern-Kegelschnitts, also gemeinschaftliche Tangenten. Von den sechs Punkten $\bar{s}, t, \bar{s}_1, t_1, \bar{s}_2, t_2$ sind entweder zwei oder alle sechs reell; im letzteren Falle liegen sie zu je dreien auf vier geraden Linien, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kern-Kegelschnitte beider Polarsysteme sind; das von denselben gebildete vollständige Viereck hat X, Y, Z zu seinen drei Diagonalen. Wenn dagegen nur zwei Punkte \bar{s} und t , auf X , reell sind, so sind die ihnen zugehörigen Involutionen entweder beide elliptisch, und dann sind auch Y und Z reell, oder eine elliptisch und die andere hyperbolisch, dann sind Y und Z imaginär. Im ersteren Fall sind entweder beide oder ein Polarsystem elliptisch, oder falls beide hyperbolisch sind, haben ihre Kern-Kegelschnitte keine reelle gemeinschaftliche Tangente; im letzteren Fall, der nur eintreten kann, wenn beide Polarsysteme hyperbolisch sind, haben die Kern-Kegelschnitte zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, jedes Paar aber hat einen reellen Schnittpunkt \bar{s} , bzw. t auf X . Sobald also umgekehrt von dem gemeinschaftlichen Polardreieck nur eine Seite X und der Schnittpunkt x der beiden andern reell ist, diese selbst aber imaginär sind, sind beide Polarsysteme hyperbolisch, und ihre Kern-Kegelschnitte haben nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten. Halten wir dies mit dem analogen früher gefundenen Resultat zusammen, so folgt aus der Identität und zusammengehörigen Realität des Polardreiecks xyz mit dem Polardreiseit XYZ , dass, wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben, sie auch nothwendig zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten und nur zwei solche haben, und umgekehrt. (Nr. 271.)

328 Die beiden in dem Vorstehenden betrachteten eindeutigen Verwandtschaften, welche durch die beiden gegebenen Polarsysteme bewirkt werden — in deren einer jedem Punkte P ein Punkt Q zu-

geordnet* ist und den Punkten P einer Gerade \mathcal{G} Punkte Q eines Kegelschnitts $\mathcal{K}^{(2)}$ entsprechen, welcher durch drei feste Punkte x, y, z geht, während in der andern jeder Gerade \mathcal{G} eine Gerade \mathcal{H} zugeordnet ist und sämmtlichen durch einen Punkt P gehenden Geraden \mathcal{G} Geraden \mathcal{H} entsprechen, die einen Kegelschnitt $\mathcal{C}^{(2)}$ umhüllen, welcher einem festen Dreieck XYZ eingeschrieben ist, das mit xyz identisch ist — erfordern zu ihrer Bestimmung nicht die vollständige Kenntniss der beiden Polarsysteme, sondern nur des gemeinschaftlichen Polardreiecks $xyz = XYZ$ und in dem einen Falle irgend eines Paares zugeordneter Punkte P, Q , in dem andern eines Paares zugeordneter Strahlen \mathcal{G}, \mathcal{H} .

In der That, nehmen wir zuerst xyz und ein Paar zugeordneter Punkte P, Q als gegeben an, so ist die erste Verwandtschaft vollständig bestimmt; indem wir nämlich P und Q mit x, y, z und diese Punkte unter sich verbinden, erhalten wir durch jeden der letzteren zwei Strahlenpaare, welche eine Involution bestimmen, z. B. bei x die Strahlenpaare xP, xQ ; xy, xz ; haben wir auf diese Weise die drei Involutionen $(x), (y), (z)$ hergestellt, so finden wir zu jedem andern Punkte P den zugeordneten Q , indem wir xP und yP ziehen und in den Involutionen (x) und (y) die beiden conjugirten Strahlen zu ihnen aufsuchen, welche sich in dem gesuchten Punkte Q treffen. Hierdurch ist nun auch für jede Gerade \mathcal{G} der entsprechende Kegelschnitt $\mathcal{K}^{(2)}$ leicht herzustellen.

Andererseits ist durch XYZ und ein Paar conjugirter Strahlen \mathcal{G}, \mathcal{H} die zweite Verwandtschaft vollständig bestimmt; es ist wohl unnöthig, die duale Construction zu wiederholen. Als ein besonderes Paar zugeordneter Strahlen, welches neben XYZ zur Bestimmung dieser Verwandtschaft dient, empfiehlt sich G_∞ und \mathcal{M}_0 ; die drei Schnittpunkte von X, Y, Z mit \mathcal{M}_0 sind dann die drei Mittelpunkte der Involutionen $(X), (Y), (Z)$.

Bemerken wir, dass von zwei zugeordneten Punkten der ersten Verwandtschaft jeder aus dem andern in gleicher Weise entsteht, und ähnliches für zugeordnete Strahlen der zweiten Verwandtschaft gilt; deshalb sind diese Verwandtschaften *involutorisch* (Nr. 223).

Wir müssen noch den andern möglichen Fall betrachten, dass von dem Polardreieck nur ein Eckpunkt x und die gegenüberliegende Seite X (Polare von x), auf dieser aber eine elliptische Involution

* *Conjugirt* sind P, Q in Bezug auf die beiden Polarsysteme, in der Verwandtschaft mögen sie *zugeordnet* oder *entsprechend* heissen; ähnlich im andern Falle.

gegeben ist, deren Doppelpunkte y, z imaginär sind; fügen wir dann noch zwei zugeordnete Punkte P, Q hinzu, so ist die Verwandtschaft der ersten Art wiederum vollständig bestimmt, aber die vorhin angegebene Construction beliebig vieler anderer Paare zugeordneter Punkte P, Q ist nicht mehr anzuwenden, weil die Punkte y, z selbst nicht reell existiren. Wir werden uns in diesem Falle zunächst die Involution (x) herzustellen haben, von welcher unmittelbar nur das einzige Paar conjugirter Strahlen xP und xQ gegeben ist; ihre Doppellstrahlen s, t müssen sowohl harmonisch liegen mit xP und xQ , als auch mit xy und xz ; dies lässt sich aber auch unabhängig von der Realität der letzteren Geraden xy, xz so aussprechen: Die Doppellstrahlen s und t bilden das gemeinschaftliche Paar conjugirter Strahlen für zwei concentrische Involutionen um x , von denen eine hyperbolisch ist und xP, xQ zu Doppelstrahlen hat, während die andere die Strahlen xy und xz zu Doppelstrahlen hat; diese zweite Involution ist perspectiv zu der auf X gegebenen Involution, von welcher y und z die Doppelpunkte sind. Die beiden concentrischen Involutionen um x sind also bekannt, und sie haben ein reelles Paar conjugirter Strahlen gemeinschaftlich, weil eine von ihnen elliptisch ist. Dieses Paar s, t giebt die Doppelstrahlen der Involution (x) , welche, wie wir auch von früher wissen, hyperbolisch sein muss.

Ist die Involution (x) also ermittelt, so lässt sich jetzt zu jeder durch den gegebenen Punkt P gehenden Gerade \mathcal{G} der entsprechende Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ herstellen; er muss nämlich durch x und Q gehen, die auf X gegebene elliptische Involution zu seiner zugehörigen haben und endlich von der Involution (x) in einer krummen Involution geschnitten werden, deren Centrum der Punkt $\mathcal{G}X$ ist; verbinden wir daher x mit diesem Punkte und suchen den conjugirten Strahl in (x) auf, so muss derselbe den Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ in x berühren. Wir kennen daher jetzt fünf Punkte des Kegelschnitts $\mathcal{R}^{(2)}$, wodurch er vollständig bestimmt wird, nämlich den Punkt Q , die beiden in x zusammenfallenden Punkte, d. h. x und seine Tangente und die zugehörige Involution auf X , d. h. die beiden imaginären Punkte y und z . Die Construction des durch diese Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitts ist in Nr. 111 ausgeführt. Wir können demnach zu jeder durch P gezogenen Gerade \mathcal{G} den entsprechenden Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ herstellen und ebenso zu jeder durch Q gehenden Gerade \mathcal{G}_1 den entsprechenden Kegelschnitt $\mathcal{R}_1^{(2)}$; jeder beliebige Punkt kann nun als der Schnittpunkt zweier solcher Geraden $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1$ angesehen werden; die beiden entsprechenden Kegelschnitte $\mathcal{R}^{(2)}, \mathcal{R}_1^{(2)}$ haben dann zu ihrem vierten gemeinschaftlichen Punkte ausser x, y, z denjenigen, welcher

dem Schnittpunkte $\mathcal{G}\mathcal{G}_1$ zugeordnet ist. Wie der vierte gemeinschaftliche Punkt der beiden Kegelschnitte $\mathcal{R}^{(2)}, \mathcal{R}_1^{(2)}$ gefunden wird, ist in Nr. 173 angegeben worden. Wir sind nunmehr im Stande, zu jedem Punkte den zugeordneten Punkt zu construiren, mithin auch zu jeder beliebigen Gerade \mathcal{G} den entsprechenden Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$; wir haben also die Verwandtschaft der ersten Art auch für den angenommenen Fall herzustellen gelehrt. In ganz analoger Weise wird die der zweiten Art hergestellt, wenn zu ihrer Bestimmung neben einem beliebigen Paar zugeordneter Strahlen \mathcal{G}, \mathcal{H} von dem Dreieck allein ein reeller Strahl X und der Schnittpunkt x der beiden andern mit der elliptischen Involution gegeben ist, dessen imaginäre Doppelstrahlen Y und Z sind.

Durch ein Paar conjugirter Punkte P, Q und ein Polardreieck xyz 329 wird das Polarsystem nicht vollkommen bestimmt, sondern es giebt unendlich viele Polarsysteme, welche diese Stücke gemein haben, denn wir können nach der Construction 4) Nr. 302 neben dem Polardreieck zwei Paare conjugirter Punkte geben, das feste PQ , das allen gemeinsam ist, und ein veränderliches, durch das die verschiedenen Polarsysteme sich ergeben. Daher steht es uns frei, anstatt der beiden als gegeben angesehenen Polarsysteme, von welchen wir ausgingen, andere zu setzen, für welche P, Q conjugirte Punkte sind und xyz ein Polardreieck ist; durch je zwei solche Polarsysteme wird immer dieselbe Verwandtschaft der ersten Art bestimmt. Wir können alle Polarsysteme auf die Weise herstellen, dass wir um Q eine Gerade \mathcal{Q} drehen und zur Bestimmung des Polarsystems immer das Polardreieck xyz und das Paar Pol und Polare P und \mathcal{Q} nehmen, wodurch das Polarsystem jedesmal vollständig und eindeutig bestimmt wird nach 3) Nr. 301. Die Gesammtheit dieser Polarsysteme nennen wir *ein Büschel von Polarsystemen*; die Mächtigkeit desselben ist gleich gross mit der eines Strahlbüschels, denn es giebt so viel Polarsysteme in ihm, als Strahlen \mathcal{Q} durch einen Punkt Q . Irgend ein Paar zugeordneter Punkte P_1, Q_1 der Verwandtschaft, welche durch xyz und P, Q bestimmt wird, muss nun auch ein Paar conjugirter Punkte sein für irgend zwei andere Polarsysteme des Büschels, welche wir beliebig herausnehmen können, z. B. für eins der ursprünglichen und ein neues, d. h. Q ist dem P auch conjugirt in Bezug auf das neue und liegt auf der Polare von P in demselben. Mit andern Worten: *Die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf alle Polarsysteme eines Büschels von Polarsystemen laufen durch einen festen Punkt, der ihm nun in Bezug auf alle diese Polarsysteme conjugirt ist.* Wenn viermal zwei in Bezug auf alle Polarsysteme des Büschels conjugirte Punkte herausgenommen werden, so ist, wie wir von Nr. 307 her wissen, das Büschel auch bestimmt;

wir fanden dann dort, dass in allen Polarsystemen, denen diese Paare conjugirter Punkte gemeinsam sind, jedem weiteren Punkt ein fester als conjugirt zugeordnet ist.

Da wir irgend zwei Polarsysteme des Büschels zur Hervorbringung der Verwandtschaft wählen können, so folgt ferner: Sind von zwei Punkten P_1 und P_2 die Polaren in Bezug auf irgend ein Polarsystem des Büschels ermittelt, so geht die erste durch den conjugirten Punkt Q_1 von P_1 , die zweite durch den Q_2 von P_2 , und sie schneiden sich in einem Punkte Q_3 , dessen Polare in Bezug auf das gewählte Polarsystem die Verbindungslinie P_1P_2 ist; der conjugirte Punkt P_3 zu Q_3 muss also auf P_1P_2 liegen. Verändern wir das aus dem Büschel genommene Polarsystem, so verändert sich Q_3 und beschreibt denjenigen Ort, welcher alle Punkte enthält, die den Punkten der Gerade $P_1P_2 = \mathcal{G}$ conjugirt sind, d. h. den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$.

Hieraus folgt: *Die Pole einer Gerade \mathcal{G} in Bezug auf sämtliche Polarsysteme eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher dem gemeinschaftlichen Polardreieck xyz umgeschrieben ist.* Dies lässt sich auch so aussprechen: *Die Polaren zweier Punkte P_1 und P_2 in Bezug auf sämtliche Polarsysteme eines Büschels beschreiben zwei projective Strahlbüschel (Q_1) und (Q_2), welche zu je zwei entsprechenden Strahlen die Polaren in Bezug auf dasselbe Polarsystem des Büschels haben.* Nehmen wir für \mathcal{G} insbesondere die unendlich entfernte Gerade G_∞ , so enthält der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Mittelpunkte aller Polarsysteme des Büschels, also: *Die Mittelpunkte sämtlicher Polarsysteme eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$, welcher dem gemeinsamen Polardreieck xyz umgeschrieben ist.* Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ entscheidet zugleich über die Art der in dem Büschel enthaltenen Polarsysteme, d. h. ob dieselben hyperbolisch oder elliptisch sind. Zuvörderst ist nämlich klar, dass, wenn die ausgezeichneten Punkte S, S_1, S_2, S_3 , in deren jeden zwei conjugirte Punkte P, Q zusammenfallen, entweder alle vier reell sind, oder wenn auch nur zwei von ihnen reell sind, offenbar alle Polarsysteme des Büschels hyperbolisch sein müssen, denn jeder Strahl durch einen dieser Punkte liefert im zweiten Doppelpunkt der Involution, die ihm in einem der Polarsysteme zugehört, einen zweiten reellen Punkt des Kern-Kegelschnitts. Die reellen Kern-Kegelschnitte bilden ein gewöhnliches Kegelschnittbüschel mit vier oder zwei reellen Grundpunkten. Sobald daher von dem gemeinschaftlichen Polardreieck nur x und X reell sind, y und z imaginär, sind alle Polarsysteme des Büschels hyperbolisch, und die Kern-Kegelschnitte haben zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Grundpunkte. Wenn dagegen

jenes Dreieck xyz völlig reell ist, so sind entweder die Involutionen $(x), (y), (z)$ alle drei hyperbolisch, oder nur eine ist hyperbolisch und die beiden anderen sind elliptisch. Im ersteren Falle enthält das Büschel wiederum lauter hyperbolische Polarsysteme, deren Kern-Kegelschnitte ebenfalls ein gewöhnliches Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten S, S_1, S_2, S_3 bilden; im letzteren Falle wird das Büschel theils hyperbolische, theils elliptische Polarsysteme enthalten; die Kern-Kegelschnitte der ersteren bilden ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten; dies ist aber, wie wir jetzt sehen, nur ein unvollständiges Gebilde, zu dessen Ergänzung noch die *imaginären Kegelschnitte* hinzutreten müssen, welche den elliptischen Polarsystemen eines solchen Büschels entsprechen.

Wir sehen die Richtigkeit der letzten Behauptung leicht ein, ³³⁰ wenn wir, falls von den (reellen) Involutionen $(x), (y), (z)$ eine

hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sind, genauer untersuchen, in welcher Weise die conjugirten Punkte P, Q die verschiedenen Gebiete der Ebene bedecken. Die Ebene wird ja, wie wir wissen, durch die Seiten des Dreiecks xyz in die sieben Regionen $(e), (e_1), (h_1), (e_2), (h_2), (e_3), (h_3)$ (Fig. 102)* getheilt.

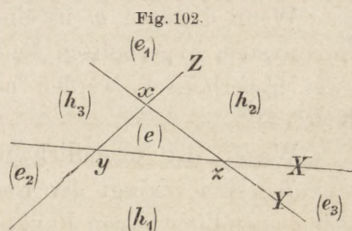


Fig. 102.

Benutzen wir wieder das bekannte Kennzeichen für elliptische und hyperbolische Involution, so erkennen wir aus den Fällen h_{ee} der Tabelle in Nr. 322, dass, wofern die Involution (x) hyperbolisch ist,

wenn P in der Region (e) liegt, der conjugirte Punkt Q in einer der Regionen (e_1) oder (h_1) ;

wenn P in einer der Regionen (e_1) und (h_1) liegt, Q in der Region (e) ;

wenn P in einer der Regionen (e_2) und (h_2) liegt, Q in einer der Regionen (e_3) und (h_3) ;

wenn P in einer der Regionen (e_3) und (h_3) liegt, Q in einer der Regionen (e_2) und (h_2) liegen muss.

In dem andern Fall, wo $(x), (y), (z)$ alle drei hyperbolisch sind, findet die Vertheilung in folgender Weise statt (vergl. h_{hh}):

wenn P in (e) liegt, so liegt auch der conjugirte Punkt Q in (e) ;

wenn P in (e_1) oder (h_1) liegt, so liegt auch Q in (e_1) oder (h_1) ;

wenn P in (e_2) oder (h_2) liegt, so liegt auch Q in (e_2) oder (h_2) ; und

wenn P in (e_3) oder (h_3) liegt, so liegt auch Q in (e_3) oder (h_3) .

* Vergl. Fig. 98.

Kehren wir aber zum vorigen Falle zurück. Den unendlich entfernten Punkten P sind die Punkte Q des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ conjugirt. Jeder Punkt m dieses Kegelschnitts ist der Mittelpunkt eines Polarsystems des Büschels, und dieses System ist vollständig bestimmt durch das Polardreieck xyz und den Mittelpunkt m , dessen Polare G_∞ bekannt ist. Wenn m in der Region (e) liegt, so muss das Polarsystem elliptisch sein, weil die drei ihm zugehörigen Involutionen auf den Seiten X, Y, Z alle drei elliptisch sind. Denn die Polaren der unendlich fernen Punkte dieser Seiten sind die Verbindungslinien von m mit den Ecken x, y, z , und ihre Schnitte mit X, Y, Z sind die Mittelpunkte dieser Involutionen und liegen auf allen zwischen den Ecken, wenn m in (e) liegt. Dass der Kegelschnitt bei dieser Lage des Mittelpunkts zum Polardreieck xyz nicht reell sein kann, wissen wir schon von Nr. 214 her.

Wenn dagegen m in einer der anderen Regionen liegt, muss das Polarsystem hyperbolisch sein, weil von jenen drei Involutionen immer zwei hyperbolisch werden und die dritte elliptisch (Nr. 297; vergl. Nr. 214).

Wegen der unendlich fernen Punkte von (e_1) , die zugleich die von (h_1) sind, dringt der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ in die Region (e) ; da (e) keine unendlich fernen Punkte hat, so gelangt er nicht in (e_1) und (h_1) . Weil er also ins Innere des Dreiecks xyz , dem er umgeschrieben ist, dringt, muss er Hyperbel sein; und es ist ersichtlich, dass der eine Ast von (e_2) über y nach (e) und dann über z nach (e_3) geht und der andere von (h_3) über x nach (h_2) ; denn von (e) nach (e_1) darf er ja nicht gehen; also kann der im Innern befindliche Bogen nur über y und z austreten und in (e_2) und (e_3) eintreten. Diejenigen seiner Punkte m , welche in den Raum (e) hineinfallen, sind die Mittelpunkte der elliptischen Polarsysteme des Büschels, die übrigen die Mittelpunkte der hyperbolischen, welche selbst wieder in zwei Reihen zerfallen. Von Nr. 214 her wissen wir, dass die Kegelschnitte mit dem Polardreieck xyz , welche ihre Mittelpunkte in (h_2) und (h_3) haben, Hyperbeln, und diejenigen, welche sie in (e_2) und (e_3) haben, Ellipsen sind. Der eine Zweig der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ enthält also die Mittelpunkte sämtlicher hyperbolischen Polarsysteme des Büschels, deren Kern-Kegelschnitte Hyperbeln sind, ihr anderer Zweig wird durch die Punkte y und z in drei Stücke getheilt: das endliche Stück zwischen y und z enthält die Mittelpunkte der elliptischen Polarsysteme (imaginären Kegelschnitte), die beiden übrigen unendlichen Stücke enthalten die Mittelpunkte der hyperbolischen Polarsysteme des Büschels, deren Kern-Kegelschnitte Ellipsen sind.

Hierbei tritt der bemerkenswerthe Uebergang von einem reellen Kegelschnitt (einer Ellipse) zum imaginären Kegelschnitt durch einen Punkt, d. h. Nullkegelschnitt (jeden der Punkte y und z) auf, oder genauer durch ein imaginäres Geradenpaar, das aus den Doppelstrahlen von (y) , bezw. (z) besteht (vergl. Nr. 199). Die beiden unendlich entfernten Punkte der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind die Mittelpunkte zweier hyperbolischen Polarsysteme des Büschels, deren Kern-Kegelschnitte Parabeln sind. Hierdurch ist also die obige Behauptung gerechtfertigt.

Auch für den andern Fall, dass die drei Involutionen $(x), (y), (z)$ hyperbolisch sind, zeigt die letzte Betrachtung eine vollkommene Uebereinstimmung mit dem bei der Untersuchung des Kegelschnittbüschels Gefundenen. Der Mittelpunkts-Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ darf nämlich in diesem Fall den Raum (e) nicht treffen und kann sowohl Ellipse, als auch Hyperbel sein. Ist er Ellipse, so trifft er nur die Räume $(h_1), (h_2), (h_3)$; die Kern-Kegelschnitte aller Polarsysteme des Büschels sind also Hyperbeln. Ist er Hyperbel, so muss er dieselben Räume treffen, welche den einen (durch x, y, z gehenden) Zweig der Hyperbel enthalten, während der andere Zweig ganz in einem der Räume $(e_1), (e_2), (e_3)$ enthalten ist. Die Kern-Kegelschnitte zerfallen also in eine Reihe von Ellipsen, welche ihre Mittelpunkte auf dem einen Zweige der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ haben, und in eine Reihe von Hyperbeln, welche sie auf ihrem andern Zweige haben, und beide Reihen werden durch zwei Parabeln von einander getrennt, deren Mittelpunkte die unendlich entfernten Punkte von $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind. Das haben wir früher von anderer Seite her (Nr. 196) erkannt.

Die Ausführung der dualen Betrachtung ist ohne weitere Schwierigkeit; durch ein Polardreieit XYZ und ein beliebiges Paar conjugirter Strahlen $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ ist nicht nur ein, sondern sind unendlich viele Polarsysteme bestimmt, welche *eine Schaar von Polarsystemen* bilden, deren Mächtigkeit gleich gross ist mit der einer geraden Punktreihe. Die Pole einer beliebigen Gerade in Bezug auf sämtliche Polarsysteme der Schaar liegen auf einer andern (conjugirten) Gerade; daher liegen insbesondere die Mittelpunkte sämtlicher Polarsysteme der Schaar auf einer Gerade \mathfrak{M}_0 , welche der unendlich entfernten Gerade G_∞ conjugirt ist. Die Polaren eines Punktes in Bezug auf sämtliche Polarsysteme einer Schaar umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, welcher dem gemeinschaftlichen Polardreieit XYZ eingeschrieben ist. Die Polarsysteme einer Schaar sind sämtlich hyperbolisch, sobald a) von dem gemeinschaftlichen Polardreieit allein ein Strahl X und der Schnittpunkt x der beiden andern Y, Z reell, diese selbst aber imaginär

sind; die Kern-Kegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten; b) sobald X, Y, Z alle reell und die Involutionen $(X), (Y), (Z)$ auf ihnen alle drei hyperbolisch sind; die Kern-Kegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar mit vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten. Wenn dagegen c) X, Y, Z alle reell und von den Involutionen $(X), (Y), (Z)$ nur eine (X) hyperbolisch, die beiden andern elliptisch sind, so besteht die Schaar theils aus hyperbolischen, theils aus elliptischen Polarsystemen; die Kern-Kegelschnitte der hyperbolischen bilden eine Schaar mit vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten. Dieses Gebilde wird aber erst zu einem vollständigen durch Hinzufügung der imaginären Kegelschnitte, welche durch die elliptischen Polarsysteme der Schaar vertreten werden. Nach dem Obigen muss in diesem Falle c) die Gerade \mathfrak{M}_0 die Seiten des von den Geraden X, Y, Z gebildeten Dreiecks so treffen, dass von den Schnittpunkten zwei in den Seiten selbst und nur einer in der Verlängerung liegt, also ein Stück der Gerade \mathfrak{M}_0 in den endlichen Dreiecksraum (e) hineinfällt. Dieses Stück enthält die Mittelpunkte der elliptischen Polarsysteme der Schaar, während diejenigen Stücke von \mathfrak{M}_0 , welche in $(h_1), (h_2), (h_3)$ enthalten sind, die Mittelpunkte von hyperbolischen Polarsystemen mit Hyperbeln als Kern-Kegelschnitten und die Stücke, welche in die Räume $(e_1), (e_2), (e_3)$ fallen, die Mittelpunkte von hyperbolischen Polarsystemen mit Ellipsen als Kern-Kegelschnitten enthalten.

332 Wir wollen noch ermitteln, in welcher Weise bei der durch die Schaar hervorgerufenen Verwandtschaft der zweiten Art die conjugirten Geraden $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ die Ebene erfüllen, wenn wir das gemeinschaftliche Polardreieck XYZ als vollständig reell annehmen. Eine Gerade trifft entweder alle drei Seiten X, Y, Z in ihren Verlängerungen; in diesem Falle wollen wir sie durch einen einfachen Strich ($'$) bezeichnen; oder sie trifft eine Seite in der Verlängerung und die beiden andern zwischen den Ecken des Dreiecks; in diesem Falle soll sie zwei Striche erhalten ($''$).

1) Die drei Involutionen $(X), (Y), (Z)$ sind alle hyperbolisch: dann wird einer Gerade \mathfrak{G}' nothwendig eine Gerade \mathfrak{H}' conjugirt sein und einer Gerade \mathfrak{G}'' eine Gerade \mathfrak{H}'' .

2) Von diesen drei Involutionen ist eine (X) hyperbolisch und die beiden andern sind elliptisch; dann ist jeder Gerade \mathfrak{G}' eine Gerade \mathfrak{H}'' conjugirt, aber einer Gerade \mathfrak{G}'' nur dann eine Gerade \mathfrak{H}' , wenn sie X ausserhalb, Y und Z innerhalb trifft; dagegen, wenn sie X innerhalb, Y innerhalb und Z ausserhalb trifft, eine Gerade \mathfrak{H}'' , welche X innerhalb, Y ausserhalb und Z innerhalb trifft; endlich,

wenn \mathcal{G}'' X innerhalb, Y ausserhalb, Z innerhalb trifft, muss die conjugirte \mathcal{H}'' X innerhalb, Y innerhalb und Z ausserhalb treffen.

Das Büschel und die Schaar von Polarsystemen und die mit ihnen 333 zusammenhängenden Verwandtschaften der ersten und zweiten Art können auch anstatt durch das gemeinschaftliche Polardreieck und ein beliebiges Paar conjugirter Punkte oder Strahlen allgemeiner defintirt werden: einerseits durch vier Paare conjugirter Punkte P, Q und andererseits durch vier Paare conjugirter Strahlen \mathcal{G}, \mathcal{H} .

Es seien vier Paare conjugirter Punkte $P_1, Q_1; \dots P_4, Q_4$ gegeben, und drei Polarsysteme Π_1, Π_2, Π_3 hergestellt, welche sie gemeinschaftlich haben; in allen Polarsystemen des Büschels, welches durch Π_1, Π_2 bestimmt wird, sind $P_1, Q_1; \dots$ conjugirt. Nun seien P, Q in Π_3 conjugirt. In jenem Büschel giebt es auch ein Polarsystem, in dem P, Q conjugirt sind; das ist mit Π_3 identisch, da durch fünf Paare conjugirter Punkte eindeutig ein Polarsystem bestimmt wird. Folglich müssen alle Polarsysteme, welche jene vier Paare conjugirter Punkte gemeinschaftlich haben (Nr. 307), demselben Büschel angehören. Ebenso bilden alle Polarsysteme, welche vier Paare conjugirter Strahlen \mathcal{G}, \mathcal{H} gemeinschaftlich haben, eine Schaar. Andere Reihen von Polarsystemen erhalten wir, indem wir vier Paare theils conjugirter Punkte, theils conjugirter Strahlen zur Bestimmung auswählen.

Durch jeden Punkt P geht der Kern-Kegelschnitt $K^{(2)}$ eines Polarsystems aus einem Büschel von Polarsystemen, das durch die Polarsysteme Π_1, Π_2 bestimmt ist. Wenn die Polaren von P in Π_1, Π_2 sich in Q schneiden, so ist dieser dem P in Bezug auf das Büschel conjugirt und PQ die Tangente p in P an den gesuchten Kegelschnitt. Auf ihr liege der Punkt ξ , für den der conjugirte Punkt η ähnlich construirt werde; es ist $P\eta$ die Polare x von ξ in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$. Für einen Punkt ζ auf x sei wiederum der conjugirte t ; dann ist $t\xi$ die Polare z von ζ nach $K^{(2)}$; daher ist $xz = z'$ zu ζ conjugirt und der dem P harmonisch in Bezug auf ζ und z' zugeordnete Punkt auf dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ gelegen. Solcher Punkte können wir, ξ verändernd, beliebig viele construiren.

§ 63. Drei Polarsysteme oder Kegelschnitte. Die Tripelcurve. Das Kegelschnittnetz.*

Nehmen wir drei beliebige Polarsysteme A, B, C an, so gehört 334 zu einem Punkte P in Bezug auf jedes von ihnen eine Polare, und

* Vergl. *Schröter*, Ueber die *Steiner'sche* Fläche vierten Grades. Monatsbericht der Berliner Akademie v. 26. Nov. 1863 u. Journ. f. Mathem. Bd. 64 S. 79.

diese drei Polaren werden sich im allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden; es ist aber von Interesse, den Ort solcher besonderen Punkte P aufzusuchen, für welche die Polaren durch einen und denselben Punkt Q laufen. Suchen wir, um die Ordnung dieses Ortes zu bestimmen, auf einer beliebigen Gerade \mathcal{G} die Punkte P von der verlangten Beschaffenheit zu ermitteln. Wenn ein Punkt die Gerade \mathcal{G} durchläuft, so beschreiben seine Polaren a, b, c in den drei Polarsystemen A, B, C drei projective Strahlbüschel um die Punkte α, β, γ ; die von a und b beschriebenen Strahlbüschel (α) und (β) erzeugen also einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher durch α, β geht. Die Strahlen b und c erzeugen in gleicher Weise einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$, welcher durch β, γ geht. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ haben nun ausser dem Punkte β noch drei Punkte Q, Q', Q'' zu Schnittpunkten, und weil ein solcher Punkt Q auf beiden Kegelschnitten $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ zugleich liegt, müssen $\alpha Q, \beta Q, \gamma Q$ die drei Polaren eines und desselben Punktes P der Gerade \mathcal{G} sein, d. h. P und Q werden ein solches besonderes Paar von Punkten sein, welche gleichzeitig für alle drei gegebenen Polarsysteme conjugirt sind. Also giebt es drei Punkte P, P', P'' auf \mathcal{G} , welche dem gesuchten Orte angehören; dieser ist eine *Curve dritter Ordnung*.

Jeder von zwei so zusammengehörigen Punkten P, Q ist Schnittpunkt der drei Polaren des andern. Also liegen sowohl die Pole P , deren drei Polaren in einem Punkte Q sich schneiden, als auch diese Punkte Q auf der Curve dritter Ordnung.

Ein Punkt P kann nicht mit seinem zugehörigen Q zusammenfallen, denn das würde ein gemeinsamer Punkt der Kern-Kegelschnitte aller drei Polarsysteme sein; ein solcher ist im allgemeinen nicht vorhanden.

Die drei Punkte Q, Q', Q'' stehen mit ihren conjugirten Punkten P, P', P'' in einem sehr einfachen Zusammenhang, vermöge dessen sie aus diesen unmittelbar gefunden werden können. Weil P und Q, P' und Q' für alle drei Polarsysteme A, B, C conjugirt sind, so müssen es auch (PP', QQ') und (PQ', QP') sein; da der erstere von diesen Punkten auf der Gerade \mathcal{G} liegt und es auf \mathcal{G} nur noch einen solchen P'' giebt, so muss dieser mit ihm identisch sein und daher der andere mit Q'' , also ist $(PP', QQ') = P'', (PQ', QP') = Q''$; d. h. die Punkte P, P', P'' sind die drei Schnittpunkte der Dreiecksseiten $Q'Q'', Q''Q, QQ'$ mit der Gerade \mathcal{G} , oder *die sechs Punkte P, P', P'', Q, Q', Q'' liegen zu je dreien auf vier geraden Linien, welche ein vollständiges Viereck bilden*.

Die gefundene Ortscurve dritter Ordnung geht durch die drei gemeinschaftlichen Tripel* je zweier der gegebenen Kegelschnitte B und C , C und A , A und B . In der That, sei xyz das gemeinschaftliche Tripel von B und C , so ist die Polare von x für die beiden Kegelschnitte B und C dieselbe Gerade $yz = X$; daher schneiden sich die Polaren von x für alle drei gegebenen Kegelschnitte B , C und A in einem Punkte, und x ist also ein Punkt des gesuchten Ortes; sein conjugirter ist der Schnittpunkt von X mit der Polare von x in Bezug auf A . Dasselbe gilt für y und z ; da aber bekanntlich die Polaren der Ecken eines Dreiecks xyz in Bezug auf einen Kegelschnitt A die Gegenseiten yz, zx, xy in drei Punkten treffen, welche auf einer Gerade liegen, so müssen auch die conjugirten Punkte zu den Punkten x, y, z eines gemeinschaftlichen Tripels von zwei der drei Kegelschnitte auf derselben Gerade sich befinden.

Die drei gegebenen Kegelschnitte (oder Polarsysteme) A, B, C ³³⁵ bestimmen, zu je zweien, drei Büschel, welche wir mit (B, C) , (C, A) , (A, B) bezeichnen wollen.

Zwei Punkte, welche in Bezug auf zwei Kegelschnitte conjugirt sind, sind es auch in Bezug auf alle Kegelschnitte ihres Büschels; daher sind unsere auf der Curve dritter Ordnung gelegenen Punkte P und Q , welche in Bezug auf alle drei Kegelschnitte A, B, C zugleich conjugirt sind, auch conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte dieser drei Büschel. Wir wollen für diese Punktepaare PQ die lateinischen Buchstaben P, Q beibehalten, während wir weitere zwei Punkte, die nicht zu ihnen gehören, und die wir für gewisse Kegelschnitte conjugirt sein lassen, durch deutsche Buchstaben $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ bezeichnen werden. *Aus jenen einfach unendlich vielen Punktepaaren P, Q wollen wir drei beliebige herausnehmen: P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 .*

Es sei nun $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ein weiteres Paar conjugirter Punkte; so bestimmen die vier Paare $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ein Büschel \mathfrak{B} von Kegelschnitten (Nr. 307, 333). In jedem der Büschel (B, C) , (C, A) , (A, B) , die wir uns ja auch je durch vier Paare conjugirter Punkte bestimmt denken können (etwa P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 und je ein viertes), giebt es einen Kegelschnitt, für welchen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ conjugirt sind, der also zu jenem Büschel \mathfrak{B} gehört. In Bezug auf diese drei Kegelschnitte sind auch alle übrigen Punkte P, Q conjugirt; mithin sind sie auch

* Wir wollen jetzt für die drei Ecken eines Polardreiecks die kürzere Benennung „Tripel“ bevorzugen (Nr. 294); und ebenso wollen wir im Folgenden der Einfachheit wegen uns nur des Ausdrucks „Kegelschnitt“ bedienen statt des allgemeineren „Polarsystem“, indem wir unter jenem auch den durch das elliptische Polarsystem vertretenen imaginären Kegelschnitt mitverstehen.

conjugirt für alle Kegelschnitte des neuen Büschels \mathfrak{B} . *In Bezug auf alle Kegelschnitte, für welche P_1 und Q_1 , P_2 und Q_2 , P_3 und Q_3 conjugirt sind, sind auch alle übrigen P und Q conjugirt.* Den Inbegriff dieser Kegelschnitte, der bestimmt ist, wenn die drei Kegelschnitte A, B, C gegeben sind, wollen wir ein *Kegelschnittnetz* nennen. Jedes Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ bestimmt ein in ihm befindliches Kegelschnittbüschel. Zwei solche Kegelschnittbüschel, bestimmt durch \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} , \mathfrak{P}' und \mathfrak{Q}' haben einen Kegelschnitt gemeinsam, denjenigen, für welchen $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3; \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}; \mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$ conjugirt sind (Nr. 307). Für zwei Kegelschnitte des Netzes sind $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3$ (und die übrigen P, Q) conjugirt, also auch für die übrigen Kegelschnitte ihres Büschels; folglich gehört es ganz zum Netze. Und wir haben die beiden wichtigen Eigenschaften des Kegelschnittnetzes:

Das Büschel, welches zwei Kegelschnitte eines Kegelschnittnetzes verbindet, gehört ganz zu demselben, und zwei Kegelschnittbüschel eines Netzes haben stets einen Kegelschnitt gemein.

Ist also K irgend ein Kegelschnitt des Netzes, so haben die Büschel (A, K) und (B, C) einen Kegelschnitt gemeinsam. *Man erhält also das ganze Netz, wenn man „fächerförmig“ einen der drei gegebenen Kegelschnitte durch Büschel mit allen Kegelschnitten des Büschels verbindet, das durch die beiden andern bestimmt wird.* Daraus erhellt, dass die Zahl der Kegelschnitte im Netze doppelt unendlich ist. Sie sind ja auch $3 = 5 - 2$ Bedingungen unterworfen worden.

Jedes Büschel des Netzes hat mit (A, B) und mit (A, C) einen Kegelschnitt gemeinsam; *wir erhalten daher alle Büschel des Netzes, wenn wir alle Kegelschnitte von (A, B) mit allen von (A, C) durch Büschel verbinden, und sehen, dass auch die Anzahl der Büschel im Netze doppelt unendlich ist.*

Die drei ursprünglich gegebenen Kegelschnitte kann man durch irgend drei aus dem Netze ersetzen; denn die conjugirten Punkte $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3$ (und die übrigen P, Q) sind ja auch diesen gemeinsam. Oder auch, wenn A', B', C' die drei neuen Kegelschnitte sind und K wiederum ein beliebiger aus dem Netze, so haben die Büschel (A', K) und (B', C') einen Kegelschnitt gemein, d. h. man erhält alle Kegelschnitte des Netzes, fächerförmig, aus A', B', C' , wie oben aus A, B, C .

Nur darf man solche drei das Netz bestimmende Kegelschnitte nicht aus demselben Büschel des Netzes nehmen, weil dann die eben erwähnte Construction gar nicht aus diesem Büschel herausführt.

Wir erkennen jetzt, dass *von jedem Kegelschnitt des Netzes einfach unendlich viele Büschel desselben ausgehen, die man erhält, wenn man ihn mit allen Kegelschnitten eines ihn nicht enthaltenden Büschels des Netzes durch Büschel verbindet.*

Die Analogie mit dem *Strahlenfelde*, dem Inbegriff aller Strahlen einer Ebene, ist einleuchtend: das Feld enthält doppelt unendlich viele Strahlen und ebenso viele Strahlbüschel, u. s. w.

Wie die gemeinsamen Tripel der Büschel (B, C) , (C, A) , (A, B) 336 auf der Ortscurve der Punkte P, Q liegen, so gilt dies auch für diejenigen aller Büschel des Netzes, und die Curve wird so mit doppelt unendlich vielen Tripeln erfüllt, weshalb man sie die *Tripelcurve** des Netzes nennt, und zwei Punkte P, Q , welche in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes conjugirt sind, heissen auch kürzer *conjugirte Punkte dieser Curve*.

Jeder Punkt P der Curve ist ein Tripelpunkt; wir ordnen ihm, ausser dem Q , der ihm in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes conjugirt ist, noch einen zweiten conjugirten Punkt Ω zu; dadurch bestimmen wir in dem Netze ein Büschel, für dessen sämtliche Kegelschnitte $Q\Omega$ Polare von P ist; also ist P ein Punkt des gemeinsamen Tripels dieses Büschels, und indem wir die Gerade $Q\Omega$ um Q drehen, erhalten wir *die einfach unendlich vielen Büschel des Netzes, zu deren gemeinsamen Tripeln P gehört. P ist Doppelpunkt* eines der drei Geradenpaare des erst betrachteten Büschels, also *eines Geradenpaares des Netzes, und die genannten Büschel sind ersichtlich alle die aus dem Netze, zu denen dies Geradenpaar gehört.*

Die beiden andern Tripelpunkte in irgend einem dieser Büschel liegen auf der gemeinsamen Polare $Q\Omega$, welche ja die Gegenseite von P im gemeinsamen Polardreieck ist, und sind also zwei von ihren Schnittpunkten mit der Tripelcurve und zwar die beiden von Q verschiedenen; denn, indem wir das Netz durch dies Büschel (oder zwei seiner Kegelschnitte) und einen ausserhalb desselben befindlichen Kegelschnitt K bestimmt denken, der ja ein vom Büschel ganz unabhängiger ist, wird der Schnitt der Polare von P in Bezug auf diesen dritten Kegelschnitt K mit der gemeinsamen Polare von P in Bezug auf das Büschel, d. i. der dem Punkte P in Bezug auf das Netz conjugirte Punkt Q , nicht in einen der beiden andern Punkte des gemeinsamen Tripels des Büschels fallen.

Verändert sich also das Büschel im Netze, zu dessen gemeinsamem Tripel P gehört, so sind die beiden ergänzenden Tripelpunkte je die beiden ferneren Schnitte der um Q sich drehenden Polare mit der Tripelcurve.

Wir sahen eben, jeder Punkt P der Tripelcurve ist Doppelpunkt 337 eines Geradenpaares des Netzes. Die beiden Geradenpaare des Netzes,

* Sie heisst nach Jacobi (1804—1851) auch die *Jacobi'sche Curve* des Netzes.

zu denen zwei beliebige Punkte P, P' der Tripelcurve gehören, bestimmen ein Büschel im Netze — das auch durch die beiden (nicht in Bezug auf das Netz conjugirten) Punkte P, P' als conjugirte Punkte festgelegt ist —, und der Doppelpunkt seines dritten Geradenpaares ist der dritte Punkt im Tripel. *Zwei beliebige Punkte der Tripelcurve gehören nur zu einem Tripel und bestimmen eindeutig den dritten Punkt desselben.*

Umgekehrt ist auch jeder Doppelpunkt eines Geradenpaares des Netzes ein Punkt P , für den die Polaren in Bezug auf irgend drei Kegelschnitte des Netzes und infolge dessen in Bezug auf alle in einen Punkt zusammenlaufen; denn nimmt man als bestimmende Kegelschnitte zwei aus einem Büschel des Netzes, zu welchem dies Geradenpaar gehört, und einen beliebigen ausserhalb dieses Büschels, so fallen ja von den Polaren von P in Bezug auf diese Kegelschnitte die beiden ersten zusammen und alle drei haben also einen Punkt gemeinsam. Nimmt man das Geradenpaar selbst als bestimmende Curve des Netzes, so wird seine Polare für P unbestimmt, und irgend eine durch den Schnittpunkt der beiden andern Polaren gehende Gerade kann als diese Polare angenommen werden.

338 Wir wollen zu zwei conjugirten Punkten P, Q der Tripelcurve den dritten Tripelpunkt haben; dann muss auf der durch Q gehenden Polare von P in Bezug auf das Büschel im Netze, zu welchem das Tripel gehört, einer der beiden weiteren Schnitte sich mit Q vereinigt haben. Diese Gerade berührt in Q und schneidet im dritten Tripelpunkt R . Da aber P und Q sich gleichartig verhalten, so ist R auch dritter Schnitt der Tangente in P .

Die Tangenten in zwei conjugirten Punkten P, Q der Tripelcurve schneiden sich auf derselben, und dieser Schnittpunkt R ist derjenige, welcher P, Q zu einem Tripel vervollständigt. Man nennt bei einer Curve dritter Ordnung den dritten Schnitt einer Tangente den Tangentialpunkt ihres Berührungspunktes. Folglich haben zwei conjugirte Punkte P, Q der Tripelcurve den nämlichen Tangentialpunkt.

Es seien Q und Q' zwei nicht conjugirte Punkte der Tripelcurve und Q'' der sie zum Tripel vervollständigende; P, P' seien die ihnen conjugirten, so gehen $Q'Q''$ durch P und QQ'' durch P' , also ergibt sich Q'' als der Schnittpunkt ($QP', Q'P$) und nach dem Hesse'schen Satze ist der ihm conjugirte P'' der Schnittpunkt (PP', QQ'), mithin der dritte Schnittpunkt von QQ' mit der Tripelcurve, aber auch der von PP' .

Um zu den beiden auf der Tripelcurve angenommenen Punkten Q, Q' den dritten Tripelpunkt Q'' zu finden, haben wir also nur nöthig, den

dritten Schnittpunkt P'' der Verbindungslinie QQ' mit der Tripelcurve zu bestimmen und seinen conjugirten Punkt Q'' zu ermitteln. Dieses Ergebniss lässt sich auch so ausdrücken:

Verbindet man ein beliebiges Paar conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve mit irgend einem dritten Punkte Q' derselben, so treffen diese beiden Strahlen die Tripelcurve zum dritten Male in zwei neuen Punkten, welche wieder ein Paar conjugirter Punkte Q'', P'' der Tripelcurve sind.

Solche drei Paare conjugirter Punkte der Tripelcurve $PQ, P'Q', P''Q''$ sind also die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, und je drei nicht in einer Gerade liegende Ecken desselben bilden ein Tripel in dem Kegelschnittnetze. Wir schliessen hieraus folgenden Satz:

Die Seiten eines auf der Tripelcurve liegenden Tripeldreiecks, welches das gemeinschaftliche Tripel eines in dem Kegelschnittnetze befindlichen Büschels ist, schneiden die Tripelcurve immer in drei neuen Punkten, welche auf einer Gerade liegen, und die drei Schnittpunkte sind zugleich die conjugirten Punkte der Tripelcurve zu den drei Eckpunkten des Tripels, indem je eine Ecke und der dritte Schnittpunkt der gegenüberliegenden Seite des Tripeldreiecks mit der Tripelcurve einander conjugirt sind. Wir können auch umgekehrt sagen:

Wenn irgend eine Gerade der Tripelcurve in den drei Punkten P, P', P'' begegnet, so bilden die zu ihnen conjugirten Punkte Q, Q', Q'' ein Tripel, welches einem in dem Kegelschnittnetze befindlichen Büschel gemeinschaftlich ist.

Zwei Kegelschnitte A', B' , bezw. aus den Büscheln $(B, C), (C, A)$ 339 des Netzes, bestimmen ein Büschel im Netz, das mit (A, B) einen Kegelschnitt gemeinsam hat; das lässt sich auch unabhängig von den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes als Satz aussprechen:

Hat man drei Kegelschnitte C, B, A' eines Büschels und A, C, B' eines zweiten Büschels, welches mit dem ersten den Kegelschnitt C gemeinschaftlich hat, so bestimmen auch die Kegelschnittpaare A, B und A', B' zwei Büschel, welche einen Kegelschnitt \mathcal{C} gemeinschaftlich haben, d. h. die acht Grundpunkte der beiden Büschel (A, B) und (A', B') liegen auf einem und demselben Kegelschnitt. Oder mit andern Worten:

Wenn man drei beliebige Kegelschnitte A, B, C hat und legt einmal durch die Schnittpunkte von B und C einen beliebigen Kegelschnitt A' , dann durch die Schnittpunkte von C und A einen beliebigen Kegelschnitt B' , so liegen die vier Schnittpunkte von A' und B' mit den vier Schnittpunkten von A und B auf einem und demselben Kegelschnitt. Oder auch:

Wenn man drei beliebige Kegelschnitte A, B, C hat und legt durch irgend einen Punkt P drei neue Kegelschnitte, welche ausserdem durch die vier Schnittpunkte je zweier der gegebenen $B, C; C, A; A, B$ hindurchgehen, so treffen sich diese neuen Kegelschnitte ausser in P noch in denselben drei Punkten.

Diese Sätze sind ihrer Allgemeinheit wegen bemerkenswerth und enthalten viele besondere Fälle in sich, welche anzuführen hier unterbleiben muss.

340 Das Büschel, zu dem ein Tripel $Q Q' Q''$ gehört, scheiden wir aus dem Netze aus, indem wir als weitere Bedingung hinzufügen, dass Q und irgend ein Punkt \mathfrak{P} auf $Q' Q''$ conjugirt seien; denn, weil der zu Q in Bezug auf das Netz oder auf der Tripelcurve conjugirte Punkt P auf $Q' Q''$ liegt, so wird diese Gerade gemeinsame Polare von Q in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes, für die Q und \mathfrak{P} conjugirt sind, und Q, Q', Q'' ist deren gemeinsames Tripel.

Ist $R R' R''$ ein zweites Tripel, so haben die beiden Büschel einen Kegelschnitt gemeinsam, und die beiden Tripel, als Polardreiecke dieses Kegelschnitts, liegen auf einem Kegelschnitt (Nr. 295). Also:

Irgend zwei Tripel der Tripelcurve liegen allemal auf einem Kegelschnitt.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren: Legt man durch irgend ein Tripel der Tripelcurve einen beliebigen Kegelschnitt, so schneidet derselbe die Curve im allgemeinen in drei neuen Punkten, welche wieder ein Tripel bilden; denn da zwei Eckpunkte eines Tripels der Tripelcurve willkürlich gewählt werden dürfen und durch das erste Tripel und zwei Punkte der Tripelcurve ein Kegelschnitt bestimmt wird, so muss der dem zweiten Tripel angehörige einzige dritte Tripelpunkt sowohl auf dem Kegelschnitt als auch auf der Tripelcurve liegen, d. h. der sechste Schnittpunkt beider sein.* Hieraus folgt mit Berücksichtigung der oben gefundenen Eigenschaft der Tripelcurve der Satz:

Wenn man durch die drei Punkte eines Tripels der Tripelcurve und einen beliebigen Punkt Q derselben ein Büschel von Kegelschnitten legt, so trifft jeder Kegelschnitt desselben die Tripelcurve noch in zwei neuen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt P der Tripelcurve läuft, welcher der dem Punkte Q conjugirte ist.

* Hierbei wird als bekannt vorausgesetzt, dass ein Kegelschnitt und eine Curve dritter Ordnung sechs Punkte oder, wenn sie fünf Punkte gemeinsam haben, noch einen sechsten und nur noch diesen gemeinsam haben.

Dieser Satz gilt allgemein für vier beliebige Punkte einer Curve dritter Ordnung und führt zu einer Erzeugung derselben durch ein Kegelschnittbüschel und ein Strahlbüschel, welche in projective Beziehung zu einander gesetzt sind.*

Hieran knüpft sich eine weitere bemerkenswerthe Eigenschaft der Tripelcurve; seien R, R', R'' die Punkte des ersten Tripels, und das Büschel von Kegelschnitten mit den vier Grundpunkten Q, R, R', R'' schneide die Tripelcurve in dem veränderlichen Punktepaar $Q' Q''$, dessen Sehne durch den festen Punkt P läuft, so wird der vierte harmonische dem P in Bezug auf Q', Q'' zugeordnete Punkt derjenige Punkt sein, in welchem die Polare von P in Bezug auf den Kegelschnitt des Büschels $[QRR'R'']$, welcher durch Q', Q'' geht, den Strahl $PQ'Q''$ trifft. Die Polaren von P in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $[QRR'R'']$ laufen aber bekanntlich durch einen festen Punkt Π und beschreiben ein Strahlbüschel, das projectiv ist mit dem Kegelschnittbüschel und — wegen der obigen Erzeugung — auch mit dem Strahlbüschel, welches der veränderliche Strahl $Q'Q''P$ beschreibt; das Erzeugniß der beiden projectiven Strahlbüschel ist ein Kegelschnitt, und wir erhalten folgenden Satz:

*Zieht man durch irgend einen Punkt P der Tripelcurve Strahlen, welche dieselbe ausserdem in Punktepaaren $Q'Q''$ treffen, und construirt man den dem P zugeordneten vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort desselben ein bestimmter Kegelschnitt, welcher in P die Tripelcurve berührt und durch die Berührungspunkte der übrigen (vier)** aus P an die Tripelcurve zu legenden Tangenten geht.*

Der Schluss des Satzes ergibt sich unmittelbar aus bekannten Eigenschaften harmonischer Punkte.

Wir bestimmen (Fig. 103) zu Q' und Q'' die conjugirten Punkte P' und P'' , welche mit P auf einer Geraden liegen müssen und zwar so, dass $PQ, P'Q', P''Q''$ die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind; dann wissen wir, dass von dem obigen Kegelschnittbüschel $[QRR'R'']$ ein Kegelschnitt durch Q', Q'' und ein anderer durch P', P'' geht. Die vierten harmonischen dem P zugeordneten Punkte auf allen durch P gezogenen Sehnen liegen, wie wir gesehen haben, auf einem bestimmten Kegelschnitt $P^{(2)}$, den wir den *Polarkegelschnitt* des Punktes P in Bezug auf die Tripelcurve nennen wollen. Auf diesem liegen daher auch p und q , welche mit Hülfe des vollständigen Vierseits $PQP'Q'P''Q''$ leicht construirt werden;

* Chasles (1796—1880), Comptes rendus Bd. 41, 1853.

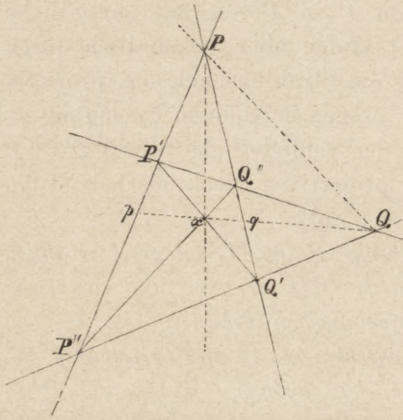
** Wegen der Zahl vier vergl. Nr. 347.

sie sind die Schnitte von $PP'P''$ und $PQ'Q''$ mit der Gerade vom Q nach dem Punkt $x = (P'Q', P''Q'')$.

Lassen wir nun den Kegelschnitt des Büschels $[QRR'R'']$ sich verändern, so verändern sich auch Q', Q'', P', P'' , während P fest bleibt; die Punkte p und q bewegen sich auf dem Polarkegelschnitt $P^{(2)}$, und die Sehne pq läuft durch den festen Punkt Q ; folglich beschreibt das Strahlenpaar $PP'P''$, $PQ'Q''$ eine Involution (P) , und wir erhalten den Satz:

Wenn man einen beliebigen Punkt P der Tripelcurve mit allen möglichen Paaren conjugirter Punkte P', Q' derselben verbindet, so bilden diese Strahlenpaare eine Involution, welche dem Punkte P zugehört.

Fig. 103.



Jedes Strahlenpaar geht noch durch ein zweites Paar conjugirter Punkte P'', Q'' der Curve (Nr. 338).

Ebenso erhält man eine dem Punkte Q zugehörige Involution. Die Involutionen (P) und (Q) zweier conjugirter Punkte stehen aber in eigenthümlicher Verbindung mit einander. Nach denselben beiden Paaren conjugirter Punkte der Tripelcurve, nach denen ein Paar aus (P) geht, geht auch ein Paar aus (Q) . Beide Paare führen zu dem Punkte x . Da er der vierte har-

monische ist zu Q in Bezug auf p, q , welche auf $P^{(2)}$ liegen, so liegt er auf der Polare von Q nach $P^{(2)}$, aber ebenso auch auf der von P nach $Q^{(2)}$. Bewegt sich das eine Strahlenpaar durch (P) und das andere durch (Q) , so durchläuft x die eine, wie die andere Polare, die daher identisch sind. Wir haben den Satz, der hier freilich nur für conjugirte Punkte bewiesen, aber allgemein richtig ist:

Die Polare des Punktes Q in Bezug auf den Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ von P ist identisch mit der Polare des Punktes P in Bezug auf den Polarkegelschnitt $Q^{(2)}$ von Q .

Durch die gerade Punktreihe (x) auf dieser Polare werden die beiden Involutionen (P) und (Q) eindeutig auf einander bezogen; (x) ist nämlich der Ort des Schnittpunktes zweier vierten harmonischen der Verbindungslinie PQ zugeordneten Strahlen, die von P und Q ausgehen, indem je ein Strahlenpaar der Involution (P) und das entsprechende Strahlenpaar der Involution (Q) die andern Paare zugeordneter Strahlen bilden; d. h. es sind $P(QxP'Q')$ und $Q(PxP'Q')$

je vier harmonische Strahlen. Durch die Annahme des Punktes x auf der Gerade, welche x durchläuft, werden die entsprechenden Strahlenpaare der Involutionen (P) und (Q) vollständig bestimmt; denn es giebt in (P) nur ein Strahlenpaar, das zu Px und PQ harmonisch ist, und ähnlich in (Q). Hierauf gründet sich eine Erzeugung der Tripelecurve durch zwei in projective Beziehung gesetzte Involutionen.*

Aus dem obigen Ergebnisse, dass zwei Tripel der Tripelecurve 341 allemal auf einem Kegelschnitte liegen, folgt eine charakteristische Eigenschaft eines solchen Tripels in Rücksicht auf die Tripelecurve selbst. Denken wir uns nämlich durch das Tripel $QQ'Q''$ der Tripelecurve insbesondere einen solchen Kegelschnitt gelegt, welcher in Q und Q' dieselben Tangenten wie die Tripelecurve hat, so hat er bereits fünf Punkte mit der Tripelecurve gemein, welche ihn zugleich bestimmen; sein sechster Schnittpunkt mit der Tripelecurve muss daher der dritte Tripelpunkt zu Q und Q' sein, d. h. Q'' ; es müssen folglich auch in Q'' zwei gemeinsame Punkte des Kegelschnitts und der Tripelecurve zusammenfallen oder dieser Punkt muss ein Berührungspunkt beider Curven sein; wir schliessen also:

Die drei Punkte eines Tripels der Tripelecurve liegen stets so, dass ein Kegelschnitt die Tripelecurve in ihnen berühren kann.

Da zwei Eckpunkte eines Tripels der Tripelecurve willkürlich auf derselben angenommen werden dürfen, der dritte Tripelpunkt dann aber vollständig und eindeutig bestimmt ist, so können wir, wenn ein Tripel $QQ'Q''$ als bekannt angesehen wird, nach dem obigen Satze den Inbegriff der übrigen Tripel leicht überschauen, indem wir alle möglichen Kegelschnitte durch die drei Punkte Q, Q', Q'' legen, von denen jeder durch seine drei übrigen Schnittpunkte mit der Tripelecurve immer ein neues Tripel derselben bestimmt. Kennen wir daher zwei Tripel der Tripelecurve $QQ'Q''$ und $Q_1Q_1'Q_1''$ und wollen zu zwei auf der Tripelecurve willkürlich angenommenen Punkten S, S' als zwei Eckpunkten eines Tripels derselben den dritten Eckpunkt S'' finden, so haben wir nur nöthig, die Kegelschnitte bezw. durch die Punkte Q, Q', Q'', S, S' und Q_1, Q_1', Q_1'', S, S' zu legen, welche sich in dem gesuchten Punkte S'' auf der Tripelecurve schneiden müssen. Wenn wir zwei beliebige Paare conjugirter Punkte auf der Tripelecurve P, Q und P', Q' haben, so sind die Schnittpunkte $(PQ', P'Q) = Q''$, $(PP', QQ') = P''$ ebenfalls conjugirt, und diese sechs Ecken des von den vier Geraden:

* Vergl. *Schröter*, Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung (Leipzig 1888) und *Mathem. Annalen* Bd. 5 S. 50, Bd. 6 S. 85.

$$\begin{array}{lll}
 P & P' & P'', \\
 P & Q' & Q'', \\
 P' & Q'' & Q, \\
 P'' & Q & Q'
 \end{array}$$

gebildeten vollständigen Vierseits, welches der Tripelcurve eingeschrieben ist, haben zu ihren conjugirten Punkten beziehungsweise:

$$\begin{array}{lll}
 Q & Q' & Q'', \\
 Q & P' & P'', \\
 Q' & P'' & P, \\
 Q'' & P & P',
 \end{array}$$

welches vier Tripel der Tripelcurve sind.

Um jetzt zu zwei willkürlich auf der Tripelcurve gewählten Punkten S, S' als Eckpunkten eines Tripels der Tripelcurve den dritten Tripelpunkt S'' zu finden, haben wir nur durch die fünf Punkte Q, Q', Q'', S, S' und ebenso durch Q, P', P'', S, S' je den Kegelschnitt zu legen; der vierte Schnittpunkt dieser beiden Kegelschnitte muss der gesuchte Punkt S'' der Tripelcurve sein. Wir haben hierdurch beiläufig folgenden Satz gefunden:

Wenn man ein vollständiges Vierseit hat, so kann man auf vier Arten je drei Ecken herausnehmen, welche ein Dreieck bilden, während die drei übrigen je auf einer Gerade liegen. Umschreibt man diesen vier Dreiecken die Kegelschnitte, welche ausserdem durch zwei feste Punkte gehen, so laufen alle vier Kegelschnitte durch einen und denselben dritten Punkt. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist uns bekannt, nämlich, dass die Kreise, welche den vier Dreiecken eines vollständigen Vierseits umgeschrieben sind, durch einen und denselben Punkt gehen (den Brennpunkt der Parabel, welche dem Vierseit eingeschrieben ist).

Wir können auch sehr einfach den eben erhaltenen Satz direct beweisen. Seien nämlich die drei Paare Gegenecken des vollständigen Vierseits $PQ, P'Q', P''Q''$, so dass die vier Geraden je drei Punkte: P, P', P'' ; P, Q', Q'' ; P', Q'', Q ; P'', Q, Q' enthalten, und ausserdem zwei beliebige Punkte S, S' gegeben, so werden die beiden durch je fünf Punkte Q, Q', Q'', S, S' und P, P', Q'', S, S' gelegten Kegelschnitte einen vierten Punkt S'' gemein haben. Die Seiten der Dreiecke $QQ'Q''$ und $SS'S''$, welche demselben Kegelschnitt eingeschrieben sind, berühren (Nr. 91) einen andern Kegelschnitt und ebenso die Seiten der beiden Dreiecke $PP'Q''$ und $SS'S''$; diese beiden Kegelschnitte fallen aber in einen zusammen, weil sie fünf Tangenten gemein haben, die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$ und die Geraden $Q''Q'P'$ und $Q''Q'P$;

folglich berühren ihn auch $QQ'P''$ und $PP'P''$; d. h. derselbe Kegelschnitt berührt alle vier Seiten des vollständigen Vierseits und die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$; da aber die Seiten der beiden Dreiecke $QP'P''$ und $SS'S''$ einen Kegelschnitt berühren, so liegen auch ihre sechs Ecken auf einem andern Kegelschnitt (Nr. 91); d. h. der durch Q, P', P'', S, S' gelegte Kegelschnitt geht durch S'' und ebenso der durch Q', P'', P, S, S' gelegte Kegelschnitt; also laufen die vier angegebenen Kegelschnitte durch einen und denselben Punkt, was zu beweisen war.

Der Kegelschnitt, welcher die vier Seiten des vollständigen Vierseits und die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$ berührt, kann auch als bestimmt angesehen werden durch zwei beliebige Tripel $QQ'Q''$ und $SS'S''$, deren sechs Seiten ihn berühren; da nun die Gerade, welche die drei zu Q, Q', Q'' conjugirten Punkte P, P', P'' enthält, denselben Kegelschnitt berührt, so muss auch diejenige Gerade, welche die zu S, S', S'' conjugirten Punkte R, R', R'' enthält, ihn berühren, und wir erkennen also, dass die acht Seiten zweier solcher vollständigen Vierseite einen und denselben Kegelschnitt berühren. Dies giebt folgenden Satz:

Die Seiten zweier Tripel der Tripelcurve berühren einen Kegelschnitt, der auch diejenigen beiden Geraden zu Tangenten hat, welche die den Eckpunkten der Tripel conjugirten Punkte der Tripelcurve enthalten, so dass also die Seiten zweier solcher vollständigen Vierseite, wie oben eins ($PQP'Q'P''Q''$) in Betracht gekommen ist, allemal acht Tangenten eines und desselben Kegelschnitts sind.

Von besonderem Interesse für die vorliegende Betrachtung ist es, ³⁴² die beiden willkürlichen Punkte S, S' auf zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits anzunehmen: S auf der Diagonale PQ und S' auf der Diagonale $P'Q'$, dann muss auch der dritte Punkt S'' auf der dritten Diagonale $P''Q''$ liegen. In der That, durch die vier Seiten des vollständigen Vierseits und die Gerade SS' als Tangenten ist derjenige Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ bestimmt, welcher zugleich SS'' und $S'S''$ berührt. Das Diagonaldreieck eines einem Kegelschnitt umgeschriebenen vollständigen Vierseits ist immer ein Tripel in Bezug auf ihn (Nr. 104); folglich bilden die drei Geraden $PQ, P'Q', P''Q''$ ein Polardreieck in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(2)}$. Da nun SS' eine Tangente von $\mathfrak{R}^{(2)}$ ist, welche PQ in S trifft, so wird die andere durch S gehende Tangente der vierte harmonische Strahl sein, der dem SS' in Bezug auf SPQ und den Strahl von S nach $(P'Q', P''Q'')$ zugeordnet ist; in gleicher Weise construiren wir die zweite durch S' gehende Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$. Diese Tangente und die vorige müssen durch den vierten

harmonischen Punkt auf $P''Q''$ gehen, welcher dem Schnitte mit SS' in Bezug auf $(PQ, P''Q'')$ und $(P'Q', P''Q'')$ zugeordnet ist; also ist dieser vierte harmonische Punkt der Schnittpunkt jener beiden Tangenten, d. h. der Punkt S'' . Mithin liegt S'' auf $P''Q''$.

Wählen wir nun, indem wir zu unserer Tripelcurve zurückkehren, auf der die Ecken des vollständigen Vierseits liegen und zwar so, dass die Gegenecken P und Q , P' und Q' , P'' und Q'' je conjugirt sind, die beiden Punkte S und S' so, dass S der dritte Schnittpunkt der Gerade PQ und S' der dritte Schnittpunkt von $P'Q'$ mit der Curve ist, dann muss S'' auf der Gerade $P''Q''$ liegen und zugleich auf der Tripelcurve, weil S, S', S'' ein Tripel derselben bilden; folglich ist S'' der dritte Schnittpunkt der Gerade $P''Q''$; wir erhalten hieraus folgenden Satz:

Wenn man ein beliebiges Tripel $QQ'Q''$ der Tripelcurve hat, so treffen die Seiten desselben $Q'Q''$, $Q''Q$, QQ' die Curve je zum dritten Male in drei neuen Punkten P, P', P'' , welche die conjugirten Punkte der Tripelcurve zu den ersteren sind und in gerader Linie liegen; die drei Verbindungslinien $PQ, P'Q', P''Q''$ treffen aber die Tripelcurve in drei neuen Punkten S, S', S'' , welche ebenfalls ein Tripel bilden.

Da wir ferner wissen, dass die Tangenten in zwei conjugirten Punkten P, Q an der Tripelcurve sich in einem dritten Punkte R derselben (dem gemeinsamen Tangentialpunkte) treffen und die Punkte P, Q, R ein Tripel bilden, so muss der conjugirte Punkt zu R der dritte Schnittpunkt S der Gerade PQ mit der Tripelcurve sein. Die dritten Schnittpunkte der Tangenten in P, P', P'' oder in Q, Q', Q'' mit der Tripelcurve sind also die drei Punkte R, R', R'' und conjugirte Punkte zu den obigen Punkten S, S', S'' ; da diese ein Tripel bilden, so müssen jene auf einer geraden Linie liegen; d. h.:

Die drei Tangenten der Tripelcurve in den drei Eckpunkten eines Tripels treffen sie in drei neuen Punkten, welche auf einer Gerade liegen.

Die Tangenten der Tripelcurve in den Schnittpunkten mit einer Gerade schneiden die Curve in drei Punkten, die wiederum auf einer Gerade liegen.

Diese Sätze gestatten ein eigenthümliches Fortschreiten, indem man einerseits von einer Gerade $PP'P''$ zu einer folgenden $RR'R''$ oder andererseits von einem Tripel $QQ'Q''$ zu einem folgenden $SS'S''$ übergeht und in beiden Fällen dies fortsetzt; die Frage, ob ein Cyklus sich ergibt oder der Prozess ins Unendliche fortläuft, ist von hohem Interesse, erfordert jedoch tiefer gehende Untersuchungen.*

* Vgl. Steiner, Journ. f. Math. Bd. 32 S. 182 u. 300 u. Ges. Werke Bd. 2 S. 371, 377.

Nehmen wir zwei beliebige Tripel der Tripelcurve $QQ'Q'', Q_1Q_1'Q_1''$ ³⁴³ und ihre conjugirten Punkte $P, P', P'', P_1, P_1', P_1''$, so haben wir zwei vollständige Vierseite, die der Tripelcurve eingeschrieben sind, und deren acht Seiten, wie wir gesehen haben, einen und denselben Kegelschnitt berühren; diese acht Geraden seien:

$$\begin{array}{ll} Q'Q''P = \mathfrak{A}, & Q_1'Q_1''P_1 = \mathfrak{A}_1, \\ Q''Q'P' = \mathfrak{B}, & Q_1''Q_1P_1' = \mathfrak{B}_1, \\ QQ'P'' = \mathfrak{C}, & Q_1Q_1'P_1'' = \mathfrak{C}_1, \\ PP'P'' = \mathfrak{D}, & P_1P_1'P_1'' = \mathfrak{D}_1. \end{array}$$

Zugleich haben wir acht Tripel der Tripelcurve, nämlich:

$$\begin{array}{ll} P'P''Q, & \text{und} & P_1'P_1''Q_1, \\ P''PQ', & & P_1''P_1Q_1', \\ PP'Q'', & & P_1P_1'Q_1'', \\ QQ'Q'', & & Q_1Q_1'Q_1''. \end{array}$$

Da die Seiten zweier Tripeldreiecke immer sechs Tangenten eines Kegelschnitts sind, so haben wir ein *Brianchon'sches* Sechsseit $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{B}_1$, dessen Hauptdiagonalen $PP_1, P'P_1', (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$ sich in einem Punkte schneiden; der Schnittpunkt $(PP_1, P'P_1')$ liegt also in der Gerade $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$. Andererseits haben wir das *Brianchon'sche* Sechsseit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1$, dessen Hauptdiagonalen $QQ_1, Q'Q_1', (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$ sich ebenfalls in einem Punkte treffen, also liegt auch der Schnittpunkt $(QQ_1, Q'Q_1')$ in der Gerade $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$; folglich ist die Verbindungslinie $[(PP_1, P'P_1'), (QQ_1, Q'Q_1')]$ identisch mit der Gerade $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$.

In gleicher Weise zeigen die beiden *Brianchon'schen* Sechsseite $\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, dass die Verbindungslinie $[(P'P_1', P''P_1''), (Q'Q_1', Q''Q_1'')]$ identisch mit der Gerade $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1)$ ist, und endlich die beiden *Brianchon'schen* Sechsseite $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$, dass die Verbindungslinie $[(P''P_1'', PP_1), (Q''Q_1'', QQ_1)]$ identisch mit der Gerade $(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{C}_1)$ ist. Aus dem *Brianchon'schen* Sechsseit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1$ folgt aber, dass die drei Hauptdiagonalen $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1), (\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1), (\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{C}_1)$ sich in einem Punkte treffen, also auch die mit ihnen identischen durch die $P, P', P'', Q, Q', Q'', P_1, \dots$ ausgedrückten Geraden; sehen wir die letzteren an, so erkennen wir, dass sie die Verbindungslinien correspondirender Ecken zweier Dreiseite sind, von denen das eine von den Geraden $PP_1, P'P_1', P''P_1''$, das andere von den Geraden $QQ_1, Q'Q_1', Q''Q_1''$ gebildet wird; folglich müssen die correspondirenden Seiten selbst sich in drei Punkten treffen, die auf einer Gerade liegen, d. h. die drei Schnittpunkte:

$$P_2 = (PP_1, QQ_1), \quad P_2' = (P'P_1', Q'Q_1'), \quad P_2'' = (P''P_1'', Q''Q_1'')$$

liegen auf einer Gerade; diese drei Punkte sind nach dem Früheren nichts anderes, als die dritten Schnittpunkte der Geraden $PP_1, P'P_1', P''P_1''$ mit der Tripelcurve; also haben wir den Satz:

Schneidet irgend eine Gerade die Tripelcurve in den drei Punkten P, P', P'' und eine zweite Gerade in P_1, P_1', P_1'' , so treffen die drei Geraden $PP_1, P'P_1', P''P_1''$ die Tripelcurve in drei neuen Punkten P_2, P_2', P_2'' , welche wiederum auf einer Gerade liegen. (Die Zuordnung ist dabei ganz willkürlich.)

Oder:

Hat man irgend zwei Tripel der Tripelcurve $QQ'Q''$ und $Q_1Q_1'Q_1''$ (die allemal auf einem Kegelschnitt liegen), so treffen die drei Verbindungslinien $QQ_1, Q'Q_1', Q''Q_1''$ die Tripelcurve in drei neuen Punkten, die auf einer Gerade liegen. (Die Zuordnung ist dabei ganz gleichgültig.) Da die drei Punkte:

$$P_2 = (PP_1, QQ_1), \quad P_2' = (P'P_1', Q'Q_1'), \quad P_2'' = (P''P_1'', Q''Q_1'')$$

auf einer Gerade liegen, so müssen ihre conjugirten:

$$Q_2 = (PQ_1, QP_1), \quad Q_2' = (P'Q_1', Q'P_1'), \quad Q_2'' = (P''Q_1'', Q''P_1'')$$

ein Tripel bilden, also:

Hat man irgend ein Tripel $QQ'Q''$ der Tripelcurve und eine beliebige Gerade, welche ihr in den Punkten P_1, P_1', P_1'' begegnet, so treffen die drei Verbindungslinien $QP_1, Q'P_1', Q''P_1''$ die Tripelcurve in drei neuen Punkten Q_2, Q_2', Q_2'' , welche wiederum ein Tripel desselben bilden. (Die Zuordnung ist dabei ganz gleichgültig.)

Aus den verschiedenen Zuordnungen, welche hierbei möglich sind, werden sich neue Beziehungen ergeben, deren Aufsuchung hier zu weit führen würde. Der vorige Satz lässt aber noch einige andere Folgerungen zu, die wir kurz hervorheben wollen.

Da von den Schnittpunkten P, P', P'' und P_1, P_1', P_1'' zweier Geraden mit der Tripelcurve die Verbindungslinien $PP_1, P'P_1', P''P_1''$ der Curve in drei neuen Punkten P_2, P_2', P_2'' begegnen, welche wieder auf einer Gerade liegen, so werden auch die Verbindungslinien $PP_1', P'P_1$ und $P''P_1''$ in drei Punkten R_2, R_2', R_2'' der Tripelcurve begegnen, die auf einer Gerade liegen, oder anders ausgesprochen:

Durch vier Punkte P, P', P_1, P_1' einer Tripelcurve lassen sich drei Geradenpaare legen; jedes derselben begegnet der Curve in einem neuen Punktepaar, dessen Sehne man ziehe; diese drei Sehnen laufen durch einen und denselben Punkt P_2'' der Tripelcurve. Wir können die drei Geradenpaare, welche durch vier beliebig auf der Tripelcurve gewählte Punkte

gelegt sind, als drei Individuen des Kegelschnittbüschels $[PP'P_1P_1']$ auffassen und die drei zugehörigen Durchbohrungssehnen als drei Individuen des Strahlbüschels $[P_2'']$. Die Elemente dieser beiden Gebilde können wir projectiv auf einander beziehen, wozu die drei bekannten Paare entsprechender Elemente ausreichend und erforderlich sind. Dann wird sich zu jedem Kegelschnitt des Büschels ein bestimmter entsprechender Strahl des Strahlbüschels construiren lassen (Nr. 161) und umgekehrt, und der Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente dieser beiden Gebilde ist eine allgemeine Curve dritter Ordnung. Da sie mit der Tripelcurve bereits elf Punkte gemeinschaftlich hat, so fällt sie ganz mit ihr zusammen.* Umgekehrt schliessen wir hieraus den Satz, der allgemeiner ist als der von Nr. 340:

Jeder durch vier Punkte P, P', P_1, P_1' einer Tripelcurve gelegte Kegelschnitt begegnet derselben in zwei neuen Punkten, deren Sehne durch einen und denselben festen Punkt P_2'' der Curve hindurchgeht.

Oder:

Liegen sechs Punkte $P, P', P_1, P_1', P_2, P_2'$ einer Tripelcurve auf einem Kegelschnitt, so schneiden drei sie verbindende Sehnen PP', P_1P_1', P_2P_2' die Curve in drei Punkten einer Gerade. (Die Zuordnung ist dabei ganz gleichgültig.) Und auch umgekehrt:

Zieht man durch jeden von drei in einer Gerade befindlichen Punkten einer Tripelcurve je einen Strahl, welcher derselben in zwei neuen Punkten begegnet, so liegen diese sechs neuen Punkte auf einem Kegelschnitt.

Da endlich der durch die vier Punkte P, P', P_1, P_1' der Tripelcurve gelegte Kegelschnitt zwei Punkte P_2, P_2' auf ihr ausschneidet, deren Sehne durch den festen Punkt P_2'' läuft, und da die zu P_2 und P_2' conjugirten Punkte Q_2, Q_2' nach Nr. 334 ebenfalls eine Sehne Q_2Q_2' geben, welche durch P_2'' läuft, so liegen auch $P, P', P_1, P_1', Q_2, Q_2'$ auf einem Kegelschnitt; aus demselben Grunde aber auch $P, P', Q_1, Q_1', Q_2, Q_2'$ und endlich auch $Q, Q', Q_1, Q_1', Q_2, Q_2'$; wir erhalten also folgenden Satz:

Liegen sechs Punkte der Tripelcurve auf einem Kegelschnitt, so liegen auch die sechs conjugirten Punkte auf einem Kegelschnitt.

Wir kehren jetzt zur Betrachtung des Kegelschnittnetzes zurück. 344

Wir fanden: wenn wir zu den Bedingungen, welchen alle Kegelschnitte eines Netzes zu genügen haben, dass nämlich $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3$ für sie conjugirt seien, noch die weitere Bedingung hinzufügen, dass auch $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ conjugirt seien, so bestimmen wir ein Büschel von

* Dabei werden freilich Sätze aus der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung als bekannt angenommen, die im Vorangehenden nicht bewiesen sind.

Kegelschnitten im Netze; und sollen auch noch $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1$ conjugirt sein, so genügt dem wiederum nur ein Kegelschnitt im Büschel. *Folglich giebt es im Netze nur einen Kegelschnitt, für welchen auch \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} , \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{Q}_1 conjugirt sind.* Lassen wir \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} in p , \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{Q}_1 in p_1 sich vereinigen, so bedeutet das, dass der Kegelschnitt durch p und p_1 geht. *Es giebt daher im Netze nur einen Kegelschnitt, der durch zwei gegebene Punkte geht.* Freilich müssen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}; \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1$ vorhin und p, p_1 jetzt beliebig gegeben sein. Darunter ist Folgendes zu verstehen: Wir haben das Netz durch die drei Paare conjugirter Punkte $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3$ bestimmt, wissen aber, dass einfach unendlich viele Paare conjugirter Punkte P, Q , — die sämmtlich auf der Tripelcurve des Netzes liegen — allen Kegelschnitten des Netzes gemeinsam sind. Mit keinem dieser Paare darf $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ identisch sein, wenn dies Paar ein Büschel in dem Netz bestimmen soll. Die Kegelschnitte des durch $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3; \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ bestimmten Büschels haben dann sogar doppelt unendlich viele Paare conjugirter Punkte gemeinsam, da jeder Punkt der Ebene in Bezug auf das Büschel einen conjugirten hat. Das Paar $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1$ darf wiederum nicht eins von diesen Paaren sein.

Die drei Paare, die ein Netz bestimmen, müssen auch in beliebiger Lage sich befinden; d. h. das dritte Paar P_3, Q_3 darf nicht dasjenige sein, das aus den beiden ersten sich ergibt: $(P_1 P_2, Q_1 Q_2), (P_1 Q_2, Q_1 P_2)$.

Alle Kegelschnitte, welche die beiden ersten Paare conjugirter Punkte gemeinsam haben und infolge dessen auch das dritte, bilden ein *dreifach* unendliches System (vergl. Nr. 352).

Aehnlich ist es in dem speciellen Falle der beiden Punkte p, p_1 . Der Punkt p bestimmt im Netze ein Büschel, dessen Kegelschnitte ausser ihm noch drei Punkte gemeinsam haben (von denen mindestens einer reell ist); p_1 darf keiner von diesen sein.

Lassen wir die beiden Punkte p, p_1 auf einer gegebenen Gerade unendlich nahe werden, so erhellt, dass *es in dem Netze einen Kegelschnitt giebt, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt*; so wird G_∞ in jedem ihrer Punkte von einer Parabel des Netzes berührt.

345 Wir erhalten nun auch Aufschluss über besondere in einem Netze enthaltene Kegelschnitte. Es giebt *unendlich viele gleichseitigen Hyperbeln* in dem Netze, welche ein besonderes Büschel des Netzes bilden; nehmen wir die beiden obigen Punkte p, p_1 im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen an, so geht durch sie eine gleichseitige Hyperbel des Netzes; ein zweites Paar unendlich entfernter Punkte in zwei rechtwinkligen Richtungen bestimmt eine zweite gleichseitige Hyperbel; diese beiden bestimmen, weil ihre Schnittpunktepaare mit

G_∞ die Involution I_∞ als Schnittinvolution ihres Büschels festlegen, ein dem Netze angehöriges Büschel, dessen sämtliche Curven gleichseitige Hyperbeln sind. Weiter giebt es im allgemeinen keine gleichseitige Hyperbel in dem Netze; denn käme noch eine dritte vor, welche nicht dem vorigen Büschel angehörte, so würde sie mit jeder der früheren ein neues Büschel von lauter gleichseitigen Hyperbeln erzeugen, und es müssten daher alle Kegelschnitte des Netzes gleichseitige Hyperbeln sein. Sind daher die Kegelschnitte A, B, C , welche wir als gegeben ansehen, nicht alle drei gleichseitige Hyperbeln, so giebt es in dem Netze nur ein einziges Büschel gleichseitiger Hyperbeln; wenn aber die drei gegebenen Kegelschnitte A, B, C selbst gleichseitige Hyperbeln sind, so besteht das Netz aus lauter gleichseitigen Hyperbeln und hat daher einen speciellen Charakter.

Unter den Kegelschnitten des Netzes giebt es ferner im allgemeinen unendlich viele Parabeln; jeder Punkt von G_∞ ist, wie wir eben erwähnten, der unendlich ferne Punkt einer dem Netze angehörigen Parabel. Zwei Parabeln des Netzes, deren unendlich entfernte Punkte p, π in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, bestimmen ein Büschel des Netzes, in welchem nothwendig ein Kreis vorkommen muss (Nr. 163). Dies ist im allgemeinen der einzige Kreis unter den Kegelschnitten des Netzes; denn construiren wir ein anderes Paar Parabeln, deren unendlich entfernte Punkte p' und π' ebenfalls in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so gehört zu ihrem Büschel derselbe Kreis; seien nämlich P und Π die beiden ersten, P' und Π' die beiden andern Parabeln, so können wir P, Π, P' für die drei das Netz erzeugenden Kegelschnitte A, B, C setzen; in dem Büschel (P, Π) ist der Kreis \mathfrak{K} enthalten; \mathfrak{K} und P' bestimmen ein zweites Büschel des Netzes, in welchem nothwendig noch eine Parabel ausser P' enthalten sein muss, welche ihren unendlich entfernten Punkt in einer rechtwinkligen Richtung zu derjenigen des unendlich entfernten Punktes von P' hat, also in π' , und die einzige Parabel des Netzes, die ihren unendlich fernen Punkt in π' hat, ist Π' ; somit gehört \mathfrak{K} auch zum Büschel (P', Π') .

Endlich kommen unter den Kegelschnitten des Netzes auch Geraden- 346
paare in unendlicher Anzahl vor, wie wir schon bemerkt haben; ihre Doppelpunkte bilden die Tripeleurve. Jedes Büschel enthält drei Geradenpaare, von denen mindestens eins reell ist. Der von allen den Geraden dieser Paare umhüllte Ort ist eine Curve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$. Wenn nämlich eine von diesen Geraden durch einen Punkt p geht, so muss das Geradenpaar, zu dem sie gehört, in dem Büschel enthalten sein, das der Punkt p bestimmt; in diesem giebt es drei Ge-

radenpaare, von denen jedes eine seiner Geraden durch p schiebt. Vermöge der fächerförmigen Erzeugung des Netzes aus drei Kegelschnitten A, B, C können wir die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ in der Weise construiren, dass wir einen veränderlichen Kegelschnitt \mathfrak{A} das Büschel (B, C) durchlaufen lassen und für die beiden Kegelschnitte A und \mathfrak{A} jedesmal die sechs gemeinschaftlichen Secanten ermitteln, welche den gesuchten Ort $\mathfrak{R}^{(3)}$ umhüllen.

Hieraus ergibt sich folgender Satz, der zu vielen interessanten speciellen Fällen Veranlassung bietet:

Drei beliebige Kegelschnitte haben, zu zweien zusammengefasst, dreimal je sechs gemeinschaftliche Secanten; diese achtzehn Geraden sind Tangenten einer und derselben Curve dritter Klasse.

Zu der Tripelcurve hat die gefundene Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ eine leicht erkennbare Beziehung; eine gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte des Netzes hat nämlich die Eigenschaft, dass die beiden Involutionen, welche ihr in Bezug auf beide Kegelschnitte zugehören, identisch sind; nehmen wir nun irgend einen dritten Kegelschnitt des Netzes, welcher nicht mit den beiden vorigen demselben Büschel angehört, so gehört in Bezug auf ihn jener Gerade eine zweite Involution zu, und die beiden auf einander liegenden Involutionen haben ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte P, Q . Da dies conjugirte Punkte für drei Kegelschnitte des Netzes sind, welche nicht demselben Büschel angehören, so sind es conjugirte Punkte für sämtliche Kegelschnitte des Netzes, also ein Paar conjugirter Punkte der Tripelcurve. Eine gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte des Netzes (oder eine Gerade eines ihm angehörigen Geradenpaares) ist mithin stets die Verbindungslinie zweier conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve, und auch umgekehrt; denn ist p ein Punkt der Verbindungslinie irgend eines Paares conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve, so gehen alle Kegelschnitte des Büschels im Netze, das er bestimmt, durch den Punkt π , der zu ihm in Bezug auf P, Q harmonisch ist; daher ist $p\pi$ oder PQ gemeinsame Secante aller Kegelschnitte dieses Büschels. Wir haben also folgenden Satz:

Die Verbindungslinien sämtlicher Paare conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve umhüllen eine Curve dritter Klasse, welche identisch ist mit derjenigen, die von den Geraden aller Geradenpaare, welche unter den Kegelschnitten des Netzes auftreten, berührt wird.

Aus der Construction der durch den Punkt p gehenden drei Strahlen, welche conjugirte Punkte P, Q verbinden, oder der drei Tangenten aus p an die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ folgt noch, indem die Doppelpunkte

der drei Geradenpaare des durch p bestimmten Büschels ein Tripel des Netzes und der Tripelcurve bilden:

Solche drei Verbindungsstrahlen conjugirter Punkte P, Q , welche durch einen gegebenen Punkt p der Ebene gehen, d. h. die drei aus p an die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ gelegten Tangenten treffen die Tripelcurve noch in drei neuen Punkten, welche ein Tripel derselben bilden.

Die Verbindungslinie PQ zweier conjugirter Punkte der Tripelcurve schneidet jeden Kegelschnitt des Netzes in zwei Punkten, welche harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf P, Q , also in einem Punktepaare einer festen Involution, deren Doppelpunkte P, Q sind. Und umgekehrt, wenn eine Gerade von allen Kegelschnitten des Netzes in den Punktepaaren einer Involution geschnitten wird, so sind deren Doppelpunkte conjugirt in Bezug auf das Netz. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Eine Gerade von solcher Beschaffenheit, dass sie drei beliebig gegebene Kegelschnitte A, B, C in drei Punktepaaren einer Involution trifft, umhüllt eine Curve dritter Klasse $\mathfrak{R}^{(3)}$, welche zugleich die achtzehn gemeinschaftlichen Secanten je zweier der gegebenen drei Kegelschnitte berührt. Die Doppelpunkte der Involutionen auf allen solchen Geraden liegen auf einer Curve dritter Ordnung, der Tripelcurve der drei Kegelschnitte A, B, C und ihres Netzes.

Auch die übrigen Kegelschnitte des Netzes schneiden jede dieser Geraden in Punktepaaren ihrer Involution.

Es ist leicht, den Berührungspunkt einer Gerade PQ mit der 347
von ihr eingehüllten Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ zu ermitteln; denken wir uns ein der Tripelcurve eingeschriebenes vollständiges Vierseit, wie es früher in Betracht gezogen wurde: $PQ, P'Q', P''Q''$, dessen drei Paare Gegenecken aus conjugirten Punkten der Tripelcurve bestehen, in der Weise verändert, dass wir ein Paar PQ festhalten und das zweite Paar $P'Q'$ ihm allmählich nähern, indem wir zuletzt P' mit P und also auch Q' mit Q zusammenfallen lassen, dann geht P'' in den Schnittpunkt der beiden Tangenten der Tripelcurve in P und Q , und Q'' also in den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie PQ mit der Tripelcurve über; was auch aus: $Q'' = (PQ', P'Q)$ folgt. Um nun den Schnittpunkt $(PQ, P'Q')$ für den Grenzfall des Zusammenfallens von P, Q mit P', Q' , wo er Berührungspunkt von PQ wird, zu ermitteln, haben wir nur die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierseits zu berücksichtigen. Auf der Diagonale PQ desselben ist $(PQ, P'Q')$ stets harmonisch in Bezug auf P, Q zu dem Punkte $(PQ, P''Q'')$; auf der Grenze fällt dieser Punkt in Q'' , der ja, wie eben gesagt, auf PQ in den dritten Schnittpunkt mit der Tripelcurve zu liegen kommt. Also: *Die ver-*

änderliche Verbindungslinie PQ zweier conjugirter Punkte der Tripelcurve berührt die von ihr eingehüllte Curve dritter Klasse in dem vierten harmonischen Punkt, welcher dem dritten Schnittpunkt von PQ mit der Tripelcurve zugeordnet ist in Bezug auf P und Q .

Dieser dritte Schnittpunkt Q'' der Verbindungslinie PQ mit der Tripelcurve hat zu seinem conjugirten Punkte P'' den gemeinschaftlichen Tangentialpunkt für die beiden conjugirten Punkte P und Q ; hieraus folgt die Construction der Tangente in einem beliebigen Punkte P der Tripelcurve: Man suche zu P den conjugirten Punkt Q , ferner den dritten Schnittpunkt Q'' der Verbindungslinie PQ mit der Tripelcurve, endlich den conjugirten Punkt P'' zu Q'' , dann ist PP'' die gesuchte Tangente.

Schneidet die Verbindungslinie PQ zweier conjugirten Punkte der Tripelcurve dieselbe in Q'' , so geht durch Q'' ausser PQ und $Q''P''$ noch eine Tangente an $\mathfrak{R}^{(3)}$, also ein Strahl, welcher $C^{(3)}$ in zwei conjugirten Punkten trifft. Werden P, Q und diese beiden Punkte mit P'' verbunden, so erhalten wir die Tangenten in ihnen an $C^{(3)}$. Da nun jedes dieser Punktepaare mit P'' zusammen ein Tripel der Tripelcurve bildet und zwei Tripel immer auf einem Kegelschnitt liegen, so folgt der Satz:

Aus einem Punkte (P'') der Tripelcurve lassen sich ausser der Tangente in ihm selbst noch vier andere Tangenten an dieselbe legen; die vier Berührungspunkte liegen mit dem ursprünglichen Punkte auf einem Kegelschnitt, welcher die Tripelcurve in dem letzteren berührt.

Dies ist nur ein Theil des oben (Nr. 340) ausgesprochenen Satzes über den Polarkegelschnitt.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Tripelcurve $C^{(3)}$ und die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ sich in denjenigen Punkten, in welchen sie sich treffen, auch berühren, d. h. dieselben Tangenten haben, dass also die Schnittpunkte beider Curven paarweise zusammenfallen. Denn es sei Q ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ und in ihm die Tangente an die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ gezogen, welche die Tripelcurve noch in P und P' schneide; es gehört dann entweder Q zu den beiden conjugirten Punkten, welche diese Tangente von $\mathfrak{R}^{(3)}$ verbindet, und P sei dann der andere; oder die beiden Punkte P und P' sind diese conjugirten. Im ersten Falle ist Q als Berührungspunkt der vierte harmonische Punkt, der dem dritten Schnitte P' in Bezug auf die beiden conjugirten P, Q zugeordnet ist. Also muss noch einer von den Punkten P, P' in Q fallen und zwar der nicht zu Q conjugirte P' , denn conjugirte Punkte P, Q fallen nicht zusammen (Nr. 334). Im zweiten Falle ist Q dritter Schnitt, und da er mit dem Berührungs-

punkte sich vereinigt, so muss auch noch einer der beiden andern zugeordneten Punkte P, P' mit ihnen zusammenfallen. Jedenfalls haben sich zwei von den Punkten, in denen die Tangente von $\mathfrak{R}^{(3)}$ in Q die Tripelcurve schneidet, in Q vereinigt, so dass sie auch Tangente dieser Curve ist.

Nennen wir nun einen solchen Berührungspunkt der beiden Curven Q_0 ; der dritte Schnitt der gemeinsamen Tangente mit $C^{(3)}$ ist der ihm conjugirte Punkt P_0 . Nun ist früher (Nr. 342) bewiesen worden, dass die Tangente in P_0 die Tripelcurve $C^{(3)}$ zum dritten Male in demjenigen Punkte schneidet, der conjugirt ist dem dritten Schnittpunkte von $P_0 Q_0$ mit $C^{(3)}$; da dieser aber Q_0 selbst ist, so ist sein conjugirter wieder P_0 , d. h. die Tangente in P_0 schneidet die Tripelcurve $C^{(3)}$ in drei zusammenfallenden Punkten; sie ist daher eine *Wendetangente* und ihr Berührungspunkt P_0 ein *Wendepunkt* der Tripelcurve.

Die weitere Ausführung dieser Betrachtung lässt für die Tripel- 348
curve die Anzahl und gegenseitige Lage der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung erkennen.

Es sei Q_0' ein zweiter Berührungspunkt der beiden Curven und P_0' sein conjugirter, welcher ebenfalls ein Wendepunkt von $C^{(3)}$ ist. Dann folgt aus den beiden Paaren conjugirter Punkte $P_0 Q_0, P_0' Q_0'$ ein drittes Paar:

$$(Q_0 Q_0', P_0 P_0') = P_0'', \quad (Q_0 P_0', P_0 Q_0') = Q_0'',$$

und P_0'', Q_0'' liegen auf der Curve $C^{(3)}$, während ihre Verbindungslinie die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ berührt. Ferner wissen wir, dass Q_0, Q_0', Q_0'' ein Tripel der Tripelcurve bilden und die Tangenten in diesen Punkten ihr in drei neuen Punkten begegnen müssen, welche auf einer Gerade liegen; da aber die Tangente in Q_0 die $C^{(3)}$ in P_0 und die Tangente in Q_0' die $C^{(3)}$ in P_0' trifft, und da P_0, P_0', P_0'' in einer Gerade liegen, so muss die Tangente in Q_0'' der $C^{(3)}$ in P_0'' begegnen (Nr. 342). Von den drei Schnittpunkten der Verbindungslinie $P_0'' Q_0''$ mit der Curve $C^{(3)}$ fallen also zwei in Q_0'' zusammen; der Berührungspunkt des Strahles $P_0'' Q_0''$ mit der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ muss daher auch nach Q_0'' fallen, oder Q_0'' muss ein dritter Berührungspunkt der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ sein, folglich P_0'' ein dritter Wendepunkt der Curve $C^{(3)}$; wir haben daher folgende beiden Sätze:

Die Verbindungslinie zweier Wendepunkte der Tripelcurve trifft dieselbe stets in einem dritten Wendepunkt; und:

Aus zwei Berührungspunkten der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ kann man allemal einen dritten ableiten, indem man sie als Punkte eines Tripels

ansicht und den zugehörigen dritten Tripelpunkt construirt, wie oben angegeben ist.

Die Anzahl der Wendepunkte von $C^{(3)}$ ist gleich der Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathcal{R}^{(3)}$; da letztere von der dritten Klasse ist, so ist sie allgemein von der sechsten Ordnung, schneidet also $C^{(3)}$ in $6 \cdot 3 = 18$ Punkten, die paarweise zusammenfallen.* *Die Tripelcurve hat also neun Wendepunkte.*

Da die Wendepunkte zu je dreien auf geraden Linien liegen, so wird, wenn wir einen Wendepunkt herausnehmen und ihn mit vier anderen verbinden, jede dieser Verbindungslinien noch einen der übrigen vier Wendepunkte enthalten müssen; *durch jeden Wendepunkt gehen also vier gerade Linien, deren jede drei Wendepunkte enthält. Danach giebt es $\frac{9 \cdot 4}{3} = 12$ gerade Linien, auf denen je drei Wendepunkte liegen.*

Nehmen wir nun drei Wendepunkte, welche in gerader Linie liegen, heraus, so gehen von den zwölf Geraden, die überhaupt vorhanden sind, durch diese Wendepunkte nur zehn, nämlich durch jeden von ihnen die erste Gerade selbst und noch drei andere; es bleiben also noch zwei Geraden übrig, die durch keinen der drei ersten Wendepunkte gehen. Nehmen wir von den letzteren eine, so gehen durch ihre drei Wendepunkte und die drei Wendepunkte der ersten Gerade nur elf von den sämtlichen zwölf, nämlich ausser den beiden Geraden selbst nur die neun Verbindungslinien je eines Wendepunktes der ersten mit einem Wendepunkte der zweiten Gerade; es bleibt mithin als zwölfte Gerade noch eine solche übrig, welche die drei letzten Wendepunkte enthält, die auf keiner der beiden ersten Geraden liegen. So erhalten wir ein *Wendepunktendreieck*, von dem jede Seite drei verschiedene, also die drei Seiten sämtliche neun Wendepunkte enthalten. Solcher Wendepunktendreiecke giebt es vier, und sie werden erhalten, indem man der Reihe nach mit denjenigen vier Geraden beginnt, die sich in einem Wendepunkte treffen. Bezeichnen wir die drei Wendepunkte auf der ersten Gerade w_1 mit:

$$a_1^1, \quad a_1^2, \quad a_1^3,$$

auf der zweiten w_2 mit:

$$a_2^1, \quad a_2^2, \quad a_2^3,$$

so liegen die drei übrigen Wendepunkte auf der dritten w_3 :

$$a_3^1, \quad a_3^2, \quad a_3^3.$$

* Auch hier werden nicht bewiesene Sätze aus der allgemeinen Curventheorie vorausgesetzt.

Jede weitere Wendepunkts-Gerade hat ihre drei Wendepunkte bez. auf diesen drei Geraden w . Die Verbindungslinie der Punkte a_1^1, a_2^1 auf w_1, w_2 geht durch einen Wendepunkt der dritten Gerade w_3 , nehmen wir an: a_3^1 . Aus dieser Gerade $a_1^1 a_2^1 a_3^1$ kann man nun ebenso ein Wendepunktsdreieck ableiten, wie oben aus $a_1^1 a_1^2 a_1^3$, d. h. unter den acht übrigen Geraden muss es zwei geben, welche mit ihr zusammen alle neun Wendepunkte enthalten; diese seien $a_1^2 a_2^2 a_3^2$ und $a_1^3 a_2^3 a_3^3$. Jetzt sei $a_1^1 a_2^2$ gezogen, dritter Punkt kann nur a_3^3 sein, denn a_3^1 liegt schon mit a_1^1 und a_2^1 , a_3^2 aber mit a_2^2 und a_1^2 in gerader Linie; ebenso zeigt sich, dass $a_1^1 a_2^3$ durch a_3^3 geht. Vervollständigt man $a_1^1 a_2^2 a_3^3$ zum Wendepunktsdreieck, so kann a_1^2 von w_1 nur mit a_2^2 oder mit a_2^3 von w_2 verbunden eine zweite Wendepunkts-Gerade dieses Dreiecks geben. Im ersteren Falle aber kann der dritte Punkt auf w_3 nicht a_3^1 sein, denn dieser Punkt liegt schon mit a_2^1 und a_1^1 in gerader Linie, ebenso nicht a_3^2 , weil schon a_3^2, a_1^2, a_2^2 in gerader Linie liegen, und auch nicht a_3^3 , weil dieser schon der ersten Seite des zu construirenden Dreiecks angehört. Demnach ist a_1^2 mit a_2^3 zu verbinden, und dritter Punkt kann nur a_3^3 sein, da a_3^2, a_1^2, a_2^2 in gerader Linie liegen; die zweite Seite ist also $a_1^2 a_2^3 a_3^3$ und demnach die dritte $a_1^3 a_2^1 a_3^2$. Bei der Vervollständigung von $a_1^1 a_2^2 a_3^3$ bleiben nur $a_1^2 a_2^1 a_3^3, a_1^3 a_2^2 a_3^1$ übrig; und die zwölf Wendepunkts-Geraden, gruppirt zu den vier Wendepunktsdreiecken, sind daher:

$$\begin{array}{llll} a_1^1 a_2^1 a_3^1, & a_1^1 a_2^1 a_3^1, & a_1^1 a_2^2 a_3^3, & a_1^1 a_2^3 a_3^2, \\ a_1^2 a_2^2 a_3^2, & a_1^2 a_2^2 a_3^2, & a_1^2 a_2^3 a_3^1, & a_1^2 a_2^1 a_3^3, \\ a_1^3 a_2^3 a_3^3, & a_1^3 a_2^3 a_3^3, & a_1^3 a_2^1 a_3^2, & a_1^3 a_2^2 a_3^1. \end{array}$$

Diese Lagenverhältnisse führen auf den Zusammenhang der 349 Wendepunkte der Tripelcurve mit äquianharmonischen Systemen und geben dadurch Aufschluss über die Realität der Wendepunkte. Nehmen wir von dem ersten der vier Wendepunktsdreiecke die Seite, welche die drei Wendepunkte a_1^1, a_2^1, a_3^1 und die beiden Ecken A_{12}, A_{13} des Dreiecks enthält, dessen dritte Ecke A_{23} sei, und projiciren die fünf Punkte nach einander aus den Punkten a_2^1, a_2^2, a_2^3 , welche auf der zweiten Seite liegen, auf die dritte Seite $A_{13} A_{23}$, so erhalten wir durch Projection

$$\begin{array}{l} \text{aus } a_2^1 \text{ die Punkte: } a_3^1, a_3^2, a_3^3, A_{23}, A_{13}, \\ \text{,, } a_2^2 \text{ ,, ,, : } a_3^2, a_3^3, a_3^1, A_{23}, A_{13}, \\ \text{,, } a_2^3 \text{ ,, ,, : } a_3^3, a_3^1, a_3^2, A_{23}, A_{13}; \end{array}$$

diese drei Gruppen sind projectiv, da sie zu derselben Gruppe perspectiv sind. Daraus folgt, dass auf der Seite $A_{23} A_{13}$ des Wendepunktsdreiecks die drei Punkte a_3^1, a_3^2, a_3^3 eine cyklische Projectivität

bilden, von welcher A_{13}, A_{23} die Doppelpunkte sind (Nr. 48). Da dies offenbar für jede Seite jedes der vier Wendepunktsdreiseite gilt, so haben wir den Satz:

Auf jeder Seite eines Wendepunktsdreiseits bilden die drei Wendepunkte eine cyklische Projectivität, von welcher die beiden Ecken des Dreiseits die Doppelpunkte sind.

Um nun über die Realität der Wendepunkte Aufschluss zu erlangen, ist die genauere Kenntniss der Eigenschaften der cyklischen Projectivität erforderlich, die wir theils gegeben haben (Nr. 48), theils noch andeuten wollen (Aufgaben und Sätze im Anhang Nr. 20).

Nehmen wir an, dass drei Wendepunkte reell seien, die nicht in gerader Linie liegen, etwa a_1^1, a_1^2, a_2^1 ; dann sind auch die dritten Wendepunkte auf den drei Verbindungslinien reell, nämlich a_1^3, a_3^1, a_3^3 , folglich auch die dritten auf $a_1^3 a_2^1, a_3^1 a_1^2, a_3^3 a_2^1$, das sind: a_3^2, a_2^3, a_2^2 . Also würden alle Wendepunkte und alle Wendepunkts-Geraden reell sein. Dann würden auf jeder dieser Geraden in der cyklischen Projectivität alle fünf Elemente reell sein, sowohl die cyklisch vertauschbaren, als die Doppelemente, was nicht möglich ist. Wenn daher drei Wendepunkte reell sind, so müssen sie in gerader Linie liegen, und die übrigen sind imaginär.

Um jeden Wendepunkt haben wir vier cyklische Projectivitäten; jedes Wendepunktsdreiseit $s_1 s_2 s_3$ giebt eine: cyklische Elemente sind die drei Wendepunkts-Geraden t_1, u_1, v_1 durch den Wendepunkt, die nicht zum Dreiseit gehören; der eine Doppelstrahl ist die vierte zum Dreiseit gehörige Wendepunkts-Gerade s_1 , der andere geht nach der Gegenecke $s_2 s_3$. Man erhält diese cyklische Projectivität aus der auf s_2 oder s_3 befindlichen durch Projection.

Wäre nun bloß ein Wendepunkt reell — und wegen der ungeraden Anzahl muss mindestens einer reell sein —, so würden die acht übrigen paarweise conjugirt imaginär sein, und auf allen vier reellen Verbindungslinien der conjugirt imaginären wäre er der nothwendig reelle dritte. In der eben beschriebenen Projectivität wären t_1, u_1, v_1 reell, mithin auch die Projectivität, ferner auch s_1 und also auch der andere Doppelstrahl, was bei einer cyklischen Projectivität nicht möglich ist.

Somit zeigt sich, dass nur der Fall von drei reellen und auf derselben Gerade gelegenen Wendepunkten möglich ist. Wäre nun einer von diesen Punkten für zwei von den drei reellen Verbindungslinien conjugirt imaginärer Wendepunkte der dritte, so würde auch die letzte Wendepunkts-Gerade durch diesen Wendepunkt reell sein, denn sie enthält ja die beiden übrigen auch conjugirt imaginären Wendepunkte.

Wir gelangten daher wiederum zu einer nicht möglichen cyklischen Projectivität. Es verbleibt also, dass *die reellen Wendepunkts-Geraden, welche conjugirt imaginäre Wendepunkte verbinden, durch die drei einzelnen reellen Wendepunkte gehen.*

Ein Wendepunktsdreiseit ist demnach vollständig reell. Durch jeden der drei reellen Wendepunkte gehen zwei reelle Wendepunkts-Geraden und zwei conjugirt imaginäre; denn die imaginären Wendepunkte, die auf der einen dieser letzteren liegen, sind bezw. conjugirt imaginär zu denen auf der andern. Betrachten wir diejenige cyklische Projectivität um einen der reellen Wendepunkte, in welcher die Wendepunkts-Gerade der drei reellen Wendepunkte der eine Doppelstrahl ist, so ist von den drei cyklischen Elementen das eine reell, die beiden andern sind conjugirt imaginär; also ist die Projectivität reell und demnach auch der andere Doppelstrahl, der nach der Gegenecke der Wendepunkts-Gerade der drei reellen Wendepunkte im Wendepunktsdreiseit, zu welchem diese gehört, geht. Diese Ecke ist daher als Schnittpunkt dreier reeller Strahlen reell, und die beiden Seiten des Dreiseits, die sich in ihr schneiden, sind conjugirt imaginär, da die Wendepunkte der einen zu denen der andern conjugirt sind.*

Fassen wir zusammen, so haben wir das Ergebnis:

Von den neun Wendepunkten der Tripelcurve sind drei in gerader Linie liegende reell, die übrigen sechs paarweise conjugirt imaginär; diese sechs imaginären Wendepunkte liegen zu je dreien auf zwei conjugirt imaginären Geraden, deren Durchschnittspunkt reell ist. Von den zwölf Wendepunkts-Geraden sind vier reell und acht imaginär, nämlich reell: die Gerade, auf welcher die drei reellen Wendepunkte liegen, und die drei Seiten eines der vier Wendepunktsdreiseite, deren jede einen reellen und zwei conjugirt imaginäre Wendepunkte enthält.

Die gemeinschaftlichen Punkte der Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$, in welchen 350 sich dieselben berühren, führen, wie zu den Wendepunkten der Curve $C^{(3)}$, so auch zu den Rückkehrtangenten der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$. Wir haben oben (Nr. 340) bewiesen, dass alle Strahlenpaare, welche einen beliebigen Punkt o der Tripelcurve mit Paaren conjugirter Punkte P, Q verbinden, eine Involution bilden. Ihre Doppelstrahlen sind zwei Tangenten von $\mathfrak{R}^{(3)}$, welche durch o gehen; die dritte ist die Verbindungslinie des Punktes o mit seinem conjugirten Punkt; diese Verbindungslinie und die Tangente in o an $C^{(3)}$ bilden ein besonderes

* Auch hier sind mancherlei in diesem Buche nicht begründete Voraussetzungen gemacht. In Bezug auf die Benutzung der Eigenschaften der cyklischen Projectivität vergl. Clebsch (1833—1872), Journal für Mathematik Bd. 63 S. 120.

Strahlenpaar dieser Involution, werden also harmonisch getrennt durch die beiden Doppelstrahlen. Diese Doppelstrahlen wollen wir zwei *conjugirte Tangenten der Curve* $\mathfrak{K}^{(3)}$ nennen; denn sie besitzen die Eigenschaft, dass ihre Berührungsehne auch eine Tangente von $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, also die duale Eigenschaft zu der zweier conjugirter Punkte auf $C^{(3)}$. Sind nämlich $P'Q'$ und $P''Q''$ die Paare conjugirter Punkte, welche auf den Doppelstrahlen der Involution (o) liegen, so werden die Schnittpunkte $(P'Q'', P''Q')$ und $(P'P'', Q'Q'')$ ebenfalls conjugirte Punkte der $C^{(3)}$ sein, und ihre Verbindungslinie geht durch die beiden vierten harmonischen Punkte auf den Strahlen $oP'Q'$ und $oP''Q''$; da diese die Berührungspunkte mit $\mathfrak{K}^{(3)}$ sind, so ist die Berührungsehne zweier conjugirter Tangenten von $\mathfrak{K}^{(3)}$ selbst eine Tangente von $\mathfrak{K}^{(3)}$.

Ebenso wie die Punkte der Curve $C^{(3)}$ sich in Paare conjugirter Punkte ordnen, deren Tangenten sich auf $C^{(3)}$ selbst schneiden, ordnen sich auch die Tangenten der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ in Paare conjugirter Tangenten, deren Berührungsehne selbst eine dritte Tangente ist. Wenn nun insbesondere P_0 und Q_0 zwei solche conjugirten Punkte der $C^{(3)}$ mit dem gemeinschaftlichen Tangentialpunkte R_0 sind, dass die Tangente in Q_0 durch P_0 geht, dann fällt auch R_0 nach P_0 , und P_0 ist ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ und die Tangente in ihm eine Wendetangente, weil sie drei zusammenfallende Punkte der Curve enthält. Wenn andererseits bei zwei conjugirten Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ die Berührungsehne mit einer derselben zusammenfällt, dann ist diese eine Rückkehrtangente der $\mathfrak{K}^{(3)}$ und ihr Berührungspunkt ein Rückkehrpunkt, weil für ihn drei Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ zusammenfallen. Wenn nun Q_0 ein Berührungspunkt der Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, so fallen in die gemeinsame Tangente von den drei aus Q_0 an $\mathfrak{K}^{(3)}$ zu legenden Tangenten zwei hinein, und es giebt nur noch eine dritte Tangente \mathfrak{T}_0 durch Q_0 an $\mathfrak{K}^{(3)}$; sie enthält ein Paar conjugirter Punkte P', Q' , und der vierte harmonische dem Q_0 zugeordnete sei r_0 , ihr Berührungspunkt mit $\mathfrak{K}^{(3)}$. Der conjugirte Punkt P_0 zu Q_0 liegt, wie wir schon erkannt haben, auf der gemeinsamen Tangente. Da ferner die Tangente in Q_0 an $C^{(3)}$ und der Strahl Q_0P_0 zusammenfallen, so bilden sie einen Doppelstrahl der Involution, welche dem Punkte Q_0 in Bezug auf die Curve $C^{(3)}$ zugehört; der andere ist \mathfrak{T}_0 . Diese beiden Doppelstrahlen sind conjugirte Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$; ihre Berührungsehne ist Q_0r_0 , d. h. \mathfrak{T}_0 selbst, folglich ist \mathfrak{T}_0 eine Rückkehrtangente der $\mathfrak{K}^{(3)}$. Wir haben also folgendes Resultat:

Die beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ haben in ihren gemeinschaftlichen Punkten dieselben Tangenten. Eine solche Tangente trifft $C^{(3)}$ nur noch in einem dritten Punkte, welcher ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ ist, und es

lässt sich aus jenen gemeinschaftlichen Berührungspunkten beider Curven nur noch je eine dritte Tangente an $\mathfrak{R}^{(3)}$ legen, welche eine Rückkehrtangente derselben ist.

Zu zwei in Q vereinigten Punkten der Tripelcurve als Punkten eines Tripels ist der dritte Tripelpunkt derjenige, welcher dem dritten Schnitt der Tangente in Q , also dem Tangentialpunkte von Q conjugirt ist. Der conjugirte P zu Q hat denselben Tangentialpunkt wie Q , und conjugirter zu dem gemeinsamen Tangentialpunkte ist der dritte Schnitt von QP , das ist also der gesuchte dritte Tripelpunkt.

Zu zwei in Q vereinigten Punkten ist der dritte Tripelpunkt der dritte Schnitt der Gerade, welche Q mit dem conjugirten Punkte P verbindet.

Für einen der Berührungspunkte Q_0 der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ ist der dritte Schnitt mit $C^{(3)}$ wiederum Q_0 , da Q_0P_0 in Q_0 berührt; folglich haben sich in einem Q_0 alle drei Punkte eines Tripels vereinigt.

Verbindet man also die drei Punkte eines Tripels mit einem Punkte Q_0 , so sind die dritten Schnitte drei Punkte in gerader Linie. Der Kegelschnitt ferner, der durch ein Tripel gelegt ist und die Tripelcurve in einem der Punkte Q_0 tangirt, tangirt sie sogar dreipunktig.

In jedem der Punkte Q_0 wird die Tripelcurve von einem Kegelschnitt sechspunktig berührt.*

Wir brechen hier die allgemeine Betrachtung des Kegelschnitt-³⁵¹netzes ab, da eine weitere Ausführung die dem Buche gesteckten Grenzen überschreiten und zu einer Theorie der Curven dritter Ordnung führen würde, hinsichtlich deren wir auf *Cremona's* Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven (deutsche Uebersetzung von *M. Curtze*, Greifswald 1865) und auf die Schrift von *Durège*: Die ebenen Curven dritter Ordnung (Leipzig 1871) verweisen.** Wir wollen nur noch auf einen besonderen Fall des Kegelschnittnetzes hinweisen, welcher zu vielen Beziehungen zwischen Kegelschnitten und, noch weiter specialisirt, zu bekannten Resultaten aus der Kreistheorie führt. Wenn nämlich die drei zur Bestimmung des Netzes erforderlichen Kegelschnitte A, B, C die besondere Lage haben, dass zwei (reelle oder imaginäre) Punkte ihnen gemeinschaftlich sind, dann muss die Tripelcurve zerfallen in die Verbindungslinie s der beiden Punkte (eine gemeinschaftliche Secante der drei Kegelschnitte und aller Kegel-

* Da jede Curve dritter Ordnung auf drei Weisen Tripelcurve ist, so hat sie nicht bloß 9, sondern 27 solche ausgezeichneten Punkte Q_0 .

** Nunmehr aber kann auf das eigene Buch von *Schröter*: Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung (Leipzig 1888) verwiesen werden, dessen Paragraphen über die Wendepunkte man auch vergleiche.

schnitte des Netzes) und einen Kegelschnitt; denn da der gemeinschaftlichen Secante dieselbe Involution rücksichtlich aller drei Kegelschnitte zugehört, so ist jedes Paar conjugirter Punkte derselben ein Paar conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve. Dieser gehört also die ganze Gerade an, und der übrige Theil kann nur noch ein Kegelschnitt $C^{(2)}$ sein. P, Q seien, wie vorhin, zwei conjugirte Punkte auf s , P', Q' hingegen zwei conjugirte Punkte auf $C^{(2)}$, so sind auch $P'' = (PP', QQ')$ und $Q'' = (P'Q', Q'P')$ conjugirt und ersichtlich auf $C^{(2)}$ gelegen; also beschreibt, wenn PQ die Involution auf s durchläuft, $P''Q''$ eine krumme Involution auf $C^{(2)}$, welche aus P' oder Q' in jene projicirt wird. Von dem vollständigen Viereck $P'Q'P''Q''$, das dem $C^{(2)}$ eingeschrieben ist, ist PQ eine Diagonale, der gegenüberliegende Diagonalpunkt $O = (P'Q', P''Q'')$ ihr Pol nach $C^{(2)}$; durch diesen geht $P''Q''$, also ist er das Centrum der krummen Involution und s deren Axe. Folglich ist die Involution auf s , in welche die krumme Involution der P'', Q'' aus P' oder Q' projicirt wird, auch die dem $C^{(2)}$ zugehörige; d. h. ihre Doppelpunkte, die gemeinsamen Punkte der A, B, C und aller Kegelschnitte des Netzes, liegen auch auf $C^{(2)}$.

Sie sind, als die Doppelpunkte der krummen Involution, sich selbst conjugirt; jeder Strahl durch einen dieser Punkte ist Verbindungslinie zweier vereinigter conjugirter Punkte, also Tangente von $\mathfrak{R}^{(3)}$. Die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ zerfällt in die Strahlbüschel um diese beiden Punkte und um das Centrum der krummen Involution der P'', Q'' (und P', Q'), den Pol O von s in Bezug auf $C^{(2)}$. Die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ wird ja auch von den Geraden der Geradenpaare des Netzes umhüllt; von denjenigen, zu denen s gehört, geht die andere Gerade stets durch den dritten Punkt O von $\mathfrak{R}^{(3)}$, während die andern Geradenpaare ihre Geraden durch die gemeinsamen Punkte des Netzes senden. Der dritte Punkt ist der Punkt, in den die s ergänzenden gemeinschaftlichen Secanten, welche je zwei von den drei Kegelschnitten A, B, C haben, zusammenlaufen (Nr. 176).

Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Wenn drei Kegelschnitte A, B, C eine (eigentliche oder ideelle) gemeinschaftliche Secante s haben, so haben je zwei derselben B und C , C und A , A und B noch eine gemeinschaftliche Secante t, t', t'' , den übrigen Theil des Geradenpaares, welches in je einem der drei Büschel (B, C) (C, A) (A, B) sich befindet, und von welchem s ein Theil ist. Die drei Geraden t, t', t'' schneiden sich in einem Punkte O . Von den drei gemeinschaftlichen Polardreiecken der drei Büschel liegen drei Eckpunkte auf s , die sechs übrigen auf einem Kegelschnitt $C^{(2)}$, welcher die Eigenschaft besitzt, dass von jedem Punkte P desselben die drei Polaren

in Bezug auf A, B, C sich wieder in einem Punkte Q dieses Kegelschnitts $C^{(2)}$ treffen; die Verbindungslinie PQ läuft durch den festen Punkt O , der zugleich der Pol der Gerade s in Bezug auf den Kegelschnitt $C^{(2)}$ ist.

Zu bekannten Resultaten werden wir geführt durch weitere Specialisirung der allgemeinen Betrachtung; nehmen wir nämlich insbesondere für die drei Kegelschnitte A, B, C drei Kreise an, so haben dieselben die unendlich entfernte Gerade zu einer gemeinschaftlichen (ideellen) Secante s ; der Punkt O wird der Punkt der gleichen Potenzen der drei Kreise A, B, C , der Kegelschnitt $C^{(2)}$ der die drei angenommenen Kreise rechtwinklig schneidende Kreis und O sein Mittelpunkt. Das Kegelschnittnetz besteht in diesem Falle aus lauter Kreisen.

Die Durchführung der dualen Betrachtung, welche, gleichfalls von drei beliebigen Kegelschnitten A, B, C ausgehend, die drei Schaaren $(B, C), (C, A), (A, B)$ und die durch sie bestimmte Tripelcurve dritter Klasse ins Auge fasst, darf dem Leser überlassen bleiben, da sie in allen wesentlichen Punkten der in diesem Paragraphen durchgeführten Untersuchung nachgebildet werden kann. Diese besondere Betrachtung ist aber überflüssig, weil sie schon von selbst in die vorige sich hineinverwebt. Die dort auftretende Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ ist selbst Tripelstrahlencurve für ein Kegelschnitt-Gewebe, welches mit dem ursprünglichen Kegelschnittnetz in engstem Zusammenhang steht, so dass also die beiden dualen Figuren mit einander vereinigt auftreten. Wir müssen aber hinsichtlich der weiteren Ausführung dieser Untersuchung auf das eben erwähnte Buch von *Schröter* (§ 5) und seine in Nr. 340 genannten Abhandlungen verweisen.

Wenn wir die Betrachtung des Kegelschnittnetzes, welche von 352 drei beliebig in der Ebene gegebenen Kegelschnitten ausging, in der Weise fortführen, dass wir vier beliebige Kegelschnitte $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}, K_4^{(2)}$, die nicht demselben Netze angehören, annehmen, so lässt sich auch dann noch nach solchen Punkten P fragen, deren vier Polaren in Bezug auf $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}, K_4^{(2)}$ sich in einem und demselben Punkte Q schneiden. Construirt man die Tripelcurve $C_{123}^{(3)}$ für das durch die Kegelschnitte $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}$ bestimmte Netz und die Tripelcurve $C_{124}^{(3)}$ für die Kegelschnitte $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_4^{(2)}$, so müssen die gesuchten Punkte gemeinschaftliche Punkte der Curven $C_{123}^{(3)}$ und $C_{124}^{(3)}$ sein. Diese beiden Curven haben aber die Ecken $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ des gemeinsamen Polardreiecks von $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_2^{(2)}$ gemeinsam, welche offenbar diese Eigenschaft nicht besitzen, weil die Polaren einer von ihnen in Bezug auf $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_2^{(2)}$ zusammenfallen und daher sowohl mit der in Bezug auf $\mathfrak{R}_3^{(2)}$ als mit der in Bezug auf $\mathfrak{R}_4^{(2)}$ in einem Punkte sich treffen, ohne dass dies für

alle drei (oder vier) gilt. Folglich bleiben nur noch sechs Punkte übrig, die der gestellten Forderung genügen. Diese zerfallen offenbar in drei Paare conjugirter Punkte. Denn sobald P die Beschaffenheit hat, dass seine Polaren in Bezug auf $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}, K_4^{(2)}$ sich in Q treffen, wird auch Q dieselbe haben, also wenn P zu jenen sechs Schnittpunkten gehört, muss auch Q dazu gehören; gehört ferner P_1 dazu, so gehört auch sein conjugirter Punkt Q_1 dazu; sind aber diese beiden Paare bekannt, so erhalten wir durch die Verbindung derselben in $(PP_1, QQ_1) = P_2$ und $(PQ_1, QP_1) = Q_2$ ein drittes Paar, welches ebenfalls zu jenen sechs Durchschnittspunkten gehören muss; da es aber nur sechs giebt, so erhalten wir den Satz:

Hat man irgend vier Kegelschnitte $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}, K_4^{(2)}$, die nicht demselben Netze angehören, und construirt zu je dreien derselben die zugehörigen Tripelcurven $C_{123}^{(3)}, C_{124}^{(3)}, C_{134}^{(3)}, C_{234}^{(3)}$, so laufen diese vier Curven dritter Ordnung durch dieselben sechs Punkte, welche zu je dreien auf vier geraden Linien liegen und die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, dessen drei Paare Gegenecken gleichzeitig drei Paare conjugirter Punkte in Bezug auf alle vier gegebenen Kegelschnitte sind.

Die sechs Durchschnittspunkte dieser vier Tripelcurven oder das vollständige Vierseit, als dessen drei Paare Gegenecken dieselben auftreten, lassen sich sehr einfach mittelst der gegebenen vier Kegelschnitte $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}, K_4^{(2)}$ construiren, wenn man die oben bewiesene Eigenschaft der Tripelcurve zu Hülfe nimmt (Nr. 341), nach der die acht Seiten zweier der Tripelcurve eingeschriebenen vollständigen Vierseite, für welche jedes Paar Gegenecken ein Paar conjugirter Punkte der Tripelcurve ist, allemal einen und denselben Kegelschnitt berühren.*

Bezeichnen wir die zu den Punkten des Tripels $\Omega \Omega_1 \Omega_2$ conjugirten Punkte auf der Tripelcurve $C_{123}^{(3)}$ durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ und die auf der Tripelcurve $C_{124}^{(3)}$ durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2$, so liegen bekanntlich sowohl $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$, als auch $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2$ auf je einer Geraden. Nach jenem Satze müssen nun sowohl die acht Seiten der beiden Vierseite, deren Gegenecken $P, Q; P_1, Q_1; P_2, Q_2$ und $\mathfrak{P}, \Omega; \mathfrak{P}_1, \Omega_1; \mathfrak{P}_2, \Omega_2$ sind, als auch die acht Seiten der beiden Vierseite, deren Gegenecken $P, Q; P_1, Q_1; P_2, Q_2$ und $\mathfrak{P}', \Omega; \mathfrak{P}'_1, \Omega_1; \mathfrak{P}'_2, \Omega_2$ sind, je einen Kegelschnitt berühren. Es leuchtet aber ein, dass diese beiden Kegelschnitte identisch sind, denn beide berühren die Seiten der beiden Dreiecke $Q Q_1 Q_2$ und $\Omega \Omega_1 \Omega_2$, wodurch der Kegelschnitt schon mehr wie bestimmt ist. Nennen wir diesen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, so können wir ihn

* Vergl. Siebeck, De triangulo, cujus latera continent polos respectu quatuor sectionum conicarum conjugatos. Annali di Matematica Ser. II, Bd. 2, S. 65.

dadurch bestimmt denken, dass wir die Seiten des gemeinsamen Tripels der beiden Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_2^{(2)}$ und ausserdem die beiden Geraden, in welchen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2$ liegen, als fünf Tangenten von ihm auffassen.

Gehen wir in gleicher Weise von den beiden Kegelschnitten $K_1^{(2)}$ und $K_3^{(2)}$ aus, ermitteln das gemeinschaftliche Tripel derselben und die beiden Geraden, welche die conjugirten Punkte dieses Tripels auf den beiden Tripelcurven $C_{123}^{(3)}$ und $C_{134}^{(3)}$ enthalten, so bestimmen diese fünf Geraden als Tangenten einen neuen Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$. Die beiden gefundenen Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ haben vier gemeinschaftliche Tangenten, welche ein vollständiges Vierseit bilden, und die drei Paare Gegenecken desselben sind die gesuchten sechs gemeinschaftlichen Punkte aller vier Tripelcurven.

Aus der bekannten Eigenschaft des einer Tripelcurve eingeschriebenen vollständigen Vierseits, dessen drei Paare Gegenecken Paare conjugirter Punkte der Tripelcurve sind, ergibt sich nunmehr folgende Construction der gesuchten sechs Durchschnittspunkte:

Man ermittle das gemeinschaftliche Tripel der beiden Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_2^{(2)}$; die Polaren der Ecken dieses Dreiecks in Bezug auf den dritten Kegelschnitt $K_3^{(2)}$ treffen die Gegenseiten desselben in drei Punkten einer Gerade \mathfrak{Q} ; die Polaren der Ecken desselben Dreiecks in Bezug auf den vierten Kegelschnitt $K_4^{(2)}$ treffen die Gegenseiten desselben in drei Punkten einer Gerade \mathfrak{Q}' . Man beschreibe den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher die Seiten des Tripeldreiecks und die beiden Geraden \mathfrak{Q} und \mathfrak{Q}' berührt, wodurch er gerade bestimmt wird. In gleicher Weise ermittle man zweitens das gemeinschaftliche Tripel der beiden Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_3^{(2)}$; die Polaren der Ecken desselben in Bezug auf $K_2^{(2)}$ treffen die Gegenseiten in drei Punkten einer Gerade \mathfrak{Q}_1 ; die Polaren der Ecken in Bezug auf $K_4^{(2)}$ treffen die Gegenseiten in drei Punkten einer Gerade \mathfrak{Q}'_1 . Man beschreibe den Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$, welcher die Seiten dieses zweiten Tripeldreiecks und die beiden Geraden \mathfrak{Q}_1 und \mathfrak{Q}'_1 berührt. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ haben vier gemeinschaftliche Tangenten, die ein vollständiges Vierseit bilden. Die drei Paare Gegenecken sind die gesuchten sechs Durchschnittspunkte P, Q, P_1, Q_1, P_2, Q_2 der vier Tripelcurven $C_{123}^{(3)}, C_{124}^{(3)}, C_{134}^{(3)}, C_{234}^{(3)}$.

Durch andere Combination der gegebenen vier Kegelschnitte kann 353 man anstatt $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ andere Kegelschnitte erhalten; für alle möglichen sechs Verbindungen erhält man im Ganzen sechs solche Kegelschnitte, welche nothwendig einer und derselben Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten angehören. Zu dieser Schaar gelangt man von allgemeinerem Gesichtspunkte aus folgendermassen.

Wenn man ein Kegelschnittnetz hat und auf der durch dasselbe hervorgerufenen Tripelcurve irgend ein Tripel $Q Q_1 Q_2$ nimmt, so liegen die drei conjugirten Punkte P, P_1, P_2 bekanntlich auf einer Gerade, und man kann eine Schaar von Kegelschnitten herstellen, welche diese Gerade und die Seiten des Tripels berührt. Solcher Kegelschnittschaaren erhält man unendlich viele, wenn man das Tripel $Q Q_1 Q_2$ auf der Tripelcurve verändert; alle Kegelschnitte dieser sämtlichen Schaaren bilden ein *Kegelschnitt-Gewebe*, ein Gebilde von gleicher Mächtigkeit mit dem Kegelschnittnetz und nach dem Princip der Dualität aus ihm hervorgehend. *Irgend zwei Schaaren des Gewebes haben einen Kegelschnitt gemeinschaftlich*, und das Gewebe ist durch drei seiner Kegelschnitte, welche nicht derselben Schaar angehören, vollständig bestimmt, indem man aus der Verbindung je zweier immer neue Schaaren des Gewebes bildet. Alle Kegelschnitte des Gewebes, welche in Punktepaare zerfallen, liefern als Verbindungslinien derselben diejenigen Geraden, welche die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ umhüllen, und die Punktepaare selbst erfüllen die Tripelcurve $C^{(3)}$. Das Kegelschnitt-Gewebe steht daher mit dem zu ihm gehörigen Kegelschnittnetz in innigstem Zusammenhange, und die Kegelschnitte des Gewebes können aus denen des Netzes, wie auch umgekehrt, unmittelbar abgeleitet werden.*

Gehen wir nun von vier Kegelschnitten aus, so bestimmen dieselben zu je dreien verbunden vier Kegelschnittnetze, zu deren jedem ein bestimmtes Gewebe gehört. *Diese vier Gewebe haben eine Kegelschnittschaar gemeinschaftlich*, welche mit der oben ermittelten zusammenfällt. Wir können aber noch unendlich viele andere Kegelschnittnetze und zugehörige Gewebe bilden, indem wir aus jenen ersten vier Netzen irgend drei Kegelschnitte herausnehmen, welche nicht demselben der vier Netze angehören, und sie zur Bildung eines neuen Netzes verwenden. Die Tripelcurven für alle diese Netze laufen durch dieselben sechs oben ermittelten Punkte, und die sämtlichen zugehörigen Kegelschnitt-Gewebe haben eine Schaar gemeinschaftlich. Nehmen wir zu den vier gegebenen Kegelschnitten $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}, K_4^{(2)}$ noch einen fünften $K_5^{(2)}$ hinzu, so erhalten wir zunächst fünf solcher Kegelschnittschaaren, wie oben, indem wir die fünf gegebenen Kegelschnitte in Gruppen zu vierten zusammenfassen. Diese fünf Schaaren müssen aber *einen* Kegelschnitt gemeinschaftlich haben, der dann auch gleichzeitig allen möglichen Geweben gemeinschaftlich ist, welche vermittelst der gegebenen fünf Kegelschnitte sich herstellen lassen.

* Vergl. *Reye*, Die Geometrie der Lage, 3. Aufl. 1. Abtheilung (Leipzig 1886) S. 223 flg.

Anhang.

I.

Aufgaben und Sätze.

1. Es sind eine Punktreihe $\mathfrak{A}(a, b, c, \dots)$ und ein Strahlbüschel $B(a, b, c, \dots)$ gegeben, welche zu einander projectiv sind; es soll

a) eine Transversale gezogen werden, welche das Büschel B in einer mit der Punktreihe \mathfrak{A} gleichen Punktreihe schneidet;

b) ein Punkt gesucht werden, aus dem die Punktreihe \mathfrak{A} durch ein mit dem Strahlbüschel B gleiches Büschel projectirt wird.

Wie viele Lösungen giebt es?

2. Wenn a, b, c, d vier harmonische Punkte und m, n die Mitten der Paare zugeordneter Punkte $a, b; c, d$ sind, so hat man:

$$ab^2 + cd^2 = 4mn^2, \quad \frac{cm}{ca \cdot cb} + \frac{dm}{da \cdot db} = 0,$$
$$mc^2 + mb^2 = cd^2 + \frac{1}{2}ab^2.$$

3. Sind a, b, c, d vier harmonische Strahlen und m der eine Halbierungsstrahl der Winkel zwischen den zugeordneten Strahlen a, b , so gelten folgende Beziehungen:

$$\sin(ca) \cdot \sin(cb) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(cd) \cdot \sin 2(cm),$$

$$\sin(da) \cdot \sin(db) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(dc) \cdot \sin 2(dm),$$

$$\sin(ca) \cdot \sin(cb) + \sin(da) \cdot \sin(db) = \sin^2(cd) \cdot \cos(ab);$$

$$\frac{\sin(mc) \sin(md)}{\sin^2(ma)} = \frac{\cos(mc) \cos(md)}{\cos^2(ma)} = \cos(cd),$$

$$\sin(ab) \sin(cd) = 2 \sin(cb) \sin(ad).$$

Halbirt n den einen Winkel (cd) , so gilt noch:

$$\cos(ab) \cos(cd) = \cos 2(mn).$$

4. Sind ein Dreieck ABC und ein Punkt P gegeben, so bestimmen die Schnittpunkte:

$$(PA, BC) = A_1, \quad (PB, CA) = B_1, \quad (PC, AB) = C_1$$

ein neues Dreieck $A_1B_1C_1$; ein zweiter Punkt P_1 liefert dann die Schnittpunkte:

$$(P_1A_1, B_1C_1) = A_2, \quad (P_1B_1, C_1A_1) = B_2, \quad (P_1C_1, A_1B_1) = C_2;$$

deren Dreieck $A_2B_2C_2$ liegt zum gegebenen Dreieck ABC perspectiv. Wenn ferner

$$(P_1A, B_1C_1) = A_3, \quad (P_1B, C_1A_1) = B_3, \quad (P_1C, A_1B_1) = C_3$$

sind, so sind auch die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_3B_3C_3$ perspectiv.

5. Es seien fünf Punkte a, b, c, d, e gegeben; man bestimme die Schnittpunkte:

$$(cd, be) = \alpha, \quad (ad, ce) = \beta, \quad (bd, ae) = \gamma,$$

so gehen die drei Geraden $a\alpha, b\beta, c\gamma$ durch einen Punkt o . Durch alle Combinationen erhält man 20 Punkte o und 15 Geraden, wie $a\alpha, b\beta, c\gamma$, welche eine *Hesse'sche Configuration* bilden (Nr. 22).

6. Wenn $a, \alpha; b, \beta; c, \gamma$ die Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, so besteht die Beziehung:

$$\frac{ab \cdot a\beta}{\alpha b \cdot \alpha\beta} = \frac{ac \cdot a\gamma}{\alpha c \cdot \alpha\gamma}.$$

7. Sind $a\alpha, b\beta, c\gamma$ drei Paare conjugirter Elemente einer Involution, so gelten die Beziehungen:

$$(abc) \cdot (\beta bca) \cdot (\gamma cab) = -1, \quad (\alpha ab\gamma) + (\beta bca) + (\gamma ca\beta) = 1.$$

8. Auf jeder von fünf Geraden a, b, c, d, e liefern die vier andern ein Doppelverhältniss; es besteht die Beziehung:

$$a(b, c, d, e) \cdot b(c, a, d, e) \cdot c(a, b, d, e) = 1.$$

Geht d oder e ins Unendliche, so ergibt sich der Satz von *Menelaus*.

Bei sechs Geraden a, \dots, f ist:

$$\frac{a(c, d, e, f)}{b(c, d, e, f)} = \frac{c(a, b, e, f)}{d(a, b, e, f)} = \frac{e(a, b, c, d)}{f(a, b, c, d)}.$$

9. Ebenso hat man bei fünf Punkten a, b, c, d, e :

$$a(b, c, d, e) \cdot b(c, a, d, e) \cdot c(a, b, d, e) = 1,$$

oder:

$$(bca_1a_2) \cdot (cab_1b_2) \cdot (abc_1c_2) = 1,$$

wenn

$$\begin{aligned} (bc, ad) &= a_1, & (ca, bd) &= b_1, & (ab, cd) &= c_1, \\ (bc, ae) &= a_2, & (ca, be) &= b_2, & (ab, ce) &= c_2 \end{aligned}$$

ist. Lässt man e so liegen, dass $ae \parallel bc$ und $be \parallel ca$, so dass a_2, b_2 ins Unendliche fallen und c_2 in die Mitte von ab , so ergibt sich der Satz von *Ceva*.

10. Es seien a, b, c die Schnitte einer Transversale mit den Seiten von \mathcal{ABC} ; man füge die Halbierungslinie des Winkels \mathcal{A} hinzu und hat auf $\mathcal{AB}, \mathcal{AC}$ zwei perspective Punktreihen; aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse die Relation von *Menelaus* abzuleiten.

11. Wenn a_1, b_1, c_1 so auf den Seiten von \mathcal{ABC} liegen, dass $\mathcal{A}a_1, \mathcal{B}b_1, \mathcal{C}c_1$ in einen Punkt O zusammenlaufen, so sei durch diesen die Parallele zu \mathcal{AB} gezogen; aus den gleichen Doppelverhältnissen auf den drei Seiten die Relation von *Ceva* abzuleiten.

Ferner gilt für diese Figur des Satzes von *Ceva*:

$$\frac{Oa_1}{\mathcal{A}a_1} + \frac{Ob_1}{\mathcal{B}b_1} + \frac{Oc_1}{\mathcal{C}c_1} = 1;$$

das lässt sich auch als Satz für das vollständige Viereck $\mathcal{ABC}O$ aussprechen, für welches a_1, b_1, c_1 die Diagonalpunkte sind.

12. Ist eine Punktinvolution (x, ξ) gegeben und nimmt man zu einem festen Punkte o des Trägers den zugeordneten vierten harmonischen Punkt χ in Bezug auf x und ξ , so erhält man eine einfache Punktreihe (χ) . Alle diese Punktreihen, den verschiedenen Lagen von o entsprechend, sind projectiv mit solchen Punkten χ als correspondirenden, welche von demselben Punktepaar x, ξ der Involution herühren; unter ihnen zeichnet sich die Punktreihe der Mitten der Punktepaare aus, die dem unendlich fernen Punkte des Trägers entspricht.

Man beweise dies (anders als in Nr. 226), ohne die Gerade zu verlassen.

Dadurch wird ermöglicht, eine Involution projectiv zu beziehen. Auf einer Gerade sei eine Projectivität festgelegt durch:

$$abc \mp a_1 b_1 c_1.$$

Wenn c_1 sich ändert, beschreiben die Doppелеlemente die Involution $(a b_1, b a_1)$, die zur Punktreihe der c_1 projectiv ist.

13. Werden zwei feste Kreise von einem veränderlichen dritten rechtwinklig geschnitten, so ist das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte auf dem schneidenden Kreise constant, d. h. das Doppelverhältniss der vier Strahlen, die nach ihnen von irgend einem Punkte dieses

Kreises gehen. Es ist gleich dem Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen die beiden festen Kreise von ihrer Centrale geschnitten werden.

14. Geht man von irgend einem Punkte a der einen von zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ aus, sucht den entsprechenden a_1 in der zweiten, welcher als Punkt der ersten Reihe b heisse; sucht man dann wieder zu diesem den entsprechenden b_1 , der in der ersten Reihe c heisse, u. s. f., so nähert man sich bei dieser im allgemeinen ins Unendliche sich fortsetzenden Operation einem der beiden Doppelpunkte, falls die beiden projectiven Punktreihen reelle Doppelpunkte haben. Geht man hingegen von einem Punkte der zweiten Punktreihe aus, so gelangt man auf dieselbe Weise zu dem andern Doppelpunkte.

15. Es kann vorkommen, dass die in der vorigen Aufgabe beschriebene Operation nach n -maliger Construction des entsprechenden Punktes zu dem Ausgangspunkte zurückführt. Findet dies bei irgend einem Ausgangspunkte statt, so geschieht es bei jedem (cyclische Projectivität). Bei $n = 2$ handelt es sich um die Involution. Für grössere Werthe von n ist dazu erforderlich, dass die beiden Punktreihen gleichlaufend sind, also die Potenz der projectiven Beziehung negativ ist ($= -p^2$), und dass die Fluchtpunkte r und q_1 eine solche Entfernung $d = rq_1$ haben, dass

$$d = 2p \cos \frac{v\pi}{n},$$

wo v eine zu n theilerfremde ganze Zahl ist, wobei es genügt, auf die unter $\frac{n}{2}$ befindlichen sich zu beschränken.*

Die Doppelpunkte sind ($n > 2$) stets imaginär.

Geht man von dem Fluchtpunkte q_1 der zweiten Reihe als einem Punkte der ersten Reihe aus, so muss man nach $(n - 2)$ -maliger Construction des entsprechenden Punktes zum andern Fluchtpunkte r gelangen, damit cyclische Projectivität n^{ten} Grades eintrete. Wenn

$$y = q_1, \quad y_1, y_2, \dots, y_{n-2} = r$$

die $n - 1$ Punkte sind, die man so erhält, so liegen stets y_i und y_{n-2-i} symmetrisch in Bezug auf die Mitte v von rq_1 .

Auf der Senkrechten, welche in v auf dem Träger steht, befinden sich zwei symmetrisch zum Träger gelegene Punkte von der Eigen-

* Die Formel umfasst auch den Fall $n = 2$, wo $v = 1$ und $d = 0$ ist; d. h. die beiden Fluchtpunkte vereinigen sich, was ja nothwendige und hinreichende Eigenschaft der Punktinvolution ist.

schaft, dass aus jedem von ihnen die beiden cyklisch-projectiven Punktreihen durch gleiche und gleichlaufende Büschel projectirt werden, von denen der eine durch Drehung um $\frac{\nu\pi}{n}$ aus dem andern sich ergibt (der einfachste Fall cyklischer Projectivität). Man benutze die elliptische Involution, welche (Nr. 46) mit den projectiven Punktreihen die Doppelpunkte gemeinsam hat, und die über ihr stehenden rechtwinkligen Involutionen.

Für $n = 3$ ($\nu = 1$) ergibt sich $d = p$; zwei entsprechende Potenzpunkte, etwa g und g_1 , fallen nach q_1 und r , so dass Kennzeichen dieser cyklischen Projectivität dritten Grades ist, dass dem Flucht-punkte q_1 der zweiten Reihe, als Punkte der ersten, der Fluchtpunkt r der ersten in der zweiten Reihe entspricht. Mit jedem der in sich zurückkehrenden Tripel bildet jeder der beiden imaginären Doppelpunkte ein äquianharmonisches System (Nr. 48).

Bei $n = 4$ ($\nu = 1$) ist $d^2 = 2p^2$; die Punkte eines jeden Quadrupels sind harmonisch und zwar der erste und dritte, der zweite und vierte zugeordnet.

16. Wenn die beiden Büschel $a, b, c, d; a_1, b_1, c_1, d_1$ von je vier Strahlen perspectiv liegen, so schneiden sich die einen Strahlen mit den andern, ausser in den vier Punkten $A = aa_1, B = bb_1, C = cc_1, D = dd_1$ des perspectiven Durchschnitts, noch in zwölf Punkten, die so liegen, dass erstens die Verbindungslinien:

$$(ab_1, cd_1), (a_1b, c_1d), (ac_1, bd_1), (a_1c, b_1d),$$

zweitens die Verbindungslinien:

$$(ab_1, dc_1), (a_1b, d_1c), (bc_1, ad_1), (b_1c, a_1d),$$

drittens die Verbindungslinien:

$$(ac_1, db_1), (a_1c, d_1b), (bc_1, da_1), (b_1c, d_1a)$$

je durch einen Punkt u, v, w des perspectiven Durchschnitts gehen; die Punkte u, v bilden ein Paar der Involution (AB, CD) , u, w ein Paar der Involution (AC, BD) und v, w ein Paar von (AD, BC) .

17. Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines Dreiecks berühren, haben je zwei noch eine vierte gemeinsame Tangente, welche dreimal als äussere und dreimal als innere gemeinschaftliche Tangente auftritt. Diese sechs Geraden laufen dreimal paarweise parallel mit den Seiten des Dreiecks der Höhenfusspunkte des gegebenen Dreiecks, und zwar je eine äussere und eine innere gemeinsame Tangente.

Diese sechs gemeinsamen Tangenten haben zwölf Berührungspunkte; auf jedem der vier Kreise liegen drei und bilden ein Dreieck,

das mit dem ursprünglichen ähnlich ist und ähnlich liegt (perspectiv mit der unendlich fernen Gerade als Axe).

Je zwei der vier Kreise haben, neben einer Ecke des Dreiecks, noch einen zweiten Aehnlichkeitspunkt. Diese sechs Aehnlichkeitspunkte, drei äussere und drei innere, liegen zu je dreien auf vier Geraden, einmal die drei äusseren, und dreimal ein äusserer und zwei innere.

Die sechs Potenzlinien der vier Kreise schneiden sich zu je dreien in vier Potenzcentren. Diese vier Punkte bilden ein Viereck, von welchem jede Ecke der Höhenpunkt des Dreiecks der drei andern ist. Es ist ähnlich und (invers) ähnlich gelegen zu dem Viereck der Mittelpunkte der vier Kreise, und seine linearen Dimensionen sind halb so gross als die dieses Vierecks.

18. Sind A, B, C die Mittelpunkte, a, b, c die Halbmesser dreier Kreise eines Büschels (mit eigentlicher oder ideeller gemeinschaftlicher Secante), so besteht die Beziehung:

$$\frac{a^2}{AB \cdot AC} + \frac{b^2}{BC \cdot BA} + \frac{c^2}{CA \cdot CB} = 1.$$

19. Verbindet man die Punkte α, β, γ , in denen eine Gerade \mathcal{G} die Seiten bc, ca, ab eines Dreiecks schneidet, mit einem Punkte d durch $d\alpha, d\beta, d\gamma$ und nimmt in diesen Strahlen beziehlich die Punkte a_1, b_1, c_1 an, so treffen b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 die Gerade \mathcal{G} in solchen Punkten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, dass $a\alpha_1, b\beta_1, c\gamma_1$ sich in einem Punkte d_1 schneiden; die drei Paare $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1$ auf \mathcal{G} gehören einer Involution an.

Denkt man sich die Ebene doppelt und dreht die eine Ebene mit den Punkten a_1, b_1, c_1, d um die Gerade \mathcal{G} , so erhält man zwei Tetraeder $abcd, a_1b_1c_1d_1$, von denen jedes dem andern ein- und umgeschrieben ist (Möbius'sche Tetraeder).

20. Wenn man von drei reellen Elementen a, b, c einer Punktreihe oder eines Strahlbüschels zwei cyklische Permutationen, etwa abc und bca bildet und projectiv setzt, so haben diese projectiven Gebilde zwei imaginäre Doppelemente i, i_1 , welche als die Doppelemente einer elliptischen Involution auftreten, die wir in Nr. 48 construirt haben.

Geht man, anstatt von drei reellen Elementen, von einem reellen a und zwei conjugirt imaginären b, c aus, welche letzteren man sich als die Doppelemente einer gegebenen elliptischen Involution denkt, so lässt sich ebenfalls nach den Doppelementen der cyklischen Projectivität $abc \frown bca$ oder nach den Elementen i, i_1 fragen, welche mit

solchen Elementen a, b, c äquianharmonische Systeme bilden. In diesem Falle sind i, i_1 reell; wie construirt man sie?

Sind umgekehrt a, i, i_1 reell, dann sind b, c imaginär und werden durch die imaginären cubischen Wurzeln der positiven Einheit gefunden; d. h. die Doppelverhältnisse $y_1 = (i i_1 ab)$, $y_2 = (i i_1 ac)$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$y^2 + y + 1 = \frac{y^3 - 1}{y - 1} = 0.$$

Wie lässt sich die elliptische Involution reell construiren, deren Dopelemente b, c sind?

21. Construirt man zu den Schnitten a, b, c der Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks mit einer Transversale \mathcal{Q} die vierten harmonischen Punkte a', b', c' je in Bezug auf die beiden Ecken, so laufen bekanntlich Aa', Bb', Cc' in einen Punkt S zusammen. Wenn die Strahlen Pa', Pb', Pc' aus dem beliebigen Punkte P die Gerade \mathcal{Q} in a'', b'', c'' treffen, so schneiden sich auch Aa'', Bb'', Cc'' in einem Punkte Q , und die drei Punkte P, Q, S liegen in einer Gerade.

22. Es seien $a, \alpha; b, \beta; c, \gamma$ die Schnittpunkte einer Transversale \mathcal{Q} mit den Gegenseitenpaaren eines vollständigen Vierecks und zwar so, dass a, b, c auf drei von derselben Ecke ausgehenden Seiten liegen. Auf jeder Seite construirt man den vierten harmonischen Punkt $a', \alpha'; b', \beta'; c', \gamma'$, der diesem Schnitte je in Bezug auf die beiden Ecken zugeordnet ist; dann schneiden sich $a'a', b'b', c'c'$ in einem Punkte S . Diese Punkte a, \dots, γ' liegen zwölfmal zu je dreien auf einer Gerade, z. B. $a', b', \gamma; \alpha', b, \gamma'; \alpha', b', c; \alpha', b, c'$, u. s. w.

Projicirt man die sechs Punkte a', \dots, γ' aus dem beliebigen Punkte P auf die Transversale \mathcal{Q} in die neuen Punkte $a'', \alpha'', b'', \beta'', c'', \gamma''$, so laufen die sechs Verbindungslinien $a'a'', \alpha'a'', b'b'', \beta'b'', c'c'', \gamma'c''$ in einen Punkt Q zusammen, und die drei Punkte P, Q, S liegen so auf einer Gerade, dass P und Q harmonisch getrennt werden durch S und \mathcal{Q} .

23. Bei einem Dreieck ABC seien a, b, c die Mitten der Seiten BC, CA, AB , a_1, b_1, c_1 die Fusspunkte der Höhen, so liegen bekanntlich diese sechs Punkte auf dem *Feuerbach'schen* Kreise (O), dessen Mittelpunkt O mit dem Höhenpunkt H , dem Schwerpunkt S und dem Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises (M) von ABC in einer Gerade liegt, derartig, dass H und S die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise (M) und (O) sind. Man bestimme die Schnittpunkte:

$$(bc_1, cb_1) = \alpha, \quad (ca_1, ac_1) = \beta, \quad (ab_1, ba_1) = \gamma;$$

$$(bc, b_1c_1) = \alpha_1, \quad (ca, c_1a_1) = \beta_1, \quad (ab, a_1b_1) = \gamma_1.$$

Die ersteren Punkte α, β, γ liegen ebenfalls auf jener Gerade $HMSO$, und die Geraden $A\alpha_1, B\beta_1, C\gamma_1$ stehen auf derselben senkrecht. Ferner liegen je auf einer Gerade die vier Punkte:

$$A, \alpha, \beta_1, \gamma_1; \quad B, \beta, \gamma_1, \alpha_1; \quad C, \gamma, \alpha_1, \beta_1.$$

Diese Geraden sind die Polaren von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in Bezug auf (O) , und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ist ein Polardreieck dieses Kreises.

Die drei Strahlen $a\alpha_1, b\beta_1, c\gamma_1$ schneiden sich in einem Punkte P , ebenso die drei Strahlen $a_1\alpha_1, b_1\beta_1, c_1\gamma_1$ in einem Punkte Q , und diese beiden Punkte P, Q liegen auf dem Kreise (O) .

Die drei Schnittpunkte:

$$(BC, \beta_1\gamma_1), \quad (CA, \gamma_1\alpha_1), \quad (AB, \alpha_1\beta_1)$$

liegen mit P und Q auf einer Gerade, die drei Schnittpunkte:

$$(b_1c_1, \beta_1\gamma_1), \quad (c_1a_1, \gamma_1\alpha_1), \quad (a_1b_1, \alpha_1\beta_1)$$

mit H und die drei Schnittpunkte:

$$(bc, \beta_1\gamma_1), \quad (ca, \gamma_1\alpha_1), \quad (ab, \alpha_1\beta_1)$$

mit S auf einer Gerade.*

24. Rechnen mit Doppelverhältnissen.

Wenn $(abcd_1) + (abcd_2) = (abc\bar{s})$, so ist \bar{s} dem b in der Involution gepaart, in welcher d_1, d_2 ein Paar bilden und a ein Doppelement ist.

Wenn $(abcd_1) - (abcd_2) = (abcd)$, so ist d dem d_2 conjugirt in der Involution (aa, bd_1) .

Wenn $(abcd_1) \cdot (abcd_2) = (abc p)$, so ist p dem c conjugirt in der Involution (ab, d_1d_2) .

Wenn endlich $(abcd_1) : (abcd_2) = (abc q)$, so ist q dem d_2 conjugirt in der Involution (ab, cd_1) .

Vermittelst dieser Involutionen sind die Elemente \bar{s}, d, p, q zu construiren.

25. Es seien a, a_1 zwei Punkte einer Gerade, m die Mitte zwischen ihnen, ∞ der unendlich ferne Punkt und i, i_1 die Doppelpunkte der elliptischen Involution $(aa_1, m\infty)$; dann haben die Doppelverhältnisse (aa_1mi) und (aa_1mi_1) die Werthe $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$. Wenn ferner p, q auf der Gerade gegeben sind, sowie die reellen Zahlen α, β , so bestimme man die Punkte a, a_1 so, dass $(\infty q p a) = \alpha - \beta$, $(a p q a_1) = \alpha$, dann ist $(a p q i) = \alpha + \beta \sqrt{-1}$, $(a p q i_1) = \alpha - \beta \sqrt{-1}$, wofern i, i_1 in der angegebenen Weise aus a, a_1 construirt sind.

* Vergl. Schröter, Journal für Mathem. Bd. 68 S. 208, wo diese Aufgabe verallgemeinert ist.

26. Es seien a, b zwei Strahlen, φ ihr Winkel, a', b' die zu ihnen rechtwinkligen Strahlen ihres Büschels und i, i_1 die Doppelstrahlen der rechtwinkligen Involution (aa', bb') , welche nach den absoluten Punkten gehen, so ist:

$$(aa'bi)^2 = (aa'bb') = -\operatorname{tg}(ab) \cdot \operatorname{tg}(a'b') = -\operatorname{tg}^2 \varphi = (aa'bi_1)^2;$$

es sei $(aa'bi) = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{-1}$, $(aa'bi_1) = -\operatorname{tg} \varphi \sqrt{-1}$.

Dann ist $(abii_1) = e^{-2\varphi} \sqrt{-1}$ oder $\varphi = 2\sqrt{-1}l(abii_1)$. Dadurch ist der Winkel zweier Strahlen durch den natürlichen Logarithmus des Doppelverhältnisses ausgedrückt, welches sie mit den Strahlen aus ihrem Schnittpunkte nach den absoluten Punkten bilden. Insbesondere ist $-1 = e^{-\pi\sqrt{-1}}$.

27. Wenn durch einen Punkt M zu den Seiten eines Dreiecks die Parallelen gezogen werden, welche je die beiden andern Seiten in a und α , b und β , c und γ schneiden, so ist

$$Ma \cdot M\alpha + Mb \cdot M\beta + Mc \cdot M\gamma$$

die Potenz von M in Bezug auf den dem Dreieck umgeschriebenen Kreis.

28. Sind auf einer Gerade die Punktepaare aa_1, bb_1 und der Punkt c gegeben, so ergibt sich der sechste Punkt c_1 in Involution folgendermassen. Auf einer durch c gezogenen Gerade seien O, O' beliebige Punkte; die Verbindungslinie der Punkte $P = (Oa, O'b)$ und $P' = (Ob_1, O'a_1)$ geht durch c_1 (Nr. 51). Mit Hilfe von perspectiven Dreiecken (ohne Doppelverhältnisse oder metrische Relationen) zu beweisen, dass c_1 festbleibt, wie auch die Gerade durch c gezogen wird und die Punkte O, O' auf ihr gewählt werden.

29. Dreht man zwei gegebene projective Strahlbüschel bei festgehaltener Beziehung so um ihre Grundpunkte, dass in der Verbindungslinie derselben immer zwei entsprechende Strahlen sich vereinigen, so umhüllt der perspective Durchschnitt einen Kegelschnitt, für welchen die Grundpunkte die Brennpunkte sind. (Vergl. Nr. 83). In dem besonderen Falle, wo das eine Büschel aus parallelen Strahlen besteht und in sich parallel verschoben wird, ist der Kegelschnitt eine Parabel.

30. Es ist in Nr. 93 gefunden worden, dass von den Durchschnittspunkten der 15 Seiten eines vollständigen *Pascal'schen* Sechsecks 123456 z. B. folgende sechs:

$$(12, 36), (12, 45), (34, 51), (34, 62), (56, 23), (56, 14)$$

auf einem Kegelschnitt liegen. Wie viele solcher Sextupel giebt es? In welcher Beziehung stehen sie und die neuen Kegelschnitte zu einander und zum gegebenen Kegelschnitt?

31. Wenn man aus den sechs Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 eines Kegelschnitts ein bestimmtes von den 60 *Pascal'schen* Sechsecken bildet, so lassen sich diejenigen neun von den 15 Verbindungslinien, welche nicht Seiten desselben sind, auf drei verschiedene Weisen zu *Pascal'schen* Sechsecken zusammenfassen. Die *Pascal'schen* Geraden dieser drei Sechsecke schneiden sich in einem Punkte (*Kirkman'schen* Punkte). Z. B. beim Sechseck 123456 sind diese neun Geraden 13, 14, 15, 24, 25, 26, 35, 36, 46; und die drei Sechsecke, deren Seiten zu ihnen gehören, sind:

$$135264, \quad 351426, \quad 513642.$$

So wird jedem *Pascal'schen* Sechseck und also auch jeder *Pascal'schen* Gerade ein *Kirkman'scher* Punkt zugeordnet. Solcher Punkte giebt es mithin 60. Zwischen ihnen findet eine Beziehung statt, welche zu derjenigen dual ist, die früher (Nr. 93) zwischen den *Pascal'schen* Geraden erkannt wurde:

Solchen drei *Pascal'schen* Geraden, welche sich in einem *Steiner'schen* Punkte treffen, ordnen sich drei *Kirkman'sche* Punkte zu, welche auf einer Gerade liegen (*Cayley'sche* Gerade). Es giebt mithin 20 *Cayley'sche* Geraden, die den 20 *Steiner'schen* Punkten zugeordnet sind. Ebenso wie die 20 *Steiner'schen* Punkte in zehn Paare in Bezug auf den Grundkegelschnitt conjugirter Punkte zerfallen, theilen sich die zugeordneten *Cayley'schen* Geraden in zehn Paare ebenfalls in Bezug auf den Grundkegelschnitt conjugirter Geraden, und wenn p und π zwei conjugirte *Steiner'sche* Punkte, l und λ die zugeordneten conjugirten *Cayley'schen* Geraden sind, so geht l durch π und λ durch p .

Die 20 *Cayley'schen* Geraden laufen zu je vieren durch 15 Punkte (*Salmon'sche* Punkte), immer vier solche *Cayley'schen* Geraden, welche vier in einer Gerade liegenden *Steiner'schen* Punkten zugeordnet sind.

Die 20 *Cayley'schen* Geraden und 15 *Salmon'schen* Punkte bilden die Configuration, welche der *Hesse'schen* Configuration der 20 *Steiner'schen* Punkte und der 15 *Steiner-Plücker'schen* Geraden dual gegenübersteht (Nr. 23, 66, 93).

Dies duale Verhalten der beiden Configurationen ist nicht das der Polarität in Bezug auf den Grundkegelschnitt.

32. Wird einem Dreieck abc ein Kegelschnitt ein- und ein anderer umgeschrieben, so bilden die Berührungspunkte des ersteren mit den Seiten ein Dreieck $a_1 b_1 c_1$ und die Tangenten des letzteren in den Ecken ein Dreieck $a_2 b_2 c_2$. Beide sind bekanntlich zum gegebenen perspectiv; aber sie sind es auch zu einander (vergl. Aufg. 4).

33. Verbindet man die Ecken eines Dreiecks abc mit zwei Punkten P und P_1 und schneidet je die Gegenseite, so liegen die erhaltenen sechs Punkte a, b, c, a_1, b_1, c_1 auf einem Kegelschnitt. Legt man durch die drei Punkte a, b, c , welche von P herrühren, einen Kegelschnitt, so liegen dessen drei andere Schnitte a_1, b_1, c_1 mit den Seiten so, dass ihre Verbindungslinien mit den Gegenecken in einen Punkt zusammenlaufen.

34. In den drei Punkten a, b, c der vorigen Aufgabe berührt stets ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Seiten des Dreiecks; er ist eine Parabel, wenn P auf der Ellipse liegt, welche dem Dreieck abc so umgeschrieben ist, dass sie in jeder Ecke die Parallele zur Gegenseite berührt (Nr. 206). Die Punkte P im Innern dieser Ellipse führen zu Ellipsen und die äusseren zu Hyperbeln. Man behandle auch die duale Aufgabe.

35. Wenn A, B zwei conjugirte Durchmesser eines centrischen Kegelschnitts sind und a eine Axe, so ist:

$$\frac{\cos(a, A) \cdot \cos(a, B)}{\cos(A, B)} = \text{const.} = \frac{P_a}{P_a - P_b},$$

wo P_a, P_b die Potenzen der Involutionen conjugirter Punkte (Halbaxen-Quadrate) auf jener Axe und auf der andern Axe sind.

36. Sind zur Bestimmung eines Kegelschnitts der Mittelpunkt m und ein Polardreieck abc gegeben, so findet man die Axen der Lage nach durch folgende Construction:

Man verbinde m mit dem Höhenpunkt h von abc und construiere die zu bc, ca, ab symmetrisch in Bezug auf mh liegenden Geraden, welche sich in einem Punkte f schneiden. Die Halbierungslinien der Winkel zwischen den Strahlen mh und mf sind die Axen der Lage nach.

Zum Beweise benutze man Eigenschaften der Parabel, welche dem gegebenen Polardreieck und demjenigen eingeschrieben ist, das aus den Axen und der unendlich fernen Gerade G_∞ besteht.

Oder: Man construiert die Involution conjugirter Durchmesser, von welchen drei Paare unmittelbar herzustellen sind (Nr. 214), und in ihr das rechtwinklige Paar.

37. Ebenso sind, wenn der Mittelpunkt m und drei Punkte a, b, c des Kegelschnitts gegeben sind, leicht drei Paare conjugirter Durchmesser zu construieren.

Es sei ferner $a_1 b_1 c_1$ das Dreieck der Seitenmitten von abc , h_1 dessen Höhenpunkt. Man verfährt mit $a_1 b_1 c_1$ und h_1 , wie in Aufg. 36

mit abc und h , erhält den Punkt f_1 und in den Halbierungslinien der Winkel der Strahlen mh_1, mf_1 die Axen.

Mit Hilfe der Involution der conjugirten Durchmesser findet man, dass die Mittelpunkte der abc umgeschriebenen Ellipsen im Innern von $a_1b_1c_1$ und in den Scheitelräumen der Winkel dieses Dreiecks liegen, die der umgeschriebenen Hyperbeln in den an die Seiten des Dreiecks $a_1b_1c_1$ anstossenden Räumen.

Genau dieselbe Lage haben die Mittelpunkte der dem Dreieck abc eingeschriebenen Ellipsen und Hyperbeln.

Auch in diesem Falle, wo ein umgeschriebenes Dreieck und der Mittelpunkt m gegeben sind, sind drei Paare conjugirter Durchmesser leicht zu construiren. An jeder Ecke wird der vierte harmonische Strahl zu dem nach m gehenden in Bezug auf die Seiten gezogen. Diese drei Strahlen bilden ein Dreieck $a_1b_1c_1$, mit dem wie vorhin verfahren wird. Die Halbierungslinien der Winkel (mh_1, mf_1) sind die Axen des abc eingeschriebenen Kegelschnitts um den Mittelpunkt m .

In beiden Fällen ist die dem Kegelschnitt zugehörige Involution conjugirter Punkte auf G_∞ diejenige, welche von dem Kegelschnittbüschel ($ma_1b_1c_1$) berührt. Daraus folgt, dass es eine Parabel giebt, welche die Seiten von $a_1b_1c_1$ und die Axen berührt. Diese führt zur Construction.

38. Sind der Mittelpunkt m eines Kegelschnitts und drei Tangenten gegeben, so erhalten wir für die Potenzen der Involutionen conjugirter Punkte auf den Axen oder für die Halbaxen-Quadrate P_a, P_b die Formeln:

$$P_a + P_b = P_{\mathfrak{K}}, \quad P_a \cdot P_b = 4\pi_1\pi_2\pi_3 \cdot r,$$

worin $P_{\mathfrak{K}}$ die Potenz von m in Bezug auf den Kreis ist, für welchen das Dreieck Δ der gegebenen Tangenten ein Polardreieck und dessen Höhenpunkt der Mittelpunkt ist, ferner π_1, π_2, π_3 die Perpendikel aus m auf die Seiten des Dreiecks der Seitenmitten von Δ sind und r der Radius des dem Dreieck Δ umgeschriebenen Kreises ist.

Sind aber für den Kegelschnitt neben dem Mittelpunkt m drei Punkte gegeben, so hat man:

$$P_a + P_b = -\frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} P_{\mathfrak{K}}, \quad P_a \cdot P_b = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} \cdot r,$$

worin p_1, p_2, p_3 die drei Perpendikel aus m auf die Seiten des Dreiecks Δ der gegebenen Punkte, π_1, π_2, π_3 diejenigen auf die Seiten seines Mittendreiecks sind, r der Radius des dem gegebenen Dreieck Δ umgeschriebenen Kreises und $P_{\mathfrak{K}}$ die Potenz von m in Bezug auf den dem Mittendreieck umgeschriebenen Kreis (den Feuerbach'schen des gegebenen) ist.

Hinsichtlich der Vorzeichen von

$$p_1, p_2, p_3; \pi_1, \pi_2, \pi_3; r$$

gilt, was in Nr. 134 gesagt ist, wo die analoge Aufgabe für den Kegelschnitt mit dem Mittelpunkt m und einem gegebenen Polardreieck behandelt ist.*

Man leite auch aus diesen Formeln die Sätze der vorigen Aufgabe über die Lage der Mittelpunkte der um- oder eingeschriebenen Ellipsen und Hyperbeln ab.

39. Es seien P_1, P_2, P_3 die Potenzen der Involutionen conjugirter Punkte auf den Seiten eines Polardreiecks $A_1 A_2 A_3$ eines Kegelschnitts, h_1, h_2, h_3 die Höhen dieses Dreiecks, p_1, p_2, p_3 die Perpendikel aus dem Mittelpunkt M auf die Seiten, Δ der Inhalt des Dreiecks, r der Radius des umgeschriebenen Kreises, S_1, S_2, S_3 die Potenzen auf den parallelen Durchmessern, P_a, P_b diejenigen auf den Axen (Halbaxen-Quadrate), endlich $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ die Winkel, welche die Strahlen MA_1, MA_2, MA_3 bezw. mit den Seiten $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$ bilden, so ist:

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} = - \left(\frac{1}{p_1 h_1} + \frac{1}{p_2 h_2} + \frac{1}{p_3 h_3} \right),$$

$$\frac{P_1}{S_1} + \frac{P_2}{S_2} + \frac{P_3}{S_3} = 2,$$

$$\frac{P_1^2}{S_1} + \frac{P_2^2}{S_2} + \frac{P_3^2}{S_3} = P_a + P_b,$$

$$MA_1^2 \cdot \frac{p_1}{h_1} + MA_2^2 \cdot \frac{p_2}{h_2} + MA_3^2 \cdot \frac{p_3}{h_3} = - (P_a + P_b),$$

$$\frac{1}{P_1 \sin^2 \mathfrak{A}_1} + \frac{1}{P_2 \sin^2 \mathfrak{A}_2} + \frac{1}{P_3 \sin^2 \mathfrak{A}_3} = \frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b},$$

$$- \frac{P_1^2 P_2^2 P_3^2}{S_1 S_2 S_3} \cdot \frac{\Delta^2}{r^2} = P_a^2 P_b^2.$$

40. Die vier Schnittpunkte zweier demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte liegen mit jedem der drei Paare Gegenecken des Vierseits auf einem Kegelschnitt.

41. Von den acht Berührungspunkten zweier demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte liegen zwölfmal je vier mit zweien der vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte auf einem neuen Kegelschnitte. Und zwar sind dies immer die Berührungspunkte von zwei Seiten des Vierseits; diese schneiden sich bekanntlich auf einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks, und durch die Gegenecke derselben

* In Bezug auf die jetzigen Formeln vergleiche man den Anhang der ersten Auflage dieser Vorlesungen S. 556; jedoch fehlt dort, sowie in Aufg. 16 S. 220 der zweiten Auflage in der einen Formel das Minuszeichen.

geht die gemeinsame Secante, welche die beiden Schnittpunkte der Kegelschnitte verbindet.

Von den zwölf neuen Kegelschnitten berühren sich je die zwei, welche durch dieselben beiden Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte gehen, in diesen Punkten; und wir erhalten so sechs Paare sich doppelt berührender Kegelschnitte.

42. Von vier demselben Dreiecke abc umgeschriebenen Kegelschnitten haben je zwei noch einen vierten gemeinsamen Punkt. Diese sechs Punkte werden aus jeder der drei Ecken des Dreiecks durch eine Involution projicirt, wobei conjugirte Strahlen nach dem vierten Schnittpunkt zweier der Kegelschnitte und nach demjenigen der beiden übrigen gehen.

43. Es giebt vier Kegelschnitte, welche einem Dreieck eingeschrieben sind und durch zwei gegebene Punkte P, Q gehen. Sie werden alle von dem Kegelschnitt berührt, der durch P und Q und die vierten harmonischen Punkte geht, die auf den Seiten des Dreiecks den Schnitten mit der Gerade PQ in Bezug auf die Ecken zugeordnet sind.

Dies ist die Verallgemeinerung des Satzes, dass die vier Berührungskreise eines Dreiecks von dem Feuerbach'schen Kreise desselben tangirt werden.*

44. Wird einem Dreieck xyz ein Kegelschnitt $\mathcal{K}^{(2)}$ umgeschrieben und legt man aus den Schnitten ξ, η, ζ einer Gerade mit den Seiten yz, zx, xy die Tangentenpaare an ihn, welche in $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$ berühren, so schneiden sich die sechs Geraden $x\alpha, x\alpha', y\beta, y\beta', z\gamma, z\gamma'$ zu je dreien in vier Punkten und sind die Seiten eines vollständigen Vierecks, von dem x, y, z die Diagonalepunkte sind. Dies ist direct, also anders zu beweisen als in Nr. 274.

45. Der Ort eines Punktes P , von dem an einen gegebenen Kegelschnitt $K^{(2)}$ zwei Tangenten gehen, deren Winkel Halbierungslinien von gegebenen (zu einander rechtwinkligen) Richtungen haben, ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die vier Brennpunkte von $K^{(2)}$ geht.

46. Die Schnittpunkte der Seiten eines Dreiecks mit den Tangenten, welche je aus der Gegenecke an einen gegebenen Kegelschnitt $K^{(2)}$ kommen, liegen auf einem anderen Kegelschnitt (vergl. Aufgabe 33). Schneidet man je die zweiten Tangenten von $K^{(2)}$ aus den beiden auf derselben Seite gelegenen Schnittpunkten, so erhält man die Ecken eines neuen Dreiecks, das zum gegebenen perspectiv liegt.

Man bilde die dualen Sätze.

* Vergl. die in der Aufgabe 23 erwähnte Abhandlung von Schröter, sowie Mathem. Annalen Bd. 7 S. 517.

47. Die Seiten eines vollständigen Vierseits bilden, zu je dreien zusammengefasst, vier Dreiseite; die vier Kegelschnitte, welche diesen umgeschrieben sind und durch zwei gegebene Punkte Q, R gehen, haben noch einen dritten Punkt P_1 gemeinsam. Demnach haben auch die vier den Dreiseiten umgeschriebenen Kreise einen Punkt gemeinsam.

Fügt man einen dritten Punkt P auf der Gerade QR hinzu und construirt ebenso Q_1, R_1 , die zu R, P , bzw. P, Q gehören, so sind $P, P_1; Q, Q_1; R, R_1$ die Gegenecken eines zweiten Vierseits, und die acht Seiten beider Vierseite berühren denselben Kegelschnitt.

Man beweise dies mit Hilfe der Erzeugung der Kegelschnitte durch projective Strahlbüschel, also anders als in Nr. 341.

48. Die Tangente aus einem Punkte P einer Ellipse an den über der kleinen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreis ist gleich der halben Hauptaxe der confocalen Hyperbel, welche durch P geht.

Die kleinste Sehne durch P in dem über der grossen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreise ist gleich der durch die Asymptoten begrenzten Strecke auf der Scheiteltangente der genannten Hyperbel (dem reellen Factor der imaginären Nebenaxe).

49. Theilt man acht Punkte eines Kegelschnitts in zwei Gruppen von je vier Punkten, die einander zugeordnet werden:

$$a, b, c, d; \quad a_1, b_1, c_1, d_1,$$

und bestimmt die Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} (ab, a_1b_1) = x, \quad (ac, a_1c_1) = y, \quad (ad, a_1d_1) = z, \\ (cd, c_1d_1) = \xi, \quad (bd, b_1d_1) = \eta, \quad (bc, b_1c_1) = \zeta, \end{aligned}$$

so schneiden sich die drei Geraden $x\xi, y\eta, z\zeta$ in einem Punkt.

50. Wenn ein Dreieck abc und ein Punkt P gegeben sind, so ermittle man die Schnitte:

$$\begin{aligned} (Pa, bc) = \alpha, \quad (Pb, ca) = \beta, \quad (Pc, ab) = \gamma, \\ (bc, \beta\gamma) = \alpha', \quad (ca, \gamma\alpha) = \beta', \quad (ab, \alpha\beta) = \gamma'; \end{aligned}$$

die drei Punkte α', β', γ' liegen auf einer Gerade, der harmonischen Polare p von P in Bezug auf abc . Es giebt einen dem abc eingeschriebenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher die Seiten in α, β, γ berührt, und einen ihm umgeschriebenen $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welcher $aa', b\beta', c\gamma'$ zu Tangenten in den Ecken hat. Für beide sind P und p Pol und Polare, und beide haben dieselbe immer elliptische Involution conjugirter Elemente um P und auf p , so dass sie sich auf p doppelt (imaginär) berühren: in Q, R . Die beiden gemeinsamen Tangenten $P(Q, R)$ bilden mit den drei reellen Strahlen $P(a, b, c)$ je ein äquianharmonisches System (Nr. 48),

und die Dreiecke abc und PQR liegen auf alle möglichen sechs verschiedenen Arten perspectiv.*

Aber auch der Kegelschnitt, welcher dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ so eingeschrieben ist, dass er die Seiten in den Schnitten mit $P(\alpha, \beta, \gamma)$ berührt, tangirt sich mit $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ in Q, R , u. s. w.

P und p sind Centrum und Axe für die verschiedenen Paare perspectiver Dreiecke, wie abc und $\alpha\beta\gamma$, abc und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Ecken des Dreiseits $(a\alpha', b\beta', c\gamma')$ sind.

51. Zieht man aus jeder Ecke eines vollständigen Vierseits, dem ein Kegelschnitt eingeschrieben ist, nach den Berührungspunkten der Seiten, die sich in der Gegenecke schneiden, die Strahlen, so erhält man zwölf Strahlen. Solche acht unter ihnen, welche von zwei Paaren Gegenecken kommen, berühren einen Kegelschnitt, und wir erhalten so drei Kegelschnitte. Je zwei von ihnen haben vier Strahlen, die aus zwei Gegenecken kommen, zu gemeinsamen Tangenten. Diese drei Vierseite haben dasselbe Diagonaldreieck wie das gegebene, und dies Dreieck ist ein gemeinsames Polardreieck des gegebenen Kegelschnitts und der drei neuen Kegelschnitte.

52. Auf der Senkrechten, welche aus einem Punkte auf seine Polare in Bezug auf einen centrischen Kegelschnitt gefällt ist, wird durch ihn die Strecke zwischen den Schnitten mit den Axen in dem Verhältniss $\pm \frac{b^2}{a^2}$ (+ bei der Ellipse, - bei der Hyperbel) getheilt (Verallgemeinerung des Satzes in Nr. 126, 129).

53. Durch irgend zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1$ zweier projectiven Punktreihen als Brennpunkte und die Verbindungslinie e_1f der entsprechenden Punkte der im Schnittpunkt vereinigten Punkte e, f_1 als Tangente ist ein Kegelschnitt vollständig und eindeutig bestimmt.

Alle diese Kegelschnitte haben noch zwei feste Tangenten gemeinsam, die durch den genannten Schnittpunkt gehen.

54. Ein Sechseck zu zeichnen, das zugleich ein *Pascal'sches* und ein *Brianchon'sches* ist. Wenn 123456 ein solches Sechseck ist, so hat es mit drei andern aus denselben Punkten gebildeten die *Pascal'sche* Gerade gemein. Die vier Tripel auf dieser Gerade, welche von den vier Sechsecken herrühren, bestehen nur aus sechs Punkten, die überdies drei Paare der Involution sind, welche dieser Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt (12...6) zukommt.

55. Wenn t_1, t_2, t_3, t_4 die Tangenten eines Kegelschnitts in den Punkten t_1, t_2, t_3, t_4 sind, so bilden die Punkte $t_1t_2, t_1, t_3, t_3t_4, t_4, t_2$ ein *Pascal'sches* Sechseck, das zugleich ein *Brianchon'sches* ist.

* Schröter, Math. Annalen Bd. 2 S. 553.

56. Man beweise die Richtigkeit der folgenden möglichst einfachen linearen Construction der Polare des Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf den durch die fünf Punkte a, b, c, d, e bestimmten Kegelschnitt:

$$\begin{aligned} |(ba, cd), (ac, \mathfrak{P}e) &= l, |(bd, ce), (ac, \mathfrak{P}d) = l', \\ |(ab, l), d &= m, |(ab, l'), e = m', \\ (\mathfrak{P}e, m) = e', (\mathfrak{P}d, m') &= d', (de, d'e') = s, (d'e', ed') = t; \end{aligned}$$

st ist die Polare.

57. Legt man durch die drei Diagonalepunkte eines vollständigen Vierecks einen Kegelschnitt, so laufen die drei Verbindungslinien je der zweiten Schnittpunkte desselben mit zwei Gegenseiten durch einen Punkt.

58. Wenn $abc, a_1b_1c_1$ zwei perspective Dreiecke sind, so dass aa_1, bb_1, cc_1 in einen Punkt zusammenlaufen, dann berühren $ab_1, ac_1, ba_1, bc_1, ca_1, cb_1$ einen Kegelschnitt.

59. Durch zwei projective Strahlbüschel O_1, O_2 erhält man eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades der Punkte der Ebene (quadratische Inversion):

Jedem Punkte ξ correspondirt der Schnittpunkt ξ' der Strahlen von O_2, O_1 , welche den Strahlen $O_1\xi, O_2\xi$ entsprechen. Zwei so correspondirende Punkte ξ, ξ' liegen stets mit dem Punkte S in gerader Linie, in dem sich die dem Strahle O_1O_2 entsprechenden Strahlen treffen, und sind conjugirt in Bezug auf den durch die beiden projectiven Büschel erzeugten Kegelschnitt $K^{(2)}$, dessen sämtliche Punkte sich selbst entsprechen. Durchläuft ξ eine Gerade \mathcal{G} , so beschreibt ξ' einen durch O_1, O_2, S gehenden Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$, und dreht sich \mathcal{G} um einen Punkt, so haben die entsprechenden Kegelschnitte noch einen vierten Punkt gemeinsam. Vergl. die in Nr. 223 besprochene involutorische Verwandtschaft zweiten Grades.

60. Wenn ein Parallelogramm $ab\alpha\beta$ vorliegt, die Räume anzugeben, in denen die Punkte x liegen, für welche die Involution $x(a, \alpha; b, \beta)$ elliptisch oder hyperbolisch ist.

61. Es sollen folgende drei Systeme von Kegelschnitten:

- a) alle Kegelschnitte, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, eine gegebene Gerade \mathcal{L} berühren, und denen eine gegebene Strahlinvolution $B(l, \lambda)$ zugehört;
- β) alle Kegelschnitte, welche \mathcal{L} berühren, durch P gehen und denen eine gegebene Punktinvolution $\mathcal{A}(p, \pi)$ zugehört;
- γ) alle Kegelschnitte, denen eine gegebene Strahlinvolution $B(l, \lambda)$ und eine gegebene Punktinvolution $\mathcal{A}(p, \pi)$ zugehören,

untersucht werden, und zwar hinsichtlich der verschiedenen Arten von Kegelschnitten, welche in ihnen vorkommen, hinsichtlich des Ortes des Mittelpunktes, der Brennpunkte, der Axen, Asymptoten, der Polare eines festen Punktes, des Poles einer festen Gerade.

62. Sind ein Dreieck ABC und zwei Punkte P^0, Π^0 gegeben, so kann man A, B, C als die Grundpunkte dreier Strahlinvolutionen annehmen, welche so hergestellt werden:

Man bezeichne die Seiten BC, CA, AB mit a, b, c , die Strahlen $P^0(A, B, C)$ durch x^0, y^0, z^0 und die Strahlen $\Pi^0(A, B, C)$ durch ξ^0, η^0, ζ^0 , dann bestimmen die Strahlenpaare $bc, x^0\xi^0$ die Involution um A , die Paare $ca, y^0\eta^0$ die um B und die Paare $ab, z^0\zeta^0$ die um C . Die Involutionen stehen zu einander in der bekannten Abhängigkeit, dass die Strahlen, die in ihnen den nach einem Punkte P gehenden Strahlen $P(A, B, C)$ conjugirt sind, sich in einem Punkte Π treffen. Hierdurch wird eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades mit P und Π als entsprechenden Punkten hergestellt, deren Eigenschaften untersucht werden sollen.

63. Ein Specialfall hiervon ist, wenn an jeder Ecke von ABC die Strahlen nach P und Π symmetrisch sind in Bezug auf die Halbierungslinie des Dreieckswinkels; welche Lage müssen P^0 und Π^0 haben? Die Mittelpunkte der vier Berührungskreise von ABC sind sich selbst entsprechend in der Verwandtschaft. Der unendlich fernen Gerade entspricht der umgeschriebene Kreis. Hieraus ergibt sich ein Kennzeichen dafür, von welcher Art der durch A, B, C, D, E gelegte Kegelschnitt ist. Man transformire D, E in Δ, E und sehe zu, ob ΔE den ABC umgeschriebenen Kreis schneidet, berührt oder nicht schneidet; dann ist jener Kegelschnitt Hyperbel, Parabel, Ellipse.

64. Wenn von zwei projectiven Strahlbüscheln das eine festgehalten und das andere um den Grundpunkt gedreht wird, so beschreibt der erzeugte Kegelschnitt ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten.

65. Ein Dreieck sei gegeben; jede Gerade g trifft die Seiten a, b, c in drei Punkten α, β, γ ; die symmetrischen Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ zu ihnen je in Bezug auf die Seitenmitte liegen wiederum auf einer Gerade g_1 . Dreht sich g um einen Punkt, so umhüllt g_1 einen Kegelschnitt, welcher a, b, c berührt, und umgekehrt.

66. Die Geraden, welche die Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in drei Punktpaaren einer gleichseitig-hyperbolischen Involution schneiden, umhüllen eine Curve dritter Klasse. Sie ist die Curve der Asymptoten der Kegelschnitte, welche dem Viereck umgeschrieben sind,

und berührt die unendlich ferne Gerade in den beiden Punkten, in denen sie von den Parabeln des Büschels tangirt wird.

Die endlichen Doppelpunkte jener gleichseitig-hyperbolischen Involutionen erzeugen den Mittelpunkts-Kegelschnitt des Büschels.

67. Der Ort der Asymptoten der Kegelschnitte einer Schaar ist ebenfalls eine Curve dritter Klasse, für welche die unendlich entfernte Gerade nur einfache Tangente ist.

68. Der Ort der Tangenten an die Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar in den Schnittpunkten mit einer festen Gerade ist eine Curve dritter Klasse, welche diese Gerade im Falle des Büschels zur doppelten, im Falle der Schaar zur einfachen Tangente hat.

Der Ort der Berührungspunkte der Tangenten aus einem festen Punkte an die Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar ist dritter Ordnung und hat den Punkt zum einfachen, bezw. doppelten Punkte.

In welcher Beziehung stehen die drei derartigen Curven, die zu demselben Punkte und drei conjugirten Kegelschnittbüscheln gehören?

In einem Büschel sowohl, wie in einer Schaar giebt es drei Kegelschnitte, welche eine gegebene Gerade zur Normale haben.

69. Die Axen aller einem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Parabeln umhüllen eine Curve dritter Klasse, welche die unendlich ferne Gerade in den absoluten Punkten berührt und drei Rückkehrpunkte hat. Diese Curve ist eine dreibogige Hypocykloide (Nr. 128); ihre drei Rückkehrtangenten treffen sich im Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises unter Winkeln von 120° und sind dem dreifachen Radius des Kreises gleich; so dass die drei Rückkehrpunkte auf einem concentrischen Kreise liegen. Derselbe ist die Basis der Hypocykloide, und der sie erzeugende rollende Kreis ist dem erstgenannten Kreise gleich.

70. Durch jeden Punkt P eines Kegelschnitts gehen drei nicht in ihm osculirende Krümmungskreise, welche bei der Ellipse alle reell sind; ihre Osculationspunkte liegen mit P auf einem Kreise und haben den Mittelpunkt des Kegelschnitts zum Schwerpunkt.

71. Unter den einem (reellen) Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten haben je drei auch dem Vorzeichen nach gleiche Producte der Halbaxen-Quadrate (und daher gleiche Inhalte, wenn sie Ellipsen sind); es giebt unter ihnen zwei, eine Ellipse und eine Hyperbel, bei denen der absolute Werth des Productes grösser ist als je bei den beiderseitigen Nachbarn. Wenn a, b, c die Mitten der Diagonalen des Vierseits sind, welche auf der Mittelpunktsgerade der Schaar liegen, und s

der Schwerpunkt dieser drei Punkte ist, so liegen die Mittelpunkte e und h jener Ellipse und Hyperbel so, dass:

$$es = hs = \sqrt{\frac{sa^2 + sb^2 + sc^2}{6}}.*$$

72. Unter den einem (reellen) Viereck umgeschriebenen Kegelschnitten haben je sechs auch dem Vorzeichen nach gleiche Producte der Halbaxen-Quadrate (also gleichen Inhalt, wenn sie Ellipsen sind).

Besteht das Büschel aus lauter Hyperbeln, so giebt es drei, bei denen der absolute Werth des Productes grösser ist als je bei den beiderseitigen Nachbarn; besteht es aber aus Ellipsen und Hyperbeln, so giebt es eine Ellipse, bei welcher der Werth des Productes kleiner ist als bei den beiderseitigen Nachbarn, und zwei Hyperbeln, bei denen der absolute Werth grösser ist als je bei den beiderseitigen Nachbarn.

73. Der vierte Schnittpunkt zweier Kegelschnitte neben drei bekannten gemeinschaftlichen Punkten \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} ergibt sich möglichst einfach durch folgende lineare Construction:

Wenn p, p' , bzw. q, q' die beiden weiteren bestimmenden Punkte der Kegelschnitte sind, so construiren man die Schnittpunkte $(\mathcal{B}p, \mathcal{C}p')$ und $(\mathcal{A}p', pq)$ und verbinde sie durch l , ebenso die Schnittpunkte $(\mathcal{B}q, \mathcal{C}q')$ und $(\mathcal{A}q', pq)$ und verbinde sie durch l' ; es sei dann $(l, \mathcal{A}\mathcal{B}) = p_1$ und $(l', \mathcal{A}\mathcal{B}) = q_1$. Wiederum werden die Schnittpunkte $(\mathcal{B}p, \mathcal{C}q_1)$ und $(\mathcal{B}q, \mathcal{C}p_1)$ durch m und die Schnittpunkte $(\mathcal{A}p, \mathcal{C}q_1)$ und $(\mathcal{A}q, \mathcal{C}p_1)$ durch m' verbunden; ist dann $(m, pq) = a$, $(m', pq) = b$, so ist $\mathcal{D} = (\mathcal{A}a, \mathcal{B}b)$ der gesuchte Punkt.

Zum Beweise möge dienen, dass, wenn in der Involution, welche in die Gerade pq durch das Büschel der beiden Kegelschnitte eingeschnitten wird, a, b, c die conjugirten Punkte zu den Schnitten von pq mit $\mathcal{B}\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$ sind, dann $\mathcal{A}a, \mathcal{B}b, \mathcal{C}c$ in den gesuchten Punkt \mathcal{D} zusammenlaufen.

Eine andere ebenfalls lineare Construction von \mathcal{D} ist die folgende:

Man verbinde \mathcal{B} und \mathcal{C} , \mathcal{C} und \mathcal{A} , \mathcal{A} und \mathcal{B} durch a, b, c , ferner $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mit p, p', q, q' durch $a, b, c; a', b' c'; \alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta' \gamma'$, construiren die Punkte:

$$\begin{aligned} [(bb, cc), (b'b', c'c')] &= \mathcal{A}_1, & [(b\beta, c\gamma), (b\beta', c\gamma')] &= \mathcal{A}_2, \\ [(cc, aa), (c'c', a'a')] &= \mathcal{B}_1, & [(c\gamma, a\alpha), (c\gamma', a\alpha')] &= \mathcal{B}_2, \\ [(aa, bb), (a'a', b'b')] &= \mathcal{C}_1, & [(a\alpha, b\beta), (a\alpha', b\beta')] &= \mathcal{C}_2 \end{aligned}$$

* Steiner, Gesammelte Werke Bd. II S. 333—334.

und verbinde $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ durch A , $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ durch B , $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ durch C ; dann laufen die Verbindungslinien von \mathfrak{A} mit BC , von \mathfrak{B} mit CA , von \mathfrak{C} mit AB in den gesuchten Punkt \mathfrak{D} zusammen.

Das Dreieck ABC ist das gemeinsame Polardreieck der beiden Kegelschnitte.

74. Wenn zwei Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_2^{(2)}$ von einem dritten doppelt berührt werden, so gehen die beiden Berührungssehnen durch eine Ecke ihres gemeinsamen Polardreiecks, und es gibt also, den drei Ecken dieses Dreiecks entsprechend, drei Systeme von Kegelschnitten, welche die beiden Kegelschnitte doppelt berühren, und in jedem zwei Kegelschnitte, welche durch einen gegebenen Punkt gehen oder eine gegebene Gerade berühren. Man construirt für diese hinreichende Bestimmungsstücke.

75. Wie es vier Kegelschnitte giebt, die einen gegebenen Kegelschnitt $K^{(2)}$ doppelt berühren und durch drei gegebene Punkte gehen (Nr. 256), so giebt es auch vier, welche $K^{(2)}$ doppelt berühren und a) drei gegebene Geraden tangiren, b) durch zwei gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade berühren, c) durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Geraden tangiren.

76. Für eine Büschel-Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte gilt:

Ist durch einen der beiden gemeinsamen Berührungspunkte eine Gerade gezogen, so gehen die Tangenten an die verschiedenen Kegelschnitte in den zweiten Schnitten mit dieser Gerade alle durch einen festen Punkt auf der Tangente des andern gemeinschaftlichen Berührungspunktes.

Die Tangenten aus einem Punkte P an einen Kegelschnitt der Büschel-Schaar sind zu dem Strahle aus P nach dem Berührungspol und der Tangente im Punkte P an den durch ihn gehenden Kegelschnitt der Büschel-Schaar harmonisch.

77. Sämmtliche Tangenten eines Kegelschnitts einer Schaar, zu welcher zwei Kreise gehören, schneiden diese beiden Kreise in Sehnen von festem Verhältniss; bei der Parabel der Schaar ist es 1.

78. Es sei O das Centrum der krummen Involution, die in einen Kegelschnitt durch eine rechtwinklige Involution eingeschnitten wird, deren Grundpunkt P auf ihm liegt; es liegt auf der Normale von P . Welches ist der Ort von O , wenn P den Kegelschnitt durchläuft? Giebt es besondere Punkte P , für welche O der Krümmungsmittelpunkt ist, und wie findet man sie?

79. Die Leitlinien aller Parabeln, welche ein gegebenes Dreieck zum Polardreieck haben, gehen durch den Mittelpunkt des um-

geschriebenen Kreises desselben (Nr. 133); der *Feuerbach'sche Kreis* (durch die Seitenmitten und Höhenfusspunkte) ist der Ort der Brennpunkte dieser Parabeln.

80. Das System der Kegelschnitte zu untersuchen, für welche der Punkt a und die Gerade \mathfrak{A} , der Punkt b und die Gerade \mathfrak{B} Pol und Polare sind.

81. Zwei projective Punktreihen $\mathfrak{A} (abc \dots \varepsilon \dots)$ und $\mathfrak{A}_1 (\alpha_1 b_1 c_1 \dots \varepsilon_1 \dots)$ werden aus entsprechenden Punkten x und x_1 zweier anderen projectiven Punktreihen projectirt; die entstehenden projectiven Strahlbüschel erzeugen einen Kegelschnitt, welcher sich mit x und x_1 ändert. Von diesem Kegelschnittssystem gehen zwei Curven durch einen gegebenen Punkt; es enthält sechs Geradenpaare. Wie vereinfacht es sich, wenn die von x und x_1 beschriebenen Punktreihen perspectiv sind?

82. Wenn von einem der Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels eine Strahlinvolution ausgeht, so entsteht auf jedem der Kegelschnitte des Büschels eine krumme Involution. Der Ort des Centrums ist eine Gerade; oder die Gerade, welche zwei von den Centren verbindet, enthält auch alle übrigen.

83. Man schneide eine Strahlinvolution mit zwei durch ihren Grundpunkt \mathfrak{A} gehenden Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in krummen Involutionsen, deren Centren P und P_1 seien. Die Büschel um diese Punkte sind projectiv, indem sich solche Strahlen entsprechen, die von demselben Strahlenpaare der gegebenen Involution herrühren, und erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, der durch die drei übrigen Schnittpunkte \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, aber nicht durch \mathfrak{A} geht.

Welchen Ort umhüllen, wenn $K^{(2)}$ von einem Strahlenpaare der Involution in α, β und $K_1^{(2)}$ in α_1, β_1 geschnitten wird, die Verbindungslinien $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \alpha\beta_1, \beta\alpha_1$?

84. Es sind fünf Punktinvolutionsen gegeben; es soll ein Kegelschnitt gefunden werden, welcher durch zwei conjugirte Punkte einer jeden von ihnen geht. Sind sie alle hyperbolisch, so sind die Doppelpunkte einer jeden für ihn conjugirt.

85. Es giebt vier Kegelschnitte, welche einem gegebenen Dreieck umgeschrieben sind und zwei gegebene Geraden berühren. Die sechs übrigen Schnittpunkte dieser Kegelschnitte liegen paarweise auf drei Geraden, welche durch den Schnitt der gegebenen Geraden gehen (vergl. Aufg. 40).

86. Man nehme aus dem System der Kegelschnitte, welche einem gegebenen Dreieck ABC umgeschrieben sind und eine gegebene Gerade \mathfrak{L} berühren (Nr. 263—265), vier feste heraus; auf einem veränderlichen

fünften bestimmen sie vier (vierte) Schnittpunkte, deren Doppelverhältniss constant und zwar gleich dem der Berührungspunkte der vier festen Kegelschnitte mit \mathfrak{L} ist.

87. Sind $\mathfrak{K}^{(2)}$, $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zwei Kegelschnitte des eben erwähnten Systems und $K^{(2)}$ derjenige, der durch A, B, C und ihre beiden Berührungspunkte mit \mathfrak{L} geht, so schneiden die Tangenten von $K^{(2)}$ in A, B, C die Gerade \mathfrak{L} in denjenigen Punkten, in denen sie von den übrigen drei gemeinschaftlichen Tangenten von $\mathfrak{K}^{(2)}$, $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ getroffen wird.

88. Durch drei Grundpunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ eines Kegelschnittbüschels sei ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegt und \mathfrak{x} sein vierter Schnitt mit einem Kegelschnitt $K^{(2)}$ des Büschels; durch den vierten Grundpunkt \mathfrak{D} sei die Gerade \mathfrak{g} gelegt, welche $\mathfrak{K}^{(2)}$ in $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ und $K^{(2)}$ nochmals in \mathfrak{x}' schneidet.

Ist noch X der Schnitt $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{g})$, so lässt sich mit Hülfe einer Involution erkennen, dass

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}') = (\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{D}X),$$

worin $\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{g}, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$. Daraus folgt, dass die krumme Punktreihe der \mathfrak{x} auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ projectiv ist zu der geraden Punktreihe der \mathfrak{x}' auf \mathfrak{g} und zum Kegelschnittbüschel.

Man beweise damit, dass in der in Nr. 223 besprochenen Verwandtschaft das Strahlbüschel, das eine Gerade \mathfrak{G} beschreibt, und das Kegelschnittbüschel, das der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{G}^{(2)}$ erzeugt, projectiv sind.

89. Wenn ein Kegelschnitt $K^{(2)}$ und ein Punkt O gegeben sind, so werde jedem Punkte \mathfrak{x} der Schnitt \mathfrak{x}' seiner Polare in Bezug auf $K^{(2)}$ mit $O\mathfrak{x}$ zugeordnet. Bewegt sich \mathfrak{x} auf einer Gerade, so beschreibt \mathfrak{x}' einen Kegelschnitt (quadratische Inversion, vergl. Aufg. 59). Beschreibt \mathfrak{x} einen Kegelschnitt, so durchläuft \mathfrak{x}' eine höhere Curve; aber es gibt Kegelschnitte, die wieder in Kegelschnitte übergehen. Welche Lage haben sie? Man suche sich selbst entsprechende Punkte auf, sowie solche, denen eine ganze Gerade entspricht.

Ist $K^{(2)}$ ein Kreis und O sein Mittelpunkt, dann ist

$$O\mathfrak{x} \cdot O\mathfrak{x}' = r^2,$$

wo r der Radius des Kreises ist (Transformation durch reciproke Radien, vergl. Nr. 13 Anmerkung). Eine Gerade geht in einen Kreis über, der durch O geht, und die beliebigen Kreise sind diejenigen Kegelschnitte, welche wiederum in Kegelschnitte übergehen und zwar auch in Kreise.

Man kann auch r^2 durch $-r^2$ ersetzen, d. h. dem Grundkreise einen imaginären Radius geben.

90. Die vier Berührungspunkte der Tangenten aus zwei Punkten an einen Kegelschnitt liegen mit den beiden Punkten auf einem andern Kegelschnitt. Die drei Kegelschnitte, welche sich so für einen Kegelschnitt und die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits ergeben, gehören demselben Büschel an.

91. Sind ein Dreieck ABC und zwei Geraden $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1$ gegeben, so bestimmen auf jeder Seite die beiden Ecken und die beiden Schnitte mit \mathcal{L} und \mathcal{L}_1 , als Paare conjugirter Punkte, eine Involution. Diese Involutionen sind entweder alle drei hyperbolisch oder nur eine und die beiden andern elliptisch. Wie lässt sich aus der Lage der gegebenen Stücke das Eintreten des einen oder andern Falls entscheiden? Um einen Doppelpunkt s einer der Involutionen drehen wir einen Strahl, der die beiden andern Seiten in a, b trifft; wenn a, β die zu diesen Punkten conjugirten sind, so geht auch $\alpha\beta$ durch s . Welchen Ort umhüllen aber $\alpha\beta, b\alpha$?

92. Die Geraden, welche zwei gegebene Kegelschnitte $K^{(2)}, K_1^{(2)}$ in zwei harmonischen Punktepaaren $s, t; s_1, t_1$ schneiden, umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher das gemeinsame Polardreieck von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ auch zum Polardreieck hat und die acht Tangenten dieser Curven in den vier Begegnungspunkten berührt (Nr. 87). $\mathfrak{R}^{(2)}$ wird von den gemeinsamen Tangenten aller Paare von Kegelschnitten des Büschels der gegebenen Kegelschnitte berührt, welche zu diesen harmonisch sind.

Er zerfällt in zwei Punkte, wenn $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zu zwei Geradenpaaren des Büschels harmonisch sind, und diese beiden Punkte werden in die Verbindungslinie der Doppelpunkte dieser Geradenpaare durch denjenigen Kegelschnitt des Büschels eingeschnitten, der zum dritten Geradenpaare in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ harmonisch ist.

Berühren sich $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ doppelt, so ist $\mathfrak{R}^{(2)}$ derjenige Kegelschnitt des Büschels, der, in Bezug auf sie, zur Doppelgerade des Büschels (Berührungssehne) harmonisch ist.

93. Die Geraden, welche $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nach einem andern constanten Doppelverhältniss (oder dem reciproken) schneiden, umhüllen eine Curve vierter Klasse.

94. Von drei Polardreiecken eines Kegelschnitts sind je zwei einem Kegelschnitt eingeschrieben; in welchem Zusammenhange stehen die drei sich so ergebenden Kegelschnitte?

95. Die Verbindungslinie zweier Punkte P, Q treffe die Seiten eines Dreiecks ABC in drei Punkten, deren vierte harmonische Punkte, je in Bezug auf die Ecken, A_1, B_1, C_1 seien. Durch P, Q seien drei

Kegelschnitte gelegt, von denen der eine dem Dreieck ABC , der zweite dem $A_1B_1C_1$ umgeschrieben ist und der dritte ABC zum Polardreieck hat. Diese drei Kegelschnitte haben noch zwei Punkte gemeinsam, deren (reelle) Verbindungslinie construiert werde.

So gehören der dem Dreieck ABC umgeschriebene Kreis, der Feuerbach'sche Kreis und der Kreis, für welchen ABC Polardreieck ist und dessen Mittelpunkt der Höhenpunkt von ABC ist, zu demselben Büschel, und Potenzlinie ist die Perspektivitätsaxe für das Dreieck ABC und das Dreieck seiner Höhenfusspunkte.

96. Wenn zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$, $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ so liegen, dass es ein Dreieck giebt, welches dem $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein- und dem $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ umgeschrieben ist, so giebt es unendlich viele solcher Dreiecke xyz . Sind A, B, C drei Punkte von $\mathfrak{K}^{(2)}$, so berühren die sechs Seiten von ABC und xyz einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher, wenn xyz sich ändert, eine Schaar durchläuft, d. h. ausser BC, CA, AB noch eine vierte feste Gerade berührt, welche zugleich Tangente von $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ ist.

97. Durch einen Punkt P gehen vier Sehnen eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, die eine gegebene Länge l haben. Ihre Mitten liegen auf einem Kreise; wie verändert sich derselbe, wenn P bleibt, aber l sich ändert?

98. Wenn ein Strahl sich um einen Punkt P dreht, wie verändert sich die Potenz der Involution conjugirter Punkte, die ihm in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zugehört, wann ist sie am grössten oder kleinsten?

99. Die Polare \mathfrak{B} des Punktes a eines Kegelschnitts $A^{(2)}$ in Bezug auf einen Basiskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ berührt den Polarkegelschnitt $B^{(2)}$ in dem Punkte b ; die Polare \mathfrak{A} des Punktes b in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist Tangente im Punkte a an $A^{(2)}$. Welche Curven werden bei der Veränderung von a auf $A^{(2)}$ von der Gerade ab und dem Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ beschrieben? In welchem Zusammenhange stehen diese Curven zu einander und zu $A^{(2)}$, $B^{(2)}$?

100. Auf zwei Geraden g, g_1 sind je vier harmonische Punkte $a, b; c, d$ und $a_1, b_1; c_1, d_1$ gegeben. Die acht projectiven Beziehungen zwischen ihnen führen zu acht Kegelschnitten. Die Polaren des Punktes $\mathfrak{S} = gg_1$ in Bezug auf diese laufen zweimal zu je vieren in einen Punkt zusammen: O, O' . Diese Punkte sind in Bezug auf alle acht Kegelschnitte conjugirt, ebenso wie die Strahlen $\mathfrak{S}(O, O')$.

Auf der Gerade $s = OO'$ haben wir eine Involution, von welcher O, O' die Doppelpunkte sind und Punktepaare eingeschnitten werden durch die Geradenpaare:

$$\begin{aligned} &aa_1, bb_1; ab_1, ba_1; ac_1, bd_1; ad_1, bc_1; \\ &ca_1, db_1; cb_1, da_1; cc_1, dd_1; cd_1, dc_1. \end{aligned}$$

Diese hyperbolische Involution steht mit den beiden elliptischen auf g, g_1 , die durch die Paare ab, cd ; a_1b_1, c_1d_1 bestimmt werden, in dem mehrfach (z. B. Nr. 185, 186) besprochenen Zusammenhange; so dass die letzteren auf zwei Weisen perspectiv liegen mit O, O' als Perspectivitätscentren. Die beiden so entstehenden elliptischen Strahl- involutionen um O, O' sind dann wieder ebenso mit der hyperbolischen um S verbunden, welche g, g_1 zu Doppelstrahlen hat.

101. Ein vollständiges Fünfeck 12345 enthält zwölf einfache Fünfecke, welche sechs Paare bilden, derartig, dass in jedem Paare die Seiten des einen Fünfecks die Diagonalen des andern sind, wie 12345 und 13524; solche complementären Fünfecke umfassen daher alle zehn Verbindungslinien. Jedes Paar theilt die 15 Diagonal- punkte des vollständigen Fünfecks (Schnitte von Seiten, die nicht Ecken sind) in drei Gruppen von je fünf. Die erste Gruppe besteht aus fünf Punkten, in denen sich Seiten des ersten Fünfecks des Paares schneiden und welche ein Fünfeck bilden, das ebenfalls diese Seiten zu Seiten hat; die zweite Gruppe verhält sich ebenso zu den Seiten des zweiten Fünfecks des Paares (oder den Diagonalen des ersten), in den Punkten der dritten Gruppe schneiden sich Seiten des einen mit Seiten des andern Fünfecks.

102. Die einzigen Punkte, aus denen zwei gegebene projective Punktreihen durch (concentrische) gleiche und gleichlaufende Strahl- büschel projicirt werden, sind die Brennpunkte des durch die Punkt- reihen erzeugten Kegelschnitts.

103. $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1$ seien die Schnitte der Seiten $\mathcal{BC}, \mathcal{CA}, \mathcal{AB}$ eines Dreiecks bezw. mit den Strahlen $\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, so hat man:

$$\frac{\mathcal{A}\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{B}\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{C}\mathcal{B}_1}{\mathcal{A}\mathcal{B} \cdot \mathcal{B}\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}\mathcal{A}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{C}\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{B}\mathcal{C}_1}{\mathcal{A}\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}\mathcal{B} \cdot \mathcal{B}\mathcal{A}},$$

wo Δ und Δ_1 die Flächen von \mathcal{ABC} und $\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1$ sind;

$$\mathcal{A}\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{B}\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{C}\mathcal{B}_1 = 2r \cdot \Delta_1,$$

$$\frac{\mathcal{A}\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{B}\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{C}\mathcal{B}_1}{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{B}_1\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_1\mathcal{A}_1} = \frac{r}{2r_1},$$

wo r und r_1 die Radien der den Dreiecken umgeschriebenen Kreise sind;

$$\frac{\Delta}{\mathcal{D}\mathcal{A} \cdot \mathcal{D}\mathcal{B} \cdot \mathcal{D}\mathcal{C}} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta_1}{\mathcal{D}\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{D}\mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{D}\mathcal{C}_1},$$

$$\frac{\sin \mathcal{B}\mathcal{D}\mathcal{C}}{\mathcal{D}\mathcal{A}} + \frac{\sin \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{A}}{\mathcal{D}\mathcal{B}} + \frac{\sin \mathcal{A}\mathcal{D}\mathcal{B}}{\mathcal{D}\mathcal{C}} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \mathcal{B}\mathcal{D}\mathcal{C}}{\mathcal{D}\mathcal{A}_1} + \frac{\sin \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{A}}{\mathcal{D}\mathcal{B}_1} + \frac{\sin \mathcal{A}\mathcal{D}\mathcal{B}}{\mathcal{D}\mathcal{C}_1} \right\}.$$

104. Construirt man über den Sehnen, welche auf den Strahlen eines Büschels durch einen Kegelschnitt entstehen, als Durchmesser die Kreise, so haben diese alle einen Punkt gleicher Potenz, der auf

der Senkrechten liegt, die auf der Polare des Grundpunktes des Büschels im Mittelpunkt der ihr in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Involution errichtet ist.

105. Die Involution, welche die von den Punkten einer Gerade l kommenden Tangenten eines Kegelschnitts auf einer festen Tangente desselben einschneiden, ist mit derjenigen identisch, welche durch die dem Pole von l zugehörige Strahlinvolution eingeschnitten wird.

106. Zwei Geraden \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und ein Punkt O sind gegeben; der Ort eines Punktes P , für welchen PO^2 zum Rechteck der Entfernungen des P von \mathfrak{A} , \mathfrak{B} ein constantes Verhältniss hat, ist ein Kegelschnitt. Verändert sich die Constante, so ergibt sich ein Büschel, dessen Grundpunkte in \mathfrak{A} und \mathfrak{B} durch die (imaginären) Doppelstrahlen der rechtwinkligen Involution um O eingeschnitten werden. Die Axen der Kegelschnitte sind den Halbirungslinien der Winkel von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} parallel.

107. Innerhalb eines Kegelschnitts ist ein Punkt O gegeben; es soll eine Gerade gefunden werden, deren dem Kegelschnitt zugehörige Involution aus O durch eine rechtwinklige Involution projectirt wird.

108. Es sind fünf Geraden a_1, a_2, b_1, b_2, g und zwei Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ gegeben. Ein Punkt X auf g macht als Centrum die beiden Punktreihen auf a_1, a_2 perspectiv; diese machen die Strahlbüschel $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ projectiv und diese wiederum die Punktreihen auf b_1, b_2 . Der durch letztere erzeugte Kegelschnitt durchläuft eine Schaar, wenn X auf g sich bewegt.

109. Wenn drei Punkte a, b, c und zwei Geraden a, b gegeben sind, welche bezw. durch a, b gehen, und ein durch einen festen Punkt O gehender beweglicher Strahl diesen Geraden in ζ, η begegnet, so haben alle Kegelschnitte $(a\zeta c\eta)$ noch einen vierten Punkt d gemeinsam.

110. Von einem Kegelschnitt sind drei Punkte und eine zugehörige Involution conjugirter Punkte gegeben; weitere Punkte des Kegelschnitts zu construiren.

111. Von einem Kegelschnitt sind zwei Involutionen conjugirter Punkte und zwei einzelne conjugirte Punkte gegeben; die vollständige Involution conjugirter Punkte auf der Verbindungslinie der letzteren, bezw. deren Schnitte mit dem Kegelschnitt zu construiren.

112. Es seien M der Mittelpunkt eines Kegelschnitts, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ die Schnitte der Normale und Tangente des Punktes A mit den Axen und K der Krümmungsmittelpunkt desselben, so haben wir (vergl. Nr. 158) noch folgende metrischen Relationen:

$$\begin{aligned}
 a^2 \cdot M\mathfrak{A}^2 + b^2 \cdot M\mathfrak{B}^2 &= c^4, \quad \frac{K\mathfrak{B}}{M\mathfrak{A}^2} + \frac{K\mathfrak{A}}{M\mathfrak{B}^2} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{c^2}, \\
 \frac{K\mathfrak{B}}{a^2} - \frac{K\mathfrak{A}}{b^2} &= \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^3}{c^4}, \quad a^2 \cdot K\mathfrak{A} \cdot M\mathfrak{A}^2 + b^2 \cdot K\mathfrak{B} \cdot M\mathfrak{B}^2 = 0, \\
 \frac{a^2}{M\mathfrak{A}_1^2} + \frac{b^2}{M\mathfrak{B}_1^2} &= 1, \quad a^2 \cdot \frac{K\mathfrak{A}}{M\mathfrak{A}_1^2} + b^2 \cdot \frac{K\mathfrak{B}}{M\mathfrak{B}_1^2} = 0, \\
 K\mathfrak{B} \cdot M\mathfrak{A}_1^2 + K\mathfrak{A} \cdot M\mathfrak{B}_1^2 &= \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot c^2, \\
 \frac{K\mathfrak{B}}{a^2} - \frac{K\mathfrak{A}}{b^2} &= \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{h^2},
 \end{aligned}$$

worin h das Perpendikel aus M auf die Tangente ist; also:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{c^2}{h}.$$

113. Zwei in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ berührende Tangenten einer Parabel mögen sich in c schneiden; eine dritte Tangente, die in \mathfrak{C} berührt, schneide jene in b, a , so ist:

$$\begin{aligned}
 cb : b\mathfrak{A} = \mathfrak{B}a : ac = a\mathfrak{C} : \mathfrak{C}b &= m : n, \\
 \Delta \mathfrak{B}cb = \frac{m}{m+n} \mathfrak{A}\mathfrak{B}c, \quad c\mathfrak{A}a = \frac{n}{m+n} \mathfrak{A}\mathfrak{B}c, \\
 \mathfrak{B}c\mathfrak{C} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \mathfrak{A}\mathfrak{B}c, \quad c\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \left(\frac{n}{m+n}\right)^2 \mathfrak{A}\mathfrak{B}c, \\
 \mathfrak{B}a\mathfrak{C} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^3 \mathfrak{A}\mathfrak{B}c, \quad b\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \left(\frac{n}{m+n}\right)^3 \mathfrak{A}\mathfrak{B}c, \\
 \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 2 bac \quad (\text{vergl. Nr. 160}).
 \end{aligned}$$

Ferner ist, wenn F der Brennpunkt der Parabel ist:

$$F\mathfrak{A} \cdot F\mathfrak{B} = Fc^2,$$

$$Fa \cdot \sin bFc + Fb \cdot \sin cFa + Fc \cdot \sin aFb = 0$$

oder

$$Fa \cdot \sin a + Fb \cdot \sin b + Fc \cdot \sin c = 0,$$

wo a, b, c die Winkel des umgeschriebenen Dreiecks abc sind.

114. Wenn fünf Tangenten einer Parabel zu einem einfachen Fünfeit angereicht werden, was auf zwölf Arten geschehen kann, so ist die Fläche des zugehörigen Diagonalfünfeits, das dieselben Ecken hat, aber die Diagonalen zu Seiten, gleich 0; d. h., wenn z. B. $abcde$ das Tangentenfünfeit ist, so ist folgende Summe von Dreiecken

$$(ab, cd, ea) + (ab, ae, bc) + (ab, bc, de) = 0,$$

und diese Dreiecke bilden das Diagonalfünfeit (ab, cd, ea, bc, de) .

115. Wenn ein constanter stumpfer Winkel mit seinen Schenkeln beständig eine Parabel berührt, so beschreibt der Scheitel den einen Zweig einer Hyperbel, für welche Brennpunkt und Leitlinie der Parabel ebenfalls Brennpunkt und zugehörige Leitlinie sind, und zwar den Zweig, welcher den Brennpunkt umschliesst; ersetzt man den Winkel durch seinen spitzen Nebenwinkel, so ergibt sich der andere Zweig.

116. Wenn \mathcal{A} , \mathcal{B} zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts und $P_{\mathcal{A}}$, $P_{\mathcal{B}}$ die Potenzen der Involutionsen conjugirter Punkte auf ihnen sind, \mathcal{S} eine beliebige Gerade, so hat nicht nur

$$\begin{aligned} & P_{\mathcal{A}} \sin^2(\mathcal{A}, \mathcal{S}) + P_{\mathcal{B}} \sin^2(\mathcal{B}, \mathcal{S}), \\ \text{sondern auch} & P_{\mathcal{A}} \cos^2(\mathcal{A}, \mathcal{S}) + P_{\mathcal{B}} \cos^2(\mathcal{B}, \mathcal{S}) \end{aligned}$$

für alle Paare conjugirter Durchmesser denselben Werth, wobei \mathcal{S} sogar ausserhalb der Ebene des Kegelschnitts liegen kann.

117. Die Potenzen P_l , P_d der Involutionsen conjugirter Punkte, in Bezug auf einen Kegelschnitt, auf einer beliebigen Gerade l und auf dem parallelen Durchmesser d verhalten sich wie die Abstände des Pols der l von l und d ; geht l_1 parallel zu l und d durch diesen Pol, so ist

$$\frac{1}{P_l} + \frac{1}{P_{l_1}} = \frac{1}{P_d},$$

wo P_{l_1} analoge Bedeutung hat.

118. Dreht man um den Mittelpunkt eines Kegelschnitts einen rechten Winkel, so umhüllt die Sehne der Schnittpunkte der Schenkel einen Kreis.

119. Die Potenz der Involution der conjugirten Durchmesser d , d' eines Kegelschnitts für die Axe a als Centralstrahl, d. h.

$$\text{tg}(a, d) \cdot \text{tg}(a, d') \text{ ist } -\frac{P_b}{P_a}.$$

120. Wenn \mathcal{S} der Schnitt der Tangenten in \mathcal{B} , \mathcal{B}' an den Kegelschnitt ($\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{B}'\mathcal{A}$) ist, so ist:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{C}\mathcal{S}) \cdot \mathcal{B}(\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}\mathcal{S}) \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{B}\mathcal{S}) = -1.$$

Es sei t die Tangente in \mathcal{B} , r der Radius des Kreises ($\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$), ρ der Krümmungsradius des Kegelschnitts in \mathcal{B} und \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{B}' seien mit a , b , c bezeichnet, so ist weiter:

$$\rho = r \cdot \frac{\sin \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{B}' \cdot \sin \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B} \cdot \sin \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}'}{\sin(a, t) \cdot \sin(b, t) \cdot \sin(c, t)},$$

womit für den Krümmungsradius in \mathcal{B} an den Kegelschnitt durch \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{B}' , dessen Tangente in \mathcal{B} bekannt ist, ein Ausdruck gewonnen ist.

121. Wenn $abcd$, $a_1 b_1 c_1 d_1$ zwei vollständige Vierseite sind, so sind

$$ab, c_1 d_1; ac, b_1 d_1; ad, b_1 c_1; bc, a_1 d_1; bd, a_1 c_1; cd, a_1 b_1$$

sechs Paare conjugirter Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt oder in einem Polarsystem.

122. Für ein vollständiges Viereck $ABCD$, dessen Diagonalepunkte sind:

$$a = (AD, BC), \quad b = (BD, AC), \quad c = (CD, AB),$$

gelten folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{DA}{aA} (aB \cdot aC - aA \cdot aD) &= \frac{DB}{bB} (bA \cdot bC - bB \cdot bD) \\ &= \frac{DC}{cC} (cA \cdot cB - cC \cdot cD), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(aA \cdot aD - aB \cdot aC) \left(\frac{AD^2}{aA \cdot aD} - \frac{BC^2}{aB \cdot aC} \right) \\ &= (bB \cdot bD - bA \cdot bC) \left(\frac{BD^2}{bB \cdot bD} - \frac{AC^2}{bA \cdot bC} \right) \\ &= (cC \cdot cD - cA \cdot cB) \left(\frac{CD^2}{cC \cdot cD} - \frac{AB^2}{cA \cdot cB} \right), \end{aligned}$$

oder

$$\frac{(aB \cdot aC - aA \cdot aD)(aC \cdot aA - aB \cdot aD)(aA \cdot aB - aC \cdot aD)}{aA \cdot aB \cdot aC \cdot aD}$$

und die beiden analogen Ausdrücke für b und c sind einander gleich.

Wie lauten diese Beziehungen,

1. wenn das Viereck einem Kreise eingeschrieben oder
2. jede Ecke Höhenpunkt des Dreiecks der andern ist?

Sind P_a, P_b die Halbaxen-Quadrate des Kegelschnitts, für welchen D Mittelpunkt und ABC Polardreieck sind, so ist:

$$P_a + P_b = \frac{DA}{aA} (aB \cdot aC - aA \cdot aD).$$

123. Die vier Kegelschnitte, welche je eine Ecke eines Vierecks $ABCD$ zum Mittelpunkte und das Dreieck der drei andern zum Polardreiecke haben, sind ähnlich; und zwar sind sie Hyperbeln, wenn jeder der vier Punkte vom Dreiecke der andern ausgeschlossen ist, hingegen drei sind reelle Ellipsen, der vierte eine imaginäre, wenn einer innerhalb des Dreiecks des andern liegt.

Ferner ist für diese vier Kegelschnitte:

$$\sum \left(\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} \right) = 0.$$

Liegen die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise, so sind die vier Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln; ist jeder der Höhenpunkt des Dreiecks der andern, so sind sie Kreise (einer imaginär); die Summe der Quadrate der Radien ist dann

$$DA^2 + BC^2 = DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2.$$

124. Ein Kegelschnitt $K^{(2)}$ sei gegeben, M sein Mittelpunkt, O ein beliebiger Punkt, s der Schnitt von MO mit der Polare von O , a, b die Schnitte eines durch O gehenden Strahls l mit $K^{(2)}$ und P_d die Potenz der Involution conjugirter Punkte auf dem zu l parallelen Durchmesser d , so ist

$$Oa \cdot Ob = -\frac{Os}{Ms} \cdot P_d.$$

Damit übertragen sich Beziehungen zwischen Potenzen auf Durchmessern auf Producte $Oa \cdot Ob$, die auf Strahlen eines Büschels O liegen.

Wenn um O ein rechter Winkel gedreht wird, dessen Schenkel den $K^{(2)}$ in $a, b; a_1, b_1$ treffen, so ist

$$\frac{1}{Oa \cdot Ob} + \frac{1}{Oa_1 \cdot Ob_1} = \frac{Ms}{sO} \cdot \left(\frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb} \right) = \text{const.},$$

wo P_a, P_b wieder die Halbaxen-Quadrate von $K^{(2)}$ sind.

Auch

$$\left(\frac{ab}{Oa \cdot Ob} \right)^2 + \left(\frac{a_1 b_1}{Oa_1 \cdot Ob_1} \right)^2$$

ist constant.

Sind hingegen die beiden beweglichen Strahlen, welche den $K^{(2)}$ in $a, b; a', b'$ schneiden, stets zu conjugirten Durchmessern parallel, so ist:

$$Oa \cdot Ob + Oa' \cdot Ob' = \frac{sO}{Ms} (Pa + Pb) = \text{const.};$$

$$Oa \cdot Ob \cdot Oa' \cdot Ob' \sin^2(ab, a'b') = \left(\frac{sO}{Ms} \right)^2 \cdot Pa Pb = \text{const.}$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist

$$Oa \cdot Ob + Oa_1 \cdot Ob_1 = 0 \quad \text{und} \quad Oa \cdot Ob + Oa' \cdot Ob' = 0,$$

(vergl. Nr. 165) und daher:

$$Oa_1 \cdot Ob_1 = Oa' \cdot Ob',$$

wo $Oa_1 b_1$ zu einem Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel senkrecht, $Oa' b'$ zu dem ihm conjugirten Durchmesser parallel ist.

125. Zu drei in gerader Linie g liegenden Punkten a_1, a_2, a_3 seien in einem Polarsysteme conjugirt b_1, b_2, b_3 ; aus ihnen werden, nach Hesse's Satz, die weiteren drei Paare conjugirter Punkte $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3$ construirt:

$$\begin{array}{l} (a_2 a_3, b_2 b_3) = \alpha_1, \quad | \quad (a_3 a_1, b_3 b_1) = \alpha_2, \quad | \quad (a_1 a_2, b_1 b_2) = \alpha_3, \\ (a_2 b_3, a_3 b_2) = \beta_1, \quad | \quad (a_3 b_1, a_1 b_3) = \beta_2, \quad | \quad (a_1 b_2, a_2 b_1) = \beta_3; \end{array}$$

die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ liegen auch auf g , die Punkte β und β aber auf einem Kegelschnitte, und die Strahlen aus einem Punkte desselben nach den α und α sind involutorisch denen nach den Punkten β und β gepaart.

126. In einem Kegelschnittbüschel seien ζ, η, ζ die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks, $\zeta^{(2)}, \eta^{(2)}, \zeta^{(2)}$ die Geradenpaare, ζ_1, η_1, ζ_1 die Schnitte einer Gerade \mathcal{G} mit $\eta\zeta, \zeta\zeta, \zeta\eta$; so beziehe man die Punktreihe \mathcal{G} so auf das Kegelschnittbüschel, dass den ζ_1, η_1, ζ_1 die $\zeta^{(2)}, \eta^{(2)}, \zeta^{(2)}$ entsprechen. Dem Punkte \mathfrak{P} von \mathcal{G} entspreche $\mathfrak{P}^{(2)}$. Die Polare p von \mathfrak{P} je in Bezug auf $\mathfrak{P}^{(2)}$ umhüllt den Polarkegelschnitt $\mathcal{G}^{(2)}$ von \mathcal{G} (Nr. 222) in Bezug auf das Kegelschnittbüschel, und Berührungspunkt ist je der in Bezug auf dieses Büschel dem \mathfrak{P} conjugirte Punkt \mathfrak{P}_1 . Wenn den $\mathfrak{P}, \mathcal{Q}$ von \mathcal{G} die Kegelschnitte $\mathfrak{P}^{(2)}, \mathcal{Q}^{(2)}$ entsprechen, so ist die Polare von \mathfrak{P} nach $\mathcal{Q}^{(2)}$ identisch mit der von \mathcal{Q} nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ und zwar die Gerade, welche die conjugirten Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathcal{Q}_1$ verbindet.

127. Man leite den Satz von der constanten Summe, bezw. Differenz der Brennstrahlen eines centrischen Kegelschnittes aus dem Satze vom constanten Verhältniss der Entfernungen der Punkte des Kegelschnitts von Brennpunkt und Leitlinie ab, und umgekehrt.

128. Wenn die Dreiecke \mathfrak{ABC} und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ so perspectiv liegen, dass das zweite dem ersten umgeschrieben ist, und \mathfrak{M} das Perspectivitätscentrum ist, so ist:

$$\frac{2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{ABC}} = - \frac{\mathfrak{MA}_1 \cdot \mathfrak{MB}_1 \cdot \mathfrak{MC}_1}{\mathfrak{MA} \cdot \mathfrak{MB} \cdot \mathfrak{MC}} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3},$$

wo $p_1, p_2, p_3; \pi_1, \pi_2, \pi_3$, wie in Aufgabe 38, die Lothe aus \mathfrak{M} auf die Seiten von \mathfrak{ABC} und auf die des Mittendreiecks abc dieses Dreiecks sind (mit der Vorzeichen-Bestimmung von Nr. 134).

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ und abc sind Polarfiguren in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_p^{(2)}$, der \mathfrak{M} zum Mittelpunkt und \mathfrak{ABC} zum Polardreieck hat.

Es sei $\mathfrak{K}_u^{(2)}$ der Kegelschnitt, welcher \mathfrak{ABC} umgeschrieben ist und \mathfrak{M} zum Mittelpunkt hat; die Polaren der Seitenmitten a, b, c in Bezug auf ihn bilden ein Dreieck $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$, das zum Dreieck abc ähnlich ist und ähnlich liegt mit \mathfrak{M} als Aehnlichkeitscentrum; das Aehnlichkeitsverhältniss $\frac{\mathfrak{MA}_2}{\mathfrak{Ma}}$ ist

$$- \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3};$$

auch zu \mathfrak{ABC} ist $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$ ähnlich; daher ist:

$$\frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{ABC}} = \frac{1}{4} \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} \right)^2.$$

Endlich sei $\mathfrak{K}_i^{(2)}$ der Kegelschnitt mit dem Mittelpunkt \mathfrak{M} , welcher \mathfrak{ABC} eingeschrieben ist; die Berührungspunkte seien $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$, und \mathcal{D} der gemeinsame Punkt von

$$\mathfrak{AA}', \mathfrak{BB}', \mathfrak{CC}'.$$

Wenn a_1, b_1, c_1 die Mitten von $\mathcal{A}\mathcal{A}', \mathcal{B}\mathcal{B}', \mathcal{C}\mathcal{C}'$ sind, so schneiden sich aa_1, bb_1, cc_1 in \mathcal{M} .

Es ist:

$$-\frac{\mathcal{D}\mathcal{A} \cdot \mathcal{D}\mathcal{B} \cdot \mathcal{D}\mathcal{C}}{\mathcal{D}\mathcal{A}' \cdot \mathcal{D}\mathcal{B}' \cdot \mathcal{D}\mathcal{C}'} = -\frac{\mathcal{M}a \cdot \mathcal{M}b \cdot \mathcal{M}c}{\mathcal{M}a_1 \cdot \mathcal{M}b_1 \cdot \mathcal{M}c_1} = \frac{2\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}}{\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3}.$$

Es seien $\mathcal{A}_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{C}_3$ die Pole der Seiten von abc in Bezug auf $\mathcal{N}_i^{(2)}$, so ist:

$$-\frac{\mathcal{M}\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M}\mathcal{B}_3 \cdot \mathcal{M}\mathcal{C}_3}{\mathcal{M}\mathcal{A}' \cdot \mathcal{M}\mathcal{B}' \cdot \mathcal{M}\mathcal{C}'} = \frac{2\mathcal{A}_3\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3}{\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3};$$

also:

$$\mathcal{A}_3\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3 = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}.*$$

* Vergl. *Schröter*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 29 Seite 160, wo jedoch einige Vorzeichen verändert werden mussten.

II.

Lebenslauf der beiden Verfasser dieses Buches.

Jacob Steiner wurde am 18. März 1796 in Utzenstorf im Kanton Bern geboren. Mit 17 Jahren verliess er den Bauernhof seines Vaters und wurde Schüler und später Hilfslehrer bei Pestalozzi in Iferten. Nach dreijährigem Studium in Heidelberg gelangte er nach Berlin, wo er verschiedene Stellungen an Schulen und als Hauslehrer verwaltete, insbesondere auch im Hause *Wilhelm von Humboldt's*. Freundschaftliche Beziehungen verbanden ihn mit *Jacobi* und dem damals in Berlin weilenden *Abel*; auf die Productionskraft dieser drei jungen ausgezeichneten Mathematiker rechnend, gründete *Crelle* 1826 sein Journal.

1832 erschien *Steiner's* Hauptwerk: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.“ Es brachte ihm 1834 die Ernennung zum ausserordentlichen Professor an der Berliner Universität, und gleichzeitig wählte ihn die Akademie der Wissenschaften zu ihrem Mitgliede.

Am 1. April 1863 ist er in Bern gestorben unter Hinterlassung eines Kapitals zu einem von der Berliner Akademie zu ertheilenden Preis für synthetische Geometrie.

Seine gesammelten Werke hat diese Akademie 1881 und 1882 in zwei Bänden herausgegeben. Die darin auch wieder abgedruckte „Systematische Entwicklung“ ist neuerdings zum dritten Male erschienen in der Sammlung: *Klassiker der exacten Wissenschaften* (Nr. 82, 83).

Heinrich Schröter, geboren am 8. Januar 1829 in Königsberg i. Pr., studirte an der dortigen Universität unter *Richelot*, *Hesse* und *F. Neumann*, dann in Berlin, wo er *Dirichlet* und vornehmlich *Steiner* hörte. 1855 habilitirte er sich an der Universität Breslau und hat ihr bis zu seinem am 3. Januar 1892 erfolgten Tode angehört, seit Herbst 1861 als ordentlicher Professor.

Ausser Journalabhandlungen und seiner Bearbeitung des zweiten Theils der *Steiner'schen* Vorlesungen, von dem die erste Auflage 1867, die zweite 1876 erschien, veröffentlichte er folgende drei Bücher:

Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung (1880),
Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung (1888),
Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Species (1890).

Ausführlicheres über *Steiner* findet man in dem Vortrage von *C. F. Geiser*: „Zur Erinnerung an *Jacob Steiner*“ (Zürich, 1874), von welchem eine von *Casorati* herrührende italienische Uebersetzung in den *Annali di Matematica* Ser. II Bd. 7 erschienen ist, sowie in dem Aufsätze von *F. Bützberger*: „Zum 100. Geburtstage *Jacob Steiner's*“, der im 27. Jahrgang der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht erschienen ist und insbesondere Mittheilungen über *Steiner's* Lehrjahre in Iferten bringt; und über *Schröter* in dem vom Bearbeiter dieser dritten Auflage geschriebenen Nekrologe im Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. II.



Druckfehlerverzeichnis.

- Seite 7 Z. 17 v. o. l. $\pm 2\pi$ st. $\pm \pi$ und Z. 18 und 19 $1 - 2, 0, + 2$ st. $-1, 0, +1$.
- „ 46 Z. 16 v. o. l. 13 st. 3.
- „ 56 Z. 12 v. o. l. P, Q st. PQ .
- „ 60 Z. 6 v. o. l. $a_1 a_1$ st. $a_1 a$.
- „ 86 Z. 1 v. o. l. xb, xc st. $x\bar{b}, xc$.
- „ 93 Z. 12 v. o. l. 22 st. 23.
- „ 163 Fig. 45 l. x, x^1, ξ, ξ^1 st. ξ^1, ξ, x^1, x .
- „ 176 Z. 15 v. o. l. \leq st. \leq .
- „ 205 Anm. l. Nr. 232 st. § 48, Ende.
- „ 211 Z. 13 v. u. l. $p_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{C}$ st. $p_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{G}$.
- „ 286 Anm. Z. 2 l. zweier Ebenen st. der Ebene.
- „ 336 Z. 1 v. u. und S. 337 Z. 1 v. o. l. liegen in st. gehören zu.
- „ 358 Anm. ist die Parenthese: z. B. zwei conjugirte Hyperbeln zu streichen.
- „ 392 Z. 11 v. o. l. $\mathfrak{C}'c_1'$ st. $\mathfrak{C}'c_1'$.
-

14

