СОХОЦКІЙ

ОБЪ ИНТЕГРАЛАХЪ

ОБЪ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ

ИНТЕГРАЛАХЪ

и

ФУНКЦІЯХЪ,

употребляемыхъ

ПРИ РАЗЛОЖЕНІЯХЪ ВЪ РЯДЫ.

СОЧИНЕНІЕ

Ю. Сохоцкаго.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія М. Стасюлевича, Вас. Остр., 2-я линія, № 7.
1873.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета печатать дозволяется.

Деканъ *А. Бекетовъ*.

С.-Петербургъ, 15 Декабря 1872.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ сочиненіи этомъ я стараюсь обратить вниманіе читателя на рѣшеніе уравненія

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x},$$

то есть, на опредѣленіе функціи $f(x)$, по данной функціи $\varphi(x)$.

Съ подобнаго рода вопросами мы встрѣчаемся въ мемуарахъ: Абеля—„*Résolution d'un problème mècanique*", Коши—„*Sur une loi de reciprocité qui existe entre certaines fonctions*", Мюрфи—„*On the inverse method of definite integrals*".

Можно указать на нѣсколько другихъ случаевъ опредѣленія функціи подъ знакомъ интеграла: одинъ изъ простѣйшихъ есть тотъ, на который мы выше указали; онъ заслуживаетъ особеннаго вниманія потому, что его рѣшеніе прямо приводитъ къ основнымъ началамъ теоріи функціи отъ мнимой перемѣнной. Но подобнаго рода выводъ всѣмъ уже извѣстныхъ началъ я считалъ лишнимъ и ограничился приложеніями къ такимъ вопросамъ, на которые до сихъ поръ было менѣе обращено вниманія въ литературѣ или, гдѣ предлагаемые мною пріемы облегчаютъ выкладки и бросаютъ новый свѣтъ на встрѣчаемыя затрудненія.

Сообразно разсматриваемымъ мною вопросамъ, все сочиненіе раздѣлено на три главы.

Первая глава посвящена теоріи опредѣленныхъ интеграловъ; въ ея началѣ выведено много извѣстныхъ формулъ для различныхъ опредѣленныхъ интеграловъ, которые, впрочемъ, легко получаются помощью способа Коши, т. е. чрезъ интегрованіе по контуру.

Я думаю, что выводъ всѣхъ этихъ интеграловъ изъ основной теоремы о производящей функціи имѣетъ преимущество предъ тѣми выводами, которые мы находимъ у самого Коши и другихъ извѣстныхъ писателей. Далѣе, я занимаюсь преобразованіемъ различныхъ опредѣленныхъ интеграловъ вида

$$\frac{1}{f(x)}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}$$

въ неопредѣленные. Преобразованія эти замѣчательны во многихъ отношеніяхъ: при помощи ихъ мы получаемъ рядъ достойныхъ вниманія формулъ, выражающихъ, преимущественно, связи между различными опредѣленными интегралами; наконецъ, онѣ послужили мнѣ исходною точкой для вывода основныхъ свойствъ функцій, разсматриваемыхъ въ двухъ слѣдующихъ главахъ.

Вторая глава посвящена общей теоріи Лежандровыхъ функцій, играющихъ въ наше время видную роль въ наукѣ. На самомъ дѣлѣ, теорія этихъ функцій, сама по себѣ отличающаяся простотою, даетъ ключъ къ рѣшенію многихъ вопросовъ механики, математической физики, интегрованія, квадратуры и проч. Поэтому то въ литературѣ этого предмета мы встрѣчаемся съ именами извѣстнѣйшихъ ученыхъ, и кажется, что кратное, но пополненное въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ изложеніе теоріи Лежандровыхъ функцій, основанное на новыхъ соображеніяхъ, не будетъ лишено интереса.

Въ послѣдней главѣ я излагаю общую теорію трехъ группъ Ламэвыхъ функцій и, не ограничиваясь одними характеристическими свойствами, я далъ разложенія этихъ функцій въ ряды по Лежандровымъ функціямъ.

Выводъ этихъ замѣчательныхъ разложеній удалилъ меня нѣсколько отъ первоначально принятой программы; но я позволилъ себѣ сдѣлать это отступленіе ради полноты изложенія, тѣмъ болѣе, что теорія Ламэвыхъ функцій не была до сихъ поръ излагаема въ томъ видѣ, въ какомъ я ее здѣсь помѣщаю.

Ю. Сохоцкій.

ОГЛАВЛЕНIЕ.

ГЛАВА I.

Опредѣленные интегралы.

СТРАН.

§ I. Характеристическiя свойства функцiи $\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}$ 1

§ II. Выраженiе функцiи $\frac{1}{(x-a_1)^\alpha \ldots (x-a_n)^\lambda}$ чрезъ опредѣленный интегралъ. Слѣдствiя 9

§ III. Выраженiе функцiй $\frac{1}{\sqrt{x}\,(a-i\sqrt{x})^n}$ и $\frac{1}{(a-i\sqrt{x})^n}$ черезъ опредѣленные интегралы. Слѣдствiя 11

§ IV. Еще подобныя выраженiя фуикцiй $e^{i\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} e^{i\sqrt{x}}$, $e^{i\sqrt{x}} \log x$. и проч. Слѣдствiя 13

§ V. Теорема Абеля 19

§ VI. Преобразованiе функцiи

$$\int_0^1 \frac{(t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + a_n)\, t^\alpha (1-t)^\beta \ldots (1-l^2 t)^\delta}{t-x}\, dt. \; . \; . \; . \; . \quad 23$$

§ VII. Связи между полными ультраэллиптическими интегралами 26

§ VIII. Преобразованiе функцiи

$$\int_0^1 \frac{(t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n)\, e^{\alpha t} t^\beta \ldots (1-l^2 t)^\varepsilon}{t-x}\, dt.$$ Частные случаи 32

§ IX. Преобразованіе функціи

$$\int_0^1 \frac{(t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n) e^{-\alpha t^2} t^\beta \ldots (1-l^2 t)^\varepsilon}{t-x} dt.$$ Частные случаи 36

§ X. Преобразованіе функціи

$$\int_0^0 \frac{(t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n) e^{-\frac{\alpha}{t}} dt}{(t-x) t^\beta \ldots (1-l^2 t)^\varepsilon}.$$ Частные случаи . . . 41

ГЛАВА II.

Функціи, подобныя функціямъ Лежандра.

СТРАН.

§ XI. Знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи $\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta}{t-x} dt$ въ непрерывную дробь 44

§ XII. Разложеніе функціи, разсматриваемой въ пред. § въ непрерывную дробь 50

§ XIII. Производящая Лежандровыхъ функцій 53

§ XIV. Знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} t^\beta dt}{t-x}$ въ непрерывную дробь 59

§ XV. Разложеніе функціи, разсматриваемой въ пред. §-фѣ въ непрерывную дробь. Производящая знаменателей подходящихъ дробей. . 65

§ XVI. Знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} dt}{t-x}$ въ непрерывную дробь. 68

§ XVII. Разложеніе функціи, разсматриваемой въ пред. §-фѣ въ непрерывную дробь. Производящая знаменателей. 73

§ XVIII. Знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи $\mathcal{E} \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}}{(t-x)((t^\beta))}$ въ непрерывную дробь 75

§ XIX. Разложеніе функціи, разсматриваемой въ пред. §-фѣ въ непрерывную дробь. Производящая знаменателей 80

§ XX. Частные случаи. Сходимость періодической дроби 83

ГЛАВА III.

Функціи, подобныя функціямъ Ламэ.

СТРАН.

§ XXI. Опредѣленіе функцій, подобныхъ функціямъ Ламэ. Нѣкоторыя ихъ свойства 88

§ XXII. Выводъ нѣкоторыхъ характеристическихъ свойствъ Ламэвыхъ функцій 92

§ XXIII. Новыя формулы и слѣдствія . . . . , ... 95

§ XXIV. Разложеніе функціи $L_n^{(i)}(x) L_n^{(i)}(y)$ въ рядъ по Лежандровымъ функціямъ . . . . , ... 98

§ XXV. Выводъ вспомогательныхъ формулъ 101

§ XXVI. Соотношенія между коеффиціентами въ разложеніяхъ $n+1$ функцій $T_0, T_1 Z_1 \dots T_n Z_n$ по функціямъ $L_n^{(i)}(x) L_n^{(i)}(y)$ 105

§ XXVII. Разложенія, разсматриваемыя въ предыдущемъ §-фѣ, приводятся къ приведенію квадратичной формы съ $n+1$ перемѣнными, помощью ортогональной подстановки, къ суммѣ $n+1$ полныхъ квадратовъ 109

§ XXVIII. О второй группѣ Ламэвыхъ функцій 112

§ XXIX. Разложеніе функціи $M_n^{(i)}(x) M_n^{(i)}(y)$ въ рядъ по Лежандровымъ функціямъ 115

§ XXX. Вспомогательныя формулы 116

§ XXXI. Соотношенія между коеффиціентами въ разложеніяхъ функцій $T_0, T_1 Z_1, \dots$ въ ряды по функціямъ $M_n^{(0)}(x) M_n^{(0)}(y)$, $M_n^{(1)}(x) M_n^{(1)}(y), \dots$ Слѣдствія. 118

§ XXXII. О третьей группѣ Ламэвыхъ функцій 121

§ XXXIII. Разложеніе функціи $N_n^{(i)}(x) N_n^{(i)}(y)$ въ рядъ по Лежандровымъ функціямъ 124

§ XXXIV. Вспомогательныя формулы 126

§ XXXV. Соотношенія между коеффиціентами въ разложеніяхъ функцій $T_0 Z_n, T_1 Z_{n-1}, \dots T_n Z_0$ въ ряды по функціямъ $N_n^{(0)}(x) N_n^{(0)}(y), \dots$ $N_n^{(n)}(x) N_n^{(n)}(y)$. Слѣдствія 127

ГЛАВА I.

ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§ I. Характеристическія свойства функціи

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}.$$

1. Пусть будетъ функція $\varphi\,(x)$, выражающаяся формулою

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}, \tag{1}$$

гдѣ a и b суть два произвольныя комплексныя числа, $f\,(t)$ есть произвольная функція отъ перемѣнной t, а интегралъ предполагается взятымъ по нѣкоторой траекторіи соединяющей a съ b. Функція $f\,(t)$ можетъ быть разрывная между предѣлами интеграла, лишь бы только интегралъ (1) имѣлъ конечное и опредѣленное значеніе.

Функція $\varphi\,(x)$ есть неразрывная во всей координатной плоскости за исключеніемъ траекторіи интеграла (1); въ каждой точкѣ этой траекторіи функція $\varphi\,(x)$ будетъ имѣть вообще два различныхъ значенія, а въ нѣкоторыхъ ея точкахъ она можетъ обращаться въ безконечность.

Всякую точку x, лежащую на траекторіи интеграла (1), мы будемъ разсматривать какъ совокупность двухъ смежныхъ точекъ x_1 и x_2, изъ которыхъ первая лежитъ по одной сторонѣ траекторіи, а вторая по другой; два значенія функціи $\varphi\,(x)$, соотвѣтствующія точкѣ x, будемъ разсматривать какъ соотвѣтствующія двумъ различнымъ точкамъ x_1 и x_2. Вслѣдствіе этого траекторія интеграла (1) можетъ быть названа *линіей разрыва* функціи $\varphi(x)$.

2. Мы докажемъ слѣдующую теорему, касающуюся двухъ значеній функціи $\varphi(x)$, соотвѣтствующихъ точкѣ x, произвольно взятой на линіи разрыва.

Теорема 1. *Если $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ суть два значенія функціи $\varphi(x)$, соотвѣтствующія двумъ смежнымъ точкамъ на линіи разрыва, то*

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{2\pi i}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

такъ что если функція $f(x)$ въ точкѣ x неразрывна, то

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{2\pi i}=f(x).$$

На самомъ дѣлѣ, предположимъ для простоты, что a и b суть числа вещественныя и что линія разрыва функціи $\varphi(x)$ есть прямая, соединяющая a съ b,—сущность доказательства отъ этого не перемѣнится. Изъ точки x произвольно взятой на ab возставимъ перпендикуляръ къ ab и будемъ разсматривать значеніе функціи $\varphi(x)$, соотвѣтствующее точкѣ $x+iy$, взятой на этомъ перпендикулярѣ, предполагая приэтомъ, что y стремится къ нулю: очевидно, что

$$\varphi(x_1)=\lim\ \varphi(x+iy),\quad (y=0),$$
$$\varphi(x_2)=\lim\ \varphi(x-iy),\quad (y=0).$$

Обозначая черезъ h произвольно малую, положительную величину, имѣемъ

$$\varphi(x+iy)=\int_a^{x-h}\frac{f(t)\,dt}{t-(x+iy)}+\int_{x-h}^{x+h}\frac{f(t)\,dt}{t-(x+iy)}+\int_{x+h}^{b}\frac{f(t)\,dt}{t-(x+iy)},$$

гдѣ второй интегралъ во второй части можетъ быть преобразованъ слѣдующимъ образомъ:

$$\int_{x-h}^{x+h}\frac{f(t)\,dt}{t-(x+iy)}=\int_{x-h}^{x+h}\frac{f(t)\,(t-x+iy)\,dt}{(t-x)^2+y^2}=\int_{-h}^{+h}\frac{f(x+t)\,tdt}{t^2+y^2}+iy\int_{-h}^{+h}\frac{f(x+t)\,dt}{t^2+y^2},$$

или

$$\int_{x-h}^{x+h}\frac{f(t)\,dt}{t-(x+iy)}=\int_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)\,tdt}{1+t^2}+i\int_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)\,dt}{1+t^2},$$

слѣдовательно

$$(2)\ \varphi(x+iy)=\int\limits_a^{x-h}\frac{f(t)\,dt}{t-(x+iy)}+\int\limits_{x+h}^{b}\frac{f(t)\,dt}{t-(x+iy)}+\int\limits_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)\,tdt}{1+t^2}+i\int\limits_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)dt}{1+t^2}.$$

Вставляя въ (2) $-y$ на мѣсто y, получаемъ

$$(3)\ \varphi(x-iy)=\int\limits_a^{x-h}\frac{f(t)\,dt}{t-(x-iy)}+\int\limits_{x+h}^{b}\frac{f(t)\,dt}{t-(x-iy)}+\int\limits_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)\,tdt}{1+t^2}-i\int\limits_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)dt}{1+t^2}.$$

Вычитая изъ уравненія (2) уравненіе (3) получаемъ

$$\varphi(x+iy)-\varphi(x-iy)=2iy\int\limits_a^{x-h}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}+2iy\int\limits_{x+h}^{b}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}+2i\int\limits_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)dt}{1+t^2};$$

отсюда, полагая $y=0$, находимъ

$$\lim\varphi(x+iy)-\lim\varphi(x-iy)=2i\lim\int\limits_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)dt}{1+t^2},\quad (y=0);$$

но не трудно убѣдиться что

$$\lim_{(y=0)}\int\limits_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right],$$

слѣдовательно

$$\lim\varphi(x+iy)-\lim\varphi(x-iy)=2\pi i\,\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

или

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=2\pi i\,\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Для тѣхъ значеній перемѣнной x, при которыхъ функція $f(x)$ неразрывна, будемъ имѣть

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=2\pi i\,f(x),$$

или

$$f(x)=\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{2\pi i}.$$

Эта формула даетъ рѣшеніе слѣдующей задачи:
По данной функціи $\varphi(x)$ *найти подъинтегральную функцію* $f(x)$.

3. Изъ уравненія (2) легко вывести слѣдующую теорему.

Теорема 2. *Если въ точкѣ* x *на линіи разрыва функціи* $\varphi(x)$ *функція* $f(x)$ *есть неразрывная, такъ что, при безконечно маломъ* h,

$$f(x+h)-f(x-h)=\theta h^{\alpha},$$

гдѣ α *конечная, положительная величина, а* θ *принимаетъ конечное положительное значеніе при* $h=0$, *то*

$$\varphi(x_1)=\int_a^{,b}\frac{f(t)\,dt}{t-x}+\pi i f(x),$$

гдѣ интегралъ со знакомъ во второй части означаетъ предѣлъ суммы

$$\lim\left[\int_a^{x-h}\frac{f(t)\,dt}{t-x}+\int_{x+h}^{b}\frac{f(t)\,dt}{t-x}\right]$$

для $h=0$*).

Дѣйствительно, полагая, что сперва y, а затѣмъ и h постепенно приближаются къ нулю, изъ уравненія (2) получаемъ

$$(4)\quad \varphi(x_1)=\int_a^{,b}\frac{f(t)\,dt}{t-x}+\lim_{(h=0)}\ \lim_{(y=0)}\int_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)\,tdt}{1+t^2}+i\lim_{(h=0)}\ \lim_{(y=0)}\int_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)dt}{1+t^2}$$

Но, по сдѣланному предположенію,

$$\lim_{(h=0)}\ \lim_{(y=0)}\int_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}}\frac{f(x+yt)\,tdt}{1+t^2}=\lim_{(h=0)}\ \lim_{(y=0)}y^{\alpha}\int_0^{+\frac{h}{y}}\frac{\theta t^{\alpha+1}dt}{1+t^2}$$

$$=\lim_{(h=0)}\ \lim_{(y=0)}y^{\alpha}\int_0^{+\frac{h}{y}}\frac{\theta t^2}{1+t^2}\,t^{\alpha-1}\,dt\qquad=\lim_{(h=0)}\ \lim_{(y=0)}Ky^{\alpha}\int_0^{\frac{h}{y}}t^{\alpha-1}\,dt,$$

---

*) Этотъ предѣлъ Коши называетъ *главнымъ значеніемъ* (valeur principal) интеграла

$$\int_a^b\frac{f(t)\,dt}{t-x}.$$

гдѣ K есть конечная величина; слѣдовательно

$$\lim_{(h=0)} \lim_{(y=0)} \int_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}} \frac{f(x+yt)\,tdt}{1+t^2} = \lim_{(h=0)} \lim_{(y=0)} K \frac{h^\alpha}{\alpha} = 0.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (4) принимаетъ видъ

$$\varphi(x_1) = \int_a^{,b} \frac{f(t)\,dt}{t-x} + i \lim_{y=0} \int_{-\frac{h}{y}}^{+\frac{h}{y}} \frac{f(x+yt)\,dt}{1+t^2},$$

или

$$\varphi(x_1) = \int_a^{,b} \frac{f(t)\,dt}{t-x} + \pi i f(x),$$

что и требовалось доказать.

4. Предполагая что на линіи разрыва находится одна или болѣе точекъ, въ которыхъ функція $\varphi(x)$ обращается въ безконечность, не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующей теоремы.

Теорема 3. *Порядокъ безконечности функціи $\varphi(x)$ всегда ниже единицы.*

Для доказательства, допустимъ сначала, что функція $\varphi(x)$ обращается въ ∞ въ одной изъ точекъ a и b, положимъ въ точкѣ a, и пусть функція $f(x)$ обращается въ точкѣ a въ ∞ порядка α, такъ что при безконечно маломъ h, $f(a+h)=\theta h^{-\alpha}$; приэтомъ θ принимаетъ конечное значеніе для $h=0$, а число α меньше единицы. Полагая $x=a+h$, получаемъ

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-a-h} = \int_0^{\frac{b-a}{h}} \frac{f(a+ht)\,dt}{t-1},$$

или, такъ какъ, по предположенію,

$$f(a+ht) = \theta (ht)^{-\alpha},$$

$$\varphi(x) = h^{-\alpha} \int_0^{\frac{b-a}{h}} \frac{\theta\,dt}{t^\alpha(t-1)}.$$

Отсюда видно, что функція $\varphi(x)$ обращается въ точкѣ a въ безконечность порядка α, т. е. порядка ниже единицы. Если $\alpha=0$, то функпія $\varphi(x)$ будетъ обращаться въ точкѣ a логарифмически въ ∞.

Допустимъ теперь, что функція $\varphi(x)$ обращается въ ∞ въ какой нибудь другой точкѣ c, лежащей на линіи разрыва; полагая тогда

$$\psi_1(x)=\int_a^c \frac{f(t)dt}{l-x}, \qquad \psi_2(x)=\int_c^b \frac{f(t)dt}{t-x},$$

будемъ имѣть

$$\varphi(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x).$$

По вышедоказанному, порядокъ безконечности каждой изъ функціи $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ въ точкѣ c непремѣнно меньше единицы; слѣдовательно и порядокъ функціи $\varphi(x)$ въ точкѣ c меньше единицы.

5. Прибавляя ко всему вышесказанному о функціи $\varphi(x)$ еще уравненіе

$$\varphi(\infty)=0,$$

будемъ имѣть всѣ характеристическія свойства этой функціи. Дѣйствительно, пе трудно доказать слѣдующую теорему.

Теорема 4. *Существуетъ одна и только одна функція $\varphi(x)$, удовлетворяющая слѣдующимъ условіямъ:*

1) $\varphi(\infty)=0$.

2) *Функція $\varphi(x)$ остается неразрывною во всѣхъ точкахъ координатной плоскости, кромѣ точекъ нѣкоторой данной линіи, называемой линіей разрыва.*

3) *разность двухъ значеній функціи $\varphi(x)$, соотвѣтствующихъ двумъ смежнымъ точкамъ на линіи разрыва равняется данной функціи $f(x)$.*

4) *функція $\varphi(x)$ или вовсе не обращается въ ∞, или же обращается въ ∞ въ нѣкоторыхъ точкахъ на линіи разрыва, но всегда порядка ниже единицы.*

Эта функція $\varphi(x)$ опредѣляется по формулѣ

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(t)dt}{t-x}, \tag{5}$$

гдѣ a и b сутъ концы линіи разрыва, а траекторія интеграла совпадаетъ съ линіей разрыва.

Изъ всего вышесказаннаго о функціи вида (5) слѣдуетъ, что функція (5) удовлетворяетъ на самомъ дѣлѣ всѣмъ условіямъ нашей теоремы; остается доказать, что нѣтъ другой функціи, удовлетворяющей тѣмъ же четыремъ условіямъ.

Допустимъ противное, и пусть $\psi(x)$ изображаетъ функцію различную отъ $\varphi(x)$, но удовлетворяющую тѣмъ же условіямъ что и $\varphi(x)$; тогда разность $\varphi(x)-\psi(x)$ будетъ функціей неразрывной во всей координатной плоскости, исключая нѣкоторыя критическія точки, въ которыхъ эта разность можетъ обращаться въ безконечность порядка ниже единицы. Но, съ другой стороны, извѣстно, что всякая функція отъ комплексной перемѣнной x, не имѣющая линіи разрыва внутри даннаго пространства на координатной плоскости, не можетъ внутри того же пространства обращаться въ безконечность дробнаго порядка; слѣдовательно, разность $\varphi(x)-\psi(x)$, не обращаясь въ безконечность ни для какого значенія x и будучи функціей неразрывной, равняется постоянной величинѣ, а такъ какъ $\varphi(\infty)=\psi(\infty)=0$, то $\varphi(x)-\psi(x)=0$, или $\varphi(x)=\psi(x)$.

Функцію $\varphi(x)$ будемъ называть *опредѣляющею* функціи $f(x)$, и функцію $f(x)$ *производящею* функціи $\varphi(x)$.

6. До сихъ поръ мы постоянно предполагали, что линія разрыва функціи $\varphi(x)$ конечна; допустимъ теперь, что она продолжается до безконечности. Въ этомъ случаѣ нельзя вообще утверждать, что $\varphi(\infty)=0$, но на мѣсто этого уравненія легко вывести другое, его замѣняющее. Дѣйствительно, начертимъ изъ начала координатъ произвольно большимъ радіусомъ r кругъ и примемъ во вниманіе функцію $\varphi_1(x)$, значенія которой внутри круга (r) совпадаютъ со значеніями данной функціи

$$\varphi(x)=\int\limits_a^\infty \frac{f(t)\,dt}{t-x},$$

а для всѣхъ точекъ внѣ круга (r) $\varphi_1(x)=0$. Тогда, въ силу теоремы 4-й будемъ имѣть

$$\varphi_1(x)=\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}+\int\limits^{(r)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x},$$

гдѣ первый интегралъ во второй части взятъ по линіи разрыва данной функціи $\varphi(x)$ до точки ея пересѣченія съ окружностью r (эту точку мы обозначили черезъ b), а второй интегралъ взятъ по окружности (r).

Предполагая, что x находится внутри круга r, будемъ имѣть $\varphi_1(x)=\varphi(x)$, т. е.

$$\varphi(x)=\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}=\int\limits^{(r)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x},$$

или

$$\int_a^\infty \frac{f(t)\,dt}{t-x} = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x} + \int^{(r)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x};$$

отсюда, полагая $r=\infty$, находимъ

$$\int^{(r)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = 0. \tag{6}$$

Это и есть то уравненіе, которое мы желали вывести; оно въ разсматриваемомъ нами случаѣ замѣняетъ собою уравненіе $\varphi(\infty)=0$.

Легко доказать, что функція $\varphi(x)$, удовлетворяющая уравненію (6) и условіямъ (2), (3), (4) предыдущей теоремы, выражается по формулѣ

$$\varphi(x) = \int_a^\infty \frac{f(t)\,dt}{t-x}.$$

Для этого стоитъ только, какъ выше, принять во вниманіе функцію $\psi(x)$, совпадающую съ $\varphi(x)$ внутри круга (r) и равняющуюся нулю для всѣхъ значеній x внѣ круга (r); тогда будемъ имѣть

$$\psi(x) = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x} + \int^{(r)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x},$$

гдѣ b означаетъ точку пересѣченія линіи разрыва функціи $\varphi(x)$ съ окружностью (r). Дѣлая $r=\infty$ и принимая во вниманіе (6), получаемъ

$$\psi(x) = \int_a^\infty \frac{f(t)\,dt}{t-x}$$

или

$$\varphi(x) = \int_a^\infty \frac{f(t)\,dt}{t-x}; \tag{7}$$

ибо для конечныхъ значеній x, $\varphi(x)=\psi(x)$. Если данная функція $f(t)$ такова, что интегралъ (7) равняется тожественно ∞ или величинѣ неопредѣленной, то, очевидно, нѣтъ функціи, удовлетворяющей всѣмъ вышеупомянутымъ условіямъ.

§ II. Выраженіе функціи $\dfrac{1}{(x-a_1)^{\alpha}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_\kappa)^{\lambda}}$ черезъ опредѣленный интегралъ вида $\int\frac{f(t)\,dt}{t-x}$. Слѣдствія.

1. Функція $\varphi(x)$ опредѣляемая по формулѣ

$$\varphi(x)=\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_\kappa)^{\lambda}},$$

гдѣ $\alpha<1$, $\beta<1$,... $\lambda<1$, $\alpha+\beta+\dots+\lambda>0$, удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ теоремы 4-й предыдущаго §; мы будемъ ее разсматривать какъ функцію опредѣляющую. За линію разрыва этой функціи можетъ быть принята всякая линія, соединяющая a_1 съ a_2, a_2 съ a_3,... a_{k-1} съ a_k, a_k съ ∞, такъ что ее можно разсматривать какъ состоящую изъ k частей a_1a_2, a_2a_3,... $a_k\infty$.

Легко убѣдиться, что два значенія функціи $\varphi(x)$ въ произвольной точкѣ на линіи разрыва будутъ находиться въ слѣдующихъ зависимостяхъ:

на линіи $a_1\ a_2$ имѣемъ $\varphi(x_2)=e^{-2\alpha\pi i}\varphi(x_1)$,

" " $a_2\ a_3$ " $\varphi(x_2)=e^{-2(\alpha+\beta)\pi i}\varphi(x_1)$,

. . . .

" " $a_k\ \infty$ " $\varphi(x_2)=e^{-2(\alpha+\beta+\dots+\lambda)\pi i}\varphi(x_1)$;

слѣдовательно, по теоремѣ 1-й, § I, значенія производящей $f(x)$ въ различныхъ частяхъ на линіи разрыва будутъ слѣдующія:

на линіи $a_1\ a_2$ производящая $f(x)=\dfrac{e^{2\alpha\pi i}-1}{2\pi i}\varphi(x_2)$,

" " $a_2\ a_3$ " $f(x)=\dfrac{e^{2(\alpha+\beta)\pi i}-1}{2\pi i}\varphi(x_2)$,

. . . .

" " $a_\kappa\ \infty$ " $f(x)=\dfrac{e^{2(\alpha+\beta+\dots+\lambda)\pi i}-1}{2\pi i}\varphi(x_2)$;

отсюда по теоремѣ 4-й § I,

$$(1)\qquad \frac{2\pi i}{(x-a_1)^{\alpha}\dots(x-a_{\kappa})^{\lambda}}=(e^{2\alpha\pi i}-1)\int_{a_1}^{a_2}\frac{dt}{(t-x)(t-a_1)^{\alpha}\dots(t-a_{\kappa})^{\lambda}}$$

$$+(e^{2(\alpha+\beta)\pi i}-1)\int_{a_2}^{a_3}\frac{dt}{(t-x)(t-a_1)^{\alpha}\dots(t-a_{\kappa})^{\lambda}}$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+(e^{2(\alpha+\dots+\lambda)\pi i}-1)\int_{a_{\kappa}}^{\infty}\frac{dt}{(t-x)(t-a_1)^{\alpha}\dots(t-a_{\kappa})^{\lambda}}.$$

Ирраціональная функція подъ знакомъ интеграла во второй части (1) должна принимать тѣ значенія, которыя соотвѣтствуютъ правому краю траекторіи интеграла.

2. Полагая въ (1) $\beta=\gamma=\dots=\lambda=0$, $a_1=0$, получаемъ

$$(2)\qquad \frac{2\pi i}{x^{\alpha}}=(e^{2\alpha\pi i}-1)\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t-x)\,t^{\alpha}},$$

отсюда, полагая $x=-1$,

$$\frac{2\pi i}{(-1)^{\alpha}}=(e^{2\alpha\pi i}-1)\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\,t^{\alpha}};$$

но если предположимъ, что функція t^{α} подъ знакомъ интеграла принимаетъ положительныя значенія, то легко убѣдиться, что

$$(-1)^{\alpha}=e^{-\alpha\pi i},$$

слѣдовательно

$$\frac{2\pi i}{e^{-\alpha\pi i}}=(e^{2\alpha\pi i}-1)\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\,t^{\alpha}},$$

или

$$(\mathrm{I})\qquad \int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\,t^{\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Это извѣстная формула, играющая важную роль въ теоріи Эйлеровыхъ интеграловъ.

3. Полагая въ (1) $\gamma = \ldots = \lambda = 0$, $\alpha + \beta = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, находимъ

$$(3) \qquad \frac{2\pi i}{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}} = (e^{2\alpha\pi i} - 1)\int_0^1 \frac{dt}{(t-x)t^{\alpha}(1-t)^{1-\alpha}}.$$

Умножая обѣ части (3) на x и полагая $x = \infty$, получаемъ

$$\frac{2\pi i}{e^{\pi(1-\alpha)i}} = (1 - e^{2\alpha\pi i})\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)^{1-\alpha}},$$

или

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)^{1-\alpha}}.$$

Такимъ образомъ мы опять получили формулу (I), ибо стоитъ только въ предыдущее уравненіе подставить $\frac{t}{1+t}$ на мѣсто t, чтобы получить (I).

§ III. Выраженія функцій $\frac{1}{\sqrt{x}(a - i\sqrt{x})^n}$ и $\frac{1}{(a - i\sqrt{x})^n}$ черезъ опредѣленные интегралы вида $\int_0^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{t-x}$. Слѣдствія.

1. Принимая функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(a - i\sqrt{x})^n}$$

за опредѣляющую необходимо предположить, что $n > -1$; для простоты мы положимъ еще, что число a есть положительное и что функція $\sqrt{x}$ съ верхней стороны на положительной части оси абсциссъ имѣетъ значенія положительныя, а съ нижней стороны отрицательныя.

Производящая функція $f(x)$ опредѣляется по формулѣ

$$2\pi i f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(a - i\sqrt{x})^n} + \frac{1}{\sqrt{x}(a + i\sqrt{x})^n};$$

отсюда получаемъ такое выраженіе для функціи $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi i \sqrt{x}} \frac{\cos n \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}}{(a^2 + x)^{\frac{n}{2}}}$$

Слѣдовательно, по теоремѣ 4-й § I,

$$(1)\qquad \frac{\pi i}{\sqrt{x}\,(a-i\sqrt{x})^n}=\int_0^\infty \frac{\cos n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{t}}{a}}{\sqrt{t}\,(a^2+t)^{\frac{n}{2}}(t-x)}\,dt,$$

или, внося $-x^2$ на мѣсто x и t^2 на мѣсто t,

$$(2)\qquad \frac{\pi}{2x\,(a+x)^n}=\int_0^\infty \frac{\cos n\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}}{\sqrt{(a^2+t^2)^n}\,(t^2+x^2)}dt,\qquad (n>-1).$$

Положивъ

$$\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}=\varphi,$$

получимъ

$$t=a\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ dt=\frac{a d\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \cos n\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}=\cos n\varphi,$$

$$\frac{1}{(a^2+t^2)^{\frac{n}{2}}}=\frac{\cos^n\varphi}{a^n},\ \frac{1}{t^2+x^2}=\frac{\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi+x^2\cos^2\varphi},$$

поэтому формула (2) можетъ быть представлена такъ:

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{\pi a^{n-1}}{2x\,(a+x)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\varphi\,\cos n\,\varphi\,d\varphi}{a^2\sin^2\varphi+x^2\cos^2\varphi},\qquad (n>-1).$$

Отсюда полагая $x=a$,

$$(3)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi\cos n\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2^{n+1}},\qquad (n>-1).$$

2. Если за опредѣляющую функцію возьмемъ

$$\varphi(x)=\frac{1}{(a-i\sqrt{x})^n},$$

то необходимо предположить, что $n>0$; тогда, подобно тому какъ и въ предыдущемъ случаѣ, получимъ

$$(4)\qquad \frac{1}{(a-i\sqrt{x})^n}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin n\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{t}}{a}}{(a^2+t)^{\frac{n}{2}}(t-x)}\,dt,\qquad (n>0);$$

или

$$(5)\qquad \frac{1}{(a+x)^n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t\sin n\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t}{a}}{\sqrt{(a^2+t^2)^n}\,(t^2+x^2)}\,dt,\qquad (n>0);$$

отсюда, полагая

$$t = a \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{a+x}\right)^n + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \sin n\varphi \cos^{n-1}\varphi}{a^2\sin^2\varphi + x^2\cos^2\varphi}\, d\varphi, \qquad (n > 0)$$

Положивъ $x = a$, находимъ

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \sin n\varphi \cos^{n-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n+1}}, \qquad (n > 0).$$

Формулы (3) и (6) легко выводятся одна изъ другой.

§ IV. Еще подобныя выраженія функцій

$$e^{i\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{i\sqrt{x}}, \quad e^{i\sqrt{x}} \log x, \quad e^{i\sqrt[4]{x}}, \quad \log\left(1 - \alpha e^{i\sqrt{x}}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, \frac{1 - \alpha e^{i\sqrt{x}}}{1 + \alpha e^{i\sqrt{x}}}, \quad \frac{1}{\alpha + e^{-i\sqrt{x}}}.$$ **Слѣдствія.**

1. Принимая во вниманіе функцію

$$\varphi = e^{i\sqrt{x}},$$

не трудно убѣдиться, что она неразрывна во всей координатной плоскости, кромѣ точекъ лежащихъ на положительной части оси абсциссъ, которая составляетъ линію разрыва. Во всѣхъ безконечно удаленныхъ точкахъ и не безконечно близкихъ линіи разрыва, функція φ получаетъ безконечно малыя значенія; въ безконечно удаленной точкѣ на линіи разрыва та же функція получаетъ неопредѣленное значеніе, модуль котораго равняется единицѣ. Это показываетъ, что значеніе интеграла

$$\int \frac{e^{i\sqrt{t}}\, dt}{t - x},$$

взятаго по безконечно удаленной окружности, равняется нулю, при всевозможныхъ значеніяхъ перемѣнной x; слѣдовательно, къ функціи φ можетъ быть примѣнена теорема 4-я, § I.

Производящая $f(x)$ разсматриваемой нами функціи выражается формулою

$$f(x)=\frac{e^{i\sqrt{x}}-e^{-i\sqrt{x}}}{2\pi i}=\frac{\sin\sqrt{x}}{\pi};$$

слѣдовательно

(1) $$e^{i\sqrt{x}}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\sqrt{t}}{t-x}\,dt,$$

или, вставляя $-x^2$ на мѣсто x и t^2 на мѣсто t,

(I) $$\frac{\pi}{2}e^{-x}=\int_0^\infty\frac{t\sin t\,dt}{t^2+x^2}.$$

Это извѣстная формула Лапласа.

2. Если на мѣсто функціи $e^{i\sqrt{x}}$ возьмемъ во вниманіе функцію $\frac{1}{\sqrt{x}}e^{i\sqrt{x}}$, то получимъ

(2) $$\frac{\pi i}{\sqrt{x}}e^{i\sqrt{x}}=\int_0^\infty\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}\,(t-x)}\,dt,$$

или, все тоже,

(II) $$\frac{\pi}{2x}e^{-x}=\int_0^\infty\frac{\cos t\,dt}{t^2+x^2}.$$

Формулу эту легко вывести непосредственно изъ (I).

3. Полагая

$$\varphi(x)=e^{i\sqrt{x}}\log x,$$

не трудно удостовѣриться, что

$$\lim\int^{(r)}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}=0,\qquad (r=\infty).$$

Дѣйствительно, полагая $t=re^{i\theta}$, находимъ

$$\lim\int^{(r)}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}=i\lim\int_0^{2\pi}e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}+i\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}}(\log r+i\theta)\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-\frac{x}{r}}\,d\theta,$$

$$= i \lim \int_0^{2\pi} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} + i\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}} \log r \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - \frac{x}{r}} d\theta$$

$$= i M \lim \log r \int_0^{2\pi} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} d\theta,$$

гдѣ M изображаетъ нѣкоторую конечную величину. Обозначивъ черезъ α произвольно малый уголъ, будемъ имѣть

$$\lim \int^{(r)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = i M \lim \log r \int_0^{\alpha} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$+ i M \lim \log r \int_0^{2\pi-\alpha} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$+ i M \lim \log r \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Но

$$\lim \log r \int_0^{\alpha} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = - \lim \frac{\log r}{\sqrt{r}} \int_0^{\alpha} \frac{de^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= - \lim \frac{\log r}{\sqrt{r}} N \int_0^{\alpha} de^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}},$$

гдѣ N изображаетъ величину конечную; слѣд.

$$\lim \log r \int_0^{\alpha} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = 0;$$

такимъ же образомъ можно доказать, что

$$\lim \log r \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = 0$$

и, наконецъ, очевидно, что

$$\lim \log r \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{-\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = 0.$$

Слѣдовательно

$$\lim \int^{(r)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = 0;$$

отсюда заключаемъ, что функція $\varphi(x)$ можетъ быть разсматриваема какъ функція опредѣляющая.

Производящая этой функціи выражается формулою

$$\varphi(x) = \frac{\log x \sin\sqrt{x}}{\pi} - e^{-i\sqrt{x}};$$

слѣдовательно

$$(3) \qquad e^{i\sqrt{x}} \log x = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\pi}\log t \sin\sqrt{t} - e^{-i\sqrt{t}}}{t-x}\,dt;$$

Подставляя въ этой формулѣ $-x$ на мѣсто x, получаемъ

$$e^{-\sqrt{x}}(\log x + \pi i) = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\pi}\log t \sin\sqrt{t} - e^{-i\sqrt{t}}}{t-x}\,dt;$$

полагая, что x есть величина положительная и приравнивая вещественныя части съ обѣихъ сторонъ, находимъ

$$(\mathrm{III}) \qquad e^{-\sqrt{x}} \log x = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\pi}\log t \sin\sqrt{t} - \cos\sqrt{t}}{t+x}\,dt;$$

приравнивая же мнимыя части, получаемъ вновь формулу (1).

Изъ (III), полагая $x = 1$, находимъ

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{\log t \sin\sqrt{t}}{1+t}\,dt = \pi\int_0^\infty \frac{\cos\sqrt{t}}{1+t}\,dt.$$

4. Принимая за определяющую функцію

$$\varphi(x) = e^{i\sqrt[4]{x}},$$

производящая $f(x)$ будетъ такая:

$$2\pi i f(x) = e^{i\sqrt[4]{x}} - e^{-\sqrt[4]{x}} = \cos\sqrt[4]{x} - e^{-\sqrt[4]{x}} + i\sin\sqrt[4]{x};$$

слѣдовательно

$$(5)\qquad 2\pi i e^{i\sqrt[4]{x}} = \int_0^\infty \frac{\cos\sqrt[4]{t} - e^{-\sqrt[4]{t}} + i\sin\sqrt[4]{t}}{t-x}\,dt,$$

или, подставляя $-x$ на мѣсто x,

$$2\pi i e^{-\sqrt[4]{\frac{x}{4}}}\left(\cos\sqrt[4]{\frac{x}{4}} + i\sin\sqrt[4]{\frac{x}{4}}\right) = \int_0^\infty \frac{\cos\sqrt[4]{t} - e^{-\sqrt[4]{t}} + i\sin\sqrt[4]{t}}{t+x}\,dt;$$

отсюда, полагая x вещественнымъ и положительнымъ,

$$(6)\qquad 2\pi e^{-\sqrt[4]{\frac{x}{4}}}\sin\sqrt[4]{\frac{x}{4}} = \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt[4]{t}} - \cos\sqrt[4]{t}}{t+x}\,dt,$$

$$(7)\qquad 2\pi e^{-\sqrt[4]{\frac{x}{4}}}\cos\sqrt[4]{\frac{x}{4}} = \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt[4]{t}\,dt}{t+x}.$$

5. Положивъ

$$\varphi(x) = \frac{\log(1-\alpha e^{i\sqrt{x}})}{\sqrt{x}},$$

гдѣ численное значеніе α меньше или равно единицѣ, получимъ

$$2\pi i f(x) = \frac{\log(1-\alpha e^{i\sqrt{x}}) + \log(1-\alpha e^{-i\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\log(1-2\alpha\cos\sqrt{x}+\alpha^2)}{\sqrt{x}};$$

слѣдовательно

$$\frac{2\pi i}{\sqrt{x}} \log\left(1 - \alpha e^{i\sqrt{x}}\right) = \int_0^\infty \frac{\log(1 - 2\alpha\cos\sqrt{t} + \alpha^2)}{\sqrt{t}\,(t - x)}\,dt,$$

или, подставляя $-x^2$ на мѣсто x и t^2 на мѣсто t,

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\pi}{x} \log\left(1 - \alpha e^{-x}\right) = \int_0^\infty \frac{\log(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)}{t^2 + x^2}\,dt.$$

Положивъ въ этой формулѣ $\alpha = 1$ и послѣ $\alpha = -1$, получимъ двѣ достойныя вниманія формулы.

6. Если положимъ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1 - \alpha e^{i\sqrt{x}}}{1 + \alpha e^{i\sqrt{x}}},$$

гдѣ численное значеніе α ниже единицы, то найдемъ

$$2\pi i f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1 - \alpha e^{i\sqrt{x}}}{1 + \alpha e^{i\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1 - \alpha e^{-i\sqrt{x}}}{1 + \alpha e^{-i\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{2(1 - \alpha^2)}{\sqrt{x}\,(1 + 2\alpha\cos\sqrt{x} + \alpha^2)},$$

поэтому

$$\frac{\pi i}{\sqrt{x}} \frac{1 - \alpha e^{i\sqrt{x}}}{1 + \alpha e^{i\sqrt{x}}} = (1 - \alpha^2) \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1 + 2\alpha\cos\sqrt{t} + \alpha^2)\,(t - x)},$$

или

$$\text{(V)} \qquad \frac{\pi}{2(1 - \alpha^2)\,x} \frac{1 - \alpha e^{-x}}{1 + \alpha e^{-x}} = \int_0^\infty \frac{dt}{(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)(t^2 + x^2)}.$$

7. Функція

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha + e^{-i\sqrt{x}}},$$

гдѣ численное значеніе α ниже единицы, имѣетъ слѣдующую производящую:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\sqrt{x}}{(1 + 2\alpha\cos\sqrt{x} + \alpha^2)};$$

поэтому

$$\frac{1}{\alpha + e^{-i\sqrt{x}}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{t}\; dt}{(1+2\,\alpha\cos\sqrt{t}+\alpha^2)\,(t-x)},$$

или

$$\text{(VI)}\qquad \frac{\pi}{2\,(\alpha+e^x)} = \int_0^\infty \frac{\sin t\, dt}{(1+2\,\alpha\cos t+\alpha^2)\,(t^2+x^2)}.$$

§ V. Теорема Абеля.

1. Пусть будетъ дана функція

$$\Delta = \sqrt{(x-a_1)\,(x-a_2)....\,(x-a_{2k})},$$

которой линіи разрыва обозначимъ чрезъ $(a_1\,a_2)$, $(a_3\,a_4)$,.... $(a_{2k-1}\,a_{2k})$. Функція

$$y = \frac{\psi + \theta\,\Delta}{\psi - \theta\,\Delta},$$

гдѣ ψ и θ суть произвольныя цѣлыя функціи n-ой и m-ой степеней, и ψ первая относительно Δ^2, — имѣетъ тѣ же линіи разрыва $(a_1\,a_2)$, $(a_3\,a_4)$,...., такъ что на каждой изъ этихъ линій она получаетъ два взаимно обратныхъ значенія; кромѣ того, нѣкоторые изъ корней уравненія

$$\psi^2 - \theta^2\,\Delta^2 = 0$$

могутъ обращать функцію y въ ∞. Допустимъ для простоты, что степень ψ выше степени $\theta\Delta$, и что между $2n$ корнями предыдущаго уравненія находится r корней, обращающихъ y въ ∞: обозначимъ ихъ чрезъ x_1, x_2,.... x_r. Остальные корни x_{r+1}, x_{r+2},.... x_{2n} будутъ обращать функцію y въ нуль.

Функція

$$\varphi = \frac{F}{\Delta}\log\frac{\psi+\theta\,\Delta}{\psi-\theta\,\Delta},$$

гдѣ F есть произвольная цѣлая функція степени ниже k, имѣетъ линіями разрыва линіи $(a_1\;a_2)$, $(a_3\;a_4)$,... $(a_{2k-1}\;a_{2k})$ и еще линіи соединяющія произвольно взятую точку на координатной плоскости, напр. точку нуль, съ точками x_1, x_2,... x_{2n}: эти линіи мы обозначимъ чрезъ ox_1, ox_2,... ox_{2n}. Кромѣ того, функція φ обращается въ нуль для $x=\infty$.

Функцію φ мы принимаемъ за опредѣляющую.

Производящая функція f, принятой нами во вниманіе функціи опредѣляющей, на различныхъ ея линіяхъ разрыва принимаетъ слѣдующія значенія:

на линіи $a_1\ a_2$ имѣемъ $f(x) = \dfrac{l^{(1)} F}{\Delta}$,

" $a_3\ a_4$ " $f(x) = \dfrac{l^{(2)} F}{\Delta}$,

. . . . . . " . . . . . .,

" $a_{2k-1}\ a_{2k}$ " $f(x) = \dfrac{l^{(\kappa)} F}{\Delta}$,

гдѣ $l^{(1)}$, $l^{(2)}$,... цѣлыя числа; далѣе, на линіяхъ $ox_1\ ox_2, \ldots\ ox_r$

$$f(x) = -\frac{1}{\Delta} F,$$

на линіяхъ $ox_{r+1},\ ox_{r-2}, \ldots\ ox_{2n}$

$$f(x) = \frac{F}{\Delta}.$$

На основаніи этихъ выраженій мы заключаемъ, что

$$\varphi = -\int_0^{x_1} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)} - \ldots - \int_0^{x_r} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)} + \int_0^{x_{r+1}} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)} + \ldots + \int_0^{x_{2n}} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)}$$

$$+ l^{(1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)} + \ldots + l^{(\kappa)} \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)}$$

Согласившись разсматривать величины $x_1,\ x_2, \ldots\ x_{2n}$ и зависящіе отъ нихъ коэффиціенты въ выраженіяхъ функцій ψ и θ какъ перемѣнныя, а остальныя величины, именно: $a_1,\ a_2, \ldots\ a_{2k},\ x,$ коэффиціенты въ выраженіяхъ функціи F—какъ постоянные параметры, мы можемъ предыдущую формулу написать такъ:

$$\text{(1)} \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{i=2n} \varepsilon_i \int_0^{x_i} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)} + \text{Const},$$

гдѣ $\varepsilon_i = -1$, если $i \leq r$, а $\varepsilon_i = 1$, если $i > r$.

Эту формулу можно представить еще иначе. Дѣйствительно, если допустимъ, что траекторія интеграла

$$\int_0^{x_i} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)}$$

произвольна, а подъинтегральная функція остается неразрывною на этой траекторіи, то, при данномъ x_i, значеніе разсматриваемаго интеграла будетъ зависить отъ вида самой траекторіи. Различныя траекторіи, соединяющія точку нуль съ точкой x_i, бываютъ двухъ родовъ: однѣ даютъ для функціи $\Delta(x)$, при $x = x_i$, значеніе $\Delta(x_i)$, другія же —

значенiе—$\Delta(x_i)$, при одномъ и томъ же первоначальномъ значенiи $\Delta(0)$; сообразно этому и интегралы

$$\int_0^{x_i} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)}$$

бываютъ двоякаго рода. Для различiя мы будемъ ихъ обозначать такъ:

$$\int_0^{x_i,\ \Delta(x_i)} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)}, \quad \int_0^{x_i,\ -\Delta(x_i)} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)}.$$

Съ другой стороны, легко убѣдиться, что во-первыхъ, всѣ значенiя интеграла

$$\int^{x_i,\ \Delta(x_i)} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)}$$

соотвѣтствующiя различнымъ траекторiямъ, разнятся между собою постоянными величинами и, во-вторыхъ,

$$\int_0^{x_i,\ \Delta(x_i)} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)} = -\int_0^{x_i,\ -\Delta(x_i)} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)} + \text{Const};$$

поэтому, полагая

$$\Delta(x_i) = -\frac{\psi(x_i)}{\theta(x_i)},$$

формулу (1) можно еще представить слѣдующимъ образомъ:

$$\text{(I)} \qquad \frac{F}{\Delta}\log\frac{\psi+\theta\Delta}{\psi-\theta\Delta} = \sum_{i=1}^{i=2n}\int_0^{x_i,\ \Delta(x_i)} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\,\Delta(t)} + \text{Const},$$

гдѣ интегралы во второй части могутъ быть взяты по какимъ угодно траекторiямъ.

Это есть формула, выражающая собою теорему Абеля.

2. Если Δ^2 и одна изъ двухъ функцiй ψ и θ, напр. ψ, суть четныя, а функцiя θ—нечетная, то корни уравненiя

$$\psi^2 - \theta^2\Delta^2 = 0.$$

будутъ

$$x_1, \quad x_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_n,$$

$$-x_1, -x_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -x_n,$$

и

$$\Delta(x_i) = -\Delta(-x_i);$$

тогда

$$\int_0^{x_i,\,\Delta(x_i)} \frac{dt}{(t-x)\,\Delta(t)} + \int_0^{-x_i,\,-\Delta(x_i)} \frac{dt}{(t-x)\,\Delta(t)} = \int_0^{x_i,\,\Delta(x_i)} \frac{dt}{(t-x)\,\Delta(t)} - \int_0^{x_i,\,\Delta(x_i)} \frac{dt}{(t+x)\,\Delta(t)}$$

$$= 2x \int_0^{x_i,\,\Delta(x_i)} \frac{dt}{(t^2-x^2)\,\Delta(t)},$$

и слѣд.

$$\frac{1}{2\,x\,\Delta} \log \frac{\psi+\theta\,\Delta}{\psi-\theta\,\Delta} = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{x_i} \frac{dt}{(t^2-x^2)\,\Delta(t)} + \text{Const.} \tag{2}$$

Подъ такимъ видомъ представляютъ обыкновенно Абелеву формулу въ теоріи эллиптическихъ интеграловъ; тогда $\Delta = (1-t^2)(1-k^2t^2)$.

3. Подобно тому какъ была выведена нами формула (I), легко можно составить аналогичныя формулы для ирраціональностей какого угодно порядка. Напримѣръ, легко доказать, что

$$\frac{F}{\sqrt[n]{R^m}}\Big[\log\big(\psi-\theta\sqrt[n]{R^m}\big)+\alpha\log\big(\psi-\alpha^{n-1}\theta\sqrt[n]{R^m}\big) \tag{3}$$

$$+\;.\;.\;.\;.+\alpha^{n-1}\log\big(\psi-\alpha\theta\sqrt[n]{R^m}\big)\Big]$$

$$=\sum_i \int^{x_i\ \sqrt[n]{R(x_i)^m}} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)\sqrt[n]{R(t)^m}} + \text{Const},$$

гдѣ ψ, θ, R, F, суть цѣлыя функціи отъ x, степень F ниже степени $\sqrt[n]{R^m}$, $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$; x_1, x_2,... суть корни уравненія

$$\psi^n - \theta^n\,R^m = 0;$$

величина x и коеффиціенты въ выраженіяхъ функцій F и R разсматриваются какъ постоянные параметры; наконецъ, значеніе корня $\sqrt[n]{R^m}$ опредѣляется по формулѣ

$$\sqrt[n]{R(x_i)^m} = \frac{\psi\,(x_i)}{\theta\,(x_i)}.$$

§ VI. Преобразованіе функціи

$$\int_0^1 \frac{(t^n + a_1 t^{n+1} + \ldots + a_n)\, t^\alpha (1-t)^\beta (1-k^2 t)^\gamma \ldots (1-l^2 t)^\delta\, dt}{t-x}.$$

1. Возьмемъ во вниманіе функцію

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\psi(t)\, t^\alpha (1-t)^\beta (1-k^2 t)^\gamma \ldots (1-l^2 t)^\delta}{t-x}\, dt,$$

гдѣ $\psi(t)$ есть произвольная цѣлая функція n-ой степени, $\alpha > -1$ и $\beta > -1$. Линія разрыва этой функціи есть прямая, концы которой суть точки 0 и 1; разность двухъ значеній функціи $\varphi(x)$ въ произвольной точкѣ x на линіи разрыва равняєтся

$$2\pi i \psi(x)\, x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2 x)^\gamma \ldots (1-l^2 x)^\delta;$$

слѣдовательно, функція

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)\, x^\alpha (1-x)^\beta \ldots (1-l^2 x)^\delta}$$

въ каждой точкѣ на линіи (0, 1) имѣетъ два значенія, разнящееся на $2\pi i$; приэтомъ слѣдуетъ предположить, что линіи разрыва функціи

$$x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2 x)^\gamma \ldots (1-l^2 x)^\delta,$$

т. е. $(0, \infty)$, $(1, \infty)$, $\left(\frac{1}{k^2}, \infty\right)$,...., нигдѣ не пересѣкаются и не совмѣщаются съ линіей (0, 1). Отсюда слѣдуетъ, что функція

$$\frac{d}{dx} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)\, x^\alpha (1-x)^\beta \ldots (1-l^2 x)^\delta}$$

есть неразрывная во всѣхъ точкахъ линіи (0, 1); но, съ другой стороны, она имѣетъ линіями разрыва прямыя $(0, \infty)$, $(1, \infty)$, $\left(\frac{1}{k^2}, \infty\right)$,.....и, кромѣ того, обращается въ ∞ въ точкахъ, удовлетворяющихъ уравненію

$$\psi(x) = 0.$$

Очевидно, что если умножимъ предыдущую функцію на

$$\psi(x)^2\, x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta+1} (1-k^2 x)^{\gamma+1} \ldots (1-l^2 x)^{\delta+1},$$

то полученное произведеніе

$$\theta(x) = x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta+1} \ldots (1-l^2 x)^{\delta+1} \psi(x)^2 \frac{d}{dx} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)\, x^\alpha (1-x)^\beta \ldots (1-l^2 x)^\delta}$$

представитъ функцію не имѣющую вовсе линіи разрыва и не обращающуюся въ безконечность ни для одного конечнаго значенія независимой перемѣнной.

На самомъ дѣлѣ, допустимъ, что функція $\theta(x)$ для $x=0$ обращается въ безконечннсть; тогда, для безконечно малыхъ значеній x, функція эта будетъ принимать безконечно большія значенія цѣлаго порядка, слѣд.—не ниже единицы; функція

$$\frac{d}{dx}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)\,x^\alpha(1-x)^\beta\ldots(1-l^2x)^\delta},$$

при безконечно малыхъ значеніяхъ для x, будетъ обращаться въ ∞ порядка не ниже $2+\alpha$; функція

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)\,x^\alpha(1-x)^\beta\ldots(1-l^2x)^\delta}$$

будетъ получать, при тѣхъ же значеніяхъ x, безконечно большія значенія порядка не ниже $1+\alpha$, а функція

$$\varphi(x)$$

будетъ обращаться въ ∞ порядка не ниже перваго, что противорѣчитъ теоремѣ 3, § I. Слѣдовательно, функція $\theta(x)$ не можетъ обращаться въ безконечность въ точкѣ $x=0$ *). Точно такимъ же образомъ мы докажемъ, что $\theta(x)$ не можетъ обращаться въ безконечность въ точкѣ $x=1$ или въ какой нибудь другой точкѣ на линіи разрыва $(0,\ 1)$; поэтому функція $\theta(x)$ неразрывная во всѣхъ конечныхъ точкахъ координатной плоскости, есть функція цѣлая. Если функція $\varphi(x)$ при безконечно большихъ значеніяхъ перемѣнной x есть безконечно малая величина степени равной x^{-h}, то функція $\theta(x)$, для безконечно большихъ значеній x, есть безконечно большая величина степени равной $x^{n+\sigma-h-1}$, гдѣ σ означаетъ число множителей $x, (1-x)$, $(1-k^2x), \ldots (1-l^2x)$; поэтому функція цѣлая $\theta(x)$ есть *цѣлая, раціональная* функція степени $n+\sigma-h-1$; мы будемъ ее обозначать чрезъ $\theta_{n+\sigma-h-1}$. Итакъ,

$$x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1}\ldots(1-l^2x)^{\delta+1}\psi(x)^2\,\frac{d}{dx}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)x^\alpha(1-x)^\beta\ldots(1-l^2x)^\delta}=\theta_{n+\sigma-h-1};$$

---

*) Легко доказать, что внутри круга, начерченнаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ наименьшему изъ чиселъ 1, $\mathrm{mod}\frac{1}{k^2}, \ldots \mathrm{mod}\frac{1}{l^2}$, имѣемъ

$$\varphi(x)=\frac{2\pi i}{1-e^{2\alpha\pi i}}x^\alpha(1-x)^\beta\ldots(1-l^2x)^\delta\psi(x)+a+bx+cx^2+\ldots,$$

а если α есть число цѣлое, то

$$\varphi(x)=-x^\alpha(1-x)^\beta\ldots(1-l^2x)^\delta\psi(x)\log x+a+bx+cx^2+\ldots$$

Эти выраженія даютъ возможность непосредственно убѣдиться въ томъ, что $\theta(o)$ не равняется ∞.

отсюда

$$\varphi(x) = \psi(x) x^{\alpha} (1-x)^{\beta} \ldots (1-l^2 x)^{\delta} \int \frac{\theta_{n+\sigma-h-1}\, dx}{\psi(x)^2 x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta+1} \ldots (1-l^2 x)^{\delta+1}},$$

или

$$\text{(I)} \quad \int_0^1 \frac{\psi(t)\, t^{\alpha} (1-t)^{\beta} \ldots (1-l^2 t)^{\delta}}{t-x}\, dt = \psi(x) x^{\alpha} \ldots (1-l^2 x)^{\delta} \int \frac{\theta_{n+\sigma-h-1}\, dx}{\psi(x)^2 x^{\alpha+1} \ldots (1-l^2 x)^{\delta+1}}.$$

Формула эта даетъ новое выраженіе функціи $\varphi(x)$ чрезъ неопредѣленный интегралъ отъ алгебрической функціи; мы воспользуемся ею впослѣдствіи.

2. Положивъ въ (I) $\psi(x)=1$, получаемъ

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha} (1-t)^{\beta} \ldots (1-l^2 t)^{\delta}}{t-x}\, dt = x^{\alpha} (1-x)^{\beta} \ldots (1-l^2 x)^{\delta} \int \frac{\theta_{\sigma-h-1}\, dx}{x^{\alpha+1} \ldots (1-l^2 x)^{\delta+1}}.$$

Допустивъ еще, что всѣ параметры $k, \ldots l$ вещественны и меньше, по численному значенію, единицы, будемъ имѣть $h=1$, и слѣд.

$$(1) \quad \int_0^1 \frac{t^{\alpha} (1-t)^{\beta} \ldots (1-l^2 t)^{\delta}\, dt}{t-x} = x^{\alpha} (1-x)^{\beta} \ldots (1-l^2 x)^{\delta} \int \frac{\theta_{\sigma-2}\, dx}{x^{\alpha+1} \ldots (1-l^2 x)^{\delta+1}}.$$

Итакъ, напр.

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{t^{\alpha} (1-t)^{\beta}}{t-x}\, dt = C x^{\alpha} (1-x)^{\beta} \int \frac{dx}{x^{\gamma+1} (1-x)^{\beta+1}},$$

$$(3) \quad \int_0^1 \frac{t^{\alpha} (1-t)^{\beta} (1-k^2 t)^{\gamma}}{t-x}\, dt = x^{\alpha} (1-x)^{\beta} (1-k^2 x)^{\gamma} \int \frac{A + Bx}{x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta+1} (1-k^2 x)^{\gamma+1}}\, dx$$

и т. д. Коеффиціенты A, B, C, въ этихъ формулахъ легко опредѣляются; для этого стоитъ только разложить обѣ части уравненія въ ряды по убывающимъ степенямъ перемѣнной x и приравнять коеффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ уравненія. Такимъ образомъ получаемъ

$$C = -(\alpha+\beta+1) \int_0^1 t^{\alpha} (1-t)^{\beta}\, dt.$$

A и B мы опредѣлимъ въ слѣдующемъ §-фѣ.

§ VII. Связи между полными эллиптическими интегралами.

1. Подставляя въ формулѣ (3) предыдущаго §-фа $-\alpha, -\beta, -\gamma$ на мѣсто α, β, γ, получаемъ

$$(1)\int_0^1 \frac{dt}{(t-x)\,t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma} = \frac{1}{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}\int\frac{A+Bx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}}dx,$$

гдѣ $\alpha<1$, $\beta<1$. Чтобы опредѣлить коеффиціенты A и B, мы представимъ предыдущую формулу такъ:

$$x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}\frac{d}{dx}x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma\int_0^1\frac{dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}=A+Bx,$$

и сдѣлаемъ разложенія:

$$\int_0^1\frac{dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}=-\frac{p_0}{x}-\frac{p_1}{x^2}-\frac{p_2}{x^3}-\dots,$$

гдѣ

$$(2)\qquad p_i=\int_0^1\frac{t^i\,dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma};$$

$$x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma=(-1)^{\beta+\gamma}k^{2\gamma}x^{\alpha+\beta+\gamma}\Big(1-\big(\beta+\frac{\gamma}{k^2}\big)\frac{1}{x}+\dots\Big),$$

$$x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}=(-1)^{2-\beta-\gamma}k^{2(1-\gamma)}x^{3-\alpha-\beta-\gamma}\Big(1-\big(1-\beta+\frac{1-\gamma}{k^2}\big)\frac{1}{x}+\dots\Big).$$

Вслѣдствіе этого находимъ

$$-k^2x\Big[(\alpha+\beta+\gamma-1)p_0-\Big((\alpha+\beta+\gamma-1)\big(1-\beta+\frac{1-\gamma}{k^2}\big)p_0-(\alpha+\beta+\gamma-2)\big(p_1-\big(\beta+\frac{\gamma}{k^2}\big)p_0\big)\Big)\frac{1}{x}+\dots\Big]$$
$$=A+Bx,$$

и слѣд. послѣ упрощеній,

$$(3)\qquad A=[(\alpha+\beta-1+k^2(\alpha+\gamma-1)]p_0-(\alpha+\beta+\gamma-2)k^2p_1,$$

$$(4)\qquad B=-(\alpha+\beta+\gamma-1)\,k^2p_0.$$

Подставляя въ (1) на мѣсто A и B ихъ значенія по формуламъ (3), (4), (2), находимъ

$$(\mathrm{I})\qquad x^{\alpha}(1-x)^{\beta}(1-k^2x)^{\gamma}\int\limits_0^1\frac{dt}{(t-x)t^{\alpha}(1-t)^{\beta}(1-k^2t)^{\gamma}}$$

$$=[(\alpha+\beta-1+k^2(\alpha+\gamma-1)]\int\limits_0^1\frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)^{\beta}(1-k^2t)^{\gamma}}\int\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}}$$

$$-(\alpha+\beta+\gamma-2)k^2\int\limits_0^1\frac{t\,dt}{t^{\alpha}(1-t)^{\beta}(1-k^2t)^{\gamma}}\int\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}}$$

$$-(\alpha+\beta+\gamma-1)k^2\int\limits_0^1\frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)^{\beta}(1-k^2t)^{\gamma}}\int\frac{x\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}}.$$

Всякій разъ когда число γ положительно, за низшій предѣлъ неопредѣленнаго интеграла во второй части (I) можно взять $\frac{1}{k^2}$: полагая, напримѣръ,

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2},$$

получаемъ

$$(5)\quad\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}\;dt}{(t-x)\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{k^2t\;dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}\int\limits_{\frac{1}{k^2}}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}\int\limits_{\frac{1}{k^2}}^{x}\frac{k^2\,x\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Это извѣстная формула Лежандра, выражающая полный эллиптическій интегралъ третьяго вида помощію эллиптическихъ интеграловъ двухъ первыхъ видовъ. Ее обыкновенно представляютъ подъ другимъ видомъ, который можно получить изъ (5) чрезъ подстановленіе $\frac{1}{k^2x}$ на мѣсто x; тогда на самомъ дѣлѣ получаемъ:

$$\text{на мѣсто}\ -\int\limits_0^1\frac{\Delta(x)\,dt}{(t-x)\Delta(t)}\cdots\cdots\cdots\cdots\int\limits_0^1\frac{\Delta(x)\,dt}{x(1-k^2tx)\,\Delta(t)}$$

$$\text{»}\qquad -\int\limits_{\frac{1}{k^2}}^{x}\frac{dx}{\Delta(x)}\cdots\cdots\cdots\cdots\int\limits_1^x\frac{dx}{\Delta(x)}=\int\limits_0^x\frac{dx}{\Delta(x)}-\int\limits_0^1\frac{dx}{\Delta(x)}$$

на мѣсто $-\int\limits_{\frac{1}{k^2}}^{x}\frac{k^2x\,dx}{\Delta(x)}\ldots\ldots\ldots\ldots\int\limits_{1}^{x}\frac{dx}{x\,\Delta(x)}=k^2\int\limits_{1}^{x}\frac{x\,dx}{\Delta(x)}-\frac{2\,\Delta(x)}{x}$

$$=k^2\int\limits_{0}^{x}\frac{x\,dx}{\Delta(x)}-k^2\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\Delta(x)}-\frac{2\Delta(x)}{x},$$

гдѣ $\Delta(x)=\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}$, и слѣд., послѣ нѣкоторыхъ упрощеній,

$$(6)\qquad 2\int\limits_{0}^{1}\frac{\Delta(x)\,t\,dt}{(1-k^2tx)\Delta(t)}=\int\limits_{0}^{1}\frac{t\,dt}{\Delta(t)}\int\limits_{0}^{x}\frac{dx}{\Delta(x)}-\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{\Delta(t)}\int\limits_{0}^{x}\frac{x\,dx}{\Delta(x)},$$

2. Принимая во вниманіе формулу (I), мы предположимъ, что β и γ положительны и сдѣлаемъ $x=1$; тогда первая часть (I) будетъ равняться

$$\lim\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma\,dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\right)_{x=1}.$$

Полагая

$$x=1+h,$$
$$t=1-ht',$$

получаемъ

$$\lim\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma\,dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\right)_{x=1}$$

$$=e^{-\beta\pi i}\lim\left(\int\limits_{\frac{1}{h}}^{0}\frac{(1+h)^\alpha(1-k^2-k^2h)^\gamma\,dt}{(1+t)t^\beta(1-ht)^\alpha(1-k^2+k^2ht)^\gamma}\right)_{h=0}$$

$$=-e^{-\beta\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\,t^\beta},$$

или по формулѣ (I) § II,

$$\lim\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma\,dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\right)_{x=1}=-\frac{\pi e^{-\beta\pi i}}{\sin\beta\pi}.$$

Слѣдовательно, изъ (I) получаемъ

$$[(\alpha+\beta-1+(\alpha+\gamma-1)k^2)]\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\beta}(1-k^2t)^{1-\gamma}}$$

$$-(\alpha+\beta+\gamma-2)\int\limits_0^1 \frac{k^2\,t\,dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\beta}(1-k^2t)^{1-\gamma}}$$

$$-(\alpha+\beta+\gamma-1)\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{k^2\,t\,dt}{t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\beta}(1-k^2t)^{1-\gamma}}=\frac{\pi e^{-\beta\pi i}}{\sin\beta\pi},$$

или, внося въ первую часть на мѣсто $(1-t)^{1-\beta}$

$$e^{-\pi(1-\beta)}(t-1)^{1-\beta}$$

и сокращая обѣ части на $e^{-\beta\pi i}$,

$$\text{(II)}\begin{cases}-(\alpha+\beta-1+(\alpha+\gamma-1)k^2)\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{k\,t\,dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{t^{1-\alpha}(t-1)^{1-\beta}(1-k^2t)^{1-\gamma}}\\ +(\alpha+\beta+\gamma-2)\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{k^2\,t\,dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{t^{1-\alpha}(t-1)^{1-\beta}(1-k^2t)^{1-\gamma}}\\ +(\alpha+\beta+\gamma-1)\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{k^2\,t\,dt}{t^{1-\alpha}(t-1)^{1-\beta}(1-k^2t)^{1-\gamma}}=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}.\end{cases}$$

Дѣлая въ этой формулѣ $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$, находимъ

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{k^2\,t\,dt}{\sqrt{t(t-1)(1-k^2t)}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{k^2\,t\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(1-k^2t)}}=\pi$$

Это формула Лежандра, выражающая связь между четырьмя полными интегралами двухъ первыхъ видовъ.

3. Принимая во вниманіе функцію

$$\varphi = \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma},$$

находимъ

$$(8)\qquad \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}$$

$$= \frac{1}{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}\int \frac{C+Dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}}dx,$$

гдѣ

$$(9)\qquad \left\{ \begin{array}{l} C=(\alpha+\beta-1+(\alpha+\gamma-1)k^2)q_0-(\alpha+\beta+\gamma-2)k^2q_1, \\ D=-(\alpha+\beta+\gamma-1)k^2q_1, \\ q_i = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{t^i\,dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}. \end{array} \right.$$

Изъ (1) и (8) получаемъ

$$(10)\qquad l\int_0^1 \frac{dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma} + m\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}$$

$$= \frac{1}{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}\int \frac{L+Mx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}}\,dx$$

гдѣ l и m суть произвольныя числа, а

$$L = lA + mC,$$
$$M = lB + mD.$$

Числа l и m можно выбрать такъ, чтобы одно изъ чиселъ L и M, напр. M, обращалось въ нуль; для этого необходимо чтобы l и m удовлетворяли уравненію

$$lp_0 + mq_0 = 0.$$

Мы положимъ

$$l=q_0,\ m = -p_0;$$

тогда

$$L=(\alpha+\beta+\gamma-2)(p_0q_1-q_0p_1)k^2, \quad M=0,$$

и, слѣдовательно,

$$\text{(III)}\qquad q_0\int\limits_0^1 \frac{dt}{(t-x)\,t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}$$

$$-p_0\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{(t-x)\,t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2)\,(p_0q_1-p_1q_0)\,k^2}{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}\int\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}}.$$

Если $\alpha+\beta+\gamma<2$, то за низшій предѣлъ неопредѣленнаго интеграла во второй части (III) можно взять ∞.

Въ частномъ случаѣ, когда $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$, будемъ имѣть, по формулѣ (7),

$$k^2\,(p_0q_1-p_1q_0)=-2\pi i;$$

слѣдовательно,

$$\text{(11)}\qquad \int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}\int\limits_0^1\frac{dt}{(t-x)\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}$$

$$-\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}$$

$$=\frac{\pi i}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}\int\limits_\infty^x\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Это извѣстная формула, выражающая собою связь между четырьмя полными интегралами перваго и третьяго видовъ. Подставивъ $\frac{1}{k^2x}$ на мѣсто x, получимъ ту же формулу въ другомъ видѣ, именно:

$$\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}\int\limits_0^1\frac{dt}{(1-k^2tx)\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}$$

$$-\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{(1-k^2tx)\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}$$

$$=-\frac{\pi x i}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

или

$$(12)\quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}} \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{k^2\,tdt}{(1-k^2tx)\sqrt{t(t-1)(1-k^2t)}}$$

$$-\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(1-k^2t)}} \int_0^1 \frac{k^2\,tdt}{(1-k^2tx)\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

§ VIII. Преобразованіе функціи

$$\int_0^1 \frac{(t^n+a_1\,t^{n-1}+\ldots+a_n)e^{\alpha t}\,t^\beta\,(1-t)^\gamma\ldots(1-l^2t)^\varepsilon}{t-x}\,dt.$$

Частные случаи.

1. Функція

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\psi(t)\,e^{\alpha t}t^\beta\,(1-t)^\gamma\ldots(1-l^2t)^\varepsilon\,dt}{t-x},$$

гдѣ $\psi(t)$ есть произвольная цѣлая функція n-ой степени, составляетъ частный случай функціи, разсматриваемой въ § VI, ибо

$$e^{\alpha t} = \lim\left(1+\frac{\alpha t}{m}\right)^m, \quad (m=\infty);$$

поэтому она можетъ быть выражена чрезъ неопредѣленный интегралъ по способу указанному въ § VI.

Дѣйствительно, такъ какъ функція

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)\,e^{\alpha x}x^\alpha\,(1-x)^\beta\ldots(1-l^2x)^\varepsilon}$$

во всѣхъ точкахъ на прямой (0, 1) имѣетъ по два значенія, разнящіяся на $2\pi i$, то

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)e^{\alpha x}x^\beta\,(1-x)^\gamma\ldots(1-l^2x)^\varepsilon}$$

есть функція неразрывная въ точкахъ на (0, 1). Но, съ другой стороны, послѣдняя функція имѣетъ линіями разрыва $(0, \infty)$, $(1, \infty)$, $\left(\frac{1}{l^2}, \infty\right)$, которыя суть также линіями разрыва функціи

$$e^{\alpha x}\, x^{\beta}\,(1-x)^{\gamma} \dots (1-l^2 x)^{\varepsilon},$$

и очевидно, что произведеніе

$$\theta(x) = e^{\alpha x} x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1} \dots (1-l^2x)^{\varepsilon+1}\psi(x)^2 \frac{d}{dx}\frac{\varphi(x)}{\psi(x) e^{\alpha x} x^{\beta}(1-x)^{\gamma} \dots (1-l^2x)^{\varepsilon}}$$

есть функція, не имѣющая линіи разрыва во всей координатной плоскости. Кромѣ того, $\theta(x)$ не можетъ обращаться въ ∞ ни въ одной конечной точкѣ на координатной плоскости *), слѣд. она есть цѣлая функція отъ перемѣнной x. Для безконечно большихъ значеній перемѣнной x, $\theta(x)$ обращается въ ∞ степени равной $x^{n+\sigma-h}$, гдѣ h означаетъ наинизшій показатель $\frac{1}{x}$ въ разложеніи функціи $\varphi(x)$ по возрастающимъ степенямъ отъ $\frac{1}{x}$, а σ означаетъ число множителей

$$t,\ (1-t), \dots (1-l^2 t);$$

поэтому функція $\theta(x)$ есть *цѣлая*, *раціональная* функція отъ x степени $n+\sigma-h$: мы будемъ ее означать чрезъ $\theta_{n+\sigma-h}$, и слѣд.

$$e^{\alpha x} x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1} \dots (1-l^2x)^{\varepsilon+1}\psi(x)^2 \frac{d}{dx}\frac{\varphi(x)}{\psi(x) e^{\alpha x} x^{\beta}(1-x)^{\gamma} \dots (1-l^2x)^{\varepsilon}} = \theta_{n+\sigma-h},$$

или

$$\text{(I)} \qquad \int_0^1 \frac{\psi(t)\, e^{\alpha t} t^{\beta}\,(1-t)^{\gamma} \dots (1-l^2 t)^{\varepsilon}\ dt}{t-x}$$

$$= \psi(x) e^{\alpha x} x^{\beta}(1-x)^{\gamma} \dots (1-l^2x)^{\varepsilon} \int \frac{\theta_{n+\sigma-h}\ dx}{e^{\alpha x} x^{\beta+1} \dots (1-l^2x)^{\varepsilon+1}\,\psi(x)^2}.$$

Въ первой части послѣдней формулы на мѣсто предѣловъ интеграла 0 и 1 можно взять произвольныя два числа изъ ряда

$$0,\ 1,\ \frac{1}{k^2}, \dots \frac{1}{l^2},\ \ \infty;$$

---

*) Для значеній x, соотвѣтствующихъ точкамъ внутри круга, начерченнаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ наименьшему изъ чиселъ $1, \dots \bmod \frac{1}{l^2}$ будемъ имѣть

$$\varphi(x) = \frac{2\pi i}{1-e^{2\beta\pi i}} e^{\alpha x} x^{\beta}(1-x)^{\gamma} \dots (1-l^2x)^{\varepsilon}\psi(x) + a + bx + cx^2 + \dots,$$

а если β число цѣлое, то

$$\varphi(x) = -e^{\alpha x} x^{\beta}(1-x)^{\gamma} \dots (1-l^2x)^{\varepsilon}\psi(x) \log x + a + bx + cx^2 + \dots$$

Помощью этихъ выраженій можно непосредственно удостовѣриться въ томъ, что $\theta(o)$ не равняется ∞.

Не трудно также составить другія выраженія для $\varphi(x)$, подобныя предыдущимъ, изъ которыхъ непосредственно можно будетъ заключить, что $\theta(1)$ не равняется ∞.

приэтомъ будутъ мѣняться только коэффиціенты въ выраженіи функціи $\theta_{n+\sigma-h}$.

2. Полагая въ (I) $\psi(x)=1$, $h=1$, получаемъ

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{e^{\alpha t}t^\beta(1-t)^\gamma\dots(1-l^2t)^\varepsilon\,dt}{t-x}$$

$$=e^{\alpha x}x^\beta(1-x)^\gamma\dots(1-l^2x)^\varepsilon\int\frac{\theta_{\sigma-1}\,dx}{e^{\alpha x}x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1}\dots(1-l^2x)^{\varepsilon+1}}.$$

Послѣднее предположеніе, что $h=1$, будетъ имѣть мѣсто, когда всѣ параметры $k,\dots l$ вещественны и каждый изъ нихъ меньше единицы, по численному значенію.

Дѣлая поочередно $\sigma=1, 2,\dots$, получаемъ

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}t^\beta\,dt}{t-x}=Ce^{-\alpha x}x^\beta\int\frac{e^{\alpha x}dx}{x^{\beta+1}},$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{e^{-\alpha t}t^\beta(1-t)^\gamma\,dt}{t-x}=e^{-\alpha x}x^\beta(1-x)^\gamma\int\frac{(A+Bx)\,e^{\alpha x}}{x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1}}dx,\\ &\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}t^\beta(1-t)^\gamma\,dt}{t-x}=e^{-\alpha x}x^\beta(1-x)^\gamma\int\frac{(C+Dx)e^{\alpha x}}{x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1}}dx,\end{aligned}\right.$$

и т. д.

3. Чтобъ опредѣлить постоянную C въ формулѣ

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\,dt}{(t-x)\,t^\beta}=C\frac{e^{-\alpha x}}{x^\beta}\int\frac{e^{\alpha x}\,dx}{x^{1-\beta}},$$

мы напишемъ ее такъ:

$$x^{1-\beta}e^{-\alpha x}\frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}x^\beta\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t}\,dt}{(t-x)\,t^\beta}\right)=C;$$

отсюда, такъ какъ

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t}\,dt}{(t-x)\,t^\beta}=-\frac{1}{x}\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t}\,dt}{t^\beta}-\dots,$$

находимъ

$$C=-\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}t^{-\beta}\,dt,$$

или

$$(5)\qquad C = -\alpha^{\beta}\,\Gamma(1-\beta).$$

Умножимъ обѣ части (4) на x^{β} и сдѣлаемъ $x=0$; тогда будемъ имѣть

$$\lim\left(\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha t}x^{\beta}\,dt}{(t-x)\,t^{\beta}}\right)_{x=0} = C\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\alpha x}\,dx}{x^{1-\beta}}.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\alpha x}\,dx}{x^{1-\beta}} = -e^{(\beta-1)\pi i}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}\,dx}{x^{1-\beta}} = -e^{(\beta-1)\pi i}\,\alpha^{-\beta}\,\Gamma(\beta),$$

а съ другой стороны, полагая $t = -xt'$

$$\lim\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha t}x^{\beta}\,dt}{(t-x)\,t^{\beta}} = e^{\beta\pi i}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\,t^{\beta}} = \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\,e^{\beta\pi i};$$

слѣдовательно,

$$\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\,e^{\beta\pi i} = -C\,e^{(\beta-1)\pi i}\,\alpha^{-\beta}\,\Gamma(\beta),$$

или

$$\Gamma(\beta)\,C = -\alpha^{\beta}\,\frac{\pi}{\sin\beta\pi}.$$

Сличая послѣднее уравненіе съ (5) находимъ

$$(6)\qquad \Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\beta) = \frac{\pi}{\sin\beta\pi}.$$

4. Переходя къ опредѣленію постоянныхъ A и B въ формулѣ

$$(7)\qquad \int_0^{1}\frac{e^{-\alpha t}\,dt}{(t-x)\,t^{\beta}(1-t)^{\gamma}} = \frac{e^{-\alpha x}}{x^{\beta}(1-x)^{\gamma}}\int\frac{e^{\alpha x}(A+Bx)\,dx}{x^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}},$$

мы напишемъ ее такъ:

$$e^{-\alpha x}x^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\,\frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}x^{\beta}(1-x)^{\gamma}\int_0^{1}\frac{e^{-\alpha t}\,dt}{(t-x)\,t^{\beta}(1-t)^{\gamma}}\right) = A + Bx,$$

и подставимъ на мѣсто опредѣленнаго интеграла въ первой части его разложеніе

$$\int_0^{1}\frac{e^{-\alpha t}\,dt}{(t-x)\,t^{\beta}(1-t)^{\gamma}} = -\frac{1}{x}\left(p_0 + \frac{p_1}{x} + \dots\right),$$

гдѣ

$$p_i = \int_0^1 \frac{t^i e^{-\alpha t}\, dt}{t^\beta (1-t)^\gamma},$$

а на мѣсто $(1-x)^\gamma$, $(1-x)^{1-\gamma}$ ихъ разложенія по формулѣ бинома; тогда, произведя указанныя дѣйствія и приравнивая коеффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ, находимъ

$$A = (-\alpha+\beta+\gamma-1)\, p_0 + \alpha\, p_1,$$
$$B = \alpha\, p_0.$$

Слѣдовательно,

$$(8) \quad \int_0^1 \frac{x^\beta (1-x)^\gamma e^{\alpha(x-t)}\, dt}{(t-x)\, t^\beta (1-t)^\gamma} = (-\alpha+\beta+\gamma-1) \int_0^1 \frac{e^{-\alpha t}\, dt}{t^\beta (1-t)^\gamma} \int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}}$$

$$+\alpha\left[\int_0^1 \frac{te^{-\alpha t}\, dt}{t^\beta (1-t)^\gamma} \int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}} + \int_0^1 \frac{e^{-\alpha t}\, dt}{t^\beta (1-t)^\gamma} \int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}}\right].$$

За низшій предѣлъ неопредѣленныхъ интеграловъ во второй части послѣдней формулы (8) можно взять $-\infty$ или $+\infty$ смотря по тому, будетъ ли α отрицательное или положительное.

Въ обѣихъ частяхъ формулы (8) на мѣсто предѣловъ 0 и 1 можно подставить 1 и ∞.

Примѣчаніе. Само собою разумѣется, что во всѣхъ вышевыведенныхъ формулахъ показатели α, β, γ,... предполагаются такими, при которыхъ разсматриваемые интегралы получаютъ конечныя, опредѣленныя значенія. Подобнаго рода условія мы всегда будемъ подразумѣвать.

§ IX. Преобразованіе функціи

$$\int_0^1 \frac{(t^n+a_1 t^{n-1}+\ldots+a_n)e^{-\alpha t^2}\, t^\beta (1-t)^\gamma \ldots (1-l^2 t)^\varepsilon}{t-x}\, dt.$$

Частные случаи.

1. Полагая

$$\varphi = \int_0^1 \frac{\psi(t) e^{-\alpha t^2} t^\beta (1-t)^\gamma \ldots (1-l^2 t)^\varepsilon\, dt}{t-x}$$

гдѣ ψ есть цѣлая функція n-ой степени, легко удостовѣриться, что функція

$$e^{-\alpha x^2}x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1}\ldots(1-l^2x)^{\varepsilon+1}\psi(x)^2\frac{d}{dx}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)e^{-\alpha x^2}x^{\beta}(1-x)^{\gamma}\ldots(1-l^2x)^{\varepsilon}}$$

есть неразрывная во всѣхъ конечныхъ точкахъ координатной плоскости, и слѣд. она есть функція цѣлая, степень которой равняется $n+\sigma+1-h$, если h означаетъ наинизшій показатель $\frac{1}{x}$ въ разложеніи функціи $\varphi(x)$ по возрастающимъ степенямъ $\frac{1}{x}$, а σ есть число множителей, x, $(1-x)$,... $(1-l^2x)$. Означая эту функцію нрезъ $\theta_{n+\sigma+1-h}$, будемъ имѣть

$$e^{-\alpha x^2}x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1}\ldots(1-l^2x)^{\varepsilon+1}\psi(x)^2\frac{d}{dx}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)e^{-\alpha x^2}x^{\beta}(1-x)^{\gamma}\ldots(1-l^2x)^{\varepsilon}}$$
$$=\theta_{n+\sigma+1-h}$$

или

$$\text{(I)}\qquad\int_0^1\frac{\psi(t)e^{-\alpha t^2}t^{\beta}(1-t)^{\gamma}\ldots(1-l^2t)^{\varepsilon}\,dt}{t-x}$$

$$=e^{-\alpha x^2}x^{\beta}(1-x)^{\gamma}\ldots(1-l^2x)^{\varepsilon}\psi(x)\int\frac{e^{\alpha x^2}\,\theta_{n+\sigma+1-h}\,dx}{\psi(x)^2x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1}\ldots(1-l^2x)^{\varepsilon+1}}$$

Полагая $\psi(x)=1$, $h=1$, получаемъ

$$\text{(1)}\qquad\int_0^1\frac{e^{-\alpha t^2}t^{\beta}(1-t)^{\gamma}\ldots(1-l^2t)^{\varepsilon}\,dt}{t-x}$$

$$=e^{-\alpha x^2}x^{\beta}(1-x)^{\gamma}\ldots(1-l^2x)^{\varepsilon}\int\frac{e^{\alpha x^2}\,\theta_{\sigma}\,dx}{x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma+1}\ldots(1-l^2x)^{\varepsilon+1}}$$

Послѣднее предположеніе, что $h=1$, будетъ имѣть мѣсто каждый разъ, когда подъинтегральная функція, оставаясь вещественною между предѣлами интеграла, не будетъ мѣнять своего знака между тѣми же предѣлами.

Очевидно, что въ формулахъ (I) и (1) на мѣсто предѣловъ опредѣленнаго интеграла 0 и 1 можно взять два произволъныя числа, изъ содержащихся въ ряду

$$-\infty,\ 0,\ 1,\ldots\ \frac{1}{l^2},\ +\infty,$$

приэтомъ каждый разъ будутъ мѣняться только коеффиціенты въ выраженіи функціи θ.

2. Полагая въ (I) поочередно $\sigma=0, 1,\ldots$, получаемъ

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t-x}=Ce^{-\alpha x^2}\int e^{\alpha x^2}\,dx$$

$$(3)\qquad \int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,t^{\beta}\,dt}{t-x}=e^{-\alpha x^2}\,x^{\beta}\int\frac{e^{\alpha x^2}\,(A+Bx)dx}{x^{\beta+1}},$$

и т. д.

3. Чтобъ опредѣлить постоянную C въ (2), мы напишемъ эту формулу такъ:

$$e^{-\alpha x^2}\frac{d}{dx}e^{\alpha x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t-x}=C.$$

Произведя дифференцированіе, получаемъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{(t-x)^2}+2\alpha x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t-x}=C;$$

отсюда

$$C=-2\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha t^2}\,dt,$$

или

$$C=-4\sqrt{\alpha}\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}\,dt.$$

Съ другой стороны, полагая въ (2) $x=0$, получаемъ

$$\lim\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t-x}\right)_{x=0}=C\int_{i\infty}^{0}e^{\alpha x^2}\,dx.$$

Но, по теоремѣ 2, § I,

$$\lim\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t-x}\right)_{x=0}=\pi i,$$

слѣдовательно,

$$\pi i=-C\int_{0}^{i\infty}e^{\alpha x^2}\,dx=-Ci\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\,dx.$$

или

(5) $$\pi = -\frac{C}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Изъ (5) и (4) получаемъ

(6) $$\int_0^\infty e^{x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. Переходя къ опредѣленію постоянныхъ A и B въ формулѣ (3), мы представимъ эту формулу такъ:

$$e^{-\alpha x^2} x^{\beta+1} \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x^2} x^{-\beta} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t^2} t^\beta\, dt}{t-x}\right) = A + Bx,$$

и подставимъ на мѣсто опредѣленнаго интегряла въ первой части сумму

$$-\frac{1}{x}\left(p_0 + \frac{p_1}{x} + \ldots\ldots\right),$$

гдѣ

(7) $$p_i = \int_0^\infty e^{-\alpha t^2}\, t^{\beta+i}\, dt;$$

тогда произведя указанныя дѣйствія и сличая коеффиціенты у одинаковыхъ степеней x въ обѣихъ частяхъ, находимъ

(8) $$\begin{cases} A = -2\alpha p_1, \\ B = -2\alpha p_0. \end{cases}$$

Слѣдовательно, подставляя $-\beta$ на мѣсто β, имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t^2}\, dt}{(t-x)\, t^\beta} = -\frac{2\alpha\, e^{-\alpha x^2}}{x^\beta} \int_{i\infty}^x \frac{(p_1 + p_0 x)\, e^{\alpha x^2}\, dx}{x^{1-\beta}},$$

или

(9) $$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(t^2-x^2)}\, x^\beta\, dt}{(t-x)\, t^\beta} = -2\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t^2} t^{1-\beta}\, dt \int_{i\infty}^x \frac{e^{\alpha x^2}\, dt}{x^{1-\beta}}$$

$$-2\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t^2}\, dt}{t^\beta} \int_{i\infty}^x e^{\alpha x^2} x^\beta\, dx.$$

Дѣлая въ обѣихъ частяхъ уравненія (9) $x=0$ и замѣчая, что

$$\lim\left(\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(t^2-x^2)}x^\beta\,dt}{(t-x)\,t^\beta}\right)_{x=0} = e^{\beta\pi i}\lim\left(\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2(t^2-1)}\,dt}{(1+t)\,t^\beta}\right)_{x=0}$$

$$= e^{\beta\pi i}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\,t^\beta} = \frac{\pi\, e^{\beta\pi i}}{\sin\beta\pi},$$

далѣе

$$\int_{i\infty}^0 \frac{e^{\alpha x^2}\,dx}{x^{1-\beta}} = -\,e^{\frac{\pi}{2}(\beta-1)i}\, i\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t^{1-\beta}},$$

$$\int_{i\infty}^0 e^{\alpha x^2}x^\beta\,dx = -\,e^{\beta\frac{\pi}{2}i}\int_0^\infty e^{-\alpha t^2}\,t^\beta\,dt,$$

находимъ

$$\frac{\pi\, e^{\beta\pi i}}{\sin\beta\pi} = 2\alpha\, e^{-(1-\beta)\frac{\pi}{2}i}\, i\int_0^\infty e^{-\alpha t^2}\,t^{1-\beta}\,dt\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t^{1-\beta}}$$

$$+\,2\alpha\, e^{\beta\frac{\pi}{2}i}\, i\int_0^\infty e^{\alpha t^2}\,t^\beta\,dt\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t^\beta};$$

отсюда, полагая $\alpha=1$, что не нарушаетъ общности формулы, и сокращая,

$$\frac{\pi\, e^{\frac{\beta}{2}\pi i}}{2\sin\beta\pi} = \int_0^\infty e^{-t^2}t^{1-\beta}\,dt\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{1-\beta}}\,dt + i\int_0^\infty e^{-t^2}t^\beta dt\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^\beta}\,dt.$$

Приравнивая мнимыя и вещественныя части, получаемъ

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\pi}{4\sin\frac{\beta}{2}\pi} &= \int_0^\infty e^{-t^2}\,t^{1-\beta}\,dt\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^{1-\beta}},\\ \frac{\pi}{4\cos\frac{\beta}{2}\pi} &= \int_0^\infty e^{-t^2}\,t^\beta\,dt\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^\beta}. \end{aligned}\right.$$

Послѣднее уравненіе получается изъ предшествующаго чрезъ подстановленіе $1-\beta$ на мѣсто β. Такимъ образомъ мы вновь получили извѣстную формулу

$$\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\beta)=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}.$$

§ X. Преобразованіе функціи

$$\int_0^0 \frac{(t^n+a_1\,t^{n-1}+\ldots\ldots+a_n)e^{-\frac{\alpha}{t}}\,dt}{(t-x)t^\beta(1-t)^\gamma\ldots.(1-l^2t)^\varepsilon}.$$

Частные случаи.

1. Мы предположимъ, что въ выраженіи

$$\varphi(x)=\int_0^0\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\psi(t)\;dt}{(t-x)t^\beta(1-t)^\gamma\ldots(1-l^2t)^\varepsilon},$$

гдѣ

$$\psi(t)=t^n+a_1\,t^{n-1}+\ldots\ldots+a_n,$$

интегралъ взятъ по траекторіи $oabco$ или $oa'dc'o$ (См. чер. 1) смотря по тому, будетъ ли постоянная α положительна или отрицательна; тогда для всѣхъ значеній перемѣнной x, за исключеніемъ значеній соотвѣтствующихъ точкамъ на линіи $oabco$ или $oa'dc'o$, функція $\varphi(x)$ будетъ конечною и неразрывною.

Чер. 1.

Мы допустимъ что $\alpha>0$; второй случай, когда $\alpha<0$, не представляетъ ничего отличительнаго.

Очевидно, что функція

$$\theta(x)=x^{2-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\ldots.(1-l^2x)^{1-\varepsilon}\psi(x)^2e^{-\frac{\alpha}{x}}\frac{d}{dx}\frac{\varphi(x)x^\beta(1-x)^\gamma\ldots.(1-l^2x)^\varepsilon}{\psi(x)e^{-\frac{\alpha}{x}}}$$

не имѣетъ линіи разрыва; не трудно также доказать, что ни въ одной конечной точкѣ на координатной плоскости $\theta(x)$ не обращается въ ∞. Дѣйствительно, если существуетъ такая точка, то она есть начало координатъ; ибо для всѣхъ другихъ конечныхъ значеній перемѣнной x, какъ функція $\varphi(x)$ такъ и ея производная $\varphi'(x)$ получаютъ конечныя значенія. Но не трудно убѣдиться, принимая во вниманіе выраженіе функціи $\varphi(x)$, что $\theta(0)$ не равняется ∞; вслѣдствіе этого мы заключаемъ, что $\theta(x)$ есть цѣлая функція; а такъ какъ, при $x=\infty$, $\theta(x)$ обращается въ ∞ степени равной $x^{n+\sigma-h}$ гдѣ σ и h означаютъ тоже что и въ предыдущихъ §-фахъ, то слѣд. $\theta(x)$ есть *цѣлая, раціональная* функція степени $n+\sigma-h$. Для простоты мы будемъ ее изображать чрезъ $\theta_{n+\sigma-h}$.

Итакъ,

$$x^{2-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\dots(1-l^2x)^{1-\varepsilon}\psi(x)^2 e^{-\frac{\alpha}{x}}\frac{d}{dx}\frac{\varphi(x)\,x^{\beta}(1-x)^{\gamma}\dots(1-l^2x)^{\varepsilon}}{\psi(x)e^{-\frac{\alpha}{x}}}$$
$$=\theta_{n+\sigma-h},$$

отсюда

$$\text{(I)}\qquad \int_0^0 \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\psi(t)\,dt}{(t-x)t^{\beta}(1-t)^{\gamma}\dots(1-l^2t)^{\varepsilon}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}\psi(x)}{x^{\beta}(1-x)^{\gamma}\dots(1-l^2x)^{\varepsilon}}\int\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}\theta_{n+\sigma-h}\,dx}{x^{2-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\dots(1-l^2x)^{1-\varepsilon}\psi(x)^2}.$$

Въ первой части этой формулы (I) на мѣсто интеграла по сомкнутой кривой можно взять опредѣленный интегралъ съ предѣлами 0 и 1, или 1 и $\frac{1}{k^2}$, и т. д.; приэтомъ будутъ мѣняться только коеффиціенты въ выраженіи функціи $\theta_{n+\sigma-h}$.

2. Въ томъ случаѣ, когда число β есть цѣлое или нуль, на мѣсто интеграла по сомкнутой кривой *oabco* въ первой части (I) можно взять интегральный вычетъ функціи

$$\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\psi(t)}{(t-x)\,t^{\beta}\,(1-t)^{\gamma}\dots(1-l^2t)^{\varepsilon}}$$

относительно точки $t=0$, т. е. на мѣсто первой части (I) можно подставить

$$\mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\psi(t)}{(t-x)((t^{\beta}))(1-t)^{\gamma}\dots(1-l^2t)^{\varepsilon}}.$$

Если γ есть число цѣлое, положительное, то въ формулѣ (I) на мѣсто первой ея части можно подставить

$$\mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\psi(t)}{(t-x)\,t^{\beta}\,(((1-t)^{\gamma}))\dots(1-l^2t)^{\varepsilon}},$$

и т. д.

Наконецъ, если и β, и γ суть числа цѣлыя, положительныя, то на мѣсто первой части (I) можно подставить

$$\mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\psi(t)}{(t-x)((t^{\beta}(1-t)^{\gamma}))\dots(1-l^2t)^{\varepsilon}},$$

и т. д.

Если всѣ числа β, γ,... ε, суть цѣлыя, то на мѣсто первой части (I) можно подставить

$$\mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\psi(t)}{(x-t)((t^{\beta}(1-t)^{\gamma}\dots(1-l^2t)^{\varepsilon}))}=\mathrm{F}\frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}\psi(x)}{x^{\beta}(1-x)^{\gamma}\dots(1-l^2x)^{\varepsilon}}.$$

3. Переходя къ частнымъ случаямъ, мы положимъ $\psi(x)=1$, $h=1$; тогда получимъ

$$(1)\qquad \int_0^0\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}dt}{(t-x)\,t^{\beta}\dots(1-l^2t)^{\varepsilon}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x^{\beta}\dots(1-l^2x)^{\varepsilon}}\int\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}\theta_{\sigma-1}dx}{x^{2-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\dots(1-l^2x)^{1-\varepsilon}}.$$

Далѣе, дѣлая поочередно $\sigma=1, 2,\dots$ находимъ

$$\int_0^0\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}dt}{(t-x)\,t^{\beta}}=C\frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x^{\beta}}\int\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}dx}{x^{2-\beta}},$$

$$\int_0^0\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}dt}{(t-x)\,t^{\beta}(1-t)^{\gamma}}=\frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x^{\beta}(1-x)^{\gamma}}\int\frac{(Ax+B)\,e^{\frac{\alpha}{x}}\,dx}{x^{2-\beta}(1-x)^{1-\gamma}},$$

$$\int_0^1\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}dt}{(t-x)\,t^{\beta}(1-t)^{\gamma}}=\frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x^{\beta}(1-x)^{\gamma}}\int\frac{(Cx+D)\,e^{\frac{\alpha}{x}}\,dx}{x^{2-\beta}(1-x)^{1-\gamma}},$$

и т. д.

Постоянныя A, B, C,... можно опредѣлить точно такимъ же образомъ, какъ было показано въ предыдущихъ §-фахъ.

ГЛАВА II.

ФУНКЦІИ,
ПОДОБНЫЯ ФУНКЦІЯМЪ ЛЕЖАНДРА.

§ XI. Знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt}{t-x}$$

въ непрерывную дробь.

1. Въ предыдущей главѣ (См. § VI, (I)) выведена была такая формула:

$$(1) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta Q_n(t) dt}{t-x}$$

$$= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta Q_n(x) \int \frac{\theta_{n+1-h} \, dx}{(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} Q_n(x)^2},$$

гдѣ $Q_n(x)$ означаетъ произвольную цѣлую функцію n-ой степени, θ_{n+1-h} есть цѣлая функція $(n+1-h)$-ой степени, h—наименьшій показатель въ разложеніи функціи

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta Q_n(t) \, dt}{t-x}$$

по возрастающимъ степенямъ отъ $\frac{1}{x}$.

Предположимъ теперь, что функція $Q_n(x)$ равняется одному изъ знаменателей подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt}{t-x} = C(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \int \frac{dx}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}$$

въ непрерывную дробь вида

$$\cfrac{k_1}{x+a_1+\cfrac{k_2}{x+a_2+\dots}};$$

тогда или $h > n+1$, или $h = n+1$; но въ первомъ случаѣ функція θ_{n+1-h} не можетъ быть цѣлою, ибо ея степень равняется $n+1-h$, слѣд.

$$h = n+1,$$

то есть,

$$\theta_{n+1-h} = \text{Const.}$$

Изъ того что $h=n+1$ слѣдуетъ, что всѣ неполные частные получаемые отъ разложенія функціи

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt}{t-x}$$

въ непрерывную дробь, будутъ первой степени. Далѣе, изъ (1) получаемъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta}{t-x} Q_n(t) \, dt$$

$$= C(1-x)^\alpha (1+x)^\beta Q_n(x) \int \frac{dx}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} Q_n(x)^2};$$

но, съ другой стороны, означая чрезъ $P_n(x)$ и $R_n(x)$, или просто чрезъ P_n и R_n, цѣлую и дробную части произведенія

$$Q_n(x) \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt}{t-x},$$

будемъ имѣть

$$P_n = \int_{-1}^{+1} \frac{Q_n(x) - Q_n(t)}{t-x} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt,$$

$$R_n = \int_{-1}^{+1} \frac{Q_n(t)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt}{t-x};$$

слѣдовательно,

(2) $$R_n = C(1-x)^\alpha (1+x)^\beta Q_n \int \frac{dx}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} Q_n{}^2}$$

2. Основываясь на томъ свойствѣ функціи R_n, что она не можетъ обращаться въ ∞ иначе, какъ порядка ниже единицы, не трудно доказать, что значеніе $Q_n(1)$ не равняется нулю. На самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, т. е. что $Q_n(1) = 0$, изъ тожественнаго уравненія

$$\varphi(x)\, Q_n(x) - P_n(x) = R_n(x)$$

получаемъ

$$-P_n(1) = R_n(1);$$

но формула (2) показываетъ, что каждый разъ, когда $Q_n(1)=0$, значеніе $R_n(1) = \infty$, слѣд. и $P_n(1) = \infty$, что очевидно невозможно.

Такимъ же образомъ доказывается, что $Q_n(-1)$ не равняется нулю.

Такъ какъ функція R_n не обращается въ ∞ ни для одного значенія перемѣнной x не равнаго ни $+1$, ни -1, то уравненіе

$$Q_n(x) = 0$$

не можетъ имѣть кратныхъ корней; ибо тогда, на основаніи формулы (2), если a есть кратный корень упомянутаго уравненія, имѣли бы

$$R_n(a) = \infty.$$

3. Мы вправѣ предположить, что ни одинъ изъ корней уравненія

$$Q_n(x) = 0$$

не лежитъ на линіи разрыва функціи R_n, ибо направленіе этой линіи произвольно. Принимая это во вниманіе, мы заключаемъ, что коеффиціентъ при $\frac{1}{x-a}$ въ разложеніи функціи

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} Q_n{}^2}$$

по возрастающимъ степенямъ отъ $x-a$ равняется нулю; ибо иначе функція R_n имѣла бы линію разрыва, оканчивающуюся въ точкѣ a, что противорѣчитъ сдѣланному предположенію.

Итакъ, мы имѣемъ

$$\underset{(x=a}{\mathcal{E}} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} Q_n{}^2} = 0,$$

или

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{(x-a)^2}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} Q_n{}^2}\right)_{x=a} = 0,$$

или еще, полагая

$$f(x)=\frac{(x-a)^2}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\,Q_n{}^2},$$

$$f'(a)=0.$$

Съ другой стороны

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x-a}-\frac{2\,Q'_n(x)}{Q_n(x)}+\frac{\alpha+1}{1-x}-\frac{\beta+1}{1+x},$$

или

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\,\frac{Q_n(x)-(x-a)\,Q'_n(x)}{(x-a)\,Q_n(x)}+\frac{\alpha+1}{1-x}-\frac{\beta+1}{1+x};$$

слѣдовательно,

$$\frac{f'(a)}{f(a)}=-\frac{Q''_n(a)}{Q'_n(a)}+\frac{\alpha+1}{1-a}-\frac{\beta+1}{1+a},$$

то есть,

$$0=-\frac{Q''_n(a)}{Q'_n(a)}+\frac{\alpha+1}{1-a}-\frac{\beta+1}{1+a},$$

или

$$(1-a^2)Q''_n(a)-(\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)\,a)Q'_n(a)=0.$$

Это уравненіе показываетъ, что двѣ цѣлыя функціи n-ой степени, именно:

$$(1-x^2)Q''_n(x)-(\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)\,x)Q'_n(x)$$

и

$$Q_n(x)$$

обращаются въ нуль одновременно для n различныхъ частныхъ значеній перемѣнной x; поэтому

$$(1-x^2)\,Q''_n(x)-(\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)\,x)\,Q'_n(x)=kQ_n(x),$$

гдѣ k есть величина постоянная. Приравнивая коеффиціенты при x^n въ обѣихъ частяхъ, находимъ

$$k=-n(n+\alpha+\beta+1),$$

слѣд.

$$(\mathrm{I})\qquad (1-x^2)Q''_n(x)-[\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x]Q'_n(x)+n(n+\alpha+\beta+1)Q_n(x)=0.$$

Вотъ дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ функція $Q_n(x)$.

4. Цѣлую функцію n-ой степени, удовлетворяющую дифференціальному уравненію вида (I), легко выразить помощію n-ой производной отъ функціи вида $(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}$, гдѣ λ и μ суть нѣкоторыя числа, зависящія отъ коеффиціентовъ въ данномъ дифференціальномъ уравненіи.

Это показалъ Якоби.

На самомъ дѣлѣ, полагая

(3) $$u=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

находимъ

$$\frac{du}{dx}=(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}(\beta-\alpha-(\alpha+\beta)x),$$

отсюда

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}=(\beta-\alpha-(\alpha+\beta)x)u.$$

Дифференцируя, получаемъ

(4) $$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x]\frac{du}{dx}+(\alpha+\beta)u=0.$$

Дифференцируя еще n разъ уравненіе (4) и называя

$$\frac{d^nu}{dx^n}=u_n,$$

получаемъ

(5) $$(1-x^2)\frac{d^2u_n}{dx^2}+[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2n-2)x]\frac{du_n}{dx}-(n+1)(n-\alpha-\beta)u_n=0.$$

Отсюда, полагая

$$\alpha=\lambda+n,\quad \beta=\mu+n,$$

$$u_n=z_n(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu},$$

находимъ

(6) $$(1-x^2)\frac{d^2z_n}{dx^2}-[\lambda-\mu+(\lambda+\mu+2)x]\frac{dz_n}{dx}+n(n+\lambda+\mu+1)z_n=0,$$

(7) $$z_n=(1-x)^{-\lambda}(1+x)^{-\mu}\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{\lambda+n}(1+x)^{\mu+n}.$$

Такъ какъ функція z_n, опредѣляемая по формулѣ (7), есть цѣлая, n-ой степени, то всякая цѣлая функція, удовлетворяющая дифференціальному уравненію вида

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(ax+b)\frac{dy}{dx}+cy=0,$$

можетъ быть представлена подъ видомъ (7); ибо предыдущее уравненіе, если только оно имѣетъ интеграломъ цѣлую функцію n-ой степени, можетъ быть представлено подъ видомъ (6).

Принимая во вниманіе (6) и (7), мы заключаемъ, что функція $Q_n(x)$, удовлетворяющая уравненію (I), выражается такъ:

(II) $$Q_n(x)=C_n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n},$$

гдѣ C_n означаетъ произвольную постоянную.

Легко удостовѣриться что, на самомъ дѣлѣ, функція (II) есть знаменатель n-ой подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи

$$\varphi = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\, dt}{t-x}$$

въ непрерывную дробь. Стоитъ только въ формулѣ

$$R_n = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\, Q_n(t)\; dt}{t-x}$$

внести на мѣсто Q_n его выраженіе по формулѣ (II) и интегрировать n разъ по частямъ; тогда обнаружится, что R_n, при $x = \infty$, обращается въ нуль степени равной $x^{-(n+1)}$.

5. Составляя второй интегралъ уравненія (I), означая его чрезъ U_n и принимая во вниманіе (2), находимъ

$$U_n = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} R_n. \tag{8}$$

Это извѣстная зависимость между вторымъ интеграломъ уравненія (I) и дробною частью произведенія $\varphi\, Q_n$.

Изъ (8) слѣдуетъ, что функція R_n есть интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$(1-x^2)\frac{d^2R_n}{dx^2} + [\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)\,x]\frac{dR_n}{dx} + (n+1)(n+\alpha+\beta)\,R_n = 0, \tag{III}$$

которое получается изъ (5) чрезъ подстановку $\alpha+n$ на мѣсто α и $\beta+n$ на мѣсто β.

Дѣлая въ уравненіи (III) $n=0$, получаемъ уравненіе (4), т. е.

$$(1-x^2)\frac{d^2R_0}{dx^2} + [\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)\,x]\frac{dR_0}{dx} + (\alpha+\beta)\,R_0 = 0,$$

котораго первымъ интеграломъ есть

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

а вторымъ—принятая нами во вниманіе функція φ, ибо

$$R_0 = \varphi\, Q_0 - P_0 = \varphi.$$

§ XII. Разложеніе функціи

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt}{t-x}$$

въ непрерывную дробь.

1. Дѣлая въ формулѣ (II) предыдущаго §-фа

$$C_n = \frac{(-1)^n}{(\alpha+\beta+n+1)\dots(\alpha+\beta+2n)},$$

будемъ имѣть

(1) $$Q_n(x) = \frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{(\alpha+\beta+n+1)\dots(\alpha+\beta+2n)} \frac{d^n}{dx^n}(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n},$$

и первые два члена въ разложеніи $Q_n(x)$ по убывающимъ степенямъ перемѣнной x будутъ

$$Q_n(x) = x^n + \frac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta} x^{n-1} + \dots\dots$$

Отсюда легко найти, чему равняется цѣлая часть дроби $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$, именно:

(2) $$\mathrm{E}\frac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)} = x + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n)}.$$

Называя этотъ двучленъ (2) чрезъ q_n, будемъ имѣть

(3) $$Q_n = q_n Q_{n-1} + k_n Q_{n-2},$$

гдѣ k_n есть неизвѣстная постоянная, зависящая отъ n, которую намъ остается опредѣлить. Это сдѣлать легко слѣдующимъ образомъ.

Изъ (1) и (3), полагая для сокращенія

$$(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n} = u_n,$$

получаемъ

$$\frac{d^n u_n}{(\alpha+\beta+n+1)\dots(\alpha+\beta+2n)} = q_n \frac{d^{n-1} u_{n-1}}{(\alpha+\beta+n)\dots(\alpha+\beta+2n-2)}$$
$$+ k_n \frac{d^{n-2} u_{n-2}}{(\alpha+\beta+n-1)\dots(\alpha+\beta+2n-4)},$$

или

$$d^n u_n = q_n \frac{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n)}{\alpha+\beta+n} d^{n-1} u_{n-1}$$
$$+ k_n \frac{(\alpha+\beta+2n-3)\dots(\alpha+\beta+2n)}{(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+n)} d^{n-2} u_{n-2}.$$

Подставляя въ обѣихъ частяхъ этого равенства $\alpha+1$ на мѣсто α и $\beta+1$ на мѣсто β, получаемъ

$$d^n u_{n+1} = q'_n \frac{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}{\alpha+\beta+n+2} d^{n-1} u_n$$

$$+ k'_n \frac{(\alpha+\beta+2n-1)....(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+2)} d^{n-2} u_{n-1},$$

гдѣ q'_n и k'_n означаютъ результаты отъ упомянутой подстановки въ выраженіяхъ q_n и k_n.

Дифференцируя обѣ части предыдущаго равенства, находимъ

$$d^{n+1} u_{n+1} = \frac{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}{\alpha+\beta+n+2} q'_n d^n u_n$$

$$+ \frac{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}{\alpha+\beta+n+2} d^{n-1} u_n$$

$$+ k'_n \frac{(\alpha+\beta+2n-1)....(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+2)} d^{n-1} u_{n-1}.$$

Съ другой стороны, легко убѣдиться, что

$$d^{n+1} u_{n+1} = (\alpha-\beta+[\alpha+\beta+2n+2)\, x] d^n u_n + n(\alpha+\beta+2n+2) d^{n-1} u_n.$$

Исключая между двумя послѣдними уравненіями $d^{n-1} u_n$ и означая для простоты коеффиціентъ при $d^n u_n$ въ полученномъ результатѣ чрезъ M, получаемъ

$$\left(1 - \frac{\alpha+\beta+2n+1}{n(\alpha+\beta+n+2)}\right) d^{n+1} u_{n+1}$$

$$= M d^n u_n + k'_n \frac{(\alpha+\beta+2n-1)....(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+2)} d^{n-1} u_{n-1},$$

или

$$\frac{(n-1)(\alpha+\beta+n+1)}{n(\alpha+\beta+n+2)} d^{n+1} u_{n+1}$$

$$= M d^n u_n + k'_n \frac{(\alpha+\beta+2n-1)....(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+2)} d^{n-1} u_{n-1};$$

отсюда, раздѣляя на $(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+3)....(\alpha+\beta+2n+2)$,

$$\frac{n-1}{n} \frac{d^{n+1} u_{n+1}}{(\alpha+\beta+n+2)...(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$$= M \frac{d^n u_n}{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+3)...(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$$+ k'_n \frac{d^{n-1} u_{n-1}}{(\alpha+\beta+n+1)^2(\alpha+\beta+n+2)...(\alpha+\beta+2n-2)},$$

или, принимая во вниманіе (1),

$$\frac{n-1}{n} Q_{n+1} = \frac{(\alpha+\beta+n+2)\, M}{(\alpha+\beta+2n+1)\,(\alpha+\beta+2n+2)}\, Q_n + k'_n - \frac{\alpha+\beta+n}{\alpha+\beta+n+1}\, Q_{n-1}.$$

Сличая это равенство съ (3), получаемъ

$$(4) \qquad k_{n+1} = \frac{n(\alpha+\beta+n)}{(n-1)\,(\alpha+\beta+n+1)}\, k'_n.$$

Съ другой стороны, изъ трехъ выраженій

$$Q_0 = 1,$$

$$Q_1 = x + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2},$$

$$Q_2 = x^2 + \frac{2\,(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta+4}\, x + \frac{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\beta+1) - 2\,(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+3)\,(\alpha+\beta+4)},$$

легко получить

$$(5) \qquad k_2 = -4\, \frac{(\alpha+1\,(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)\,(\alpha+\beta+2)\,(\alpha+\beta+3)}.$$

Двѣ формулы (4) и (5) рѣшаютъ нашу задачу объ опредѣленіи k_n; помощью ихъ находимъ

$$k_3 = -4\, \frac{2\,(\alpha+2)\,(\beta+2)\,(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+\beta+3)\,(\alpha+\beta+4)\,(\alpha+\beta+4)\,(\alpha+\beta+5)},$$

$$k_4 = -4\, \frac{3\,(\alpha+3)\,(\beta+3)\,(\alpha+\beta+3)}{(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+6)\,(\alpha+\beta+6)\,(\alpha+\beta+7)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(\mathrm{I}) \quad k_n = -4\, \frac{(n-1)\,(\alpha+n-1)\,(\beta+n-1)\,(\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-1)}.$$

Присоединяя къ формулѣ (6) формулу (2), т. е.

$$(\mathrm{II}) \qquad q_n = x + \frac{(\alpha-\beta)\,(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+2n-2)\,(\alpha+\beta+2n)},$$

получаемъ разложеніе функціи φ въ непрерывную дробь по формулѣ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^\alpha\, (1+t)^\beta\, dt}{t-x} = \frac{k_1}{q_1 +} \frac{k_2}{q_2 +} \frac{k_3}{q_3 + \cdots}.$$

Постоянная k_1 опредѣляется по формулѣ

$$k_1 = -\,2^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\, dt,$$

или

(III) $$k_1 = -\,2^{\alpha+\beta+1} \mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1).$$

2. Внося въ извѣстную формулу

$$\int_{-1}^{+1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta Q^2{}_n\, dt = (-1)^{n-1} k_1 k_2 \ldots k_{n+1}$$

на мѣсто k_1, k_2,... ихъ выраженія, по формуламъ (I) и (III), послѣ легкихъ упрощеній получаемъ

(IV) $$\int_{-1}^{+1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta Q^2{}_n\, dt$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+2n+1}\Gamma(n+1)}{(\alpha+\beta+n+1)\ldots(\alpha+\beta+2n)} \mathrm{B}(\alpha+n+1, \beta+n+1).$$

§ XIII. Производящая функцій, подобныхъ функціямъ Лежандра.

1. Не трудно найти производящую функціи

(1) $$X_n = \frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{2^n.1.2.3\ldots n} \frac{d^n (x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}}{dx^n},$$

которая отличается отъ функціи $Q_n(x)$ (§ XII, 1) только постояннымъ множителемъ.

На самомъ дѣлѣ, изъ (1) получаемъ

$$(x-1)^\alpha (x+1)^\beta X_n = \frac{1}{2^n} \mathcal{E} \frac{(z-1)^\alpha (z+1)^\beta (z^2-1)^n}{(((z-x)^{n+1}))},$$

или, полагая

$$\frac{z^2-1}{z-x} = \frac{2}{t},$$

то есть,

$$z = \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\sqrt{1-2\,t\,x+t^2},$$

$$(x-1)^\alpha (x+1)^\beta X_n = \mathcal{E} \frac{(z-1)^\alpha (z+1)^\beta}{(z-x)\,((t^n))} \frac{dz}{dt}.$$

Но такъ какъ

$$z^2-1=\frac{2}{t}(z-x)$$

и слѣд.

$$t(tz-1)\frac{dz}{dt}=x-z,$$

то

$$(x-1)^\alpha (x+1)^\beta X_n = \mathcal{E}\frac{(-1+z)^\alpha (1+z)}{(1-tz)\,((t^{n+1}))},$$

или

$$(x-1)^\alpha (x+1)^\beta X_n = \mathcal{E}\frac{(1-t-\sqrt{1-2tx+t^2})^\alpha (1+t-\sqrt{1-2tx+t^2})^\beta}{t^{\alpha+\beta}\sqrt{1-2tx+t^2}\ \ ((t^{n+1}))}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что производящая функціи X_n есть такая:

$$\frac{(1-t-\sqrt{1-2tx+t^2})^\alpha\ (1+t-\sqrt{1-2tx+t^2})^\beta}{(x-1)^\alpha (x+1)^\beta \sqrt{1-2tx+t^2}\, t^{\alpha+\beta}}.$$

Умножая числителя и знаменателя предыдущаго выраженія на

$$(1-t+\sqrt{1+2tx+t^2})^\alpha (1+t+\sqrt{1+2tx+t^2})^\beta,$$

получаемъ болѣе простое выраженіе производящей функціи, именно:

(I) $$2^{\alpha+\beta}\frac{(1-t+\sqrt{1-2tx+t^2})^{-\alpha}\,(1+t+\sqrt{1-2tx+t^2})^{-\beta}}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

2. Производящая функціи

$$C_n\, Q_n$$

зависитъ, вообще, отъ множителя C_n и, въ частныхъ случаяхъ, можетъ значительно упроститься отъ приличнаго выбора этого множителя.

Возьмемъ для примѣра функцію

(2) $$U_n=\mathcal{E}\frac{1}{(1-2tx+t^2)^\sigma}\,\frac{1}{((t^{n+1}))},$$

производящая которой равняется

(3) $$\frac{1}{(1-2tx+t^2)^\sigma}.$$

Такъ какъ

$$\mathcal{E}\frac{1}{(1-2tx+t^2)^\sigma\,((t^{n+1}))}=-\frac{1}{n}\,\mathcal{E}\frac{1}{(1-2tx+t^2)^\sigma}\,d\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

$$=-\frac{2\sigma}{n}\mathcal{E}\frac{t-x}{(1-2tx+t^2)^{\sigma+1}}\,\frac{1}{((t^n))},$$

то, подставляя $\sigma-1$ на мѣсто σ, будемъ имѣть

$$\mathcal{E}\frac{1-2tx+t^2}{(1-2\,tx+t^2)^\sigma\,((t^{n+1}))}=-\frac{2\,(\sigma-1)}{n}\mathcal{E}\frac{t-x}{(1-2\,tx+t^2)\,((t^n))};$$

отсюда

$$U_n-2x\,U_{n-1}+U_{n-2}=-\frac{2\,(\sigma-1)}{n}\,(U_{n-2}-x\,U_{n-1}),$$

или

(4) $$U_n-2\,\frac{n+\sigma-1}{n}\;x\;U_{n-1}+\frac{n+2\,(\sigma-1)}{n}\;U_{n-2}=0.$$

Принимая во вниманіе, что

$$U_0=1,\quad U_1=2\sigma\,x,$$

мы получаемъ возможность составлять послѣдовательно, при помощи уравненія (3), выраженія функцій U_2, U_3, U_4,...

Положимъ теперь

$$A_n=\frac{1.2.3....\,n}{2^n\,\sigma\,(\sigma+1)...\,(\sigma+n-1)},$$

$$V_n=A_n\,U_n;$$

помощію уравненія (4) легко удостовѣриться, что

$$V_n-x\,V_{n-1}+\frac{(n-1)\,(n+2\sigma-2)}{4\,(n+\sigma-1)\,(n+\sigma-2)}\;V_{n-2}=0,$$

приэтомъ

$$V_0=1,\quad V_1=x.$$

Слѣдовательно, функція V_n есть знаменатель n-ой подходящей дроби, получаемой отъ непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{h_2}{x+\cfrac{h_3}{x+\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}},$$

гдѣ

$$h_n=-\frac{(n-1)\,(n+2\sigma-1)}{4\,(n+\sigma-1)\,(n+\sigma-2)}.$$

Но, полагая въ формулахъ (I) и (II) предыдущаго §-фа

$$\alpha=\beta=\sigma-\frac{1}{2},$$

получаемъ

$$q_n=x,\quad k_n=-\frac{(n-1)\,(n+2\sigma-2)}{4\,(n+\sigma-1)\,(n+\sigma-2)}=h_n.$$

Это показываетъ намъ, что функція V_n есть знаменателемъ n-ой подходящей дроби, получаемой отъ непрерывной дроби

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^{\sigma-\frac{1}{2}}\,dt}{t-x} = \frac{k_1}{x+\frac{k_2}{x+\ldots}};$$

слѣдовательно (§ XII, (1)),

$$V_n = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}}{(2\sigma+n)(2\sigma+n+1)\ldots.(2\sigma+2n-1)}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{\sigma-\frac{1}{2}+n};$$

отсюда

$$(5)\quad U_n = \frac{2_n}{1.2.3\ldots.n}\frac{\sigma(\sigma+1)\ldots.(\sigma+n-1)\,(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}}{(2\sigma+n)(2\sigma+n+1)\ldots.(2\sigma+2n-1)}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{\sigma-\frac{1}{2}+n}.$$

Итакъ, члены ряда

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ldots$$

составляютъ рядъ функцій подобныхъ функціямъ Лежандра, которыхъ производящая равняется

$$(1-2tx+t^2)^{-\sigma};$$

между тѣмъ, полагая въ выраженіи функціи X_n

$$\alpha=\beta=\sigma-\frac{1}{2},$$

получаемъ для производящей функціи X_n выраженіе

$$2^{\sigma-\frac{1}{2}}\frac{(1-tx+\sqrt{1-2tx+t^2})^{\frac{1}{2}-\sigma}}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

которое далеко не такъ простое, какъ производящей функціи U_n, отличающейся отъ X_n постояннымъ множителемъ.

3. Полагая

$$(6)\quad T_n = \mathcal{E}\frac{1-tx}{(1-2tx+t^2)\ ((t^{n+1}))}$$

и принимая во вниманіе очевидное равенство

$$\mathcal{E}\frac{(1-tx)(1-2tx+t^2)}{(1-2tx+t^2)\,((t^{n+1}))}=0,$$

находимъ

$$T_n-2x\,T_{n-1}+T_{n-2}=0;$$

отсюда, дѣлая

$$\frac{1}{2^n} T_n = R_n,$$

$$R_n - x R_{n-1} + \frac{1}{4} R_{n-2} = 0,$$

приэтомъ

$$R_0 = 1, \quad R_1 = \frac{1}{2} x.$$

Слѣдовательно, функція R_n есть знаменателемъ n-ой подходящей дроби получаемой отъ такой непрерывной дроби:

$$\cfrac{1}{\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \cfrac{1}{x - \frac{1}{4} \cfrac{1}{x - \ldots}}}$$

Но, съ другой стороны, полагая въ формулахъ (I) и (II) предыдущаго §-фа $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, получаемъ

$$k_2 = -\frac{1}{2}, \; k_n = -\frac{1}{4}, \; q_n = x,$$

такъ что

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} = \cfrac{k_1}{x - \frac{1}{2} \cfrac{1}{x - \frac{1}{4} \cfrac{1}{x - \frac{1}{4} \cfrac{1}{x - \ldots}}}};$$

слѣдовательно, функція R_n равняется половинѣ знаменателя n-ой подходящей дроби получаемой отъ разложенія функціи

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} = \frac{-\pi}{\sqrt{x^2-1}}$$

въ непрерывную дробь по предыдущей формулѣ. Поэтому имѣемъ (§ XII, (1)),

$$R_n = \frac{1}{2} \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{n(n+1)....(2n-1)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^{-\frac{1}{2}+n};$$

отсюда

$$(7) \qquad T_n = \frac{2^{n-1}\sqrt{x^2-1}}{n(n+1)....(2n-1)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Итакъ, рядъ

$$T_0,\ T_1,\ T_2, \ldots$$

представляетъ рядъ функцій подобныхъ функціямъ Лежандра, которыхъ производящая равняется

$$\frac{1-tx}{1-2\,tx+t^2}.$$

Не трудно удостовѣриться что

$$T_n = \cos n \arccos x.$$

4. Полагая

$$S_n = \mathcal{E}\frac{1+t}{1-2tx+t^2}\,\frac{1}{((t^{n+1}))}, \tag{8}$$

находимъ

$$S_n - 2x\,S_{n-1} + S_{n-2} = 0,$$

$$S_0 = 1,\ S_1 = 2x+1;$$

слѣдовательно, дѣлая

$$S_n = 2^n Z_n,$$

имѣемъ

$$Z_n - x\,Z_{n-1} + \frac{1}{4}Z_{n-2} = 0,$$

$$Z_0 = 1,\quad Z_1 = x + \frac{1}{2}.$$

Послѣднія три уравненія показываютъ, что Z_n есть знаменателемъ n-ой подходящей дроби получаемой отъ непрерывной дроби:

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{2}-\cfrac{1}{4}\,\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{4}\,\cfrac{1}{x-\ldots}}}.$$

Но, полагая въ формулахъ (I) и (II) предыдущаго §-фа $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, получаемъ

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{dt}{t-x} = \cfrac{k_1}{x+\cfrac{1}{2}-\cfrac{1}{4}\,\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{4}\,\cfrac{1}{x-\ldots}}};$$

это показываетъ намъ, что функція Z_n равняется знаменателю n-ой подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{dt}{t-x}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1$$

въ непрерывную дробь по предыдущей формулѣ. Поэтому (§ XII, (1))

$$Z_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots.}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^{n+\frac{1}{2}}(x+1)^{n-\frac{1}{2}},$$

отсюда

$$S_n=\frac{2^n}{(n+1)(n+2)\ldots..2n}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \tag{9}$$

Итакъ, члены ряда

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ldots.$$

представляютъ рядъ функціи подобныхъ функціямъ Лежандра, которыхъ производящая равняется

$$\frac{1+t}{1-2tx+t^2}.$$

Легко удостовѣриться, что

$$S_n=\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})\arccos x}{\sin\frac{1}{2}\arccos x}.$$

§ XIV. Знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\,t^\beta\,dt}{t-x}$$

въ непрерывную дробь.

1. По формулѣ (1) § VIII имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\,t^\beta\,\psi(t)}{t-x}=\psi(x)\,e^{-\alpha x}\,x^\beta\int\frac{\theta_{n+1-h}\,dx}{e^{-\alpha x}\,x^{\beta+1}\,\psi(x)^2}, \tag{1}$$

гдѣ $\psi(x)$ изображаетъ произвольную цѣлую функцію n-ой степени, а θ_{n+1-h} означаетъ цѣлую функцію $(n+1-h)$-ой степени, зависящую отъ функціи $\psi(x)$.

Допустимъ теперь, что функція $\psi(x)$ равняется знаменателю Q_n

подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи

$$(2) \qquad \varphi = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\, t^\beta\, dt}{t-x} = Ce^{-\alpha x}\, x^\beta \int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^{\beta+1}}$$

въ непрерывную дробь; тогда будемъ имѣть

$$h = n + 1$$

и слѣд.

$$\theta_{n+1-h} = \mathrm{Const},$$

$$(3) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\, t^\beta\, Q_n(t)\, dt}{t-x} = C_1\, e^{-\alpha x}\, x^\beta\, Q_n(x) \int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^{\beta+1}\, Q_n(x)^2}.$$

Первая часть (3) равняется дробной части произведенія $\varphi\, Q_n$, которую по обыкновенію изображаютъ чрезъ R_n.

На основаніи формулы (3) легко заключить, что во-первыхъ значеніе $Q_n(0)$ не равняется нулю и, во вторыхъ, уравненіе

$$Q_n(x) = 0$$

не можетъ имѣть кратныхъ корней.

Дѣйствительно, если бы значеніе $Q_n(0)$ равнялось нулю, то вторая часть равенства (3) обращалась бы въ ∞, при $x=0$, между тѣмъ какъ первая часть того же равенства, при $x=0$, получаетъ конечное значеніе. Далѣе, если бы уравненіе

$$Q_n(x) = 0$$

имѣло кратный корень равный, положимъ, числу a, то вторая часть равенства (3) обращалась бы въ ∞, при $x=a$, между тѣмъ какъ первая часть, при томъ же значеніи перемѣнной x, сохраняетъ значеніе конечное.

2. Изображая чрезъ P_n числителя подходящей дроби, которой знаменатель равняется Q_n, имѣемъ

$$\varphi\, Q_n - P_n = R_n;$$

отсюда, внося на мѣсто φ и R_n ихъ выраженія по формуламъ (2) и (3), получаемъ

$$Ce^{-\alpha x}\, x^\beta\, Q_n(x) \int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^{\beta+1}} - P_n(x) = C_1\, e^{-\alpha x}\, x^\beta\, Q_n(x) \int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^{\beta+1}\, Q_n(x)^2},$$

или, раздѣляя обѣ части на $e^{-\alpha x}\, x^\beta\, Q_n(x)$ и дифференцируя

$$(4) \qquad \frac{Ce^{\alpha x}}{x^{\beta+1}} - \frac{d}{dx}\,\frac{e^{\alpha x}\,P_n(x)}{x^{\beta}\,Q_n(x)} = C_1\,\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta+1}\,Q_n(x)^2}.$$

Означая чрезъ a любой корень уравненія

$$Q_n(x) = 0,$$

мы вправѣ предположить, что этотъ корень не находится на линіи разрыва $(0, \infty)$ функціи x^{β}; ибо направленіе этой линіи произвольно. Принимая это въ соображеніе, и взявъ интегральные вычеты обѣихъ частей равенства (4) относительно точки a, получаемъ

$$C\underset{(x=a)}{\mathcal{E}}\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta+1}} - \underset{(x=a)}{\mathcal{E}}\frac{d}{dx}\,\frac{e^{\alpha x}\,P_n(x)}{x^{\beta}\,Q_n(x)} = C_1\underset{(x=a)}{\mathcal{E}}\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta+1}\,Q_n(x)^2}.$$

Но каждый изъ интегральныхъ вычетовъ въ первой части предыдущаго уравненія равняется нулю, слѣд.

$$\underset{(x=a)}{\mathcal{E}}\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta+1}\,Q_n(x)^2} = 0.$$

Такъ какъ уравненіе

$$Q_n(x) = 0$$

не имѣетъ кратныхъ корней, то предыдущій интегральный вычетъ можно написать такъ:

$$(5) \qquad \left(\frac{d}{dx}\,\frac{e^{\alpha x}\,(x-a)^2}{x^{\beta+1}\,Q_n(x)^2}\right)_{x=a} = 0.$$

Называя

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x}\,(x-a)^2}{x^{\beta+1}\,Q_n(x)^2},$$

получаемъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha + \frac{2}{x-a} - \frac{\beta+1}{x} - 2\,\frac{Q'_n(x)}{Q_n(x)},$$

или

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha - \frac{\beta+1}{x} + 2\,\frac{Q_n(x)-(x-a)\,Q'_n(x)}{(x-a)\,Q_n(x)};$$

отсюда, дѣлая въ обѣихъ частяхъ $x=a$,

$$\frac{f'(a)}{f(a)} = \alpha - \frac{\beta+1}{a} - \frac{Q''_n(a)}{Q'_n(a)},$$

но уравненіе (5) показываетъ, что

$$f'(a) = 0,$$

слѣд.

$$\alpha - \frac{\beta+1}{a} - \frac{Q''_n(a)}{Q'_n(a)} = 0,$$

или

$$a\,Q''_n(a) + (\beta + 1 - \alpha\,a)\,Q'_n(a) = 0.$$

Это уравненіе показываетъ, что корни уравненія n-ой степени

$$Q_n(x) = 0$$

удовлетворяютъ уравненію n-ой степени

$$x\,Q''_n(x) + (\beta + 1 - \alpha\,x)\,Q'_n(x) = 0,$$

а такъ какъ всѣ корни уравненія

$$Q_n(x) = 0$$

различны, то, слѣд., имѣетъ мѣсто такое тожество

$$x\,Q''_n(x) + (\beta + 1 - \alpha\,x)\,Q'_n(x) = k\,Q_n(x),$$

гдѣ k есть число постоянное. Сличая коеффиціенты при x^n въ обѣихъ частяхъ, находимъ

$$k = -\,n\,\alpha;$$

слѣд.

(6) $$x\,Q''_n(x) + (\beta + 1 - \alpha\,x)\,Q'_n(x) + n\,\alpha\,Q_n(x) = 0.$$

Итакъ, функція $Q_n(x)$ есть интеграломъ линейнаго дифференціальнаго уравненія (6); это дастъ намъ возможность найти простое выраженіе для функціи $Q_n(x)$.

3. Дѣлая

$$u = e^{-\alpha x}\,x^{\beta},$$

имѣемъ

$$x\,\frac{du}{dx} + (\alpha x - \beta)\,u = 0,$$

отсюда, дифференцируя обѣ части,

(7) $$x\,\frac{d^2u}{dx^2} + (\alpha x - \beta + 1)\,\frac{du}{dx} + \alpha u = 0.$$

Дифференцируя уравненіе (7) n разъ и называя

$$u_n = \frac{d^n u}{dx^n},$$

находимъ

(8) $$x\,\frac{d^2u_u}{dx^2} + (\alpha x + n - \beta + 1)\,\frac{du}{dx} + (n + 1)\,\alpha\,u_u = 0.$$

Далѣе, полагая

$$u_n = z_n\, e^{-\lambda x}\, x^{\mu}$$

и дѣлая для сокращенія

$$v = e^{-\lambda x}\, x^{\mu},$$

получаемъ

$$u_n = z_n v,$$

$$\frac{du_n}{dx} = v\,\frac{dz_n}{dx} + z_n\,\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} = v\,\frac{d^2z_n}{dx^2} + 2\,\frac{dv}{dx}\,\frac{dz_n}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\,z_n.$$

Внося въ уравненіе (8) на мѣсто u_n, $\frac{du_n}{dx}$, $\frac{d^2u_n}{dx^2}$ ихъ выраженія по тремъ предыдущимъ уравненіямъ, получаемъ

$$xv\,\frac{d^2z_n}{dx^2} + \left(2x\,\frac{dv}{dx} + (\alpha x + n - \beta + 1)v\right)\frac{dz_n}{dx}$$

$$+ \left(x\,\frac{d^2v}{dx^2} + (\alpha x + n - \beta + 1)\,\frac{dv}{dx} + (n+1)\,\alpha\, v\right) z_n = 0.$$

Но

$$x\,\frac{dv}{dx} = (\mu - \lambda\, x)\, v,$$

$$x\,\frac{d^2v}{dx^2} = -(\lambda x - \mu + 1)\,\frac{dv}{dx} - \lambda v,$$

слѣдовательно,

$$x\, v\,\frac{d^2z_n}{dx^2} + \left((\alpha - 2\lambda)\, x + n - \beta + 2\mu + 1\right) v\,\frac{dz_n}{dx}$$

$$+ \left[\left((\alpha - \lambda)x + n - \beta + \mu\right)\frac{dv}{dx} + n\,\alpha\, v\right] z_n = 0.$$

Дѣлая $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu + n$, получаемъ, по сокращеніи на v,

(9) $$x\,\frac{d^2z_n}{dx^2} + (\mu + 1 - \lambda x)\,\frac{dz_n}{dx} + n\lambda\, z_n = 0;$$

притомъ

(10) $$z_n = e^{\lambda x}\, x^{-\mu}\,\frac{d^n}{dx^n}\, e^{-\lambda x}\, x^{\mu + n}.$$

Сличая уравненіе (9) съ (6), находимъ такое выраженіе для функціи $Q_n(x)$, по формулѣ (10):

(I) $$Q_n = C_n\, e^{\alpha x}\, x^{-\beta}\,\frac{d^n}{dx^n}\, e^{-\alpha x}\, x^{\beta},$$

гдѣ C_n означаетъ произвольную постоянную. Это выраженіе функціи Q_n даетъ возможность непосредственно удостовѣриться въ томъ, что Q_n есть знаменателемъ n-ой подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи φ въ непрерывную дробь: стоитъ только во второй части формулы

$$R_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} t^\beta Q_n(t)\, dt}{t-x}$$

подставить на мѣсто множителя $Q_n(t)$ его выраженіе по формулѣ (11) и затѣмъ интегровать n разъ по частямъ; тогда получимъ выраженіе для R_n, которое покажетъ намъ что, при $x=\infty$, функція R_n обращается въ нуль степени равной x^{-n-1}.

4. Изображая чрезъ U_n второй интегралъ уравненія (6) и принимая во вниманіе формулу (3)

$$R_n = C_1\, e^{-\alpha x} x^\beta\, Q_n(x) \int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^{\beta+1}\, Q_n(x)^2},$$

находимъ

$$U_n = e^{\alpha x} x^{-\beta} R_n. \tag{11}$$

Формула эта показываетъ, что R_n удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$x\frac{d^2R_n}{dx^2} + (\alpha x - \beta + 1)\frac{dR_n}{dx} + (n+1)\alpha\, R_n = 0, \tag{12}$$

которое получается изъ (8) чрезъ подстановку $\beta+n$ на мѣсто β, такъ что второй интегралъ уравненія (12) равняется

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-\alpha x} x^{\beta+n}.$$

Такъ какъ

$$R_0 = \varphi,$$

то изъ (12) слѣдуетъ, что функція φ удовлетворяетъ уравненію

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (\alpha x - \beta + 1)\frac{d\varphi}{dx} + \alpha\varphi = 0,$$

которому удовлетворяетъ также функція

$$e^{-\alpha x} x^\beta.$$

Примѣчаніе. Функціи Q_n, разсматриваемыя въ настоящемъ §-фѣ, могутъ быть принятыми за частный случай функцій подобныхъ функціямъ Лежандра, которымъ были посвящены предыдущіе §-фы: стоитъ только для этого, на мѣсто прежнихъ двухъ критическихъ точекъ -1 и $+1$, взять двѣ новыя, именно: 0 и ∞.

§ XV. Разложеніе функціи

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\, t^\beta\, dt}{t-x}$$

въ непрерывную дробь. Производящая знаменателей подходящихъ дробей.

1. Дѣлая въ формулѣ (I) предыдущаго §-фа

$$C_n = (-1)^n,$$

будемъ имѣть

(1) $$Q_n = (-1)^n e^{\alpha x} x^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\alpha x} x^{\beta+n};$$

но

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-\alpha x} x^{\beta+n} = (-1)^n \alpha^n e^{-\alpha x} x^{\beta+n}$$

$$+(-1)^{n-1} \frac{n}{1} (\beta+n)\, \alpha^{n-1} e^{-\alpha x} x^{\beta+n-1}$$

$$+(-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{1.2} (\beta+n)(\beta+n-1)\, e^{-\alpha x} \alpha^{n-2} x^{\beta+n-2} + \ldots\ldots,$$

слѣд.

(2) $$Q_n = (\alpha x)^n - \frac{n}{1}(\beta+n)(\alpha x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(\beta+n)(\beta+n-1)(\alpha x)^{n-2} + \ldots$$

2. Три рядомъ стоящія функціи

$$Q_n,\ Q_{n-1},\ Q_{n-2}$$

связаны уравненіемъ

$$Q_n = q_n Q_{n-1} + k_n Q_{n-2},$$

гдѣ q_n есть n-ое неполное частное, а k_n—постоянный множитель.

Чтобъ опредѣлить q_n, мы замѣтимъ, что

$$q_n = \mathrm{E}\frac{Q_n}{Q_{n-1}};$$

дѣля Q_n на Q_{n-1}, находимъ

$$q_n = \alpha x - (2n+\beta-1).$$

Переходя къ опредѣленію k_n, мы сдѣлаемъ въ обѣихъ частяхъ равенства

$$Q_n = [\alpha x - (2n + \beta - 1)]\, Q_{n-1} + k_n\, Q_{n-2}$$

$x = 0$; тогда получимъ, принимая во вниманіе (2),

$$(-1)^n (\beta+n)(\beta+n-1)\ldots\beta = (-1)^n (2n+\beta-1)(\beta+n-1)(\beta+n-2)\ldots\beta$$
$$+ k_n (-1)^n (\beta+n-2)(\beta+n-3)\ldots\beta,$$

или, по сокращеніи,

$$(\beta+n)(\beta+n-1) = (\beta+n-1)(2n+\beta-1) + k_n;$$

слѣд.

$$k_n = -(\beta+n-1)(n-1).$$

Итакъ,

$$Q_n = [\alpha x - (2n+\beta-1)]\, Q_{n-1} - (n-1)(\beta+n-1)\, Q_{n-2},$$

или

(3) $$Q_{n+1} = [\alpha x - (2n+\beta+1)]\, Q_n - n(\beta+n)\, Q_{n-1}.$$

На основаніи этого уравненія находимъ слѣдующее разложеніе функціи φ въ непрерывную дробь

(I) $$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} t^\beta dt}{t-x} = \cfrac{k}{\alpha x - (\beta+1) - \cfrac{\beta+1}{\alpha x - (\beta+3) - \cfrac{2(\beta+2)}{\alpha x - (\beta+5) - \cfrac{3(\beta+3)}{\alpha x - (\beta+7) - \ldots}}}},$$

приэтомъ

(4) $$k = -\alpha^{-\beta}\,\Gamma(\beta+1).$$

Примѣняя къ разложенію (I) одну формулу, извѣстную изъ теоріи непрерывныхъ дробей, получаемъ

(5) $$\int_0^\infty e^{-\alpha t} t^\beta Q_n(t)^2\, dt = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}.$$

3. Переходя къ опредѣленію производящей, мы положимъ

(6) $$X_n = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots\ldots n} Q_n = \frac{e^{\alpha x} x^{-\beta}}{1.2\ldots\ldots n} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-\alpha x} x^{\beta+n};$$

вслѣдствіе этого

$$e^{-\alpha x} x^\beta X_n = \mathcal{E} \frac{e^{-\alpha z}\, z^{\beta+n}}{(((z-x)^{n+1}))}.$$

Полагая

$$\frac{z}{z-x} = \frac{1}{t},$$

получаемъ

$$\frac{dz}{dt}=\frac{x}{(1-t)^2},$$

и слѣд.

$$e^{-\alpha x}x^\beta X_n=\mathcal{E}\frac{e^{-\alpha z}\,z^\beta}{(1-t)\,((t^{n+1}))};$$

отсюда, внося во вторую часть на мѣсто z

$$\frac{x}{1-t},$$

(7)
$$X_n=\mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha t x}{1-t}}(1-t)^{-(\beta+1)}}{((t^{n+1}))}.$$

Формула эта показываетъ, что производящая функцій

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ldots.$$

равняется

$$\frac{e^{-\frac{\alpha t x}{1-t}}}{(1-t)^{\beta+1}}.$$

Примѣчаніе. Въ формулѣ (I) предполагается, что $\beta>-1$; ибо только при этомъ условіи интегралъ, составляющій первую часть (I) получаетъ конечныя значенія. Въ томъ случаѣ, когда $\beta<-1$, на мѣсто интеграла

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t}\,t^\beta\,dt}{t-x}$$

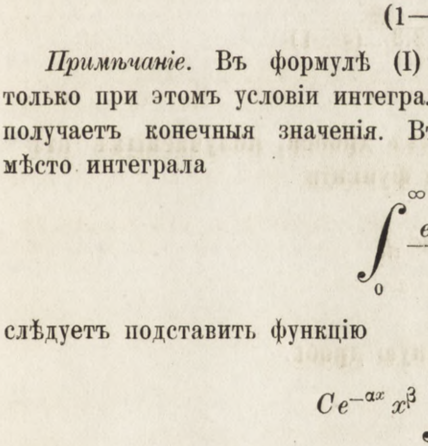
слѣдуетъ подставить функцію

$$Ce^{-\alpha x}\,x^\beta\int\frac{e^{\alpha x}\,dx}{x^{\beta+1}},$$

которая остается опредѣленною при всевозможныхъ значеніяхъ параметра β. Но не трудно убѣдиться что предыдущая функція тожественно равняется интегралу

$$\int^{(\infty ab\,\infty)}\frac{e^{-\alpha t}\,t^\beta\,dt}{t-x}$$

взятому по сомкнутой линіи $\infty abc\infty$, по направленіи стрѣлки (чер. 2).



(Чер. 2).

Слѣдовательно, внося въ (I) на мѣсто первой части предыдущій интегралъ, получаемъ формулу

$$\text{(II)} \quad \int^{(\infty\, ab\, \infty)} \frac{e^{-\alpha t} t^{\beta}\, dt}{t-x} = \cfrac{k}{\alpha x-(\beta+1) - \cfrac{\beta+1}{\alpha x-(\beta+3) - \cfrac{2(\beta+2)}{\alpha x-(\beta+5) - \ldots}}},$$

имѣющую мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ параметра β. Что касается до α, то само собою разумѣется, что мы предполагаемъ $\alpha > 0$.

Если β равняется числу цѣлому, отрицательному, положимъ $-\sigma$, тогда первая часть формулы (II) равняется

$$2\pi i\, \mathcal{E} \frac{e^{-\alpha t}}{(t-x)\,((t^{\sigma}))} = -2\pi i\, \mathbf{F} \frac{e^{-\alpha x}}{x^{\sigma}}.$$

Слѣдовательно,

$$\mathbf{F} \frac{e^{-\alpha x}}{x^{\sigma}} = \cfrac{k}{\alpha x + \sigma - 1 + \cfrac{\sigma-1}{\alpha x + \sigma - 3 + \cfrac{2(\sigma-2)}{\alpha x + \sigma - 5 + \ldots + \cfrac{\sigma-1}{\alpha x - \sigma + 1}}}},$$

приэтомъ

$$k = (-1)^{\sigma-1} \frac{\alpha^{\sigma}}{1.2.3....(\sigma-1)}.$$

§ XVI. Знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2}\, dt}{t-x}$$

въ непрерывную дробь.

1. По формулѣ (I) § IX имѣемъ

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} \psi(t)\, dt}{t-x} = e^{-\alpha x^2} \psi(x) \int \frac{e^{\alpha x^2}\, \theta_{n+1-h}\, dx}{\psi(x)^2}.$$

Такъ какъ $\psi(x)$ есть произвольная цѣлая функція, то мы можемъ предположить, что она равняется знаменателю n-ой подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи

$$(2) \qquad \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2}\, dt}{t-x} = C e^{-\alpha x^2} \int e^{\alpha x^2}\, dx$$

въ непрерывную дробь. Изображая этотъ знаменатель чрезъ Q_n и полагая, на самомъ дѣлѣ, $\psi(x) = Q_n$, первая часть (1) будетъ, очевидно равняться

$$\mathrm{F}\,\varphi\, Q_n = R_n;$$

слѣд.

$$h = n + 1;$$

поэтому

$$(3) \qquad R_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} Q_n(t)\, dt}{t-x} = C_1\, e^{-\alpha x^2} Q_n(x) \int \frac{e^{\alpha x^2}\, dx}{Q_n(x)^2}.$$

Это выраженіе функціи R_n показываетъ, что уравненіе

$$Q_n(x) = 0$$

не имѣетъ кратныхъ корней. На самомъ дѣлѣ, если бы число a было кратнымъ корнемъ предыдущаго уравненія, то, дѣлая въ обѣихъ частяхъ (3) $x = 0$, вторая часть обратилась бы въ ∞, между тѣмъ какъ первая часть сохраняетъ конечное значеніе.

2. Называя

$$P_n = \mathrm{E}\,\varphi\, Q_n$$

имѣемъ

$$\varphi\, Q_n - P_n = R_n,$$

или

$$C\, Q_n(x)\, e^{-\alpha x^2} \int e^{\alpha x^2}\, dx - P_n(x) = C_1 e^{-\alpha x^2} Q_n(x) \int \frac{e^{\alpha x^2}\, dx}{Q_n(x)^2};$$

отсюда

$$C\, e^{\alpha x^2} - \frac{d}{dx} \frac{P_n\, e^{\alpha x^2}}{Q_n} = C_1 \frac{e^{\alpha x^2}}{Q_n^{\,2}}.$$

Изображая чрезъ a любой корень уравненія

$$Q_n(x) = 0,$$

изъ предыдущаго равенства получаемъ

$$\mathcal{E}_{(x=a)} \frac{e^{\alpha x^2}}{Q_n(x)^2} = 0.$$

Такъ какъ a есть простой корень, то послѣднее уравненіе можно написать такъ:

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{e^{\alpha x^2} (x-a)^2}{Q_n(x)^2} \right)_{(x=a)} = 0.$$

Отсюда получаемъ

$$Q''_n(a) - 2\alpha\, a\, Q'_n(a) = 0.$$

Слѣдовательно, каждый корень функціи $Q_n(x)$ обращаетъ въ нуль и функцію

$$Q''_n(x) - 2\alpha\, x\, Q'_n(x);$$

поэтому

(4) $$Q''_n(x) - 2\alpha\, x\, Q'_n(x) + 2\alpha\, n\, Q_n(x) = 0.$$

Итакъ, знаменатель n-ой подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи φ въ непрерывную дробь, удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (4), въ которомъ коэффиціентъ при второй производной равняется единицѣ.

3. Дѣлая

$$u = e^{-\alpha x^2}, \quad \frac{d^n u}{dx^n} = u_n,$$

находимъ

$$\frac{du}{dx} = -2\alpha\, x\, u,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\alpha\, x \frac{du}{dx} + 2\alpha u = 0,$$

(5) $$\frac{d^2u_n}{dx^2} + 2\alpha\, x \frac{du_n}{dx} + 2(n+1)\alpha\, u_n = 0.$$

Полагая, далѣе,

$$u_n = v z_n,$$

изъ (5) получаемъ

$$v \frac{d^2z_n}{dx^2} + 2\left(\frac{dv}{dx} + \alpha x v\right)\frac{dz_n}{dx} + \left(\frac{d^2v}{dx^2} + 2\alpha\, x \frac{dv}{dx} + 2(n+1)\,\alpha v\right) z_n = 0.$$

Слѣдовательно, дѣлая

$$v = e^{-\alpha x^2} = u$$

и сокращая обѣ части на v, будемъ имѣть

(6) $$\frac{d^2z_n}{dx^2} - 2\,\alpha x \frac{dz_n}{dx} + 2\alpha\, n\, z_n = 0;$$

приэтомъ

(7) $$z_n = e^{\alpha x^2} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-\alpha x^2}.$$

Сличая уравненіе (6) съ (4) и принимая во вниманіе (7), находимъ

(I) $$Q_n = C_n e^{\alpha x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\alpha x^2}$$

Это выраженіе функціи Q_n даетъ возможность непосредственно удостовѣриться, что она есть на самомъ дѣлѣ знаменателемъ n-ой подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи (2) въ непрерывную дробь.

4. Составляя второй интегралъ уравненія (4) и изображая его чрезъ U_n, находимъ

(8) $$U_n = e^{\alpha x^2} R_n.$$

Формула эта показываетъ, что R_n удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

(9) $$\frac{d^2 R_n}{dx^2} + 2\alpha\, x \frac{dR_n}{dx} + 2\,(n+1)\alpha\, R_n = 0,$$

которое совпадаетъ съ (5).

Дѣлая въ (9) $n=0$ и замѣчая что

$$R_0 = \varphi,$$

получаемъ

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\alpha\, x \frac{d\varphi}{dx} + 2\alpha\, \varphi = 0.$$

Такому уравненію удовлетворяетъ принятая нами во вниманіе функція φ. Другой частный интегралъ этого уравненія есть

$$e^{-\alpha x^2}.$$

5. Дифференціальное уравненіе вида

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a\, x \frac{dy}{dx} + 2\, by = 0$$

имѣетъ то замѣчательное свойство, что два его частные интегралы, слѣд. и общій—суть цѣлыя функціи отъ независимой перемѣнной x. Дѣйствительно, полагая

$$U_0 = 1 - \frac{b}{1.2} 2x^2 + \frac{b\,(b+2a)}{1.2.3.4} 2^2 x^4 - \frac{b\,(b+2a)\,(b+4a)}{1.2.3.4.5.6} 2^3 x^6 + \ldots\ldots,$$

$$U_1 = x - \frac{b+a}{1.2.3} 2x^3 + \frac{(b+a)\,(b+3a)}{1.2.3.4.5} 2^2 x^5 - \frac{(b+a)\,(b+3a)\,(b+5a)}{1.2.3.4.5.6.7} 2^3 x^7 + \ldots\ldots\ldots,$$

легко удостовѣриться что во первыхъ, каждая изъ функціи U_0, U_1 есть цѣлая и, во вторыхъ, каждая изъ нихъ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2ax\frac{dy}{dx} + 2by = 0.$$

Слѣдовательно, общій интегралъ этого уравненія равняется

$$C_0 U_0 + C_1 U_1,$$

и всегда остается цѣлою функціею.

Положивъ

$$a = -\alpha, \quad b = \alpha n,$$

предыдущее уравненіе совпадаетъ съ (4); слѣдовательно, мы получаемъ такіе два частные интегралы уравненія (4);

$$1 - \frac{n}{1.2} 2\alpha x^2 + \frac{n(n-2)}{1.2.3.4}(2\alpha)^2 x^4 - \frac{n(n-2)(n-4)}{1.2.3.4.5.6}(2\alpha)^3 x^6 + \ldots\ldots,$$

$$x - \frac{n-1}{1.2.} 2\alpha x^3 + \frac{(n-1)(n-3)}{1.2.3.4.5}(2\alpha)^2 x^5 - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{1.2.3.4.5.6.7}(2\alpha)^3 x^7 + \ldots$$

Отсюда слѣдуетъ что, если n—четное

$$\text{(II)}\quad Q_n = C\left(1 - \frac{n}{1.2} 2\alpha x^2 + \frac{n(n-2)}{1.2.3.4}(2\alpha)^2 x^4 - \frac{n(n-2)(n-4)}{1.2.3.4.5.6}(2\alpha)^3 x^6 + \ldots\right),$$

если же n—нечетное

$$\text{(III)}\quad Q_n = C\left(x - \frac{n-1}{1.2.3} 2\alpha x^3 + \frac{(n-1)(n-3)}{1.2.3.4.5}(2\alpha)^2 x^5 - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{1.2.3.4.5.6.7}(2a)^3 x^7 + \ldots\ldots\right).$$

Приводя выраженіе Q_n въ порядокъ по убывающимъ степенямъ буквы x, находимъ, въ обоихъ случаяхъ,

$$\text{(IV)}\quad Q_n = C\left((2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}\frac{(2x)^{n-2}}{\alpha} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\frac{(2x)^{n-4}}{\alpha^2} - \ldots\right).$$

6. Такъ какъ производная

$$\frac{dQ_n}{dx} = Q'_n$$

удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{d^2Q'_n}{dx^2} - 2\alpha x\frac{dQ'_n}{dx} + 2\alpha(n-1)Q'_n = 0,$$

которое получается изъ (4) чрезъ подстановку $(n-1)$ на мѣсто n, то слѣд.

$$\frac{dQ_n}{dx} = C\,Q_{n-1},$$

гдѣ C означаетъ, какъ всегда, множитель независящій отъ x. Это, впрочемъ, видно изъ формулы (IV), при помощи которой, полагая напр. $C=\alpha^n$, мы находимъ $C=2n\alpha$, такъ что

(10) $$\frac{dQ_n}{dx}=2n\alpha\, Q_{n-1}.$$

Подобная формула имѣетъ мѣсто и для функціи R_n; это мы увидимъ въ слѣдующемъ §-фѣ.

§ XVII. Разложеніе функціи

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t-x}$$

въ непрерывную дробь. Производящая знаменателей.

1. Положивъ въ (I) предыдущаго §-фа $C_n=(-1)^n$, будемъ имѣть

(1) $$Q_n=(-1)^n\, e^{\alpha x^2}\frac{d^n}{dx^n}\, e^{-\alpha x^2},$$

или, по (IV) § XVI,

(2) $$Q_n=(2\alpha x)^n-\frac{n(n-1)}{1}\,\alpha\,(2\alpha x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\,\alpha^2(2\alpha x)^{n-4}-\dots$$

Изъ (1) получаемъ

$$Q_n=(-1)^{n-1}e^{\alpha x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,2\alpha x e^{-\alpha x^2},$$

или

$$Q_n=(-1)^{n-1}\,2\alpha x e^{\alpha x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,e^{-\alpha x^2}+(-1)^{n-1}\,2\alpha(n-1)\,e^{\alpha x^2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\,e^{-\alpha x^2};$$

отсюда

(3) $$Q_n=2\alpha\, x\, Q_{n-1}-2\alpha\,(n-1)\,Q_{n-2}.$$

На основаніи этого уравненія мы получаемъ такое разложеніе функціи φ въ непрерывную дробь:

(I) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}\,dt}{t-x}=\cfrac{k}{2\,\alpha x-\cfrac{2.1\,\alpha}{2\,\alpha x-\cfrac{2.2\,\alpha}{2\,\alpha x-\cfrac{2.3\alpha}{2\,\alpha x-\dots}}}},$$

гдѣ

$$k=-2\sqrt{\pi\alpha}.$$

Изъ уравненія (4) слѣдуетъ, что

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} Q_n(t)^2\, dt = \Gamma(n+1)(2\alpha)^n \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Изъ выраженія

$$R_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} Q_n(t)\, dt}{t-x}$$

получаемъ

$$\frac{dR_n}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} Q_n(t)\, dt}{(t-x)^2},$$

или

$$\frac{dR_n}{dx} = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} Q_n(t) \frac{d}{dt} \frac{1}{t-x}\, dt,$$

или, интегрируя по частямъ,

$$\frac{dR_n}{dx} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2}(2\alpha\, t\, Q_n(t) - Q'_n(t))}{t-x}\, dt.$$

Принимая во вниманіе (10) § XVI, предыдущее уравненіе можно написать такъ:

$$\frac{dR_n}{dx} = -\int \frac{e^{-\alpha t^2}(2\alpha\, t\, Q_n(t) - 2n\alpha\, Q_{n-1}(t))}{t-x}\, dt,$$

или, на основаніи (3),

$$\frac{dR_n}{dx} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} Q_{n+1}(t)\, dt}{t-x},$$

то есть,

$$\frac{dR_n}{dx} = -R_{n+1}.$$

3. Переходя къ опредѣленію производящей, мы положимъ

$$X_n = (-1)^n \frac{Q_n}{1.2.3.....n} = \frac{e^{\alpha x^2}}{1.2.3......n} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\alpha x^2};$$

тогда

$$X_n = e^{\alpha x^2} \mathcal{E} \frac{e^{-\alpha z^2}}{(((z-x)^{n+1}))},$$

или, полагая

$$z = x + t,$$

$$X_n = e^{\alpha x^2} \mathcal{E} \frac{e^{-\alpha(x+t)^2}}{((t^{n+1}))},$$

или еще

(6) $$X_n = \mathcal{E} \frac{e^{-\alpha t(2x+t)}}{((t^{n+1}))}.$$

Слѣдовательно, производящая ряда функцій

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots.$$

равняется

$$e^{-\alpha t(2x+t)}.$$

Примѣчаніе. Цѣлыя функціи Q_n, или X_n, разсматриваемыя въ этомъ §-фѣ, могутъ быть принятыми за частный случай функцій подобныхъ функціямъ Лежандра. Стоитъ только для этого предположить, что двѣ критическія точки, которыя мы въ § XI предполагали равными -1 и $+1$, удалились до $-\infty$ и $+\infty$.

Объ этихъ функціяхъ писали Чебышевъ и Эрмитъ.

§ XVIII. Знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи

$$\mathcal{E} \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}}{(t-x)\,((t^\beta))}$$

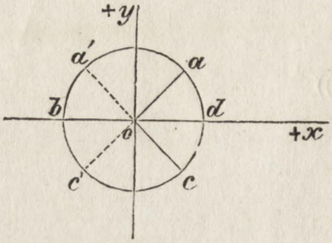
въ непрерывную дробь.

1. Принимая во вниманіе интегральный вычетъ

(1) $$\varphi = \mathcal{E} \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}}{(t-x)\,((t^\beta))} = -\mathbf{F}\, \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x^\beta},$$

мы условимся, въ томъ случаѣ, когда β не есть числомъ цѣлымъ и слѣд. интегральный вычетъ (1) теряетъ смыслъ, подъ знакомъ интегральнаго вычета подразумѣвать интегралъ

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\, dt}{(t-x)\, t^\beta},$$



Чер. 3.

взятый по сомкнутой кривой *oabco* (чер. 3). Изображая чрез $Q_n(x)$ знаменателя n-ой степени одной изъ подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи φ въ непрерывную дробь, и означая чрезъ h наименьшій показатель $\frac{1}{x}$ въ разложеніи функціи

$$R_n = \mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}Q_n(t)}{(t-x)((t^\beta))}$$

по возрастающимъ степенямъ отъ $\frac{1}{x}$, будемъ имѣть $h = n+1$, или $h > n+1$. Но, по формулѣ (I) § X, имѣемъ

$$R_n = \mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}Q_n(t)}{(t-x)((t^\beta))} = e^{-\frac{\alpha}{x}}x^{-\beta}Q_n(x)\int\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}x^{\beta-2}\theta_{n+1-h}\,dx}{Q_n(x)^2},$$

гдѣ θ_{n+1-h} изображаетъ цѣлую функцію степени $n+1-h$; слѣд. h не можетъ быть больше $n+1$, и поэтому $h=n+1$, то есть,

$$\theta_{n+1-h} = \text{Const}.$$

Вслѣдствіе этого, получаемъ такое выраженіе функціи R_n:

$$(2)\qquad R_n = \mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}Q_n(t)}{(t-x)((t^\beta))} = C_1\,e^{-\frac{\alpha}{x}}x^{-\beta}Q_n(x)\int\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}x^{\beta-2}\,dx}{Q_n(x)^2}.$$

Полагая въ этой формулѣ $n=0$, получаемъ

$$(3)\qquad \varphi = \mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}}{(t-x)((t^\beta))} = Ce^{-\frac{\alpha}{x}}x^{-\beta}\int e^{\frac{\alpha}{x}}x^{\beta-2}\,dx.$$

2. Уравненіе

$$Q_n(x) = 0$$

не имѣетъ корня равнаго нулю.

Дѣйствительно, если бы $Q_n(0) = 0$, то вторая часть формулы (2) обращалась бы, при $x = 0$, въ ∞, между тѣмъ какъ первая ея часть сохраняетъ, очевидно, конечное значеніе.

Далѣе, формула (2) показываетъ, что уравненіе

$$Q_n(x) = 0$$

не имѣетъ кратныхъ корней.

На самомъ дѣлѣ, если b изображаетъ кратный корень упомянутаго уравненія то, при $x=b$, вторая часть формулы (2) обращается въ ∞, между тѣмъ какъ первая сохраняетъ конечное значеніе.

Наконецъ, формула (2) показываетъ, что если a есть любой корень уравненія

$$Q_n(x) = 0,$$

то

$$\mathcal{E}_{(x=a)} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} x^{\beta-2}}{Q_n(x)^2} = 0,$$

или

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} x^{\beta-2}(x-a)^2}{Q_n(x)^2}\right)_{(x=a)} = 0. \tag{4}$$

3. Дѣлая

$$f(x) = \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} x^{\beta-2}(x-a)^2}{Q_n(x)^2},$$

получаемъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta-2}{x} + 2\frac{Q_n(x) - (x-a)Q'_n(x)}{(x-a)Q_n(x)},$$

отсюда, полагая $x=a$ и принимая во вниманіе уравненіе (4),

$$-\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta-2}{a} - \frac{Q''_n(a)}{Q'_n(a)} = 0,$$

или

$$a^2 Q''_n(a) + (\alpha - (\beta-2)\alpha)\, Q'_n(a) = 0.$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что функція $Q_n(x)$ удовлетворяетъ такому дифференціальному уравненію:

$$x^2 Q''_n(x) + (\alpha - (\beta-2)x)\, Q'_n(x) - n(n-\beta+1)\, Q_n(x) = 0. \tag{5}$$

4. Функція

$$u = e^{-\frac{\alpha}{x}} x^{\beta}$$

удовлетворяетъ уравненію

$$x^2 \frac{du}{dx} = (\alpha + \beta x)\, u,$$

отсюда получаемъ

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} - (\alpha + (\beta-2)x)\frac{du}{dx} - \beta u = 0.$$

Дифференцируя это уравненіе n разъ и дѣлая

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u_n,$$

находимъ

$$(6) \qquad x^2 \frac{d^2 u_n}{dx^2} - [\alpha - (2(n+1) - \beta)\, x] \frac{du_n}{dx} + (n+1)(n-\beta)\, u_n = 0.$$

Положивъ, далѣе,

$$u_n = v z_n, \quad v = e^{-\frac{\alpha}{x}} x^{-\lambda},$$

будемъ имѣть

$$v x^2 \frac{d^2 z_n}{dx^2} + [(2(n+1-\lambda) - \beta)\, x + \alpha]\, v \frac{dz_n}{dx}$$

$$+ [(2n - \beta - \lambda)\, x \frac{dv}{dx} + ((n+1)(n-\beta) - \lambda)\, v]\, z_n = 0;$$

отсюда, положивъ

$$\beta = 2n - \lambda,$$

$$(7) \qquad x^2 \frac{d^2 z_n}{dx^2} + (\alpha + (2-\lambda)\, x) \frac{dz_n}{dx} - n(n-\lambda+1)\, z_n = 0,$$

приэтомъ

$$(8) \qquad z_n = e^{\frac{\alpha}{x}} x^{\lambda} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{\alpha}{x}} x^{2n-\lambda}.$$

Сличая уравненіе (7) съ (5), получаемъ, по формулѣ (8), слѣдующее выраженіе для Q_n:

$$(\mathrm{I}) \qquad Q_n = C_n e^{\frac{\alpha}{x}} x^{\beta} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{\alpha}{x}} x^{2n-\beta}.$$

Это выраженіе функціи Q_n даетъ возможность непосредственно убѣдиться что, при $x = \infty$, функція R_n обращается въ нуль степени равной $\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}$.

5. Чтобъ получить разложеніе функціи Q_n по степенямъ перемѣнной x, мы воспользуемся слѣдующею общею формулой для n-ой производной отъ произведенія

$$x^m f\left(\frac{1}{x}\right),$$

гдѣ $f(x)$ изображаетъ функцію произвольную:

$$(9) \qquad \frac{d^n}{dx^n} x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = m(m-1)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$- \frac{n}{1}(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n-1} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1) x^{m-n-2} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \ldots$$

Полагая въ этой формулѣ

$$f(x) = e^{-\alpha x},$$

получаемъ

$$(10) \quad \frac{d^n}{dx^n} x^m e^{-\frac{\alpha}{x}} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n} e^{-\frac{\alpha}{x}}$$

$$+ \frac{n}{1}(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,\alpha x^{m-n-1} e^{-\frac{\alpha}{x}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(m-2)\ldots(m-n+1)\,\alpha^2 x^{m-n-2} e^{-\frac{\alpha}{x}} + \ldots\ldots$$

Подставляя въ обѣихъ частяхъ этого уравненія $2n-\beta$ на мѣсто m, внося полученное выраженіе для

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-\beta} e^{-\frac{\alpha}{x}}$$

во вторую часть формулы (I) и на мѣсто произвольнаго множителя C_n подставляя

$$\frac{C_n}{(2n-\beta)(2n-\beta-1)\ldots(n-\beta+1)},$$

получаемъ такое выраженіе для Q_n:

$$(\mathrm{II}) \qquad Q_n = C_n\Big(x^n + \frac{n}{2n-\beta}\alpha x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\alpha^2 x^{n-2}}{(2n-\beta)(2n-\beta-1)}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{\alpha^3 x^{n-3}}{(2n-\beta)(2n-\beta-1)(2n-\beta-2)}$$

$$+ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$+ \frac{\alpha^n}{(2n-\beta)\ldots(n-\beta+1)}\Big).$$

Приводя выраженіе функціи Q_n въ порядокъ по возрастающимъ степенямъ буквы x, получаемъ

$$(\mathrm{III}) \quad Q_n(x) = C'_n\Big(1 + \frac{n}{1}(n-\beta+1)\frac{x}{\alpha} + \frac{n(n-1)}{2}(n-\beta+1)(n-\beta+2)\frac{x^2}{\alpha^2}$$

$$+ \ldots\ldots\Big).$$

6. Составляя второй интегралъ уравненія (5) и называя его чрезъ U_n, находимъ

$$U_n = Q_n \int \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} x^{\beta-2}}{Q_n^2}.$$

Сличая это выраженіе съ (2) получаемъ

$$(11) \qquad U_n = e^{\frac{\alpha}{x}} x^{\beta} R_n.$$

Формула эта показываетъ, что R_n удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$(12) \qquad x^2 \frac{d^2 R_n}{dx^2} - (\alpha - (2+\beta)\, x) \frac{dR_n}{dx} - (n+1)(n-\beta) R_n = 0,$$

которое получается изъ (6) чрезъ подстановку $2n-\beta$ на мѣсто β.

Дѣлая въ (12) $n=0$, получаемъ уравненіе, которому удовлетворяетъ функція $R_0 = \varphi$, именно:

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - (\alpha - (2+\beta)\, x) \frac{d\varphi}{dx} + \beta\varphi = 0.$$

Второй интегралъ этого уравненія равняется

$$e^{-\frac{\alpha}{x}}\, x^{-\beta}.$$

§ XIX. Разложеніе функціи

$$\mathcal{E} \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}}{(t-x)\,((t^\beta))}$$

въ непрерывную дробь. Производящая знаменателей.

1. Полагая въ формулѣ (II) предыдущаго §-фа

$$C_n = 1,$$

будемъ имѣть

$$(1) \qquad Q_n = x^n + \frac{n}{1} \frac{\alpha x^{n-1}}{2n-\beta}$$

$$+ \frac{n\,(n-1)}{1.2} \frac{\alpha^2 x^{n-2}}{(2n-\beta)(2n-\beta-1)} + \ldots + \frac{\alpha^n}{(2n-\beta)\ldots(n-\beta+1)}.$$

Три рядомъ стоящія функціи

$$Q_n, \quad Q_{n-1}, \quad Q_{n-2}$$

связаны уравненіемъ

$$(2) \qquad Q_n = q_n\, Q_{n-1} + k_n\, Q_{n-2},$$

гдѣ k_n есть постоянный множитель, а q_n изображаетъ линейную функцію.

Принимая во вниманіе (1), изъ формулы

$$q_n = \mathrm{E} \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$$

получаемъ

$$(3) \qquad q_n = x - \frac{\alpha\beta}{(2n-\beta)(2n-\beta-2)}.$$

Чтобъ опредѣлить k_n, мы сдѣлаемъ въ обѣихъ частяхъ (2) $x=0$; тогда получимъ

$$\frac{\alpha^n}{(2n-\beta)(2n-\beta-1)\dots(n-\beta+1)}$$

$$= -\frac{\alpha^n\beta}{(2n-\beta)(2n-\beta-2)(2n-\beta-2)\dots(n-\beta)} + k_n \frac{\alpha^{n-2}}{(2n-\beta-4)\dots(n-\beta-1)},$$

или, сокращая,

$$\frac{\alpha^2}{(2n-\beta)(2n-\beta-1)\dots(2n-\beta-3)}$$

$$+ \frac{\alpha^2\beta}{(2n-\beta)(2n-\beta-2)(2n-\beta-2)(2n-\beta-3)(n-\beta)} = \frac{k_n}{(n-\beta)(n-\beta-1)};$$

отсюда же получаемъ

$$(4) \qquad k_n = \frac{(n-1)(n-\beta-1)\alpha^2}{(2n-\beta-1)(2n-\beta-2)^2(2n-\beta-3)},$$

Слѣдовательно,

$$(5) \qquad Q_n = \left(x - \frac{\alpha\beta}{(2n-\beta)(2n-\beta-2)} \right) Q_{n-1}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-\beta-1)\alpha^2}{(2n-\beta-1)(2n-\beta-2)^2(2n-\beta-3)} Q_{n-2}$$

На основаніи этой зависимости, мы получаемъ слѣдующее разложеніе функціи φ въ непрерывную дробь:

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathcal{E} \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}}{(t-x)\,((t^\beta))}$$

$$= \cfrac{C}{x + \cfrac{\alpha}{2-\beta} + \cfrac{\cfrac{\alpha^2}{(3-\beta)(2-\beta)(2-\beta)}}{x - \cfrac{\alpha\beta}{(4-\beta)(2-\beta)} + \cfrac{\cfrac{2(2-\beta)\alpha^2}{(5-\beta)(4-\beta)^2(3-\beta)}}{x - \cfrac{\alpha\beta}{(6-\beta)(4-\beta)} + \dots}}},$$

гдѣ

$$(6) \qquad C = -\mathcal{E} \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}}{((t^\beta))}.$$

Если β есть число дробное и больше единицы, постоянную C можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$C=\frac{e^{-2\beta\pi i}-1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}\,dt}{t^\beta},$$

то есть,

$$C=\frac{e^{-2\beta\pi i}-1}{2\pi i\alpha^{\beta-1}}\,\Gamma(\beta-1). \tag{7}$$

Если же допустимъ, что β есть число цѣлое, отрицательное; тогда по формулѣ (6), будемъ имѣть

$$C=(-1)^{-\beta}\frac{\alpha^{-\beta+1}}{1.2.3.....(-\beta+1)} \tag{8}$$

2. Примѣняя къ разложенію (I) одну формулу, извѣстную въ теоріи непрерывныхъ дробей, получаемъ

$$\mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}Q_n(t)^2}{((t^\beta))} \tag{9}$$

$$=(-1)^{n-1}C\alpha^{2n}\frac{1.2.3.....n}{(2-\beta)(3-\beta)...(2n-\beta+1)\times(n-\beta+1)(n-\beta+2)...(2n-\beta)},$$

гдѣ C опредѣляется, вообще, по формулѣ (6), а въ частныхъ случаяхъ, по (7) или (8).

Если, напримѣръ, число β больше единицы, то на основаніи (7) будемъ имѣть

$$\mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}Q_n(t)^2}{((t^\beta))} \tag{10}$$

$$=(-1)^{n-1}\alpha^{2n-\beta+1}\frac{e^{-2\beta\pi i}-1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\beta-2n-1)}{(n-\beta+1)...(2n-\beta)}.$$

Если же число β будетъ цѣлое и отрицательное, то, на основаніи (8),

$$\mathcal{E}\frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}Q_n(t)^2}{((t^\beta))} \tag{11}$$

$$=(-1)^{n-\beta-1}\alpha^{2n-\beta+1}\frac{1}{(n+1)...(2n-\beta+1)\times(n-\beta+1)...(2n-\beta)}.$$

3. Переходя къ опредѣленію функціи производящей, мы положимъ

$$(12)\qquad X_n = \frac{1}{2^n \,.\, 1.2.3......n}\, x^\beta e^{\frac{\alpha}{x}} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-\frac{\alpha}{x}} x^{2n-\beta};$$

тогда будемъ имѣть

$$X_n = \frac{1}{2^n}\, x^\beta e^{\frac{\alpha}{x}} \mathcal{E} \frac{e^{-\frac{\alpha}{z}}\, z^{2n-\beta}}{(((z-x)^{n+1}))}.$$

Дѣлая

$$\frac{z^2}{z-x} = \frac{2}{t},$$

или

$$z = \frac{2x}{1+\sqrt{1-2tx}},$$

получаемъ

$$X_n = 2^{-\beta} \mathcal{E} \frac{e^{\frac{\alpha}{2x}(1-\sqrt{1-2\,tx})}}{((t^{n+1}))\sqrt{1-2\,tx}\,(1+\sqrt{1-2\,tx})^{-\beta}},$$

или

$$X_n = \frac{1}{2^\beta} \mathcal{E} \frac{e^{\frac{\alpha t}{1+\sqrt{1-2tx}}}(1+\sqrt{1-2\,tx})^\beta}{((t^{n+1}))\sqrt{1-2\,tx}}.$$

Слѣдовательно, производящая ряда функцій

$$X_0,\ X_1,\ X_2,....$$

равняется

$$\frac{1}{2^\beta}\, \frac{e^{\frac{\alpha t}{1+\sqrt{1-2\,tx}}}(1+\sqrt{1-2\,tx})^\beta}{\sqrt{1-2\,tx}}.$$

§ XX. Частные случаи. Сходимость періодической дроби.

1. Если β есть число цѣлое и больше единицы, тогда разложеніе (I) предыдущаго §-фа не годится, ибо во второй части получаются коеффиціенты равные ∞.

Пусть m изображаетъ какое угодно цѣлое число, больше единицы, и положимъ $\beta = m$; тогда

$$(1)\qquad \mathcal{E} \frac{e^{-\frac{\alpha}{t}}}{(t-x)\,((t^m))} = -\,\frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x^m},$$

и слѣд. первое неполное частное въ разложеніи функціи (1) будетъ m-ой степени.

Всѣ слѣдующія неполныя частныя будутъ первой степени.

Первое неполное частное будетъ знаменателемъ m-ой степени, котораго въ предыдущемъ §-фѣ мы изображали чрезъ Q_m. Полагая въ (1) предыдущаго §-фа $\beta=n=m$, находимъ

$$(2) \qquad Q_m=x^m+\alpha x^{m-1}+\frac{1}{1.2}\alpha^2 x^{m-2}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots m}\alpha^m,$$

изъ той же формулы (1) получаемъ

$$(3) \qquad Q_{m+1}=x^{m+1}+\frac{m+1}{m+2}\alpha x^m+\frac{1}{1.2}\frac{m}{m+2}\alpha^2 x^{m-1}+\ldots+\frac{\alpha^{m+1}}{1.2\ldots(m+2)}$$

а, по формулѣ (3) предыдущаго §-фа, имѣемъ

$$(4) \qquad q_{m+1}=x-\frac{\alpha}{m+2}.$$

Полагая, далѣе,

$$Q_{m-1}=1,$$

будемъ имѣть

$$Q_{m+1}=q_{m+1}\,Q_m+k_{m+1};$$

отсюда, дѣлая $x=0$ и принимая во вниманіе (2), (3), (4),

$$(5) \qquad k_{m+1}=\frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\ldots\ldots(m+1)}.$$

По этой формулѣ вычисляется k_{m+1}; слѣдующія же значенія k_{m+2}, $k_{m+3},\ldots$ слѣдуетъ вычислять по формулѣ (4) предыдущаго §-фа.

На основаніи формулъ (2) и (5) получаемъ слѣдующее разложеніе функціи (1) въ непрерывную дробь.

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{\alpha}{x}}=\cfrac{1}{x^m+\alpha x^{m-1}\frac{1}{1.2}\alpha^2 x^{m-2}+\ldots\ldots+\cfrac{\alpha^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}\cfrac{1}{x-\cfrac{\alpha}{m+2}+\cfrac{k_{m+2}}{q_{m+2}+\ldots}}}$$

приэтомъ k_{m+2}, $k_{m+3},\ldots$ q_{m+2}, $q_{m+3},\ldots$ опредѣляются по формуламъ (3) и (4) предыдущаго §-фа.

2. Полагая въ формулѣ (I) предыдущаго §-фа $\alpha=2$, $\beta=0$, получаемъ

$$1-e^{-\frac{2}{x}}=\cfrac{2}{x+1+\cfrac{\frac{2^2}{3.2.2}}{x+\cfrac{\frac{2^2\,2^2}{5.4^2.3}}{x+\cfrac{\frac{3^2\,2^2}{7.6^2.5}}{x+\ldots}}}}$$

или

$$1-e^{-\frac{2}{x}}=\cfrac{2}{x+1+\cfrac{1}{3}\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{5.3}\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{7.5}\cfrac{1}{x+\ldots}}}}$$

или еще

$$1-e^{-\frac{2}{x}}=\cfrac{2}{x+1+\cfrac{1}{3x+\cfrac{1}{5x+\cfrac{1}{7x+\ldots}}}} \tag{6}$$

Это разложенiе замѣчательно по своей простотѣ. Оно даетъ возможность, при цѣлыхъ и положительныхъ значенiяхъ перемѣнной x, составить разложенiе значенiя функцiи

$$\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

въ правильную непрерывную дробь.

3. Въ заключенiе настоящей главы мы постараемся доказать, что при какомъ угодно значенiи независимой перемѣнной x, вторая часть (6) представляетъ сходящуюся непрерывную дробь, значенiе которой равняется значенiю первой части.

Вопросъ о сходимости получаемыхъ въ настоящей главѣ перiодическихъ дробей, который, впрочемъ, не представляетъ особенныхъ затрудненiй, не входитъ въ нашу программу. Мы однакожъ рѣшаемся помѣстить здѣсь доказательство сходимости разложенiя (6) потому что, во первыхъ, это доказательство отличается простотою, а во вторыхъ, формула (6) имѣетъ особенную практическую важность: она даетъ возможность легчайшимъ образомъ вычислять значенiе числа e по формулѣ

$$\frac{1}{2}(e-1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

которою мы обязаны Эйлеру.

Изображая чрезъ P_n и Q_n числителя и знаменателя n-ой подходящей дроби, получаемой отъ разложенiя (6), будемъ имѣть

$$\varphi-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{R_n}{Q_n},$$

гдѣ

$$\varphi = 1 - e^{-\frac{2}{x}} = \mathcal{E}_{(t=0)} \frac{e^{-\frac{2}{t}}}{t-x},$$

(7) $$Q_n = e^{\frac{2}{x}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{2}{x}} x^{2n}$$

$$= (n+1)\ldots\ldots.2n \left[x^n + \frac{1}{2} 2x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} \frac{2^2 x^{n-2}}{1.2} + \ldots..\right],$$

$$R_n = \mathcal{E}_{(t=0)} \frac{\frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{2}{t}} t^{2n}}{t-x}.$$

Помощью интегрованія по частямъ, выраженіе функціи R_n можно преобразовать въ слѣдующее:

$$R_n' = 1.2\ldots\ldots.n \, \mathcal{E} \frac{e^{-\frac{2}{t}} t^{2n}}{(t-x)^{n+1}};$$

отсюда

$$R_n = (-1)^{n-1} \Gamma(n+1) \left[\frac{1}{x^{n+1}} \mathcal{E}\, e^{-\frac{2}{t}} t^{2n} + \frac{n+1}{1} \frac{1}{x^{n+2}} \mathcal{E}\, e^{-\frac{2}{t}} t^{2n+1} + \ldots\right],$$

или

$$R_n = (-1)^n \Gamma(n+1) \left[\frac{1}{x^{n+1}} \frac{2^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} - \frac{n+1}{1} \frac{2^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)} \frac{1}{x^{n+2}} + \ldots.\right],$$

или еще

(8) $$R_n = (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(n+1)\ldots..(2n+1)} \left[\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{n+1}{1.(2n+2)} \frac{1}{x^{n+2}} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2.(2n+2)(2n+3)} \frac{1}{x^n+3} + \ldots.\right].$$

Раздѣляя (8) на (7), получаемъ

$$\frac{R_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^{2n+1}}{(2n+1)[(n+1)\ldots 2n]^2} \frac{1 - \frac{n+1}{2n+2} \frac{2}{x} + \frac{1}{1.2} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} \left(\frac{2}{x}\right)^2 + \ldots}{1 + \frac{1}{2} \frac{2}{x} + \frac{1}{1.2} \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots}$$

Изъ этого уравненія, дѣлая $n=\infty$, получаемъ

$$\lim \frac{R_n}{Q_n} = \pm e^{-\frac{2}{x}} \lim \frac{1}{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+1)^2} \left(\frac{2}{x}\right)^{2n+1}.$$

Но

$$\lim \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+1)^2} = \lim \frac{e^{2n}}{2^{4n+1} n^{2n}};$$

поэтому

$$\lim \frac{R_n}{Q_n} = \pm e^{-\frac{2}{x}} \frac{1}{x} \lim \frac{1}{2n+1} \left(\frac{e}{2nx}\right)^{2n}.$$

Слѣдовательно,

$$\lim \frac{R_n}{Q_n} = 0,$$

или

$$1 - e^{-\frac{2}{x}} = \lim \frac{P_n}{Q_n^{'}}.$$

ГЛАВА III.

ФУНКЦИИ, ПОДОБНЫЯ ФУНКЦІЯМЪ ЛАМЭ.

§ XXI. Опредѣленіе функцій подобныхъ функціямъ Ламэ. Нѣкоторыя ихъ свойства.

1. Извѣстно что, разлагая функцію

$$(1)\qquad \varphi=\int_0^1\frac{dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma}+h\int_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{(t-x)t^\alpha(1-t)^\beta(1-k^2t)^\gamma},$$

въ непрерывную дробь и предполагая параметры h и k^2 произвольными, всѣ неполныя частныя, получаемыя отъ этого разложенія, будутъ функціями линейными. Если Q_n изображаетъ знаменателя n-ой подходящей дроби, слѣд. n-ой степени, то функція

$$R_n=\mathrm{F}\,\varphi\,Q_n$$

будетъ степени $-(n+1)$-ой.

При нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ параметра h, степень эта можетъ понизиться. Допустимъ что, на самомъ дѣлѣ, параметру h мы дали такое значеніе, при которомъ функція R_n степени ниже чѣмъ $-(n+1)$-ой.

Означая степень функціи R_n черезъ $-m$ и принимая во вниманіе формулу (I) § VI, получаемъ

$$(2)\qquad R_n=\frac{Q_n(x)}{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}\int\frac{\theta_{n+2-m}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}\,Q_n(x)^2},$$

гдѣ θ_{n+2-m} изображаетъ цѣлую функцію $(n+2-m)$-ой степени. Но такъ какъ, по сдѣланному нами предположенію, $m>n+1$, то слѣд. $m=n+2$; ибо при $m>n+2$ степень функціи θ_{n+2-m} была бы отрицательна.

Итакъ, въ разсматриваемомъ нами случаѣ,

$$\theta_{n+2-m} = \text{Const};$$

поэтому

$$(3)\quad R_n = C\,\frac{Q_n(x)}{x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}\int\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}\,Q_n(x)^2}.$$

Изъ этой формулы, подобно тому какъ въ предыдущей главѣ для функцій Лежандра, непосредственно вытекаютъ слѣдствія:

1) *функція* Q_n *не обращается въ нуль ни при* $x=0$, *ни при* $x=1$, *ни при* $x=\frac{1}{k^2}$.

2) *Уравненіе* $Q_n(x)=0$ *не имѣетъ кратныхъ корней.*

3) *Если* a *изображаетъ любой корень уравненія* $Q_n=0$, *то*

$$(4)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{(x=a)}\frac{1}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}\,Q_n(x)^2}=0.$$

Уравненіе (4) можетъ быть представлено такъ:

$$\left(\frac{d}{dx}\,\frac{(x-a)^2}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(1-k^2x)^{1-\gamma}\,Q_n(x)^2}\right)_{x=a}=0.$$

Отсюда получаемъ слѣдующее дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ функція Q_n:

$$(5)\qquad x(1-x)(1-k^2x)Q''_n+[(1-\alpha)(1-x)(1-k^2x)-(1-\beta)x(1-k^2x)$$
$$-k^2(1-\gamma)x(1-x)]Q'_n+(qx+r)Q_n=0.$$

Называя

$$(6)\qquad \begin{cases} k^2(3-\alpha-\beta-\gamma)=a,\\ -k^2(2-\alpha-\gamma)-(2-\alpha-\beta)=b,\\ 1-\alpha=c,\end{cases}$$

предыдущее уравненіе (5) приметъ такой видъ:

$$(\mathrm{I})\qquad x(1-x)(1-k^2x)\,Q''_n+(ax^2+bx+c)\,Q'_n+(qx+r)\,Q_n=0$$

Въ этомъ уравненіи находятся двѣ величины намъ неизвѣстныя, именно, q и r: онѣ могутъ быть опредѣлены на основаніи того предположенія, что функція Q_n есть цѣлая, n-ой степени.

На самомъ дѣлѣ, полагая

$$Q_n = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots\ldots,$$

и внося это выраженіе на мѣсто Q_n въ (I), получаемъ цѣлую функцію $(n+1)$-ой степени, которая тожественно равняется нулю. Приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x, получаемъ $(n+2)$ уравненій, которыя представляются подъ общимъ видомъ

$$(7)\qquad (s+1)(s+c)p_{n-s-1}+[s(1-s)(1+k^2)+bs+r]p_{n-s}$$
$$+[(1-s)(2-s)k^2-a(1-s)+q]p_{n-s+1}=0,$$
$$(s=n+1,\ \ n,\ \ n-1,\dots 1,\ 0).$$

Полагая $s=n+1$, получаемъ

$$n(n-1)k^2+na+q=0,$$

отсюда

$$(8)\qquad q=-n((n-1)k^2+a),$$

или

$$q=-n(n+2-\alpha-\beta-\gamma)k^2.$$

Внося въ (7) на мѣсто q его значеніе по формулѣ (8), получаемъ

$$(s+1)(s+c)p_{n-s-1}+[s(b-(s-1)(1+k^2))+r]p_{n-s}$$
$$-(n-s+1)[(n+s-2)k^2+a]p_{n-s+1}=0.$$

Дѣлая поочередно $s=n,\ n-1,\dots.0$, получаемъ $(n+1)$ уравненій съ $n+1$ неизвѣстными.

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned}
&n[b-(n-1)(1+k^2)]+r-[a+(2n-2)k^2]p_1=0,\\
&n(n+c-1)+[(n-1)(b-(n-2)(1+k^2))+r]p_1-2[a+(2n-3)k^2]p_2=0,\\
&(n-1)(n+c-2)p_1+[(n-2)(b-(n-3)(1+k^2))+r]p_2\\
&\quad-3(a+(2n-4)k^2)p_3=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&2(1+c)p_{n-2}+[b+r]p_{n-1}-n(a+(n-1)k^2)p_n=0,\\
&c\,p_{n-1}+r\,p_n=0.
\end{aligned}\right.$$

Приравнивая опредѣлитель этой системы нулю, получаемъ такое уравненіе для опредѣленія неизвѣстнаго r:

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{vmatrix}
n[b-(n-1)(1+k^2)]+r, & -[a+(2n-2)k^2], & 0 & \dots\dots 0\\
n(n+c-1), & (n-1)[b-(n-2)(1+k^2)]+r, & -2[a+(2n-3)k^2] & \dots\\
0, & (n-1)(n+c-2), & . & \dots\dots\\
. & . & . & \dots\dots\\
. & . & . & \dots\dots\\
0 & 0 & . & \dots r
\end{vmatrix}=0.$$

Такъ какъ уравненіе это $(n+1)$-ой степени, то существуетъ, вообще, $n+1$ функцій Q_n, удовлетворяющихъ уравненію (I).

Каждому корню уравненія (III) соотвѣтствуетъ также одно значеніе параметра h, которое можетъ быть вычислено изъ уравненія

$$\int_0^1 \frac{Q_n\,dx}{x^\alpha\,(1-x)^\beta\,(1-k^2x)^\gamma} + h\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{Q_n\,dx}{x^\alpha\,(1-x)^\beta\,(1-k^2x)^\gamma} = 0.$$

2. Въ частныхъ случаяхъ уравненіе (III) можетъ имѣть кратные корни; но дискриминанъ уравненія (III) не обращается тожественно въ нуль, ибо всѣ его корни при $k=0$ очевидно различны.

Полагая $k=1$, уравненіе (I) приметъ такой видъ:

$$x\,(1-x)^2\,Q''_n + (1-x)\,(Ax+B)\,Q'_n + (qx+r)\,Q_n = 0,$$

гдѣ

$$A = \alpha + \beta + \gamma - 3,$$
$$B = 1 - \alpha,$$
$$q = -\,n\,(n-A-1) = -\,n\,(n+2-\alpha-\beta-\gamma).$$

Внося въ предыдущее уравненіе на мѣсто Q_n произведеніе

$$(1-x)^m\,V_n^{(m)},$$

получаемъ

$$(9)\qquad x(1-x)^2\,\frac{d^2\,V_n^{(m)}}{dx^2} + (1-x)\,[(A-2m)x+B]\,\frac{d\,V_n^{(m)}}{dx}$$
$$+\,[(m-n)\,(m+n-A-1)\,x + r - mB]\,V_n^{(m)} = 0.$$

Это уравненіе показываетъ намъ что, если m есть число цѣлое, не превышающее n, для числа r можно найти $n-m+1$ частныхъ значеній, при которыхъ $V_n^{(m)}$ будетъ цѣлою функціей степени $n-m$; слѣд. между $n+1$ функціями Q находится $n-m+1$ такихъ, которыя дѣлятся безъ остатка на $(1-x)^m$. Одно изъ этихъ $n-m+1$ значеній для r легко опредѣлить: стоитъ только положить для r такое значеніе, при которомъ коэффиціентъ при $V_n^{(m)}$ въ (9) дѣлился бы безъ остатка на $1-x$, именно,

$$(10)\qquad r = m\,B + (n-m)\,(n+m-A-1).$$

Итакъ, полагая въ (I) для r значеніе опредѣляемое уравненіемъ (10) и дѣлая $k=1$, одинъ интегралъ этого уравненія будетъ функціей цѣлой n-ой степени; слѣд. формула (10) даетъ значеніе одного изъ корней уравненія (III), при $k=1$. Но число m, входящее во вторую часть (10), можетъ принимать поочередно $n+1$ слѣдующихъ значеній:

$$0,\ 1,\ 2, \ldots\ n-1,\ n;$$

слѣд. корни уравненія (III), при $k=1$, суть слѣдующіе:

$$n\,(n-A-1),$$

$$B + (n-1)(n-A),$$
$$2B + (n-2)(n-A+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(n-1)B + 2n - A - 2,$$
$$nB.$$

Если α, β и γ меньше единицы, что и постоянно предполагается, то всѣ эти корни различны между собою.

Примѣчаніе. Если $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, то цѣлыя функціи, удовлетворяющія уравненію (I) будутъ функціями Ламэ. При какихъ угодно значеніяхъ параметровъ α, β, γ, цѣлыя функціи, удовлетворяющія уравненію (I), будемъ называть функціями подобными функціямъ Ламэ или, просто, функціями Ламэ.

Число различныхъ функцій Ламэ n-ой степени равняется $n+1$. Мы будемъ ихъ обозначать черезъ

$$L_n^{(1)},\ L_n^{(2)}, \ldots\ldots\ L_n^{(n)}.$$

§ XXII. Выводъ нѣкоторыхъ характеристическихъ свойствъ функцій Ламэ.

1. Пусть будутъ двѣ функціи Ламэ $L_n^{(1)}$ и $L_n^{(2)}$, обѣ n-ой степени, изъ которыхъ первая соотвѣтствуетъ корню r_1, другая корню r_2. По одной формулѣ, извѣстной изъ теоріи непрерывныхъ дробей, имѣемъ

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{L_n^{(1)}\, L_n^{(2)}\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} + h_1 \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{L_n^{(1)}\, L_n^{(2)}\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{L_n^{(1)}\, L_n^{(2)}\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} + h_2 \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{L_n^{(1)}\, L_n^{(2)}\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} = 0, \end{cases}$$

гдѣ h_1 означаетъ значеніе параметра h, соотвѣтствующее корню r_1, а h_2 есть значеніе того же параметра, соотвѣтствующее корню r_2. Два числа h_1 и h_2 не могутъ быть равными между собою, ибо тогда функція

$$\varphi = \int_0^1 \frac{dt}{(t-x)\, t^\alpha (1-t)^\beta (1-k^2t)^\gamma} + h_1 \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{(t-x)\, t^\alpha (1-t)^\beta (1-k^2t)^\gamma}$$

имѣла бы два знаменателя подходящихъ дробей, одной и той же степени; слѣд. изъ (1) получаемъ

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{L_n^{(1)} L_n^{(2)}}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} = 0, \\[2ex] \displaystyle\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{L_n^{(1)} L_n^{(2)}\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} = 0. \end{cases}
$$

2. Полагая, что k—величина вещественная, на основаніи формулъ (I) дѣлаемъ слѣдующія заключенія.

1) *Уравненіе* (III) *предыдущаго §-фа, которому удовлетворяетъ* r *не имѣетъ мнимыхъ корней.*

На самомъ дѣлѣ, если r_1 и r_2 изображаютъ два мнимые, сопряженные корня упомянутаго уравненія, а $L_n^{(1)}$ и $L_n^{(2)}$—имъ соотвѣтствующія функціи Ламэ, то произведеніе

$$L_n^{(1)}\ L_n^{(2)},$$

при всевозможныхъ вещественныхъ значеніяхъ для x, постоянно получаетъ положительныя значенія. Съ другой стороны, если $k^2 < 1$, произведеніе

$$x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma$$

не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ отъ $x=0$ до $x=1$; слѣдовательно, интегралъ

$$\int_0^1 \frac{L_n^{(1)}\ L_n^{(2)}\ dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma}$$

не можетъ равняться нулю. Но это противорѣчитъ первой изъ двухъ формулъ (I); поэтому уравненіе (III) предыдущаго §-фа не можетъ имѣть мнимыхъ корней. Это свойство уравненія съ неизвѣстной r имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда $k^2 > 1$: стоитъ только тогда на мѣсто разсматриваемой нами функціи φ принять во вниманіе функцію

$$\int_0^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{(t-x)t^\alpha (1-t)^\beta (1-k^2t)^\gamma} + h \int_{\frac{1}{k^2}}^1 \frac{dt}{(t-x)t^\alpha\ (1-t)^\beta (1-k^2t)^\gamma}.$$

2) *Уравненіе* (III) *предыдущаго §-фа не имѣетъ кратныхъ корней.*
Дѣйствительно, допустимъ что, для нѣкоторыхъ частныхъ значеній

k, α, β, γ равныхъ k_0, α_0, β_0, γ_0, упомянутое уравненіе имѣетъ кратный корень r_0. Такъ какъ, по доказанному въ предыдущемъ §-фѣ, дискриминанъ этого уравненія обращается въ нуль только для конечнаго числа частныхъ значеній модуля k, то слѣд. величинѣ k_0 можно дать такое безконечно малое приращеніе что, при новомъ значеніи k, всѣ корни r будутъ различны и два изъ нихъ будутъ безконечно мало разниться отъ r_0: мы изобразимъ ихъ чрезъ $r_0+\delta$ и $r_0+\delta_1$.

Двумъ корнямъ $r_0+\delta$ и $r_0+\delta_1$ соотвѣтствуютъ двѣ функціи $L_n^{(1)}$ и $L_n^{(2)}$, коеффиціенты которыхъ разнятся безконечно мало, и

$$\int_0^1 \frac{L_n^{(1)}\, L_n^{(2)}\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} = 0.$$

Первая часть этого уравненія, измѣняясь непрерывнымъ образомъ вмѣстѣ съ k, будетъ равняться нулю и въ предѣлѣ, когда $k=k_0$; но тогда будемъ имѣть

$$\int_0^1 \frac{(L_n^{(1)})^2\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} = 0,$$

что невозможно, если $k^2 < 1$, ибо подъинтегральная функція не мѣняетъ своего знака между предѣлами интеграла.

Очевидно, что доказанное свойство уравненія съ r имѣетъ также мѣсто когда $k^2 > 1$.

3) *Между $n+1$ функціями*

$$L_n^{(1)},\ L_n^{(2)}, \ldots L_n^{(n+1)}$$

нѣтъ линейной зависимости.

Допустимъ нротивное, т. е. что, при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ для l_1, l_2,.... l_{n+1}, имѣетъ мѣсто ровенство

$$l_1,\ L_n^{(1)} + l_2\, L_n^{(2)} + \ldots + l_{n+1}\, L_n^{(n+1)} = 0.$$

Умножая обѣ части на

$$\frac{L_n^{(1)}}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma}$$

и интегрируя отъ 0 до 1, получаемъ, вслѣдствіе (I),

$$l_1 = 0.$$

Подобнымъ образомъ докажемъ что и

$$l_2 = l_3 = \ldots = l_{n+1} = 0.$$

4) *Всякая цѣлая функція n-ой степени разлагается однимъ обра-*

зомъ въ рядъ по функціямъ $L_n^{(i)}$, *и если положимъ*

$$f(x) = A_1 L_n^{(1)} + A_2 L_n^{(2)} + \ldots + A_{n+1} L_n^{(n+1)},$$

то

$$(2)\qquad A_i = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)\, L_n^{(i)}\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{(L_n^{(i)})^2\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma}}.$$

§ XXIII. Новыя формулы и слѣдствія.

1. Такъ какъ функція $L_n^{(i)}$ есть знаменателемъ подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи

$$\varphi = \int_0^1 \frac{dt}{(t-x)t^\alpha (1-t)^\beta (1-k^2t)^\gamma} + h_i \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{(t-x)t^\alpha (1-t)^\beta (1-k^2t)^\gamma}$$

въ непрерывную дробь, а степень соотвѣтствующей функціи

$$R_n^{(i)} = F\varphi\, L_n^{(i)}$$

равняется

$$-(n+2),$$

то, полагая $m < n$, имѣемъ

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{L_n^{(i)}(x)\, L_m^{(j)}(x)\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} + h_i \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{L_n^{(i)}(z)\, L_m^{(j)}(z)\, dz}{z^\alpha (1-z)^\beta (1-k^2z)^\gamma} = 0,$$

$$(2)\qquad \int_0^1 \frac{x\, L_n^{(i)}(x)\, L_m^{(j)}(x)\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} + h_i \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{z\, L_n^{(i)}(z)\, L_m^{(j)}(z)\, dz}{z^\alpha (1-z)^\beta (1-k^2z)^\gamma} = 0.$$

Исключая изъ этихъ двухъ уравненій параметръ h_i, получаемъ

$$(3)\qquad \int_0^1 \frac{L_n^{(i)}(x)\, L_m^{(j)}(x)\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{L_n^{(i)}(z)\, L_m^{(j)}(z)\, d}{z^\alpha (1-z)^\beta (1-k^2z)^\gamma}$$

$$-\int_0^1 \frac{x\, L_n^{(i)}(x)\, L_m^{(j)}(x)\, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2x)^\gamma} \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{L_n^{(i)}(z)\, L_m^{(j)}(z)\, dz}{z^\alpha (1-z)^\beta (1-k^2z)^\gamma} = 0.$$

Принимая во вниманіе формулы (I) предыдущаго §-фа, мы заключаемъ, что уравненіе (3) имѣетъ мѣсто не только при $m < n$, но и при $m = n$, лишь бы въ этомъ послѣднемъ случаѣ i не равнялось j. Съ другой стороны, такъ какъ первая часть (3) симметрична относительно m и n, то уравненіе (3) или, все тоже, уравненіе

$$\text{(I)}\qquad \int_1^{\frac{1}{k^2}} \int_0^1 \frac{(z-x) L_n^{(i)}(z)\, L_m^{(j)}(z)\, L_n^{(i)}(x) L_m^{(j)}(x)\, dx dz}{z^\alpha (1-z)^\beta (1-k^2 z)^\gamma\, x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2 x)^\gamma} = 0$$

имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ указателей i, j, m, n, исключая тотъ случай, когда

$$i = j,\ m = n.$$

2. Въ уравненіяхъ (1) и (2) на мѣсто $L_m^{(j)}$ можно подставить произвольную цѣлую функцію m-ой степени; слѣдовательно, рядомъ съ уравненіемъ (I) можемъ написать слѣдующее:

$$\text{(II)}\qquad \int_1^{\frac{1}{k^2}} \int_0^1 \frac{(z-x)\, L_n^{(i)}(z)\, L_n^{(i)}(x) f(z) f(x)\, dx dz}{z^\alpha (1-z)^\beta (1-k^2 z)^\gamma\, x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2 x)^\gamma} = 0,$$

гдѣ $f(x)$ изображаетъ произвольную цѣлую функцію степени ниже n.

3. Формула (II) даетъ возможность доказать, что если $k^2 < 1$, то всѣ корни уравненія

$$L_n^{(i)}(x) = 0$$

веществнны и содержатся между 0 и $\frac{1}{k^2}$. Дѣйствительно, полагая въ (I) $m=0$, получаемъ

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \int_0^1 \frac{(z-x)\, L_n^{(i)}(z)\, L_n^{(i)}\, (x)\, dx\, dz}{r^\alpha (1-z)^\beta (1-k^2 z)^\gamma\, x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2 x)^\gamma} = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что функція $L_n^{(i)}(x)$ должна обращаться въ нуль по крайней мѣрѣ одинъ разъ въ промежуткѣ между 0 и $\frac{1}{k^2}$, положимъ, для $x = a$, такъ что будемъ имѣть

$$L_n^{(i)}\, (x)\, L_n^{(i)}(z) = (x-a)\, (z-a)\, M_n^{(i)}(x)\, M_n^{(i)}(z),$$

гдѣ $M_n^{(i)}(x)$ есть цѣлая функція $(n-1)$-ой степени.

Дѣлая въ формулѣ (II)

$$f(x) = x - a,$$

получаемъ

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}}\int_0^1 \frac{(z-x)(z-a)^2(x-a)^2 M_n^{(i)}(z) M_n^{(i)}(x)\,dx\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta(1-k^2z)^\gamma x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}=0.$$

Уравненіе это показываетъ, что функція

$$M_n^{(i)}(x)$$

въ промежуткѣ отъ 0 до $\frac{1}{k^2}$ обращается въ нуль по крайней мѣрѣ одинъ разъ. Пусть b изображаетъ то число, содержащееся въ упомянутомъ промежуткѣ, для котораго

$$M_n^{(i)}(b)=0;$$

тогда

$$M_n^{(i)}(x)=(x-b)\,N_n^{(i)}(x),$$

и слѣд.

$$L_n^{(i)}(x)=(x-a)(x-b)\,N_n^{(i)}(x).$$

Полагая, далѣе, въ (II)

$$f(x)=(x-a)(x-b),$$

получаемъ

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}}\int_0^1 \frac{(z-x)(z-a)^2(z-b)^2(x-a)^2(x-b)^2 N_n^{(i)}(x)\,dx\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta(1-k^2z)^\gamma x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}=0;$$

отсюда слѣдуетъ, что функція $N_n^{(i)}(x)$ обращается въ нуль для нѣкотораго значенія x, содержащагося между 0 и $\frac{1}{k^2}$ и т. д.

Продолжая такимъ образомъ разсуждать далѣе, мы придемъ къ тому заключенію, что функція $L_n^{(i)}(x)$ обращается въ нуль для n различныхъ значеній независимой перемѣнной x, содержащихся между 0 и k^{-2}. Если $k^2>1$, уравненіе

$$L_n^{(i)}(x)=0$$

будетъ имѣть всѣ n корней также вещественными, и всѣ они будутъ содержаться между 0 и 1.

4. Если функція съ двумя перемѣнными $f(x,y)$ разлагается въ рядъ вида

$$f(x,y)=\sum_{i,n} A_n^{(i)}\,L_n^{(i)}(x)\,L_n^{(i)}(y),$$

то, на основаніи (I), будемъ имѣть

$$(6)\quad A_n^{(i)} = \frac{\displaystyle\int_1^{\frac{1}{k^2}}\int_0^1 \frac{(y-x)\,L_n^{(i)}(y)\,L_n^{(i)}(x)\,f(x,y)}{y^\alpha(1-y)^\beta(1-k^2y)^\gamma\,x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}\,dx\,dy}{\displaystyle\int_1^{\frac{1}{k^2}}\int_0^1 \frac{(y-x)\,[L_n^{(i)}(y)\,L_n^{(i)}(x)]^2}{y^\alpha(1-y)^\beta(1-k^2y)^\gamma\,x^\alpha(1-x)^\beta(1-k^2x)^\gamma}\,dx\,dy}.$$

§ XXIV. Разложеніе функціи $L_n^{(i)}(x)\ L_n^{(i)}(y)$ въ рядъ по функціямъ подобнымъ функціямъ Лежандра.

1. Не трудно составить условіе достаточное и необходимое для того, чтобы цѣлая, раціональная функція $f(x, y)$ разлагалась въ рядъ вида

$$(1)\quad f(x,y) = A_0\,L_n^{(0)}(x)\,L_n^{(0)}(y) + A_1\,L_n^{(1)}(x)\,L_n^{(1)}(y) + \ldots + A_n\,L_n^{(n)}(x)\,L_n^{(n)}(y).$$

На самомъ дѣлѣ, изъ двухъ уравненій

$$x(1-x)(1-k^2x)\frac{d^2\,L_n^{(i)}(x)}{dx^2} + (ax^2+bx+c)\frac{d\,L_n^{(i)}(x)}{dx} + (qx+r_i)\,L_n^{(i)}(x) = 0,$$

$$y(1-y)(1-k^2y)\frac{d^2\,L_n^{(i)}(y)}{dy^2} + (ay^2+by+c)\frac{d\,L_n^{(i)}(y)}{dy} + (qy+r_i)\,L_n^{(i)}(y) = 0,$$

чрезъ исключеніе r_i, получаемъ

$$(2)\quad x(1-x)(1-k^2x)\frac{d^2\,L_n^{(i)}(x)\,L_n^{(i)}(y)}{dx^2} - y(1-y)(1-k^2y)\frac{d^2\,L_n^{(i)}(x)\,L_n^{(i)}(y)}{dy^2}$$
$$+ (ax^2+bx+c)\frac{d\,L_n^{(i)}(x)\,L_n^{(i)}(y)}{dx} - (ay^2+by+c)\frac{d\,L_n^{(i)}(x)\,L_n^{(i)}(y)}{dy} + q(x-y)\,L_n^{(i)}(x)\,L_n^{(i)}(y) = 0.$$

Значекъ i можетъ принимать всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до n, а такъ какъ предыдущее уравненіе есть линейное, не содержащее послѣдняго члена, то ему будетъ удовлетворять всякая цѣлая функція вида (1).

Обратно, цѣлая функція $f(x, y)$, удовлетворяющая уравненію (2), разлагается въ рядъ вида (1).

Дѣйствительно, такъ какъ (§ XXI (8))

$$q = -n(n-1)k^2 - na,$$

то цѣлая функція, удовлетворяющая уравненію (2) есть n-ой степени относительно x и n-ой степени относительно y; вслѣдствіе этого, функцію $f(x, y)$ можно представить такъ:

$$f(x, y) = \sum_i \varphi_i L_n^{(i)}(x), \quad (i=0, 1, \ldots n),$$

гдѣ φ_i изображаетъ цѣлую функцію n-ой степени. Внося въ уравненіе (2) на мѣсто $f(x, y)$ предыдущее выраженіе и приравнивая нулю коеффиціентъ при $L_n^{(i)}(x)$, получаемъ

$$y(1-y)(1-k^2y)\frac{d^2\varphi_i}{dy^2} + (ay^2+by+c)\frac{d\varphi_i}{dy} + (qy+r_i)\varphi_i = 0;$$

поэтому

$$\varphi_i = A_i L_n^{(i)}(y)$$

и слѣд.

$$f(x, y) = \sum_i A_i L_n^{(i)}(x) L_n^{(i)}(y).$$

Если цѣлая функція $f(x, y)$ не есть симметрическая относительно x и y, то, очевидно, она не можетъ разлагаться въ рядъ вида (1).

2. Принимая за независимыя перемѣнныя новыя двѣ величины z и t, связанныя съ x и y уравненіями

$$(3) \qquad \begin{cases} (1-t)z = \dfrac{k^2}{k'^2}(1-x)(y-1), \\ (1-t)(1-z) = \dfrac{1}{k'^2}(1-k^2x)(1-k^2y), \\ t = k^2xy, \end{cases}$$

гдѣ $k'^2 = 1 - k^2$, будемъ имѣть

$$\frac{dt}{dx} = k^2y, \quad \frac{dt}{dy} = k^2x, \quad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2t}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{k^2}{k'^2}\frac{(y-1)(1-k^2y)}{(1-k^2xy)^2}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{k^2}{k'^2}\frac{(1-x)(1-k^2x)}{(1-k^2xy)^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{2k^4}{k'^2}\frac{y(y-1)(1-k^2y)}{(1-k^2xy)^3}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{2k^4}{k'^2}\frac{x(1-x)(1-k^2x)}{(1-k^2xy)^3}.$$

Помощью этихъ выраженій изъ (2) находимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе съ частными производными, которому будетъ удовлетворять всякая цѣлая функція вида (1), разсматриваемая какъ функція отъ t и z:

$$(4)\qquad t(1-t)^2\frac{d^2f}{dt^2}+z(1-z)\frac{d^2f}{dz^2}+(1-t)[1-\alpha-(3-\alpha-\beta-\gamma)t]\frac{df}{dt}$$

$$+[1-\beta-(2-\beta-\gamma)z]\frac{df}{dz}+n(n+2-\alpha-\beta-\gamma)(1-t)f=0;$$

приэтомъ легко убѣдиться, что функція $f(x, y)$ вида (1) будетъ цѣлою относительно обѣихъ перемѣнныхъ t и z степени не выше n-ой относительно каждой изъ этихъ перемѣнныхъ.

Дѣлая въ (4) $f=T_m Z_m$ и предполагая, что T_m изображаетъ функцію отъ одной перемѣнной t, а Z_m—функцію отъ одной перемѣнной z, легко удостовѣриться что, если T_m и Z_m будутъ удовлетворять уравненіямъ

$$(5)\qquad t(1-t)^2\frac{d^2T_m}{dt^2}+(1-t)(1-\alpha-(3-\alpha-\beta-\gamma)t)\frac{dT_m}{dt}$$

$$+[n(n+2-\alpha-\beta-\gamma)(1-t)-m(m+1-\beta-\gamma)]T_m=0,$$

$$(6)\qquad z(1-z)\frac{d^2Z_m}{dz^2}+(1-\beta-(2-\beta-\gamma)z)\frac{dZ_m}{dz}+m(m+1-\beta-\gamma)Z_m=0,$$

то произведеніе $T_m Z_m$ будетъ частнымъ интеграломъ уравненія (4).

Съ другой стороны, допустивъ что m есть цѣлое положительное число, не превышающее n, обоимъ уравненіямъ (5) и (6) будутъ удовлетворять цѣлыя функціи n-ой и m-ой степеней.

На самомъ дѣлѣ, полагая

$$(7)\qquad T_m=(1-t)^m U_m,$$

изъ (5) получаемъ

$$(8)\qquad t(1-t)\frac{d^2U_m}{dt^2}+[1-\alpha+(\alpha+\beta+\gamma-3-2m)t]\frac{dU_m}{dt}$$

$$+(n-m)(n+m+2-\alpha-\beta-\gamma)U_m=0,$$

отсюда

$$(9)\qquad U_m\equiv t^\alpha(1-t)^{-2m-1+\beta+\gamma}\frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}t^{n-m-\alpha}(1-t)^{n+m+1-\beta-\gamma},$$

или, выражая U_m помощью гипергеометрическаго ряда,

$$(10)\qquad \begin{cases} U_m\equiv F(m-n,\ n+m+2-\alpha-\beta-\gamma,\ 1-\alpha,\ t),\\ U_m\equiv F(m-n,\ n+m+2-\alpha-\beta-\gamma,\ 2m+2-\beta-\gamma,1-t).\end{cases}$$

Изъ (6) получаемъ

$$(11)\qquad \begin{cases} Z_m \equiv z^{\beta}(1-z)^{\gamma}\dfrac{d^m}{dz^m}\, z^{m-\beta}(1-z)^{m-\gamma}, \\ Z_m \equiv F(-m,\ m+1-\beta-\gamma,\ 1-\beta,\ z), \\ Z_m \equiv F(-m,\ m+1-\beta-\gamma,\ 1-\gamma,\ (1-z). \end{cases}$$

Давая числу m поочередно значенія 0, 1, 2,..... n, получаемъ рядъ $n+1$ различныхъ цѣлыхъ функцій

$$T_0 Z_0,\ T_1 Z_1, \ldots\ldots T_n Z_n,$$

удовлетворяющихъ уравненію (4).

Съ другой стороны, видъ уравненія (4) показываетъ, что ему удовлетворяетъ также функція

$$(12)\qquad A_0 T_0 Z_0 + A_1 T_1 Z_1 + \ldots\ldots + A_n T_n Z_n,$$

гдѣ A_0, A_1,..... A_n означаютъ произвольныя постоянныя, и обратно, всякая цѣлая функція отъ перемѣнныхъ t и z, удовлетворяющая уравненію (4) можетъ быть представлена подъ видомъ (12).

Изъ всего вышесказаннаго слѣдуетъ, что *всякая цѣлая функція* $f(x, y)$ *вида* (1), *будучи разсматриваема какъ функція отъ* t и z, *разлагаетсь въ рядъ вида* (12).

§ XXV. Выводъ вспомогательныхъ формулъ.

1. Помощью уравненій (3) предыдущаго §-фа легко удостовѣриться, что

$$(1)\qquad \int_0^1 dt \int_0^1 f\, dz = \frac{k^4}{k'^2}\int_1^{\frac{1}{k^2}} dy \int_0^1 \frac{y-x}{1-k^2xy}\, f\, dx,$$

гдѣ f изображаетъ произвольную функцію отъ x и y.

Далѣе, изъ (9) предыдущаго §-фа слѣдуетъ, что $U_m(x)$ есть знаменателемъ $(n-m)$-ой степени подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи

$$\int^1 \frac{(1-t)^{2m+1-\beta-\gamma}\, dt}{(t-x)\, t^{\alpha}}$$

въ непрерывную дробь. Вслѣдствіе этого, предполагая что *коеффиціентъ у наивысшей степени перемѣнной* x *въ выраженіи функціи* U_m *равняется единицѣ*, будемъ имѣть (См. § XII, (IV))

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{2m+1-\beta-\gamma}\, U_m{}^2\, dt}{t^\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(n-m+1)\, \mathrm{B}(n-m-\alpha+1,\, n+m+2-\beta-\gamma)}{(n+m+2-\alpha-\beta-\gamma).....(2n+1-\alpha-\beta-\gamma)},$$

или

(2)
$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{1-\beta-\gamma}\, T_m{}^2\, dt}{t^\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(n-m+1)\, \mathrm{B}(n-m-\alpha+1,\, n+m+2-\beta-\gamma}{(n+m+2-\alpha-\beta-\gamma)......(2n+1-\alpha-\beta-\gamma)}$$

Такимъ же образомъ изъ уравненія (11) предыдущаго §-фа, предполагая что $Z_m(1)=1$, получаемъ

(3)
$$\int_0^1 \frac{Z_m{}^2\, dz}{z^\beta (1-z)^\gamma}$$

$$= \frac{m+1-\beta-\gamma}{2m+1-\beta-\gamma}\; \frac{\Gamma(m+1)\, \mathrm{B}(m+1-\beta,\, 1-\gamma)}{(1-\gamma)\ldots\ldots(m-\gamma)}$$

2. Изображая чрезъ Δf рядъ дѣйствій, произведенныхъ надъ произвольною функціею f отъ перемѣнной x, по формулѣ

$$\Delta f = x(1-x)(1-k^2x)\frac{d^2f}{dx^2} + (ax^2+bx+c)\frac{df}{dx} + qxf,$$

будемъ имѣть

$$\Delta T_m = x(1-x)(1-k^2x)\frac{d^2T_m(x)}{dx^2} + (ax^2+bx+c)\frac{d\,T_m(x)}{dx} + qx\,T_m(x),$$

отсюда, исключая $\dfrac{d^2T_m(x)}{dx^2}$ при помощи уравненія (5) предыдущаго §-фа и внося на мѣсто a, b, c, q ихъ значенія по формуламъ (6) и (8) § XXI, находимъ

(4)
$$\Delta\, T_m(x) = [k^2m(m+1-\beta-\gamma) - n(n+2-\alpha-\beta-\gamma)]\, T_m(x)$$

$$+(1-k^2)(1-\gamma)x\frac{d\,T_m(x)}{dx} + (1-k^2)m(m+1-\beta-\gamma)\frac{T_m(x)}{1-x}.$$

3. Не трудно удостовѣриться въ справедливости слѣдующихъ двухъ соотношеній между гипергеометрическими рядами

$$(5)\qquad F(\alpha, \beta, 2\gamma, x) = F(\alpha-1, \beta-1, 2(\gamma-1), x) - \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)-\gamma(\gamma-1)}{2\gamma(\gamma-1)}\, x\, F(\alpha, \beta, 2\gamma, x) + \frac{\alpha\,\beta\,(\alpha-2\gamma)(\beta-2\gamma)}{(2\gamma-1)\,2\gamma\,2\gamma\,(2\gamma+1)}\, x^2\, F(\alpha+1, \beta+1, 2(\gamma+1), x).$$

$$(6)\qquad (1-x)\frac{d\,F(\alpha, \beta, 2\gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{2\gamma} F(\alpha, \beta, 2\gamma, x) - \frac{\alpha\beta(\alpha-2\gamma)(\beta-2\gamma)}{2\gamma\,2\gamma\,(2\gamma+1)}\, x\, F(\alpha+1, \beta+1, 2(\gamma+1), x).$$

Изъ (5) получаемъ непосредственно

$$x\,\frac{F(\alpha-1, \beta-1, 2(\gamma-1), x^{-1})}{F(\alpha, \beta, 2\gamma, x^{-1})} = p_0 - \frac{k_0}{p_1 - \frac{k_1}{p_2 - \cdots}}\,.,$$

$$k_n = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha-2\gamma-n)(\beta-2\gamma-n)}{(2n+2\gamma-1)(2n+2\gamma)(2n+2\gamma)(2n+2\gamma+1)},$$

$$p_n = x + \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{2(n+\gamma)(n+\gamma-1)} - \frac{1}{2}.$$

Разложеніе это только по виду отличается отъ извѣстнаго Гауссова разложенія.

Изъ (6) и (5) получаемъ

$$(7)\qquad \frac{(1-x)\dfrac{d}{dx}x^m F(\alpha, \beta, 2\gamma, x)}{x^{m-1}} = m\,F(\alpha-1, \beta-1, 2(\gamma-1), x) + \left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma} - m\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+\gamma(\gamma-1)}{2\gamma(\gamma-1)}\right) x\, F(\alpha, \beta, 2\gamma, x) + \left(\frac{m}{2\gamma-1} - 1\right)\frac{\alpha\beta(\alpha-2\gamma)(\beta-2\gamma)}{2\gamma\,2\gamma\,(2\gamma+1)}\, x^2\, F(\alpha+1, \beta+1, 2(\gamma+1), x),$$

гдѣ m означаетъ произвольное число.

4. Такъ какъ по сдѣланному выше предположенію коеффиціентъ при x^{n-m} въ выраженіи функціи $U_m(x)$ равняется единицѣ, то, на основаніи (10) предыдущаго §-фа, имѣемъ

$$(8)\qquad \frac{(n+m+2-\alpha-\beta-\gamma)\ldots(2n+1-\alpha-\beta-\gamma)}{(2m+2-\beta-\gamma)\ldots\ldots(n+m+1-\beta-\gamma)}\, U_m(x) = F(m-n, n+m+2-\alpha-\beta-\gamma, 2m+2-\beta-\gamma, 1-x).$$

Полагая въ (5) $\alpha = m-n$, $\beta = n+m+2-\alpha-\beta-\gamma$, $2\gamma = 2m+2-\beta-\gamma$, затѣмъ подставляя $1-x$ на мѣсто x и принимая во вниманіе предыдущее выраженіе функціи $U_m(x)$, получаемъ

$$U_m(x) = \frac{(n+m+1-\beta-\gamma)(n+m+1-\alpha-\beta-\gamma)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+1-\beta-\gamma)} U_{m-1}(x)$$

$$+\left[\frac{(2n+2-\beta-\gamma)(2n+2-2\alpha-\beta-\gamma)}{2(2m+2-\beta-\gamma)(2m-\beta-\gamma)} + \frac{1}{2}\right](1-x)\, U_m(x),$$

$$+\frac{(n-m)(n-m-\alpha)}{(2m+1-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)}(1-x)^2\, U_{m+1}(x),$$

отсюда, умножая обѣ части на $(1-x)^{m-1}$ и принимая во вниманіе (7) предыдущаго §-фа,

$$\frac{T_m(x)}{1-x} = \frac{(n+m+1-\beta-\gamma)(n+m+1-\alpha-\beta-\gamma)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+1-\beta-\gamma)} T_{m-1}(x) \tag{9}$$

$$+\left[\frac{(2n+2-\beta-\gamma)(2n+2-2\alpha-\beta-\gamma)}{2(2m+2-\beta-\gamma)(2m-\beta-\gamma)} + \frac{1}{2}\right] T_m(x)$$

$$+\frac{(n-m)(n-m-\alpha)}{(2m+1-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)} T_{m+1}(x).$$

5. Полагая въ (7) $\alpha=m-n$, $\beta=n+m+2-\alpha-\beta-\gamma$, $2\gamma=2m+2-\beta-\gamma$, затѣмъ подставляя $1-x$ на мѣсто x и принимая во вниманіе (8), получаемъ

$$x\frac{d\, T_m(x)}{dx} = -\frac{m(n+m+1-\beta-\gamma)(n+m+1-\alpha-\beta-\gamma)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+1-\beta-\gamma)} T_{m-1}(x) \tag{10}$$

$$+\left[\frac{(n-m)(n+m+2-\alpha-\beta-\gamma)}{2m+2-\beta-\gamma} - \frac{m(2n+2-\beta-\gamma)(2n+2-2\alpha-\beta-\gamma)}{2(2m+2-\beta-\gamma)(2m-\beta-\gamma)}\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2}\right] T_m(x).$$

6. Внося въ (4) на мѣсто $\dfrac{T_m(x)}{1-x}$ и $x\dfrac{d\,T_m(x)}{dx}$ ихъ значенія по формуламъ (9) и (10), получаемъ

$$\Delta\, T_m = A_{m-1}\, T_{m-1} + A_m\, T_m + A_{m+1}\, T_{m+1}, \tag{11}$$

гдѣ

$$A_{m-1} = \frac{m(m-\beta)(n+m+1-\beta-\gamma)(n+m+1-\alpha-\beta-\gamma)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+1-\beta-\gamma)}(1-k^2),$$

$$A_m = [m(m+1-\beta-\gamma) - n(n+2-\alpha-\beta-\gamma]\ \frac{1+k^2}{2}$$

$$+(\gamma-\beta)\left[2-2\alpha-\beta-\gamma + \frac{(\gamma+\beta)(2n+2-\beta-\gamma)(2n+2-2\alpha-\beta-\gamma)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)}\right]\frac{1-k^2}{8},$$

$$A_{m+1} = \frac{(n-m)(n-m-\alpha)(m+1-\gamma)(m+1-\beta-\gamma)}{(2m+1-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)}(1-k^2).$$

§ XXVI. Соотношенія между коэффиціентами въ разложеніяхъ $n+1$ функцій T_0, $T_1 Z_1$,.... $T_n Z_n$ по функціямъ $L_n^{(0)}(x) L_n^{(0)}(y)$,... $L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y)$.

1. Полагая

$$T_r Z_r = \sum_i \alpha_r^{(i)} L_n^{(i)}(x) L_n^{(i)}(y), \quad (i=0, 1,...n),$$

будемъ имѣть

$$T_r T_s Z_r Z_s = \sum_{i,j} \alpha_r^{(i)} \alpha_s^{(j)} L_n^{(i)}(x) L_n^{(j)}(x) L_n^{(i)}(y) L_n^{(j)}(y),$$

гдѣ знакъ суммы во второй части распространяется на значенія

$$i = 0, 1,..... n; \; j = 0, 1,..... n.$$

Умножая обѣ части предыдущаго уравненія на

$$\frac{1-t}{t^\alpha (1-t)^{\beta+\gamma} z^\beta (1-z)^\gamma} = \frac{(1-k^2)^{\beta+\gamma}}{k^{2(\alpha+\beta)}} \frac{1-k^2 xy}{x^\alpha y^\alpha (1-x)^\beta (y-1)^\beta (1-k^2 x)^\gamma (1-k^2 y)^\gamma}$$

и, затѣмъ, интегрируя по формулѣ (1) предыдущаго §-фа, получаемъ

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{1-\beta-\gamma} T_r T_s dt}{t^\alpha} \int_0^1 \frac{Z_r Z_s dz}{z^\beta (1-z)^\gamma}$$

$$= \frac{k'^{2(\beta+\gamma-1)}}{k^{2(\alpha+\beta-2)}} \sum_{i,j} \alpha_r^{(i)} \alpha_s^{(j)} \int_1^{\frac{1}{k^2}} \int_0^1 \frac{(y-x) L_n^{(i)}(x) L_n^{(i)}(y) L_n^{(j)}(x) L_n^{(j)}(y) \, dx \, dy}{x^\alpha y^\alpha (1-x)^\beta (y-1)^\beta (1-k^2 x)^\gamma (1-k^2 y)^\gamma}$$

или, такъ какъ, при i не равномъ j,

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{L_n^{(i)}(y) L_n^{(j)}(y) \, dy}{y^\alpha (y-1)^\beta (1-k^2 y)^\gamma} \int_0^1 \frac{(y-x) L_n^{(i)}(x) L_n^{(j)}(x) \, dx}{x^\alpha (1-x)^\beta (1-k^2 x)^\gamma} = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{T_r T_s (1-t)^{1-\beta-\gamma} \, dt}{t^\alpha} \int_0^1 \frac{Z_r Z_s \, dz}{z^\beta (1-z)^\gamma}$$

$$= \frac{k'^{2(\beta+\gamma-1)}}{k^{2(\alpha+\beta-2)}} \sum_i \alpha_r^{(i)} \alpha_s^{(i)} \int_1^{\frac{1}{k^2}} \int_0^1 \frac{(y-x) L_n^{(i)}(x)^2 L_n^{(i)}(y)^2 \, dx \, dy}{x^\alpha y^\alpha (1-x)^\beta (y-1)^\beta (1-k^2 x)^\gamma (1-k^2 y)^\gamma}.$$

Значенiе интеграла

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}}\int_0^1 \frac{(y-x)\, L_n^{(i)}(x)^2\, L_n^{(i)}(y)^2\, dx\, dy}{x^\alpha y^\alpha (1-x)^\beta (y-1)^\beta (1-k^2x)^\gamma (1-k^2y)^\gamma},$$

которое очевидно не равняется нулю, зависитъ отъ произвольнаго постояннаго множителя функцiи $L_n^{(i)}(x)$, на счетъ котораго до сихъ поръ мы не дѣлали никакого предположенiя. Пользуясь этимъ, мы допустимъ, что *постоянному множителю функцiи* $L_n^{(i)}(x)$ *дано такое значенiе, при которомъ*

$$(1)\qquad \int_1^{\frac{1}{k^2}}\int_0^1 \frac{(y-x)\, L_n^{(i)}(x)^2\, L_n^{(i)}(y)^2\, dy\, dx}{x^\alpha y^\alpha (1-x)^\beta (y-1)^\beta (1-k^2x)^\gamma (1-k^2y)^\gamma} = \frac{k'^{2(1-\beta-\gamma)}}{k^{2(2-\alpha-\beta)}};$$

вслѣдствiе этого предыдущее уравненiе приметъ такой видъ:

$$\int_0^1 \frac{T_r\, T_s\, (1-t)^{1-\beta-\gamma}\, dt}{t^\alpha} \int_0^1 \frac{Z_r\, Z_s\, dz}{z^\beta\, (1-z)^\gamma} = \sum_i \alpha_r^{(i)}\, \alpha_s^{(i)}.$$

Значенiе первой части этого уравненiя равняется нулю, если r не равно s, ибо тогда

$$\int_0^1 \frac{Z_r\, Z_s\, dz}{z^\beta\, (1-z)^\gamma} = 0;$$

если же $s=r$, то ея значенiе, которое для сокращенiя будемъ изображать чрезъ λ_r^2, вычисляется помощiю формулъ (2) и (3) предыдущаго §-фа, которыя даютъ слѣдующее выраженiе для λ_r^2:

$$(\mathrm{I})\quad \lambda_r^2 = \frac{r+1-\beta-\gamma}{2r+1-\beta-\gamma}\, \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)\mathrm{B}(r+1-\beta,\, 1-\gamma)\mathrm{B}(n-r-\alpha+1\;\; n+r+2-\beta-\gamma)}{(1-\gamma)\ldots(r-\gamma)\,(n+r+2-\alpha-\beta-\gamma)\ldots(2n+1-\alpha-\beta-\gamma)}.$$

Слѣдовательно

$$\sum_i a_r^{(i)}\, a_s^{(i)} = 0,\quad \sum_i (a_r^{(i)})^2 = \lambda_r^2.$$

Если на мѣсто функцiй $T_0, \ldots T_n$ возьмемъ функцiи $\frac{1}{\lambda_0}\, T_0, \ldots \frac{1}{\lambda_n}\, T_n$ и положимъ

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{1}{\lambda_r}\, T_r\, Z_r = \sum_i a_r^{(i)}\, L_n^{(i)}(x)\, L_n^{(i)}(y),$$

то

$$a_r^{(i)} = \frac{1}{\lambda_r}\, \alpha_r^{(i)}$$

и слѣд.

(III)
$$\sum_i a_r^{(i)}\, a_s^{(i)} = 0, \quad \sum_i (a_r^{(i)})^2 = 1.$$

Уравненія эти показываютъ, что *числа*

$$\begin{matrix} a_0^{(0)}, \ldots\ldots a_0^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^{(0)}, \ldots\ldots a_n^{(n)} \end{matrix}$$

суть коеффиціентами линейной ортогональой подстановки съ $n+1$ *перемѣнными.*

2. Переходимъ къ выводу новыхъ соотношеній между коеффиціентами $a_0^{(0)}, \ldots a_n^{(n)}$.

Произведя надъ обѣими частями равенства (II) дѣйствіе Δ (см. § XXV) и принимая во вниманіе уравненіе

$$\Delta\, L_n^{(i)}(x) = -r_i\, L_n^{(i)}(x),$$

получаемъ

(2)
$$-\frac{1}{\lambda_r}\Delta\, T_r\, Z_r = \sum_i a_r^{(i)}\, r_i\, L_n^{(i)}(x)\, L_n^{(i)}(y).$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція $\Delta\, T_r\, Z_r$ есть цѣлая относительно x и y и разлагается въ рядъ вида

$$\Delta\, T_r\, Z_r = p_0\, T_0\, Z_0 + p_1\, T_1\, Z_1 + \ldots + p_n\, T_n\, Z_n.$$

Чтобъ опредѣлить постоянныя $p_0 \ldots p_n$, мы положимъ въ обѣихъ частяхъ предыдущаго уравненія $y = \frac{1}{k^2}$; тогда будемъ имѣть $t = x$, $z = 1$. и такъ какъ $Z_r(1) = 1$, то предыдущее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\Delta\, T_r(x) = p_0\, T_0(x) + p_1\, T_1(x) + \ldots + p_n\, T_n(x).$$

Сличая это разложеніе съ (11) предыдущаго §-фа и принимая въ соображеніе, что цѣлая функція степени не выше n-ой однимъ только образомъ разлагается въ рядъ по функціямъ $T_0, T_1, \ldots T_n$, находимъ

$$p_0 = p_1 = \ldots = p_{r-2} = p_{r+2} = \ldots = p_n = 0,$$

$$p_{r-1} = A_{r-1}.\ p_r = A_r,\ p_{r+1} = A_{r+1},$$

гдѣ A_{r-1}, A_r, A_{r+1} опредѣляются по формуламъ выведеннымъ въ концѣ предыдущаго §-фа, подставляя въ оныхъ r на мѣсто m. Внося полученныя значенія на мѣсто $p_0, \ldots p_n$ въ выраженіи функціи $\Delta\, T_r\, Z_r$, получаемъ

$$\Delta\ T_r Z_r = A_{r-1} T_{r-1} Z_{r-1} + A_r T_r Z_r + A_{r+1} T_{r+1} Z_{r+1};$$

вслѣдствіе этого уравненіе (2) можетъ быть написано такъ:

$$(3) \qquad -\frac{1}{\lambda_r} A_{r-1} T_{r-1} Z_{r-1} - \frac{1}{\lambda_r} A_r T_r Z_r - \frac{1}{\lambda_r} A_{r+1} T_{r+1} Z_{r+1}$$

$$= \sum_i a_r^{(i)} r_i L_n^{(i)}(x) L_n^{(i)}(y).$$

Умножая обѣ части (3) на

$$\frac{1}{\lambda_s} T_s Z_s = \sum a_s^{(i)} L_n^{(i)}(x) L_n^{(i)}(y),$$

затѣмъ умножая обѣ части полученнаго произведенія на

$$\frac{1-t}{t^\alpha (1-t)^{\beta+\gamma} z^\beta (1-z)^\gamma}$$

$$= \frac{k'^{2(\beta+\gamma)}}{k^{2(\alpha+\beta)}} \frac{1-k^2xy}{x^\alpha y^\alpha (1-x)^\beta (y-1)^\beta (1-k^2x)^\gamma (1-k^2y)^\gamma}$$

и интегрируя по формулѣ (1) предыдущаго §-фа, находимъ

$$(4) \qquad -\frac{A_{r-1}}{\lambda_r \lambda_s} \int_0^1 \frac{T_{r-1} T_s (1-t)^{1-\beta-\gamma} dt}{t^\alpha} \int_0^1 \frac{Z_{r-1} Z_s dz}{z^\beta (1-z)^\gamma}$$

$$-\frac{A_r}{\lambda_r \lambda_s} \int_0^1 \frac{T_r T_s (1-t)^{1-\beta-\gamma} dt}{t^\alpha} \int_0^1 \frac{Z_r Z_s dz}{z^\beta (1-z)^\gamma}$$

$$-\frac{A_{r+1}}{\lambda_r \lambda_s} \int_0^1 \frac{T_{r+1} T_s (1-t)^{1-\beta-\gamma} dt}{t^\alpha} \int_0^1 \frac{Z_{r+1} Z_s dz}{z^\beta (1-z)^\gamma} = \sum_i a_r^{(i)} a_s^{(i)} r_i.$$

Если s не равняется ни $r-1$, ни r, ни $r+1$, то первая часть предыдущаго уравненія равняется нулю и тогда

$$\sum_i a_r^{(i)} a_s^{(i)} r_i = 0.$$

Если же $s = r - 1$, то первая часть (4) равняется

$$-\frac{A_{r-1}}{\lambda_r \lambda_{r-1}} \lambda^2_{r-1} = -\frac{A_{r-1}\lambda_{r-1}}{\lambda_r}; \text{ слѣд.}$$

$$\sum_i a_{r-1}^{(i)} a_r^{(i)} r_i = -\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} A_{r-1}.$$

Полагая наконецъ $s = r$, первая часть (7) получаетъ значеніе равное — A_r, и слѣд.

$$\sum_i a_r^{(i)} a_r^{(i)} r_i = - A_r.$$

Внося въ предыдущія уравненія на мѣсто A_{r-1}, A_r, λ_{r-1}, λ_r, ихъ значенія по формуламъ (I) и (11) § XXV получаемъ

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \sum_i (a_r^{(i)})^2 r_i = (1+k^2)\, d_r + (1-k^2)\; e_r, \\[2ex] \sum_i a_{r-1}^{(i)}\; a_r^{(i)}\; r_i = -(1-k^2) f_r, \\[2ex] \sum_i a_r^{(i)}\; a_s^{(i)}\; r_i = 0, \end{cases}$$

гдѣ

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} d_r = \frac{1}{2}\, n\,(n+2-\alpha-\beta-\gamma) - \frac{1}{2}\, r\,(r+1-\beta-\gamma), \\[2ex] e_r = \frac{\beta-\gamma}{8}\Big[\, 2-2\alpha-\beta-\gamma+ \frac{(\beta+\gamma)(2n+2-\beta-\gamma)(2n+2-2\alpha-\beta-\gamma)}{(2r-\beta-\gamma)\,(2r+2-\beta-\gamma)}\Big], \\[2ex] f_r = \frac{1}{2r-\beta-\gamma} \times \\ \sqrt{\frac{r(r-\beta)(r-\gamma)(r-\beta-\gamma)(n-r+1)(n-r+1-\alpha)\,(n+r+1-\beta-\gamma)\,(n+r+1-\alpha-\beta-\gamma)}{(2r+1-\beta-\gamma)\,(2r-1-\beta-\gamma)}}. \end{cases}$$

§ XXVII. Разложеніе функцій T_0, $T_1\, Z_1, \ldots\; T_n\, Z_n$ въ ряды по функціямъ $L_n^{(0)}\,(x)\; L_n^{(0)}\,(y), \ldots\; L_n^{(n)}\,(x)\; L_n^{(n)}\,(y)$ приводится къ приведенію квадратичной формы съ $n+1$ перемѣнными, помощью ортогональной подстановки къ суммѣ $n+1$ полныхъ квадратовъ.

1. Квадратичная форма съ $n+1$ перемѣнными

$$(1) \qquad y = r_0\, y_0^{\,2} + r_1\, y_1^{\,2} + \;\ldots\; + r_n\, y_n^{\,2}$$

чрезъ подстановку

$$(2) \qquad y_i = a_0^{(i)}\; x_0 + a_1^{(i)}\; x_1\; \ldots\; + a_n^{(i)}\; x_n,$$

$$(i=0,\; 1, \ldots\, n),$$

переходитъ въ форму

$$X = \sum_{r,s}\; b_{r,s}\; x_r\; x_s,$$

гдѣ

$$b_{r,s} = \sum_i\; a_r^{(i)}\; a_s^{(i)}\; r_i;$$

слѣдовательно, на основаніи формулы (IV) предыдущаго §-фа,

$$b_{r,r} = d_r(1+k^2) + e_r(1-k^2),$$

$$b_{r-1,r} = -f_r(1-k^2),$$

$$b_{r,s} = 0,$$

и, вслѣдствіе этого,

$$X = \sum_i [d_i(1+k^2) + e_i(1-k^2)]\,x_i^2 - 2\,(1-k^2)\sum_j f_j x_{j-1} x_j, \tag{3}$$

$$(i = 0, 1, \ldots . n),$$

$$(j = 1, 2, \ldots . n).$$

Съ другой стороны, подстановка (2), по доказанному въ предыдущемъ §-фѣ, есть ортогональная, поэтому форма (3) чрезъ обратную подстановку

$$x_i = a_i^{(0)} y_0 + a_i^{(1)} y_1 + \ldots . + a_i^{(n)} y_n.$$

$$(i = 0, 1, \ldots . n),$$

перейдетъ въ форму (1).

Итакъ, *искомые каеффиціенты* $a_0^{(0)} \ldots . a_n^{(n)}$ *суть коеффиціентами линейной ортогональной подстановки, приводящей формулу* (3) *къ каноническому виду, а коеффиціентами при различныхъ членахъ приведенной формы суть корни* $r_0, r_1, \ldots . r_n$.

Это свойство коеффиціентовъ $a_0^{(0)}, \ldots . a_n^{(n)}$ приводитъ вопросъ о разложеніи функціи $L_n^{(i)}(x)\ L_n^{(i)}(y)$ въ рядѣ по функціямъ T_0, $T_1\ Z_1, \ldots .\ T_n\ Z_n$ къ весьма извѣстному алгебрическому вопросу.

2. Приравнивая нулю опредѣлитель квадратичной форму

$$X - r\,(x_0^2 + x_1^2 + \ldots . + x_n^2),$$

получаемъ уравненіе $(n+1)$-ой степени относительно r

$$\begin{vmatrix} (1+k^2)\,d_0 + (1-k^2)\,e_0 - r & -f_1(1-k^2) & 0 & 0 & 0 \\ -f_1(1-k^2) & (1+k^2)\,d_1 + (1-k^2)\,e_1 - r & -f_2(1-k^2) & \ldots & 0 \\ 0 & -f_2(1-k^2) & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & . & & \ldots & -f_n(1-k^2) \\ 0 & . & & & (1+k^2)d_n + (1-k^2)e_n - r \end{vmatrix} = 0 \tag{I}$$

корни котораго равняются $r_0, r_1, \ldots r_n$, такъ что уравненіе это только по виду отличается отъ (III) § XXI.

Изображая чрезъ $\varphi_0(r), \varphi_1(r), \ldots \varphi_n(r)$ коеффиціенты опредѣлителя (I), соотвѣтствующія элементамъ какой угодно строки или столбца, будемъ имѣть

(II) $$a_0^{(i)} : a_1^{(i)} : \ldots : a_n^{(i)} : 1$$

$$= \varphi_0(r_i) : \varphi_1(r_i) : \ldots : \varphi_n(r_i) : \sqrt{\varphi_0(r_i)^2 + \ldots + \varphi_n(r_i)^2}.$$

Ограничиваясь частнымъ случаемъ, когда $k^2 < 1$, что, впрочемъ, совершенно достаточно, мы покажемъ, какъ опредѣляется знакъ квадратнаго корня во второй части (II). Для этого, въ разложеніи

$$L_n^{(i)}(x)\, L_n^{(i)}(y) = \sum_r \frac{a_r^{(i)}}{\lambda_r} T_r Z_r, \ (r=0, 1, \ldots n),$$

мы положимъ $t=x=0$; тогда будемъ имѣть $z = \frac{k^2}{k'^2}(y-1)$; слѣд. сличая коэффиціенты у y^n въ обѣихъ частяхъ и изображая чрезъ $C_n^{(i)}$ и D_n коэффиціенты у наивысшихъ степеней перемѣнной въ выраженіяхъ функцій $L_n^{(i)}$ и Z_n, находимъ

$$L_n^{(i)}(0)\; C_n^{(i)} = \frac{a_n^{(i)}}{\lambda_n} D_n \frac{k^{2n}}{k'^{2n}},$$

а такъ какъ

$$(-1)^n L_n^{(i)}(0)\, C_n^{(i)} > 0, \ \ \lambda_n > 0, \ \ D_n > 0$$

то

$$(-1)^n \ a_n^{(i)} > 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *знакъ квадратнаго корня во второй части* (II) *одинаковъ со знакомъ* $(-1)^n \varphi_n(r_i)$.

3. Называя опредѣлитель, составляющій первую часть (I) чрезъ D_{n+1}, а чрезъ $D_n, D_{n-1}, \ldots D_2, D_1$ изображая опредѣлители, получаемые изъ D_{n+1} чрезъ сокращеніе послѣдняго столбца и послѣдней строки, двухъ послѣднихъ столбцовъ и двухъ послѣднихъ строкъ, и т. д., такъ что

$$D_1 = (1+k^2)\, d_0 + (1-k^2)\, e_0 - r,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} (1+k^2)\, d_0 + (1-k^2)\, e_0 - r & -f_1(1-k^2) \\ -f_1(1-k^2) & (1+k^2) d_1 + (1-k^2) e_1 - r \end{vmatrix},$$

и т. д., имѣемъ рядъ функцій

$$D_{n+1}, \ D_n, \ \ldots D_2, \ D_1, \ D_0 = 1,$$

обладающихъ свойствами функцій Штурма, и слѣд. дающихъ средство отдѣлять корни уравненія (I).

§ XXVIII. О новой группѣ функцій, подобныхъ функціямъ Ламэ. Опредѣленіе и основныя свойства.

1. Изображая чрезъ Q_n знаменатель n-ой степени подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи

$$(1)\qquad \varphi = \int_0^1 \frac{e^{-\alpha t}\,dt}{(t-x)\,t^\beta (1-t)^\gamma} + h\int_1^\infty \frac{e^{-\alpha t}\,dt}{(t-x)\,t^\beta (1-t)^\gamma}$$

въ непрерывную дробь, и принимая во вниманіе формулу (I), § VIII, будемъ имѣть

$$R_n = \mathrm{F}\,\varphi\,Q_n = \frac{e^{-\alpha x}\,Q_n(x)}{x^\beta (1-x)^\gamma}\int \frac{e^{\alpha x}(A+Bx)\,dx}{x^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\,Q_n(x)^2}.$$

Допустимъ теперь, что параметру h дано такое значеніе, при которомъ степень функціи R_n понижается еще на единицу; тогда $B=0$ и слѣд.

$$(2)\qquad R_n = A\frac{e^{-\alpha x}\,Q_n(x)}{x^\beta (1-x)^\gamma}\int \frac{e^{\alpha x}\,dx}{x^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\,Q_n(x)^2}.$$

Изъ формулы этой вытекаютъ непосредственно слѣдующія слѣдствія.

1) *Функція $Q_n(x)$ не обращается въ нуль ни при $x=0$, ни при $x=1$.*

2) *Функція $Q_n(x)$ не имѣетъ кратныхъ множителей.*

3) *Если a изображаетъ любой корень уравненія $Q_n(x)=0$, то*

$$(3)\qquad \underset{(x=a)}{\mathcal{E}} \frac{e^{\alpha x}}{x^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\,Q_n(x)^2} = 0.$$

Изъ уравненія (3) находимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ функція Q_n:

$$(\mathrm{I})\quad x(1-x)\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + [\alpha x^2 + (\beta+\gamma-\alpha-2)\,x + 1-\beta]\,\frac{d\,Q_n}{dx} - (n\alpha x - r)Q_n = 0,$$

гдѣ r означаетъ неизвѣстную постоянную.

2. Переходя къ опредѣленію неизвѣстной r, мы положимъ

$$Q_n = x^n + p_1\,x^{n-1} + \ldots + p_n$$

и приравнимъ нулю коеффиціенты при различныхъ степеняхъ перемѣнной x въ первой части (I); вслѣдствіе этого получаемъ рядъ $(n+1)$ уравненій съ $n+1$ неизвѣстными

$$
\text{(II)}\quad\begin{cases}
n(n+1+\alpha-\beta-\gamma)-r+\alpha p_1=0, \\
n(\beta-n)+[(n-1)(n+\alpha-\beta-\gamma)-r]\,p_1+2\alpha\,p_2=0, \\
(n-1)(\beta-n+1)\,p_1+[(n-2)(n+\alpha-\beta-\gamma-1)-r]\,p_2+3\alpha\,p_3=0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
(\beta-1)\,p_{n-1}-rp_n=0.
\end{cases}
$$

Отсюда, чрезъ исключеніе, получаемъ уравненіе съ одной неизвѣстной r, $(n+1)$-ой степени

$$
\text{(III)}\quad\begin{vmatrix}
n(n+1+\alpha-\beta-\gamma)-r & \alpha & 0 & \dots & 0 \\
n(\beta-n) & (n-1)(n+\alpha-\beta-\gamma)-r & 2\alpha & \dots & 0 \\
0 & (n-1)(\beta-n+1) & \cdot & \dots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \dots & n\alpha \\
0 & 0 & \dots & \beta-1 & -r
\end{vmatrix}=0.
$$

Каждому корню этого уравненія соотвѣтствуютъ значенія коэффиціентовъ p_1, p_2,...., которыя вычисляются при помощи уравненій (II). Двумъ различнымъ значеніямъ r соотвѣтствуютъ два различныя значенія коэффиціента p_1, и слѣд. двѣ различныя функціи Q_n.

3. Дискриминанъ уравненія (III) не обращается тожественно въ нуль, ибо корни этого уравненія, при $\alpha=0$, суть слѣдующіе:

$$n(n+1-\beta-\gamma),\ (n-1)(n-\beta-\gamma),\ (n-2)(n-\beta-\gamma-1),\dots\dots 0,$$

а такъ какъ, по предположенію, $\beta<1$ и $\gamma<1$, то всѣ они различны.

Цѣлыя функціи Q_n, соотвѣтствующія различнымъ корнямъ r_0, r_1, r_2,.... r_n уравненія (III) будемъ изображать чрезъ $M_n^{(0)}$, $M_n^{(1)}$,... $M_n^{(n)}$.

4. Подобно тому какъ показано было § XXII, легко удостовѣриться, что

$$
\text{(IV)}\qquad \int_0^1 \frac{M_n^{(i)}\,M_n^{(j)}\,e^{-\alpha x}\,dx}{x^\beta(1-x)^\gamma}=\int_1^\infty \frac{M_n^{(i)}\,M_n^{(j)}\,e^{-\alpha x}\,dx}{x^\beta(1-x)^\gamma}=0,\quad (i\lessgtr j).
$$

Отсюда же непосредственно выводимъ:

1) *Уравненіе* (III) *съ неизвѣстной* r *не имѣетъ мнимыхъ корней.*

2) *То же уравненіе* (III) *не имѣетъ кратныхъ корней.*

3) *Между* $n+1$ *функціями* $M_n^{(0)}$, $M_n^{(1)}$,.... $M_n^{(n)}$, *нѣтъ линейной зависимости.*

4) *Всякая цѣлая функція* $f(x)$ *степени не выше* n*-ой можетъ быть*

представлена подъ видомъ

$$f(x)=A_0\,M_n^{(0)}+A_1\,M_n^{(1)}+\dots A_n\,M_n^{(n)},$$

гдѣ

$$A_i=\frac{\displaystyle\int_0^1\frac{M_n^{(i)}\,e^{-\alpha x}\,f(x)\,dx}{x^\beta\,(1-x)^\gamma}}{\displaystyle\int_0^1\frac{(M_n^{(i)})^2\,e^{-\alpha x}\,dx}{x^\beta\,(1-x)^\gamma}}.$$

4. Кромѣ (IV) мы имѣемъ еще слѣдующую формулу

$$\text{(V)}\quad\int_1^\infty\int_0^1\frac{(y-x)\,M_n^{(i)}(x)\,M_n^{(i)}(y)\,M_m^{(i)}(x)\,M_m^{(j)}(y)\,e^{-\alpha(x+y)}\,dx\,dy}{x^\beta\,y^\beta\,(1-x)^\gamma\,(y-1)^\gamma}=0,$$

которая имѣетъ мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ значковъ m, n, i, j, за исключеніемъ того случая, когда $m=n$ и $i=j$. Если $f(x)$ есть цѣлая функція степени ниже n-ой, то

$$\text{(VI)}\quad\int_1^\infty\int_0^1\frac{(y-x)\,M_n^{(i)}(x)\,M_n^{(i)}(y)\,f(x)\,f(y)\,e^{-\alpha(x+y)}\,dx\,dy}{x^\beta\,y^\beta\,(1-x)^\gamma\,(y-1)^\gamma}=0,$$

Основываясь на этой формулѣ, легко показать, что всѣ корни уравненія $M_n^{(i)}(x)=0$ вещественны, положительны и неравны. Если функція съ двумя перемѣнными $f(x,\,y)$ разлагается въ рядъ вида

$$f(x,y)=\sum_{i,\,n}A_n^{(i)}\,M_n^{(i)}(x)\,M_n^{(i)}(y),$$

то

$$\text{(VII)}\quad A_n^{(i)}=\frac{\displaystyle\int_1^\infty\int_0^1\frac{(y-x)\,M_n^{(i)}(x)\,M_n^{(i)}(y)\,f(x,y)\,e^{-\alpha(x+y)}\,dx\,dy}{x^\beta\,y^\beta\,(1-x)^\gamma\,(y-1)^\gamma}}{\displaystyle\int_1^\infty\int_0^1\frac{(y-x)\,M_n^{(i)}(x)^2\,M_n^{(i)}(y)^2\,e^{-\alpha(x+y)}\,dx\,dy}{x^\beta\,y^\beta\,(1-x)^\gamma\,(y-1)^\gamma}}.$$

§ XXIX. Разложеніе функціи $M_n^{(i)}(x)\, M_n^{(i)}(y)$ въ рядъ по функціямъ подобнымъ функціямъ Лежандра.

Помощію уравненія (I) предыдущаго §-фа легко удостовѣриться, что цѣлая, раціональная функція вида

(1) $$f(x, y) = A_0\, M_n^{(0)}(x)\, M_n(y)^{(0)} + \ldots + A_n\, M_n^{(n)}(x)\, M_n^{(n)}(y)$$

удовлетворяетъ такому уравненію съ частными производными:

(2) $$\begin{cases} x(1-x)\dfrac{d^2 f}{dx^2} - y(1-y)\dfrac{d^2 f}{dy^2} + [\alpha x^2 + (\beta+\gamma-\alpha-2)\, x + 1 - \beta]\dfrac{df}{dx} \\ -[\alpha y^2 + (\beta+\gamma-\alpha-2)\; y + 1 - \beta]\dfrac{df}{dy} - n\alpha\,(x-y) f = 0, \end{cases}$$

и обратно.

Принимая теперь за независимыя перемѣнныя новыя двѣ величины t и z, связанныя съ x и y уравненіями

(3) $$\begin{cases} tz = xy, \\ t(1-z) = (1-x)(y-1), \\ t = x + y - 1, \end{cases}$$

изъ (2) получаемъ уравненіе

(4) $$t^2\frac{d^2 f}{dt^2} + z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2} - [\alpha t + \beta + \gamma - 2]\, t\frac{df}{dt}$$
$$+ [(\beta+\gamma-2)\, z + 1 - \beta]\frac{df}{dz} + n\alpha\, t f = 0,$$

которому будетъ удовлетворять функція вида (1), разсматриваемая какъ зависящая отъ t и z.

Съ другой стороны, не трудно удостовѣриться, что цѣлая, раціональная функція отъ перемѣнныхъ t и z, удовлетворяющая уравненію (4) можетъ быть представлена подъ видомъ

(5) $$B_0\, T_0\, Z_0 + B_1\, T_1\, Z_1 + \ldots + B_n\, T_n\, Z_n,$$

гдѣ $B_0, B_1, \ldots B_n$ суть величины постоянныя; функція T_m есть цѣлая, n-ой степени, зависитъ отъ одной перемѣнной t и опредѣляется уравненіемъ

(6) $$t^2\frac{d^2 T_m}{dt^2} - t(\alpha t + \beta + \gamma - 2)\frac{d\, T_m}{dt} + [n\alpha t - m(m+1-\beta-\gamma)\; T_m = 0;$$

наконецъ, функція Z_m есть цѣлая, m-ой степени, зависитъ отъ одной перемѣнной z и удовлетворяетъ уравненію

$$(7)\qquad z(1-z)\frac{d^2 Z_m}{dz^2}+[(\beta+\gamma-2)z+1-\beta]\frac{dZ_m}{dz}+m(m+1-\beta-\gamma)Z_m=0.$$

Изъ уравненія (6) находимъ

$$(8)\qquad T_m=(\alpha t)^m\,U_m,$$

гдѣ

$$(9)\qquad \begin{cases} U_m\equiv e^{\alpha t}\,t^{\beta+\gamma-2m-1}\,\dfrac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}\,e^{-\alpha t}\,t^{n+m+1-\beta-\gamma}, \\ U_m\equiv 1-\dfrac{n-m}{1}\,\dfrac{\alpha t}{2m+2-\beta-\gamma} \\ +\dfrac{(n-m)(n-m-1)}{1.2}\,\dfrac{(\alpha t)^2}{(2m+2-\beta-\gamma)(2m+3-\beta-\gamma)}-\ldots \\ +(-1)^{n-m}\,\dfrac{(\alpha t)^{n-m}}{(2m+2-\beta-\gamma)\ldots(n+m+1-\beta-\gamma)}, \end{cases}$$

а изъ уравненія (7) получаемъ (см. § XXIV, (6) и (7))

$$(10)\qquad \begin{cases} Z_m\equiv z^{\beta}(1-z)^{\gamma}\dfrac{d^m}{dz^m}\,z^{m-\beta}(1-z)^{m-\gamma}, \\ Z_m\equiv F(-m,\ m+1-\beta-\gamma,\ 1-\gamma,\ 1-z). \end{cases}$$

Принимая во вниманіе, что функція (1) есть цѣлая относительно перемѣнныхъ t и z, изъ вышесказаннаго вытекаетъ, что *функція* $M_n^{(i)}(x)$ $M_n^{(i)}(y)$ *разлагается въ рядъ вида* (5), *гдѣ* T_m и Z_m *опредѣляются по формуламъ* (8), (9) *и* (10).

Въ слѣдующихъ §-фахъ мы покажемъ, какъ опредѣляются коэффиціенты при различныхъ членахъ въ этомъ разложеніи.

§ XXX. Вспомогательныя формулы.

1. Изъ уравненій (3) предыдущаго §-фа получаемъ

$$(1)\qquad \int_0^\infty dt\int_0^1 f\,dz=\int_0^\infty dy\int_0^1\frac{(y-x)\,f\,dx}{x+y-1},$$

гдѣ f изображаетъ произвольную функцію. Далѣе, изъ (8) и (9) предыдущаго §-фа, принимая во вниманіе формулу (5) § XV, находимъ

$$(2)\qquad \int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t}\,T_m^2\,dt}{t^{\beta+\gamma-1}}=\alpha^{\beta+\gamma-2}\,\Gamma(n-m+1)\,\Gamma(n+m+2-\beta-\gamma);$$

приэтомъ мы предполагаемъ, что коеффиціентъ у t^n въ выраженіи функціи T_m равняется α^n, такъ что

$$(3)\qquad T_m = (\alpha t)^m \left[(\alpha t)^{n-m} - \frac{n-m}{1}(n+m+1-\beta-\gamma)(\alpha t)^{n-m-1}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)}{1.2}(n+m+1-\beta-\gamma)(n+m-\beta-\gamma)(\alpha t)^{n-m-2} - \ldots\right].$$

Относительно Z_m мы сдѣлаемъ предположеніе, что $Z_m(1)=1$; тогда (см. § XXV (3)).

$$(4)\qquad \int_0^1 \frac{Z_m^2\, dz}{z^\beta (1-z)^\gamma}$$

$$= \frac{m+1-\beta-\gamma}{2m+1-\beta-\gamma}\; \frac{\Gamma(m+1)\,\mathrm{B}(m+1-\beta,\ 1-\gamma)}{(1-\gamma)(2-\gamma)\ldots(m-\gamma)}.$$

2. Положивъ

$$(5)\qquad \Delta f = x(1-x)\frac{d^2 f}{dx^2} + [\alpha x^2 + (\beta+\gamma-\alpha-2)x + 1-\beta]\frac{df}{dx} - n\alpha x f,$$

изъ (6) предыдущаго §-фа получаемъ

$$\Delta\, T_m(x) = (\gamma-1)\frac{d\,T_m(x)}{dx} + m(m+1-\beta-\gamma)\frac{T_m}{x}$$

$$-[n\alpha + m(m+1-\beta-\gamma)]\,T_m.$$

Но при помощи формулъ (5) и (6) § XXV не трудно удостовѣриться, что

$$\frac{1}{\alpha x}T_m = -\frac{n+m+1-\beta-\gamma}{(2m-\beta-\gamma)(2m+1-\beta-\gamma)}\,T_{m-1}$$

$$+\frac{2n+2-\beta-\gamma}{(2m+2-\beta-\gamma)(2m-\beta-\gamma)}\,T_m$$

$$-\frac{n-m}{(2m+1-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)}\,T_{m+1},$$

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{d\,T_m}{dx} = -\frac{m(m+n+1-\beta-\gamma)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+1-\beta-\gamma)}\,T_{m-1},$$

$$+\frac{2m(m+1)-(\beta+\gamma)(2m-n)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)}\,T_m$$

$$+\frac{(n-m)(m+1-\beta-\gamma)}{(2m+1-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)}\,T_{m+1},$$

слѣдовательно

$$(6)\qquad \Delta\, T_m(x) = A_{m-1}\,T_{m-1} + A_m\,T_m + A_{m+1}\,T_{m+1},$$

гдѣ

$$(7)\quad \begin{cases} A_{m-1} = -\dfrac{m(m-\beta)(n+m+1-\beta-\gamma)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+1-\beta-\gamma)}\alpha, \\ A_m = -\Big[m(m+1-\beta-\gamma) + (2n+\beta-\gamma)\dfrac{\alpha}{4} \\ \qquad + \dfrac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)(2n+2-\beta-\gamma)}{(2m-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)}\dfrac{\alpha}{4}\Big], \\ A_{m+1} = -\dfrac{(n-m)(m+1-\beta-\gamma)(m-\gamma+1)}{(2m+1-\beta-\gamma)(2m+2-\beta-\gamma)}\alpha. \end{cases}$$

§ XXXI. Соотношенія между коеффиціентами въ разложеніяхъ $n+1$ функцій T_0, $T_1\ Z_1, \ldots\ T_n\ Z_n$ въ ряды по функціямъ $M_n^{(0)}(x)\ M_n^{(0)}(y), \ldots\ M_n^{(n)}(x)\ M_n^{(n)}(y)$. Слѣдствія.

1. Положимъ

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{1}{\lambda_r} T_r Z_r = \sum_i a_r^{(i)} M_n^{(i)}(x)\ M_n^{(i)}(y), \quad (i=0,1,\ldots n),$$

гдѣ

$$(\mathrm{II})\quad \lambda_r = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\alpha^{2-\beta-\gamma}}\ \frac{r+1-\beta-\gamma}{2r+1-\beta-\gamma}\ \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)\,\Gamma(r+1-\beta)\,\Gamma(n+r+2-\beta-\gamma)}{(1-\gamma)(2-\gamma)\ldots(r-\gamma)\quad \Gamma(r+2-\beta-\gamma)}.$$

Поступая съ уравненіемъ (I) совершенно такимъ же образомъ какъ показано было въ § XXVI, принимая во вниманіе формулы (1), (2), (4) предыдущаго §-фа и, кромѣ того, полагая, что произвольный коеффиціентъ въ выраженіи функціи $M_n^{(i)}(x)$ взятъ такъ, что

$$\int_1^\infty dy \int_0^1 \frac{(y-x)\,e^{-\alpha(x+y)}\,M_n^{(i)}(x)^2\,M_n^{(i)}(y)^2\,dx}{x^\beta\,y^\beta\,(1-x)^\gamma\,(y-1)^\gamma} = e^{-\alpha},$$

находимъ

$$(\mathrm{III})\qquad \sum_i a_r^{(i)}\,a_s^{(i)} = 0, \quad \sum (a_r^{(i)})^2 = 1.$$

Отсюда видно, что числа

$$\begin{matrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & \ldots\ldots\ldots & a_0^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & \ldots\ldots\ldots & a_n^{(n)} \end{matrix}$$

суть коеффиціентами линейной, ортогональной подстановки.

2. Произведя надъ обѣими частями равенства (I) рядъ дѣйствій, изображаемый нами чрезъ Δ (см. (5), предыдущій §) и принимая во вниманіе дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ функція $M_n^{(i)}(x)$, получаемъ

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda_r} \Delta\, T_r\, Z_r = - \sum_i a_r^{(i)}\, r_i\, M_n^{(i)}(x)\, M_n^{(i)}(y).$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{\lambda_r} \Delta\, T_r\, Z_r = p_0\, T_0 + p_1\, T_1\, Z_1 + \ldots + p_n\, T_n\, Z_n,$$

гдѣ p_0, p_1, ... суть постоянные коеффиціенты, Дѣлая въ обѣихъ частяхъ $y=1$, и слѣд. $t=x$, $z=1$, получаемъ

$$\frac{1}{\lambda_r} \Delta\, T_r(x) = p_0\, T_0(x) + p_1\, T_1(x) + \ldots + p_n\, T_n(x).$$

Сличая это равенство съ формулою (6) предыдущаго §-фа, находимъ

$$p_0 = p_1 = \ldots = p_{r-2} = p_{r+2} = \ldots p_n = 0,$$

$$p_{r-1} = \frac{1}{\lambda_r} A_{r-1},\ p_r = \frac{1}{\lambda_r} A_r,\ p_{r+1} = \frac{1}{\lambda_r} A_{r+1};$$

ибо всякая цѣлая, раціональная функція однимъ только образомъ разлагвется въ рядъ по функціямъ T_0, T_1, T_2, ... Итакъ, слѣд.

$$(2) \qquad \frac{1}{\lambda_r} \Delta\, T_r\, Z_r = \frac{A_{r-1}}{\lambda_r}\, T_{r-1}\, Z_{r-1} + \frac{A_r}{\lambda_r}\, T_r\, Z_r + \frac{A_{r+1}}{\lambda_r}\, T_{r+1}\, Z_{r+1}.$$

Изъ (1) и (2) получаемъ

$$(3) \qquad \frac{A_{r-1}}{\lambda_r}\, T_{r-1}\, Z_{r-1} + \frac{A_r}{\lambda_r}\, T_r\, Z_r + \frac{A_{r+1}}{\lambda_r}\, T_{r+1}\, Z_{r+1}$$

$$= - \sum_i a_r^{(i)}\, r_i\, M_n^{(i)}(x)\, M_n^{(i)}(y).$$

Изъ равенства этого, прибѣгая къ извѣстному пріему (см. § XXVI), получаемъ

$$(\mathrm{IV}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\textstyle\sum_i (a_r^{(i)})^2\, r_i = - A_r = f_r, \\ &\textstyle\sum_i a_{r-1}^{(i)}\, a_r^{(i)}\, r_i = - A_{r-1} \dfrac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} = \alpha g_r, \\ &\textstyle\sum_i a_r^{(i)}\, a_s^{(i)}\, r_i = 0, \end{aligned} \right.$$

гдѣ (см. (7) пред. § и (II))

$$
(\mathrm{V})\begin{cases} f_r = r(r+1-\beta-\gamma) + \dfrac{\alpha}{4}\left[2n+\beta-\gamma+\dfrac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)(2n+2-\beta-\gamma)}{(2r-\beta-\gamma)(2r+2-\beta-\gamma)}\right], \\ g_r = \dfrac{1}{2r-\beta-\gamma}\sqrt{\dfrac{r(r-\beta)(r-\gamma)(r-\beta-\gamma)(n-r+1)(n+r+1-\beta-\gamma)}{(2r-1-\beta-\gamma)(2r+1-\beta-\gamma)}}. \end{cases}
$$

3. Уравненія (IV) и (V) показываютъ, что квадратичная форма

$$
X = \sum_i f_i\, x_i^2 + 2\alpha \sum_j g_j\, x_{j-1}\, x_j, \quad \begin{matrix}(i=0,\ 1,\ldots n),\\ (j=1,\ 2,\ldots n),\end{matrix}
$$

помощью ортогональной подстановки

$$
x_i = \sum_r a_i^{(r)}\, y_r, \quad (r=0,\ 1,\ldots n),
$$

переходитъ въ форму

$$
Y = r_0\, y_0^2 + r_1\, y_1^2 + \ldots\ldots r_n\, y_n^2.
$$

Слѣдовательно, величины $r_0,\ r_1,\ldots r_n$ суть корни уравненія

$$
(\mathrm{VI})\quad \begin{vmatrix} f_0-r & \alpha g_1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \alpha g_1 & f_1-r & \alpha g_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha g_2 & f_2-r & \alpha g_3 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \alpha g_3 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & f_{n-1}-r & \alpha g_n \\ 0 & 0 & . & . & . & . & \alpha g_n & f_n-r \end{vmatrix} = 0,
$$

которое поэтому должно совпадать съ уравненіемъ (III) § XXVIII.

Называя чрезъ $\varphi_0,\ \varphi_1,\ldots \varphi_n$ коэффиціенты, соотвѣтствующіе элементамъ какой угодно строки или столбца опредѣлителя (VI), будемъ имѣть

$$
(\mathrm{VII})\quad a_0^{(i)} : a_1^{(i)} : \ldots : 1 = \varphi_0(r_i) : \varphi_1(r_i) : \ldots : \varphi_n(r_i) : \sqrt{\varphi_0(r_i)^2 + \ldots + \varphi_n(r_i)^2},
$$

$$
(i=0,\ 1,\ldots n).
$$

Чтобъ опредѣлить знакъ квадратнаго корня во второй части (VII) мы примемъ во вниманіе равенство

$$
M_n^{(i)}(x)\, M_n^{(i)}(y) = \sum_k \frac{a_k^{(i)}}{\lambda_k} Z_k\, T_k, \quad (k=0,\ 1,\ldots n)
$$

и. раздѣливъ обѣ части на y^n, положимъ затѣмъ $y=\infty$; тогда получимъ

$$\text{(VIII)} \qquad C_n^{(i)}\, M_n^{(i)}\,(x) = \alpha^n \sum_k \frac{a_k^{(i)}}{\lambda_k} Z_k\,(x), \quad (k=0, 1, \ldots n),$$

гдѣ $C_n^{(i)}$ изображаетъ коеффиціентъ у x^n въ выраженіи функціи $M_n^{(i)}\,(x)$.

Формула (VIII) даетъ разложеніе функціи $M_n^{(i)}\,(x)$ въ рядъ по функціямъ $Z_0, Z_1, \ldots . Z_n$. Сличая коеффиціенты у x^n въ обѣихъ частяхъ, находимъ

$$(C_n^{(i)})^2 = \alpha^n \frac{a_n^{(i)}}{\lambda_n} \frac{(n+1-\beta-\gamma)\ldots .(2n-\beta-\gamma)}{(1-\gamma)(2-\gamma)\ldots .(n-\gamma)},$$

или

$$(C_n^{(i)})^2 = \alpha^n \frac{\varphi_n\,(r_i)}{\lambda_n \sqrt{\varphi_0\,(r_i)^2 + \ldots . + \varphi_n\,(r_i)^2}} \frac{(n+1-\beta-\gamma)\ldots(2n-\beta-\gamma)}{(1-\gamma)(2-\gamma)\ldots(n-\gamma)}.$$

По этой формулѣ вычисляется $C_n^{(i)}$ и, кромѣ того, отсюда видно, что знакъ квадратнаго корня во второй части (VII) одинаковъ со знакомъ величины $\varphi_n\,(r_i)$.

4. Для уравненія (VI) легко составить рядъ функцій Штурма, поступая совершенно такимъ же образомъ, какъ показано было въ концѣ §-фа XXVII.

§ XXXII. О третьей группѣ функцій, подобныхъ функціямъ Ламэ.

1. Постараемся познакомиться еще съ одной группой функцій, аналогичныхъ функціямъ Ламэ, заслуживающихъ, между прочимъ, особеннаго вниманія по простотѣ соотношеній, существующихъ между этими функціями и нѣкоторыми функціями, подобными функціямъ Лежандра.

Допустивъ, что въ выраженіи

$$\text{(1)} \qquad \varphi = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\alpha t^2+\beta t}\, dt}{(t-x)\, t^\gamma} + h \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2+\beta t}\, dt}{(t-x)\, t^\gamma},$$

параметру h дано такое значеніе, при которомъ степень функціи *)

$$R_n = F\varphi\, Q_n$$

равняется $-(n+2)$, будемъ имѣть

$$\text{(2)} \qquad R_n = Ce^{-\alpha x^2+\beta x}\, x^{-\gamma}\, Q_n \int \frac{e^{\alpha x^2-\beta x}\, dx}{x^{1-\gamma}\, Q_n^2}.$$

Отсюда же непосредственно выводимъ, что:

1) *Уравненіе $Q_n\,(x)=0$ не имѣетъ кратныхъ корней.*

---

*) Q_n изображаетъ, какъ всегда, знаменатель n-ой степени подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи φ въ непрерывную дробь.

2) *Значеніе* $Q_n(0)$ *не равняется нулю.*

3) *Если* a *равняется одному изъ корней уравненія* $Q_n(x)=0$, *то*

$$(3)\qquad \underset{(x=a)}{\mathcal{E}} \frac{e^{\alpha x^2-\beta x}}{x^{1-\gamma}\, Q_n{}^2}=0.$$

При помощи уравненія (3) находимъ, что Q_n удовлетворяетъ уравненію

$$(\mathrm{I})\qquad x\frac{d^2 Q_n}{dx^2}-[2\alpha x^2-\beta x+\gamma-1]\frac{d\,Q_n}{dx}+(2n\alpha\, x+r)\,Q_n=0,$$

гдѣ r означаетъ неизвѣстную постоянную.

2. Переходя къ опредѣленію неизвѣстной r мы положимъ

$$Q_n=x^n+p_1\,x^{n-1}+\ldots+p_n;$$

при помощи уравненія (I) находимъ рядъ $(n+1)$ уравненій

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{array}{l} r+\beta n+2\alpha\,p_1=0,\\ n\,(n-\gamma)+[r+\beta\,(n-1)]\,p_1+2\,.\,2\alpha\,p_2=0,\\ (n-1)\,(n-1-\gamma)\,p_1+[r+\beta\,(n-2)]\,p_2+2\,.\,3\alpha\,p_3=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2\,(2-\gamma)\,p_{n-2}+[r+\beta]\,p_{n-1}+2\,n\alpha\,p_n=0,\\ \qquad(1-\gamma)\,p_{n-1}+r\,p_n=0. \end{array}\right.$$

Отсюда, исключая n неизвѣстныхъ $p_1, p_2, \ldots p_n$, получаемъ

$$(\mathrm{III})\qquad \left|\begin{array}{cccccc} n\beta+r & 2\alpha & 0 & 0\;.\;. & . & 0\\ n(n-\gamma) & (n-1)\,\beta+r & 2.2\alpha & 0\;.\;. & . & 0\\ 0 & (n-1)\,(n-\gamma-1) & (n-2)\,\beta+r & 2.3\alpha\;.\;. & . & 0\\ 0 & 0 & (n-2)\,(n-\gamma-2) & .\;.\;. & . & .\\ . & . & . & .\;.\;. & . & .\\ . & . & . & .\;.\;. & . & .\\ . & . & . & .\;.\;. & . & .\\ 0 & 0 & . & .\;.\;. & \beta+r & 2n\alpha\\ 0 & 0 & . & .\;.\;. & 1-\gamma & r \end{array}\right|=0.$$

Итакъ, опредѣленіе функціи Q_n приводится къ рѣшенію уравненія (III), $(n+1)$-ой степени. Такъ какъ, по предположенію, $\alpha>0$, $\gamma<1$, то всѣ элементы опредѣлителя (III), не лежащіе на діогонали, положительны. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ функціи

$$D_{r+1},\ D_r,\ D_{r-1},\ \ldots\ D_2,\ D_1,\ D_0=1,$$

гдѣ

$$D_1 = n\beta + r,\quad D_2 = \begin{vmatrix} n\beta + r & 2\alpha \\ n(n-\gamma) & (n-1)\beta + r \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} n\beta + r & 2\alpha & 0 \\ n(n-\gamma) & (n-1)\beta + r & 2.2\alpha \\ 0 & (n-1)(n-\gamma-1) & (n-2)\beta + r \end{vmatrix},$$

. . . . . и т. д. . . . . .

составляетъ рядъ функцій Штурма, служащихъ для отдѣленія корней уравненія (III). Приэтомъ мы убѣждаемся, что всѣ корни уравненія

$$D_{r+1} = 0,$$

т. е. уравненія (III) вещественны и неравны. $n+1$ корнямъ $r_0, r_1, \ldots r_n$ уравненія (III) соотвѣтствуетъ $n+1$ различныхъ функцій Q_n, коэффиціенты которыхъ вычисляются изъ уравненій (II). Эти функціи мы будемъ изображать чрезъ

$$N_n^{(0)},\ N_n^{(1)},\ \ldots\ N_n^{(n)}$$

и совокупность ихъ назовемъ третьей группой функцій Ламэ.

3. Помощью разсужденій подобныхъ тѣмъ, которыми мы пользовались въ § XXII, легко получаются слѣдующія формулы:

$$\text{(IV)}\quad \int_{-\infty}^{0} \frac{N_n^{(i)}\, N_n^{(j)}\, e^{-\alpha x^2 + \beta x}\, dx}{x^\gamma} = \int_{0}^{+\infty} \frac{N_n^{(i)}\, N_n^{(j)}\, e^{-\alpha x^2 + \beta x}\, dx}{x^\gamma} = 0$$

$$\text{(V)}\quad \int_0^{-\infty}\int_0^{\infty} \frac{(y-x)\, N_n^{(i)}(y)\, N_m^{(j)}(y)\, N_n^{(i)}(x)\, N_m^{(j)}(x)\, e^{-\alpha(x^2+y^2)+\beta(x+y)} dx\, dy}{(xy)^\gamma} = 0;$$

приэтомъ въ (IV) i не равняется j, а формула (V) перестаетъ имѣть мѣсто только тогда, когда одновременно $n=m$ и $i=j$. Изъ (IV) и (V) вытекаютъ слѣдствія:

1) *Между* $n+1$ *функціями* $N_n^{(0)}, \ldots N_n^{(n)}$ *нѣтъ линейной зависимости.*

2. *Всякую цѣлую функцію* $f(x)$ *степени не выше* n*-ой можно представить подъ видомъ*

$$f(x) = A_0\, N_n^{(0)}(x) + A_1\, N_n^{(1)}(x) + \ldots + A_n^{(n)}\, N^n(x),$$

гдѣ

$$\text{(VI)}\quad A_i = \frac{\int_0^\infty f(x)\, N_n^{(i)}(x)\, e^{-\alpha x^2 + \beta x}\, x^{-\gamma}\, dx}{\int_0^\infty N_n^{(i)}(x)^2\, e^{-\alpha x^2 + \beta x}\, x^{-\gamma}\, dx}.$$

3) *Если*

$$f(x, y) = \sum_{n,\, i} A_n^{(i)}\, N_n^{(i)}(x)\, N_n^{(i)}(y),$$

то

$$\text{(VII)} \qquad A_n = \frac{\int_0^{-\infty} dy \int_0^{\infty} (y-x)\, N_n^{(i)}(x)\, N_n^{(i)}(y)\, e^{-\alpha(x^2+y^2)+\beta(x+y)}\,(xy)^{-\gamma}\, dx}{\int_0^{-\infty} dy \int_0^{\infty} (y-x)\, N_n^{(i)}(x)^2 N_n^{(i)}(y)^2 e^{-\alpha(x^2+y^2)+\beta(x+y)}\,(xy)^{-\gamma}\, dx}.$$

§ XXXIII. Разложеніе функціи $N_n^{(i)}(x)\, N_n^{(i)}(y)$ въ рядъ по Лежандровымъ функціямъ.

1) Изъ уравненія (I) предыдущаго §-фа слѣдуетъ, что цѣлая функція $f(x, y)$ вида

$$(1) \qquad f(x, y) = A_0\, N_n^{(0)}(x)\, N_n^{(0)}(y) + \ldots + A_n\, N_n^{(n)}(x)\, N_n(y),$$

гдѣ A_0, $A_1, \ldots A_n$ суть произвольныя постоянныя, удовлетворяетъ такому дифференціальному уравненію съ частными производными:

$$(2) \qquad x\frac{d^2 f}{dx^2} - y\frac{d^2 f}{dy^2} - [2\alpha x^2 - \beta x + \gamma - 1]\frac{df}{dx}$$

$$+ [2\alpha y^2 - \beta y + \gamma - 1]\frac{df}{dy} + 2n\alpha\,(x-y)\, f = 0,$$

и обратно.

Полагая

$$(3) \qquad \begin{cases} z = -\,xy, \\ t = x + y \end{cases}$$

и принимая t и z за новыя независимыя перемѣнныя, уравненіе (2) преобразовывается въ слѣдующее:

$$(4) \qquad \frac{d^2 f}{dt^2} - z\frac{d^2 f}{dz^2} - (2\alpha t - \beta)\frac{df}{dt} - (2\alpha z + \gamma - 1)\frac{df}{dz} + 2n\alpha f = 0.$$

Такъ какъ функція (1) есть цѣлая относительно t и z и удовлетворяетъ уравненію (4), то постараемся прежде всего узнать общій видъ всѣхъ цѣлыхъ функцій отъ t и z, удовлетворяющихъ уравненію (4).

Ясно, что изображая чрезъ T_{n-m} цѣлую функцію отъ одной перемѣнной t, $(n-m)$-ой степени, удовлетворяющую уравненію

$$(5) \qquad \frac{d^2 T_{n-m}}{dt^2} - (2\alpha t - \beta)\frac{d\, T_{n-m}}{dt} + 2\,(n-m)\,\alpha\, T_{n-m} = 0,$$

а чрезъ Z_m функцію отъ одной перемѣнной z, m-ой степени удовлетворяющую уравненію

$$(6)\qquad z\frac{d^2Z_m}{dz^2}-(2\alpha z+\gamma-1)\frac{dZ_m}{dz}+2m\alpha\, Z_m=0,$$

гдѣ m есть число произвольно взятое изъ ряда $0, 1, 2, \ldots n$,—произведеніе

$$T_{n-m}\; Z_m$$

представитъ функцію отъ двухъ перемѣнныхъ t и z, удовлетворяющую уравненію (4). Но такъ какъ уравненіе (4) есть линейное безъ послѣдняго члена, то ему будетъ удовлетворять функція

$$(7)\qquad C_0\, T_n\, Z_0+C_1\, T_{n-1}\, Z_1+\ldots.+C_n\, T_0\, Z_n,$$

содержащая n произвольныхъ постоянныхъ $C_0, C_1, \ldots. C_n$.

Легко показать обратное, именно, что всякая цѣлая функція отъ t и z, удовлетворяющая уравненію (4), можетъ быть представлена подъ видомъ (7). Слѣдовательно, имѣемъ

$$(8)\qquad N_n^{(i)}(x)\, N_n^{(i)}(y)=\alpha_0\, T_n\, Z_0+\alpha_1\, T_{n-1}\, Z_1+\ldots.+\alpha_n\, T_0\, Z_n,$$

гдѣ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots\, \alpha_n$ суть постоянныя.

2. Изъ (5) получаемъ

$$(9)\qquad T_{n-m}\equiv e^{\alpha t^2-\beta t}\frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}e^{-\alpha t^2+\beta t},$$

или

$$(10)\qquad T_{n-m}\equiv\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{1}\frac{\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{n-m-2}}{(2\sqrt{\alpha})^2}$$

$$+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{1.2}\frac{\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{n-m-4}}{(2\sqrt{\alpha})^4}-\ldots.$$

Называя для простоты

$$(11)\qquad \Phi(\alpha,\beta,x)=1+\frac{\alpha}{1.\beta}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2\,\beta(\beta+1)}x^2+\ldots.,$$

будемъ имѣть, когда $n-m$—четное

$$(12)\qquad T_{n-m}\equiv\Phi\left[-\frac{n-m}{2},\ \frac{1}{2},\ \alpha\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right],$$

а когда $n-m$—нечетное

$$(13)\qquad T_{n-m}\equiv\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\Phi\left[-\frac{n-m-1}{2},\ \frac{3}{2},\ \alpha\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right].$$

Изъ (6) получаемъ

(14) $$Z_m \equiv z^{\gamma}\, e^{2\alpha z}\, \frac{d^m}{dz^m}\, z^{m-\gamma}\, e^{-2\alpha z},$$

или

(15) $$Z_m \equiv \Phi\,(-m,\ 1-\gamma,\ 2\alpha z),$$

(16) $$Z_m \equiv (2\alpha z)^m - \frac{m}{1}(m-\gamma)(2\alpha z)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,2}(m-\gamma)(m-\gamma-1)(2\alpha z)^{m-2}$$

$$- \ldots\ldots + (-1)^m\,(m-\gamma)\,(m-\gamma-1)\ldots.(1-\gamma).$$

§ XXXIV. Вспомогательныя формулы.

1. Изъ уравненій (3) предыдущаго §-фа получаемъ

(1) $$\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} f\,dt = \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{0} (y-x)\,f\,dx,$$

гдѣ f означаетъ произвольную функцію. Далѣе, принимая во вниманіе выраженія (9) и (14) предыдущаго §-фа, при помощи формулъ (5) § XV и (4) § XVII не трудно удостовѣриться въ справедливости двухъ слѣдующихъ формулъ:

(2) $$\int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha z}\, Z^2{}_m}{z^{\gamma}}\, dz = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma\,(1-\gamma)}{(2\alpha)^{1-\gamma}\,(1-\gamma)\ldots.(m-\gamma)},$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2+\beta t}\; T^2{}_{n-m}\, dt = 2^{n-m} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \Gamma(n-m+1)\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}};$$

приэтомъ мы предположили, что постоянные множители въ выраженіяхъ функцій T_{n-m} и Z_m взяты такъ, что коеффиціентъ у t^{n-m} въ выраженіи функціи T_{n-m} равняется $(2\sqrt{\alpha})^{n-m}$, а $Z_m\,(0) = 1$, вслѣдствіе чего (см. (10) и (15) пред. §).

(4) $$T_{n-m} = \left(2\sqrt{\alpha}\,t - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)^{n-m} - \frac{(n-m)\,(n-m-1)}{1}\left(2\sqrt{\alpha}\,t - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)^{n-m-2}$$

$$+ \frac{(n-m)\,(n-m-1)\,(n-m-2)\,(n-m-3)}{1.2}\left(2\sqrt{\alpha}\,t - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)^{n-m-4} - \ldots$$

(5) $$Z_m = 1 - \frac{m}{1.\,(1-\gamma)}\,2\alpha z + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2.\,(1-\gamma)\,(2-\gamma)}\,(2\alpha z)^2 - \ldots.$$

2. Положивъ

(6) $$\Delta f = x\frac{d^2f}{dx^2} - (2\alpha x^2 - \beta x + \gamma - 1)\frac{df}{dx} + 2n\alpha\, xf,$$

будемъ имѣть

$$\Delta\, T_{n-m}(x) = (1-\gamma)\frac{d\,T_{n-m}(x)}{dx} + 2m\alpha\, x\, T_{n-m}(x).$$

Но

$$\frac{d\,T_{n-m}(x)}{dx} = 2\,(n-m)\sqrt{\alpha}\; T_{n-m-1}(x),$$

$$T_{n-m+1}(x) = 2\sqrt{\alpha}\left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right) T_{n-m}(x) - 2\,(n-m)\; T_{n-m-1}(x);$$

вслѣдствіе этого

(7) $$\Delta\, T_{n-m}(x) = m\sqrt{\alpha}\; T_{n-m+1}(x) + m\beta\; T_{n-m}(x)$$
$$+ 2\,(n-m)(m+1-\gamma)\sqrt{\alpha}\; T_{n-m-1}(x).$$

§ XXXV. Соотношенія между коеффиціентами въ разложеніяхъ функцій $T_0 Z_n$, $T_1 Z_{n-1}, \ldots.\ T_n Z_0$ въ ряды по функціямъ $N_n^{(0)}(x)\, N_n^{(0)}(y), \ldots.\ N_n^{(n)}(x)\, N_n^{(n)}(y)$. Слѣдствія.

1. Принимая во вниманіе разложеніе

(1) $$\frac{1}{\lambda_m}\, T_{n-m} Z_m = \sum_i a^{(i)}{}_m\, N_n^{(i)}(x)\, N_n^{(i)}(x),$$

гдѣ

$$\lambda^2{}_m = 2^{n-m}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\, \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n-m+1)\,\Gamma(1-\gamma)}{(2\alpha)^{1-\gamma}(1-\gamma)(2-\gamma)\ldots..(m-\gamma)},$$

мы допустимъ, что постоянный коеффиціентъ въ выраженіи функціи $N_n^{(i)}(x)$ взятъ такъ, что

(2) $$\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\alpha(x^2+y^2)+\beta(x+y)}\,(y-x)\, N_n^{(i)}(x)^2\, N_n^{(i)}(y)^2}{(-xy)^\gamma}\, dx = 1;$$

тогда, при помощи вспомогательныхъ формулъ, выведенныхъ въ предыдущемъ §-фѣ, легко удостовѣриться, что

(I) $$\begin{cases} \sum_i a_m^{(i)}\, a_k^{(i)} = 0, \\ \sum_i (a_m^{(i)})^2 = 1. \end{cases}$$

Слѣдовательно, числа

$$a_0^{(0)}, \dots\dots\dots a_0^{(n)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n^{(0)}, \dots\dots\dots a_n^{(n)}.$$

суть коеффиціентами линейной ортогональной подстановки.

2. Изъ уравненія (1), при помощи формулы (7) предыдущаго §-фа, получаемъ

$$\frac{m\sqrt{\alpha}}{\lambda_m} T_{n-m+1} Z_{m-1} + \frac{m\beta}{\lambda_m} T_{n-m} Z_m$$
$$+ \frac{2(n-m)(m+1-\gamma)\sqrt{\alpha}}{\lambda_m} T_{n-m-1} Z_{m+1}$$
$$= - \sum_i a_m^{(i)} r_i N_n^{(i)}(x) N_n^{(i)}(y).$$

Отсюда же получаемъ

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \sum\limits_i (a_m^{(i)})^2 r_i = - m\beta, \\ \sum\limits_i a_{m-1}^{(i)} a_m^{(i)} r_i = - \sqrt{2m(m-\gamma)(n-m+1)\alpha}, \\ \sum\limits_i a_m^{(i)} a_k^{(i)} r_i = 0 \end{cases}$$

Соотношенія эти показываютъ, что квадратичная форма

$$X = - \sum_i m\beta\, x_i^2 - 2 \sum_j \sqrt{2j(j-\gamma)(n-j+1)\alpha}\; x_{j-1} x_j$$
$$(i = 0, 1, \dots n),$$
$$(j = 1, 2, \dots n),$$

помощью ортогональной подстановки

$$x_i = a_i^{(0)} y_0 + a_i^{(1)} y_1 + \dots + a_i^{(n)} y_n,$$
$$(i = 0, 1, \dots n),$$

переходитъ въ форму

$$Y = r_0 y_0^2 + r_1 y_1^2 + \dots + r_n y_n^2.$$

Слѣдовательно, коеффиціенты $r_0, r_1, \dots r_n$ суть корнями уравненія

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} r & \sqrt{2(1-\gamma)n\alpha} & 0 & . \; . & 0 \\ \sqrt{2(1-\gamma)n\alpha} & \beta+r & \sqrt{4(2-\gamma)(n-1)\alpha} & . \; . & 0 \\ 0 & \sqrt{4(2-\gamma)(n-1)\alpha} & 2\beta+r & . \; . & . \\ . & . & . & . \; . & . \\ . & . & . & . \; . & . \\ 0 & 0 & . & . & n\beta+r \end{vmatrix} = 0.$$

Изображая чрезъ $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ коеффиціенты, соотвѣтствующіе элементамъ произвольной строки или столбца предыдущаго опредѣлителя, будемъ имѣть

$$\text{(IV)} \quad a_0^{(i)} : a_1^{(i)} : \ldots : a_n^{(i)} : 1 = \varphi_0(r_i) : \varphi_1(r_i) : \ldots : \varphi_n(r_i) : \sqrt{\varphi_0(r_i)^2 + \ldots + \varphi_n(r_i)^2}.$$

Чтобъ опредѣлить знакъ у квадратнаго корня во второй части (IV), мы возьмемъ равенство

$$N_n^{(i)}(x)\, N_n^{(i)}(y) = \sum \frac{a_m^{(i)}}{\lambda_m} T_{n-m} Z_m,$$

$$(m = 0,\ 1, \ldots n),$$

и раздѣливъ обѣ его части на y^n, положимъ затѣмъ $y = \infty$; тогда будемъ имѣть

$$\lim \frac{t}{y} = 1, \quad \lim \frac{z}{y} = -x,$$

и слѣд.

$$\text{(V)} \qquad C_n^{(i)} N_n^{(i)}(x) = 2^n \sum_m \frac{a_m^{(i)}}{\lambda_m} \frac{\alpha^{\frac{n+m}{2}}}{(1-\gamma)\ldots(m-\gamma)} x^m,$$

гдѣ $C_n^{(i)}$ изображаетъ коеффиціентъ у x^n въ выраженіи функціи $N_n^{(i)}(x)$.

Сличая коеффиціенты у x^n въ обѣихъ частяхъ предыдущей формулы (V), находимъ

$$(C_n^{(i)})^2 = 2^n \frac{a_n^{(i)}}{\lambda_n} \frac{\alpha^n}{(1-\gamma)\ldots(n-\gamma)},$$

или

$$\text{(VI)} \qquad (C_n^{i})^2 = 2^n \frac{\alpha^n}{\lambda_n (1-\gamma)\ldots(n-\gamma)} \frac{\varphi_n(r_i)}{\sqrt{\varphi_0(r_i)^2 + \ldots + \varphi_n(r_i)^2}}.$$

Формула эта, дающая возможность вычислить значеніе $C_n^{(i)}$, показываетъ, что знакъ квадратнаго корня во второй части (IV) одинаковъ со знакомъ $\varphi_n(r_i)$.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Страница.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
6	6 св.	$l-x$	$t-x$
7	2 сн.	$\int \ldots = \int$	$\int \ldots + \int$
11	10 сн.	$\sqrt{}x$	$\sqrt{x}$
13	2 св.	$+\frac{2}{\pi}$	$=\frac{2}{\pi}$
16	6 сн.	$t-x$	$t+x$
23	2 св.	t^{n+1}	t^{n-1}
23	8 св.	равнястся	равняется
39	4 св.	x^2	$-x^2$
54	6 св.	$(1+z)$	$(1+z)^\beta$
56	7 св.	2_n	2^n
63	1 сн.	x^β	$x^{\beta+n}$
92	15 св.	$L_n^{(1)}, \ldots$	$L_n^{(0)}, L_n^{(1)}, \ldots$
