GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

Erster Artikel.

Über die philosophische Bedeutung der Fragen, die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen

von Federigo Enriques in Bologna.

In diesem Artikel beabsichtigen wir, das Interesse zu beleuchten, das die auf die Prinzipien der Geometrie bezüglichen Fragen für die mit ihnen in Verbindung stehenden Probleme philosophischen und psychologischen Charakters darbieten. Indessen werden wir diese Erörterungen auf die leichter verständlichen beschränken, indem wir für eine tiefer eindringende Behandlung des Themas und eine ausführlichere Darlegung unserer Ideen auf nachstehende unserer Arbeiten verweisen:

„*Prinzipien der Geometrie*“, Artikel A, B_1 in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften,

„*Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria*“ in Rivista filosofica di Pavia 1901,

„*Problemi della Scienza*“ (cap. III, IV). Bologna, Zanichelli 1906.

§ 1. Die empirischen Grundlagen der Geometrie. Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den Bereich des geometrischen Wissens und stellen wir mit ihm das physikalische Wissen in Vergleich.

Man unterbreite einer Person, die keine Idee von den Methoden der mathematischen Beweisführung besitzt, die beiden Sätze: a) In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten, b) beim Fall der Körper sind die Geschwindigkeiten den Zeiten proportional.

Die vorausgesetzte Person wird die Richtigkeit der beiden Sätze durch Erfahrung nachzuweisen suchen, indem sie bei beiden im wesentlichen in derselben Weise vorgeht. Sie wird z. B. im ersten Falle auf Zerlegung der Figur oder auf den Gebrauch von Instrumenten zur Messung von Flächen zurückgehen können, im zweiten Falle auf die Atwoodsche Fallmaschine oder auf die Galileische Fallrinne.

www.rcin.org.pl

In dieser Art festgestellt, scheinen die beiden Sätze in gleicher Weise zwei physikalische Wahrheiten auszudrücken, uns enthüllt durch die Erfahrung oder durch Sinneswahrnehmungen, die ihrerseits durch Instrumente unterstützt und korrigiert werden.

Aber für den, der eine Idee vom Wesen der Mathematik besitzt, erscheinen die Dinge verschieden. Der experimentelle Beweis des Satzes a) erscheint nicht ausreichend, wenn man für ihn den mathematischen Beweis verlangt, während es unmöglich erscheint, dieselbe Forderung bezüglich des Satzes b) zu stellen.

Demgemäß erhebt sich die Frage: Gibt es eine der physikalischen Sicherheit überlegene mathematische Sicherheit, da das, was dem Physiker streng bewiesen erscheint, dem Mathematiker sich noch als unsicher darstellt wie ein noch zu lösendes Problem? Und woher wird der zweite diese höhere Sicherheit erlangen, die dem ersten zu erreichen nicht möglich ist?

Um diese Fragen zu beantworten, ist es zweckmäßig, zu prüfen, worin das Verfahren der mathematischen Beweisführung besteht.

Der Mathematiker, dem eine Frage vorgelegt wird, besitzt schon einige voraufgehende Kenntnisse; sie beziehen sich auf Eigenschaften, die er in dem Augenblick ohne Erörterung für begründet ansieht; und seine Art des Vorgehens ist nur eine logische Ableitung neuer Folgerungen aus bekannten Prämissen. Sein Verfahren ist im wesentlichen ein Verfahren der Reduktion.

Auch in der Beweisführung des Physikers handelt es sich um eine Zurückführung auf bekannte Dinge; der Gebrauch eines komplizierteren Instruments und die Ausdeutung der Erfahrungen, zu denen es führt, ist an einen geistigen Prozeß gebunden, der sich auf den Gebrauch einfacherer Instrumente und auf die schon bekannte Erklärung der bezüglichen Erfahrungen gründet; nur ist dieser geistige Prozeß nicht mehr rein logisch, sondern er ist auch empirisch, insofern er aus den Sinneswahrnehmungen neue Elemente entnimmt.

Hierauf nun beruht der ganze Unterschied und die ganze Überlegenheit der mathematischen Methode. Jede Sinneswahrnehmung schließt etwas Unsicheres oder nicht voll Bestimmtes in sich, so daß die physikalische Reduktion in bezug auf die Prämissen ein gewisses Element der Unsicherheit in sich aufzunehmen scheint. Im Gegensatz hierzu erscheint dagegen die mathematische Reduktion als vollkommen, in der Weise, daß man den neuen Folgerungen genau denselben Grad der Sicherheit zuschreibt, der den Prämissen zugebilligt ist.

Aber wir wollen den wesentlichen Umstand nicht außer acht lassen, daß die mathematische und die physikalische Beweisführung nur

www.rcin.org.pl

zwei verschiedene Verfahrungsweisen der Reduktion sind, gegründet auf einige bekannte Daten.

Worauf stützt sich nun die Kenntnis dieser Daten? Im allgemeinen auf ein analoges Verfahren der Reduktion, das uns Schritt für Schritt zu immer einfacheren Daten führt.

Aber wenn auch diese Reduktion in gewisser Weise als geschichtlich unbegrenzt erscheinen kann, so trifft man doch mindestens praktisch auf ursprüngliche (primitive) Daten, die eben sowohl von dem Mathematiker wie von dem Physiker als Grundlage für allgemeine Erkenntnisse und für uranfängliche (elementare) Erfahrungen angenommen werden.

Im großen und ganzen erscheinen die primitiven Daten der Geometrie nicht in anderer Weise begründet als diejenigen der Physik. Der geschichtliche Wiederaufbau unserer Wissenschaft hat klargelegt, daß die Geometrie, bevor sie das wissenschaftliche Stadium erreichte, ein empirisches Stadium durchmachte, in dem die Fortschritte Frucht von Beobachtungen und Erfahrungen waren.

Bei vielen Völkern ist man über dies empirische Stadium nicht hinausgegangen; aber vor allem von den Griechen wurde später die Entwicklung einer wissenschaftlichen Geometrie geschaffen, in der die Lehren als Folgerungen von anderen abgeleitet wurden, die ohne Veranstaltung eines zugehörigen Experiments für die Anschauung als unmittelbar einleuchtend erscheinen. Und hier ist zu bemerken, daß eine ganz analoge wissenschaftliche Entwicklung sich in der modernen Physik und besonders in der Mechanik darbietet. Demgemäß findet die rein logische und mathematische Beweisführung auch im Studium der physikalischen Erscheinungen eine Stätte, insbesondere dort, wo man einen wohl bestimmten Zusammenhang mit den unmittelbarer einleuchtenden Prinzipien der Wissenschaft von der Bewegung besitzt.

§ 2. Erfahrung und Anschauung. Wenn eine geometrische oder mechanische Wahrheit, anstatt durch die Erfahrung bestätigt zu sein, aus der Anschauung hergeleitet wird, so hat man den Eindruck, daß sie eine sichere Grundlage hat. Es besteht die Zuversicht, daß die fortlaufenden Erfahrungen, miteinander verglichen, unter Elimination gewisser Beziehungen vermöge Abstraktion, eine immer schärfere Bestätigung der Eigenschaft liefern müssen, die man im Auge hat.

Ist nun das Ergebnis dieser Erfahrungen irgend etwas a priori Notwendiges? Eine derartige Ansicht, die, wie man weiß, von Kant vertreten worden ist, erscheint heutigen Tages überwunden. In der

www.rcin.org.pl

Tat zeigt eine kritische Zergliederung dieser Frage, daß die Anschauung nichts anderes ist als das Produkt einer psychologischen Bearbeitung von Erfahrungen, die idealisiert und gedeutet sind gemäß der logischen Struktur unseres Geistes, welche ihrerseits sich in einem dem bewußten Denken vorangehenden Stadium gebildet hat.

Demgemäß drückt die Anschauung in klarer und bestimmter Weise die Beziehungen gewisser Vorstellungen zueinander aus; aber insofern sie die genaue Beziehung der Vorstellung zur Außenwelt betrifft, kann sie uns nicht eine größere Sicherheit geben als eine Summe geschichtlicher Erfahrungen; demgemäß kann schließlich eine Erfahrung, die bewußtermaßen bis zu einem angemessenen Grade der Annäherung fortgeführt wird, in gewissen Fällen die Anschauung selbst übertreffen oder sie korrigieren.

Diese Ansicht entspringt der Überlegung, daß die geistigen Prozesse, vermittels deren die physikalischen Daten herausgearbeitet werden, und die Gesetze, die sie beherrschen, nichts Notwendiges in sich schließen können, das ihnen in Wirklichkeit entsprechen müßte, außerhalb des Subjekts.

Diese Bemerkungen führen dazu, als zwei Gegenstände besonderer Untersuchung zu betrachten:

1. den anschaulichen Raum, das ist die Vorstellung, die wir zur Darstellung gewisser räumlicher Beziehungen oder der Lage der Körper, vermöge einer systematischen Abstraktion von anderen physikalischen Eigenschaften, in unserem Geiste schon vorgebildet finden,

2. den physikalischen Raum, das ist die Gesamtheit derjenigen Beziehungen, welche sich aus einer Erfahrung über die Körper erzielen läßt, die in einer bestimmten Ordnung der Annäherung unbegrenzt fortgeführt werden kann.

Zum Zweck der Gegenüberstellung dieser beiden Arten, die Geometrie zu betrachten, werden wir noch andere Überlegungen weiter entwickeln. Hier wollen wir als ein Mittel, die physikalische Untersuchung zu vertiefen, oder als ein an und für sich psychologisch interessantes Ziel einen dritten Gegenstand der Untersuchung hinzufügen:

3. die höheren anschaulichen Räume, das sind die Begriffssysteme, die von unserem Geiste vermittels einer systematischen Abstraktion von einigen Daten der Anschauung gebildet werden.

§ 3. Die Kritik der Grundlagen der Geometrie vom logischen Gesichtspunkte. — Betrachten wir den gewöhnlichen Begriff des Raumes, wie er sich in unserem Geiste vorgebildet vor-

www.rcin.org.pl

findet. Die Anschauung bietet uns zu gleicher Zeit die psychologische Bestimmung einiger Gegenstände, die mit ihr verknüpft sind (Punkt, Gerade usw.), und die Kenntnis gewisser Beziehungen zwischen ihnen, die wir als unmittelbar klar (evident) betrachten.

Nun ist die Evidenz mehrerer Grade fähig, und der wissenschaftliche Fortschritt der Geometrie bringt es mit sich, daß einige Eigenschaften, die zunächst als an und für sich klar angesehen wurden, logisch aus anderen mehr elementaren abgeleitet werden, und ebenso, daß einige Gegenstände, auch wenn man von ihnen eine leichte anschauliche Vorstellung besitzt, vermittels anderer, einfacherer, definiert werden (so z. B. das Dreieck durch Strecken usw.).

Da aber eine geordnete logische Entwicklung von Daten (Begriffen und Sätzen) ausgehen muß, die vermittels von Definitionen und Beweisen nicht weiter zurückgeführt werden können, so wird man in der Grundlegung der logischen Behandlung der Geometrie die Angabe der ursprünglichen oder grundlegenden Begriffe und der Postulate oder der grundlegenden Sätze finden müssen, welche die elementarsten Beziehungen zwischen jenen ausdrücken.

Die Forderung, alle Begriffe, die in der Behandlung der Geometrie auftreten, logisch zu definieren, würde in der Tat in gleicher Weise widersinnig sein wie das Verlangen, alles zu beweisen, da die Definition wie der Beweis nur ein Verfahren der Zurückführung (Reduktion) ist.

Bei den kritischen Untersuchungen, die mit den Grundlagen der Geometrie verknüpft sind, haben sich einige Kriterien immer mehr befestigt, die gewissermaßen die Richtschnur einer ideal vollkommenen logischen Behandlung ausdrücken und in ihrer Gesamtheit auf eine klare Angabe des Gebrauchs hinzielen, den wir von der Anschauung machen, und auf eine Trennung dessen, was logisch ist, von dem, was anschaulich ist. Diese Kriterien sind die folgenden:

a) 1. Alle Begriffe, die in der Behandlung auftreten, müssen ausdrücklich als ursprüngliche oder als grundlegende gegeben sein, ohne Definition, oder sie müssen logisch definiert werden vermittels der ursprünglichen Begriffe.

In letzter Analyse dürfen also in die Darstellung außer den ursprünglichen Begriffen nur die rein logischen Begriffe eingehen, wie z. B. die Begriffe des Zugehörens (ausgedrückt durch das Wort „sein“ oder „enthalten“), der Anordnung, des Entstehens usw.

2. Es ist wünschenswert, daß die ursprünglichen Begriffe voneinander völlig unabhängig sind, derart, daß es nicht möglich ist, irgend einen von ihnen vermittels der andern logisch zu definieren.

www.rcin.org.pl

b) 1. Alle Sätze, die in der Behandlung auftreten, müssen ausdrücklich als Postulate ausgesprochen werden, oder sie müssen logisch vermittels der Postulate bewiesen werden.

In letzter Analyse dürfen also in die Schlußfolgerung nur die in den Postulaten enthaltenen Prämissen und die Axiome eingehen, welche die Gesetze der deduktiven Logik ausdrücken.

2. Es ist wünschenswert, daß die Postulate voneinander völlig unabhängig sind, derart, daß keins von ihnen auf grund der übrigen bewiesen werden kann.

Die Bedingungen a) 1. und b) 1. sind wesentlich dafür, daß man eine in streng logischer Weise behandelte Geometrie erhält. Sie gestatten vom Inhalt der Begriffe, die in ihnen auftreten, abzusehen, indem man die Behandlung selbst als eine abstrakt logische Theorie ansieht, in die nur nicht bestimmte Symbole eintreten, die an gewisse Beziehungen gebunden sind, und in der demgemäß das System der Postulate, in ihrer Gesamtheit genommen, implizite die Definition der grundlegenden Begriffe ausmacht.

Diese abstrakte Art, die Geometrie anzusehen, besitzt eine große Wichtigkeit, weil man, wenn man den Sinn der angegebenen Symbole in verschiedener Weise festsetzt, verschiedene Deutungen einer und derselben abstrakten Theorie erhalten kann, indem man so dazu gelangt, zwischen mehreren bestimmten geometrischen Theorien eine Verbindung herzustellen. Eine solche Verbindung besteht darin, daß „man alle Sätze der einen Theorie in Sätze der anderen überführen kann, wenn man in bestimmter Weise die Begriffe, die in der ersten auftreten, durch solche der zweiten ersetzt.“ Ein Beispiel hierfür hat man in dem Gesetz der Dualität der projektiven Geometrie oder der Kugelgeometrie.

Jedes System von Sätzen, das den Forderungen a) 1. und b) 1. genügt, kann als eine abstrakte logische Theorie angesehen werden, die geeignet ist, im allgemeinen verschiedene bestimmte (geometrische oder nichtgeometrische) Deutungen zu erhalten, vorausgesetzt, daß die durch die Postulate ausgedrückten Hypothesen logisch mit einander verträglich oder einander nicht widersprechend sind.

Die Möglichkeit, eine anschauliche Deutung zu erhalten, derart, daß die Theorie als Ausdruck eines Systems von Beziehungen zwischen den grade dargestellten Begriffen angesehen werden kann, gibt praktisch die Sicherheit, daß der Bedingung der Verträglichkeit der Hypothesen genügt ist.

www.rcin.org.pl

Für die Geometrie werden wir uns also, soweit sie sich auf die Anschauung gründet, nicht fragen, ob die Postulate mit einander verträglich sind, wofern sie nur anschaulich unmittelbar klar sind.

Die Forderungen a) 2. und b) 2. drücken eher Bedingungen der Eleganz der Behandlung als Bedingungen der Strenge aus. Wir werden später sehen, in welchem Sinne derartige Anforderungen in Wahrheit bedeutungsvoll erscheinen.

Die Unabhängigkeit mehrerer Begriffe kann in psychologischem Sinne (z. B. wenn es sich um Begriffe handelt, die in verschiedene logische Kategorien eingehen) unmittelbar aus der Anschauung erkannt werden, und dann kann sie für die Erkenntnis der Unabhängigkeit einiger Gruppen von Postulaten als Grundlage dienen.

Vom logischen Gesichtspunkte aus hat die oben erwähnte Unabhängigkeit keinen Sinn, so lange man nicht die Postulate angibt, die in der Anschauung vorausgesetzt werden; denn wenn man sagt, daß der Begriff C vermittels der Begriffe A, B nicht definiert werden kann (oder daß er von ihnen unabhängig ist), wird es notwendig sein hinzuzufügen: inbezug auf ein gegebenes System von Postulaten (a, b, c . . .), das implizite die Definition von A, B, C darstellt.

Für den Nachweis der vorgenannten Unabhängigkeit hat Herr A. Padoa das folgende Verfahren vorgeschlagen.

Man suche zwei Interpretationen der in Frage stehenden Theorie, indem man A, B bestimmte Bedeutungen und C zwei verschiedene Bedeutungen beilegt, derart, daß ein in der ersten Interpretation richtiger Satz sich in der zweiten als falsch ergibt; alsdann ist klar, daß C in bezug auf die angegebenen Postulate nicht vermittels A, B definiert werden kann.

Daß ein Postulat a von anderen Daten b, c . . . unabhängig ist, kann man erkennen, wenn sich zeigen läßt, daß die zu a entgegengesetzte Annahme mit b, c . . . verträglich ist. Deshalb bietet sich naturgemäß das folgende Verfahren dar: Man lege den Symbolen, die zur Bezeichnung der Grundbegriffe in die Behandlung eingehen, durch Übereinkommen einen Sinn bei, der von dem ursprünglichen Sinn verschieden ist, und suche so die logische Theorie, die sich auf b, c . . . und auf die Negation von a gründet, in einer der Anschauung angepaßten Art zu interpretieren. Die Möglichkeit einer derartigen Interpretation dient dazu, die fragliche Unabhängigkeit festzustellen.

Will man die absolute Unabhängigkeit eines Systems von Postulaten, so ist vor allem notwendig, daß sie in einer nicht aufeinander zurückgehenden Weise formuliert werden, das heißt, daß jedes von

www.rcin.org.pl

ihnen einen Sinn hat, der von den anderen absieht. In Ermangelung dieses Erfordernisses wird man nur die geordnete Unabhängigkeit verlangen können oder die Unmöglichkeit, jedes der Postulate aus den vorhergehenden abzuleiten.

Für die Unabhängigkeit eines Systems von Postulaten ist auch die Zusammensetzung der Postulate selbst von Bedeutung. Wenn ein Satz a sich in zwei andere (einfachere) a', a'' zerlegen läßt, die zusammengenommen mit a gleichwertig sind, so kann es wohl vorkommen, daß a nicht von den anderen gegebenen Sätzen $b, c \ldots$ abhängt, aber daß es gelingt a' auf Grund von $b, c \ldots$ zu beweisen; alsdann ist klar, daß das Postulat a etwas Überflüssiges enthält, daß es durch a'' ersetzt werden kann.

Eine analoge Bemerkung kann man in bezug auf die Unabhängigkeit der Grundbegriffe machen, wenn man die Möglichkeit in Betracht zieht, einen spezielleren Begriff A durch zwei andere allgemeinere B und C zu ersetzen, derart, daß A als ein den Klassen von Dingen B und C gemeinsames Element definiert wird.

Die Unabhängigkeit der grundlegenden Begriffe und Sätze hat also einen um so bedeutsameren Wert, je mehr die Bedingungen:

a) der Allgemeinheit der Begriffe,

b) der Einfachheit der Postulate

beachtet werden.

Ist es möglich, absolut allgemeine Begriffe und absolut einfache Sätze aufzustellen, die nicht mehr fähig sind, in andere zerlegt zu werden?

Zu dieser Frage hat Herr A. Padoa eine entscheidende Bemerkung gemacht. Jeden beliebigen Satz führt man in letzter Analyse darauf zurück, daß ein Objekt a weder mit b noch mit c zusammenfällt, wo $b, c \ldots$ wohlbestimmte besondere Objekte sind. Demgemäß ist der einzige absolut einfache Satz von dem Typus: a ist nicht b.

Aber mit Sätzen von diesem Typus würde man, wenn man sie in begrenzter Zahl nimmt, niemals dazu gelangen, jene Gesamtheit von Sätzen zu postulieren, welche die allgemeinsten Begriffe der Geometrie charakterisieren.

Man kann jedoch den Bedingungen a) 3. und b) 3. einen relativen, durch Übereinkommen genau festgelegten Wert erteilen und sich so in mannigfacher Weise den oben angegebenen Kriterien logischer Vollkommenheit nähern. Aber wir wollen, ohne unsere Betrachtungen nach dieser Richtung weiter zu führen, dazu fortschreiten, die Frage der Anordnung der Prinzipien der Geometrie unter einem andern Gesichtspunkte zu prüfen.

www.rcin.org.pl

§ 4. Die Kritik der Prinzipien der Geometrie vom Gesichtspunkte der Anschauung aus. Nehmen wir auf die historischen Gründe bezug, welche die logische Analyse der Prinzipien hervorgerufen haben, so kann man sagen, daß diese als hauptsächlichstes Ziel hat:

In sicher bestimmter Weise der Tätigkeiten gewahr zu werden, die unsere Anschauung vollbringt, jedesmal wenn sie die Beziehungen zwischen den Objekten herstellt, die unmittelbar in ihr Gebiet fallen, um so eine regelmäßige Kontrolle des anschaulich Gegebenen zu ermöglichen.

Von diesem Gesichtspunkte aus bieten sich gleichsam in Gegenüberstellung zu den oben angegebenen logischen Kriterien einige Bemerkungen dar:

c) 1. Die Postulate müssen unmittelbar die Beziehungen zwischen den Grundbegriffen ausdrücken, die den Gegenstand unseres anschaulichen Vorstellens bilden, ohne daß es nötig ist, ihnen die Darstellung irgendeines anderen Objekts hinzuzufügen.

Diese Bedingung führt zuweilen dazu, Grundbegriffe anzunehmen, die nicht unabhängig sind.

Wenn wir wollen, daß der Begriff A vermittels der anderen Begriffe B, C . . . logisch definiert wird, so müssen auch die Eigenschaften von A aus denen von B, C . . . (die uns durch die Anschauung enthüllt werden) hergeleitet werden; wenn also ein Postulat in der Behandlung auftritt, das von der Art, in der A angeschaut wird, hergenommen ist, so bringt dies implizite die Betrachtung eines neuen ursprünglichen Begriffselements mit sich, das in B, C . . . nicht enthalten ist.

Ein Beispiel hierfür bietet sich in dem grundlegenden Satze der Ebene dar: Wenn man die G e r a d e als ein Grundgebilde ansieht und die E b e n e d e f i n i e r e n will durch die Projektion der Geraden von einem außerhalb von ihr gelegenen Punkte aus, so muß man auch beweisen, daß die so konstruierte Fläche jede Gerade enthält, die durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist; wenn man dagegen diesen Satz als ein Postulat gibt, so muß man auch die Ebene als ein ursprüngliches Gebilde ansehen, insofern der genannte Satz nicht erfaßt werden könnte, wenn wir uns nur ein geistiges Bild der Geraden bildeten und nicht eine Vorstellung der Ebene hätten.

c) 2. Die anschauliche Vorstellung, die wir uns von unseren Begriffen bilden, bietet uns in sich geschlossen ein Bereich von Gattungen und Arten dar, in der Weise, daß die spezielleren Begriffe

www.rcin.org.pl

durch ihre spezifischen Unterschiede in bezug auf einen allgemeineren Begriff definiert erscheinen.

In diesem Falle bietet uns die Anschauung eine Reihe von aufeinander zurückgehenden Postulaten, für die man nicht von einer absoluten, sondern nur von einer geordneten Unabhängigkeit sprechen kann.

Die absolute Unabhängigkeit der Postulate fordert also die Herstellung verschiedener Bereiche von Begriffen, in denen die speziellen Begriffe auf verschiedene Arten verallgemeinert werden.

c) 3. Unsere anschauliche Vorstellung vom Raume liefert zuerst spezielle Begriffe und steigt durch aufeinanderfolgende Abstraktionen zu allgemeineren auf.

Wir werden darum nicht behaupten, daß die allgemeineren Begriffe, wenn wir uns ihrer bewußt werden, im Vergleich zu den speziellen einen geringeren Grad von Evidenz besitzen; aber ihre Evidenz steht in Beziehung zu einem weiter fortgeschrittenen Zustande des Geistes, in dem man eine abstraktere Fähigkeit der Vorstellung besitzt.

Vom anschaulichen Gesichtspunkte also hat die Allgemeinheit der Begriffe, die man als grundlegende für die Geometrie wählen kann (und demgemäß in gewisser Weise auch die Einfachheit der bezüglichen Postulate) eine Grenze in unserer Fähigkeit der Vorstellung des Abstrakten.

Nun bietet sich hier ein zweites Ziel für die logische Analyse der Prinzipien dar. Diese Analyse kann die Entwicklung der geometrischen Anschauung unterstützen und die Arbeit der Abstraktion, die allgemeinere Begriffe hervorbringt, fördern vermöge der logischen Herstellung der Objekte, die später vorgestellt werden können.

Die Logik bietet uns, indem sie die anschaulichen Daten in gewisser Weise zerlegt, durch Vereinfachung der Postulate unbegrenzt verschiedene Kombinationen von ihnen dar, denen unendlich viele mögliche Begriffe entsprechen. Aber einen Begriff logisch definieren, bedeutet nur, von ihm eine vermittelte Darstellung angeben, die man durch eine geeignete Kombination der Daten herstellen kann.

In Wirklichkeit aber neigt diese Kombination psychologisch dahin, durch ein wahres und eigentliches anschauliches Bild des definierten Begriffs ersetzt zu werden, indem man mit ihm Verbindungen vereinigt, die ihm ein Interesse verleihen. Und nur dann kann man sagen, daß die durch die Definition willkürlich festgelegte logische Kombination sich in eine für die Wissenschaft dauernde Entwicklung verwandelt.

www.rcin.org.pl

Diese Erwägungen zeigen, daß die Logik, soweit sie den aufbauenden Prozeß der Abstraktion der Begriffe unterstützen kann, nicht aus sich allein die psychologischen Assoziationen liefern kann, die diesen Prozeß ausmachen. Wenn man nicht eine wertlose (illusorische) Abstraktion will, so ist es notwendig, die Fähigkeit der Anschauung des Abstrakten auszubilden, indem man auch auf experimentelle Mittel zurückgeht.

Es wird zweckmäßig sein, die genannten Dinge durch einige Beispiele zu beleuchten. Die Idee, die man sich gewöhnlich von der „Linie" und von der „Fläche" bildet, die durch Abstraktion aus wenigen besonderen Fällen geschöpft wird, ist viel weniger allgemein als die von der Geometrie angenommene. Wer nur die Ebene, die Kugel, die Kegel, die Zylinder und andere analoge Flächen mit elliptischen oder parabolischen Punkten vor Augen gehabt hat, besitzt keine Vorstellung von einer Fläche mit hyperbolischen Punkten, die in jedem Punkte von der Berührungsebene geschnitten wird. Und der analytische Beweis der Möglichkeit dieses Falles würde nur als die Vorwegnahme einer Erfahrung angesehen werden können, die uns z. B. durch die Konstruktion des geradlinigen Hyperboloids geliefert wird.

Dasselbe kann man von der Möbiusschen Fläche, dem Modell einer einseitigen Fläche sagen, durch die das gewöhnliche Vorurteil als falsch nachgewiesen wird, nach dem jede Fläche zwei wohl unterschiedene Seiten habe, die durch eine stetige Bewegung nicht ineinander übergeführt werden können.

Die Kenntnis der Fläche mit hyperbolischen Punkten und der einseitigen Flächen erweitert den gewöhnlichen Begriff der Fläche, indem sie uns gestattet, eine größere Zahl von Fällen mit der Anschauung zu umfassen. Aber es scheint nicht möglich, für den Fortschritt dieser Anschauung eine Grenze anzugeben, da eine weitere Untersuchung uns dazu führt, Linien und Flächen mit unendlich vielen Oszillationen zu betrachten, Linien ohne Tangente, Flächen ohne Berührungsebene usw., und auch von diesen Gebilden kann man sich in einem gewissen Sinne und bis zu einem gewissen Punkte eine Vorstellung bilden, wie z. B., wenn eine Linie der oben angegebenen Art vermittels eines veränderlichen Streckenzuges definiert wird, der nach einem bestimmten Gesetze einer Grenze zustrebt.

Fassen wir die bisher entwickelten Betrachtungen zusammen, so werden wir sagen, daß die Kritik der Grundlagen der Geometrie an dem Prozeß der Aufstellung und Ausarbeitung von Begriffen Teil hat, der die Entwicklung der Wissenschaft in ihren höchsten Zweigen

www.rcin.org.pl

ausmacht. Im besonderen ist es in diesem Prozeß die Aufgabe der logischen Analyse, die Tätigkeiten der Anschauung zu unterscheiden und die aufeinanderfolgenden Abstraktionen zu unterstützen; so fördert man bewußtermaßen die Entwicklung der geometrischen Anschauung, die zu den in mannigfacher Weise interessanten, höheren anschaulichen Räumen führt.

Die konkrete Prüfung einiger Forschungsrichtungen, die eine hervorstechende geschichtliche Bedeutung besitzen, wird für den Zweck lehrreiche Beispiele liefern.

§ 5. Die hauptsächlichsten Richtungen in den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. In der Elementargeometrie erscheinen als Grundgebilde der Punkt, die Gerade und die Ebene, auf die sich die Eigenschaften des Angehörens oder der Verknüpfung (z. B. zwei Punkte gehören einer Geraden an usw. Vgl. Art. 3), der Zerlegung in Teile oder der Anordnung (Art. 3, 5), der Kongruenz oder der Bewegung (Art. 4) beziehen.

Diese Begriffe bieten sich der Anschauung in wiederkehrender Weise dar, so daß z. B. die Eigenschaft der Kongruenz oder der Bewegung in Beziehung auf die Gerade und auf die Ebene zum Ausdruck gelangt usw. Aber sie finden eine allgemeine und unabhängigere Entwicklung in einigen höheren Zweigen der Geometrie.

Die projektive Geometrie betrachtet die Begriffe der Geraden und der Ebene, indem sie von jeder Idee der Gleichheit und der Bewegung absieht; sie betrachtet demgemäß ausschließlich die Gesamtheit der graphischen Eigenschaften, indem sie die metrischen (die nur in ihre Anwendungen eingehen) bei Seite läßt. Im Gegensatz hierzu hinwiederum finden die metrischen Begriffe eine von der Idee der Geraden und der Ebene unabhängige Entwicklung in der metrischen Geometrie auf den Oberflächen oder in den mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten (die gewöhnlich mit Differentialmethoden erforscht werden), wo man die Idee der Gleichheit von Strecken oder Abständen durch die allgemeinere Idee der gleichen Länge von Linienbogen ersetzt.

Nun diesen beiden Zweigen entsprechen die beiden Hauptrichtungen der Forschungen, die die Grundlagen der Geometrie betreffen; diese Richtungen schaffen volle Klarheit über die absolute Unabhängigkeit zwischen den graphischen und metrischen Begriffen, die bzw. in jeder von ihnen als Ausgangspunkt gewählt werden.

Aber die beiden angegebenen Zweige der geometrischen Wissenschaft haben auch einige gemeinsame Eigenschaften, die zusammen

www.rcin.org.pl

eine besondere Theorie ausmachen. Die Eigenschaften, die sich auf die Zerlegung der Geraden oder der Ebene in Teile, auf die Stetigkeit usw. beziehen, gehören einer weiteren Familie von Linien und Flächen an, und deren allgemeines Studium gibt, kann man sagen, zu einer Theorie des Kontinuums Anlaß, welche die allgemeine Geometrie der Linien, Flächen, Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen ist, als der gemeinsamen Grundlage der projektiven und der metrischen Geometrie. Mit dieser Theorie des Kontinuums stehen im Zusammenhang einige Resultate von Georg Cantor aus der Mengenlehre und die allgemeinen Ergebnisse der Theorie des Zusammenhangs und der Analysis situs. Von ihr aus müssen zunächst und unabhängig von den Ideen der Geraden und der Ebene oder der Kongruenz die grundlegenden Begriffe von Linie und Fläche geklärt werden, die wahren ersten Begriffe der Geometrie.

Es gibt also drei Gruppen von Begriffen, die den drei höheren Zweigen der Geometrie entsprechen und die ausdrücken:

1. die allgemeinen Eigenschaften der Linien, Flächen, Mannigfaltigkeiten,
2. die Beziehungen der Verknüpfung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
3. die Beziehungen der Kongruenz.

Mit anderen Worten, man hat hier drei höhere anschauliche Formen, „die stetige Mannigfaltigkeit, den projektiven Raum, die allgemeine metrische Mannigfaltigkeit“, in bezug auf die sich drei Hauptrichtungen der modernen kritischen Untersuchungen entwickeln.

Und wie in den höchsten Entwicklungen der Wissenschaft tragen alle Methoden der Geometrie und der Analysis hier ihren Tribut bei; im besonderen vereinigen sich die synthetisch-projektiven Methoden, die Theorie der quadratischen Formen von Differentialen, die Forschungen über Transformationsgruppen und die über Zahlenkörper, um die Grundlagen mit einem lebhafteren Licht zu erhellen. Es wird so in der Tat unsere Bemerkung über das notwendige Bestehen der Beziehung zwischen den Grundlagen der Wissenschaft und ihren fernliegendsten Entwicklungen bestätigt.

In der Weise, wie auch die bis ins kleinste gehende Beobachtung in der Eizelle die konstitutiven Teile eines Embryo nicht unterscheiden kann, während sie in der vorgerückteren embryonalen Entwicklung in Gemäßheit ihrer Funktionen differenziert erscheinen, so enthüllen sich in dem geometrischen Organismus in den Elementen die Beziehungen zwischen den Grundbegriffen schlecht für eine Kritik, die zwischen

www.rcin.org.pl

ihnen einen unmittelbaren Vergleich anstellt; sie empfangen dagegen und erwarten noch eine deutlichere Aufklärung von dem Fortschritt der höheren Theorien.

§ 6. Das psychologische Problem des Erwerbs der räumlichen Vorstellungen. Welche Beziehungen verknüpfen nun die erwähnten mathematischen Untersuchungen mit dem psychologischen Problem des Ursprungs der geometrischen Begriffe?

Wir haben gesagt, daß diese Begriffe entstanden sind durch eine idealisierte Erfahrung, die sich in einem Zustande des Geistes, der dem voll entwickelten Bewußtsein voranging, andauernd wiederholte.

Die Bedingungen für eine derartige Erfahrung sind einerseits Eigenschaften der Sinnesorgane, andererseits Assoziationsgesetze des Denkens, d. h. die Grundelemente der Seele, denen gemäß man, so zu sagen, die Deutung der Sinneserscheinungen vollzieht.

Die Sinneswahrnehmungen, die ein räumliches Element enthalten, sind die allgemeinen Muskeltastempfindungen, die der ganzen Haut zugehören, die des besonderen Tastsinns, nämlich des Organs (im allgemeinen der Hand), das als Sitz eines konstanten Vergleichsmaßstabes genommen wird, und endlich die des Gesichtssinns.

In der physiologischen Psychologie (von Helmholtz, Wundt) stellt man Versuche an, die geeignet sind, zu entscheiden, welche geometrischen Eigenschaften von der einen oder anderen Sinnesempfindung unmittelbar erworben werden können. Aber bei der Deutung solcher Versuche ist es notwendig, von Grund aus die Beziehungen zwischen den Begriffen zu kennen, auf die sich die vorgenannten Eigenschaften beziehen, um von der Vorstellung einer Tatsache alles das trennen zu können, was nicht unlöslich mit ihr verbunden ist.

Alsdann gelangt man zu einer ersten allgemeinen Folgerung, nämlich daß der Gesichtssinn in unmittelbarer Weise nur graphische Begriffe gibt und nicht metrische. Im Gegensatz hierzu hinwiederum erwirbt man durch die Muskeltastwahrnehmungen eine unmittelbare Kenntnis der (metrischen) Eigenschaften der Kongruenz und nur auf untergeordnetem Wege die Kenntnis der Geraden und der Ebene.

Diese Bemerkung, die implizite in den Arbeiten von Helmholtz enthalten ist, ist ausdrücklich von Klein ausgesprochen worden.

Man kann weiter gehen, wenn man sich den angeführten Unterschied zwischen den Muskeltastempfindungen und den Empfindungen des besonderen Tastsinns gegenwärtig hält.

www.rcin.org.pl

Die ersten sind, soweit sich nicht durch Gewohnheit ein Sitz des Vergleichens lokalisiert hat, nicht fähig, die Vorstellung der Kongruenz zu geben. Ihr Inhalt beschränkt sich, soweit er räumliche Kenntnisse betrifft, auf die allgemeinsten den Linien und Flächen innewohnenden Beziehungen, Beziehungen, die, wie gesagt, den Gegenstand der Theorie des Kontinuums ausmachen und gemeinsame Grundlage der graphischen und der metrischen Eigenschaften sind.

Also: Die drei Zweige der Geometrie, in die diese sich spaltet, nämlich die Theorie des Kontinuums, die metrische und die projektive Geometrie, erscheinen, wenn man auf den psychologischen Erwerb ihrer grundlegenden Begriffe achtet, mit drei Arten von Sinnesempfindungen verknüpft: beziehungsweise mit den allgemeinen Muskeltastempfindungen, mit denen des besonderen Tastsinns und denen des Gesichtssinns.

Wir werden nicht in die Erörterungen eintreten, die nötig waren, um diese Schlußfolgerung zu rechtfertigen, und wir werden auch eher bei besonderen Fragen verweilen müssen, die hiermit in Verbindung stehen: wie von jeder Gruppe der Sinnesempfindungen die geometrischen Grundbegriffe ihren Ursprung herleiten, und wie sie sich untereinander den logischen und assoziativen Gesetzen gemäß verbinden, die dann in den Postulaten ihren Ausdruck finden.

Indem wir für eine ausführlichere Analyse auf unsern Artikel; „*Sulla spiegazione psicologica* . . . oder auf Kap. IV des Buches „*Problemi della Scienza*“, die in der Einleitung zitiert sind, verweisen, werden wir uns hier darauf beschränken, die Aufmerksamkeit des Lesers auf nachstehenden Punkt zu lenken: Es besteht ein Unterschied zwischen Postulaten, die ihre Grundlage in einer einzigen Gruppe von Sinnesempfindungen haben, und Postulaten, die durch Vereinigung von Sinnesempfindungen, welche verschiedenen Gruppen angehören, entstehen. Diese letzten müssen im Vergleich zu den ersten einen geringeren Grad von anschaulicher Evidenz besitzen.

Man gelangt so dazu, die von der Geschichte der Mathematik dargestellten Versuche, das Parallelenaxiom (vgl. Art. 8) aus den Grundlagen der Geometrie zu verbannen, psychologisch zu erklären. Seine geringere Evidenz erklärt sich, wenn man beachtet, daß es ein Postulat der Vereinigung der optischen Sinnesempfindungen, aus denen die graphischen Begriffe hervorgehen, und der Muskeltast- oder der Sinnesempfindungen ist, in denen die metrischen ihren Ursprung haben. In der Tat, wenn wir uns von dem Widerstreben Rechenschaft zu geben suchen, das wir empfinden, wenn man der Hypothese widerspricht, daß es zu einer gegebenen Geraden nur eine einzige Parallele

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

www.rcin.org.pl

gibt, die durch einen Punkt geht, so erkennen wir, daß es von der doppelten Art abhängt, in der wir gewohnt sind, die parallelen Geraden in einer Ebene uns vorzustellen: als Grenzen zweier sich schneidenden Geraden, bei denen der gemeinsame Punkt sich unbegrenzt in einem bestimmten Sinne entfernt, und als Linien gleichen Abstandes. In dieser doppelten Weise der Vorstellung liegt eine Tatsache der optisch-mechanischen Assoziation vor, auf der gerade die Kraft der Anschauung des Parallelenpostulats beruht.

§ 7. Das philosophische Problem der Geometrie. Nunmehr nehmen wir die Überlegungen des § 3 in bezug auf den Vergleich zwischen dem Anschauungsraum und dem optischen Raum wieder auf und führen sie weiter.

Wir halten uns immer gegenwärtig, daß die Erfahrungen die Beziehung der Anschauung zu den physikalisch gegebenen räumlichen Verhältnissen immer nur bis zu einem gewissen Grade der Annäherung bestätigen können, und beachten, daß, wenn dieser Grad festgelegt ist, man sich für die Vorstellung verschiedene Begriffe bilden kann, die in gleicher Weise der Gesamtheit der oben genannten Erfahrungen entsprechen.

Um diese Bemerkung klarzustellen, entnehmen wir von Helmholtz und Clifford eine fingierte erläuternde Betrachtung.

Ein Wesen A von zwei Dimensionen, das sich in der Ebene frei bewegen kann, wird die Kenntnis der gewöhnlichen ebenen Geometrie erwerben; aber zu derselben Kenntnis wird auch ein Wesen B gelangen, das sich auf einer Kugelfläche bewegen kann, vorausgesetzt, daß deren Ausdehnungen im Vergleich zu dem Gebiete, in dem sich B bewegen kann, außerordentlich groß sind, derart, daß das genannte Gebiet annähernd mit der Tangentialebene an die Kugel zusammenfällt. So werden beide die Vorstellung einer Linie haben, die auf der bezüglichen Fläche verläuft und den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten mißt, einer Linie, die sie Gerade nennen können. Und diese Gerade werden sie, wenn sie die an ihr in dem ihren Erfahrungen zugänglichen Gebiet beobachteten Eigenschaften im Geiste erweitern, sich als eine unbegrenzt ausgedehnte, in beiderlei Sinn (nach beiden Richtungen) offene Linie vorstellen: aber diese Ausgestaltung würde in der Kugelgeometrie falsch sein, in der die Gerade genannte Linie ein größter Kreis ist, also eine geschlossene Linie von begrenzter Länge, wenn auch sehr groß in bezug auf B.

Ohne uns bei anderen Beispielen ähnlicher Art lange aufzuhalten, erscheint durch Analogie klar, daß man sich mannigfache Raum-

www.rcin.org.pl

formen denken kann, die den Erfordernissen, die wir gewöhnlich dem Raume beilegen, nur zum Teil entsprechen, aber auch solche, die in der uns zugänglichen Umgebung anscheinend identische geometrische Bedingungen zulassen. Wenn der physikalische Raum einer dieser Formen gerade entsprechen sollte, so würde unsere geometrische Anschauung wohl dieselbe sein, die wir heute besitzen, aber über das Gebiet unserer Erfahrungen hinaus ausgedehnt, würde sie uns zu absolut irrigen Schlußfolgerungen führen können, wie wir es in dem Beispiel für das Wesen B gesehen haben.

Und nichts sagt uns a priori, daß es nicht tatsächlich so ist.

Um die Frage zu entscheiden, gibt es eine Möglichkeit, die Postulate, die der Anschauung gemäß die Eigenschaften des Raumes ausdrücken, zu verifizieren, indem man alle Folgerungen, die von ihnen abhängen, der Kontrolle von genaueren Erfahrungen unterwirft und so den Grad der Genauigkeit unserer physikalischen Geometrie bewußt dem Werte nach festzustellen sucht.

Aber rücksichtlich des Wertes der genannten verifizierenden Erfahrungen ist es notwendig, hier einen Einwurf zurückzuweisen.

Jede Erfahrung stellt eine vielfach zusammengesetzte Beziehung fest, die wir als Resultante aus einer Gesamtheit von geometrischen, mechanischen, physischen Verhältnissen erfassen; die reine geometrische Beziehung ist eine Abstraktion, die den Vergleich der vielfältigen Erfahrungen und die Elimination der anderen, eigentlich mehr physikalischen Daten zum Ausdruck bringt. Demgemäß erscheint nun die Ansicht als möglich, daß dieselben Erfahrungen, mit denen man die Wahl zwischen verschiedenen geometrischen Systemen würde bestimmen wollen, sich ebenso gut in jedem derjenigen Systeme deuten lassen können, in denen man die sich mit ihnen berührenden physikalischen Hypothesen entsprechend modifiziert. Demgemäß würde die Wahl eines geometrischen Systems nicht mehr eine Frage der Tatsache oder eine durch genauere Beobachtungen zu bestätigende oder zu widerlegende Hypothese darstellen, sondern würde von einem Übereinkommen abhängen.

Diese Ansicht, die ihren angesehensten Vertreter in H. Poincaré gefunden hat, ist von uns bis in kleinste in den zitierten „Problemi della Scienza" widerlegt worden. Hier werden wir uns darauf beschränken, hervorzuheben, daß die Lehre von einem Übereinkommen, die in irgendeiner Weise die Kantischen Lehren erneuert, ein unabhängiges (absolutes) Reich der wissenschaftlichen Begriffe voraussetzt, eine linienhafte Anordnung der Wissenschaften, an deren Anfang die Geometrie steht. Demgegenüber ist es vielleicht angebrachter, die

www.rcin.org.pl

Wissenschaft aufzubauen, indem man in jedem Augenblick die einzelne Erfahrung in Vergleich stellt mit der Gesamtheit aller anderen Erfahrungen und der Verhältnisse, die sie in einem gewissen Grade der Annäherung interpretieren. Von diesem Gesichtspunkte aus kann es sich nur um die Frage der Schwierigkeit handeln, die Erfahrungen in Hinsicht auf die räumlichen Verhältnisse zu interpretieren; aber man kann nicht von Anfang an bestreiten, daß eine verschiedene geometrische Hypothese sich in einer Reihe von systematischen Unterschieden widerspiegeln könnte bezüglich der mannigfachsten physikalischen Erfahrungen, daß also durch deren Vergleich bis zu einem gewissen Grade von Annäherung eine Entscheidung getroffen werden könnte.

Was ich vorher über die Möglichkeit verschiedener geometrischer Hypothesen gesagt habe, hat sich historisch aus einer berühmten Kritik ergeben.

Die Untersuchungen über das Parallelenaxiom (Art. 8) haben gerade zum Aufbau einer stetigen Reihe von nichteuklidischen Räumen geführt, die von einem Parameter k abhängen und den euklidischen Anschauungsraum für den Wert $k = 0$ in sich enthalten.

Die nichteuklidische Geometrie für $k < 0$ fällt mit der gewöhnlichen in dem ganzen Teile zusammen, der der Parallelenlehre vorangeht; während aber in dieser die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten ist, ist sie in jener kleiner als zwei Rechte, wobei der Unterschied zu k und zu dem Inhalt des Dreiecks proportional ist.

In welcher Weise wird man nun entscheiden können, ob die physikalische Geometrie mehr der euklidischen Geometrie ($k = 0$) oder der nichteuklidischen ($k < 0$) entspricht?

Zu diesem Zwecke wird es nötig sein, die Summe der Winkel eines Dreiecks zu messen; wenn diese sich merklich kleiner als zwei Rechte ergeben sollte, so wird bewiesen sein, daß der absolute Wert von k eine gewisse untere Grenze übersteigt, daß also die nichteuklidische Geometrie gilt. Wenn aber im Gegensatz hierzu die vorgenannte Summe sich in der sinnlichen Wahrnehmung als gleich zwei Rechten ergeben sollte, so bleibt ein Zweifel zwischen zwei Hypothesen:

1. Es gilt physikalisch die euklidische Geometrie für jede beliebige Genauigkeit des Messens, d. h. k ist $= 0$;

2. Es gilt die nichteuklidische Hypothese $k < 0$, aber k ist so klein, daß die Summe der Winkel unseres Dreiecks von zwei Rechten weniger abweicht als die Beobachtungsfehler.

www.rcin.org.pl

Tatsächlich haben die Messungen, die für geodätische (Gauß) und astronomische (Lobatschefskij) Dreiecke angestellt worden sind, den Nachweis geliefert, daß die euklidische Hypothese in dem Grade von Annäherung bestätigt wird, der mit unseren feinsten Beobachtungsmitteln im Einklang ist. Diese erreichen einen sehr hohen Grad von Genauigkeit für Dreiecke, die als große Grundlinie die große Achse der Erdbahn (300 Millionen von Kilometern) haben und deren beide andern Seiten hunderttausendmal so groß sind, für die man trotzdem findet, daß die Summe der Winkel von zwei Rechten um weniger als 0″,1 abweicht.

Trotzdem das Ergebnis der Beobachtung und der Erfahrung praktisch die Geometrie, die uns von der Anschauung dargeboten wird, bestätigt hat, bleibt doch theoretisch immer der Zweifel bezüglich der Antwort einer genaueren Erfahrung, und dieser Zweifel, daß er in einem der euklidischen Hypothese entgegengesetzten Sinne gelöst werden könnte, wird niemals mit einer absoluten Sicherheit gelöst werden können.

Die vorhergehenden Erwägungen beleuchten das philosophische Problem des Raumes und lassen das ganze Interesse der Untersuchungen hervortreten, die darauf gerichtet sind, die Anschauung von der Erfahrung zu unterscheiden und neben dem gewöhnlichen Anschauungsraum andere höhere anschauliche Räume zu konstruieren.

Vom Gesichtspunkte der Erkenntnistheorie erscheint die psychologische Gestaltung des Raumes nun als eine Entwicklung, die nicht ausschließlich durch die elementaren Beobachtungen bestimmt ist, die er darzustellen geeignet ist, sondern auch durch gewisse geistige Bedingungen, nach denen die sinnlichen Bilder miteinander verknüpft wurden.

Es gibt also in den Postulaten etwas Willkürliches in bezug auf die physikalischen Daten, das die Daten genauer würde modifizieren können.

Aber es gibt weiter auch etwas Willkürliches in der Unterscheidung unserer begrifflichen Raumvorstellung von anderen möglichen, die man, da über sie durch beliebig weiter fortgesetzte Erfahrungen nicht entschieden werden kann, als physikalisch gleichwertig ansehen muß.

Das ergibt sich in der klarsten Weise aus der nicht-archimedischen Geometrie (Art. 5), da die Frage der Existenz des Aktual-Unendlichen nicht eigentlich einen physikalischen Sinn hat, insofern es über jede wirkliche auch noch so angenäherte Messung hinausgeht.

---

www.rcin.org.pl