Mascheroni

GÉOMÉTRIE

DU COMPAS

GÉOMÉTRIE

DU COMPAS.

IMPRIMERIE DE HUZARD COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

GÉOMÉTRIE
DU COMPAS,

PAR L. MASCHERONI;

TRADUITE DE L'ITALIEN

PAR A. M. CARETTE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, OFFICIER SUPÉRIEUR DU GÉNIE, etc.

SECONDE ÉDITION,

Revue, corrigée et augmentée d'une Notice biographique du Traducteur sur MASCHERONI.

PARIS,
BACHELIER, SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER,
LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

ET A BRUXELLES,
A LA LIBRAIRIE PARISIENNE, RUE DE LA MADELEINE, N° 438.

1828

AVERTISSEMENT

DU TRADUCTEUR

SUR LA SECONDE ÉDITION.

La première édition de la traduction de la Géométrie du Compas, qui parut en 1798, fut très recherchée à cette époque ; elle est épuisée depuis plusieurs années, et les amis des Sciences exactes en réclamaient une nouvelle édition. C'est pour répondre à leurs vœux qu'on publie celle-ci ; et l'on a cherché à la rendre aussi correcte que possible, en faisant disparaître toutes les fautes que la précipitation avec laquelle la première édition fut imprimée n'avait pas permis d'éviter.

Dans une note que nous avons placée à la fin du chapitre X, nous avons donné une solution du problème (146) plus générale que celle de Mascheroni ; et nous avons ajouté une solution, par le moyen du compas seulement, du problème (150) pour lequel Mascheroni ne donne que la solution d'Euclide, qui exige le concours de la règle et du compas.

NOTICE BIOGRAPHIQUE
DU TRADUCTEUR,
SUR MASCHERONI.

Depuis la publication de la traduction de la Géométrie du Compas, qui parut en 1798, les sciences ont perdu l'auteur de cet intéressant ouvrage, ainsi que le fruit des travaux qu'il avait entrepris avec autant d'ardeur que d'heureuses dispositions, et qu'une mort prématurée l'empêcha d'achever.

Qu'il soit permis au Traducteur de la Géométrie du Compas, en publiant cette seconde édition, de payer à Mascheroni le juste tribut d'éloges et de regrets si légitimement dus à la mémoire d'un savant étranger, qui s'applaudissait d'avoir trouvé une seconde patrie dans la France, au moment où elle devint son tombeau.

Mascheroni (Laurent) était né à Bergame en 1750. Il étudia avec goût les Belles-Lettres, et obtint dans ces premières études de très brillans succès. Dès l'âge de 18 ans, il enseignait le grec et le latin au collége de Bergame. Cette profession lui fournit souvent l'occasion d'exercer agreablement son esprit. Il se fit remarquer surtout par un discours qu'il prononça sur la fausse éloquence de la chaire : pour faire ressortir d'une manière plus piquante le ridicule qu'il attaquait, il employa lui-même le style poétique que les prédicateurs de son temps prodiguaient dans leurs sermons.

Il fut appelé ensuite à professer la langue grecque à Pavie, où il continua de l'enseigner jusqu'à l'âge de

27 ans ; mais ce n'était pas dans les lettres que Mascheroni devait trouver sa principale illustration. Jusque là on n'avait apprécié que la délicatesse de son esprit : une circonstance fortuite détermina en lui le goût des études sérieuses et des méditations profondes ; elle lui dévoila sa véritable vocation. Un ouvrage de Mathématiques lui tomba un jour entre les mains ; il le lut avec avidité, et conçut dès lors pour les sciences un amour qui devint bientôt une passion dominante. C'est ainsi que s'était manifesté le goût de Lagrange, qui n'avait, dans tout le cours de ses études à Turin, montré de dispositions que pour les Lettres, et dont le génie pour les Mathématiques ne fut révélé qu'à la seconde année de son cours de philosophie par la lecture d'un mémoire de Halley que le hasard lui avait fait rencontrer.

Du moment où Mascheroni eût abordé les Sciences exactes, il en fit l'objet principal de ses études. Ses progrès furent rapides. En peu de temps il se montra digne d'occuper la chaire de Géométrie au collége de Bergame, et fut, un peu plus tard, nommé professeur de Géométrie et d'Algèbre à l'université de Pavie.

Il publia dans cette ville, en 1787, un mémoire intitulé *Méthode pour la mesure des polygones plans*, dans lequel il traitait tous les problèmes que l'on trouve dans la Polygonométrie de Lhuillier, imprimée deux ans plus tard à Genève, 1789. Ce dernier ouvrage ne parvint que quelques années après sa publication à la connaissance du célèbre professeur, qui eut peine à concevoir que le même sujet, que les mêmes problèmes fussent traités précisément de la même manière par un autre géomètre. Il fit imprimer à Pavie, en 1793, sous le titre modeste, *Problèmes pour les arpenteurs, avec différentes solutions*, un ouvrage composé de cinq livres. Les trois premiers et partie du quatrième ne sont qu'une nouvelle édition du mémoire qu'il avait publié à Pavie, en 1787, sur la mesure des polygones plans. La fin du quatrième livre a pour objet de donner la plus grande généralité aux problèmes contenus dans les livres précédens Le cinquième est entièrement consacré à la mesure des solides.

Mascheroni profita de cette publication pour revendiquer, dans la Préface, la propriété de son premier mémoire, et il le fit avec autant de chaleur pour une production qu'il affectionnait, que d'égards pour un mathématicien dont il ne voulait point atténuer le mérite dans l'opinion publique.

Il parut en l'an XI (1803), chez Courcier, une traduction française de cet ouvrage, intitulé : *Problèmes pour les arpenteurs*. Mais on ne voit pas pourquoi le traducteur, en tronquant quelques passages de la préface, enlève à l'auteur une partie des moyens par lesquels il établit ses droits à la propriété qu'il réclamait.

Le savant italien ayant reconnu, dans la Polygonométrie de Lhuillier, tous les problèmes qu'il avait donnés lui-même dans son ouvrage, imprimé deux ans avant l'époque à laquelle Lhuillier avait publié le sien, signala très délicatement cette rencontre qui lui avait paru tout-à-fait extraordinaire.

Nous rétablirons ici les propres expressions de Mascheroni, en désignant par des caractères italiques les parties de sa préface qui ont été omises par le traducteur de l'ouvrage.

« J'avais publié, en 1787, parmi les additions au » Cours de Mathématiques de M. Bossut, *qui me sert » de texte dans mes leçons de l'Université*, un petit » mémoire intitulé : Méthode pour la mesure des po- » lygones plans ; *et j'y mis mon nom.* Deux ans après, » M. Lhuillier publia à Genève sa Polygonométrie, *im- » primée par Barde en* 1789. Je reconnus en la lisant, » non-seulement que mon ouvrage renfermait tous ses » problèmes, mais encore que mes solutions analyti- » ques m'avaient conduit aux mêmes formules, *et que » j'avais suivi absolument les mêmes traces qu'un au- » teur qui avait imprimé son ouvrage deux ans après la » publication du mien. Je fus vraiment étonné de voir » que je m'étais ainsi rencontré avec ce géomètre.* »

On ne peut s'empêcher d'observer, dans le passage qui précède, avec quelle finesse, quelle délicatesse d'expression Mascheroni cherche à concilier le besoin qu'il éprouve de s'assurer la conservation des droits que sa priorité lui avait acquis, avec la réserve et la circonspection, d'ailleurs si conformes à ses dispositions naturelles, que semblait lui imposer le caractère d'ecclésiastique dont il était revêtu. Si l'on a droit de s'étonner de l'omission des passages soulignés dans la traduction de la préface de Mascheroni, que penser de l'addition de la phrase suivante, quand il ne se trouve pas dans l'italien un mot qui puisse la justifier? « Un accord » aussi parfait avec ce célèbre géomètre (M. Lhuillier » fut pour moi d'un grand prix, et la preuve la plus com- » plète que mon travail pouvait être de quelque utilité. »

Mascheroni, tout modeste qu'il était, se sentait bien capable d'apprécier seul le mérite de son ouvrage, et de Bonaparte en Italie. Le général, qui accueillait avec plaisir les savans italiens, avait vu souvent Mascheroni, et s'était entretenu plusieurs fois avec lui de la Géométrie du Compas. Quand la paix de Campo-Formio fut signée, Bonaparte vint à Paris apporter le traité au directoire, et lui présenter les drapeaux de l'armée d'Italie. Le lendemain de cette cérémonie triomphale, qui eut lieu le 20 frimaire an VI (10 décembre 1797), Bonaparte fut invité par François de Neufchâteau à une nombreuse réunion composée de savans et de gens de lettres, tous membres de l'Institut. « Le général les » étonna tous, dit le *Moniteur* du temps, par la va- » riété et l'étendue de ses connaissances. »

Lagrange et Laplace faisaient partie de la réunion, et dans une conversation que Bonaparte eut avec ces illustres géomètres, et particulièrement avec Laplace, il leur fit connaître la Géométrie du Compas, ouvrage alors tout nouveau et inconnu en France, en leur donnant la solution de quelques-uns des problèmes qui se trouvent dans cette production originale. Après avoir écouté Bonaparte avec attention, Laplace, qui avait été son professeur de Mathématiques à l'école de Brienne, lui dit en présence de tous les savans réunis autour d'eux: « Nous attendions tout de vous, général, ex- » cepté des leçons de Mathématiques. »

Cette anecdote, répétée par plusieurs journaux, signala pour la première fois en France la Géométrie du Compas, et inspira à l'auteur de cette notice, qui sortait alors de l'École Polytechnique pour entrer dans le corps du génie, le désir de connaître l'ouvrage et ensuite celui d'en publier la traduction.

n'a pas craint de faire lui-même la juste part de celui de M. Lhuillier, relativement à sa Polygonométrie, ainsi qu'on peut s'en convaincre par la lecture du passage suivant, qui termine sa réclamation : « Au reste, » dit-il, l'ouvrage de M. Lhuillier n'en mérite pas moins » la bienveillance du lecteur, tant pour son *érudition,* » que pour les démonstrations géométriques qu'il a » données, et pour beaucoup d'exemples choisis qui » répandent de la clarté sur toute la méthode. »

L'*érudition,* accordée à M. Lhuillier par Mascheroni, implique contradiction avec le contentement que semblerait lui avoir procuré, d'après la phrase du traducteur, un accord aussi parfait avec le géomètre de Genève : ou bien il faudrait n'y voir qu'une ironie peu conforme à l'esprit de douceur auquel se plaisent à rendre hommage tous ceux qui ont connu le savant italien.

Lors de l'entrée des Français en Italie, Mascheroni sut allier les sentimens d'un patriotisme éclairé avec les devoirs de l'état ecclésiastique qu'il avait embrassé. Ses talens et la sagesse de son esprit fixèrent sur lui l'attention et les suffrages de ses concitoyens : il fut nommé membre du corps-législatif de la république Cisalpine ; mais, tout en exerçant ces nouvelles fonctions avec le plus grand zèle, il n'en continuait pas moins à se livrer à l'étude des sciences mathématiques, pour lesquelles il avait conservé la même prédilection.

Mascheroni publia à Pavie, en 1797 (1), la Géometrie du Compas. C'était dans les derniers momens du sejour

(1) C'est par erreur que la Biographie des Contemporains de Rabbe et la Biographie universelle de Barbier annoncent que cet ouvrage a paru à Milan en 1795. Il n'a eu qu'une édition, celle imprimée à Pavie en 1797.

Mascheroni contribua beaucoup aux expériences faites à Bologne, pour prouver le mouvement de la terre par la chute des corps.

Les ouvrages que l'on a de lui sont :

1°. *Sulle curve che servono a delineare le ore ineguali de gli antichi nelle superficie plane.* Bergame, 1784, in-4°.

2°. Nouvelles Recherches sur l'équilibre des voûtes. Bergame, 1785, in-4°, avec planches. Ouvrage profond, où l'auteur essaie d'aller plus loin que n'avaient été Bossut et Lorgna dans les mémoires qu'ils avaient publiés en 1774, 1779 et 1780.

3°. Des vers italiens, adressés à la comtesse de Grismondi, aussi célèbre par son esprit que par sa beauté. 1786, in-4°.

4°. Méthode pour la mesure des polygones plans. 1787, Bergame, in-8°.

5°. Problèmes pour les arpenteurs avec différentes solutions. 1793, Pavie, in-8°.

6°. La Géométrie du Compas. 1797, Pavie, in-8°.

7°. Notes sur le Traité de calcul différentiel, par Euler.

8°. Une pièce de vers dans laquelle l'auteur fait preuve d'un talent distingué pour la poésie et d'un attachement sincère au savant français dont il déplore la perte. *In morte Bordæ, viri celeberrimi, Elegia.* Paris, 1799, in-folio.

9°. *Invito di Dafni a Lesbia ;* poëme qui ne fait pas moins d'honneur à Mascheroni que la Géométrie du Compas.

Il y décrit, avec autant de précision que de facilité, les objets curieux de l'Amphithéâtre de Physique et du Cabinet d'Histoire naturelle de l'Université de Pavie.

Mascheroni a laissé, en outre, en manuscrit, plusieurs mémoires, un entre autres sur la pyramidométrie ; sujet dont l'immortel Lagrange s'était occupé avant lui, mais qu'il a envisagé sous un aspect différent.

L'un de ces mémoires, intitulé *Spiegazione popolare della maniera colla quale si regola l'anno sestile o intercalare, e il cominciamento dell' anno republicano*, a été inséré après sa mort dans les Mémoires de Mathématiques et de Physique de la Société italienne des Sciences, tome IX, page 321. Modène, 1802.

Mascheroni occupait encore en 1798 la chaire de professeur de Mathématiques à l'Université de Pavie, lorsqu'il fut député à Paris par le gouvernement italien pour y coopérer à la rédaction du nouveau système des poids et mesures. Il se livra à ce travail avec autant de zèle que d'intelligence, et le mérite qu'il y déploya lui procura l'estime de ses collègues, comme sa douceur et sa modestie lui avaient déjà acquis leur amitié.

Les évènemens de la guerre ne lui permettant pas de retourner dans son pays, il chercha dans le nôtre à exercer ses talens. M. Dubois, l'un de nos plus dignes instituteurs, le reçut chez lui comme professeur ; mais la fatigue des travaux auxquels Mascheroni s'était livré toute sa vie avec tant d'acharnement avait ruiné sa santé. M. Dubois ne lui demanda aucun service, et le séjour du savant italien dans sa maison ne fut pour lui qu'une occasion bien honorable d'exercer sa bienfaisance. Mascheroni reçut chez M. Dubois, pendant un an que dura sa maladie, les soins les plus tendres et les plus hospitaliers. Vainement les médecins français réunirent leurs talens et les ressources de leur art : rien ne put arrêter les progrès du mal, et Mascheroni fut enlevé aux sciences et à ses amis le 25 messidor an VIII (14 juillet 1800), à l'âge de 50 ans (1).

On doit s'étonner et regretter que Bossut n'ait pas donné place, dans son Histoire des Mathématiques, à un savant qui semblait y avoir acquis quelques droits par plusieurs ouvrages, et particulièrement par la Géométrie du Compas.

Delambre a rendu plus de justice au géomètre italien dans le rapport historique qu'il fit, en 1808, au nom de la classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, sur les progrès des Sciences mathématiques depuis 1789 jusqu'en 1808.

Après avoir rappelé, dans le discours qui précède le rapport, que la Géométrie ancienne n'admettait dans ses démonstrations que ce qui peut s'exécuter avec la règle et le compas, Delambre ajoute : « Mascheroni, » plus sévère encore, voulut se passer de la règle. On a » lieu d'être étonné du grand nombre de propositions » nouvelles et piquantes qu'il a su trouver dans un sujet » en apparence épuisé. Ses principaux théorèmes avaient » été apportés en France par le vainqueur et le pacifi- » cateur de l'Italie. On désira connaître l'ouvrage en- » tier, et bientôt il en parut une traduction française. »

Dans le rapport même, Delambre revient sur la Géo-

(1) Et non pas *en* 1808, *âgé de* 58 *ans*, comme le disent la Biographie des Contemporains et la Biographie universelle, auxquelles nous avons déjà reproché d'autres inexactitudes.

métrie du Compas ; et, pour ne point altérer le sens de ses expressions, nous nous faisons un devoir de les rapporter textuellement : « Avant de quitter la Géométrie » élémentaire, nous parlerons, dit le célèbre géomètre » français, de la Géométrie du Compas, due à l'inté» ressant et malheureux Mascheroni, enlevé par le » chagrin que lui causaient les malheurs de son pays, » au moment où les succès des armées françaises, com» mandées par le héros qui le premier avait apporté en » France les théorèmes les plus curieux de son livre, » allaient lui rendre une patrie qu'il honorait par ses » talens. C'est, en effet, une idée originale que de ré» duire au seul usage du compas la solution de toutes » les questions de la Géométrie élémentaire, et de créer » ainsi, dans une partie qui paraissait épuisée, un sys» tème de propositions aussi considérable que nouveau. » Celles qui regardent la division du cercle méritent » surtout d'être remarquées, parce qu'elles pourraient » avoir des applications utiles dans la construction des » instrumens de Mathématiques et d'Astronomie. »

Le secrétaire perpétuel de la classe des Sciences physiques et mathématiques fait bien connaître, dans les passages précédens, le véritable mérite de la Géométrie du Compas ; et l'hommage touchant rendu par un savant, tel que Delambre, à la sensibilité comme au talent de Mascheroni, répare bien honorablement le tort que pourrait faire à sa mémoire l'oubli commis par Bossut, oubli d'autant plus singulier, qu'il n'avait guère pu se dispenser de consulter le rapport fait par Delambre le 6 février 1808, pour son Histoire des Mathématiques qui ne parut qu'en 1810.

TABLE.

Avertissement du Traducteur sur la 2e édit. Page v

Notice biographique du Trad. sur Mascheroni. . . vij

Errata. 3

Préface. 5

Livre I. Préliminaires. 25

—— II. De la division de la circonférence et des arcs du cercle. 41

—— III. De la multiplication et de la division des distances en ligne droite. 65

—— IV. De l'addition et de la soustraction des distances ; de la situation des perpendiculaires et des parallèles. 83

—— V. Des distances proportionnelles. . . 95

—— VI. Des racines. 105

—— VII. De l'intersection des lignes droites avec les arcs de cercle et entre elles. 129

—— VIII. De la construction, de la multiplication et de la division des angles et des lignes trigonométriques. . 195

LIVRE IX. Des figures semblables et des polygones réguliers. . . . . . . Page 147
—— X. Des centres. 175
—— XI. Problèmes divers. 185
—— Problèmes résolus par approximation. . . 259

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Page 99, ligne 9, au lieu de fig. 32, *lisez* fig. 39

110, 11, des nombres entiers, *lisez* des racines des nombres entiers

150, 11, sera à celle de la plus grande, comme 2 est à 5, *lisez* sera égale aux $\frac{2}{5}$ de la plus grande

214, 12, d'une hélice, *lisez* d'une ellipse

261, 10, et de choisir parmi ceux, *lisez* et de choisir ceux

263, 16, $-\cos. A + (45^{\circ})$, *lisez* $-\cos.(A + 45^{\circ})$

318, 8, à la moitié de celle de la sphère, *lisez* à celle de la sphère

322, 17, 0,000019, *lisez* 0,0000019

PRÉFACE
DE L'AUTEUR.

La première idée qui m'engagea à tenter la carrière nouvelle de la Géométrie du Compas fut celle-ci : puisque l'on fait chaque jour de si belles découvertes en avançant dans les Mathématiques, ne pourrait-on pas, en revenant sur ses pas, trouver quelque endroit encore inconnu dans le vaste champ qu'elles offrent à parcourir? Jusqu'ici on a regardé en Géométrie comme les solutions les plus simples celles qui n'exigeaient que le secours de la règle et du compas : c'est-à-dire de la ligne droite, la plus simple des lignes, et du cercle, la plus simple des courbes. A ces deux instrumens des problèmes, si l'on peut s'exprimer ainsi, qui pendant un temps constituaient et déterminaient la Géométrie élémentaire, on ajouta dans la suite les courbes coniques; celles-ci furent suivies des courbes supérieures au second degré, et des transcendantes de diverses espèces.

Le domaine de la Géométrie continua à s'accroître à l'aide de ces profondes recherches et avec le nouveau secours de l'analyse finie et infinitésimale, au point que les inventions qui d'abord avaient fixé l'admiration des anciens, et mérité les sacrifices de Thalès et de Pythagore, sont devenues l'apanage des enfans de nos jours. Je me dis à moi-même : ne pourrais-tu pas revenir aux élémens, en rentrant dans la ligne de démarcation, et chercher s'il n'est jusqu'ici rien resté en arrière qui ait été négligé? Est-il bien vrai que les problèmes élémentaires d'Euclide soient de la plus simple construction possible? Ne pourrait-on pas décomposer l'élément mathématique en ses élémens fondamentaux, la règle et le compas, à l'exemple de ceux qui ont décomposé l'eau en deux airs, et un air regardé jusqu'à présent comme simple, en deux autres substances? Alors je m'avisai que la règle seule, ne pouvant servir qu'à conduire une ligne droite, on pouvait peut-être n'employer que le compas, non pour décrire seulement un cercle ou un arc, mais en en décrivant plusieurs de différens centres et avec diverses ouvertures, trouver par le moyen des sections mutuelles de ces cercles plusieurs points utiles et précisément les points cherchés de position dans un problème quelconque. J'ai remarqué jusqu'ici que cette branche n'avait encore été cultivée par aucun mathématicien, et que les solutions de ce genre, obtenues par hasard à l'aide du compas seul, auraient été, par leur construction, plus élémentaires que toute autre.

Deux raisons cependant me firent hésiter pendant quelque temps à entreprendre cet ouvrage, dans la crainte qu'en me servant de ce moyen, mes efforts ne devinssent inutiles. D'abord je ne voyais pas trop ce qui résulterait de trouver avec le seul compas des points que d'autres ont trouvés avec le compas et la règle réunis. Je craignais en second lieu, et cela était bien naturel, que mes essais ne fussent pas couronnés du succès que j'en espérais; mon travail alors eût été perdu. Les constructions faites avec le seul compas pour déterminer les points de la Géométrie élémentaire, pouvaient être encore plus compliquées que celles déjà connues où l'on employait de plus la règle. Ma théorie aurait ainsi manqué d'élégance, et la pratique de précision; ainsi j'étais sur le point d'abandonner mon entreprise.

Dans mon incertitude, il m'arriva par hasard de relire la manière avec laquelle Graham et Bird en Angleterre divisèrent leurs grands quarts de cercle astronomiques (*Encyclopédie méthodique*, article

Quart de cercle mural). Celui qu'a fait Graham pour l'observatoire de Greenwich, non-seulement a servi de modèle à la plus grande partie de ceux qu'on a faits depuis, mais encore a mérité par sa précision d'être regardé par les astronomes comme un des meilleurs jusqu'à ceux de Ramsden. Je m'aperçus donc que la division de cette célèbre machine avait été faite à l'aide du compas seul sans la règle ; rien de plus intéressant que la description des moyens employés par cet artiste, dans cette longue et ingénieuse opération. Je n'entrerai point ici dans l'explication des motifs qui firent exclure la règle ; ils seront facilement sentis par ceux qui se connaissent en travaux de ce genre. Pour démontrer en général la supériorité de l'usage du compas sur celui de la règle, quand il s'agit de décrire avec précision des lignes à l'épreuve du microscope, il suffit de dire qu'avec une règle tant soit peu longue, il est presque impossible de garantir la précision de tous les points qu'on trace, tant il est difficile qu'elle soit rigoureusement droite dans toute sa longueur. Fût-elle même très droite, les praticiens savent que la trace d'une ligne menée le long de la règle porte avec elle une incertitude de parallélisme dans le mouvement de l'axe de la pointe qui marque, ou de parfaite application de cette pointe à l'arète de la règle. Le compas n'est point sujet à ces deux inconvéniens, il suffit que son ouverture soit fixe et les pointes très fines; en plaçant l'une d'elles en un point pris pour centre, l'autre décrit un arc aussi exact qu'il est possible. En lisant la description de la méthode de Graham, je remarquai qu'il rencontra quatre difficultés :

La première, fut d'être obligé d'opérer par tâtonnemens. En parlant en effet de l'arc de soixante degrés qu'il détermina par le moyen du rayon, on voit que toutes les subdivisions furent faites par essais. Les anciens ne nous ont laissé le moyen de diviser la circonférence avec le seul compas qu'en six parties, comme il est enseigné et démontré dans la quinzième proposition du liv. 4 des Élémens d'Euclide; Graham ne put donc obtenir une précision géométrique que pour un point.

Le second inconvénient fut la perte de temps, que les plus habiles mêmes ne sauraient éviter dans les expériences.

Le troisième fut d'avoir été obligé d'employer deux plans, un pour les essais, et l'autre qui était le quart de cercle lui-même, sur lequel il transposait les résultats; ce qu'il faisait pour ne pas gâter, par les essais sur le quart de cercle, la surface du limbe.

Enfin, la quatrième difficulté fut d'avoir été obligé d'exécuter deux divisions différentes. Comme la division du quart de cercle en 90° entraînait avec elle les subdivisions d'un arc en 3 et en 5 parties, et que les essais de ces subdivisions étaient imparfaits par le trop grand nombre d'erreurs inévitables, il voulut tenter une autre division du même quart de cercle, approchant de la première, qui ne divisait l'arc que de deux en deux parties. Ayant donc divisé l'arc de 60° en deux parties, il eut l'arc de 30°; le quart de cercle se trouvant par là divisé en 3 parties, avec les subdivisions par 2, on eut ensuite la 6^{me}, la 12^{me} partie, jusqu'à ce qu'enfin le quart restât divisé en 96. Cette division était celle qui méritait le plus de confiance; mais l'autre division en 90 degrés, devant servir immédiatement aux astronomes, fut comparée à la première, et corrigée par le moyen d'une table calculée à cet effet.

Tous ces inconvéniens engagèrent sans doute Bird à recourir à une autre méthode pour diviser ses quarts de cercle. Elle consistait à déterminer les arcs par leurs cordes qu'il prenait sur une échelle divisée en parties égales. Elle n'était pas cependant exempte d'imperfections, puisqu'elle manquait d'abord de précision géométrique, et qu'en second lieu, le quart de cercle avait nécessairement les inexactitudes qui se trouvaient sur l'échelle.

L'importance des instrumens astronomiques m'engagea à considérer mon projet de la Géométrie du compas sous un point de vue plus favorable. Je commençai à croire que j'aurais beaucoup fait, si je réussissais à diviser la circonférence en plus de six parties par le secours du compas seul ; j'aurais rendu aux artistes qui travaillent aux instrumens astronomiques un service d'autant plus important, que mes subdivisions de la circonférence auraient été plus étendues et plus conformes à la division du quart de cercle en 90°. Je fournissais à cette classe de mécaniciens un moyen de précision géométrique dans leurs divisions. Je leur épargnais le temps des tâtonnemens, la nécessité de faire deux divisions à la fois et sur deux plans différens, et surtout je rendais inutile l'usage de l'échelle dont on ne peut garantir l'exactitude, bien loin qu'elle soit d'une rigueur géométrique. Il ne me restait que la seule crainte que ma nouvelle méthode ne fût compliquée et trop longue pour être commode dans la pratique.

Je me mis néanmoins à l'ouvrage. Voyant que je ne devais pas attendre beaucoup de l'application de l'Algèbre à la Géométrie, j'eus recours à d'autres moyens purement géométriques. Je ne les indique pas ici, parce que dans cette nouvelle carrière je n'ai pas tenu toujours la même route, et que je dois beaucoup au hasard. Ce n'a été souvent qu'après maintes tentatives différentes que j'ai obtenu le résultat que je cherchais.

Je laisse à d'autres le soin d'examiner la chaîne qui lie entre eux les problèmes de cette nouvelle théorie; ils parviendront peut-être à suivre le fil qui conduit par ordre de l'un à l'autre, et qui, s'il eût été découvert dès le commencement, aurait rendu plus courte et plus facile l'invention de la Géométrie du compas.

J'adressai alors le premier essai de mon entreprise à M. Annibal Beccaria, avec une lettre que je fis insérer dans le journal de Brugnatelli. Cet excellent artiste, alors Patrice milanais, depuis membre de la municipalité et du comité d'instruction publique de cette ville, réunit à la gloire d'être le frère du célèbre auteur du livre *des Délits et des Peines*, celle qui lui est propre d'exécuter avec la plus grande habileté tous les instrumens de Mathématiques les plus délicats.

Mon premier essai consistait dans la

méthode de diviser la circonférence en 24 parties, à l'aide d'un seul point pris hors d'elle. L'exécution de cette division est la plus simple qu'on puisse espérer, et je l'ai conservée dans cet ouvrage. Celle que j'avais donnée en 120 parties était trop compliquée; j'en ai trouvé une beaucoup moins longue, et telle même que je la crois la plus courte possible. J'y avais ajouté aussi une construction très prompte pour obtenir les racines carrées des nombres, depuis l'unité jusqu'à 10; je l'ai encore conservée dans cet ouvrage.

J'ai omis les autres problèmes exposés dans cette lettre, parce qu'ils étaient trop compliqués, ou d'une approximation insuffisante. Je suis parvenu depuis, comme on le verra, à diviser très promptement la circonférence en 240 parties, avec une exactitude géométrique, par le moyen du compas seul et de trois points pris hors de la même circonférence. Chacune de ces parties est un degré et demi de la division en 360°, usitée jusqu'ici. Je partage tout arc quelconque en deux parties, et cela géométriquement, par approximation. Je divise la circonférence, avec trois points seulement, en degrés et quarts de degrés, sans erreur d'un sixième de seconde.

Avec ces mêmes points je la divise en minutes, avec erreur de moins d'une seconde. Je me suis flatté que les astronomes pouvaient être contens de cette précision, parce que je ne sache pas d'artiste, même parmi les plus célèbres, qui ait passé outre.

Cependant je ne croyais pas encore avoir assez fait, si ma nouvelle théorie ne servait pas aussi à la nouvelle division du cercle.

On sait que les Français, heureux de posséder dans leur patrie les premiers géomètres de l'univers, ont enfin, d'après leurs conseils, adopté pour tous les arts la seule division décimale tant souhaitée des savans.

Sans doute que cette division réussira avec difficulté dans les autres contrées, à cause des préjugés, et surtout de la force d'inertie; mais elle s'établira enfin d'une manière inébranlable partout où l'on aime les sciences, et où les intérêts du commerce sont bien entendus. Une des divisions les plus difficiles à changer, était celle de la circonférence du cercle en 360°, et la subdivision en 60 parties, employée par toutes les nations; et cela, à cause des fatigans travaux qu'il fallait nécessairement entreprendre pour refaire les tables trigonométriques dans un nouveau système; mais l'énergie d'une grande nation qui se régénère ne connaît point d'obstacles. Ayant déterminé 400 parties ou degrés dans la circonférence, le quart du cercle, qui est le fondement de la

Trigonométrie, se trouve divisé en 100 parties, chacune desquelles se subdivise en 100 autres, et ainsi de suite.

Les tables des sinus naturels et artificiels de ces divisions et subdivisions sont déjà calculées et imprimées. Mais pour que rien ne manque à la stabilité et à la certitude de la précision des nombres, on a entrepris en France de les faire imprimer en caractères soudés en plomb. On voit déjà de ces nouvelles tables exécutées d'après la méthode nouvelle et ingénieuse de *Firmin Didot*, appelée stéréotype.

Une société de calculateurs très habiles en prépare encore d'autres plus étendues et avec un plus grand nombre de décimales, sous la direction du célèbre *De Prony*. Toutes ces circonstances m'engagèrent à chercher une méthode, au moins d'approximation, pour diviser la circonférence en ces nouveaux degrés et parties de degrés. J'ai réussi, avec trois points seulement et très peu d'ouvertures de compas, à obtenir cette nouvelle division décimale de la circonférence sans erreur d'une seconde.

Quand je n'eusse fait autre chose que ce que je viens d'indiquer, cela aurait suffi à la recommandation de l'usage du compas seul. Mais en avançant, j'ai trouvé qu'il n'y avait point de problème de Géométrie élémentaire qui ne puisse se résoudre avec ce seul instrument, c'est-à-dire en ce sens que le compas suffit pour trouver tous les points demandés par le problème, pour la position et la détermination des droites dont on a besoin. Ceci intéressait la théorie; j'ai voulu épuiser le sujet, donner tous les élémens pour tous les cas possibles, et démontrer qu'on peut trouver avec le compas seul tous les points qu'Euclide et les autres auteurs de Géométrie élémentaire, enseignent à trouver avec le secours de la règle et du compas réunis.

Quoique tous les problèmes élémentaires résolus avec le seul compas n'aient pas une solution assez simple, j'ose dire pourtant que la plus grande partie des plus nécessaires sont résolus avec assez de brièveté et de simplicité, pour engager les praticiens à rejeter le secours de la règle, et à se servir du seul compas pour trouver les points fondamentaux. Les moyens que je propose dans ce livre justifieront ce que j'avance. Je n'indiquerai point ici tous les problèmes semblables qui m'ont paru de quelque importance : en voici cependant quelques-uns.

Si l'on cherche avec le seul compas le centre d'un cercle, on le trouvera promptement et sans peine; on aura de même les troisièmes et les quatrièmes proportionnelles, et par conséquent les moyennes proportionnelles.

On pourra aussi, avec le seul compas, construire des polygones réguliers inscrits ou circonscrits au cercle (1). Le seul compas suffira encore pour trouver les racines carrées des nombres, pour doubler, multiplier les surfaces des carrés, des cercles et des autres figures semblables. On résoudra avec une exactitude géométrique tous ces problèmes, car leur nature les en rend susceptibles. Ensuite, par approximation, on trouvera une longueur égale à la circonférence d'un cercle, ou un arc égal au rayon, ou un carré égal à un cercle, ou un cercle égal à un carré, ou une sphère égale à un cube, ou un cube égal à une sphère, ou un cube double, ou triple, ou quadruple d'un autre. On pourra résoudre tous ces problèmes en employant des sections d'arcs, ou en déterminant, toujours sans autre instrument que le compas, la longueur des

---

(1) Les ingénieurs militaires trouveront peut-être ici quelque chose d'utile pour leurs travaux.

côtés ou des rayons dont on a besoin pour les figures demandées.

Voilà, en peu de mots, le fond de la Géométrie du compas que je présente au public. Quant aux démonstrations, je me suis servi, autant que j'ai pu, de la Géométrie des anciens; cela m'a paru plus conforme à la nature de mes problèmes, et plus court. Partout où les procédés géométriques devenaient trop longs pour obtenir le résultat, j'ai employé le calcul; j'ai donc en même temps recherché la brièveté, la clarté, l'élégance autant qu'il m'a été possible.

J'ai cité Euclide, ce grand maître en fait d'élémens. Lorsqu'il est question de proportions, les numéros des propositions qne je cite sont ceux de *Tacquet*, parce que son livre est plus répandu en Italie que l'ancien texte d'Euclide.

J'ai placé dans le onzième livre, en faveur des artistes qui ne voudront que s'amuser avec le compas, plusieurs problèmes récréatifs tirés de *Pappus*, d'*Ozanam*, de *Simpson* et de plusieurs autres auteurs. Voilà tout ce que j'avais à dire à mes lecteurs sur la Géométrie du compas. Elle est, quant à la construction de ses problèmes, la plus simple et la plus élémentaire qu'on puisse désirer, et je ne sache pas que cette matière ait été traitée jusqu'ici par personne.

GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

1. J'appelle *Géométrie du Compas* celle qui, par le moyen du compas seulement, et sans le secours de la règle, détermine la position des points.

Étant donnés, par exemple, deux points A et E (*figure* 1[re]), si l'on cherche le troisième point D, qui soit aussi éloigné de chacun d'eux qu'ils le sont entre eux, qu'on décrive d'un intervalle égal au rayon AE, et des points A et E comme centres, les deux cercles EDB, ADV, qui se coupent au point D, ce point D sera le point cherché, puisqu'il sera éloigné des points A et E d'un intervalle égal à AE.

(*Prop.* 1, *liv.* 1 *des Elémens d'Euclide.*) Ce point D a été trouvé avec le seul compas, sans le secours de la règle.

2. Il peut arriver que l'on trouve la position d'un point avec le seul compas, mais que pour démontrer la proposition, on ait besoin de la règle dans la construction de la figure.

Soient, par exemple, donnés deux points A et B (*fig.* 2) qui soient éloignés entre eux d'un certain intervalle pris pour unité, ou qu'on fait $= 1$; si l'on cherche un point D qui soit éloigné de B de l'intervalle $BD = \sqrt{3}$, on résoudra le problème de la manière suivante :

Du centre A et d'un rayon AB, soit décrit le cercle BCD; avec le même rayon et du centre B, soit décrit un arc qui coupe la circonférence au point C; puis du centre C et avec le même rayon, soit décrit un arc qui coupe plus loin la circonférence en D; on aura en D le point cherché, ainsi trouvé sans le secours de la règle.

Pour démontrer néanmoins que l'intervalle $BD = \sqrt{3}$, on aura besoin de lignes droites qui se tracent avec la règle. Soit BE le diamètre du cercle BCD, si l'on mène les droites BD, DE, le triangle BDE sera rectangle en D (31, *liv.* 3), et l'on aura

$$(BE)^2 = (BD)^2 + (DE)^2;$$

d'où

$$(BD)^2 = (BE)^2 - (DE)^2.$$

Mais l'intervalle BC étant égal à $CD = AB$, on aura encore $DE = AB$ (15, *liv.* 4), ou $DE = 1$ et $BE = 2$. On aura donc

$$(BD)^2 = 4 - 1 = 3;$$

d'où

$$BD = \sqrt{3};$$

ce qu'il fallait démontrer, et ce qu'on ne pouvait faire sans la règle. Cette proposition est la 12ᵉ du livre 13 d'Euclide.

3. De la définition précédente (1), il résulte qu'à la Géométrie du compas appartiennent tous les problèmes que l'on peut résoudre avec le seul compas, quoiqu'on ne puisse pas les démontrer avec ce seul instrument. Tel est le problème précédent (2).

4. Cette Géométrie sera, comme on le verra par les exemples, d'un très grand usage dans la pratique pour trouver des points avec la plus grande précision possible, et même beaucoup plus promptement avec le seul compas, qu'en y joignant le secours de la règle.

5. Nous résoudrons donc les problèmes avec le seul compas, et l'on pourra ensuite, pour les

démonstrations, se servir de constructions faites, suivant l'usage, avec la règle et le compas. C'est pourquoi nous citerons les propositions et les livres d'Euclide.

6. On aura atteint complètement le but de ce traité, si l'on n'a omis aucun des élémens nécessaires pour que l'on puisse, avec le seul compas, déterminer, dans quelque problème que ce soit, tous les points qui jusqu'ici n'ont pu être déterminés qu'avec la règle et le compas réunis.

7. Nous ne placerons pourtant pas ici tous ces problèmes; mais après avoir démontré les élémens nécessaires et suffisans pour tous, nous en résoudrons un grand nombre des principaux, et surtout ceux qui sembleront les plus utiles, ou préférables à cause de leur élégance.

8. Nous ajouterons ici en faveur des artistes, pour lesquels, en grande partie, cet ouvrage est écrit, que, bien convaincus de l'importance des erreurs qui résultent de l'écart et du rapprochement de branches du compas pour obtenir avec précision des ouvertures différentes, nous aurons soin de résoudre les problèmes avec le plus petit nombre possible d'ouvertures de compas. Il serait même mieux que l'artiste eût à sa disposition autant de ces compas *fideles*

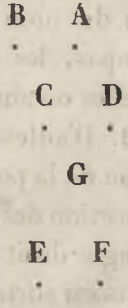
(ainsi appelés, parce qu'on peut s'assurer qu'ils conservent exactement l'ouverture donnée), qu'il y a d'ouvertures exigées par la solution du problème; car il arrivera souvent que nous serons obligés de nous servir plusieurs fois de la même ouverture, après en avoir employé une ou plusieurs autres : alors, sans élargir ou resserrer un seul compas, nous reprendrons le compas mis de côté qui conserve cette ouverture. C'est pourquoi nous appellerons quelquefois du nom de premier, second, troisième compas, les ouvertures successives avec lesquelles on aura résolu le problème.

9. D'ailleurs, comme pour la précision pratique de la position d'un point, il importe que la section des lignes qui le déterminent se fasse à angle droit ou approchant, nous ferons toujours en sorte qu'un arc en coupe un autre, ou à angle droit, ou au moins sous un angle qui en diffère peu.

10. Afin d'être plus courts, sans cependant devenir obscurs, en indiquant la construction des figures, nous emploierons souvent des expressions abrégées, que la seule inspection de la figure fera bientôt comprendre. Par exemple, dans la figure 2, au lieu de dire : « *Avec le rayon* AB, *et du centre* C, *soit dé-*

» *crit un arc qui coupe la circonférence* BCD » *au point* C; *puis avec le même rayon et du* » *centre* C, *qu'on décrive un arc qui coupe la* » *même circonférence en* D, *etc.* »; nous dirons seulement : « *Soit fait à* A B = B C = C D, etc. » En effet, c'est assez dire que les points B, C et D, avec lesquels on indique la même circonférence BCD, sont des points de cette circonférence; ainsi il n'y a aucun risque d'équivoque.

11. De même étant donnés par exemple, trois intervalles A B, C D, E F, quand on dira : « *Soit fait à* C D = EG, *à* A B = F G, » on devra entendre ceci : « *Avec un* » *rayon* CD, *et du centre* » E, *soit décrit un cercle* » *dans la circonférence duquel soit le point* G; » *ensuite, avec l'intervalle* A B *et du centre* F, » *soit décrit un autre cercle qui coupe le pre-* » *mier au point* G ».



12. D'autres fois dans les démonstrations, nous désignerons quelques lignes droites qui ne seront pas dans la figure, en nommant les deux points extrêmes auxquels elles devraient être menées, comme si, dans la figure 11, on

nommait la droite AB, ou bien CD. C'est ainsi que nous ferons quand il n'y aura pas à craindre d'obscurité, pour conserver la figure nette, et faire mieux paraître la construction faite avec le seul cercle.

13. *Lemme.* Si des deux centres A et B, et avec les rayons AP et AQ, on décrit des arcs qui se coupent en P et *p*, Q et *q*, les points Q, *q*, P et *p* seront dans la même ligne droite.

Démonstration. Tous les côtés des triangles AP*p*, BP*p* (*fig.* 3), étant respectivement égaux entre eux par construction, l'angle AP*p* sera égal à l'angle BP*p* (8, *liv.* 1). On démontre de même que APQ = BPQ. Donc

$$APp + APQ = BPp + BPQ.$$

Mais la somme de ces quatre angles est égale à quatre angles droits (13, *liv.* 1, *coroll.*). Donc chacune des sommes de deux angles est égale à deux angles droits. Donc la ligne QP*p* est droite (14, *liv.* 1). On démontre de la même manière que la ligne P*pq* est droite. Donc les points Q, P, *p*, *q* sont dans la même ligne droite.

14. Les choses étant comme au numéro précédent, les droites AB, P*p*, ainsi que celles AB, Q*q*, se couperont à angles droits en deux par-

ties égales au point M, et les droites QP, qp seront égales.

Démonstration. En effet, à cause de l'égalité des côtés des deux triangles APB, ApB, on a l'angle PAB $=p$AB (8, *liv.* 1). Mais on a encore APp=ApP (5, *liv.* 1). Donc aussi AMP = AMp (*corroll. prop.* 32, *liv.* 1). Donc ces deux angles sont droits (13, *liv.* 1), et la ligne Pp sera partagée en deux parties égales au point *M* par la démonstration de la *proposition* 10, *liv.* 1. On démontrera de la même manière que les droites Qq et AB sont divisées en deux parties égales au point M. Donc, en retranchant des droites égales QM et q M, les parties égales PM, p M, les restes Q P, q p seront égaux.

15. *Corollaire*. On aura donc

$$(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2 \ (47, \textit{liv. } 1).$$

16. *Lemme*. Tout étant comme au numéro 13, on aura

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ) + Pp.PQ.$$

Démonstration. Car on a $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + 2MP.PQ$ (12, *liv.* 2). Mais on a $2MP = Pp$ (14). Donc, etc.

17. *Lemme*. On aura donc

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - Pp.pQ.$$

Démonstration. Car on a

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - 2pM . pQ \ (13, \textit{liv. } 2).$$

Mais on a

$$2pM = pP \ (14).$$

Donc, etc.

18. *Corollaire* 1^er^. Puisque $pQ = pP + PQ$, on aura

$$(pQ)^2 = pP . pQ + PQ . pQ \quad (2, \textit{liv. } 2);$$

d'où soustrayant $pP . pQ$, on a

$$(pQ)^2 - pP . pQ = PQ . pQ;$$

et substituant cette valeur dans celle de $(AQ)^2$ (17), on aura

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ . PQ;$$

d'où l'on tire, en soustrayant $(Ap)^2$ de part et d'autre

$$(AQ)^2 - (Ap)^2 = pQ . PQ.$$

Donc en effectuant la multiplication de $AQ + Ap$ par $AQ - Ap$, on trouvera

$$(AQ + Ap)(AQ - Ap) = (AQ)^2 - (Ap)^2;$$

et par conséquent

$$(AQ + Ap)(AQ - Ap) = pQ . PQ;$$

d'où (par la 16ᵉ *proposition* du *liv.* 6) on déduit la proportion

$$pQ : AQ + Ap :: AQ - Ap : PQ;$$

où substituant de même AP au lieu de Ap, et transposant les extrêmes,

$$PQ : AQ + AP :: AQ - AP : PQ.$$

De ces deux proportions on déduit expressément ce fameux théorème :

Dans un triangle quelconque, un côté quelconque est à la somme des deux autres côtés, comme leur différence est à la différence ou à la somme des segmens que fait sur ce côté la perpendiculaire menée de l'angle opposé, suivant qu'elle tombe en dedans ou au dehors du triangle.

19. *Corollaire* 2. On aura AQ $=$ pQ. Otant de part et d'autre les deux termes égaux $(AQ)^2$, $(pQ)^2$, et ajoutant des deux côtés la partie $pP.pQ$, on aura $pP.pQ = (Ap)^2$.

20. *Lemme.* Tout étant comme dans le nº 13, si l'angle RpQ est droit (*fig.* 4), et que l'angle RpS $=$ RpA, et pS $= p$R $= p$A, A S sera parallèle et égale à Pp, et l'on aura

p

$$(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS.PQ.$$

Démonstration. En effet, si des deux angles droits RpQ, Rpq, on soustrait les deux angles égaux RpA, RpS, il restera les deux angles égaux ApP, Spq. Mais $ApP = APp$ (5, *liv*. I); donc $Spq = APq$; donc AP, Sp sont parallèles (29, *liv*. I). Mais elles sont aussi égales par construction; donc les deux droites AS, Pp, sont égales et parallèles (33, *liv*. I).

On a aussi

$$(RQ)^2 = (Rp)^2 + (pQ)^2 \text{ (47, liv. I)} = (Ap)^2 + (pQ)^2;$$

et par le *lemme* 17,

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP.pQ.$$

Donc

$$\begin{aligned}(AQ)^2 &= (RQ)^2 - pP.pQ \\ &= (RQ)^2 - AS.pQ.\end{aligned}$$

21. *Lemme*. Tout étant comme dans les n^{os} **13** et **20**, on aura $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS.pQ$.

Démonstration. En effet, si on fait $ST = Sp$, $pT = pP$, (**11**) les deux triangles SpT, APp auront les angles SpT, APp égaux entre eux (8, *liv*. I). Donc la ligne PpT est droite (27, *liv*. I). On aura ensuite

$$(SQ)^2 = (pS)^2 + (pQ)^2 + pQ.pT \text{ (16)}.$$

Mais on a

$$(pS)^2+(pQ)^2=(pR)^2+(pQ)^2=(RQ)^2,$$

et

$$pT=pP=AS.$$

Donc

$$(SQ)^2=(RQ)^2+AS.pQ.$$

Des deux *lemmes* précédens il résulte ce corollaire, que

$$(AQ)^2+(SQ)^2=2(RQ)^2.$$

22. *Lemme.* Si l'on a $AQ=pQ=BQ$ et $Ap=pB=pS$, pS étant sur le prolongement de Bp, on aura

$$AS.pQ=(Ap)^2.$$

Démonstration. Les triangles isoscèles AQp, BQp ayant les côtés égaux entre eux, on aura l'angle $QpA=QpB$ (8, *liv.* 1). On aura ensuite l'angle ApB, qui est la somme des deux autres, égal aussi à la somme des deux angles SAp, ASp (32, *liv.* 1), qui sont égaux entre eux, parce que le triangle ApS est isoscèle (5, *liv.* 1); chacun d'eux sera égal à l'angle $ApQ=pAQ$ (5, *liv.* 1). On aura donc le triangle pAS semblable au triangle QpA (32, *liv.* 1; 4, *liv.* 6); et de là

$$pQ:Ap::Ap:AS$$

et

$$AS.pQ = (Ap)^2 \text{ (17, } liv. \text{ 6).}$$

23. *Lemme.* Si l'on a AB = AC = BD, et AD = BC, on aura

$$DC.AB = (AB)^2 - (AD)^2.$$

Démonstration. Les deux triangles ADB, ACB (*fig.* 5) ayant les côtés respectivement égaux, seront égaux (8, et 26 *liv.* 1). Puis tous les deux étant posés sur la même base AB, seront compris entre les mêmes parallèles DC, AB (39, *liv.* 1). Si donc sur la ligne BA on prend BE = DC, DE sera égale et parallèle à BC (33, *liv.* 1) et aussi égale à DA; d'où les deux triangles isoscèles BDA, DAE, qui ont un angle commun en A, seront semblables (5, 32, *liv.* 1, et 4, *liv.* 6), et l'on aura

$$AB : AD :: AD : AE;$$

ce qui donne

$$AB.AE = (AD)^2 \text{ (17, } liv. \text{ 6).}$$

On a ensuite

$$AB.AE + AB.BE = (AB)^2 \text{ (2, } liv. \text{ 2);}$$

et substituant pour AB.AE sa valeur $(AD)^2$ et DC à la place de BE, on a

$$(AD)^2 + AB.DC = (AB)^2.$$

Enfin, soustrayant $(AD)^2$ on aura

$$DC.AB = (AB)^2 - (AD)^2.$$

24. *Lemme.* Si dans le cercle BμG (*fig.* 6) décrit d'un rayon AB, on élève au centre A la perpendiculaire Ae égale à la corde BG de l'arc BμG, et que du point e comme centre, et d'un rayon AB, on décrive un arc qui coupe la circonférence au point μ, l'arc Bμ sera égal à la moitié de l'arc BμG.

Démonstration. A cause de l'égalité des côtés des deux triangles ABG, Aμe, on a l'angle GAB $=$ Aμe (8, *liv.* 1). Soit divisé par la moitié l'angle Aμe par la droite μM, le triangle μeA étant isoscèle, on a l'angle μeM $= \mu$AM; ensuite les deux triangles μeM, μAM ayant leurs deux autres angles égaux, on aura encore le triangle μMe $= \mu$MA (*coroll.* 32, *liv.* 1); d'où μM est perpendiculaire à Ae (13 *liv.* 1), et parallèle à AB (29, *liv.* 1) et on aura l'angle MμA$=\mu$AB (27, *liv.* 1); donc μAB sera la moitié de l'angle GAB; donc aussi l'arc Bμ sera la moitié de l'arc BμG.

25. Si dans le parallélogramme ABMN (*fig.* 7), on a la diagonale MA égale aux côtés opposés MB, AN, le carré de l'autre diagonale BN est égal au carré de la première, plus aux deux carrés des deux autres côtés.

Démonstration. Soit divisé AB en deux parties égales au point m par la perpendiculaire Mm (10, 11, *liv.* 1); et sur la droite BA prolongée, soit pris An = Bm, on aura mn = BA = MN. On aura donc le parallélogramme MNnm (33, *liv.* 1), et l'angle NnB sera droit (27, *liv.* 1); d'où

$$(BN)^2=(AB)^2+(AN)^2+2AB.An. \quad (12,\ liv.\ 2.)$$

Mais An = $\frac{1}{2}$ AB; donc

$$(BN)^2 = (AN)^2 + 2\,(AB)^2 = (AN)^2 + (AB)^2 + (MN)^2.$$

26. Si dans un triangle quelconque BPE (*fig.* 8), on coupe en deux parties égales au point A la base BE, et que de l'angle opposé P, on mène la droite PA, la somme des carrés des côtés BP et PE sera égale à la somme des carrés égaux des deux segmens, en y ajoutant le double carré de la droite AP.

Démonstration. En effet, si l'on abaisse la perpendiculaire PR sur la base BE, on aura

$$(BP)^2=(BA)^2+(AP)^2+2BA.AR \quad (12,\ liv.\ 2).$$

On aura donc

$$(PE)^2 = (AE)^2 + (AP)^2 - 2AE.AR \quad (13 \textit{ liv. } 2).$$

Donc après avoir formé la somme des valeurs des deux carrés $(BP)^2$ et $(PE)^2$, et de plus BA étant égal à AE, on aura

$$\begin{aligned}(BP)^2 + (PE)^2 &= (BA)^2 + (AE)^2 + 2(AP)^2 \\ &= 2(AB)^2 + 2(AP)^2.\end{aligned}$$

LIVRE SECOND.

DE LA DIVISION DE LA CIRCONFÉRENCE ET DES ARCS DU CERCLE.

PROBLÈME.

27. *Partager la circonférence du cercle* BDa *en quatre parties égales.*

Solution. Soit fait dans la même circonférence (*fig.* 9) au rayon $AB = Bc = BC = CD = DE = Ed$, avec le premier compas (8), on aura $dc = cB = BA$ (15, *liv.* 4).

Soit fait aussi à $BD = Ba = Ea$ avec le second compas, et à $Aa = BF = Bf$ avec le troisième compas. On aura divisé la circonférence en quatre parties égales BF, FE, Ef, fB.

Démonstration. BAE étant un diamètre (15, *liv.* 4), et les triangles aAB, aAE ayant tous leurs côtés égaux, et par conséquent les angles aAB, aAE aussi égaux (8, *liv.* 1), ces deux angles seront droits (13, *liv.* 1). Donc

$$(aB)^2 = (AB)^2 + (aA)^2 \quad (47, \textit{liv. } 1);$$

et soustrayant de part et d'autre, $(AB)^2$, on a

$$(aB)^2 - (AB)^2 = (aA)^2.$$

Soit fait pour abréger $AB = 1$, on aura

$$(aB)^2 = (BD)^2 = 3 \quad (2);$$

donc

$$(aA)^2 = 3 - 1 = 2,$$

et encore

$$(BF)^2 = (aA)^2 = 2 = 1 + 1 = (AB)^2 + (AF)^2.$$

Donc, dans le triangle FAB, l'angle FAB sera droit (48, *liv.* 1), et par conséquent aussi FAE (13, *liv.* 1). Donc les arcs BF, FE seront égaux entre eux et quarts de cercle, ainsi que les arcs Bf, fE.

28. *Corollaire.* Les angles BAa, BAF étant droits, les trois points A, F, a seront dans la même ligne droite.

29. Nous avons donc déjà la circonférence divisée, savoir, en deux parties égales aux points B et E; en trois parties, aux points B, D, d (15, *liv.* 4); en quatre parties, aux points B, F, E, f (27); en six parties, aux points B, C, D, E, d, c (15, *liv.* 4).

PROBLÈME.

30. *Diviser une circonférence en huit parties égales.*

Solution. Tout étant comme au n° 27, soit fait à $AB = aG = aH$ (*fig.* 9), avec le premier compas; à $Aa = Gg = Hh$ avec le troisième compas, on aura aussi $gi = Aa$, et la circonférence sera divisée en huit parties égales aux points B, G, F, H, E, h, f, g.

Démonstration. Puisque $(Aa)^2 = 2$ (27), on aura $(Aa)^2 = (AG)^2 + (aG)^2$. L'angle aGA sera donc droit (48, *liv.* 1). D'où, à cause du triangle isoscèle aGA, les deux autres angles GAa, GaA, égaux entre eux (5, *liv.* 1), vaudront chacun la moitié d'un angle droit (32, *liv.* 1). Donc l'angle GAF, qui est le même que l'angle GAa (28), sera la moitié de BAF : donc aussi l'arc $GF = BG$. Mais, par construction, on a $Gg = BF$ (26, *liv.* 3): donc, ôtant de part et d'autre BG, on aura $GF = Bg$. On démontrerait de même que les autres arcs sont égaux. Donc la circonférence sera divisée en parties, égales chacune à la moitié du quart, et par conséquent en huit parties.

PROBLÈME.

31. *Diviser la circonférence en douze parties égales.*

Solution. Les choses étant comme au n° 27, qu'on fasse (*fig.* 9) à AB = FN = N*n* = FO = O*o* : la circonférence sera divisée en douze parties égales aux points B, N, C, F, D, O, E, *o*, *d*, *f*, *c*, *n*.

Démonstration. En effet, si des arcs égaux BF, FE, on retranche les arcs égaux BC, DE, les arcs restans CF, FD seront égaux. Or l'arc CD est la sixième partie de la circonférence ; donc l'arc CF sera la moitié de cet arc, et par conséquent le douzième de la circonférence. A cause de FN = CD, on aura encore CF = CN ; donc aussi à cause de FN = CB, on aura CN = NB. On démontrera de la même manière que chacun des autres arcs est le douzième de la circonférence.

PROBLÈME.

32. *Diviser la même circonférence en vingt-quatre parties égales.*

Solution. Les choses étant comme ci-dessus (30 et 31), soit fait (*fig.* 9) à AB = GL = LM

$= Gk = ki = HI = IK = Hm = ml$, de la première ouverture de compas, et le problème sera résolu.

Démonstration. En effet, si des arcs égaux GF, GB (30), on retranche les arcs égaux CF, NB (31), les restes GC et GN seront égaux. Or CN est la douzième partie de la circonférence; donc GC et GN en seront les vingt-quatrièmes parties.

On a ensuite FN = GL; retranchant la partie commune FG, on aura NG = FL. Donc aussi FL sera la vingt-quatrième partie de la circonférence, et par conséquent la moitié de FD (31). On démontrera de la même manière que les arcs DH, HO, FI, IC sont égaux, ainsi que tous les autres qui ont été déterminés ci-dessus.

33. Pour être plus courts, nous continuerons à nous servir, sans les citer, ainsi que nous venons de le faire, des propositions 26 et 27 du *liv.* 3 d'*Euclide*, que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les droites égales soutendent des arcs égaux.

34. Les anciens, au moyen du centre A et du rayon AB, divisaient, avec le compas seulement, la circonférence en six parties égales. Ils obtenaient les autres divisions avec la règle et le compas, en prenant différens points hors

de la circonférence. Nous sommes parvenus à déterminer un point a, qui seul suffit pour la diviser en vingt-quatre parties égales avec le compas seulement ; ce qui est en même temps plus expéditif, plus commode et beaucoup plus exact que les méthodes des anciens.

35. On peut remarquer en même temps la loi élégante que suivent les ouvertures de compas suffisantes pour cette division.

L'ouverture du premier compas $=\sqrt{1}$, celle du troisième $=\sqrt{2}$, et celle du deuxième $=\sqrt{3}$.

10 36. *Lemme.* Si dans le cercle BGE, on a le rayon $AB=1$, et que l'arc BG soit la huitième partie de la circonférence, on aura le carré de sa corde BG, c'est-à-dire $(BG)^2 = 2-\sqrt{2}$.

Démonstration. Sur le diamètre BE, soit abaissée la perpendiculaire GP. Dans le triangle rectangle GPA, à cause de l'angle $BAG = 45°$, on aura aussi $AGP = 45°$ (32, *liv.* 1), et par conséquent $GP = PA$. Or, on a $(AG)^2 = (PG)^2 + (AP)^2$ (47, *liv.* 1); donc $(AG)^2 = 2(AP)^2$, ou $2(AG)^2 = 4(AP)^2$, ou encore $2 = (2AP)^2$; donc

$$\sqrt{2} = 2AP;\ AP = \frac{1}{2}\sqrt{2};\ BP = AB - AP$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

On a ensuite, à cause de l'angle droit BGE (31, *liv.* 3),

$$BP : BG :: BG : BE \quad (8, 4, \textit{liv. } 6);$$

donc (17, *liv.* 6)

$$(BG)^2 = BP \times BE = 2BP;$$

donc

$$(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}.$$

37. *Lemme.* Les choses étant comme au n° 36, on aura

$$(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}.$$

Démonstration. $(BE)^2 = (GE)^2 + (BG)^2$ (47, *liv.* 1). Mais $(BE)^2 = 4$, $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (36) :

donc

$$4 = (GE)^2 + 2 - \sqrt{2};$$

donc

$$2 = (GE)^2 - \sqrt{2},$$

et par conséquent

$$(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}.$$

PROBLÈME.

38. *La circonférence étant déjà divisée en vingt-quatre parties égales* (32), *la sous-diviser en quarante-huit.*

Solution. Soit fait à $aN = Be = Ec$ (11)

avec un quatrième compas, et à $AB = e\mu = e\nu$ avec le premier compas. Les arcs $K\mu$, μN, $M\nu$, νO seront les quarante-huitièmes parties de la circonférence.

Démonstration. Si l'on conçoit les droites Aa, Nn, aN, aB (12), l'angle BAa étant droit, l'angle $BAN = BAn$ (31) et les trois rayons AN, AB, An égaux, on aura

$$(aN)^2 = (aB)^2 - Nn.Aa \ (20).$$

Donc, à cause de $aN = Be$, on aura aussi

$$(Be)^2 = (aB)^2 - Nn.Aa.$$

De plus les triangles eAB, eAE étant rectangles en A (8, 13, *liv.* 1), puisque leurs côtés sont respectivement égaux, on aura

$$(Be)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2 \ (47, \textit{liv. } 1),$$

et par conséquent

$$(AB)^2 + (Ae)^2 = (aB)^2 - Nn.Aa;$$

mais on a $(aB)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2$, donc

$$(AB)^2 + (Ae)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2 - Nn.Aa;$$

d'où, retranchant $(AB)^2$ de part et d'autre, on a

$$(Ae)^2 = (Aa)^2 - Nn \times Aa.$$

Mais $(Aa)^2 = 2$ (27) et $Nn = 1$, puisque Nn est la corde d'un arc de 60 degrés (31); donc $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2} =$ le carré de la corde de l'arc BG, qui est la huitième partie de la circonférence (30 et 36.) On aura donc l'arc $B\mu = \mu G$ (24); retranchant ensuite de chacun de ces arcs, les arcs égaux BK, NG (32), les restes $K\mu$, μN seront égaux; et comme l'arc KN est la vingt-quatrième partie de la circonférence (32), chacun d'eux en sera la moitié, et par conséquent la quarante-huitième partie de la circonférence. Il en sera de même des arcs $K\mu$, μN, $M\nu$, et νO.

39. On pourrait aussi avec la même construction (*fig.* 11), par le moyen des quatre compas ci-dessus indiqués, diviser la circonférence en quarante-huit parties égales (8). En effet, si avec le premier compas d'une ouverture $= AB$, on divise la circonférence en six parties, en commençant du point μ, les arcs IF, HO, *mo*, *fl*, *ng* seront partagés en deux parties égales; puis divisant la circonférence en six parties, en commençant du point ν, on aura divisé en deux parties égales les arcs *oh*, *fi*, *nk*, NG, FL. Divisant ensuite la circonférence en quatre parties avec le troisième compas d'une ouverture égale à Aa, en partant

du point μ, les arcs restans LD, *ic* seront divisés en deux parties égales; et en partant du point ν, on partagera de même les arcs IC, *ld*. Enfin divisant encore avec le premier compas la circonférence en six parties égales, mais en partant des derniers points trouvés avec le troisième compas, tous les autres arcs seront divisés en deux parties égales.

La démonstration est la même que celle nº 32.

PROBLÈME.

40. *Diviser la circonférence* BD*d en cinq parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans le problème du numéro 31, qu'on fasse (*fig.* 12) à A*a* = N*b* = O*b*, avec le troisième compas. Que l'on fasse à B*b* = BQ, l'arc BQ sera la cinquième partie de la circonférence.

Démonstration. Si l'on conçoit menées les deux droites NO, AF, qui se coupent en X, à cause des triangles équilatéraux FNA, FOA, la droite AF sera divisée en deux parties égales au point X (10, *liv.* 1), ainsi que NO (14). Puis l'arc NFO étant égal à l'arc BCD (31), le carré de sa corde NO sera égal au carré de la corde BD $= 3$ (2). D'où le carré de sa moitié, c'est-à-dire $NX^2 = \frac{3}{4}$ (*prop.* 4, *liv.* 2, *coroll.*). De plus, les points b, A, X sont en ligne droite, et le triangle NbX est rectangle (12, 13, 14). On a aussi $(Nb)^2 = (Aa)^2 = 2$ (27); d'où l'on tire

$$(Xb)^2 = (Nb)^2 - (NX)^2 \ (47, \textit{liv. } 1)$$
$$= 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Mais à cause de l'angle droit XAB, qui est le même que FAB, on a

$$(BX)^2 = (AB)^2 + (AX)^2 \ (47, \textit{liv. } 1).$$

D'ailleurs, on a $(AX)^2 = \frac{1}{4}(AF)^2$ (*prop.* 4, *liv.* 2, *coroll.*); donc

$$(BX)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (Xb)^2.$$

Donc les droites BX, Xb sont égales. Donc on aura le point b, le même qu'emploie Ptolémée dans le premier livre de l'Almageste, pour inscrire dans un cercle un pentagone et un décagone régulier. *Voy.* la démonstration de Clavius, dans le scholie dépendant de la proposition 10 du *liv.* 13 d'*Euclide*. *Voy.* aussi les numéros suivans (45, etc.), qui fourniront la démonstration complète de cette proposition et des suivantes.

PROBLÈME.

41. *Diviser la circonférence en dix parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans le problème précédent (40), que l'on fasse (*fig.* 12) à $Ab = BP$, on aura $BP = PQ$. Chacun de ces arcs est égal à la dixième partie de la circonférence.

Démonstration. Voy. la 10ᵉ proposition du *liv.* 13 d'*Euclide*.

PROBLÈME.

42. *Diviser la circonférence en cent vingt parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans les numéros 32 et 40, QI (*fig.* 12) sera la cent-vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. En effet, l'arc BI est égal à cinq vingt-quatrièmes (32), et l'arc BQ à la cinquième partie de la circonférence. Donc

$$QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25-24}{120} = \frac{1}{120}.$$

43. Maintenant on pourra, quand on voudra, avec quatre compas seulement, ou quatre ouvertures du même compas, et avec les deux seuls point a et b pris hors de la circonférence, diviser la circonférence du cercle en cent vingt parties égales. En effet, après avoir, avec le point a, et avec trois compas, divisé la circonférence en vingt-quatre parties (*problème du numéro* 32), et ayant trouvé le point b (40), qu'on fasse, avec le quatrième compas, à $\mathrm{A}b = \mathrm{BP} = \mathrm{PQ} = \mathrm{QR} = \mathrm{RS}$, et par conséquent aussi $= \mathrm{SE}$ (41). Ensuite, pour diviser l'arc NG en cinq parties égales, dont chacune soit la cent-vingtième de la circonférence, qu'on fasse à $\mathrm{A}b = \mathrm{L}q = qp = \mathrm{I}\pi = \mathrm{O}\rho = \rho\omega = \omega\varphi$. L'arc NG sera divisé en cinq parties égales, et l'on pourra diviser de la même manière tous les autres arcs GC, CI, etc.

Démonstration. Puisqu'on a $\mathrm{BQ} = \mathrm{RE}$, $\mathrm{BF} = \mathrm{FE}$, $\mathrm{IF} = \mathrm{FL}$, on aura aussi $\mathrm{IQ} = \mathrm{LR}$; et comme $\mathrm{L}q = \mathrm{QR}$, on aura aussi $\mathrm{Q}q = \mathrm{LR} = \mathrm{QI}$. De même QP étant égal à qp, $\mathrm{Q}p$ sera aussi égal à $\mathrm{P}p$, et à QI. Pareillement, à cause de $\mathrm{I}\pi = \mathrm{QP}$, on aura $\pi\mathrm{P} = \mathrm{QI}$; et comme on a $\mathrm{O}\omega = \mathrm{BQ}$, $\mathrm{OI} = \mathrm{IB}$, on aura encore $\mathrm{I}\omega = \mathrm{QI}$. De plus, à cause de $\omega\varphi = \mathrm{I}\pi$, on a $\mathrm{I}\omega = \varphi\pi = \mathrm{QI}$: puis, comme on a

$$O\varphi = O\rho + \rho\omega + \omega\varphi = BP + PQ + QR = BR,$$

en retranchant de part et d'autre les arcs égaux OG, BL, on aura pour reste $G\varphi = LR = QI$. Enfin, à cause de $BI = LN$, si on retranche les arcs égaux BQ, Lp, on aura pour reste $QI = Np$. Donc on aura divisé l'arc NG en cinq arcs Np, pP, Pπ, $\pi\varphi$, φG égaux chacun à l'arc QI, et par conséquent égaux entre eux; et puisque l'arc NG est un vingt-quatrième de la circonférence (32), sa cinquième partie en sera le cent-vingtième.

44. Nous avons donc jusqu'à présent fait, sans aucun autre instrument que le compas, les mêmes divisions en parties égales de la circonférence, que celles que faisaient les anciens en inscrivant au cercle les cinq polygones réguliers, savoir : le triangle, le carré, le pentagone, l'hexagone et le décagone, et en joignant l'usage de la règle à celui du compas, tandis que l'on y est parvenu d'une manière commode, en prenant seulement deux points hors de la circonférence, et en n'employant que quatre ouvertures d'un seul compas, ou bien quatre compas (43, 8). En comparant cette méthode avec la méthode connue, on pourra juger de sa simplicité, de sa brièveté et de sa précison dans la pratique.

45. Comme on a par le n° 40

$$Xb + XF = Fb = Xb + XA$$

et

$$Ab = Xb - XA,$$

on aura

$$Fb.Ab = (Xb)^2 - (XA)^2 = (XB)^2 - (XA)^2 \\ = (AB)^2;$$

ou bien

$$Fb.Ab = (FA)^2;$$

donc la droite Fb sera divisée au point A en moyenne et extrême raison (30, *liv.* 6).

46. On aura donc

$$\begin{aligned} Fb\,.\,Ab &= (FA + Ab).Ab = (fA)^2 \\ &= (fA + Ab).Ab = fA.Ab + (Ab)^2 \\ &= fA(fA - fb) + (Ab)^2 \\ &= (fA)^2 - fA.fb + (Ab)^2. \end{aligned}$$

Ayant donc

$$(fA)^2 = (fA)^2 - fA.fb + (Ab)^2,$$

retranchant $(fA)^2$, et ajoutant $fA.fb$, on aura $fA.fb = (Ab)^2$: donc aussi la ligne Af sera divisée en b, en moyenne et extrême raison.

47. Si du centre b, et d'un rayon bA, on décrit un arc qui coupe la circonférence au

point T, on aura

$$Tf = Tb = bA.$$

En effet, on aura

$$fA.fb = (Ab)^2 = (Tf)^2;$$

d'où (17, *liv.* 6) on tire cette proportion

$$fA : fT :: fT : fb.$$

Donc les deux triangles fAT, fbT, qui ont l'angle en f commun, auront leurs côtés contigus porportionnels; donc (6, *liv.* 6) ils seront semblables; donc aussi le triangle fbT sera isoscèle; ce qui donne $Tb = Tf$.

48. L'angle $TbA = Tfb + bTf$ (32, *liv.* 1) $= Tbf + bAT$; en ajoutant Tbf, on aura

$$TbA + Tbf = 2Tbf + bAT;$$

mais $TbA + Tbf$ valent deux angles droits; (13, *liv.* 1); donc $2Tbf + bAT$ valent deux angles droits. Mais $Tbf = bAT + bTA$ (32, *liv.* 1) $= 2bAT$ (5, *liv.* 1); donc $2Tbf + bAT = 5bAT =$ deux angles droits. Donc l'angle bAT, qui est le même que l'angle fAT, sera un cinquième de deux angles droits, et l'arc fT un dixième de la circonférence.

49. Si l'on prend la corde $ft = fT$, on aura

aussi $bt = ft$ (47), et les deux droites tT, bf se couperont au milieu à angles droits en un point y (14); alors on aura $(Tf)^2 = (Ty)^2 + (fy)^2$; d'où l'on tire

$$4\,(Tf)^2 = 4\,(Ab)^2 = 4\,(Ty)^2 + 4\,(fy)^2 \\ = (Tt)^2 + (fb)^2;$$

et

$$(Tt)^2 = 4\,(Ab)^2 - (fb)^2.$$

Mais $(fb)^2 = (fA - Ab)^2 = (fA)^2 - 2fA.Ab + (Ab)^2$; donc

$$(Tt)^2 = 3\,(Ab)^2 - (fA)^2 + 2fA.Ab.$$

Or $2\,fA.Ab = 2\,fA\,(fA - fb) = 2\,(fA)^2 - 2\,fA.fb = 2\,(fA)^2 - 2\,(Ab)^2$; donc

$$(Tt)^2 = 3\,(Ab)^2 - (fA)^2 + 2\,(fA)^2 - 2\,(Ab)^2 \\ = (fA)^2 + (Ab)^2 = (BA)^2 + (Ab)^2 \\ = (Bb)^2.$$

Donc aussi $Tt = Bb$; mais Tt est la corde de deux dixièmes, ou d'un cinquième de la circonférence; donc Bb l'est aussi; donc, etc.

50. *Dans le triangle rectangle* ABb, *le carré du côté du pentagone est égal à la somme des carrés des côtés de l'hexagone et du décagone.* Cette proposition est la 10ᵉ du *liv.* 13 d'*Euclide*.

51. Les côtés du triangle rectangle ABb sont cordes d'arcs qui sont en progression contre harmonique. Car ces arcs sont $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ de la circonférence, et l'on trouve cette proportion :

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}:\frac{1}{6}-\frac{1}{10}::\frac{1}{10}:\frac{1}{5}.$$

52. Des proportions fb : bA :: bA : Af (46), et fb : bA :: bA : AF, il suit que le diamètre Ff est divisé aux points A et b en trois parties qui sont en proportion continue.

PROBLÈME.

53. *Diviser la circonférence en vingt parties, c'est-à-dire trouver la vingtième partie de la circonférence.*

Solution. Tout étant comme au n° 40, soit fait dans le quart de cercle BVf, fV $=$ Bb, l'arc BV sera la vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. En effet, on a BV $=$ Bf $-f$V $=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ (40) $=\frac{1}{20}$.

Autre solution. Tout étant aussi comme au n° 40, soit fait dans le quart de cercle BVf, bV $=$ AB, l'arc BV sera la vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. La droite A b étant la corde de la dixième partie de la circonférence, l'arc BV sera la moitié de cette dixième partie, c'est-à-dire la vingtième (24).

54. A cause de V b = VA, le triangle AVb est isoscèle, ainsi que bTf. De plus, comme on a FA : Ab :: Ab : bf (52), ou en substituant des valeurs égales, V A : Ab :: Tb : bf, les deux triangles isoscèles auront leurs côtés proportionnels ; donc ils seront semblables. (6, *liv.* 6)

55. Comme on a aussi bF : FA :: FA : Ab (45 et 17, *liv.* 6), en substituant des valeurs égales, on aura bF : bV :: bV : Ab. Donc les côtés qui forment l'angle commun en b, dans les deux triangles bFV, bVA, seront proportionnels, et par conséquent ces triangles seront semblables (6, *liv.* 6); donc aussi le triangle bFV sera isoscèle, et l'on aura FV = Fb.

56. L'arc fV étant un cinquième (53), et l'arc fT un dixième de la circonférence (47), l'arc TV en sera aussi un dixième; d'où la corde TV = Tf = Tb = bA. Mais on a aussi Vb = TA (53) ; donc les deux triangles VTb, TbA seront égaux, puisqu'ils auront tous leurs côtés respectivement égaux (8, 4, *liv.* 1).

PROBLÈME.

57. *Diviser une circonférence en deux cent quarante parties égales.*

Solution. Tout étant comme au n° 43, soit divisé par le moyen donné (38, 39) l'arc NG au point δ en deux parties égales, ce qu'on peut faire en faisant les cordes $\nu\beta$, $\beta\delta$ égales au rayon $e\nu$. Les deux arcs Pδ, $\delta\pi$ vaudront chacun la deux-cent-quarantième partie de la circonférence. (*Voyez* encore le n° 58.)

Démonstration. En effet, soustrayant des deux moitiés Nδ, Gδ, les arcs égaux NP, Gπ (43), il restera $P\delta = \delta\pi$. Mais Pπ est la cent-vingtième partie de la circonférence (43); donc, etc.

58. On pourra, avec une ouverture de compas prise du point δ à un point quelconque N de la division déjà obtenue (43), continuer à diviser en deux toutes les cent-vingtièmes parties de la circonférence. Par exemple, avec cette ouverture, en plaçant le centre en *p*, on divisera l'arc $\pi\varphi$; en plaçant le centre en P, on divisera l'arc φG, et ainsi de suite.

59. Les trois points *a* et *b* (*fig.* 12) et *e* (*fig.* 11) sont très remarquables; car, au

moyen de ces seuls points pris hors de la circonférence, nous avons divisé la même en deux cent quarante parties égales, et nous sommes ensuite parvenus à en déterminer la deux-cent-quarantième partie, en n'employant que les cinq ouvertures de compas AB, BD, A*a*, *a*N, A*b*. Comme ces points peuvent servir dans la suite à plusieurs autres usages importans, nous trouverons, par rapport à eux, trois équations fondamentales, desquelles nous tirerons, quand il sera à propos, douze autres équations, et dont nous ferons voir les applications lorsque l'occasion s'en présentera.

PROBLÈME.

60. *Diviser un arc quelconque* BC (fig. 13) *en deux parties égales en* G.

Solution. Avec le rayon AB, qui a décrit l'arc BC à diviser, et des centres B et C, qui sont les deux extrémités de l'arc, soient décrits les arcs AD, AE; qu'on fasse à BC = AD = AE (10); puis des centres D et E, et d'un rayon DC = BE, soient décrits deux arcs qui se coupent en F. Maintenant avec le rayon A F, et des mêmes centres D et E, qu'on décrive deux autres arcs qui se coupent en G, le point

G sera sur la circonférence, et l'on aura l'arc $BG = GC$

Démonstration. Les côtés des trois triangles DBA, BAC, ACE, étant respectivement égaux, on aura l'angle $BCA = CAE$ (8, *liv.* 1). Donc BC sera parallèle à AE (28, *liv.* 1); donc BAEC sera un parallélogramme (33, *liv.* 1).

On prouvera de la même manière que BCAD est un parallélogramme. On a ensuite, dans le parallélogramme BCAD, la diagonale AB égale aux côtés opposés BD, AC. Donc le carré de la diagonale DC sera égal à la somme du carré de l'autre diagonale AB, et des carrés des deux côtés AD, BC (25), c'est-à-dire $(DC)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; et comme les deux droites DA, AE sont parallèles à la droite BC, les points D, A, E seront dans la même ligne droite. De plus, les triangles FAD, FAE ayant tous leurs côtés égaux, les angles FAD, FAE seront égaux (8, *liv.* 1), et par conséquent droits (13, *liv.* 1). On aura donc

$$(DF)^2 = (AD)^2 + (AF)^2;$$

mais $(DF)^2 = (DC)^2$; donc

$$(AD)^2 + (AF)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2;$$

et ôtant $(AD)^2$, on aura

$$(AF)^2 = (AB)^2 + (AD)^2.$$

Mais $(DG)^2 = (AF)^2$: donc

$$(DG)^2 = (AB)^2 + (AD)^2;$$

et parce que les triangles GAD, GAE ont leurs côtés égaux, les angles GAD, GAE sont égaux et droits (8) (13, *liv.* 1). Donc

$$(DG)^2 = (AG)^2 + (AD)^2;$$

donc $AB = AG$, et par conséquent le point G est sur la circonférence. Otant ensuite des angles droits GAD, GAE, les angles égaux BAD CAE, les angles restans BAG, GAC seront égaux; donc l'arc BC est divisé en deux parties égales au point G (33, *liv.* 6).

61. *Remarque.* Si l'arc à diviser était très petit, comme *bc* (*fig.* 13), il vaudrait mieux, dans la pratique, y ajouter de part et d'autre des arcs égaux un peu grands, comme *b*C, *c*C, et diviser ensuite l'arc BC en deux parties égales au point G : l'arc *bc* se trouverait ainsi divisé en deux parties égales.

62. Si au contraire l'arc à diviser était trop grand, comme PGQ, il faudrait en retrancher de part et d'autre des arcs égaux PB, QC, afin de donner une grandeur moyenne à la moitié de l'arc BC, et ensuite diviser cet arc par le milieu au point G; l'arc PGQ se trouverait ainsi divisé en deux parties égales.

63. On voit donc que tous les problèmes relatifs à la division de la circonférence, ou des arcs de cercle qu'on peut résoudre avec la règle et le compas, peuvent se résoudre aussi avec le compas seul.

LIVRE TROISIÈME.

DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES DISTANCES EN LIGNE DROITE.

PROBLÈME.

64. *Doubler la distance* AB.

Solution. Du centre A, et d'un rayon AB, décrivez (*fig.* 2) une demi-circonférence BCDE; c'est-à-dire, faites à AB = BC = CD = DE (10) : la ligne BAE sera droite et double de AB.

Démonstration. Voyez la 15ᵉ du *liv.* 4

PROBLÈME.

65. *Tripler, quadrupler, etc., une distance* AB.

Solution. Qu'on ajoute (*fig.* 1) à AB la droite égale AE (64); qu'on ajoute de la même manière la ligne égale EV, etc., la droite BAEV sera égale à 3AB : en continuant de la même manière, on quadruplera, etc.

Démonstration. La ligne BAE est droite (15, *liv.* 4), ainsi que la ligne AEV; donc, etc.

PROBLÈME.

66. *Partager en deux parties égales la distance* AB, *c'est-à-dire trouver le point* M *qui soit au milieu de la droite* AB.

Solution Ire. Après avoir décrit (*fig.* 14) la demi-circonférence BCDE (**64**), du centre E et d'un rayon EB soit décrit un arc indéfini P Bp; du centre B et d'un rayon BA, soit encore décrite la demi-circonférence pAPm; ensuite, du centre P et du rayon PB soit décrit l'arc BM, et qu'on fasse à Pm = BM; le point M sera le point cherché.

Démonstration. La ligne Bm sera sur le prolongement de Bp (15, *liv*. 4). Substituant les trois lignes égales BP, Bp, Bm aux trois lignes égales Ap, pB, pS du n° **22**, les trois lignes égales PE, BE, pE aux trois lignes AQ, pQ, BQ, et la ligne Pm à la ligne AS; l'équation $AS.pQ = (Ap)^2$ (**22**) deviendra $Pm.BE = (BP)^2$. Mais BE = 2AB, et BP = AB : donc $2AB.Pm = (AB)^2$; et divisant par AB, on a $2Pm = AB = 2BM$. De plus, les triangles BPM, BPm ont leurs angles égaux (8, *liv*. 1) : donc mP est parallèle à BM (28, *liv*. 1). Mais les triangles BPm, BPE ont aussi les angles égaux (22) : donc mP est parallèle à BE (28, *liv.* 1); donc les droites BM, BE se confondent.

Solution II. Du point A comme centre, et du rayon AB (*fig.* 15), soit décrite la demi-circonférence BCDE (64); des points B et E comme centres, et du même rayon AB, soient décrits les deux arcs indéfinis CP, DQ; des mêmes points B et E, comme centres, et du rayon BE, soient décrits les deux arcs EQ, BP; du centre P et d'un rayon PB soit décrit l'arc BM; enfin qu'on décrive du point E comme centre, et d'un rayon PQ, un arc qui coupe l'arc BM au point M; le point M sera le point cherché.

Démonstration. Après avoir fait les substitutions nécessaires dans la *fig.* 5 (23), on aura

$$PQ.BE = (BE)^2 - (BP)^2.$$

Mais $BE = 2AB$, $BP = AB$, $PQ = ME$; donc

$$2ME.AB = 4(AB)^2 - (AB)^2 = 3(AB)^2;$$

donc, divisant par AB, on aura $2ME = 3AB$. Mais à cause de l'égalité des côtés opposés, PQEM sera un parallélogramme qui, divisé en deux triangles équilatéraux par la diagonale QM, donne l'angle PQM = QME (8, *liv.* 1):

d'où l'on voit que PQ est parallèle à ME (28, *liv.* 1), et PM parallèle à QE (33, *liv.* 1). De plus, on a PQ parallèle à BE (23) : donc ME, BE coïncident; donc, ayant $ME = MA + AE = MA + AB$, on aura

$$2ME = 2MA + 2AB = 3AB;$$

d'où l'on tire

$$2MA = AB.$$

Solution III. Du centre A et d'un rayon AB soit décrite (*fig.* 16) la demi-circonférence BCDE (64); du centre B et d'un rayon BE soit décrit l'arc indéfini PEp; du centre E et d'un rayon EC, qu'on décrive un arc qui coupe ce dernier aux points P et p; des centres P et p, et du même rayon PE, soient décrits deux arcs qui se coupent en M, le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); et en substituant dans l'équation (19) $pP.pQ = (Ap)^2$ les distances, c'est-à-dire les droites correspondantes de cette figure, on aura l'équation $EM.EB = (PE)^2$. D'où, à cause de $(PE)^2 = (EC)^2 = 3(AB)^2$ (12, *liv.* 13) (2), on aura

$$2AB.EM = 3(AB)^2;$$

et divisant par AB, $2EM = 3AB$, ou bien

$$2AE + 2AM = 3AB:$$

d'où, retranchant les quantités égales $2AE$, $2AB$, il reste $2AM = AB$.

Solution IV. La demi-circonférence BCDE (*fig.* 17) étant décrite (64); du centre B et d'un rayon BD soit décrit un arc indéfini aDp; du centre E et du même rayon BD soit décrit un arc qui coupe celui aDp au point a; puis du rayon Aa et du centre E soit décrit un arc qui coupe cet arc aDp en P et p; enfin du même rayon Aa et des centres P et p soient tracés deux arcs qui se coupent en M, le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); puis, faisant les substitutions nécessaires dans l'équation

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ.PQ, \quad (18)$$

on aura

$$(PB)^2 = (PE)^2 + EB.MB;$$

ou

$$(BD)^2 = (Aa)^2 + 2AB.MB;$$

ou bien (12, *liv.* 13), (2)

$$3(AB)^2 = 2(AB)^2\ (27) + 2AB.MB:$$

d'où, soustrayant $2(AB)^2$,

$$AB = 2MB.$$

On peut donner plusieurs autres solutions de ce problème, ou en employant de nouveaux rayons de cercle, ou en combinant entre elles les solutions précédentes ; mais je crois inutile de les indiquer. En voici une assez simple, mais qui pourtant n'est pas très exacte dans la pratique, parce que les arcs s'y coupent à angles trop aigus.

Solution V. Après avoir décrit (*fig.* 14), 1°. du centre A et d'un rayon AB la demi-circonférence BCDE (64); 2°. du centre E et d'un rayon EB l'arc indéfini PBp, qu'on décrive du centre B et d'un rayon AB un arc qui coupe l'arc PBp en P et p; soient encore décrits, des centres P et p et du même rayon AB, deux arcs qui se coupent en M, le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); et comme, à cause d'un angle à la base commun en B (5, 32, *liv.* 1, 4, *liv.* 6), les deux triangles isoscèles BPM, PBE sont semblables, on aura

$$BE : BP :: BP : BM :$$

d'où (17, *liv.* 6)

$$BE.BM = (BP)^2 = (AB)^2,$$

ou

$$2AB.BM = (AB)^2;$$

et divisant par AB,

$$2BM = AB.$$

PROBLÈME.

67. *Continuer la sous-division en deux parties égales, avec une construction plus simple, de* AM *en* N, *de* AN *en* O, *etc., à l'infini.*

Solution I^re^. Après avoir décrit (*fig.* 18) du rayon AB la demi-circonférence BCDE (**64**); du centre B avec le même rayon AB, l'arc indéfini P'CAp'; des centres E et B et du rayon BE les deux arcs R'Q'P'B$p'q'r'$, PQRErqp; et du centre E du rayon EC, l'arc PCp; si l'on décrit des centres P' et p' et du rayon AB deux arcs, ils se couperont en M au milieu de la droite AB (*solution* V) (**66**). Si des centres P et p et du rayon PE on décrit deux arcs, ils se couperont aussi au même point M (*solution III*) (**66**). Qu'on fasse maintenant à AP' = BQ' = Bq' = q'N = Q'N (**11**), le point N sera au milieu de la droite AM. Qu'on fasse à

$AQ' = BR' = Br' = r'O = R'O$, le point O sera au milieu de la droite AN. En continuant ainsi, on diviserait de la même manière AO en deux parties égales, etc., à l'infini.

Démonstration. Si l'on imagine une droite P'A qui divise en deux parties la base BE du triangle P'BE (12), on aura (26)

$$(BP')^2 + (P'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP')^2.$$

D'où, après avoir substitué les valeurs de $BP' = AB$ et de $P'E = 2AB$; et soustrayant $2(AB)^2$, on aura $3(AB)^2 = 2(AP')^2$; d'où l'on tirera, en divisant par 2,

$$(AP')^2 = (BQ')^2 = \frac{3}{2}(AB)^2;$$

et comme le point N est sur la droite BE (13), le triangle isoscèle Q'BN, à cause de l'angle commun en B (5 et 32, *liv.* 1, 4, *liv.* 6) sera semblable au triangle Q'BE. D'où $(BQ')^2 = BN.BE$ (17, *liv.* 6). Puis, comparant entre elles les deux valeurs de $(BQ')^2$, l'on aura

$$\frac{3}{2}(AB)^2 = BN.BE = 2\,BN.AB,$$

et divisant par 2 AB,

$$\frac{3}{4}AB = BN:$$

donc

$$AN = \frac{1}{4} AB.$$

De même on aura (26)

$$(BQ')^2 + (Q'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2;$$

d'où

$$\frac{3}{2}(AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AB)^2;$$

et réduisant

$$\frac{7}{4}(AB)^2 = (AQ')^2 = (BR')^2.$$

Mais $(BR')^2 = BO.BE = 2AB.BO;$
donc aussi

$$\frac{7}{4}(AB)^2 = 2AB.BO;$$

d'où

$$\frac{7}{8}AB = BO, \text{ et } AO = \frac{1}{8}AB, \text{ etc.}$$

Solution II. Qu'on fasse à $AP = EQ = Eq = qN = QN$, le point N sera au milieu de la droite AM.

Qu'on fasse à $AQ = ER = Er = rO = RO$, le point O sera au milieu de la droite AN. Continuant de la même manière, on partagerait en deux la droite AO, et ainsi de suite à l'infini.

Démonstration. En effet, on a (26)

$$(PE)^2 + (PB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2;$$

puis, substituant les valeurs de $(PE)^2 = (CE)^2 = 3(AB)^2$ (12, *liv.* 3) (2), et de $(PB)^2 = (BE)^2 = 4(AB)^2$, on aura

$$7(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2;$$

d'où ôtant $2(AB)^2$, et divisant par 2, on a

$$\frac{5}{2}(AB)^2 = (AP)^2 = (EQ)^2.$$

Mais à cause des triangles isoscèles semblables EQN, EQB (13) (5 et 32, *liv.* 1, 4 et 17, *liv.* 6), $(EQ)^2 = EN.EB$; donc,

$$\frac{5}{2}(AB)^2 = EN.EB = 2\,EN.AB;$$

et divisant par 2 AB, on a

$$\frac{5}{4}AB = EN, \text{ et } AN = \frac{1}{4}AB.$$

En raisonnant de la même manière, on aura

$$(QE)^2 + (QB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2;$$

d'où :

$$\frac{5}{2}(AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2;$$

d'où aussi

$$\frac{9}{4}(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{AQ})^2 = (\mathrm{ER})^2 = \mathrm{EO}.\mathrm{EB}$$

$$= 2\,\mathrm{AB}.\mathrm{EO};$$

et divisant par 2 AB,

$$\frac{9}{8}\mathrm{AB} = \mathrm{EO}$$

et

$$\mathrm{AO} = \frac{1}{8}\mathrm{AB}, \text{ etc.}$$

Solution III. Du centre A et du rayon AB (*fig.* 19) soit décrite la demi-circonférence BCDE (**64**); avec le même rayon AB, et des centres B et E, soient décrits les arcs indéfinis CP, Dp; des mêmes centres B et E, et du rayon BE, soient décrits les arcs Epqr, BPQR, on pourra trouver le point M, en faisant PM = PB, EM = Pp (*solution II*) (**66**). Actuellement, qu'on fasse à AP = BQ = QN = Eq; qu'on fasse aussi à Qq = EN, le point N sera au milieu de la droite AM. Soit fait pareillement à AQ = BR = RO = Er, et à Rr = EO, le point O sera au milieu de la droite AN.

Démonstration. Après avoir fait dans la *fig.* 5 (**23**) les substitutions nécessaires, on aura

$$\mathrm{Q}q.\mathrm{BE} = (\mathrm{BE})^2 - (\mathrm{BQ})^2.$$

Mais $BE = 2\,AB$, et $(BQ)^2 = \frac{3}{2}(AB)^2$ (*voyez la démonstration de la solution Ire*); donc

$$2\,Qq.AB = 4(AB)^2 - \frac{3}{2}(AB)^2;$$

puis, divisant par $2\,AB$, et réduisant, on a

$$Qq = \frac{5}{4}AB.$$

Donc aussi $EN = \frac{5}{4}AB$; donc la droite AB étant la même dans les deux *fig.* 18 et 19, les côtés des deux triangles Q'NE (*fig.* 18), QNE (*fig.* 19), seront aussi les mêmes. D'où en superposant les trois points B, Q, E de la *fig.* 19, sur les trois points B, Q', E de la *fig.* 18, les points N des deux figures se confondront aussi; donc, etc.

De même, faisant les substitutions nécessaires dans la figure 5 (23), on a

$$Rr.BE = (BE)^2 - (BR)^2.$$

Mais $(BR)^2 = \frac{7}{4}(AB)^2$ (*démonstration de la solution Ire*); donc

$$Rr.BE = (BE)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2;$$

ou bien, substituant $2\,AB$ à BE, on a

$$2\,AB.Rr = 4\,(AB)^2 - \frac{7}{4}\,(AB)^2;$$

puis, divisant par 2 AB et réduisant,

$$Rr = \frac{9}{8}\,AB = OE.$$

Donc les points E, R, B de la fig. 19 coïncidant avec les points E, R′, B de la fig. 18, et les lignes RO et EO y étant respectivement égales aux lignes R′O, EO de la fig. 18, le point O coïncidera aussi. D'où l'on voit que le point O se trouvera au milieu de la ligne AN. On démontrerait de même pour les autres divisions jusqu'à l'infini.

On pourrait employer d'autres moyens pour trouver les mêmes points : mais nous passerons à d'autres divisions de la ligue AB en un nombre différent de parties.

PROBLÈME.

68. *Diviser la distance* AB *en trois parties égales.*

Solution. Qu'on ajoute en ligne droite de part et d'autre à AB (*fig.* 20) les deux distances AE, BV qui lui sont égales (**64**); des centres E et V et du rayon EV soient décrits les deux arcs indéfinis QVq, PEp; des mêmes centres E et V et du rayon EB soient décrits deux autres arcs qui coupent les premiers en Q, q, et P, p; avec ce même rayon EB, et des centres P et p, soient décrits deux arcs qui se coupent en T; enfin, avec le même rayon et des centres Q, q soient décrits deux arcs qui se coupent en t, la ligne AB sera divisée en trois parties égales aux deux points T et t.

Démonstration. Les points T, t seront dans la ligne droite VE (13); puis, à cause de l'angle commun en E (5 *et* 32, *liv.* 1; 4, *liv.* 6), le triangle isoscèle EPT sera semblable au triangle isoscèle EPV; donc $(PE)^2 = ET.EV$ (17, *liv.* 6). Substituant dans cette équation 2AB pour PE, et 3AB pour EV, elle deviendra $\frac{4}{3}AB = ET$; d'où $AT = \frac{1}{3}AB$. On démontrerait de même que Bt est un tiers de AB, et par conséquent aussi Tt.

PROBLÈME.

69. *Diviser une distance* AB *en un nombre quelconque de parties égales*

Solution. Un exemple ou deux feront mieux sentir la règle générale.

Exemple Ier. Soit (*fig.* 21) la distance AB à diviser en cinq parties égales ; qu'on lui ajoute en ligne droite les quatre distances AE, EF, FG, GH (**65**) qui lui sont égales, de manière qu'elle soit quintuplée en BH, c'est-à-dire multipliée par autant d'unités qu'il y en a dans le nombre qui indique en combien de parties on veut la diviser. Des extrémités B et H, comme centres, et avec un rayon AB de la longueur de la distance qu'on veut diviser, qu'on décrive deux arcs indéfinis AC, GI; des mêmes centres B et H, et avec un rayon BH, soient décrits les deux arcs HI, BC; puis du centre C et du premier rayon AB qu'on décrive un arc indéfini BQ; enfin, du centre H avec le rayon CI qu'on décrive un arc qui coupe l'arc BQ en Q; la distance BQ sera sur la direction de la ligne BA, et en sera la cinquième partie.

Si l'on ajoute ainsi à BQ la droite égale Q*q* (**64**), et ensuite les autres lignes égales *qr*, *rs*, on aura déterminé toutes les cinquièmes parties de la droite BA.

Exemple II. Si l'on veut diviser la distance AB en sept parties égales (*fig.* 22), soit faite la ligne BH sept fois plus grande que BA; des extrémités de cette ligne, c'est-à-dire des points B et H, et avec le rayon AB, soient décrits les arcs indéfinis AC, GI; des mêmes centres B et H, et du rayon BH, soient décrits les deux arcs HI, BC; du centre C et du premier rayon AB soit décrit un arc indéfini BQ; du centre H et du rayon CI soit décrit un arc qui coupe cet arc BQ en Q; BQ sera sur la direction de BA, et en sera la septième partie.

Démonstration. Les triangles CQI, IHQ ayant leurs côtés respectivement égaux, on aura l'angle CIQ = IQH (8, *liv.* 1); donc CI est parallèle à HQ (28, *liv.* 1). De plus, la ligne CI étant aussi parallèle à BH (23), le point Q sera sur la ligne BH. D'où l'on voit que les deux triangles isoscèles CBQ, CBH ayant un angle à la base commun en B, seront semblables (5, 32, *liv.* 1; 4, *liv.* 6); ce qui donne

$$HB : BC :: BC : BQ,$$

ou bien

$$HB : AB :: AB : BQ :$$

donc la ligne AB sera autant de fois plus grande que BQ, que la droite HB sera de fois plus grande que AB.

Solution II. Si l'on veut diviser (*fig.* 23) la ligne AB, par exemple, en cinq parties égales, après avoir déterminé, comme dans la *solution I,* la ligne BH cinq fois plus grande que la ligne AB, soit décrit du centre H et du rayon AB un arc indéterminé CB*c*; maintenant, du centre B, avec le rayon BA, qu'on décrive la demi-circonférence *c*CK (64); puis, du centre C, avec le même rayon AB, soit décrit l'arc BQ; enfin du centre B et du rayon CK qu'on décrive un arc qui coupe cet arc BQ en Q, la ligne BQ sera la cinquième partie de la ligne BA, et sera placée dans la même direction.

Démonstration. La droite BK sera sur le prolongement de la ligne BC (15, *liv.* 4). Après avoir fait les substitutions nécessaires (22), on aura

$$KC.BH = (BC)^2 = (AB)^2;$$

ce qui donne (17, *liv.* 6)

$$BH : AB :: AB : KC;$$

ou bien

$$BH : AB :: AB : BQ:$$

donc la même ligne AB sera d'autant plus grande que BQ, que BH sera plus grande que AB; et quand on aura BH = 5AB, on aura aussi AB = 5BQ; ensuite les deux triangles BKC, BCQ ayant tous leurs côtés égaux entre eux, on aura l'angle KCB = CBQ (8, *liv.* 1). Mais l'angle CBH est aussi égal à l'angle KCB (22): donc BQ sera sur la direction de BH.

70. Il est clair que ce dernier problème (69) peut être très utile dans la pratique pour diviser en lignes un pied déjà divisé en pouces, puisque BH étant égale à douze pouces, BQ deviendra égale à la douzième partie du premier pouce AB, c'est-à-dire à une ligne. On pourra de la même manière sous-diviser en centimètres le mètre déjà divisé en décimètres. Quand la droite AB, sur laquelle on doit trouver le point Q, sera décrite, l'opération sera plus simple, puisque, sans décrire du centre C, et avec le rayon AB, l'arc BQ, il suffira de couper en Q la droite donnée AB avec les ouvertures de compas précédemment indiquées.

LIVRE QUATRIÈME.

DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION DES DISTANCES ; DE LA SITUATION DES PERPENDICULAIRES ET DES PARALLÈLES.

71. Il est sans doute fort simple et très facile d'ajouter à des distances données, ou d'en retrancher une autre distance avec la règle et le compas, en tirant une droite indéfinie par les deux extrémités de la première distance, et en y ajoutant ou en en retranchant avec le compas la seconde distance (3, *liv.* 1); mais il n'est certainement pas aussi prompt ni aussi aisé de le faire avec le compas seul : aussi ne donnerons-nous pas ici les problèmes suivans comme d'un grand usage, mais seulement pour faire voir qu'il n'y a aucun problème de Géométrie élémentaire qu'on ne puisse aussi résoudre avec le compas seul dans le sens déjà expliqué (1), ce qu'on démontrera dans la suite plus rigoureusement, et pour remplir la promesse que nous avons faite (7) de n'omettre aucun des élémens de cette nouvelle Géométrie.

PROBLÈME.

72. *De la distance* AB (fig. 24) *retrancher une distance égale à* CD.

Solution. Du centre B et du rayon CD (si c'est du côté de B qu'on veut retrancher la distance) décrivez la circonférence FGEH; du centre A, et d'un rayon quelconque soit décrit un arc qui la coupe en E et F, et divisez en deux parties égales au point G l'arc EGF (**60**), le point G sera sur la droite BA, et l'on aura pour reste la ligne GA.

Démonstration. Les triangles EBG, FBG ayant les côtés égaux, l'angle EBG sera égal à l'angle FBG (8, *liv.* 1) : donc l'angle EBG sera égal à la moitié de l'angle EBF. Les triangles EBA, FBA ayant aussi les côtés égaux entre eux, on prouvera de même que l'angle EBA est aussi la moitié de l'angle EBF. Donc l'angle EBG est égal à l'angle EBA : donc le point G est sur la droite BA. Mais BG est aussi égal à CD : donc en retranchant de AB la droite CD, on aura GA pour reste.

PROBLÈME.

73. *Ajouter à la ligne* AB (fig. 25) *la distance* CD *en ligne droite.*

Solution. Du centre B (si c'est de ce côté qu'on veut ajouter la distance CD) et d'un rayon CD, soit décrit le cercle FGEH. Du centre A, et d'un rayon quelconque, soit décrit un arc qui coupe le cercle en E et F; qu'on divise en deux parties au point H l'arc EHF (60), le point H sera sur la droite AB, et AH sera la somme des deux distances AB, CD.

Démonstration. Les triangles EBH, FBH ayant les côtés respectivement égaux, ainsi que EBA, FBA, l'angle EBH sera égal à l'angle FBH, et l'angle EBA égal à l'angle FBA. Donc

$$EBH + EBA = FBH + FBA.$$

Mais la somme de ces quatre angles vaut quatre angles droits (13, *liv.* 1) : donc leur moitié (par exemple EBH + EBA) vaudra deux angles droits; d'où l'on voit que la ligne HBA sera droite (14, *liv.* 1). De plus, BH=CD;

donc

$$AH = AB + CD.$$

PROBLÈME.

74. *Placer sur* AB (fig. 25), *de* B *vers* A, *la distance* CD *plus grande que* AB.

Solution. Du centre B et du rayon CD, soit décrit un arc indéfini LMN, ou un cercle entier ; du centre A, et d'un rayon arbitraire, soit décrit un arc qui coupe le premier aux points L et N ; qu'on divise l'arc LN en deux parties égales au point M (60), la ligne BM sera la ligne CD placée où on voulait qu'elle le fût.

Démonstration. Comme on a l'angle LMA $= \text{NMA} = \frac{1}{2}\text{LMN}$, et aussi $\text{LMB} = \text{NMB} = \frac{1}{2}\text{LMN}$, on trouvera, par le moyen des démonstrations des deux problèmes précédens, que l'angle $\text{LMA} = \text{LMB}$: d'où l'on voit que BAM est droite ; de plus, elle est égale à CD : donc, etc.

75. *Observation.* Si l'arc décrit du centre A coupait à angles trop aigus l'arc décrit du centre B, ce qui arrive quand la ligne AB est

trop petite par rapport à CD, il faudrait ajouter à BA la ligne égale AE en ligne droite, et couper avec un arc décrit du centre E en L et M l'arc LMN décrit du centre B; si alors les angles des deux arcs sont encore trop aigus, il faut tripler, quadrupler, etc. (65), la ligne BA de B vers A, jusqu'à ce que le point qui la termine, pris pour centre du second arc, donne les angles d'intersection en L et M plus approchans de l'angle droit. On fera la même chose dans les cas semblables pour les nos 72 et 73.

PROBLÈME.

76. *Étant donnés deux points* A *et* B (fig. 26), *trouver un point* H *tel que la droite* BH *soit perpendiculaire en* B *à la ligne* AB, *et égale à une ligne donnée* CD.

Solution. Du centre B, et avec la distance CD pour rayon, soit décrit un cercle FEHG; du centre A, et avec la distance AB pour rayon, soit décrit un arc qui coupe le cercle en F et E; qu'on détermine la demi-circonférence FEG (64), et qu'on divise en deux parties égales au point H l'arc GE (60), le point H sera le point cherché.

Démonstration. A cause de la similitude des triangles GEB, EBA (22), on aura l'angle GEB = EBA : d'où l'on voit que GE est parallèle à BA (28, *liv.* 1). Mais BH, qui divise l'angle GBE en deux parties égales, est perpendiculaire à la corde GE (9, 11, 12, *liv.* 1), et par conséquent aussi à BA (28, *liv.* 1). Or, on a de plus BH = CD; donc H est le point cherché.

Si la ligne AB était plus petite que CD, il faudrait doubler, tripler, etc. (64, 65).

PROBLÈME.

77. *Étant donnés deux points* A *et* B (fig. 27), *trouver un point* D, *tel que* DA *soit perpendiculaire à* AB.

Solution. Des centres A et B, et d'un rayon (AB, par exemple) pris arbitrairement, soient décrits deux arcs qui se coupent en C; avec le même rayon, et du centre C, soit décrite la demi-circonférence BAD (64), le point D sera le point cherché.

Démonstration. L'angle DAB est inscrit et appuyé sur le diamètre : donc il est droit (31, *liv.* 3).

PROBLÈME.

78. *Étant données les deux extrémités d'une droite* AB, *et un point* D *pris hors de cette ligne, trouver* (fig. 28) *un autre point* E *qui détermine la position de la droite* DE *perpendiculaire à* AB, *et le point* M *où elle la coupe.*

Solution. Soit fait à AD = AE, à BD = BE (11), le point E sera le premier point cherché. Soit divisée la ligne DE en deux parties égales au point M, le point M sera le second point.

Démonstration. Elle se trouve au n° 14.

PROBLÈME.

79. *Trouver deux points d'une droite qui soit perpendiculaire au milieu de* DE (fig. 28).

Solution. Soit fait à un rayon quelconque pris arbitrairement = DA = EA; soit fait de l'autre côté au même rayon, ou à tout autre pris arbitrairement, = DB = EB, les points A et B seront les deux points cherchés.

Démonstration. Elle se trouve au n° 14.

PROBLÈME.

80. *Étant donnés deux points* A *et* B (fig. 29) *d'une ligne droite, et un point* C *pris hors de cette ligne, par lequel on veut mener une parallèle à* AB, *trouver un autre point* D *qui en détermine la position.*

Solution. Soit fait à CA = BD (11) et à BA = CD, le point D sera le point cherché.

Démonstration. Dans les deux triangles CDB, CAB, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, l'angle DCB est égal à l'angle CBA (8, *liv.* 1) : donc CD est parallèle à AB (28, *liv.* 1).

PROBLÈME.

81. *Étant donnés* (fig. 30) *deux points* A *et* B *d'une ligne droite, et un point* C *pris hors de cette ligne, porter à ce point* C *une distance* CB; *de manière que la droite* CE *soit parallèle à* AB, *et égale à une ligne donnée* MN.

Solution. Ayant trouvé un point D de la ligne parallèle qui passe par le point C (80), sur la direction de la ligne CD, placez la droite MN, en la soustrayant, si elle est plus petite

(72), ou en l'ajoutant de l'autre côté (73), ou en la plaçant sur CD de C vers D, si elle est plus grande (74), suivant que l'exigeront les conditions du problème.

Cette solution n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÈME.

82. *Vérifier* (fig. 31) *si les points* A, B, C *sont en ligne droite.*

Solution. Des centres A et C, et d'un rayon (AC, par exemple) pris arbitrairement, soient décrits deux arcs qui se coupent en D et E; puis qu'on observe si DB=EB : si cela est, les trois points A, B, C sont en ligne droite; sinon, ils n'y sont pas.

Démonstration. Si l'on a encore DB=EB, on aura l'angle $DAB = EAB = \frac{1}{2} DAE$ (8, *liv.* 1), car les deux triangles DAB, ABE ont les côtés égaux chacun à chacun. Mais, par la même raison, dans les triangles DAC et EAC, les angles DAC, EAC sont égaux, et par conséquent chacun d'eux est égal à la moitié de l'angle DAE : donc on aura DAB=DAC; d'où l'on voit que les trois points ABC sont en ligne droite.

Mais si la ligne DB est plus grande ou plus petite que EB, l'angle DAB sera ou plus grand ou plus petit que l'angle EAB (25, *liv.* 1); il ne pourra donc pas être égal à l'angle DAC, puisqu'il ne saurait être égal à la moitié de l'angle DAE : donc les trois points A, B, C ne pourront être en ligne droite.

PROBLÈME.

83. *Étant donnés trois points* A, B, D (fig. 32), *vérifier si la ligne* DA *est perpendiculaire à* AB.

Solution. Soit doublée la ligne AB en BE (64) par le moyen du demi-cercle BPQE; qu'on observe si l'on a DB = DE: si cela est, l'angle DAB est droit; autrement il ne l'est pas.

Démonstration. La droite BAE étant le diamètre du cercle, fera avec DA deux angles dont la somme vaudra deux angles droits (13, *liv.* 1). De plus, dans les deux triangles DAE, DAB, qui ont les côtés AE, AB égaux et le côté AD commun, quand on aura le côté DE égal au côté DB, l'angle DAE sera aussi égal à l'angle DAB (8, *liv.* 1), et par conséquent ils seront tous deux droits. Mais quand DE sera plus grande ou plus petite que DB, l'angle

DAE sera aussi plus grand ou plus petit que DAB : donc l'un sera aigu et l'autre obtus (25, *liv.* 1).

PROBLÈME.

84. *Vérifier si la droite qui passe par deux points donnés* D, F (fig. 33), *est perpendiculaire à celle qui passe par deux autres points donnés* A, B.

Solution. Trouvez, par le moyen du point D, la droite DE perpendiculaire à AB (78), et voyez si les trois points DEF sont en ligne droite (82) : s'ils y sont, la ligne DF est perpendiculaire à AB ; sinon, elle ne l'est pas.

Démonstration. En effet, DE est perpendiculaire par construction ; si DF l'est aussi, ce sera la même droite, puisque d'un point D à une droite AB on ne peut mener deux perpendiculaires (*corroll. prop.* 32, *liv.* 1).

PROBLÈME.

85. *Étant donnés* (fig. 34) *deux points* A, B *d'une droite, et deux points* C, D *d'une autre, vérifier si ces deux lignes sont parallèles.*

Solution. Soit fait à AD = AE, à BD = BE

(11), et de même à $AC = AF$ et à $BC = BF$; on observera si $DE = CF$; dans ce cas, les deux lignes seront parallèles; sinon, elles convergeront du côté de la plus petite.

Démonstration. Les lignes DE, CF sont perpendiculaires à AB, et sont coupées par moitié aux deux points M et N (14) : donc elles sont respectivement doubles des distances DN, CN des points D et C de la droite AB : donc, quand ces lignes seront égales, les distances le seront aussi, et par conséquent les lignes AB, DC seront parallèles; autrement elles convergeront.

LIVRE CINQUIÈME.

DES DISTANCES PROPORTIONNELLES.

PROBLÈME.

86. *Trouver une troisième proportionnelle à deux distances* Qp, MN (fig. 35), *dont la première* Qp *est plus grande que la seconde* MN.

Solution. Du centre Q et d'un rayon Qp, soit décrit un arc indéfini ApB; du centre p et d'un rayon MN soit décrite la demi-circonférence BAS; la ligne AS sera la troisième proportionnelle demandée.

Démonstration. Par le lemme du n° 22, on aura

$$AS.pQ = (Ap)^2;$$

donc

$$AS.pQ = (MN)^2,$$

donc (17, *liv.* 6)

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

PROBLÈME.

87. *Trouver une troisième proportionnelle à deux distances* Qp, MN (fig. 36), *dont la première est plus petite que la seconde, mais pourtant plus grande que la moitié de cette ligne.*

Observation. Nous serons assurés que la ligne Qp est plus grande que la moitié de MN, si les deux cercles décrits des centres Q et p, qui sont les extrémités de la première distance, et des rayons Qp et MN, qui sont les deux distances données, se coupent comme dans la figure.

Solution. C'est la même que la précédente, appliquée à la fig. 36.

Démonstration. Elle est la même que la précédente.

88. Si le cercle pbQ′ (*fig.* 37), décrit du centre Q et du rayon Qp n'avait aucun point d'intersection avec le cercle décrit du centre p et du rayon MN, comme dans la figure 37, on se servirait du problème suivant.

PROBLÈME.

89. *Trouver* (fig. 37) *une troisième proportionnelle à deux distances* Qp, MN, *dont la première est plus petite que la moitié de la seconde.*

Solution. Du centre p et du rayon MN soit décrit un arc indéfini BAS; du centre Q et du rayon Qp soit décrite la demi-circonférence pbQ′ (64); du centre Q′ et du rayon Q′p soit décrit un arc indéfini; si cet arc coupe l'arc BAS en deux points B et A, qu'on détermine la demi-circonférence BAS′ (64), et qu'on ajoute en ligne droite à AS′ (64) une droite égale S′S, la ligne AS sera la troisième proportionnelle cherchée.

Démonstration. On a (22)

$$AS'.pQ' = (Ap)^2 = (MN)^2.$$

Mais $pQ' = 2pQ$; donc

$$2AS'.pQ = (MN)^2;$$

ou bien $AS.pQ = (MN)^2$, d'où (17, *liv.* 1)

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

90. Si cependant l'arc pcQ″ (*fig.* 38) décrit du centre Q′ et du rayon Q′p coupait l'arc BAS décrit du centre p et du rayon MN, déterminez la demi-circonférence pCQ″, et décrivez du centre Q″ et du rayon Q″p un arc indéfini; s'il coupe l'arc BAS aux deux points A et B, déterminez la demi-circonférence BAS′ (64); quadruplez AS′ (65), et faites AS = 4AS′. Cette ligne sera la troisième proportionnelle cherchée.

Démonstration. En effet, on a (22)

$$AS'.pQ'' = (Ap)^2 = (MN)^2,$$

et

$$4AS'.pQ = (MN)^2 = AS.pQ;$$

d'où (17, *liv.* 6)

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

91. On procéderait de la même manière, quand même la distance Q″p serait plus grande que la moitié de MN; c'est-à-dire on prendrait une distance double de cette ligne, et huit fois plus grande que Qp, et l'on octuplerait la ligne AS′ que l'on vient de déterminer. Cette distance octuple de AS′ serait la troisième proportionnelle cherchée, et ainsi de suite.

La démonstration est la même que celle qui précède.

92. Dans le cas encore où la première distance Q*p* serait un peu plus grande que la moitié de la seconde MN, il faudrait doubler cette distance, afin que les intersections des deux cercles se fassent à angles moins aigus et plus approchans de l'angle droit (9).

PROBLÈME.

93. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois distances* PQ, RS, TV (fig. 32).

Solution. D'un même centre O, et avec les deux premières distances PQ et RS, prises pour rayon, décrivez les deux cercles BC, DE; d'un rayon égal à la troisième distance TV, et d'un point quelconque B de la première circonférence, décrivez un arc de cercle qui la coupe en C; du même point B, et avec un rayon arbitraire, décrivez un arc de cercle qui coupe la seconde circonférence en D; du même rayon BD et du centre C coupez la même circonférence en E; joignez les deux points par la droite DE; elle sera la quatrième proportionnelle cherchée.

Démonstration. Les triangles COE, BOD, ayant les côtés égaux entre eux, on aura l'angle

COE = BOD (8, *liv.* 1); retranchant l'angle commun BOE (ou l'ajoutant), on aura COB = EOD; donc OCB + OBC = OED + ODE (32, *liv.* 1). Mais les deux triangles COB, EOD sont isoscèles : donc les demi-sommes, c'est-à-dire les angles à la base, sont égaux; donc ces deux triangles sont semblables, et l'on a

CO : DO :: CB : DE,

ou bien

PQ : RS :: TV : DE.

94. *Observation I^re^.* Il conviendra de prendre le rayon arbitraire BD, tel que l'angle BDO soit à peu près droit (9), ce qui peut se faire à vue d'œil.

95. *Observation II.* Si la troisième distance TV ne peut pas être placée comme corde sur BC, ce qui arrivera lorsque TV sera plus grande que deux fois la ligne PQ, il faudra doubler les deux distances PQ, RS (64), et avec ces deux distances ainsi doublées, décrire les deux cercles BC, DE, et achever la construction comme ci-dessus (93). Si cela ne suffisait pas, on les triplerait, etc., quand même TV pourrait s'appliquer comme corde au premier cercle; si elle est presque égale au diamètre de ce cercle, il faudra doubler ou tripler ces dis-

tances pour éviter les sections à angles aigus, et en obtenir d'autres plus approchantes de l'angle droit.

La démonstration est fondée sur la proportion suivante :

PQ : RS :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS :: etc.

Donc, lorsqu'on aura fait

BC : DE :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS :: etc.,

ce qui suit de la construction, on aura aussi

PQ : RS :: BC : DE;

ou

PQ : RS :: TV : DE (4, *liv.* 5).

PROBLÈME.

96. *Diviser la droite* MN *en* P, *en parties proportionnelles à deux distances données* PQ, RS.

Solution. Portez sur le prolongement de PQ, la droite QV = RS (73) ; cherchez une quatrième proportionnelle aux trois droites PV, MN, PQ (93) ; portez-la sur la ligne MN en MP, en la soustrayant de MN (72);

le point P où elle tombera sera le point cherché.

Démonstration. On a par construction

$$PV : MN :: PQ : MP;$$

on aura donc aussi (5, *liv.* 5)

$$PV : MN :: QV : PN;$$

d'où

$$PQ : MP :: QV : PN;$$

ou bien

$$PQ : QV :: MP : PN;$$

et en mettant pour QV sa valeur,

$$PQ : RS :: MP : PN.$$

PROBLÈME.

97. *Diviser la droite* AB (fig. 41) *en moyenne et extrême raison.*

Solution. Du centre A et du rayon AB, décrivez le cercle BDd; soit fait dans sa circonférence à AB = BC = CD = DE = Ed; faites à BD = Ba = Ea; faites à Aa = Eb = db; la droite AB sera divisée en moyenne et extrême raison au point b, et l'on aura

BA : Ab :: Ab : bB.

Démonstration. Voyez le nº 46.

98. Ce dernier problème est encore un de ceux que l'on résout au moyen du compas seul, plus simplement qu'avec la règle et le compas réunis. On peut s'en convaincre en comparant cette solution avec celles données dans les traités ordinaires de Géométrie. Cependant la démonstration en est plus compliquée.

PROBLÈME.

99. *Trouver une moyenne proportionnelle entre les distances données* AB *et* CD (fig. 42).

Solution. Sur la droite AB, portez CD de B en H (73); divisez AH en deux parties égales au point F (66); prolongez la ligne BF de la partie égale Bf (64); des points F et f pris pour centre, et avec un rayon égal à AF, décrivez deux cercles qui se coupent au point M, BM sera la moyenne proportionnelle demandée.

Démonstration. Les points f, B, F étant sur la même droite HA, et les triangles MBf, MBF ayant les côtés respectivement égaux, on aura l'angle MBF=MBf (8, *liv.* 1), et par conséquent chacun de ces angles sera droit (13, *liv.* 1); donc MB sera perpendiculaire sur le diamètre du demi-cercle HMA. De là on a (13, *liv.* 6)

$$AB : BM :: BM : BH,$$

ou bien

$$AB : BM :: BM : CD.$$

LIVRE SIXIÈME.

DES RACINES.

PROBLÈME.

100. *Trouver facilement les racines des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix, en prenant pour unité la distance* AB (fig. 43).

Solution. Du rayon AB, décrivez le cercle BDd; faites à AB $=$ BC $=$ CD $=$ DE $=$ Ed $=$ dc; des points B et E pris pour centre, et du rayon BD, décrivez les arcs de cercle qui se coupent en a et α; du même rayon BD et des centres D et d, décrivez des arcs de cercles qui se coupent au point V. Du rayon Aa, et du centre B, coupez la circonférence au point F; des centres B et F et du rayon AB, décrivez deux arcs de cercle qui se coupent au point T; on aura

$AB = \sqrt{1}$	$aV = \sqrt{6}$
$Aa = \sqrt{2}$	$CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$	$a\alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$	$BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$	$TV = \sqrt{10}$.

Démonstration. On a prouvé (27) que $(\mathrm{A}a)^2 = 2$; donc $\mathrm{A}a = \sqrt{2}$. On sait aussi (2) que $\mathrm{BD} = \sqrt{3}$; on a ensuite $\mathrm{BE} = 2 = \sqrt{4}$.

Les triangles BTA, TAF ayant les côtés égaux entre eux, on aura l'angle BTA = TAF (8, *liv.* 1), et par conséquent BT parallèle à FA (28, *liv.* 1) : donc BT sera perpendiculaire sur BA, de même que FA (27) (27, *liv.* 1) : de plus, les points A et E étant à la même distance des points D et *d*, ainsi que les points B et V, les quatre points B, A, E, V seront dans la même droite (13), et l'on aura EV = BA (14). On aura donc

$$(\mathrm{ET})^2 = (\mathrm{TB})^2 + (\mathrm{BE})^2 \text{ (47, \textit{liv.} 1)}$$
$$= (\mathrm{AB})^2 + 4(\mathrm{AB})^2 = 5;$$

d'où

$$\mathrm{ET} = \sqrt{5}.$$

De même

$$(a\mathrm{V})^2 = (\mathrm{A}a)^2 + (\mathrm{AV})^2;$$

et comme EV = BA, on aura

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BE} = 2\mathrm{AB};$$

d'où

$$(\mathrm{AV})^2 = 4(\mathrm{AB})^2 = 4.$$

On a de plus $(\mathrm{A}a)^2 = 2$ (27); donc $(a\mathrm{V})^2 = 6$, et $a\mathrm{V} = \sqrt{6}$. Comparant ensuite les points C, B, *c*, A, V avec les points A, *p*, B, P, Q de la figure 3, et substituant dans l'équation

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ.PQ \ (18);$$

on aura

$$(CV)^2 = (CB)^2 + BV.AV = 1 + 3.2 = 7;$$

d'où $CV = \sqrt{7}$; et comme $Aa = A\alpha$ (14), on aura

$$(a\alpha)^2 = 4(Aa)^2 = 8;$$

d'où $a\alpha = \sqrt{8}$. On a ensuite $OV = 3 = \sqrt{9}$. Enfin on a

$$(TV)^2 = (TB)^2 + (BV)^2 = 1 + 9 = 10;$$

donc

$$TV = \sqrt{10}.$$

PROBLÈME.

101. *Par le moyen des racines trouvées dans le problème précédent, trouver* (fig. 44) *les autres racines des nombres entiers, depuis* 10 *jusqu'à* 36.

Solution. Soit soustrait le nombre dont on veut avoir la racine du nombre carré immédiatement plus grand, qui sera, ou 16, ou 25, ou 36; avec la racine du reste que l'on trouvera (**100**), prise pour rayon, et du centre A, soit décrite la demi-circonférence QLR (**64**) avec la racine du nombre carré immédiatement plus grand, prise pour rayon (on la trouvera par la méthode du n° **65**), et des centres Q et R soient décrits deux arcs qui se coupent en P; la ligne AP sera la racine cherchée.

Par exemple, si l'on veut la racine de 29, on aura $36 - 29 = 7$; du rayon $CV = \sqrt{7}$ (**100**), après avoir décrit la demi-circonférence QLR, soient, des centres Q et R, et d'un rayon $= 6$, tracés deux arcs qui se coupent en P, on aura $AP = \sqrt{29}$.

Démonstration. L'angle PAQ étant droit (**83**), on aura

$$(PQ)^2 = (AQ)^2 + (AP)^2 \quad (47, \textit{liv. } 1);$$

d'où

$$(PQ)^2 - (AQ)^2 = (AP)^2.$$

Maintenant supposant $(PQ)^2 = 36$, et égalant successivement $(AQ)^2$ aux nombres entiers compris depuis 1 jusqu'à 10, $(AP)^2$ sera successivement égal aux carrés compris depuis 36 jusqu'à 25. Donc on aura successivement pour AP les racines de tous ces nombres. Mais la racine de 25 est 5 (**65**) : donc supposant $(PQ)^2 = 25$, on aura de la même manière les racines depuis 25 jusqu'à 16; et faisant $(PQ)^2 = 16$, on aura les autres racines depuis 16 jusqu'à 10.

Dans l'exemple que nous avons pris, on aura

$$(PQ)^2 - (AQ)^2 = 36 - 7 = (AP)^2 = 29\,;$$

d'où

$$AP = \sqrt{29}.$$

PROBLÈME.

102. *Trouver les racines de tous les nombres entiers.*

Solution. Il est clair qu'en employant la même méthode (**101**), on peut, avec les racines que l'on a déjà trouvées, avoir les autres racines des nombres supérieurs, et avec celles-ci continuer ainsi à l'infini. Nous avons donc déjà le moyen d'obtenir les racines de tous les nombres entiers.

PROBLÈME.

103. *Trouver la racine d'un nombre fractionnaire quelconque.*

Solution. Trouvez la racine du dénominateur (**102**), puis celle du numérateur, et faites cette proportion :

La première racine est à la seconde, comme l'unité est à une quatrième proportionnelle (93); ce quatrième terme sera la racine cherchée.

Démonstration. Soit en effet d le dénominateur, et n le numérateur; si l'on fait cette proportion :

$\sqrt{d} : \sqrt{n} :: 1 :$ à une 4^e proportionnelle $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$

Mais $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$: donc, etc.

PROBLÈME.

104. *Trouver facilement* (fig. 45) *la moitié des nombres entiers, depuis* $\sqrt{1}$ *jusqu'à* $\sqrt{25}$.

Solution. Du rayon $AB = 1$, et du centre A, soit décrit le cercle BDd, et dans sa circonférence soit fait à $AB = BC = CD = DE = Ed$.

Du centre B et du rayon BD soit décrit un arc qui passe par les points a, N, D, d, n, α.

Du même rayon et du centre E soit décrit un arc qui passe par les points a, M, C, m, α.

Du rayon Aa et du centre B soit décrit un arc qui passe par les points M, F, Q, *q*, *m*.

Du même rayon et du centre E soit décrit un arc qui passe par les points N, F, P, *p*, *n*.

Du rayon AB et du centre B soit décrit un arc qui passe par les points P et *p*.

Du même rayon et du centre E soit décrit un arc qui passe par Q et *q*.

Du même rayon et du centre P soit décrit un arc qui passe par R, et coupe la circonférence en S; du centre *p* soit décrit un autre arc qui coupe le premier en R, et la circonférence en *s*.

Du même rayon et des centres Q et *q* soient décrits deux arcs qui se coupent en T, et coupent la circonférence en O et *o*.

Du même rayon et du centre α soit décrit un arc qui coupe la circonférence en *g*; du centre R soit décrit un arc qui coupe la circonférence en L et *l*; des centres O et *o* soient décrits deux arcs qui se coupent en H; des centres H et T soient décrits deux arcs qui se coupent en V et *v*; on aura

$RA = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
$RQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}$
$RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$BE = \frac{1}{2}\sqrt{16}$
$RP = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$Ha = \frac{1}{2}\sqrt{17}$
$RF = \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$
$AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}$
$Qq = \frac{1}{2}\sqrt{7}$	$ag = \frac{1}{2}\sqrt{20}$
$Aa = \frac{1}{2}\sqrt{8}$	$dV = \frac{1}{2}\sqrt{21}$
$BR = \frac{1}{2}\sqrt{9}$	$HS = \frac{1}{2}\sqrt{22}$
$BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}$	$Mm = \frac{1}{2}\sqrt{23}$
$pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}$	$Mn = \frac{1}{2}\sqrt{24}$
$BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$	$HE = \frac{1}{2}\sqrt{25}$.
$HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}$	

Démonstration. Si l'on compare les points P, B, p, R, E de cette figure avec les points A, p, B, P, Q de la fig. 3 par le moyen de l'équation du n° 18,

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ.PQ),$$

on aura pour cette figure,

$$(PE)^2 = (PB)^2 + BE.RE;$$

ou

$$(Aa)^2 = (AB)^2 + 2AB.RE;$$

ou bien (27)

$$2 = 1 + 2RE;$$

d'où l'on tire $RE = \frac{1}{2} AE$;

et puisque le point R est sur la même droite BAE (13), on aura aussi

$$RA = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}.$$

Le point T étant au milieu de AB, par la même raison que le point R est au milieu de AE, ce qu'on a démontré, on aura $AT = RE$; d'où l'on voit, en comparant les points Q, T, q, E, R de cette fig. 45, avec les points A, q, B, Q, P de la fig. 3, le point A de la fig. 45 sera le point p de la fig. 3. Donc de l'équation du n° 16,

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp.PQ,$$

on tirera pour cette fig. 45 l'équation

$$(QE)^2 = (RQ)^2 + (RE)^2 + AR.RE;$$

et substituant les valeurs numériques,

$$1 = (RQ)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4};$$

d'où l'on tire

$$(RQ)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2, \ RQ = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Comparant les points D, A, *d*, E de la fig. 45, avec les points P, A, *p*, B de la fig. 3, il restera démontré (14) que les deux droites AE, D*d*, se coupent réciproquement en deux parties égales. Mais AE est coupée en deux parties égales au point R; donc D*d* l'est aussi. Mais $Dd = BD = \sqrt{3}$ (2); donc

$$RD = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Qu'on se rappelle que DR*d* est aussi perpendiculaire à AE (14). On a ensuite RP $= 1$; donc $RP = \frac{1}{2} \sqrt{4}$.

L'angle FAR étant droit (27), on a

$$(RF)^2 = (FA)^2 + (AR)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4};$$

donc

$$RF = \frac{1}{2} \sqrt{5}.$$

La base BAE du triangle BME étant coupée au milieu par la droite AM, on aura (26)

$$(BM)^2 + (EM)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2;$$

c'est-à-dire

$$(Aa)^2 + (BD)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2;$$

ou bien

$$2 + 3 = 2 + 2(AM)^2;$$

d'où

$$6 = 4(AM)^2,\ \sqrt{6} = 2AM,\ AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

De la comparaison que l'on vient de faire des points Q, T, q, E, R, A de la fig. 45 avec les points A, q, B, Q, P, p de la fig. 3, il résulte (13) qu'on a dans la fig. 45, AQ=Aq=QR=Rq. On verra par les mêmes raisons que les droites AP, Ap, PT, Tp sont égales entre elles, et aux quatre lignes AQ, Aq, QR, Rq. Donc les deux triangles isoscèles PTA, QAR ayant tous les côtés égaux entre eux, on aura l'angle PAT =QRA (8, *liv.* 1); et comme la ligne TAR est droite, PA sera parallèle à QR (29, *liv.* 1); d'où l'on voit aussi que PQ est égale et parallèle à AR (33, *liv.* 1).

Mais Qq est perpendiculaire à AR (14); donc elle l'est aussi à PQ (27, *liv.* 1). Ensuite dans les triangles PAT, RAq, les deux angles PAT, RAq seront égaux (8, *liv.* 1), et la ligne TAR sera droite. Donc les deux angles PAT, PAR étant égaux à deux angles droits (13, *liv.* 1), les deux angles PAR, RAq le seront aussi; d'où

8..

la ligne PAq sera droite aussi (14, *liv.* 1). Donc

$$(Pq)^2 = (2RQ)^2 = (PQ)^2 + (Qq)^2 \ (47, \textit{liv. } 1);$$

c'est-à-dire

$$2 = \frac{1}{4} + (Qq)^2;$$

d'où

$$\frac{7}{4} = (Qq)^2 \text{ et } Qq = \frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

Puis on a

$$(Aa)^2 = 2\,(27) = \frac{8}{4};$$

d'où

$$Aa = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{8}.$$

On a aussi $BR = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9}$.

Si l'on compare les points B, L, R, l, A de la fig. 45 avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3 de l'équation

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \,.\, PQ \ (16),$$

on tirera pour la fig. 45 l'équation

$$(BL)^2 = (LA)^2 + (AB)^2 + AR \,.\, AB;$$

ou bien

$$(BL)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{4};$$

d'où

$$BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Les deux triangles PSA, PBA ont les angles respectivement égaux; donc on a l'angle SPA = PAB (8, *liv.* 1); d'où les lignes PS, BA sont parallèles (28, *liv.* 1). Mais Pp coupe BR à angles droits (14); donc elle sera aussi perpendiculaire à PS (27, *liv.* 1). On démontrera ensuite que $(Pp)^2 = \frac{7}{4}$ de la même manière que l'on a démontré que $(Qq)^2 = \frac{7}{4}$; d'où, à cause de $(pS)^2 = (Pp)^2 + (PS)^2$ (47, *liv.* 1), on aura

$$(pS)^2 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4};$$

d'où

$$pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}.$$

On a ensuite

$$(BD)^2 = 3\ (2) = \frac{12}{4};$$

d'où

$$BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}.$$

On a aussi

$$(HF)^2 = (HA)^2 + (AF)^2;$$

et en démontrant que QO est parallèle à BE, de la même manière qu'on l'a fait pour PS, les points O, P, Q, S seront dans la même droite; et

$$PO = QO - PQ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = PQ.$$

Donc OP étant égale et parallèle à TA et à TB, les lignes OT, PA seront aussi égales et parallèles, ainsi que les lignes OB, PT (33, *liv.* 1). Mais on a démontré plus haut que PT = PA; donc OT, OB seront aussi égales à ces lignes. Par la même raison, les lignes *o*T, *o*B de l'autre côté seront égales à *p*A = PA. Si maintenant on compare les points O, *o*, A, T, B, H avec les points A, B, Q, P, *p*, *q* de la fig. 3, on tirera (14)

$$HB = AT = \frac{1}{2}.$$

On aura donc

$$(HA)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4};$$

d'où

$$(HF)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4},$$

et

$$HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

Si l'on compare les points E, O, H, *o*, A avec les points Q, A, *p*, B, P de la fig. 3 de l'équation $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp.PQ$ (16), on tirera pour la fig. 45,

$$(EO)^2 = (OA)^2 + (AE)^2 + HA.AE$$
$$= 1 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4};$$

d'où

$$EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

Ensuite si l'on compare les points A, R, L, Q, q, l de la fig. 45 avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on a (15) pour la fig. 3 l'équation

$$(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2;$$

et multipliant par 4,

$$4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2,$$

ou

$$(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2.$$

On tirera pour la fig. 45

$$(Ll)^2 = 4(AL)^2 - 4(AR)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4};$$

d'où résulte

$$Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

On a ensuite

$$BE = 2 = \frac{1}{2}.4 = \frac{1}{2}\sqrt{16}.$$

A cause de l'angle droit aAH (27), on a

$$Ha)^2 = (HA)^2 + (Aa)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \frac{17}{4};$$

d'où

$$\mathrm{H}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Démontrant que $(\mathrm{AN})^2 = \frac{3}{2}$ de la même manière qu'on l'a fait pour $(\mathrm{AM})^2$, et aussi que $(\mathrm{A}n)^2 = \frac{3}{2}$; et parce que NR coupe par moitié la base AE du triangle ANE, on aura (26)

$$(\mathrm{AN})^2 + (\mathrm{NE})^2 = 2(\mathrm{AR})^2 + 2(\mathrm{RN})^2;$$

c'est-à-dire

$$\frac{3}{2} + 2 = \frac{2}{4} + 2(\mathrm{RN})^2;$$

et réduisant, on trouve

$$(\mathrm{RN})^2 = \frac{3}{2} = (\mathrm{AN})^2.$$

De même on trouve $(\mathrm{R}n)^2 = \frac{3}{2}$.

Si maintenant on compare les points H, N, R, n, A de la fig. 45, avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3, de l'équation $(\mathrm{AQ})^2 = (\mathrm{AP})^2 + (\mathrm{PQ})^2 + \mathrm{P}p.\mathrm{PQ}$ (16), on tirera pour la fig. 45 l'équation

$$(\mathrm{HN})^2 = (\mathrm{AN})^2 + (\mathrm{AH})^2 + \mathrm{AR}.\mathrm{AH};$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{HN})^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4};$$

d'où résulte

$$HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}.$$

La ligne DR étant perpendiculaire à AE, c'est-à-dire à HR, on aura

$$(HD)^2 = (HR)^2 + (RD)^2 \text{ (47, } liv. \text{ 1)}$$
$$= 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4};$$

d'où

$$HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}.$$

La base $aA\alpha$ du triangle $ag\alpha$ étant coupée au milieu par la droite gA, on aura (26)

$$(ag)^2 + (\alpha g)^2 = 2(Aa)^2 + 2(Ag)^2,$$

ou

$$(ag)^2 + 1 = 4 + 2,$$

et

$$(ag)^2 = 5 = \frac{20}{4};$$

d'où

$$ag = \frac{1}{2}\sqrt{20}.$$

Les deux triangles HTV, AED ayant les côtés égaux entre eux, l'angle VTH = DEA (8, *liv.* 1), et les points H, T, A, E étant sur la même droite, VT sera parallèle à son égale DE (29, *liv.* 1); d'où VD est aussi parallèle et égale à TE (33, *liv.* 1). Mais Dd est perpendiculaire à BE, c'est-à-dire à TE; donc elle l'est aussi à VD (27, *liv.* 1); d'où

$$(d\mathrm{V})^2 = (\mathrm{VD})^2 + (\mathrm{D}d)^2 = (\mathrm{TE})^2 + (\mathrm{BD})^2$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \,.\, (2) = \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{21}{4};$$

d'où

$$d\mathrm{V} = \frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

Ayant démontré PS égale et parallèle à AE, ainsi que ps par la même raison, SE sera aussi égale et parallèle à AP (33, *liv.* 1), de même que sE l'est à Ap. A cause de l'égalité et du parallélisme des trois droites PS, TR, ps, on prouvera de même l'égalité de RS, Rs aux lignes PT, pT, toutes deux déjà démontrées égales à AP = RQ. Comparant maintenant les points H, S, E, s, R de cette fig. 45, avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3, de l'équation

$$(\mathrm{AQ})^2 = (\mathrm{A}p)^2 + p\mathrm{Q}.\mathrm{PQ} \quad (18),$$

on tirera pour la fig. 45

$$(\mathrm{HS})^2 = (\mathrm{SE})^2 + \mathrm{EH}.\mathrm{RH} = (\mathrm{RQ})^2 + \mathrm{EH}.\mathrm{RH}$$
$$= \frac{2}{4} + \frac{5}{2} \,.\, 2 = \frac{22}{4};$$

d'où

$$\mathrm{HS} = \frac{1}{2}\sqrt{22}.$$

La base AE du triangle AME étant divisée en deux parties égales par la droite MR, on aura (26)

$$(AM)^2 + (EM)^2 = 2(RA)^2 + 2(RM)^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{6}{4} + 3 = \frac{2}{4} + 2(RM)^2;$$

d'ou il résulte après la réduction,

$$(RM)^2 = 2 = (BM)^2 = (Bm)^2;$$

de cette valeur on déduirait de la même manière celle de $(Rm)^2$; d'où

$$BM = MR = Rm = mB.$$

Si maintenant on compare les quatre points B, M, R, *m* de la fig. 45 avec les quatre points A, Q, B, *q* de la fig. 3, on a (15)

$$(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2;$$

et de là

$$4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2;$$

c'est-à-dire

$$(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2.$$

On aura pour la fig. 45

$$(\mathrm{M}m)^2 = 4(\mathrm{BM})^2 - (\mathrm{BR})^2 = 8 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= \frac{32}{4} - \frac{9}{4} = \frac{23}{4};$$

d'où

$$\mathrm{M}m = \frac{1}{2}\sqrt{23}.$$

Les triangles BME, BnE ayant les côtés égaux entre eux, et ayant tous deux la base commune BE divisée en deux parties égales par les lignes AM, An de l'équation (26), il résultera la même valeur pour AM, An. Donc les triangles BAM, Ean ayant les côtés égaux entre eux, on aura l'angle BAM = EAn (8, *liv.* 1); d'où, à cause de la droite BAE, la somme des angles MAB, MAE, étant égale à deux droits (13, *liv.* 1), et substituant à l'angle MAB son égal EAn, la somme des deux angles MAE, EAn vaudra deux angles droits; d'où les deux lignes MA, An seront une seule ligne droite (14, *liv.* 1). On aura donc

$$(\mathrm{M}n)^2 = 4(\mathrm{AM})^2 = \frac{24}{4};$$

d'où

$$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\sqrt{24}.$$

Enfin,

$$\mathrm{HE} = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{25}.$$

105. Comme on a $\frac{1}{2}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{4}}$, par exemple, $\frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$, etc., on aura facilement, au moyen de ce problème, les racines de tous les quarts, depuis 1 jusqu'à 25 ; ce dont on fera usage, comme nous le verrons, dans la construction des figures semblables.

106. Si l'on avait pris le rayon $AB = 2$, on aurait eu toutes ces distances doubles de valeur ; d'où nous aurions eu les racines entières des nombres depuis 1 jusqu'à 25. On pourrait donc facilement doubler l'une quelconque de ces moitiés de racines pour avoir la racine entière (**64**).

107. La facilité de cette construction qu'on exécute avec les trois seules ouvertures déjà observées (**35**), savoir :

la première $= \sqrt{1}$,
la troisième $= \sqrt{2}$,
la seconde $= \sqrt{3}$,

avec lesquelles on a déjà divisé le cercle en 24 parties égales, et trouvé ensuite les 25 racines successives des premiers nombres, fait voir l'excellence de la Géométrie du compas, et combien elle peut contribuer à la perfection des arts.

108. On a eu soin, dans la construction précédente, d'employer le plus qu'il a été possible le premier compas dont l'ouverture = 1, qui a décrit la circonférence B D d, et qui conservant l'ouverture fondamentale, mérite plus de confiance que les autres. C'est aussi pourquoi on n'a voulu employer que les trois premiers compas les plus remarquables (**107**); ce qui a fait que quelques-unes des sections des arcs se sont faites à angles un peu aigus, comme celles des points S, s, O, o, et surtout celles des points L et l. Si l'on voulait avoir tous les angles d'intersection plus approchans de l'angle droit, on pourrait employer la construction suivante.

Autre construction de la figure 45.

109. Après avoir trouvé les points M et m, comme dans la solution (**104**), du rayon B D et des centres M et m soient décrits deux arcs qui se coupent en H.

Du rayon AB et du centre H soit décrit un arc qui coupe la circonférence en O et o; du même rayon soient déterminées les demi-circonférences O E s, o E S (**64**); du rayon B E et du centre H soit décrit un arc qui coupe la circonférence en L et l.

Tous les autres points de la fig. se trouveront comme au n° 104.

Démonstration. Nous démontrerons que les points que l'on trouve avec cette construction, sont les mêmes que ceux trouvés par la première.

Après avoir démontré (104) que $BM = MR = Rm = mB$, et que les trois points B, A, R sont dans la même droite, ayant de plus par construction $MH = ME = mH = mE$, H sera sur la même droite BAR (13), et l'on aura $HB = RE$ (14) : donc le point H sera le même que dans l'autre construction. Ensuite les lignes HO, Ho étant égales dans les deux constructions, les points O et o seront aussi les mêmes. Si l'on soustrait l'arc osE des deux demi-circonférences BsE, oES, les arcs restans Bo, ES seront égaux ; d'où

$$ES = Bo = BO = AQ = RQ;$$

d'où aussi le point S sera le même que dans la première construction ; le point s le sera également ; puis la base HTR du triangle HLR étant divisée par LT en deux parties égales, on aura (26)

$$(HL)^2 + (LR)^2 = 2(HT)^2 + 2(TL)^2;$$

c'est-à-dire

$$4+(LR)^2=2+2(TL)^2;$$

ou bien

$$2+(LR)^2=2(TL)^2.$$

Mais encore la base TR du triangle TLR étant divisée par moitié au point A par la droite LA, on aura (26)

$$(TL)^2+(LR)^2=2(TA)^2+2(AL)^2;$$

et doublant,

$$2(TL)^2+2(LR)^2=4(TA)^2+4(AL)^2$$
$$=1+4=5;$$

d'où soustrayant $2(LR)^2$, on a

$$2(TL)^2=5-2(LR)^2.$$

Mais on a trouvé ci-dessus

$$2(TL)^2=2+(LR)^2;$$

donc

$$5-2(LR)^2=2+(LR)^2.$$

Soustrayant 2, et ajoutant $2(LR)^2$, on a

$$3=3(LR)^2;$$

d'où

$$1=(LR)^2=(AB)^2.$$

Donc on aura LR = AB comme dans la première construction. On prouvera la même chose pour Rl; les autres points sont déterminés comme dans la construction précédente : donc tous les points de la figure sont les mêmes que dans cette construction.

LIVRE SEPTIÈME.

DE L'INTERSECTION DES LIGNES DROITES AVEC LES ARCS DE CERCLE ET ENTRE ELLES.

PROBLÈME.

110. *Étant donnés deux points* L *et* M *d'une droite* (fig. 46), *et le centre* A *avec le rayon* AB *d'un arc* BCD, *trouver les deux points* P *et* Q *auxquels la ligne* LM *coupe ledit arc, si toutefois elle le coupe.*

Solution. Des points L et M donnés sur la droite, pris pour centres, et avec leurs distances respectives MA, LA du centre donné, prises pour rayons, soient décrits deux arcs qui se coupent en V; du centre V et du rayon donné AB soit décrit un arc indéfini EFG : si cet arc coupe l'arc donné en P et Q, ces deux points seront les points cherchés; s'il ne le coupait pas, la droite LM n'en couperait pas moins l'arc donné.

Démonstration. Les quatre distances AP, AQ, VP, VQ étant égales entre elles, et les deux autres AM, VM aussi égales entre elles,

les trois points P, M, Q seront dans la même droite (13). On démontre de la même manière que les trois points Q, P, L sont dans la même ligne droite : donc la droite LM passe par les points P et Q, quand ces points d'intersection s'y trouvent.

Si le cercle EFG (*fig.* 47), décrit du centre V et du rayon AB, ne coupait pas le cercle BCD, LM ne couperait pas ce même cercle. En effet, si l'on conçoit la droite VA qui coupe les cercles en C et F, CF étant divisée par moitié en m, on aura $Vm = mA$. Donc LM coupera perpendiculairement VA en m (14) hors du cercle BCD; si l'on prend un autre point quelconque P sur la droite LM, dans le triangle rectangle PmA, on aura le côté PA plus grand que mA, parce qu'il est opposé à un plus grand angle (32 et 18, *liv.* 1). Donc le point P sera beaucoup plus hors du cercle que le point m : donc la droite LM ne coupera dans aucun point le cercle BCD.

PROBLÈME.

111. *Étant donné* (fig. 48) *un arc* **BCD** *décrit du centre* A *, trouver les deux points où la circonférence est coupée par la droite qui passe par* A *et par un autre point donné* **L**.

Solution. Du centre L et d'un rayon arbitraire LP soit décrit un arc qui coupe l'arc BCD en P et en Q ; soit partagé l'arc PQ en deux parties égales au point m (**60**) ; soit déterminée la demi-circonférence mDn (**64**) : les points m et n seront les deux points cherchés.

Démonstration. Les trois points A, m et L étant à la même distance des points P et Q, seront dans la même ligne droite (**13**). Mais la droite mA contient aussi le point n, extrémité du diamètre mn (15, *liv.* 4) : donc, etc.

PROBLÈME.

112. *Étant donnés deux points* A, B *d'une droite* (fig. 49 et 50), *et deux points* C, D *d'une autre droite, trouver le point* S *où elles se coupent.*

Solution. De deux points d'une des deux droites, par exemple, des points A et B pris pour centres, et avec les distances respectives AC, AD de ces points, et BC, BD des deux points C, D de l'autre droite, prises pour rayons, soient décrits quatre arcs, dont deux se coupent aux points C et c, et les deux autres aux points D et d.

Soit trouvé le quatrième point δ du parallélogramme $CDd\delta$, en faisant à $Dd = C\delta$, et à $DC = d\delta$ (11).

Soit trouvée la quatrième proportionnelle aux trois lignes $c\delta$, CD, Cc.

Avec cette distance prise pour rayon et des centres C et c soient décrits deux arcs qui se coupent en S; le point S sera celui de l'intersection des deux droites AB, CD.

Démonstration. Les droites AB, Cc seront perpendiculaires l'une à l'autre (13, 14), ainsi que AS, Cc : donc le point S sera dans la même ligne AB; puis AB ou AS étant aussi perpendiculaire à Dd (**13**, **14**), la même ligne Dd sera parallèle à Cc (29, *liv.* 1). Mais à cause des côtés égaux entre eux dans les deux triangles dCδ, dCD, on a les angles dCδ, CdD égaux (8, *liv.* 1); donc les deux lignes Cδ, Dd sont aussi parallèles (28, *liv.* 1); donc les points c, C, δ sont dans la même droite. Maintenant, à cause des deux côtés égaux dans les deux triangles CBA, cBA, les angles CBA, cBA seront égaux (8, *liv.* 1); par la même raison, on trouvera les angles ABD, ABd égaux dans les triangles ABD, ABd; donc, dans la fig. 49, l'angle cBd, qui est la somme des deux angles cBA, ABd, sera égal à l'angle CBD, somme des deux angles CBA, ABD. Dans la fig. 50, l'angle cBd, qui est la différence des deux angles ABd, cBA, sera aussi égal à l'angle CBD, qui est la différence des deux angles ABD, CBA; donc pour les deux figures dans les triangles cBd, CBD, qui ont deux côtés et l'angle compris égaux, le troisième côté cd sera égal au troisième côté CD (4, *liv.* 1). Mais CD $=$ $d\delta$; donc le triangle $cd\delta$ est isoscèle; de plus, le triangle cCS étant aussi isoscèle, on a la proportion

$$c\delta : CD \text{ ou } d\delta :: Cc : CS;$$

d'où vient encore

$$c\delta : cd :: cC : cS.$$

Donc les deux triangles $c\delta d$, cCS ont les angles égaux entre eux (5, *liv.* 6); d'où l'angle $c\delta d$ étant égal à l'angle cCS, CS sera parallèle à δd (29, *liv.* 1). Or CD est aussi parallèle à δd; donc le point S sera sur cette ligne; donc, etc.

LIVRE HUITIÈME.

DE LA CONSTRUCTION, DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES ANGLES, ET DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

113. Observation. Quand nous dirons : *construire un angle* abc (fig. 51) *avec le compas*, nous entendrons *trouver avec le compas trois points* a, b, c; *ou, un de ces points étant donnés, trouver les autres, de manière qu'en tirant ensuite par deux de ces points* a, b *une droite, et par un de ces deux points* b *et le troisième* c *une autre droite, on ait un angle* abc *aussi grand qu'on veut.* Quoique l'angle *abc* ne soit pas réellement construit, les droites *ab*, *bc* n'étant pas encore tirées, ce qui ne peut se faire avec le compas seulement, néanmoins nous adopterons la première phrase, en y attachant le sens dont nous sommes convenus.

PROBLEME.

114. *Étant donné un angle* ABC *au moyen des trois points* A, B, C, *et deux autres points* b *et* a, *trouver un point* c *tel que l'angle* abc *soit égal à* ABC.

Solution. Cherchez (93) une quatrième proportionnelle aux trois distances AB, *ab*, BC; avec cette ligne prise pour rayon, et du centre *b*, décrivez un arc qui passe par le point *c*; cherchez de même une quatrième proportionnelle aux trois distances AB, *ab*, AC, et avec cette ligne prise pour rayon, du point *a* pris pour centre, décrivez un autre arc qui coupe le premier en *c* : on aura l'angle $abc =$ ABC.

Démonstration. Puisque les deux triangles ABC, *abc* ont leurs côtés proportionnels, les angles opposés aux côtés proportionnels seront égaux (5, *liv.* 6).

115. La solution du problème précédent (114) servira donc aussi à résoudre le problème suivant : *Étant donnés trois points* A, B, C (*fig.* 51) *qui forment les sommets des trois angles d'un triangle, et deux autres* a *et* b, *et qui* *soient les sommets de deux angles d'un autre triangle, trouver un troisième point* c, *de manière que le triangle* abc *soit semblable au triangle* ABC.

PROBLÈME.

116. *Doubler, tripler, quadrupler, etc., un angle donné* BAC (113).

Solution. Du centre A (*fig.* 52) et avec les côtés AB, AC, pris pour rayons, décrivez deux arcs indéfinis BDF, CE; faites à CB = CD, l'angle BAD sera double de BAC; faites à CD = DE, l'angle BAE sera triple de BAC; faites à DE = EF, l'angle BAF sera quadruple de BAC, etc.

Pour quadrupler l'angle proposé, on pourrait encore faire à BD = DF.

Démonstration. Les triangles BAC, CAD, DAE, EAF ayant leurs côtés respectivement égaux, les angles BAC, CAD, DAE, EAF, etc. (8, *liv.* 1), seront égaux; donc, etc. D'où l'angle BAD étant égal à DAF, on aura aussi BD = DF (4, *liv.* 1).

PROBLÈME.

117. *Reconnaître si l'angle* BAG, *donné au moyen des trois points* B, A, G, *est égal à la moitié d'un angle droit.*

Solution. Du rayon AB (*fig.* 53) et du centre A, décrivez la demi-circonférence BFE (64); faites à GB = GF (10). Si l'on a BF = FE, l'angle BAG sera égal à la moitié d'un angle droit; si BF est plus petit ou plus grand que FE, l'angle BAG sera plus petit ou plus grand que la moitié d'un angle droit.

Démonstration. Puisque l'angle BAF est double de l'angle BAG (116), si l'angle BAG est égal à la moitié d'un angle droit, l'angle BAF sera droit, et par conséquent l'on aura BF = FE (83). Mais si BAG est moindre ou plus grand que la moitié d'un angle droit, BAF sera moindre ou plus grand qu'un angle droit, et par conséquent BF plus petit ou plus grand que FE (24, *liv.* 1).

PROBLÈME.

118. *Diviser en deux parties égales l'angle* BAC *donné au moyen des trois points* B, A, C *seulement, le point* A *n'étant pas pris à la même distance du point* B *que du point* C.

Solution. Du centre A (*fig.* 54) et du rayon AB décrivez l'arc BMD; faites à CB = CD; divisez l'arc BMD en deux parties égales au point M (**60**); divisez l'arc BN en deux parties égales en N; l'angle BAN sera la moitié de l'angle BAC.

Démonstration. L'angle BAD étant double de BAC (**116**), et double aussi de BAM (33, *liv.* 6), l'angle BAC sera le même que BAM; mais l'angle BAN est la moitié de BAM; donc aussi BAN sera la moitié de BAC.

PROBLÈME.

119. *Étant donné l'arc* BC (fig. 55) *décrit du point* A *pris pour centre, en trouver le sinus, le cosinus, la tangente et la sécante.*

Solution. Dans la circonférence décrite avec le rayon AB, faites à $BC = Bc$; divisez en deux parties égales la corde Cc au point M (66); CM sera le sinus et MA le cosinus de l'arc donné.

Du point M pris pour centre et du rayon MA, décrivez un arc qui coupe, s'il est possible, la circonférence en D et en d; déterminez la demi-circonférence $dD\delta$ (64); prolongez BA de B en V, en faisant $BV = BA$: des centres A et V et du rayon $D\delta$ décrivez deux arcs qui se coupent en S, BS sera la tangente, et SA la sécante.

Démonstration. La ligne BA coupe au point M la corde Cc en deux parties égales et à angles droits (14) : donc CM est le sinus et MA le cosinus de l'arc BC.

SB est perpendiculaire à AB (83); $D\delta$ est troisième proportionnelle aux deux lignes AM, AC (87) : il en sera de même de AS, qui est égal à $D\delta$. Donc, dans les deux triangles rectangles AMC, ABS, on a la proportion

$$AM : AC :: AB : AS;$$

et *invertendo* (4, *liv.* 5),

$$AC : AM :: AS : AB.$$

On tire de là (35, *liv.* 5)

$$(AC)^2 : (AM)^2 :: (AS)^2 : (AB)^2;$$

et en substituant pour $(AC)^2$ et $(AS)^2$ leurs valeurs tirées de la 47e proposition du *liv.* 1, on aura

$$(AM)^2 + (MC)^2 : (AM)^2 :: (AB)^2 + (BS)^2 : (AB)^2;$$

d'où (17, *liv.* 5)

$$(MC)^2 : (AM)^2 :: (BS)^2 : (AB)^2;$$

et (34, *liv.* 5),

$$MC : AM :: BS : AB;$$

donc les côtés MC, BS seront aussi proportionnels; donc l'angle MCA sera le même que BSA (5, *liv.* 6); donc les points A, C, S seront dans la même droite, et BS sera la tangente et AS la sécante de l'arc BC.

Si le cercle décrit du centre M et du rayon MA ne coupait pas la circonférence, ou la coupait sous des angles trop aigus, il faudrait avoir recours aux moyens indiqués (89 ou 90 et 91).

Autre solution pour trouver la tangente et la sécante.

Décrivez (64) la demi-circonférence BCE (*fig.* 56); du rayon BC et du centre E coupez-la au point Q; du rayon CQ et des centres A et B décrivez deux arcs indéfinis qui se coupent en V, et avec le même rayon CQ et du centre V coupez la circonférence en e; du rayon Ee et des centres A et B décrivez deux arcs qui se coupent en m; du même rayon Ee et du centre m décrivez la demi-circonférence ABS (64) : SB sera la tangente et SA la sécante de l'arc BC.

Démonstration. Si l'arc BCF est égal au quart de la circonférence = FE, comme on a par construction BC = QE, on aura aussi CF = FQ. On sait de plus, par les définitions trigonométriques, que le sinus de l'arc CF est le même que le cosinus de l'arc BC, et que la corde de l'arc CFQ, double de l'arc CF, est double du sinus de l'arc CF ou du cosinus de l'arc BC : cette corde est égale à CQ = AV; on a de plus (22)

$$AV.Ee = (AB)^2.$$

La ligne AmS (**64**) étant droite $= 2\,Ee$ et $aV = 2$ cos. BC ; on aura

$$2\,Ee.\cos.\,BC = (AB)^2 = AS.\cos.\,BC;$$

donc (17, *liv.* 6)

$$\cos.\,AC : AB :: AB : AS;$$

donc AS sera troisième proportionnelle au cosinus et au rayon, et par conséquent égale à la sécante, suivant les démonstrations trigonométriques. De plus, l'angle ABS étant droit (31, *liv.* 3), la sécante AS sera déterminée de position, et par conséquent BS sera la tangente.

PROBLÈME.

120. *Etant donné le sinus* mn *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez (*fig.* 57) avec le rayon AB, le cercle CcK; doublez mn (**64**); d'un rayon $= 2mn$, et d'un point quelconque C de la circonférence, décrivez un arc qui la coupe en c; divisez l'arc Cc en deux parties égales au point B (**60**), BC sera l'arc cherché.

Démonstration. Le sinus de l'arc BC, d'après les définitions trigonométriques, est la moitié de la corde double de BC; donc, etc.

PROBLÈME.

121. *Etant donné le cosinus* ma *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez le cercle C*c*K (*fig.* 57) avec le rayon AB; doublez *ma* (**64**); d'un point quelconque *c* de la circonférence pris pour centre et d'un rayon $= 2ma$, coupez la circonférence au point K; déterminez la demi-circonférence K*c*C (**64**)); divisez en deux parties égales l'arc C*c* au point B (**60**) : BC sera l'arc cherché.

Démonstration. Tirez l'autre corde C*c*; elle sera divisée au point M en deux parties égales et à angles droits par le rayon AB (**14**). Mais l'angle C*c*K étant inscrit et appuyé sur le diamètre, est aussi droit (31, *liv.* 3); donc les deux triangles CMA, C*c*K, qui ont un angle commun en C, et chacun un angle droit, sont équiangles entre eux (32, *liv.* 1): donc on a (4, *liv.* 6)

$$CM : Cc :: MA : cK.$$

Mais CM est la moitié de Cc ; donc

$$\mathrm{MA} = \frac{1}{2} c\mathrm{K} = ma\,;$$

de plus, MA est le cosinus de l'arc BC ; donc, etc.

PROBLÈME.

122. *Étant donnée la tangente* sb *d'un arc d'un rayon donné* AB (fig. 55), *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez avec le rayon AB le cercle BCδ; au point B élevez sur AB une perpendiculaire BS$=bs$ (76); trouvez (111) le point C où SA coupe la circonférence; BC sera l'arc cherché.

Cette solution n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÈME.

123. *Étant donnée* (fig. 55) *la sécante* sa *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez avec le rayon AB la circonférence BCδ ; sur AB portez BV $=$ AB (64); puis des centres A et V et du rayon sa, décrivez deux arcs qui se coupent en S: trouvez (111) le point C où la ligne SA coupe la circonférence : BC sera l'arc cherché.

Démonstration. La ligne SB sera perpendiculaire à BA (83); donc elle sera la tangente de l'arc BC, et par conséquent SA en sera la sécante.

LIVRE NEUVIÈME.

DES FIGURES SEMBLABLES ET DES POLYGONES RÉGULIERS.

124. Observation. Quand nous dirons, *Construire une figure ou un polygone*, nous entendrons, *trouver tous les points qui suffisent pour déterminer de grandeur et de position toutes les droites qu'il conviendrait de tirer pour construire entièrement le polygone.*

PROBLÈME.

125. *Sur un côté donné* **ab**, *construire un triangle semblable à un triangle donné* **ABC** (fig. 51).

Solution. Voyez **115**.

PROBLÈME.

126. *Étant donnée* (fig. 58) *une figure* **ABCEFD**, *construire une figure qui lui soit semblable, et dont la surface soit avec celle de cette figure dans un rapport donné.*

Solution. Si l'on veut, par exemple, que la surface de la nouvelle figure soit les deux cinquièmes de la surface de la figure donnée.

D'un rayon AB, le plus grand qu'il sera possible, construisez la figure 43 (100); prenez dans cette figure la ligne $Aa = \sqrt{2}$ pour rayon; du centre O (*fig.* 58) décrivez le cercle plus petit, dans la circonférence duquel se trouve le point *v*. De la ligne $ET = \sqrt{5}$ (*fig.* 43), prise pour rayon, et du même centre O, décrivez le cercle plus grand, dans la circonférence duquel se trouve le point V, déterminé par rapport au point *v*, de telle manière que la ligne V*v* soit à peu près tangente au point *v* du cercle intérieur.

Supposez la figure donnée divisée en autant de triangles ABC, ACD, CDE, EDF, en imaginant des droites AC, CD, etc., et placez les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc., sur les distances AB, AC, CD, etc., qui mesurent les côtés de ces triangles; appliquez successivement les distances 1, 2, 3, etc., comme cordes à autant d'arcs consécutifs du cercle V, savoir: AB de V en 1, AC de 1 en 2, BC de 2 en 3, et ainsi de suite jusqu'à la fin; ce que l'on fera en prenant la distance AB pour rayon, et en décrivant du point V pris pour centre un arc qui coupe cette même circonférence au point 1, etc.

D'un rayon égal à Vv, et en prenant successivement pour centres les points 1, 2, 3, 4, etc., décrivez des arcs qui coupent successivement la plus petite circonférence aux points 1, 2, 3, 4, etc., jusqu'à la fin.

Les cordes du cercle intérieur, ou les distances de v à 1, de 1 à 2, de 2 à 3, de 3 à 4, etc., seront les côtés *ab*, *ac*, *bc*, *cd*, etc., de la nouvelle figure que l'on construira triangle par triangle; avec la distance du point v au point 1, on déterminera les deux points *a* et *b*; des centres *a* et *b*, et avec la seconde et la troisième distance, prise dans le cercle intérieur (la seconde du point 1 au point 2, et la troisième du point 2 au point 3), décrivez deux arcs qui se coupent en *c*; des centres *c* et *a*, et avec les distances quatrième et cinquième, prises dans le cercle intérieur (la quatrième de 3 à 4, et la cinquième de 4 à 5), décrivez deux arcs qui se coupent en *d*; on déterminera de la même manière les points *e* et *f*, et la figure sera construite.

Démonstration. Les cordes du cercle intérieur sont aux cordes homologues du cercle extérieur, comme le rayon Ov est au rayon OV (93), ou comme $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{5}$: donc tous les côtés des triangles de la figure *abcefd*, et les côtés homologues des triangles de la figure ABCEFD sont dans le même rapport; donc les triangles des deux figures sont équiangles entre eux, et par conséquent semblables (5, *liv.* 6, *déf.* 1); donc les deux mêmes figures polygones sont semblables (20, *liv.* 6), et les surfaces étant entre elles comme les carrés des côtés homologues, la surface du polygone *abcefd* sera à celle du polygone ABCEFD, comme 2 est à 5; donc la surface de la plus petite des deux figures sera à celle de la plus grande, comme 2 est à 5.

D'après cet exemple, il est facile de voir la méthode à suivre pour résoudre le problème, quel que soit le rapport qu'on propose d'établir entre la surface de la figure à construire et celle de la figure donnée.

On décrira deux circonférences *v* et V avec des rayons qui soient entre eux comme les racines des nombres qui expriment le rapport des surfaces; sur celle des deux circonférences qui correspond à la figure donnée, on portera successivement comme cordes les côtés des triangles dans lesquels cette figure est supposée divisée. On déterminera, par la méthode ci-dessus exposée, dans l'autre circonférence, des cordes proportionnelles qui seront les côtés respectifs des triangles de la nouvelle figure.

Le rapport des moitiés des racines étant le même que celui des racines entières, la figure 45 servira dans plusieurs cas (104). Pour les autres cas, voyez les numéros 101, 102, et 103.

On prend ensuite un rayon AB (*fig.* 44 et 45), le plus grand que l'on peut employer commodément, pour que les cercles puissent mieux recevoir les longueurs des cordes à appliquer, et pour que les intersections qui en résultent se fassent à angles plus approchans de l'angle droit.

127. Si l'on avait donné le rapport des côtés AB et *ab* entre eux, ou de deux autres droites quelconques entre elles, on choisirait dans ce rapport les deux rayons OV, O*v*, les plus grands possibles.

PROBLÈME.

128. *Inscrire à un cercle donné un quelconque des polygones réguliers que l'on peut y inscrire en se servant de la règle et du compas.*

Solution. Divisez la circonférence en autant de parties égales que le polygone qu'on veut inscrire a de côtés (27, 29, 30, 31, 32, 38, 40, 41, 42, 53, 57, 60, 63), les points de division seront les sommets des angles du polygone régulier cherché, et les cordes des arcs en seront les côtés.

Démonstration. Tous les côtés étant égaux comme cordes d'arcs égaux, les angles qu'ils forment seront égaux, puisque ayant leur sommet à la circonférence, ils sont tous appuyés sur des arcs égaux (21, *liv.* 3). On a donc inscrit au cercle un polygone régulier d'autant de côtés que l'on voulait (*déf.* 1, *liv.* 3).

129. Puisque avec trois points seulement pris hors de la circonférence et six ouvertures de compas au plus (59), on peut la diviser en 240 parties égales (57), on pourra inscrire au cercle avec ces trois points et ces six ouvertures, autant de polygones réguliers qu'il y a de nombres exactement diviseurs de 240 : or ces nombres sont : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240 ; on pourra donc, en omettant le diviseur 2, inscrire au cercle un polygone régulier de 3, de 4, de 5, de 6, de 8, de 10, etc., et enfin de 240 côtés.

130. Si le nombre des côtés du polygone que l'on veut inscrire se trouve être un de ceux dans lesquels on a divisé la circonférence, par les méthodes enseignées (27, 30, etc.), par exemple, le nombre 12, on divisera la circonférence en douze parties égales (31); les deux extrémités de chacune de ces divisions seront les sommets des angles du polygone qu'il était question d'inscrire, ou, ce qui est la même chose, les cordes de ces arcs seront les côtés du polygone.

Si le nombre des côtés du polygone à inscrire ne se trouve point précisément dans les problèmes du liv. II; par exemple, si l'on veut inscrire un polygone de 60 côtés, on doublera, triplera, quadruplera, etc., ce nombre jusqu'à ce qu'on parvienne à avoir un de ceux exprimés dans les problèmes précédens : c'est ainsi qu'en doublant 60, nombre des côtés du polygone indiqué, on a 120. Or, on a donné (42) le moyen de diviser la circonférence en 120 parties égales; ces parties prises deux à deux fourniront 60 arcs égaux, dont les cordes sont les côtés du polygone en question.

S'il avait fallu tripler le nombre, par exemple, si l'on eût voulu inscrire un polygone de 16 côtés, on aurait alors, comme au problème (38), divisé la circonférence en 48 parties, nombre triple de 16; on aurait pris ensuite trois de ces arcs pour en avoir un qui fût la seizième partie de la circonférence, et chacun de ces arcs égaux aurait eu pour corde un côté du polygone de 16 côtés.

PROBLÈME.

131. *Circonscrire un triangle équilatéral* (124) *à un cercle donné* BCDd (fig. 59).

Solution. Soit fait au rayon AB de ce cercle $=$BC$=$CD, et à BD$=$BL$=$DL$=$D$d$$=$DN $=$$dN=$$dM=$BM.

Les trois points L, M, N seront les sommets des angles du triangle équilatéral circonscrit au cercle.

Démonstration. Le triangle BDd, inscrit au cercle (29, 130), étant équilatéral, les triangles DLB, NDd, dBM auront leurs côtés égaux à ceux de ce triangle; donc leurs angles seront égaux (8, *liv.* 1); les trois angles NDd, dDB, BDL seront donc égaux aux trois angles du triangle inscrit, c'est-à-dire à deux droits (32, *liv.* 1): donc la ligne NDL sera droite (14, *liv.* 1). On démontrerait la même chose pour les deux lignes LBM, NdM; et comme chacune d'elles est double du côté BD, elles seront par conséquent égales entre elles. Donc le triangle LMN est équilatéral; ensuite les angles ND*d*, DLB étant égaux, la droite D*d* sera parallèle à LB (29, *liv.* 1), ou à LM. Or les points N, A, B sont dans une même droite perpendiculaire à D*d* (13, 14); donc AB est aussi perpendiculaire à LM (27, *liv.* 1); donc LM est tangente au cercle (16, *liv.* 3). On démontrerait la même chose pour les deux lignes NL, NM; donc le triangle NLM est équilatéral et circonscrit au cercle (*déf.* 2, *liv.* 4).

PROBLÈME.

132. *Circonscrire un carré à un cercle donné* (fig. 60).

Solution. Divisez la circonférence de ce cercle en quatre parties égales aux points B, F, E, *f* (27); de ces points comme centres et du rayon AB, décrivez des arcs qui se coupent en R, S, T, V; ces quatre derniers points seront les sommets des angles du carré circonscrit au cercle.

Démonstration. Les angles TBA, SBA étant droits (100), la ligne TSB est une droite

(14, *liv.* 1) perpendiculaire au diamètre BE, et par conséquent tangente au cercle (16, *liv.* 3) : on démontrerait la même chose pour les autres lignes TFV, VER, R/S. De plus, les triangles BFT, BFA ayant les côtés respectivement égaux, on aura l'angle BTF=BAF (8, *liv.* 1), et par conséquent droit (27) : la même chose se démontrerait pour les autres angles V, R, S; donc, etc.

PROBLÈME.

133. *Circonscrire à un cercle donné un pentagone régulier.*

Solution. Soit le cercle BDE (*fig.* 61) décrit avec le rayon AB; divisez sa circonférence en cinq parties égales (40) aux points B, C, D, E, F; d'un de ces points C comme centre et du rayon CB décrivez la demi-circonférence BDP (64); prenant pour centre le point E opposé à l'arc CB et avec le rayon EC coupez l'arc BDP en *p*; des centres B, C, D, E, F et avec le rayon P*p* décrivez des arcs qui se coupent aux points *b*, *c*, *d*, *e*, *f*; ces points d'intersection seront les sommets des angles du pentagone circonscrit au cercle.

La démonstration est la même que celle du problème suivant.

PROBLÈME.

134. *Étant donnés les sommets des angles d'un polygone régulier quelconque inscrit au cercle, trouver les sommets des angles d'un polygone semblable circonscrit.*

Solution. Soient les points B, C, D, E (*fig.* 62) les sommets des angles du polygone inscrit : de l'un de ces points C pris pour centre et d'un rayon égal à la distance CB, de deux d'entre eux, décrivez la demi-circonférence BDP (64); des centres B et C et avec le rayon BD, décrivez deux arcs qui se coupent au point V (dans le cas du problème précédent (*fig.* 61), le point V coïncide avec le point E) : de ce même rayon BD et du point V comme centre coupez la circonférence BDP en *p*; avec P*p* pour rayon et des centres B, C, D, E, etc., qui sont les sommets des angles du polygone inscrit, décrivez les arcs qui se coupent aux points *b*, *c*, *d*, *e*, etc.; ces points seront les sommets des angles du polygone régulier circonscrit.

Démonstration. On a $pP.VC=(CD)^2$ (22), c'est-à-dire $cC.BD=(BC)^2$; d'où (17, *liv.* 6)

$$BD : BC :: BC : Cc.$$

Mais $BC=CD$, et $Bc=cC$: donc les deux triangles isoscèles BCD, BcC auront leurs côtés proportionnels; donc (5, *liv.* 6) l'angle cCB sera égal à l'angle CBD; d'où il suit que les deux lignes cC, BD seront parallèles (28, *liv.* 1). On prouverait de même que Cd est aussi parallèle à BD. Les points c, C, d seront donc dans la même ligne droite : mais de ce que BC $=$ ED, il suit que le rayon AC est perpendiculaire à BD (14); il le sera donc aussi à la droite cd (29, *liv.* 1) : donc cd est tangente à sa moitié en C (16, *liv.* 3). On démontrerait de même que $de=cd$ est tangente à sa moitié en D; ainsi des autres. Le nombre de ces lignes sera égal à celui des points B, C, D, E, etc. Donc, etc. (*déf.* 2, *liv.* 4).

PROBLÈME.

135. *Sur un côté donné* AE (fig. 1), *construire un triangle équilatéral.*

Solution. On trouvera le point D suivant la méthode indiquée (1); le triangle ADE sera le triangle cherché.

PROBLÈME.

136. *Sur un côté donné* AB (fig. 43), *construire un carré.*

Solution. Les deux points F, T étant trouvés, d'après la méthode prescrite (**100**), le carré ABTF sera le carré cherché.

Démonstration. BT étant égale et parallèle à FA, et par conséquent perpendiculaire à AB (**100**), la ligne FT sera aussi parallèle à BA (33, *liv.* 1); d'où aussi les angles BTF, AFT sera droits (27, *liv.* 1), et ABTF sera un carré (*déf.* 32, *liv.* 1).

PROBLÈME.

137. *Sur un côté donné* AB (fig. 63), *construire un pentagone régulier.*

Solution I. Avec le rayon AB et du centre A, décrivez la circonférence BCDE*d*, et faites à AB = BC = CD = DE = E*d*; faites encore à BD = B*a* = E*a*, et ensuite à A*a* = D*b*

$= db$; du centre B et avec le rayon BA décrivez l'arc indéfini ACL, dans lequel vous ferez à Ab = AH = HK = KL : pareillement, dans la circonférence BCD, faites à Ab = BQ = QP = PN. Des points L et N pris pour centres et du rayon AB décrivez deux arcs qui se coupent en M; les points A, B, L, M, N seront les sommets des angles du pentagone régulier cherché.

Démonstration. L'angle CBF (*fig*. 61) du pentagone régulier BCDEF a pour mesure la moitié de l'arc CDEF (20, *liv*. 3); cet angle étant donc égal à trois cinquièmes de la circonférence, l'angle CBF du pentagone a pour mesure les trois dixièmes. Or les arcs AHKL, BQPN, qui mesurent les angles ABL, BAN, valent chacun les trois dixièmes de la circonférence (41) : donc ces angles ABL, BAN sont ceux du pentagone régulier à construire sur AB; ensuite les trois côtés AB, BL, AN, côtés du pentagone, sont égaux entre eux; donc, en comparant les points L, B, A, N de la figure 63, avec les points C, B, F, E de la figure 61, le triangle LMN de la première figure, ayant les côtés respectivement égaux aux côtés du triangle CDE de la seconde, ils auront aussi les angles égaux (8, *liv*. 1), et tout coïncidera parfaitement ; donc, etc.

Solution II. Décrivez, comme ci-dessus, du rayon AB et du centre A, la circonférence BDd (*fig.* 64); faites-y à AB = BC = CD = DE = Ed; à BD = Ba = Ea; et enfin, à Aa = Db = db; ensuite, avec le rayon bE et du centre A décrivez un arc qui passe par les points L et M; du centre B et avec le même rayon bE, coupez cet arc au point M et la circonférence en N; enfin, avec le même rayon et du centre N, coupez l'arc LM en L; les points A, B, L, M, N seront les sommets des angles du pentagone régulier.

Démonstration. On a (4, *liv.* 2)

$$(BE)^2 = (bE)^2 + (Bb)^2 + 2Bb.bE;$$

l'angle BNE étant inscrit et appuyé sur le diamètre, on a (31, *liv.* 3, 47, *liv.* 1),

$$(BE)^2 = (BN)^2 + (NE)^2.$$

En comparant les deux valeurs de $(BE)^2$ dans lesquelles $(bE)^2 = (BN)^2$, il résulte que

$$(Bb)^2 + 2Bb.bE = (NE)^2;$$

puis bE étant égal à bA + AE = Ab + AB, on aura

$$(Bb)^2 + 2Bb.Ab + 2Bb.AB = (NE)^2.$$

Mais $2Bb.AB = 2(Ab)^2$ (46); donc

$$(Bb)^2 + 2Bb.Ab + (Ab)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2.$$

Or

$$(Bb)^2 + 2Bb.Ab + (Ab)^2 = (AB)^2;$$

donc

$$(AB)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2.$$

NE sera donc le côté du pentagone inscrit au cercle BDd (50) (10, *liv.* 13). L'arc NE étant égal à deux dixièmes de la circonférence, l'arc BCN sera égal à trois dixièmes, et l'angle BAN sera l'angle du pentagone régulier. Substituant ensuite la droite BN aux deux côtés BA, AN du pentagone régulier, elle deviendra le côté du triangle isoscèle qui a pour base AB, et chacun des angles à la base sera double de l'angle au sommet (11, *liv.* 4); les points L et M seront donc aussi les sommets du pentagone régulier que l'on avait à construire.

PROBLÈME.

138. *Construire un hexagone régulier sur un côté donné* AB (fig. 65).

Solution. Du rayon AB et des points A et B comme centres soient décrits deux arcs qui se coupent au point O ; avec le même rayon et du centre O soit décrit un cercle dans la circonférence duquel on fera à AB = BC = CD = DE = EF ; l'hexagone ABCDEF sera l'hexagone demandé.

Voyez, pour la démonstration, la quinzième du *liv.* 4.

PROBLÈME.

139. *Sur un côté donné* AB (fig. 66), *construire un octogone régulier.*

Solution I. Des points A et B pris pour centres et avec le rayon AB décrivez les deux demi-circonférences BCDE, AC*de* (64); faites à CE = E*a* = B*a* = Aα = *e*α ; avec le rayon AB et du centre *a* coupez l'arc DE au point H ; avec le même rayon et du centre α coupez l'arc *de* au point *h* ; encore avec le même rayon, et des points H, *h* comme centres, décrivez deux arcs qui passent par les points G, *g* ; avec le rayon B*a*, et des points *a*, α pris pour centres, coupez ces deux arcs en *g*, G ; avec le rayon AB et des centres G et *g* soient décrits deux arcs qui passent par les points F et *f*; coupez ces deux arcs en *f*, F avec le rayon Aa et des centres a, α, les points A, B, h, g, f, F, G, H seront les sommets de l'octogone régulier construit sur le côté AB.

Démonstration. Les côtés AB, Bh, hg, gf, AH, HG, GF sont tous égaux par construction. Maintenant, si l'on considère un octogone régulier inscrit au cercle, on trouvera que chacun de ses angles à la circonférence a pour base un arc égal aux $\frac{6}{8}$ de la circonférence, et par conséquent $\frac{3}{8}$ pour mesure (20, *liv.* 3); on a ensuite l'arc BCH égal à $\frac{3}{8}$ (30) : donc l'angle BAH est un angle de l'octogone, ainsi que l'angle ABh. Ensuite aA, αB étant perpendiculaires à AB (27), elles seront parallèles entre elles (29, *liv.* 1) : donc la droite Ha qui fait un angle de 45° avec aA (27), en fera encore un semblable avec la ligne αB (27, *liv.* 1). Mais hBα est aussi de 45° : donc aH est parallèle à hB (28; *liv.* 1) : donc aussi ah est égale et parallèle à HB (33, *liv.* 1); d'où l'angle haH $=$ hBH (34, *liv.* 1). Or l'angle hBH $=$ hBE $-$ HBE $=$ hBE $-$ $\frac{1}{2}$ HAE (20, *liv.* 3); il aura donc pour mesure $\frac{3}{8} - \frac{1}{16}$, c'est-à-dire

$\frac{5}{16}$ de la circonférence : donc l'angle Bha, qui avec l'angle haH équivaut à deux droits (27, *liv.* 1), aura pour mesure $\frac{3}{16}$ de la circonférence. Ensuite les deux triangles ahB, ahg ayant tous leurs côtés égaux entre eux, l'angle ahg $= ah$B (8, *liv.* 1); d'où l'angle total ghB aura pour mesure $\frac{3}{8}$ de la circonférence, et sera angle de l'octogone, ainsi que l'angle AHG. L'angle hga sera encore égal à l'angle hBa, et les deux triangles gfa, BAa ayant aussi les côtés égaux entre eux, l'angle fga sera égal à ABa (8, *liv.* 1). L'angle hgf sera donc composé de deux angles respectivement égaux aux deux qui composent l'angle hBA : ces deux angles seront donc égaux, et chacun d'eux sera par conséquent angle de l'octogone : il en sera de même pour l'angle HGF ; les points f et F seront donc aussi sommets d'angles de l'octogone comme tous les autres.

Solution II. Avec le rayon AB et des points A et B pris pour centres décrivez comme ci-dessus les deux demi-circonférences BCDE, ACde ; et ayant fait à CE $=$ Ea $=$ Ba $=$ Aα $= e\alpha$, du rayon AB et du centre a décrivez un arc qui coupe l'arc DE en H et passe par le point F ; avec le même rayon et du centre α, décrivez encore un arc qui coupe l'arc *de* en *h* et passe par le point *f*; du rayon *a*A et du centre *a* décrivez un arc qui passe par le point *f*; avec le même rayon et du centre α décrivez un arc qui passe par le point F ; enfin, avec le rayon AB et des centres H et F, *h* et *f* décrivez des arcs qui se coupent aux points G et *g*.

Démonstration. D'après la démonstration de la première solution, les droites AB, $a\alpha$ étant parallèles et égales entre elles, ainsi que les droites *a*A, αB avec lesquelles elles forment des angles droits, si l'on fait, pour abréger, $AB = 1$, on aura aussi $a\alpha = \alpha f = a\text{F} = 1$. On a ensuite $(\text{A}a)^2 = 2 = (af)^2 = (a\text{F})^2$: donc les angles $f\alpha a$, $\text{F}a\alpha$ seront droits (48, *liv.* 1), et les points *f*, α, B dans la même droite (14, *liv.* 1), comme aussi les points F, *a*, A dans la même parallèle. Ensuite de l'égalité de $f\alpha$, F*a*, il résulte que *f*F sera aussi égale et parallèle à $\alpha a = 1$, et $\text{F}a\alpha f$ sera un carré. De plus, les triangles FG*a*, HG*a* ayant les côtés égaux entre eux, ont aussi les angles égaux (8, *liv.* 1), et l'angle FG*a* est égal à G*a*H; les deux droites GH, F*a* seront donc parallèles, comme aussi FG,

aH (33, *liv.* 1) : mais l'angle FaH extérieur au triangle aHA est égal aux deux angles intérieurs opposés aHA, aAH (32, *liv.* 1), c'est-à-dire, à trois angles demi-droits : donc on a l'angle FaH = BAH ; donc aussi les angles opposés dans les parallélogrammes étant égaux (34, *liv.* 1), FGH = BAH. On a ensuite l'angle AaH = aHG : de plus, l'angle AHa est droit ; donc aussi l'angle AHG vaut trois demi-droits. De même l'angle fFa étant droit, et l'angle aFG étant égal à aHG qui est demi-droit, l'angle fFG sera aussi égal à trois demi-droits. On démontre la même chose pour les angles en f, g et h : donc tous les côtés et tous les angles étant égaux, la figure sera un octogone régulier.

Si l'on quadruple les deux membres de l'équation (15)

$$(\mathrm{QM})^2 = (\mathrm{AQ})^2 - (\mathrm{AM})^2,$$

qui appartient à la figure 3, on aura

$$4(\mathrm{QM})^2 = 4(\mathrm{AQ})^2 - 4(\mathrm{AM})^2;$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{Q}q)^2 = 4(\mathrm{AQ})^2 - (\mathrm{AB})^2;$$

d'où résulte le théorème suivant pour tout rhombe quelconque : *le carré d'une des diagonales du rhombe vaut quatre fois le carré d'un de ses côtés, moins le carré de l'autre diagonale;* d'où, dans le rhombe Fa, HG, on aura

$$(aG)^2 = 4(Fa)^2 - (FH)^2.$$

Mais comme l'angle FGH = HAB, et que les côtés qui comprennent ces deux angles égaux sont aussi égaux, on a aussi

$$FH = BH \text{ (4, \textit{liv.} 1).}$$

On aura donc

$$(aG)^2 = 4(AB)^2 - (BH)^2 = (BE)^2 - (BH)^2.$$

Mais (31, *liv.* 3, et 47, *liv.* 1)

$$(BE)^2 = (BH)^2 + (HE)^2:$$

donc

$$(aG)^2 = (HE)^2;$$

d'où

$$aG = HE.$$

Solution III. Après avoir du centre A et du rayon AB (*fig.* 67) décrit la demi-circonférence BCDE (**64**), et avoir fait à BD = Ba = Ea; du centre a et du rayon AB soit décrit un arc qui coupe l'arc DE en H, et passe par F; du centre a et du rayon aA soit décrit un arc qui passe par f; du centre a et du rayon aB soit décrit un arc qui passe par g; du centre a et du rayon BH soit décrit un arc qui passe par h; du centre a et du rayon HE soit décrit un arc qui passe par G; soit fait à $\mathrm{AB} = \mathrm{B}h = hg = gf = f\mathrm{F} = \mathrm{FG}$; on aura aussi $\mathrm{FG} = \mathrm{GH}$, etc.

Démonstration. Les triangles $a\mathrm{AB}$, $a\mathrm{B}h$, ahg, agf, etc., qui ont leur sommet en a et leurs bases sur les côtés de la figure, ont tous leurs côtés respectivement égaux à ceux des triangles affectés des mêmes lettres dans la figure 66 (*voyez* les deux démonstrations précédentes) : donc ils auront aussi leurs angles égaux (8, *liv.* 1); et comme ils sont semblablement ordonnés, les angles de la figure 67, qui sont composés des angles de ces triangles pris deux à deux, seront aussi égaux aux angles de l'autre figure; donc, etc.

Solution IV. Après avoir, du centre A et du rayon AB, décrit la demi-circonférence BCDE, en y faisant à $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DE}$, et avoir fait à $\mathrm{BD} = \mathrm{B}a = \mathrm{E}a$; ayant du centre a et du rayon AB coupé la demi-circonférence en H, soient des centres E et A, avec le rayon EH, décrits deux arcs qui se coupent en P; du centre P avec le même rayon PA soit coupée la demi-circonférence en Q; des centres B et H avec le rayon BQ soient décrits deux arcs qui se coupent en O : maintenant soit décrit du centre O et du même rayon OH un cercle qui passera par A; soit fait dans sa circonférence à $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$; les points A, B, h, g, f, etc., seront les sommets des angles de l'octogone.

Démonstration. Comme on a $QP = AP = EP$, ainsi que $QA = AE = AB$, et que AB est sur le prolongement de AE (15, *liv.* 6), on aura (22)

$$BQ . AP = (AQ)^2;$$

d'où (17, *liv.* 6)

$$AP : AQ :: AQ : BQ :$$

ou bien

$$HE : AE :: AB : BO.$$

Mais HE est un côté de l'octogone inscrit au cercle qui a pour rayon AE : donc aussi AB sera le côté de l'octogone inscrit au cercle qui a pour rayon BO.

PROBLÈME.

140. *Sur un côté donné* AB (fig. 69), *construire un décagone régulier.*

Solution. Du centre A et du rayon AB soit décrit le cercle BDd; soit fait dans sa circonférence à AB = BC = CD = DE = Ed; soit fait à BD = Ba = Ea; soit fait ensuite à Aa = Db = db. Maintenant des centres A et B avec le rayon bE soient décrits deux arcs qui se coupent en V; du centre V et du même rayon bE soit décrit le cercle BLMNOPQRSA, et soit fait à AB = BL = LM = MN = NO = OP = PQ = QR = RS; le point S sera dans la section des deux circonférences, et les points A, B, L, M, etc., seront les sommets des dix angles du décagone régulier cherché.

Démonstration. La ligne bE est un côté du triangle isoscèle qui, ayant pour base AB, a chacun des angles à la base double de l'angle au sommet (137). Donc, dans le triangle VAB, l'angle BVA sera égal à un cinquième de deux angles droits (32, *liv.* 1); l'arc BA qui le mesure sera donc égal à un dixième de la circonférence, ainsi que les autres arcs BL, LM, MN : donc le polygone ABLMNOPQRS sera un décagone régulier inscrit au cercle qui a le point V pour centre, et construit sur le côté AB.

PROBLÈME.

141. *Sur un côté donné* AB (fig. 69), *construire un polygone régulier quelconque, de ceux qu'on peut inscrire au cercle* (128).

Solution. Du rayon AB soit décrit un cercle BDd; soit inscrit à ce cercle un polygone régulier semblable à celui qu'on veut construire sur le côté AB, c'est-à-dire d'un égal nombre de côtés (128), et soit Bl un côté de ce polygone inscrit; soit ensuite cherchée une troisième proportionnelle à ce côté Bl et au rayon AB (87, 89, 90, 91, 92); avec cette ligne prise pour rayon, et des centres A et B soient décrits deux arcs qui se coupent en V; du point V comme centre et du même rayon VA soit décrit un cercle ABLMN, etc., et soit fait à AB = BL = LM = MN, etc.; les points A, B, L, M, N, etc., seront les sommets des angles du polygone cherché.

Démonstration. Les côtés du triangle BAl étant proportionnels à ceux du triangle BVA, on aura l'angle BAl = BVA (5, *liv.* 6) : donc les arcs Bl, BA qui le mesurent, seront des portions égales de leurs circonférences; donc, etc.

PROBLÈME.

142. *Construire un carré sur une diagonale* AB *donnée* (fig. 70).

Solution. Du centre A et du rayon AB soit décrit l'arc BCDE; du centre B avec le même rayon soit décrit l'arc indéfini CP, et soit fait à BC = CD = DE; soit fait ensuite à BD = Ba = Ea. Maintenant, du centre E et du rayon Aa soit coupé l'arc CP en P; des centres A et B et du rayon AP soient décrits deux arcs qui se coupent en L et M; ALBM sera le carré cherché.

Démonstration. Si l'on suppose pour abréger AB = 1, on aura

$$AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ (104) = AL = BL;$$

d'où

$$(AL)^2 = (BL)^2 = \frac{1}{2},$$

et

$$(AL)^2 + (BL)^2 = 1 = (AB)^2.$$

Donc l'angle BLA est droit (48, liv. 1), et les deux angles LBA, LAB égaux entre eux, valent chacun la moitié d'un angle droit (5, et 32, *liv.* 1). On démontrera de même que l'angle BMA est droit, et que les angles MBA, MAB valent chacun la moitié d'un angle droit: donc les angles MBL, MAL seront droits, et et ALBM sera le carré cherché.

LIVRE DIXIÈME.

DES CENTRES.

PROBLÈME.

143. *Trouver le centre d'un cercle donné* MAB (fig. 71).

Solution. Ayant pris pour centre un point quelconque A de sa circonférence, d'un rayon arbitraire AB, plus petit que le diamètre du cercle donné, et plus grand que le quart de ce diamètre, soit décrite la demi-circonférence BCDE, en faisant à AB = BC = CD = DE; soit M le point où elle coupe la circonférence du cercle donné; des centres E et A avec le rayon EM soient décrits deux arcs qui se coupent en L; du centre L et du même rayon LA soit coupé le cercle BME en Q; des centres B et A et du rayon BQ soient décrits deux arcs qui se coupent en O; le point O sera le point cherché.

Démonstration. La ligne BAE étant droite (15, *liv.* 4), l'angle extérieur LAB est égal aux deux angles intérieurs opposés ALE, AEL pris ensemble dans le triangle ALE (32, *liv.* 1). Or les triangles LAE, LAQ ont tous les côtés égaux entre eux, et par conséquent les angles opposés aux côtés égaux sont aussi égaux (8, *liv.* 1). Donc l'angle AEL=QAL, et l'angle ALE=ALQ; donc l'angle LAB est égal aux deux angles QAL et QLA pris ensemble; et retranchant de part et d'autre l'angle QAL, on a l'angle restant QAB = QLA : donc la somme des deux angles LAQ, LQA dans le triangle LAQ, est égale à la somme des deux angles AQB, ABQ dans le triangle ABQ (32, *liv.* 1). Mais ces deux triangles LAQ, ABQ sont isoscèles par construction; donc les angles à leurs bases seront égaux chacun à la demi-somme (5, *liv.* 1), et par conséquent égaux entre eux dans l'un et l'autre triangle; donc les triangles LAQ, ABQ seront semblables (4, *liv.* 6), et l'on aura

$$LA : AQ :: AQ : QB;$$

et substituant les valeurs égales,

$$ME : EA :: AB : OB;$$

donc les triangles isoscèles MAE, AOB ayant les côtés proportionnels, sont équiangles entre eux (5, *liv.* 6), et on a l'angle OAB = AME = AEM. Mais l'angle extérieur MAB est égal à la somme des deux angles intérieurs AME, AEM égaux entre eux, dans le triangle AEM (32, *liv.* 1); donc il sera égal à l'angle OAB pris deux fois, ou bien on aura OAB = OAM. Mais les deux triangles OAB, OAM ont encore les côtés AB, AM égaux entre eux, et de plus le côté OA commun, c'est-à-dire ces deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux : donc (4, *liv.* 1) le troisième côté OB de l'un de ces triangles sera aussi égal au troisième côté OM de l'autre ; donc les trois lignes OB, OA, OM sont égales, et par conséquent le point O est le centre que l'on cherchait du cercle MAB (9, *liv.* 3).

144. Quand on a trouvé la valeur de QB, troisième proportionnelle aux deux lignes LA, AQ, ou aux deux lignes EM, EA, valeur qui est celle du rayon du cercle dont on cherche le centre, il suffit de prendre deux points à volonté dans la circonférence du cercle, et de ces points comme centres avec le même rayon, décrire deux arcs qui se coupent; le point de leur intersection sera le centre du cercle.

145. Pour obtenir des sections à angles moins aigus, il sera utile, dans la pratique, de choisir à vue d'œil un rayon AB qui approche de la valeur du rayon du cercle que l'on cherche.

PROBLÈME.

146. *Circonscrire et inscrire un cercle à un triangle équilatéral donné* (fig. 72).

Solution. Soient A, B et M les sommets des angles du triangle donné; du centre A et du rayon AM soit tracé l'arc MDE, et soit fait à AM = MD = DE; des centres B et A avec le rayon BD, soient tracés deux arcs qui se coupent en L; du centre L avec le même rayon LA soit décrit un arc qui coupe l'arc DE en Q; des sommets de deux angles du triangle, des points A et B, par exemple, pris pour centres et avec le rayon QE, soient décrits deux arcs qui se coupent en O; du centre O et du même rayon OA soit décrit un cercle, il sera circonscrit au triangle.

Soit divisée la ligne QE en deux parties égales au point *m* (**66**); du même centre O et du rayon Q*m* soit décrit un autre cercle; il sera inscrit au triangle.

Démonstration. De la démonstration du n° **142**, il résulte que la ligne BAE étant droite, QE est troisième proportionnelle aux deux lignes EM, EA. Donc QE sera le rayon d'un cercle qui passe par les trois points M, A, B, et le point O en sera le centre (143).

Dans la figure 59, où le cercle DB*d* est inscrit au triangle NLM, AD est perpendiculaire à LD, et NAB à LB (131) : donc les triangles rectangles NDA, NBL, qui ont un angle commun en N, ont aussi le troisième angle égal (32, *liv.* 1); d'où on a la proportion (4, *liv.* 6)

NL : LB :: NA : DA.

Mais NL est double de LB; donc aussi NA est double de DA, c'est-à-dire, le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral est double du rayon du cercle inscrit; donc, etc.

PROBLÈME.

147. *Circonscrire et inscrire un cercle à un carré donné* (fig. 73).

Solution. Soient A, B, T, F les sommets des angles du carré donné; soit fait à AB = AE; à FB = FE; du centre B avec le même rayon BF soit décrit un arc qui passe par Q et *q*; du centre E et du rayon EA soit coupé cet arc en Q et *q*;

des centres Q et q et du même rayon AE soient décrits deux arcs qui se coupent en M; des centres A et B et du rayon AQ soient décrits deux arcs qui se coupent en O; du centre O et du même rayon OB soit décrit un cercle, il sera circonscrit au carré; du même centre O et du rayon OM soit décrit un autre cercle, il sera inscrit au carré.

Démonstration. Si l'on fait, pour abréger, AB $=$ 1, on aura

$$AQ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ (104) = AO = BO;$$

on aura donc

$$(AO)^2 + (BO)^2 = 1 = (AB)^2;$$

d'où l'angle BOA sera droit (48, *liv.* 1), et les angles OAB, OBA seront égaux chacun à la moitié d'un angle droit (5 et 32, *liv.* 1). De plus, l'angle BAF du carré étant droit, l'angle OAF en vaudra la moitié; donc dans les deux triangles BAO, FAO on aura un angle égal compris entre côtés égaux: d'où l'on aura aussi OB $=$ OF (4, *liv.* 1). On démontre de la même manière que l'on a aussi OB $=$ OT: donc le cercle ABTF est circonscrit au carré.

La ligne OM est perpendiculaire à MA (83):

donc BMA est tangente au cercle décrit avec le rayon OM. On démontre la même chose pour les autres côtés AF, FT, TB : donc le cercle décrit du centre O et du rayon OM est inscrit au carré.

PROBLÈME.

148. *Circonscrire et inscrire un cercle à un polygone régulier quelconque* (fig. 74).

Solution. Soient B, A, M les sommets de trois angles de ce polygone régulier, dont celui du milieu A soit également éloigné des deux autres B et M; du point A comme centre et du rayon AB soit décrite la demi-circonférence BCDE (64); des centres A et E, et du rayon ME soient décrits deux arcs qui se coupent en L; du centre L et du même rayon LA soit coupée la demi-circonférence BCDE en Q : la ligne BQ sera le rayon du cercle circonscrit; puis des sommets B et A, par exemple, de deux des angles du polygone comme centres et du rayon BQ soient décrits deux arcs qui se coupent en O; le point O sera le centre de ce cercle.

Si AB est un côté du polygone, on le divisera en deux parties égales au point T (66); OT sera le rayon du cercle inscrit que l'on décrira du même centre O; si une autre ligne quelconque A b est un des côtés du polygone, on la divisera en deux parties égales au point t, et O t sera le rayon du cercle à inscrire avec le même centre O.

Démonstration. Il résulte de la démonstration du n° 14, que O est le centre du cercle qui passe par les trois points B, A, M; donc il est le centre du cercle circonscrit, puisque par les trois points B, A, M, on ne peut faire passer qu'un seul cercle (25, *liv.* 3). On a ensuite OT perpendiculaire à TA (83); d'où TA sera tangente au cercle décrit du centre O avec le rayon OT (16, *liv* 1). La même démonstration s'applique à tous les autres côtés égaux à AB; donc ce cercle est inscrit au polygone qui a pour côté AB. On démontre de même que le cercle décrit du centre O et du rayon Ot, est inscrit au polygone qui a pour côté Ab.

149. Si AB est un côté du polygone dans lequel on veut inscrire le cercle, il y aura plusieurs manières de le diviser en deux parties égales (66); nous avons donné la plus simple pour le carré (147): pour le triangle

seul (146), le rayon du cercle inscrit est la moitié du rayon du cercle circonscrit ; dans le carré seul, il est égal à la moitié du côté.

PROBLÈME.

(150). *Trouver le centre* S (fig. 75) *d'un cercle qui passe par trois points donnés* P, Q, R.

Solut. Des points P et Q comme centres et d'un rayon arbitraire soient décrits deux arcs qui se coupent en A et B ; des centres Q et R et d'un rayon arbitraire soient décrits deux arcs qui se coupent en C et D ; le point S où les lignes A B, C D se coupent (112) sera le centre cherché.

Démonstration. Voyez (25, *liv.* 3).

Dans le double problème présenté (146), Mascheroni n'a traité qu'un cas particulier de chaque question ; et s'il a généralisé (150) la première, sa solution, qui est celle d'Euclide, n'est pas fondée sur l'usage seul du compas. Cette condition est remplie dans les solutions suivantes, qui embrassent les deux problèmes avec plus de généralité.

1er Problème. *Circonscrire un cercle à un triangle donné* (*fig.* 75 *bis*).

Soient A, B, C, les trois angles du triangle : supposons le cercle décrit ; soient OB, OC, deux rayons. Si par le point C on mène une tangente, les angles formés par cette tangente avec BC et avec CO seront égaux, l'un à A, l'autre à 100°. Donc O CB = 100° — A. Or il est facile de déterminer cet angle sans le secours de la règle.

Pour avoir l'angle OCB, de deux points *m* et *m'* situés à égale distance du point A, je décris avec des rayons égaux, mais plus grands que A*m*, des arcs qui se coupent en P. Du point A et du rayon AP, je décris un arc qui coupe le côté AC en Q : PAQ est l'angle cherché : car PAQ = PAB — A = 100° — A. Pour le porter en C, je décris de ce point et du même rayon AP un arc *qo* = PQ; le point *o* appartiendra au rayon CO. Si donc du point *o* et du rayon C*o* = AP on décrit une circonf., elle touchera le cercle cherché. Or on sait qu'en menant par le point de contact de deux cercles une droite quelconque, les cordes interceptées par les deux circonf. sont entr'elles comme les rayons. On a donc CO : C*o* :: CB : Cδ. Donc CO est une 4^ième^ proportionnelle aux lignes connues CB, Cδ et C*o*. L'ayant construite (93), on décrira des points A et B, et avec cette ligne pour rayon, deux arcs : leur point d'intersection O sera le centre cherché.

2^e^ PROBLÈME. *Inscrire un cercle dans un triangle donné.*

On sait que les tangentes menées d'un même point à un cercle sont égales. Si donc on connaissait un seul des points de contact, ou la distance de ce point aux deux sommets adjacens, en décrivant des arcs de ce point et avec des rayons respectivement égaux aux distances trouvées, les rencontres de ces arcs avec chacun des deux autres côtés du triangle, détermineraient les deux autres points de contact. On connaîtrait ainsi trois points du cercle, qui serait dès lors déterminé. (*V. le problème précédent.*) Cherchons donc les distances d'un de ces points de contact aux deux sommets adjacens, c.-à-d. les longueurs des tangentes menées de ces sommets. Or, 1°. la somme de ces tangentes est égale au côté sur lequel on les compte; 2°. la double somme des trois tangentes étant égale au périmètre du triangle, leur somme est égale au demi-périmètre. Si de la somme des trois tangentes ou du demi-périmètre on retranche la somme de deux d'entr'elles ou un des côtés, on aura la troisième, celle qui part du sommet opposé à ce côté. Chaque tangente est donc égale au demi-périmètre, moins le côte opposé à son point de départ. (*Note du Traducteur.*)

LIVRE ONZIÈME.

PROBLÈMES DIVERS.

PROBLÈME.

151. *Étant donnée une échelle* SL, *trouver la surface du triangle* **ABD** *et du quadrilatère* **AOCD** (fig. 76).

Solution. Faites à BA = B*a*, et à DA = D*a* (11); portez sur l'échelle SL les distances A*a* et BD prises avec le compas. Supposons, par exemple, que l'on trouve A*a* = 7, BD = 8; multipliez ces deux nombres entre eux, prenez le quart du produit = 14; ce nombre exprimera la surface du triangle ABD.

Pour trouver la surface du quadrilatère ABCD, après avoir déterminé le point *a* comme ci-dessus, on fera à BC = B*c* et à DC = D*c*; on trouvera sur l'échelle les deux distances A*a*, C*c*; soit, par exemple, A*a* = 7, C*c* = 5; prenez la somme de ces deux quantités = 12 : multipliez par cette somme

= 12 la valeur de BD trouvée sur l'échelle = 8, prenez le quart du produit = 24, ce nombre exprimera la surface du quadrilatère ABCD.

Démonstration. La ligne A*a* est double de la perpendiculaire qui tombe du point A sur la ligne BD (14); mais la surface du triangle ABD est égale à la moitié de la surface d'un parallélogramme qui aurait pour base la ligne BD, et pour hauteur cette perpendiculaire (41, *liv.* 1) : donc elle est égale au quart du produit de A*a* par BD. De même la surface du triangle BCD est égale au quart du produit de C*c* par BD : donc la surface du quadrilatère ABCD est égale au quart du produit de la somme des deux parallèles A*a*, C*c* par leur perpendiculaire BD.

152. Le problème précédent peut servir à mesurer la surface d'un espace renfermé par un polygone quelconque, en imaginant des droites qui le partagent en autant de triangles ou de quadrilatères que l'on jugera convenable. On pourrait proposer encore d'autres manières de la réduire en trapèzes; mais on peut facilement les déduire de la méthode avec laquelle on a résolu ce problème.

PROBLÈME.

153. *Étant donnés* (fig. 77) *les plans triangulaires qui comprennent une pyramide tétraèdre, trouver sur sa base le point où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet, et trouver sa hauteur.*

Solution. Soit le triangle ABC la base de cette pyramide tétraèdre, et soient AEC, BDC AFB les plans triangulaires qui vont se réunir à son sommet; du centre C et du rayon CD = CE soit décrit un arc qui passe par les points *e* et *d*; du centre B et du rayon BD soit décrit un arc qui coupe le premier en *d*; du centre A et du rayon AE soit décrit un arc qui coupe le rayon en *e*; soit trouvé le point P où se coupent les deux droites D*d*, E*e* (112); ce point sera celui où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide.

Soit divisée par moitié la droite CE au point *m* (66); du centre *m* et du rayon *m*C soit décrite la demi-circonférence C*p*E; soit fait à CP = C*p*; la ligne E*p* sera la hauteur de la pyramide.

Démonstration. Si dans la pyramide SABC qui a pour base le triangle ABC et pour sommet le point S, on mène dans le triangle SCB la droite Sδ perpendiculaire à CB, et si l'on élève du point δ pris dans le plan de la base ACB la perpendiculaire δd, elle contiendra le point P, où tombe du sommet la perpendiculaire SP (11, *liv.* 11); de même, si du point S dans le plan SAC, on mène à AC la perpendiculaire Sε, et si du point ε dans le plan de la base ACB, on mène à la même droite AC la perpendiculaire εe, elle contiendra le point P : donc ce point sera l'intersection des deux droites δd, εe. Mais dans la fig. 77, où les points D et E représentent le point S de la fig. 78, Dd est perpendiculaire à BC en un point δ (14); de même aussi Ee est perpendiculaire à AC en un point ε : donc le point P est le point cherché.

De plus, les deux triangles CPS (*fig.* 78), CpE (*fig.* 77), étant rectangles en P et p, le premier par supposition et le second par la 31[e] *prop.* du *liv.* 3, et CS étant la même ligne que CE, on a CP $=$ Cp. On aura encore PS $=$ pE; car (*fig.* 78) (47, *liv.* 1),

$$(CS)^2 - (CP)^2 = (PS)^2;$$

de même on a (*fig.* 77)

$$(CE)^2 - (Cp)^2 = (pE)^2.$$

Mais

$$(CS)^2 - (CP)^2 = (CE)^2 - (Cp)^2;$$

donc

$$(PS)^2 = (pE)^2;$$

d'où

$$PS = pE:$$

donc pE est la hauteur de la pyramide.

154. Jusqu'ici toutes les démonstrations que nous avons données étaient fondées sur les élémens d'*Euclide*. Mais comme nous ne pourrions pas toujours suivre la même marche sans être trop prolixes, nous emploierons quelques équations qui sont démontrées dans tous les traités de Trigonométrie plane.

155. Si, dans un cercle décrit avec un rayon égal à l'unité, on appelle x et y deux arcs quelconques, on aura

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

156. Si dans la troisième équation l'on fait $x = y$, on aura

$$\cos 2x = (\cos x)^2 - (\sin x)^2;$$

et comme $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, d'où l'on tire $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$, on aura

$$\cos 2x = 1 - 2(\sin x)^2;$$

d'où

$$(\sin x)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

et

$$\sin x = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)}.$$

157. Si l'on ajoute les deux premières équations (155), on aura

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y;$$

d'où

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}.$$

Si l'on fait $(x + y) = p$, $(x - y) = q$, on aura

$$2x = p + q,\ 2y = p - q;$$

d'où

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) . \cos\left(\frac{p - q}{2}\right).$$

158. Si l'on ajoute les deux dernières équations (155), on aura

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}:$$

d'où

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

159. Si l'on retranche la 3^e des mêmes équations de la 4^e, on aura

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2};$$

d'où

$$\cos q - \cos p = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

160. A cause de l'équation $2\sin x = corde\ 2x$, on aura (**156**)

$$corde\ 2x = 2\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}};$$

et si l'on suppose $2x = x$, on aura

$$corde\ x = 2\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{(2-2\cos x)}.$$

Si l'on appelle k la corde d'un arc, c le cosinus, s le sinus, h la corde du complément, on aura

$$k^2 = 2 - 2c \text{ et } h^2 = 2 - 2s.$$

La première de ces deux équations donne $c = 1 - \frac{1}{2}k^2$; et comme on a

$$s = \sqrt{(1-c^2)} = \sqrt{\left(k^2 - \frac{1}{4}k^2\right)} = k\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}k^2\right)},$$

on aura

$$h^2 = 2 - 2k\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}k^2\right)}.$$

PROBLÈME.

161. *Dans un triangle équilatéral* ABC (fig. 79), *inscrire un carré* ebcd (fig. 124).

I^re Solution. Si l'on veut se servir des côtés donnés du triangle, soit décrit du centre A et avec le rayon AB, le demi-cercle BCDE (64).

Du centre E et avec le rayon EC soit décrit un arc qui coupe le côté donné AB en b; du centre A et avec le rayon Bb soit décrit un arc qui coupe le même côté en e; des centres e et b et avec le rayon eb soient décrits deux arcs qui coupent les côtés AC en d, et CB en c; $ebcd$ sera le carré cherché.

Démonstration. Faisant pour abréger $AB = 1$, on aura

$$Eb = EC = BD = \sqrt{3} \quad (2);$$

d'où

$$Bb = BE - Eb = 2 - \sqrt{3} = Ae;$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} be &= AB - 2Ae = 2\sqrt{3} - 3 \\ &= (2 - \sqrt{3}).\sqrt{3} = bc; \end{aligned}$$

donc on aura

$$Bb : bc :: (2-\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3}).\sqrt{3} :: 1 : \sqrt{3}.$$

Mais si l'on suppose que AB soit coupée au milieu en T par la perpendiculaire CT, on aura aussi

$$BT : TC :: \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ (104);$$

c'est-à-dire

$$BT : TC :: 1 : \sqrt{3} :$$

donc bc est parallèle à TC (2, *liv.* 6), et par conséquent perpendiculaire à AB (27, *liv.* 1). On démontrerait la même chose pour la droite de : donc $ebcd$ est le carré inscrit.

IIe Solution. Si l'on ne voulait pas se servir de l'intersection des côtés donnés du triangle ABC, mais qu'étant donnés seulement les trois points A, B et C, sommets des angles du triangle, on dût trouver les quatre points b, c, d, e du carré à inscrire ; du centre E, comme dans la solution précédente, et avec le rayon EC, soit décrit un arc qui passe par b, C et a; du centre B et avec le même rayon soit décrit un arc qui coupe en a celui qu'on vient de tracer; du centre a et avec le rayon AB soit coupée la demi-circonférence BCDE en H, et soit fait dans cette circonférence à $Ha = HI = IK$; du centre D et avec le rayon aK soit décrit un arc qui passe par b, le point b sera déterminé; du centre A et du rayon Bb soit décrit un arc qui passe par le point e; du centre C et du rayon Cb soit décrit un autre arc qui coupe le dernier en e; des centres e et C et du rayon be soient décrits deux arcs qui se coupent en d; des centres b et C avec le même rayon be soient décrits deux arcs qui se coupent en c; $bcde$ sera le carré cherché.

Ou bien en employant le cercle BCDEδ, et faisant à $AB = E\delta$; des centres D et δ et avec le rayon aK déterminé plus haut soient décrits deux arcs qui se coupent en b; le reste se fait comme ci-dessus.

Démonstration. Le point K sera ici déterminé, comme dans la fig. 9 (32), par le moyen du même point a; ainsi l'arc BK sera un vingt-quatrième de la circonférence. On a ensuite, dans la fig. 9, $BK = Bk = EM$; si l'on compare les points a, K, B, k, A, M avec les points Q, A, R, S, p, B de la fig. 4, on tirera pour la fig. 9 de l'équation

$$(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS.pQ \ (20),$$

celle-ci,

$$(aK)^2 = (Ba)^2 - Kk.Aa.$$

Or Kk est la corde d'un douzième de la circonférence. Pour trouver sa valeur, en supposant pour abréger $AB = 1$, on a le sinus de $BN = Kk = AX$ (*fig.* 12) $= \frac{1}{2}$, et le double de son cosinus, c'est-à-dire $2NX = NO = BD = \sqrt{3}$: d'où substituant Kk pour x et $\sqrt{3}$ pour $2\cos x$, dans l'équation (159),

$$\textit{corde}\, x = \sqrt{(2 - 2\cos x)},$$

on aura la droite

$$Kk = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

d'où

$$(aK)^2 = 3 - \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\cdot\sqrt{2}\ (27)$$
$$= 3 - (\sqrt{3} - 1) = 4 - \sqrt{3}.$$

Maintenant, si des centres D et δ et avec le rayon aK on décrit deux arcs qui se coupent en b, le point b sera sur la droite BE (13), qui divisera en deux parties égales à angles droits la ligne Dδ au point R (14), en faisant RD $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (104) : donc, puisque (47, *liv.* 1)

$$(Db)^2 = (DR)^2 + (bR)^2,$$

on aura

$$(bR)^2 = (Db)^2 - (DR)^2 = 4 - \sqrt{3} - \frac{3}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4};$$

et de là

$$bR = \sqrt{3} - \frac{1}{2}, \text{ et } bE = \sqrt{3}.$$

Donc par la démonstration de la solution, le point b est une des extrémités du carré : on le trouvera de même avec les centres D et E, et avec les deux rayons aK et BD, comme dans la première partie de la II^e solution; puis les deux triangles CAe, CBb ayant tous leurs côtés respectivement égaux, on aura l'angle CBb = CAe (8, *liv.* 1) = CBA; d'où le point e sera sur la ligne BA, et sera une autre extrémité du carré. Enfin, comme, dans cette seconde solution, les droites Cb, Ce sont les mêmes de grandeur et de position que dans la première solution, et qu'on a aussi dans la première solution Cd = ed, Cc = bc à cause du triangle équilatéral Ccd et de la ligne cd parallèle à AB (2, *liv.* 6), les points d et c seront déterminés dans cette seconde solution comme dans la première.

PROBLÈME.

162. *Inscrire dans le carré* ABLF (fig. 80) *un triangle équilatéral, qui a un angle* B *à l'un des angles du carré.*

I^re Solution. Du centre A et du rayon AB soit décrite la demi-circonférence BFE, en faisant à $FB = FE$; soit fait aussi à $BE = BQ = EQ$: si l'on veut se servir des sections des côtés donnés du carré; du centre F et du rayon FQ soit décrit un arc qui coupe deux côtés du carré aux points M et N, les points B, M, N seront les sommets des angles du triangle cherché.

Démonstration. L'angle QAB étant droit (83), on aura

$$(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2 \text{ (47, } liv. \text{ 1);}$$

et faisant pour abréger $AB = 1$, on aura

$$4 = 1 + (AQ)^2;$$

d'où

$$AQ = \sqrt{3};\ FQ = AQ - AF$$
$$= \sqrt{3} - 1 = FM = FN;$$

d'où

$$(FM)^2 = (FN)^2 = 4 - 2\sqrt{3};$$

et par conséquent,

$$(MN)^2 = (FM)^2 + (FN)^2 = 8 - 4\sqrt{3};$$

ensuite, comme on a

$$LM = LF - FM = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3},$$

on aura

$$(LM)^2 = 7 - 4\sqrt{3};$$

d'où

$$(BM)^2 = (BL)^2 + (LM)^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (MN)^2.$$

On démontre de même que $(BN)^2 = (MN)^2$: donc

$$BM = MN = BN.$$

IIe Solution. Si l'on ne suppose données que les quatre extrémités A, B, L, F du carré, après avoir trouvé comme dans la première solution le point Q, soit décrite du centre F et avec le rayon FQ la circonférence QRSNM; puis faisant à FQ = QR = RS = SN, du centre B et avec le rayon BN soit coupée cette circonférence au point M; les points B, N, M seront les sommets des angles du triangle cherché.

Démonstration. L'arc QRSN est la moitié de la circonférence (15, *liv.* 4) : donc le point N est sur la droite QFA, et est aussi éloigné de F que dans la première solution; donc il est le même. Le point M se trouve aussi dans la première solution, comme dans la seconde, à l'intersection des deux arcs décrits des centres F et M et avec des rayons égaux à FQ et à BN : donc il est le même, donc, etc.

PROBLÈME.

163. *Dans un triangle équilatéral dont les sommets* p, q, R *sont donnés, inscrire un hexagone régulier.*

Solution. Divisez la distance QR (*fig.* 81) en trois parties égales aux points *c* et *d* (**68**); des centres *c* et *d* et du rayon *cd* décrivez deux arcs qui se coupent en A ; du même rayon et du point A pris pour centre décrivez un cercle; faites sur la circonférence à $dc = c\mathrm{B} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DE}$; les points B, C, D, E, *d*, *e* seront les sommets de l'hexagone inscrit.

Démonstration. Le triangle B*c*Q a ses côtés B*c* et Q*c* égaux aux côtés A*d* et *cd* du triangle A*dc*; de plus, l'angle compris entre ces côtés est égal dans chaque triangle à cause du parallélisme des lignes B*c* et A*d* (27, *liv.* 1) : donc ces deux triangles sont égaux (4, *liv.* 1), et l'angle $c\mathrm{QB} = dc\mathrm{A} = c\mathrm{QP}$; donc le point B est sur la droite PQ. On démontre de la même manière que les autres points C, D, E sont sur les côtés du triangle proposé : donc, etc.

PROBLÈME.

164. *Dans un carré donné* ABLF, *inscrire un octogone régulier.*

Ire Solution. Si l'on veut se servir des intersections des côtés du carré donné, du point A pris pour centre (*fig.* 82) et du rayon AB décrivez la demi-circonférence BCDE, en faisant à AB = BC = CD = DE; faites à BF = BQ; à EA = EQ; du rayon AQ et du centre A déterminez les points *b* et *g*; puis du même rayon et des centres B, L et F, coupez les côtés aux points *a*, *d*, *c*, *f*, *e*, *h*; ces points seront les sommets de l'octogone *abcdefgh*.

IIe Solution. Ayant déterminé le point Q comme dans la première solution, du rayon AQ et des points A et B pris pour centre décrivez deux arcs qui se coupent en O; avec le même rayon et du centre A déterminez le point *b* sur le côté AB; du point O pris pour centre et du rayon O*b* décrivez un cercle qui coupe les côtés du carré dans les autres points c, d, e, f, g, h, a; ces points seront les sommets de l'octogone.

III^e Solution. En supposant que les côtés du carré ne soient pas donnés, mais que l'on connût seulement les quatre sommets A, B, L, F, on déterminera le point Q comme dans la première solution; on fera à EC = EM, à BF = BM : du rayon AM et du centre A décrivez un arc qui passe par les points c et d; du même rayon et du centre B décrivez un arc qui passe par les points f et g; du même rayon et du centre L décrivez un arc qui passe par les points h et a; du même rayon et du centre F décrivez un arc qui passe par les points b et c; du rayon AQ et des centres A, B, L, F, coupez ces arcs aux points b, g, d, a, c, f, e, h; ces points seront les sommets de l'octogone.

Démonstration. Supposons, pour plus de simplicité, AB = 1 : on aura

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}\ (104),\ AQ = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

et au moyen de l'équation $(Bd)^2 = (AQ)^2 = \frac{1}{2}$, on aura

$$(Ad)^2 = (AM)^2 = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2} = (AB)^2 + (Bd)^2 :$$

donc l'angle ABd sera droit (48, *liv.* 1), et par conséquent le point d sera sur la droite BL. On démontrera de la même manière que tous les autres points sont sur les côtés du carré proposé ; on aura de plus

$$\mathrm{L}d = \mathrm{BL} - \mathrm{B}d = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \mathrm{L}e,$$

et

$$(de)^2 = (\mathrm{L}d)^2 + (\mathrm{L}e)^2 \ (47,\ \textit{liv.}\ 1) = 2(\mathrm{L}d)^2\,;$$

d'où l'on tire

$$de = \mathrm{L}d.\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} cd &= \mathrm{BL} - \mathrm{L}d - \mathrm{B}c = \mathrm{BL} - 2\mathrm{L}d \\ &= 1 - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 : \end{aligned}$$

donc

$$cd = de.$$

On démontrera de la même manière que tous les côtés de l'octogone sont égaux entre eux. De plus, les triangles Lde, Bbc, Aah, Ffg étant égaux en tout, leurs angles aux points a, b, c, d, e, f, g, h seront égaux : donc leurs supplémens, c'est-à-dire les angles de l'octogone, seront aussi égaux (13, *liv.* 1).

PROBLÈME.

165. *Étant donné un octogone régulier* ABhgfFGH, *trouver facilement* (fig. 66), 1°. *le côté d'un octogone régulier dont la surface soit double*; 2°. *le côté d'un octogone dont la surface soit triple.*

Solution. Avec le côté AB de l'octogone donné, pris pour rayon, des points F et H comme centres soient décrits deux arcs qui se coupent en a.

1°. af ou aA sera le côté de l'octogone double.

2°. AB ou ag sera le côté de l'octogone triple.

Démonstration. Si l'on suppose AB = 1, on aura

$$aA = af = \sqrt{2}\ (139)\ ;\ aB = ag = \sqrt{3}\ (2)\ ;$$

mais les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues (20, *liv.* 6) : donc aA sera le côté d'un octogone double et AB celui d'un triple.

PROBLÈME.

166. *Dans un cercle d'un rayon* AB (fig. 83), *inscrire trois cercles qui le touchent et se touchent entre eux.*

Solution. Dans la circonférence du cercle donné soit fait à $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$; du centre B et du rayon BD soit décrit un arc qui passe par les points a, p et α; du centre E et du même rayon BD soit coupé cet arc en a et α; avec le même rayon, des centres C et c, soient décrits deux arcs qui se coupent en V, et des centres D et d deux autres arcs qui se coupent en v; des centres V et v et avec le même rayon soient décrits deux arcs qui passent par m et n; des centres a et α et du rayon AB soit coupée la circonférence du cercle donné en G, H, et en g, h; soit fait dans cette circonférence au même rayon $AB = GL = HI = gl = hi$; soit fait à $Aa = BF$; à $IL = LY = IY = ly = iy$; à $Yy = Fm = Fn$; à $Dn = Dp$: du centre A et du rayon mn soit décrit le cercle PSRXQT, sur la circonférence duquel, prenant un point arbitraire P, on fasse à PA

$=PS=SR=RX=XQ=QT$, enfin, des centres P, Q, R et du rayon *pn* soient décrits trois cercles; ils seront tangens au cercle donné, et tangens entre eux.

Démonstration. La droite IL étant corde d'un douzième de la circonférence (32), on aura

$$IL=\sqrt{(2-\sqrt{3})}\ (160);$$

et comme on a (47, *liv.* 1; 31, *liv.* 3)

le carré du diamètre $(Li)^2=(IL)^2+(Ii)^2$,

on aura

$$4=2-\sqrt{3}+(Ii)^2;$$

d'où

$$(Ii)^2=2+\sqrt{3},\ \text{et}\ Ii=\sqrt{(2+\sqrt{3})}.$$

On aura ensuite (20)

$$(aI)^2=(aB)^2-Ii.Aa=3-\sqrt{(4+2\sqrt{3})}$$
$$=3-(1+\sqrt{3})=2-\sqrt{3};$$

d'où

$$aI=IL=\sqrt{(2-\sqrt{3})}.$$

On aura par les mêmes raisons

$$aL=LI;$$

d'où $aIYL$ sera un rhombe, et l'on aura (139)

$$(aY)^2=4(aI)^2-(IL)^2=3(IL)^2;$$

d'où

$$aY = IL.\sqrt{3}:$$

mais les points I et L étant également éloignés du point A, les trois points a, Y, A seront dans la même droite (13); d'où

$$AY = Aa - aY = \sqrt{2} - \sqrt{(6 - 3\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{2} - \left(3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= IL.$$

La même démonstration s'applique à la ligne Ay; ensuite le point y étant sur la ligne $a\alpha$, c'est-à-dire sur aA (13), on aura $Yy = 2AY$: or les points V, B, A, E, ν sont dans la même droite (13). Si l'on suppose pour un moment que les points m, n soient dans la même droite, on aura

$$Am = AV - Vm = 2 - \sqrt{3}.$$

En effet, si l'on compare les points C, c, V, B, A, E avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on aura dans cette fig. 83

$$VB = AE\ (14);$$

d'où

$$AV = 2 \text{ et } Vm = \sqrt{3}.$$

On démontrera de même qu'on a $An = 2 - \sqrt{3}$;

d'où l'on aura

$$(\mathrm{F}m)^2 = (\mathrm{A}m)^2 + (\mathrm{AF})^2 \ (47, \mathit{liv.}\ 1)$$
$$= 7 - 4\sqrt{3} + 1 = 4(2 - \sqrt{3});$$

d'où

$$\mathrm{F}m = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 2\mathrm{AY}:$$

de plus on a, par la construction de la figure,

$$\mathrm{F}n = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})};$$

donc le point m sera dans la droite VA. On démontrera la même chose pour le point n : donc, puisque $\mathrm{A}m = 2 - \sqrt{3}$, on aura

$$mn = 4 - 2\sqrt{3};$$

puis les triangles $\mathrm{B}p\mathrm{D}$, $\nu n\mathrm{D}$ ayant les côtés égaux entre eux, on aura l'angle $\mathrm{D}\nu n = \mathrm{DB}p$ (8, *liv.* 1). Mais l'angle $\mathrm{D}\nu n$, qui est le même que l'angle $\mathrm{D}\nu\mathrm{B}$, étant égal à l'angle DBV (5, *liv.* 1), on aura l'angle $\mathrm{DB}p = \mathrm{DB}\nu$: donc le point p est dans la droite AE; on a ensuite $\mathrm{D}n = \mathrm{D}p$. On démontre de même que $dn = dp$: donc comparant les points D, d, A, n, p, E de la fig. 83, avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on trouvera (*fig.* 83)

$$p\mathrm{E} = \mathrm{A}n = 2 - \sqrt{3};$$

d'où

$$pn = \mathrm{AE} - 2\mathrm{A}n = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

De plus, le triangle équilatéral PQR étant semblable au triangle équilatéral BDd, et par conséquent aussi le triangle ABD semblable au triangle APR (20, *liv.* 6), on aura

$$AB : BD :: AP : PR;$$

c'est-à-dire

$$1 : \sqrt{3} :: 4 - 2\sqrt{3} : PR;$$

d'où l'on tire

$$PR = 4\sqrt{3} - 6 = 2pn.$$

Donc la ligne PR étant coupée par moitié au point p, le point p se trouvera également sur les deux circonférences des cercles décrits des centres P et R, et sera le point de contact (12, *liv.* 3); qu'on ajoute ensuite à la droite $AR = mn = 4 - 2\sqrt{3}$, le rayon du cercle décrit du centre R, ou bien la droite $Rr = np = 2\sqrt{3} - 3$, on aura

$$Ar = 4 - 3 = 1 = AB.$$

Donc le point r sera également sur les deux circonférences, et le cercle décrit du centre R touchera intérieurement le cercle donné (11, *liv.* 3). On démontrera la même chose pour les autres cercles; donc, etc.

Ce problème se trouve élégamment résolu avec la règle et le compas par Thomas Simpson, dans son ouvrage *Select Exercises*, etc., *Geometrical Problems*, problème 13. On voit qu'on peut, par notre construction, résoudre ce problème par la règle et le compas plus brièvement encore que ne le fait Simpson, en menant la droite Vav, et après y avoir pris à AB $=$ BV $=$ Ev, en faisant à BD $=$ Vm $=$ Bp $=$ vm; puis en décrivant du centre A et du rayon mn le cercle PQR, et faisant tout le reste de la construction comme dans la solution précédente.

PROBLÈME.

167. *Du centre* A (fig. 83), *décrire un cercle qui touche extérieurement les trois cercles inscrits par le problème précédent* (**166**) *à un cercle donné.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux droites AB, Am (**86**); avec cette ligne prise pour rayon et du centre A soit décrit un cercle; ce sera le cercle cherché.

Démonstration. AB étant $= 1$, et Am $= 2 - \sqrt{3}$, on aura la troisième proportionnelle $= 7 - 4\sqrt{3}$. Si maintenant du rayon A$r = 1$, on soustrait le diamètre qr du cercle décrit du centre R, c'est-à-dire si l'on soustrait $2np = 4\sqrt{3} - 6$, on aura précisément $7 - 4\sqrt{3}$: donc un cercle décrit du centre A et avec cette troisième proportionnelle pour rayon, sera tangent au point q à ce cercle inscrit (12, *liv.* 3), et aux deux autres cercles.

PROBLÈME.

168. *Inscrire dans un cercle d'un rayon donné* AB (fig. 84), *quatre cercles qui lui soient tangens et qui soient tangens entre eux.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné, à $AB = BC = CD = DE$, à $BD = Ba = Ea$, à $Aa = BF = Bf$, à $AB = FN = FO$, et à $BD = NP = OP$; du centre A et du rayon aP soit décrit le cercle QRST; puis, prenant un point arbitraire Q sur la circonférence, soit fait à $BQ = FR = ES = f$T; enfin des centres Q, R, S, T et du rayon aF soient décrits quatre cercles : ils seront les cercles demandés.

Démonstration. Comme on a (27)

$$BF = FE = Ef = fB,$$

on aura aussi (93)

$$QR = RS = ST = TQ:$$

donc l'angle TAQ sera droit; donc

$$(TQ)^2 = (AT)^2 + (AQ)^2 = 2(AT)^2.$$

Puis ayant fait $AB = 1$, on aura aussi (165) $FP = 1$; d'où $AP = 2$. On aura encore (27) $Aa = \sqrt{2}$; d'où $aP = 2 - \sqrt{2}$; $aF = \sqrt{2} - 1$; d'où l'on tire

$$2(AT)^2 = 2(aP)^2 = (TQ)^2 = 2(2 - \sqrt{2})^2$$

et

$$TQ = (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$
$$= 2aF;$$

donc la distance des deux centres T et Q est égale à la somme des rayons des deux cercles décrits de ces points comme centres, donc ils sont tangens en *p* au milieu de TQ. On prouverait la même chose pour deux autres quelconques. Soit ensuite *r* le point où la ligne A*r* prolongée coupe le cercle décrit du centre R; on aura

$$Ar = AR + Rr = aP + aF = PF = 1 = AB:$$

donc le point *r* sera sur la circonférence du cercle donné ; d'où l'on voit que la ligne Ar passant par les deux centres A et R, sera perpendiculaire à la tangente qui les touche tous deux au point r : donc ils seront tangens entre eux (13 et 16, *liv.* 3); la même démonstration s'applique aux autres cercles.

PROBLÈME.

169. *Du centre* A (fig. 84), *décrire un cercle qui touche les quatre que l'on vient d'inscrire* (**168**) *dans un cercle donné.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux droites FP, Fa (**86**); avec cette ligne prise pour rayon et du centre A soit décrit un cercle, il sera le cercle cherché.

Démonstration. PF étant égal à 1, et Fa $= \sqrt{2} - 1$, on aura la troisième proportionnelle $= 3 - 2\sqrt{2}$: or soit q le point où le rayon Ar coupe le cercle décrit du centre R; qr en sera le diamètre $= 2a\text{F} = 2\sqrt{2} - 2$; soustrayant de $1 = \text{A}r$ cette valeur, on aura Aq $= 3 - 2\sqrt{2}$ = cette troisième proportionnelle : donc le point q sera dans les deux circonférences; mais il se trouve dans la droite AR; donc la perpendiculaire à cette droite sera tangente en q aux deux cercles, lesquels se toucheront au point q (13 et 16, *liv.* 3). On démontrera la même chose pour les autres cercles.

PROBLÈME.

170. *Trouver* (fig. 85) *un arc de cercle dont le cosinus égale la corde.*

Solution. D'un rayon AB qu'on fait $= 1$ soit décrit l'arc BCDE, et soit fait à $AB = BC = CD = DE = DP = CP$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$, et à $Aa = BF$; du centre B et du rayon PF soit décrit un arc qui coupe l'arc BC en Q; l'arc BQ sera celui que l'on cherche.

Démonstration. Les points A, F, a, P sont dans la même droite (13); puis les points B, A, D, P étant tous éloignés du point C de la distance CB, sont dans la circonférence d'un cercle qu'on décrirait du centre C et du rayon CB : comme on a de plus à $CB = BA = AD = DP$, BCP sera le diamètre de ce cercle (15, *liv.* 6), et l'on aura $PA = \sqrt{3}$ (2); d'où

$$PF = \sqrt{3} - 1 = BQ.$$

Si maintenant l'on abaisse sur AB la perpendiculaire QR, on aura (13, *liv.* 2)

$$(BQ)^2 = (AO)^2 + (AQ)^2 - 2AB.AR;$$

c'est-à-dire

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 2 - 2AR;$$

d'où

$$AR = \sqrt{3} - 1 = BQ,$$

ainsi qu'on s'était proposé de le faire. Ces derniers problèmes sont d'Ozanam, qui les a résolus avec la règle et le compas.

PROBLÈME.

171. *Étant donnés les axes* BE, MN (fig. 86) *d'une hélice, décrire autour d'eux un ovale composé de cercles qui soient tangens entre eux.*

Solution. Du centre A où les axes se coupent et du rayon AB qui est la moitié du plus grand axe, soit décrite la demi-circonférence BDE, et soit fait à EA = ED; du centre B et du rayon BD soit coupé l'axe BE en d; du centre A et du rayon AM soit coupé le demi-axe AE en m; du même centre A et du rayon Ad soit décrit l'arc de, et soit fait à

Em = de; des centres d et e et d'un rayon pris arbitrairement, soit coupé l'arc BDE en δ et ε; du centre A et du rayon $\delta\varepsilon$ soit coupé l'axe BE en P et Q; des centres P et Q et du rayon PB = QE soient décrits les arcs FBf, GEg, et soit fait à PB = BF = Bf = EG = Eg; soit fait ensuite à PQ = PR = Pr = QR = Qr; puis du centre R et du rayon RF soit décrit l'arc FG qui passera par M; enfin du centre r et du rayon RF = rf soit décrit l'arc fg qui passera par N, et toute la construction sera faite.

Démonstration. Les triangles BFP, PQR étant équilatéraux, les angles BPF, QPR seront égaux (8, *liv.* 1); et les deux lignes FP, PR formeront une seule droite, parce que les deux angles FPA + APR sont égaux aux deux angles FPA + APN (13 et 14, *liv.* 1): donc les deux arcs BF, FG seront tangens l'un à l'autre en F (13, *liv.* 3). La même démonstration s'applique aux points de contact f, G, g.

Soit fait ensuite pour abréger AB = 1, on aura

$$BD = \sqrt{3}\,(2) = Bd;$$

d'où

$$Ad = \sqrt{3} - 1:$$

et comme on a (93)

$$Ad : de :: A\delta : \delta\varepsilon,$$

on aura encore en multipliant les deux termes du premier rapport par $\sqrt{3}+1$ (4, *liv.* 5),

$$Ad(\sqrt{3}+1) : de\,(\sqrt{3}+1) :: A\delta : \delta\varepsilon;$$

puis substituant les valeurs numériques de Ad et $A\delta$, et exécutant la multiplication dans le premier terme, on aura

$$2 : de(\sqrt{3}+1) :: 1 : \delta\varepsilon;$$

d'où

$$2\delta\varepsilon = 2AP = de(\sqrt{3}+1) = PQ = PR.$$

De plus, $PRQr$ étant un rhombe, on aura (139)

$$(Rr)^2 = 4(PR)^2 - (PQ)^2 = 3(PR)^2;$$

d'où

$$Rr = PR.\sqrt{R} = de\,(3+\sqrt{3});$$

et

$$RA = \tfrac{1}{2}\,de\,(3+\sqrt{3}).$$

On a ensuite

$$AM = Am = AE - Em = AE - de = 1 - de;$$

d'où

$$RA + AM = 1 + \tfrac{1}{2}\,de\,(1+\sqrt{3});$$

ou bien

$$RM = 1 + \frac{1}{2} PR;$$

et comme on a

$$PF = PB = 1 - AP = 1 - \frac{1}{2} PR,$$

on aura

$$PF + PR = 1 + \frac{1}{2} PR, \text{ c'est-à-dire, } FR = RM.$$

Donc l'arc FG passera par M : on ferait voir de même que l'arc fg passe par n; donc, etc.

PROBLÈME.

172. *Décrire* (figure 87) *une spirale* BLEMFNGPH, *composée de plusieurs arcs de cercle.*

Solution. Soit BE = BF la distance qu'on veut donner aux révolutions de cette spirale; après avoir divisé BE en deux parties égales au point A (66), de ce point comme centre et d'un rayon AB soit décrite la demi-circonférence BLE (64); du centre B et du rayon BE soit décrite la demi-circonférence EMF; soit encore décrite du centre A et avec le rayon AF la demi-circonférence FNG; soit encore décrite du centre B et avec le rayon

BG la demi-circonférence GPH; on pourrait ainsi continuer cette spirale à l'infini.

On pourra de la même manière doubler cette spirale; en décrivant des centres A et B alternativement les demi-circonférences *ble*, *emf*, *fng*, *gph*, etc., après avoir pris le point *b* à une distance arbitraire de B sur la ligne AB (73).

Ce problème n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÈME.

173. *Trouver* $\sqrt{\sqrt{2}}$ *et* $\sqrt{\sqrt{3}}$.

Solution. Avec le rayon $AB = 1$ et du centre A décrivez (*fig.* 88) la demi-circonférence BCDE, en faisant à $AB = BC = CD = DE$; puis faites à $BD = Ba = Ea$, à $Aa = BP$, à $AB = EP$; marquez sur la demi-circonférence les points H, I, K, en faisant à la même ligne $AB = aH = HI = IK$.

Des centres E et H et du rayon AP soient décrits deux arcs qui se coupent en L et M; on aura $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Des centres *a* et K avec le rayon AB soient décrits deux arcs qui se coupent en Q et R; on aura $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

Démonstration. ELHM étant un rhombe, on aura (139)

$$(LM)^2 = 4(LH)^2 - (HE)^2 = 4(AP)^2 - (AE)^2.$$

Mais,

$$(AP)^2 = \frac{1}{2} (104), \ (HE)^2 = 2 - \sqrt{2} \ (30 \text{ et } 36):$$

donc

$$(LM)^2 = \sqrt{2};$$

d'où l'on tire

$$LM = \sqrt{\sqrt{2}}.$$

$aQKR$ étant aussi un rhombe, on aura également

$$(QR)^2 = 4(aQ)^2 - (aK)^2.$$

Mais

$$(AQ)^2 = (AB)^2 = 1; \ (aK)^2 = 4 - \sqrt{3} \ (160):$$

donc

$$(QR)^2 = \sqrt{3};$$

d'où l'on tire

$$QR = \sqrt{\sqrt{3}}.$$

174. On pourrait, par de semblables artifices, obtenir les racines quatrièmes des autres nombres entiers, sans employer la méthode de trouver les moyennes proportionnelles (99). Pour avoir $\sqrt{\sqrt{2}}$ par cette méthode, on aurait eu à trouver une moyenne proportionnelle entre 1 et $\sqrt{2}$, ou entre $\frac{1}{2}$ et $2\sqrt{2}$, ou entre deux autres quantités qui, multipliées l'une par l'autre, fussent égales à $\sqrt{2}$. Mais cette marche serait beaucoup plus compliquée.

En cultivant cette Géométrie du compas, on en retirera de très grands avantages. J'ai sur cette matière d'autres recherches toutes prêtes qui pourront trouver place dans un ouvrage plus étendu que celui-ci. Voici une application du problème précédent, relative à la pyramide tétraèdre régulière.

PROBLÈME.

175. *Étant donné le côté* AB *d'une pyramide tétraèdre régulière* SABC (fig. 89), *trouver*, 1°. *sa hauteur*; 2°. *le côté d'un carré qui lui soit égal en surface*; 3°. *le côté du carré sur lequel il faudrait construire une pyramide qui eût pour hauteur le côté de celle proposée, pour qu'elle lui fût égale en solidité*; 4°. *le côté du carré sur lequel il faudrait construire une pyramide de hauteur égale à celle de la pyramide proposée, pour qu'elle lui fût aussi égale en solidité*; 5°. *le rayon d'une sphère circonscrite.*

Solution. La figure 88 étant construite avec le rayon AB, comme dans le problème 173, du centre B et du rayon B*a* soit décrit l'arc *a*N, et soit fait à A*a* = EN; des centres A et E avec le rayon AN soient décrits deux arcs qui se coupent en *n*; du même rayon *n*A coupez la demi-circonférence BCDE au point S. Enfin divisez en deux parties égales LM au point *m* (66), ainsi que QR en *q*. 1°. BS sera la hauteur de la pyramide; 2°. QR sera le côté du carré qui lui est égal en surface; 3°. M*m* sera le côté du carré qui forme la base d'une pyramide de hauteur égale au côté de celle proposée, et qui lui est égale en solidité; 4°. Q*q* sera le côté du carré qui sert de base à une pyramide égale en hauteur et en solidité à celle proposée; 5°. AN est le diamètre d'une sphère circonscrite.

Démonstration. Si du sommet S de la pyramide on abaisse une perpendiculaire S*m* sur le côté AB, à cause du triangle équilatéral SAB, elle coupera par moitié au point *m* la droite AB (12, *liv.* 1). Donc si, sur la base ABC, on élève au point *m* de la droite AB la perpendiculaire *m*T, elle passera par C (11, *liv.* 1), et contiendra le point T où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet S sur la base (11, *liv.* 11). On démontre de même que le point T est dans la droite Bn, qui divise en deux parties égales le còté AC. Soit menée la droite mn, elle sera parallèle à BC (2, *liv.* 6), et le triangle Amn sera équiangle au triangle ABC (27, *liv.* 1), et BC sera double de mn (4, *liv.* 6); puis les triangles BCT, mnT auront les angles égaux chacun à chacun, et l'on aura (4, *liv.* 6)

$$BC : mn :: CT : mT.$$

Donc CT est double de mT; d'où $mT = \frac{1}{3} Cm$; puis faisant $AB = 1$, on a

$$Cm = Sm = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (104)} :$$

donc

$$Tm = \frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

De plus, comme on a

$$(Sm)^2 = (mT)^2 + (ST)^2 \text{ (47, \textit{liv.} 1)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + (ST)^2,$$

on aura

$$(ST)^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3};$$

d'où

$$ST = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

On a ensuite (*fig.* 88)

$$AN = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}\,(104) = \sqrt{\tfrac{6}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = An:$$

on a aussi (*fig.* 89)

$$An : AS :: AS : SB \ (86);$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}} : 1 :: 1 : SB;$$

d'où l'on a

$$SB = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = ST;$$

ce qu'il fallait 1°. démontrer.

Ensuite la surface de la pyramide tétraèdre est égale au quadruple de la surface de la base ABC (*fig.* 89); laquelle étant égale à $\frac{1}{2}AB.Cm = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ (41, *liv.* 1), sera la surface de la pyramide $= \sqrt{3}$; d'où le côté du carré qui lui est égal $= \sqrt{\sqrt{3}}$. Mais on a (*fig.* 88) $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$ (175): donc QR est le côté du carré cherché. C. Q. F. 2°. D.

Dans les pyramides égales, les bases étant en raison inverse des hauteurs (9, *liv.* 12), on aura

$1 : \sqrt{\frac{2}{3}} :: \frac{1}{4}\sqrt{3}$: la base de la pyramide qui a pour hauteur $AB = 1$;

d'où la surface de cette base $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$, et le côté du carré de cette surface $= \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}}$ $=$ Mm (173). C. Q. F. 3°. D.

Les pyramides de hauteur égale étant entre elles comme leurs bases, le carré qui est égal au triangle ABC $= \frac{1}{4}\sqrt{3}$ aura pour côté $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}} =$ Qq (173). C. Q. F. 4°. D.

Enfin le carré du diamètre de la sphère circonscrite à la pyramide tétraèdre vaut une fois et demie le carré du côté de la pyramide (13, *liv.* 13), c'est-à-dire le diamètre $= \sqrt{\frac{3}{2}}$: il est donc égal à AN. C. Q. F. 5°. D.

PROBLÈME.

176. *Étant donnée la hauteur* ST (fig. 89 et 88) *d'une pyramide tétraèdre régulière, trouver son côté* AB.

Solution. Avec un rayon AB (*fig.* 88) égal à ST (*fig.* 89), soit décrit le demi-cercle BCDE en faisant à AB $=$ BC $=$ CD $=$ DE; du centre B et du rayon BD soit décrit l'arc DNa; du centre E et avec le même rayon soit coupé cet arc au point a; du même centre et avec le même rayon Aa soit coupé le même arc en N; AN sera le côté cherché égal au côté AB de la figure 89.

Démonstration. On a, dans la figure 88,

$$AB : AN :: 1 : \sqrt{\tfrac{3}{2}}\ (175);$$

et comme on a

$$1 : \sqrt{\tfrac{3}{2}} :: \sqrt{\tfrac{3}{2}} : 1,$$

ainsi que cela se démontre en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens, on aura

$$AB : AN :: \sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1;$$

c'est-à-dire que AB est à AN dans le rapport de la hauteur de la pyramide tétraèdre à son côté (175). Donc, etc.

PROBLÈME.

177. *Diviser* (fig. 90) *la ligne* AB $=$ 1 *en cinq parties égales, lors même qu'on ne peut pas avoir une ligne quintuple de* AB, *comme au n°* 69.

Solution. Après avoir, du centre A et du rayon AB, décrit le cercle BDp, et avoir fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE$, et à $BD = Ba = B\alpha = Ea = E\alpha$, soit du centre α et du rayon AB, coupée la circonférence en g; de ce point g comme centre et du même rayon soit décrit l'arc A$n\alpha$; maintenant du centre a et du rayon BE soit coupé cet arc en n; du centre B et du rayon αn soit coupée la circonférence en P et p; des centres p et P et du même rayon pB soient décrits deux arcs qui se coupent en Q; AQ sera un cinquième de AB, et sera placée sur sa direction.

Démonstration. Si l'on prend un point u sur la direction de AE, et qu'on ait $Au = Aa$, on aura, à cause des angles droits aAu, αAu,

$$(au)^2 = 2(Aa)^2 = 2(\alpha A)^2 = (\alpha u)^2 = 4 = (BE)^2;$$

d'où

$$au = \alpha u = BE = an;$$

puis les angles égaux gAB, $gA\alpha$ valant chacun la moitié d'un angle droit (30), les angles gAa, gAu égaux entre eux vaudront chacun trois fois la moitié d'un angle droit. D'où les deux triangles gAa, gAu ayant un angle égal compris entre côtés égaux, le troisième côté ga sera aussi égal au troisième côté gu (4, *liv.* I):

donc un cercle décrit du centre g et du rayon ga passera par le point u, et sera concentrique au cercle $An\alpha$.

On a ensuite $ga = \sqrt{5}$ (185); et comme $an = u\alpha$, on a (93)

$$ga : gA :: au : n\alpha;$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{5} : 1 :: 2 : n\alpha.$$

donc on aura

$$n\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

d'où aussi chaque côté du rhombe $PBpQ = n\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; donc si l'on compare les points P, B, p, Q, A de la fig. 90 avec les points A, p, B, P, Q de la fig. 3, on aura pour la fig. 90

$$BQ.BA = (BP)^2 \text{ (19)},$$

c'est-à-dire

$$BQ = \frac{4}{5};$$

d'où AQ qui est dans la même droite (13) $= \frac{1}{5}$.

178. Ce problème, qui a une solution assez simple, devait trouver place ici à cause de la division décimale qu'on exécute en divisant en

deux, puis en cinq ou réciproquement. Le problème suivant est aussi de quelque utilité.

PROBLÈME.

179. *Former* (fig. 90) *un triangle rectangle dont les côtés soient en proportion arithmétique.*

Solution. Après avoir fait la construction de la solution précédente (177), du centre E et du rayon EQ soit coupée la circonférence en N; le triangle BNE sera le triangle cherché.

Démonstration. Ce triangle sera rectangle (31, *liv.* 3); puis faisant $AB = 1$, on aura

$$EQ = EA + AQ = \frac{6}{5} = EN;$$

de plus on a (47, *liv.* 1)

$$(BE)^2 = (EN)^2 + (BN)^2,$$

c'est-à-dire

$$4 = \frac{36}{25} + (BN)^2;$$

on aura donc

$$(BN)^2 = \frac{64}{25};$$

d'où

$$BN = \frac{8}{5};$$

d'où l'on voit que les côtés $EN = \frac{6}{5}$, $BN = \frac{8}{5}$, $BE = \frac{10}{5}$ seront en proportion arithmétique.

PROBLÈME.

180. *Former* (fig. 91) *un triangle rectangle dont les côtés soient en proportion géométrique.*

Solution. Du centre A avec un rayon AB soit décrit un cercle BDd, et soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$ et à $Aa = Db = db = C\beta = c\beta$; maintenant du centre E et du rayon $b\beta$ soit coupée la circonférence du cercle en N; le triangle BNE sera le triangle cherché.

Démonstration. La ligne AB est divisée en b en moyenne et extrême raison (46) : donc si l'on fait $AB = 1$, $Ab = x$, on aura

$$Bb = 1 - x, \quad \text{et } x^2 = 1 - x;$$

et résolvant cette dernière équation,

$$x = Ab = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

d'où résulte

$$b\beta = 2Ab = \sqrt{5} - 1 = EN;$$

on a ensuite (31, *liv.* 3) (47, *liv.* 1)

$$(BE)^2 = (EN)^2 + (BN)^2;$$

c'est-à-dire

$$4 = 6 - 2\sqrt{5} + (BN)^2;$$

d'où l'on tire

$$(BN)^2 = 2(\sqrt{5} - 1) = BE.NE;$$

donc on a (17, *liv.* 6)

$$BE : BN :: BN : NE:$$

donc, etc.

181. *Lemme*. Si l'on fait les côtés des cinq polyèdres réguliers $= 1$, on aura le rayon d'une sphère

$$\text{circonscrite} \begin{cases} \text{au tétraèdre} & = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \\ \text{au cube} & = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \text{à l'octaèdre} & = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \text{au dodécaèdre} & = \frac{1}{4}\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1), \\ \text{à l'icosaèdre} & = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}. \end{cases}$$

Démonstration. Le carré du diamètre de la sphère circonscrite à la pyramide comprise entre quatre triangles équilatéraux, vaut (13, *liv.* 13) une fois et demi le carré du côté de la pyramide, c'est-à-dire en faisant le côté $= 1$, le diamètre est égal à $\sqrt{\frac{3}{2}}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le carré du diamètre de la sphère circonscrite au cube vaut (15, *liv.* 13) trois fois le carré du côté de la pyramide, c'est-à-dire le diamètre $= \sqrt{3}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Le carré du diamètre de la sphère circonscrite à l'octaèdre (corps régulier terminé par huit faces qui sont toutes des triangles équilatéraux), est (14, *liv.* 13) double du carré du côté d'un de ces triangles, c'est-à-dire le diamètre $= \sqrt{2}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

La sphère circonscrite au dodécaèdre (corps régulier, terminé par douze faces qui sont toutes des pentagones réguliers), est aussi circonscrite (17, *liv.* 13) à un cube qui a pour côté une diagonale de ces pentagones. Mais si l'on fait (*fig.* 64) le côté $AB = 1$, la diagonale BN du pentagone $ABLMN = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$; en effet, on a (137)

$BN = bE = Ab + AE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + 1$ (180) $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$:

donc BN ou la diagonale d'un pentagone qui a le côté $= 1$, est égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Si sur cette ligne on forme un cube, on aura le carré du diamètre de la sphère qui lui sera circonscrite $= 3(BN)^2$, et le diamètre $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) . \sqrt{3}$: donc le rayon de la sphère qui comprend le dodécaèdre $= \frac{1}{4}\sqrt{3} . (\sqrt{5} + 1)$.

Si AB est le diamètre de la sphère qui comprend l'icosaèdre (*fig.* 92), et qu'après avoir pris sur ce diamètre $AC = 4CB$, et élevé la perpendiculaire CD qui rencontre en D la demi-circonférence ADB, on décrive avec le rayon DB un cercle, et dans ce cercle un pentagone régulier, le côté de ce pentagone sera (16, *liv.* 13) le côté de l'icosaèdre (corps régulier terminé par vingt faces, qui toutes sont des triangles équilatéraux); or le côté du pentagone est au rayon du cercle circonscrit comme Bb est à BA (*fig.* 12) (40): mais faisant $AB = 1$, on a

$$Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$(\mathrm{A}b)^2 = \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5});$$

$$(\mathrm{B}b)^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A}b)^2 \ (47, \textit{liv.}\ 1) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2};$$

d'où l'on aura

$$\mathrm{B}b : \mathrm{AB} :: \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : 1;$$

mais on a

$$\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : 1 :: 1 : \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)};$$

donc supposant le côté de l'icosaèdre $= 1$, on aura

$$\mathrm{BD}\ (\textit{fig.}\ 92) = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}.$$

On a ensuite

$$(\mathrm{AB})^2 = 5(\mathrm{BD})^2 \ (16, \textit{liv.}\ 13) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}:$$

donc

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}, \text{ et le rayon} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

PROBLÈME.

182. *Étant donné le côté* AB *des cinq corps réguliers* (fig. 93), *trouver le rayon des différentes sphères qu'ils comprennent.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB soit décrit le cercle B D d, et soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; soit fait ensuite à $BD = Ba = B\alpha = E\alpha = Ea$; du centre α et avec le rayon αa soit décrit l'arc aP; du même centre α et avec le rayon αB soit décrit l'arc Bpqs; du même centre α et avec le rayon AB soit décrit l'arc grt; du même centre α et avec le rayon BE soit décrit l'arc MQRST; des centres D et d avec le rayon Aa soient décrits deux arcs qui se coupent en b; du centre E et avec le rayon Ab soit coupée la circonférence en L; soit fait à $AB = a\mathrm{P} = \mathrm{MQ}$; à $\mathrm{A}a = \mathrm{MR}$; à $\mathrm{E}b = \mathrm{MS}$; et à $\mathrm{BL} = \mathrm{MT}$; soit fait ensuite à $a\mathrm{B} = \mathrm{P}p$; à $\mathrm{MB} = \mathrm{Q}q = \mathrm{S}s$; et à $\mathrm{M}g = \mathrm{R}r = \mathrm{T}t$;

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{B}p \\ \mathrm{B}q \\ gr \\ \mathrm{B}s \\ gt \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{sera le rayon} \\ \text{de la sphère} \\ \text{qui comprend} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{le tétraèdre,} \\ \text{le cube,} \\ \text{l'octaèdre,} \\ \text{le dodécaèdre,} \\ \text{l'icosaèdre.} \end{array}\right.$$

Démonstration. En faisant $AB = 1$, on a

$$\alpha a = 2\sqrt{2}\ (100),\ \alpha B = \sqrt{3};$$

on a ensuite

$$\alpha a : \alpha B :: aP : Bp\ (93);$$

c'est-à-dire

$$2\sqrt{2} : \sqrt{3} :: 1\ Bp;$$

on aura donc

$$Bp = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}};$$

d'où, etc. (181).

On a aussi (93)

$$\alpha M : \alpha B :: MQ : Bq;$$

c'est-à-dire

$$2 : \sqrt{3} :: 1 : Bq;\ \text{d'où}\ Bq = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

On a de même

$$\alpha M : \alpha g :: MR : gr;$$

c'est-à-dire

$$2 : 1 :: \sqrt{2} : gr;\ \text{d'où}\ gr = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

on a également

$$\alpha M : \alpha B :: MS : Bs.$$

Mais

$$MS = bE = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\ (181);$$

donc

$$2 : \sqrt{3} :: \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) : Bs;$$

d'où

$$Bs = \frac{1}{4}\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1).$$

On a enfin

$$\alpha M : \alpha g :: MT : gt;$$

mais $MT = BL$.

De plus, $(BL)^2 = (BE)^2 - (EL)^2$ (31, *l.* 3; 47, *l.* 1); c'est-à-dire

$$(BL)^2 = (BE)^2 - (Ab)^2 = 4 - \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\ (181)$$
$$= \frac{5+\sqrt{5}}{2};$$

d'où

$$BL = MT = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)};$$

et par conséquent

$$2 : 1 :: \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : gt:$$

d'où

$$gt = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

Donc les distances Bp, Bq, gr, Bs, gt seront respectivement les rayons des sphères qui comprennent les cinq corps réguliers, savoir : la pyramide, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

PROBLÈME.

183. *Étant donné* (fig. 94) *le rayon* AB *de la sphère qui comprend les cinq corps réguliers, trouver leurs côtés.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB soit décrit le plus grand cercle de la sphère BDd, et soit fait dans sa circonférence à A B $=$ BC $=$ CD $=$ DE $=$ Ed; puis à BD $=$ Ba $=$ Ea, et à Aa $=$ Db $=$ db; soit fait ensuite dans la circonférence à AB $=$ aH, et à Aa $=$ EF $=$ Hh; du centre a et avec le rayon aE soit décrit l'arc ESQP; du même centre a et avec le rayon ah soit décrit l'arc hT; soit fait à Aa $=$ EP; à AB $=$ EQ; à Ab $=$ ES; à bF $=$ hT. Puis, soit fait à EL $=$ Pp $=$ Qq $=$ Ss, et à hL $=$ Tt :

Lp sera le côté du tétraèdre,
Lq. . . . . du cube,
Aa. . . . . de l'octaèdre,
Ls. . . . . du dodécaèdre,
Lt. . . . . de l'icosaèdre.

Démonstration. On a l'arc Eh égal à un huitième de la circonférence (30); d'où $ah = \sqrt{5}$ (185); et comme l'angle droit bAF est le même que BAF, parce que le point b est sur la ligne AE (13, 27), bF sera le côté du pentagone (40), et Ab le côté du décagone inscrit au cercle BDd (41); faisant donc AB $=$ 1, on aura

$$Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ (180)}$$

et

$$(bB)^2 = (AF)^2 + (Ab)^2 = 1 + \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5})$$

$$= \frac{5 - \sqrt{5}}{2};$$

d'où

$$bF = hT = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)}.$$

On aura ensuite

$$aE : aL :: EP : Lp \text{ (93)},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{3} : 2 :: \sqrt{2} : Lp :$$

donc on aura

$$Lp = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Or le rayon de la sphère est au côté du tétraèdre qu'elle contient comme $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : 1$ (181) $:: 1 : 2\sqrt{\frac{2}{3}}$: donc faisant le rayon AB de la sphère $= 1$, Lp sera le côté du tétraèdre qui y est contenu.

On aura aussi (93)

$$aE : aL :: EQ : Lq,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{3} : 2 :: 1 : Lq;\ \text{d'où}\ Lq = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Or le rapport du rayon de la sphère au côté du cube qui y est contenu, est

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} : 1\ (181) :: 1 : 2\sqrt{\tfrac{1}{3}};$$

donc, etc.

On aura de même A$a = \sqrt{2}$ pour côté de l'octaèdre ; car le rapport du rayon de la sphère au côté de l'octaèdre qui y est contenu, est

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} : 1\ (181) :: 1 : \sqrt{2} :$$

donc, etc.

On aura également

$$aE : aL :: ES : Ls,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{3} : 2 :: \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) : Ls;$$

d'où

$$Ls = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}.$$

Or le rapport du rayon de la sphère au côté du dodécaèdre qui y est contenu, est

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1) : 1 \ (181) :: 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}};$$

donc, etc. Enfin, on aura

$$ah : aL :: hT : Lt \ (93),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{5} : 2 :: \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : Lt :$$

d'où

$$Lt = 2\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}.$$

Or le rapport du rayon de la sphère au côté de l'icosaèdre qui y est contenu, est

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : 1 \ (181) :: 1 : 2\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}.$$

donc, etc.

PROBLÈME.

184. *Étant donné un point* B *sur la circonférence d'un cercle donné* (fig. 95), *trouver deux autres points* L *et* M, *tels que le triangle* BLM *soit équilatéral et touche le cercle par le côté* LM *au point* E *qui en est le milieu.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné à son rayon $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis, soit fait à $BD = Ba = Ea$: du centre a et avec le rayon aA soit décrit un arc qui passe par α; du centre E et avec le rayon EA soit décrit un arc qui coupe le précédent en α; du centre α avec le même rayon αE soit coupée la circonférence en P. Puis, du centre E et du rayon EP soit décrit un arc qui passe par L et M; des centres D et d avec le rayon aP soient décrits deux arcs qui coupent le précédent en L et M; les points L et M seront les deux points cherchés.

Démonstration. Si l'on compare les points a, A, E, α, P de la fig. 95 avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3, de l'équation

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP.pQ$$

qui appartient à la fig. 3, on tirera pour la fig. 95 celle-ci

$$(\mathrm{A}a)^2 = (\mathrm{AE})^2 + (\mathrm{E}a)^2 - \mathrm{EP}.\mathrm{E}a\,;$$

et substituant les valeurs numériques (27)

$$2 = 1 + 3 - \mathrm{EP}.\sqrt{3},$$

d'où

$$2 = \mathrm{EP}.\sqrt{3} \text{ et } \mathrm{EP} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,;$$

et comme les trois points E, P, a sont dans la même droite (13), on aura

$$\mathrm{P}a = \mathrm{E}a - \mathrm{EP} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Si l'on suppose menée la ligne BE qui coupe en R la ligne Dd, on aura (104)

$$\mathrm{BR} = \tfrac{2}{3},\ \mathrm{RD} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \mathrm{BE} = 2\,;$$

d'où la quatrième proportionnelle aux trois lignes BR, RD, BE sera égale à $\frac{2}{3}\sqrt{3} = \mathrm{EM}$. On aura aussi (104) $\mathrm{RE} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{BD} = \sqrt{3}$ (2); d'où la quatrième proportionnelle aux trois lignes BR, BD, RE sera égale à $\frac{1}{3}\sqrt{3} = \mathrm{DM}$: donc les lignes EM, DM seront de la longueur nécessaire pour que le triangle BEM soit semblable au triangle BRD (2, *liv.* 6); donc ils seront semblables, car le point M ne peut être placé dans un autre endroit (8, *liv.* 1). On prouvera de la même manière que le triangle BR*d* est semblable au triangle BEL; d'où l'on voit que le triangle BD*d* est semblable au triangle BML (20, *liv.* 6) : donc aussi ce dernier est équilatéral. De plus, les angles BEM, BEL égaux aux angles BRD, BR*d*, sont droits, et les lignes EN, EL sont égales; donc BLM est le triangle cherché.

PROBLÈME.

185. *Dans un cercle dont le rayon* AB *soit donné* (fig. 96), *inscrire cinq carrés égaux, dont l'un soit concentrique au cercle et les autres le touchent, chacun ayant un côté commun avec le carré du milieu.*

Solution. Soient faites égales au rayon AB les cordes BC, CD, DE; soit fait à BD = B*a* = E*a*; faites encore égales à A*a* les cordes BF, B*f* : du centre *a* avez le rayon AB coupez le cercle en G, et faites la corde G*g* = A*a*; du centre *g* avec le rayon *ga* décrivez un arc *a*P, et faites sa corde *a*P = *a*A; du même centre *g* et avec le rayon gA décrivez un arc Ap sur la direction de l'arc aP; faites à $aA = Pp$; faites maintenant égales à Ap les cordes Bq, fn, Em, Fl; avec le même rayon Ap et des centres B, q, f, n, E, m, F, l, décrivez des arcs qui se coupent dans le cercle en L, Q, N, M; LMNQ sera le carré central, et BLQq, fQNn, ENMm, FMLl seront les autres carrés cherchés.

Démonstration. Si l'on compare les points a, A, G, B, g de cette figure avec les points Q, p, A, R, S de la fig. 4, on aura (21) pour la fig. 87 l'équation

$$(ag)^2 = (aB)^2 + Gg.Aa,$$

c'est-à-dire en faisant le rayon $AB = 1$,

$$(ag)^2 = 3 + 2 = 5 \ (27); \text{ d'où } ag = \sqrt{5}.$$

De plus, on a $aP = aA = \sqrt{2}$;

or

$$ga : aP :: gA : Ap \ (93),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{5} : \sqrt{2} :: 1 : Ap;$$

d'où

$$Ap = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = EM;$$

et comme BCDE est une demi-circonférence (64), BmE sera un angle droit (31, *liv.* 3); d'où

$$(BE)^2 = (Bm)^2 + (mE)^2 \text{; c.-à-d. } 4 = (Bm)^2 + \frac{2}{5};$$

d'où

$$(Bm)^2 = 9 \cdot \frac{2}{5}, \text{ et } Bm = 3\sqrt{\frac{2}{5}} = 3\,mE.$$

On trouvera la même valeur pour qE, et l'on démontrera que tous les autres angles du quadrilatère Bm Eq qui sont inscrits et appuyés sur un diamètre sont droits : donc ce quadrilatère est un parallélogramme rectangle. On démontre de même que Flfn est un parallélogramme rectangle.

Si l'on fait la corde E$m = k$, mF sera la corde du complément de l'angle droit $= h$ (159), et l'on aura

$$h^2 = 2 - 2k\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}k^2\right)};$$

d'où, à cause de $k^2 = \frac{2}{5}$, on aura

$$h^2 = 2 = 2k\sqrt{\frac{9}{10}} = 2 - 2\sqrt{\frac{9}{25}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$
$$= 2k^2,$$

c'est-à-dire

$$(Fm)^2 = (FM)^2 + (Mm)^2;$$

d'où l'angle F Mm sera droit (48, *liv.* 1), ainsi que les autres angles B Ll, fQq, E Nn. Puis, si l'on appelle x la distance du point m à celui où tombe du point F la perpendiculaire sur Bm, on aura (13, *liv.* 2)

$$(BF)^2 = (Fm)^2 + (Bm)^2 - 2Bm.x,$$

c'est-à-dire

$$2 = \frac{4}{5} + \frac{18}{5} - 6x\sqrt{\frac{2}{5}};$$

d'où $x\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$, et divisant par $\sqrt{\frac{2}{5}}$,

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}} = m\text{M}.$$

Ensuite, si l'on nomme y la perpendiculaire qui tombe du point F sur Bm, on aura

$$y^2 = (Fm)^2 - x^2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5};$$

d'où l'on tire

$$y = \sqrt{\frac{2}{5}} = \text{FM}.$$

On démontre par là que les points M et L sont sur la ligne Bm; et comme on a

$$Bm = 3.Em = Mm + BL + Em,$$

on aura donc aussi

$$LM = Em.$$

De plus, on démontre que les autres côtés MN, NQ, LQ ont la même valeur. De tout ce qui précède, il résulte que les angles extérieurs au quadrilatère LMNQ qui ont leurs sommets aux points L, M, N, Q sont droits : donc les angles intérieurs le seront aussi ; donc on aura les cinq carrés demandés.

PROBLÈME.

186. *Étant donnés les cinq points* A, B, C, D, E *sommets des angles d'un pentagone régulier* (fig. 97), *trouver les cinq points* a, b, c, d, e *où se coupent les diagonales de ce pentagone.*

Solution. Des centres A, B, C, D, E avec le côté AB du pentagone pris pour rayon, soient décrits des arcs qui se coupent en a, b, c, d, e; ces points seront ceux d'intersection des diagonales.

Démonstration. Si l'on suppose les diagonales menées et les côtés du pentagone ABCDE tracés, on aura l'angle BAC = BDA (29, *liv.* 3) = CAD; d'où Ab = bD (6, *liv.* 1). On aura ensuite BbA = bDA + bAD (32, *liv.* 1) = BAb + bAD = BAD = ABD (5, *liv.* 1); d'où le triangle ABb sera isoscèle (6, *liv.* 1), c'est-à-dire on aura AB = Ab = bD : donc, etc.

PROBLÈME.

187. *Dans un cercle d'un rayon* AB *donné* (fig. 98), *inscrire six pentagones réguliers.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné, à AB = BC = CD = DE = Ed, à BD = Ba = Ea, et à Aa = BF = Db = db; soit aussi fait dans la même circonférence à bF = BP = PQ = QR = RS; avec le même rayon bF et des centres B, P, Q, R, S soient décrits des arcs qui se coupent en β, p, q, r, s. Maintenant des centres β, P avec le rayon βp soient décrits deux arcs qui se coupent en c; avec le même rayon et des centres P, p soient décrits deux arcs qui se coupent en d; on aura deux des pentagones cherchés, savoir : $\beta pqrs$ qui a son centre en A, et βpdPc qui touche le cercle donné en P. On trouvera de la même manière les sommes des angles des quatre autres pentagones $pqf\mathrm{Q}e$, $qrh\mathrm{R}g$, $rsk\mathrm{S}i$, $s\beta m\mathrm{B}l$.

Démonstration. Les points B, P, Q, R, S seront les sommets des angles d'un pentagone régulier inscrit au cercle donné (40, 128); d'où les points β, p seront dans la diagonale BQ, et les points p, q dans la diagonale PR (186); et comme $\mathrm{B}p = \beta\mathrm{Q}$, on aura $\mathrm{B}\beta = p\mathrm{Q}$. On prouvera de même que $\mathrm{P}p = q\mathrm{R}$, et à cause de $\mathrm{BQ} = \mathrm{PR}$ (27, *liv.* 3) on aura aussi $\mathrm{B}\beta = \mathrm{P}p$, et $\beta p = pq$. On prouvera aussi de la même manière que tous les côtés du pentagone $\beta pqrs$ sont égaux entre eux. De plus, on a l'angle βpq, c'est-à-dire $\mathrm{B}p\mathrm{R} = \mathrm{BPR} + \mathrm{PB}p$ (32, *liv.* 1); mais $\mathrm{PB}p$, c'est-à-dire $\mathrm{PBQ} = \mathrm{QPR}$: donc $\beta pq = \mathrm{BPQ}$. On démontre de même que les autres angles du pentagone $\beta pqrs$ sont égaux aux angles du pentagone BPQRS : donc ils sont tous deux réguliers. En outre, l'angle QBR formé par deux diagonales du pentagone BPQRS, qui est l'angle $\beta\mathrm{B}s$, sera égal à l'angle βqs, formé par deux diagonales du pentagone $\beta pqrs$ (20, *liv.* 6). Or comme les triangles $\beta\mathrm{B}s$, βqs sont isoscèles, ils auront aussi les angles à la base commune βs égaux entre eux (5, 32, *liv.* 1); d'où aussi les triangles seront en tout égaux (26, *liv.* 1); d'où les triangles

B$m\beta$, βpq ayant tous les côtés égaux entre eux, auront aussi les angles égaux (8, *liv.* 1), ainsi que les triangles Bls, srq : donc tous les côtés et tous les angles du pentagone B$m\beta sl$ seront égaux aux côtés et aux angles du pentagone $\beta pqrs$; ils seront donc tous deux réguliers. On démontre la même chose pour les autres pentagones βcPdp, peQfq, qgRhr, riSks : donc, etc.

188. Le point b sera le centre du pentagone βmBls, et la distance bB le rayon du cercle circonscrit à ce pentagone et aux autres qui lui sont égaux, ainsi que nous le démontrerons bientôt : ce qui ajoute encore une belle propriété au point b que nous avons déjà remarqué tant de fois dans cette Géométrie. Car, outre les divisions en moyenne et extrême raison qu'il nous a fait obtenir dans le diamètre BAE (45, 46), outre qu'il a servi à déterminer le côté bF du pentagone inscrit au cercle du rayon AB (40), le côté bA du décagone inscrit au même cercle (41); on a encore le rayon Bb du cercle circonscrit aux six pentagones qu'on peut inscrire au plus grand cercle du rayon AB, comme dans le présent problème; car si l'on suppose le rayon AB $=$ 1, on a

$$Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\ (180);$$

et comme (31, *liv.* 3)

$$(BE)^2 = (BQ)^2 + (QE)^2 = (BQ)^2 + (Ab)^2,$$

on aura

$$BQ = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

On a ensuite

$$\beta Q = BP = bF = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}\ (181);$$

d'où

$$BQ : \beta Q :: BQ.\beta Q : (\beta Q)^2 :: \sqrt{5} : \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$:: 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) :: BA : bA;$$

d'où

$$BQ : BQ - \beta Q :: BA : BA - bA,$$

c'est-à-dire

$$BQ : B\beta :: BA : Bb.$$

Donc les deux diagonales des pentagones BPQRS, B$m\beta sl$ seront entre elles comme BA : bA : donc BA étant le rayon du premier pentagone, Bb sera le rayon du second (20, *liv.* 6).

PROBLÈME.

189. *Étant donnés les sommets des angles d'un hexagone régulier* BCDEdc (fig. 99), *trouver les points* l, m, n, g, p, q *où se coupent celles de ses diagonales qui ne passent pas par le centre.*

Solution. Soit fait à BD = Ba = Ea; puis à BC = BA = CA = Bα; à aA = $a\alpha$; à αB = αP = AP. Maintenant, des centres B, C avec le rayon aP soient décrits deux arcs qui se coupent en l; des centres C, D soient décrits deux autres arcs qui se coupent en m, et ainsi de suite; ces points l, m, etc., seront les points cherchés.

Démonstration. Supposons que les diagonales indiquées se coupent en l, m, n, g, p, q; comme on a l'angle BDc = DcE (29, *liv.* 3), BD sera parallèle à cE (28, *liv.* 3) : donc le triangle Clm sera semblable au triangle CcE (2, 5, *liv.* 6), et par conséquent équilatéral. De même on aura le triangle Blq semblable au triangle BDd; puis les triangles CcE et BdD ayant les côtés égaux, seront égaux (2) (8, 4, *liv.* 1); et le côté BD, et par conséquent

lm étant à égale distance du côté cE que le côté, Cc ainsi que ql du côté dD (14, *liv.* 3), si l'on applique le triangle BdD sur le triangle CcE, la droite ql tombera sur la droite lm, et elles seront égales; mais $Bl = lq$: donc $Bl = lm$. De même on démontre que $Dm = ml$: donc, en faisant le rayon du cercle $BC = AB = 1$ (2), on a

$$Bl = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} \sqrt{3};$$

de même $Cl = \frac{1}{3} \sqrt{3}$; mais on a fait précisément

$$Bl = Cl = aP = \frac{1}{3} \sqrt{3} \text{ (184)}:$$

donc l est un des points cherchés. On démontre la même chose pour les autres points m, n, g, p, q; donc, etc.

PROBLÈME.

190. *Dans le cercle du rayon donné* AB (fig. 100), *inscrire sept hexagones réguliers, dont un soit concentrique au cercle, et les autres soient disposés autour du premier.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné à $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis à $DB = DV = dV$. Des centres C et A avec le rayon CV soient décrits deux arcs qui se coupent en P; du centre P avec le même rayon PC soit coupée la circonférence du cercle en δ; $d\delta$ sera le côté des hexagones à inscrire, et que l'on inscrira facilement l'un près de l'autre. Ensuite, des centres d et δ avec le même côté $d\delta$ pris pour rayon soient décrits deux arcs qui se coupent en α; du centre α et avec le même rayon soit décrit un cercle dans lequel on inscrive (15, *liv.* 4) un hexagone régulier $d\delta mnpq$. Du centre A avec le même rayon soit décrit un cercle qui passera par np; soit décrit dans ce cercle l'hexagone qui a pour un des côtés la ligne pn; sur les côtés de cet hexagone soient décrits les autres hexagones, comme on a fait d'abord sur le côté $d\delta$, et l'on aura les sept hexagones demandés.

Démonstration. En faisant pour abréger $AB = 1$, on aura $CP = CV = \sqrt{7}$ (100) $= AP$; puis on aura

$$AP : A\delta :: A\delta : \delta d \ (86),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{7} : 1 :: 1 : \delta d; \text{ d'où } \delta d = \sqrt{\tfrac{1}{7}}.$$

Supposons pour un moment inscrits les hexagones cherchés, et soit leur côté $d\delta$ qui est la quantité inconnue $= x$; on divisera cette ligne en deux parties égales au point ν, et l'on mènera la droite $A\nu$ qui lui sera perpendiculaire (83), et passera par α, centre de l'hexagone, dont $d\delta$ est le côté, en coupant aussi par moitié au point μ le côté pn de l'hexagone central; et comme on a dans le triangle équilatéral Apn

$$pn : A\mu :: 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \ (104),$$

on aura

$$x : A\mu :: 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{3}; \text{ d'où } A\mu = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3},$$

et

$$A\nu = 3A\mu = \frac{3}{2}x\sqrt{3},$$

et encore

$$d\nu = \frac{1}{2}x;$$

puis, comme $1 = (Ad)^2 = (A\nu)^2 + (d\nu)^2$, on aura

$$1 = \frac{27}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 7x^2; \text{ d'où } x^2 = \frac{1}{7} \text{ et } x = \sqrt{\frac{1}{7}};$$

valeur qui est précisément celle déterminée pour la ligne $d\delta$ dans la solution du problème, ainsi qu'on vient de le démontrer : donc, etc.

On trouve dans Pappus, *liv.* 8, *probl.* 15, *prop.* 19, ce problème résolu avec la règle et le compas, d'une manière qui n'est pas plus simple que la précédente. Il y a aussi ajouté une construction mécanique.

191. Nous croyons avoir jusqu'ici rempli les promesses que nous avons faites (6 et 7). Quant au premier point, nous avons déjà donné tous les élémens de la *Géométrie du compas*, c'est-à-dire la totalité des problèmes qui suffisent pour trouver avec le compas seul et sans la règle tous les points qu'on peut trouver avec ces deux instrumens réunis. Pour démontrer ceci (71), on observe d'abord que la Géométrie élémentaire fournit le moyen de trouver les points d'un problème, ou par la section des arcs entre eux (et ce moyen est tout-à-fait propre à la Géométrie du compas), ou par la section des arcs et des lignes droites, ou par celle des lignes droites entre elles (et tout cela se trouve compris dans le livre 7) (110 et suivans). Ensuite une droite quelconque nécessaire à la solution d'un problème se trouve déterminée de grandeur et de position. Par rapport à la grandeur, nous avons enseigné dans le liv. 3 (**64** et suivans) et dans le liv. 4 (**72**, **73**, **74**), à agrandir, diminuer, diviser une grandeur quelconque finie en un nombre quelconque de parties; puis, dans le liv. 5 (**86** et suiv.), à trouver les troisièmes, les quatrièmes, les moyennes proportionnelles, ainsi qu'à diviser une droite dans un rapport quelconque donné. Quant à la position des droites, elle se détermine par la position de deux points pour chacune d'elles; or le liv. 4 (**76** et suiv.) enseigne à trouver les points pour tous les cas des perpendiculaires et des parallèles. Le liv. 8 (**113** et suiv.) donne tout ce qui est nécessaire pour déterminer la position des lignes droites entre elles sous un angle quelconque, donné par le moyen de deux points. On a épuisé dans le liv. 2 (**27** et suiv.) les divisions de la circonférence du cercle et de tous les arcs qui sont du ressort de la Géométrie élémentaire. Je ne vois plus, d'après tout cela, quels autres élémens on pourrait désirer. A l'égard du choix des problèmes que nous avons recueillis ici, nous laisserons aux mathématiciens le soin de juger si, dans un grand nombre de cas utiles ou récréatifs, il

17

n'est pas préférable, non-seulement pour la précision du résultat, mais encore pour la promptitude de la construction, d'abandonner la règle et de se servir du compas seulement, jusqu'à ce qu'ayant trouvé les points nécessaires au problème, on mène, s'il le faut, d'un point à l'autre une ou plusieurs droites que l'on ne peut pas à la vérité tracer avec le compas seul, et qui exigent l'usage de la règle.

LIVRE DOUZIÈME.

PROBLÈMES RÉSOLUS PAR APPROXIMATION.

192. Tous les problèmes supérieurs au second degré ne peuvent être résolus géométriquement seulement avec la règle et le compas; mais ils exigent des intersections de courbes coniques ou de degré supérieur, et par conséquent on ne peut les résoudre exactement avec la seule Géométrie du compas. Les instrumens faits pour décrire la cycloïde, la conchoïde, la cissoïde, la trajectoire et d'autres courbes semblables qui servent à la résolution de ces problèmes, sont assurément d'une invention très ingénieuse et d'un prompt et élégant usage dans la pratique. Pourtant, lorsqu'on n'a pas besoin d'avoir toute la trace de la courbe à laquelle ils sont destinés, et qu'il suffit d'obtenir un point par l'intersection de cette courbe avec d'autres lignes, comme ils laissent toujours quelques soupçons de petites erreurs qu'on ne peut pas quelquefois bien calculer, il vaudra mieux, dans beaucoup de cas, préférer à l'exactitude théorique de ces méthodes, l'approximation pratique suffisante d'une construction faite avec la règle et le compas. Alors je dis que le plus souvent une solution obtenue avec le seul compas sera encore préférable. On pourra s'en convaincre par des exemples, en comparant nos solutions avec celles déjà connues.

193. Comme il n'y a encore aucune méthode générale pour obtenir par la Géométrie élémentaire ces approximations, on ne doit pas attendre que j'en propose aucune par ma Géométrie du compas. Je n'appelle point méthode géométrique d'approximation celle par laquelle on obtient une valeur approchée à l'aide d'une de ces échelles qu'on nomme géométriques, puisque avant de s'en servir il faut faire un calcul arithmétique : une telle méthode doit être plutôt appelée arithmétique. Supposons, par exemple, qu'on veuille la racine cubique du nombre 2, l'extraction qu'on veut faire arithmétiquement de cette racine, pour pouvoir ensuite prendre les portions décimales ou une fraction quelconque sur une échelle géométrique avec le compas afin de doubler un cube, se fait par un moyen qui est plutôt du ressort de l'Arithmétique que de celui de la Géométrie.

194. Je n'ai pu encore jusqu'ici apercevoir d'autre moyen d'obtenir d'une manière très approchée la solution de plusieurs problèmes utiles supérieurs au second degré, que celui de trouver des genres, et pour ainsi dire des classes différentes de construction de figures élémentaires; puis de soumettre au calcul le plus grand nombre possible de cas particuliers presque innombrables qui en résultent, et de choisir parmi ceux qui tendent le mieux au but qu'on se propose, et les employer à résoudre le problème.

195. J'ai déjà examiné plusieurs de ces genres, et pour ainsi dire de ces classes de constructions, et j'ai entre les mains des recherches sur cette matière. La classe la plus simple est celle dont nous ferons presque uniquement usage dans ce dernier livre de notre Géométrie. Elle est fondée sur les trois points remarquables *a*, *b* et *e* (*fig.* 9, 11 et 12) (59), qui nous ont déjà tant servi dans les livres précédens, et sur lesquels nous avons à donner les douze équations que nous avons promises (59).

196. Soit le point Z un point quelconque pris sur le quart de la circonférence BF dans la fig. 12 construite comme dans le livre se-

cond, et soit pris dans l'autre quart Bf le point z, de manière qu'on ait Bz = BZ, on aura (20 et 21)

$$(A)\ldots(aZ)^2=(aB)^2-Zz.Aa,$$
$$(B)\ldots(bZ)^2=(bB)^2+Zz.Ab,$$
$$(E)\ldots(eZ)^2=(eB)^2-Zz.Ae.$$

197. Si l'on veut avoir les équations pour les distances des trois points a, b et e du point z, on n'aura qu'à changer les signes du second membre des équations précédentes, et l'on aura (20 et 21)

$$(A')\ldots(az)^2=(aB)^2+zZ.Aa,$$
$$(B')\ldots(bz)^2=(bB)^2-zZ.Ab,$$
$$(E')\ldots(ez)^2=(eB)^2+zZ.Ae.$$

198. La droite Zz étant la corde de l'arc double de BZ = 2 sin BZ, et supposant AB = 1, ce que nous supposerons toujours, on aura

$$(aB)^2=(BD)^2=3\ (2);$$

$$(Aa)^2=2\ (27);$$

$$(Bb)^2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\ (181);$$

$$(Ae)^2=2-\sqrt{2}\ (38);$$

d'où

$$(eB)^2=(AB)^2+(Ae)^2=3-\sqrt{2};$$

et

$$Ab = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\ (180):$$

si l'on fait $aZ = a$, on aura

$$(A') \ldots a^2 = 3 - 2 \sin A . \sqrt{2}.$$

Cette équation comprend aussi le cas où l'arc A est négatif comme Bz, dans lequel le signe — placé devant $2 \sin A \sqrt{2}$ se change en $+$.

199. La valeur de a peut toujours être celle d'une corde quelconque du cercle BDd, excepté dans le cas où la valeur de la distance az exprimée par a est plus grande que 2. Pour calculer alors plus facilement la valeur de a, comme on a

$$\sqrt{2} = BF = 2 \sin 45°,$$

et

$$\begin{aligned} 2 \sin A . \sin 45° &= \cos(A - 45°) - \cos A + (45°) \\ &= \cos(45°\text{-}A)\text{-}\sin(45°\text{-}A)\ (158), \end{aligned}$$

on aura

$$(*)\ a^2 = 3 - 2 \cos(45° - A) + 2 \sin(45° - A).$$

200. Dans les autres cas où a est plus petit que 2, en appelant A' l'arc dont a est la corde, on aura

$$\frac{a^2}{4} = \sin^2 . \tfrac{1}{2} A' = \frac{1 - \cos A'}{2} \ (155)$$

$$= \frac{3}{4} - \sin A \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{3}{4} - \sin A . \cos 45^\circ ;$$

d'où réduisant,

$$\cos A' = 2 \sin A . \cos 45^\circ - \tfrac{1}{2} ;$$

d'où encore (159),

$$\cos A' = \sin (A + 45^\circ) + \sin (A - 45^\circ) - \sin 30^\circ ,$$

ou bien,

$$(1) \cos A' = \cos (45^\circ - A) - \sin (45^\circ - A) - \sin 30^\circ .$$

201. Si l'on veut se servir de cette équation pour obtenir une des divisions de la circonférence que l'on ne peut pas avoir exactement, on y introduira, au lieu de A, un arc précis, par exemple, la vingtième partie de la circonférence $= 18^\circ$, en faisant $BZ = 18^\circ$ (*fig.* 12), et l'on aura

$$\cos A' = \cos 27^\circ - \sin 27^\circ - \sin 30^\circ .$$

Or

$$\begin{array}{r} \sin 27° = 0{,}4539905 \\ \sin 30° = 0{,}5000000 \\ \hline 0{,}9539905 \\ \cos 27° = 0{,}8910065 \\ \hline \end{array}$$

d'où $\cos A' = -\,0{,}0629840.$

On trouve ensuite dans les tables

$$0{,}0629840 = \sin 3°36'\,\frac{1935}{2903}.$$

Or comme la valeur de $\frac{1935}{2903}$ approche tellement de $\frac{2}{3}$ qu'il n'y a pas seulement erreur d'une unité entière dans le dernier chiffre du nombre 1935, on pourra prendre 0,0629840 pour le sinus de $3°36'40''$, sans qu'on puisse reconnaître avec les tables ordinaires s'il y a erreur d'une tierce. Donc l'arc A', qui a son cosinus négatif, sera $= 93°36'40''$, et BZ étant supposé $= 18°$, la distance aZ sera la corde de cet arc; donc en appliquant pour corde sur la circonférence la distance aZ prise avec le compas, on déterminera un arc $= 93°36'40''$ avec une approximation suffisante.

202. Pour rechercher l'erreur qui se trouve dans les nombres des tables ordinaires, on observe que le sinus de 18° étant égal à la moitié de la corde de la dixième partie de la circonférence, c.-à-d. $= \frac{1}{2} Ab = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, et le cosinus de $45°$ étant égal à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, l'équation $\cos A' = 2 \sin A . \cos 45° - \frac{1}{2}$ (200) donne

$$\cos A' = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{10} - \sqrt{2}) - \frac{1}{2} = 0{,}062983982 4.$$

Puis, calculant aussi avec plus de chiffres le sinus de $3° 36' 40''$, on trouve

$$0{,}0629840611 54,$$

et en se tenant à huit décimales, on trouve

$$\sin 3° 36' 39'' = 0{,}06297921:$$

la différence pour $1''$ ou $60'''$ est de 485 : donc si 485 donne $60'''$, 8 donnera $\frac{96'''}{97}$, et par conséquent ne donnera pas une tierce entière; donc l'arc qui a pour corde la distance aZ, n'excède pas d'une tierce entière $93° 36' 40''$.

203. D'après cela, voici l'usage qu'on pourrait faire de cette valeur pour l'ancienne division du cercle. Il est clair qu'elle pourrait servir à diviser une minute en trois parties, dans des cercles où l'on aurait marqué les minutes; car on trouverait les 40″, c'est-à-dire $\frac{2'}{3}$ entre une minute et la suivante, et cela sans erreur d'une tierce. On peut encore l'employer pour trouver la troisième partie d'un degré. En effet, comme l'arc cBN $= 90°$, et N$p = 3°$ (**31**, **43**), si l'on prend BZ $=$ Kp, alors on aura l'arc BZ $= 18°$ (**32**); du point c pris pour centre avec le rayon aZ soit décrit un arc, il coupera la circonférence entre p et P en un point distant de p de 36′40″ à très peu de chose près. Nommons y ce point, et triplons, par exemple, l'arc N$y = 3° 36' 40''$, nous aurons un arc $= 10° 50'$, sans qu'il y ait une erreur de trois tierces, et si c'est de N vers G qu'on triple cet arc, la dernière division tombera entre π et φ; nommons η le point où elle tombe, de manière qu'on ait N$\eta = 10° 50'$; nommons ensuite μ le point qui est à la moitié de l'arc $\pi\varphi$ obtenu par le n° 58, on aura l'arc $\mu\eta = 20'$ sans qu'il y ait erreur de trois tierces, c'est-à-dire qu'on aura obtenu un tiers de degré de l'ancienne division avec une telle précision, que je ne crois pas qu'on en puisse désirer une plus grande dans la pratique.

204. Nous avons pris cet exemple parmi toutes les valeurs de $\cos A'$ calculées en introduisant successivement dans l'équation (1) au lieu de A, les arcs 90°, 88° 30′, 87°, et ainsi de suite jusqu'à 0°, puis — 1°30′, — 3°, etc., jusqu'à — 19° 30′ inclusivement; au-delà de cet arc, l'équation (1) n'a plus lieu, parce que ses valeurs deviennent plus grandes que l'unité.

205. Nous allons maintenant continuer la recherche des autres équations.

Toute distance du point b des points de la circonférence qui sera plus petite que le diamètre 2, pourra être corde d'un arc. Nommons B′ l'arc qui a pour corde la distance bZ; on aura $\frac{bZ}{2} = \sin \frac{1}{2} B'$; et nommant B l'arc BZ, on aura $Zz = 2 \sin B$, puis divisant par 4 l'équation (B) du n° **196**, on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} B' = \frac{1 - \cos B'}{2} (155) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} - \sin B . \frac{\sqrt{5} - 1}{4};$$

d'où

$$\cos B' = 1 - \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right) - \sin B . \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$= 1 - 2 \sin^2 36° - 2 \sin B . \sin 18°$$

$$= \cos 72° - \cos(B - 18°) + \cos(B + 18°) \; (155, 158):$$

donc on aura

$$(2) \cos B' = \sin 18° + \cos(B + 18°) - \cos(B - 18°).$$

206. Pareillement, si l'on nomme E' l'arc qui a pour corde la distance eZ, et E l'arc BZ, l'équation (E) du n° **196** donnera

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} E' = \frac{1-\cos E'}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{4} - \sin E . \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2};$$

d'où l'on tire

$$\cos E' = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} + 2 \sin E . \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2}}}{2}$$
$$= \sin 45° - \sin 30° + 2 \sin E \sin 22° 30';$$

et enfin,

$$(3) \quad \cos E' = \sin 45° - \sin 30°$$
$$+ \cos(E - 22° 30') - \cos(E + 22° 30').$$

207. Au moyen de ces trois équations, un arc A, B ou E étant donné, on aura, avec les tables des sinus et cosinus naturels, et par de simples additions ou soustractions, les cosinus et les arcs A', B' et E', qui ont pour cordes les distances aZ, bZ, eZ, que l'on trouvera être les mêmes, en doublant le sinus de la moitié des arcs A', B' et E'.

208. Réciproquement si la distance aZ est égale à une corde d'un arc connu A', et si l'on cherche de quel arc Zz deviendra la corde, ou de combien de degrés deviendra l'arc BZ qui en est la moitié, et est $=$ A; de l'équation (198) $a^2 = 3 - 2 \sin A \sqrt{2}$, on tirera

$$\sin A = \frac{3 - a^2}{2\sqrt{2}};$$

et substituant la valeur de $a^2 = 4 \sin^2 . \frac{1}{2} A' = 2 - 2 \cos A'$ (155), on aura

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos A' \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \sin 30^\circ . \sin 45^\circ + \cos A' \sin 45^\circ; \end{aligned}$$

et (156, 158) comme $\sin(45^\circ + A') = \cos(45^\circ - A')$, on aura cette équation

$$(4)\ \sin A = \frac{1}{2} [\sin 45^\circ + \sin (45^\circ - A') + \cos (45^\circ - A')].$$

209. De même, si l'on connaît l'arc B', qui a pour corde la distance bZ, et si l'on cherche l'arc B $=$ BZ par le moyen de Zz, qui est la corde de 2B, en multipliant l'équation (B) du n° 196 par $\sqrt{5} + 1$, et à cause de $(bB)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$, et de $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, on aura

$$(bZ)^2 . (\sqrt{5} + 1) = 2\sqrt{5} + 4 \sin B;$$

et substituant pour $(bZ)^2$ sa valeur

$$4\sin^2\frac{1}{2}B' = 2 - 2\cos B' \ (155),$$

on aura, après avoir fait les réductions,

$$\sin B = \frac{1}{2} - 2\cos B' . \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right).$$

Or Bb étant le côté du pentagone $= \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$ corde de 72°, sera

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} = \sin 36^\circ;$$

d'où

$$\frac{1}{4}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = \sin^2 36^\circ;$$

or

$$1 - \sin^2 36^\circ = \cos^2 36^\circ = \sin^2 54^\circ$$
$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2:$$

d'où l'on tirera

$$\sin B = \frac{1}{2} - 2\cos B' \sin 54^\circ;$$

et enfin (156)

$$(5) \sin B = \sin 30^\circ - \sin(54^\circ + B') - \sin(54^\circ - B').$$

210. De même si l'on connaît l'arc E', qui a pour corde la distance eZ, et si l'on cherche le degré de l'arc $BZ = E$, égal à la moitié de l'arc qui a pour corde $Zz = \sin E$, en substituant dans l'équation (E) du n° **196** pour $(eZ)^2$ sa valeur $2 - 2\cos E'$; pour $(eB)^2$ sa valeur $3 - \sqrt{2}$, et pour AE sa valeur $\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 2\sin 22°30'$ (**198**, **38**), on aura

$$2\sin E\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 2\cos E' + 1 - \sqrt{2};$$

ce qui, en multipliant par $\sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2}$, donne

$$\begin{aligned} 4\sin E &= 2\cos E'.\sqrt{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})} \\ &\quad - (\sqrt{2}-1)\sqrt{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})} \\ &= 2\cos E'\sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2} - (2-\sqrt{2})\sqrt{(2+\sqrt{2})} \\ &= 2\cos E'\sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})}\sqrt{2}; \end{aligned}$$

puis divisant par 4, et considérant que l'on a $\sqrt{(2+\sqrt{2})} = 2\sin 67°30'$ (**37**) et $\sqrt{2} = 2\sin 45°$, on aura (**156**, **157**, **158**)

$$\begin{aligned} \sin E &= 2\cos E'\sin 67°30'\sin 45° \\ &\quad - \sin 22°30'\sin 45°, \\ \text{ou } \sin E &= \cos E'[\cos(67°30'-45°) \\ &\quad - \cos(67°30'+45°)] - \sin 22°30'\sin 45°; \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \sin E &= \cos E'\cos 22°30' \\ &\quad + \cos E'\sin 22°30' - \sin 22°30'\sin 45°; \end{aligned}$$

ou enfin

$$(6)\ \sin E = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\cos(E'+22^\circ 30')+\sin(E'+22^\circ 30')\\ +\sin 22^\circ 30'+\cos(E'-22^\circ 30')\\ -\sin(E'-22^\circ 30')-\cos 22^\circ 30'\end{array}\right\}.$$

211. Ainsi des trois équations (A), (B) et (E), nous en avons tiré six au moyen desquelles des arcs étant donnés, nous pourrons en obtenir de nouveaux, ainsi que leurs nouvelles cordes, à l'aide des trois seuls points *a*, *b* et *e*.

212. Comme il peut y avoir une infinité d'arcs, chacune de ces équations donne une infinité de solutions. Mais si l'on ne veut avoir la valeur que des arcs que l'on peut trouver par le moyen des mêmes points *a*, *b* et *e*, on en trouvera 120 pour chaque équation, quand il n'y aura de limites particulières pour aucune d'elles. En effet, on pourra, par le moyen de ces trois points, diviser la circonférence en 240 parties égales (57), et par conséquent la demi-circonférence en 120; on aura donc 60 points Z et 60 points *z*, qui, pris ensemble, détermineront 120 cas pour chaque équation; mais quelqu'une d'elles aura des limites particulières.

213. Si l'on voulait prendre avec le compas, par exemple, la corde de 3°, c'est-à-dire de la cent-vingtième partie de la circonférence (42), et décrire un arc en plaçant en a la pointe du compas, cet arc ne pourrait couper la circonférence en aucun point Z, attendu que sa corde est plus petite que la distance $aF = \sqrt{2} - 1$. On ne pourra donc pas dans l'équation (4) mettre au lieu de A′ l'arc de 3°, et si l'on veut le faire, on trouvera pour sin A une valeur plus grande que l'unité, c'est-à-dire une valeur absurde. Pour voir quel est le premier arc qu'on pourra mettre à la place de A′ entre les arcs de la série 1°30′, 3°, 4°30′, etc., on observera quel est l'arc qui a pour corde la distance aF, qui est la plus petite entre le point a et le cercle, et qui est égale à $\sqrt{2} - 1 = 2\left(\sin 45° - \frac{1}{2}\right) = 0{,}4142136$ $= corde\ 23° 54' \frac{976}{2846}$. Donc le premier arc qu'on puisse employer de ceux qu'on trouve par le moyen des trois points a, b et e sera celui de 24°. Après cet arc, on pourra employer tous les autres arcs de la suite 25°30′, 27°, 29°30′ jusqu'à 180°; car les cordes de tous ces arcs peuvent être des distances du point a à quelque point Z ou z de la circonférence.

214. Les équations (5) et (6) sont plus limitées; car dans l'équation (5) on ne peut pas employer les arcs B′ dont la corde est plus petite que bf ou plus grande que bF : de même l'équation (6) n'admet aucun des arcs E′ dont la corde est plus petite que eF et plus grande que ef.

215. Nous verrons dans la suite dans quel cas on peut se servir avantageusement de quelques-unes de ces valeurs pour la division du cercle ou pour quelque autre problème qu'on ne peut résoudre que par approximation, en choisissant celles qui approchent le plus de la valeur qu'on cherche, et se déterminent en même temps par des sections d'arcs qui diffèrent moins de l'angle droit.

216. Pourtant, afin de retirer tous les avantages possibles de trois points a, b et e sans en introduire de nouveaux, des trois équations (A), (B) et (E) nous en tirerons six autres pour avoir de nouvelles valeurs d'arcs et de cordes.

217. Soit BZ un arc connu, par exemple, un de ceux qu'on obtient par les problèmes du livre second, et nommons B cet arc; on prendra avec le compas la distance bZ, qu'on portera de a à quelque autre point Z′ qui détermine un autre arc BZ′ = A, et comparant les deux équations (A) et (B), on en tirera une nouvelle équation qui fait connaître sa valeur. En effet, si dans ces deux équations on fait $bZ = aZ'$, en faisant dans la première (A) $Zz = 2 \sin A$, puis dans la seconde (B) $Zz = 2 \sin B$, on aura

$$(aB)^2 - 2\sin A . Aa = (bB)^2 + 2\sin B . Ab,$$

ou bien (198)

$$3 - 2\sin A . \sqrt{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} + \sin B(\sqrt{5} - 1);$$

et dégageant sin A, on aura

$$\sin A = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} - 2\sin B . \frac{\sqrt{5}-1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sin 54^\circ \sin 45^\circ - 2\sin B . \sin 18^\circ \sin 45^\circ \ (209)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos 9^\circ + \sin 9^\circ) - \sin B(\cos 27^\circ - \sin 27^\circ) \ (158);$$

d'où (155 et suiv.)

$$(7) \sin A = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \cos 9^\circ + \sin 9^\circ \\ + \cos(B - 27^\circ) - \sin(B - 27^\circ) \\ - \cos(B - 63^\circ) + \sin(B - 63^\circ) \end{array}\right\}.$$

218. On ne pourra pas non plus prendre ici pour B tous les arcs, mais seulement ceux qui donnent une distance bZ ou bz qui ne soit pas plus petite que aF.

219. Maintenant soit connu un arc BZ que l'on nomme A; si l'on porte la distance aZ

prise avec le compas, de b à quelque autre point Z′ de la même circonférence, qui détermine l'arc $BZ' = B$, on connaîtra cet arc B, et si l'on veut sa corde, en dégageant sin B de l'équation (**217**),

$$\sin A = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - 2 \sin B \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Multipliant cette équation par le facteur $2(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$, on aura

$$2 \sin A (\sqrt{5}+1)\sqrt{2} = 3 + \sqrt{5} - 4 \sin B;$$

d'où l'on tire

$$\sin B = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 4 \sin A \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$= 2 \sin^2 54° - 4 \sin A \sin 54° \sin 45° \; (\mathbf{209});$$

et traitant comme ci-dessus les équations (**155** et suiv.), on aura enfin

$$(8) \quad \sin B = 1 + \sin 18° - \sin(A + 9°)$$
$$+ \cos(A + 9°) - \sin(A - 9°) - \cos(A - 9°).$$

220. On ne pourra pas dans cette équation (8) employer pour A les arcs BZ qui donnent une distance aZ plus grande que bF.

221. Actuellement, si dans l'équation (A) du n° **196** on fait $Zz = 2 \sin A$, et dans l'équation (E) une autre distance $Zz = 2 \sin E$, en faisant en outre dans ces deux équations $(aZ)^2 = (eZ)^2$, on aura, après les substitutions nécessaires (198),

$$3 - 2\sin A . \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} - 2\sin E \sqrt{(2-2)};$$

$$\sin A = \frac{1}{2} + 2\sin E . \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2} . \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + 2\sin E \sin 22^\circ 30' \quad \sin 45^\circ, \text{ et } (158)$$

$$= \frac{1}{2} + \sin E \cos 22^\circ 30' - \sin E \sin 22^\circ 30';$$

d'où enfin (156, 158)

$$(9)\ \sin A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sin(E + 22^\circ 30') \\ + \cos(E + 22^\circ 30') \\ + \sin(E - 22^\circ 30') \\ - \cos(E - 22^\circ 30') \end{array} \right\}.$$

222. On peut encore trouver cette neuvième équation d'une autre manière pour rendre le calcul plus facile par le moyen des sinus et cosinus artificiels que l'on trouve dans les tables de dix en dix secondes. C'est pourquoi comme on a

$$\sin A = \frac{1}{2}2 + \sin E\,\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}.\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}} + \sin E\right)\frac{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} + \sin E\right)\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$= (\sin 67^\circ 30' + \sin E)\,\frac{\sin 22^\circ 30'}{\sin 45^\circ}\,(37)\,;$$

et faisant $67^\circ 30' = p$, $E = q$, on aura (**156**)

$$(9\,bis)\ \sin A = \frac{\sin\frac{67^\circ 30' + E}{2}\cos\frac{67^\circ 30' - E}{2}}{\cos 22^\circ 30'}\,;$$

équation qu'il sera facile de calculer par le moyen des logarithmes des sinus et des cosinus.

223. Si donc on prend avec le compas une distance du point e à un point quelconque Z, extrémité d'un arc connu $BZ = E$, et qu'on la porte du point a à quelque autre point Z' de la circonférence, on connaîtra le nouvel arc $BZ' = A$ par le moyen de l'équation (9) ou de celle (9 *bis*). Ces équations auront leurs limites, puisque l'arc BZ devra être tel que la distance eZ ne soit pas plus petite que aF.

224. On a trouvé (221)

$$2\sin A \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sin E . \sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

multipliant cette équation par $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$, on aura

$$2\sin A \sqrt{(2+\sqrt{2})} = \sqrt{(2+\sqrt{2})} + 2\sin E;$$

d'où

$$\sin E = 2\sin A . \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} - \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$
$$= 2\sin A . \sin 67^\circ 30' - \sin 67^\circ 30' \ (37);$$

d'où (158)

$$(10)\ \sin E = \cos(A - 67^\circ 30') - \cos(A + 67^\circ 30') - \sin 67^\circ 30'.$$

225. On peut encore préparer autrement cette équation pour la rendre soluble par l'usage des logarithmes. En effet, puisqu'on a

$$\sin E = 2\sin\left(A - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$
$$= 2(\sin A + \sin - 30^\circ)\sin 67^\circ 30'$$

en faisant $A = p$, $-30^\circ = q$, on aura (156)

$$(10)\ \sin E = 4\sin\frac{A-30^\circ}{2}\cos\frac{A+30^\circ}{2}\sin 67^\circ 30'.$$

226. Il est évident que cette dixième équation aura aussi ses limites, puisque l'on ne pourra pas y introduire toutes les valeurs de l'arc BZ ou B$z\pm$A, qui donneraient la distance aZ plus grande que ef.

227. Enfin on peut de la comparaison de l'équation (B) avec celle (E) tirer deux autres équations. Car si l'on porte une distance du point e à un point quelconque Z de la circonférence, qui soit l'extrémité d'un arc connu BZ$=$E, et que du point b comme centre et de cette distance eZ prise pour rayon on décrive un arc qui coupe la circonférence en quelque autre point Z' qui détermine l'arc BZ'$=$B, on connaîtra cet arc au moyen de son sinus de la manière suivante : soit fait dans l'équation (B) du n° 196, $Zz=2\sin B$, dans celle (E) $Zz=2\sin E$, et dans toutes les deux $bZ=eZ$, on aura, après avoir fait les substitutions nécessaires (198),

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}+\sin B(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{2}$$
$$-2\sin E\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

d'où l'on tire

$$2\sin B(\sqrt{5}-1)=\sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4\sin E\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

et multipliant les deux membres de l'équation par $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$, on aura

$$\sin B = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$- 4 \sin E \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$= 2 \sin^2 54^\circ - 2 \sin 54^\circ \sin 45^\circ$$

$$- 4 \sin E \sin 22^\circ 30' \sin 54^\circ \ (\mathbf{209});$$

d'où l'on tire (**158**)

$$\sin B = 1 - \cos 108^\circ - \cos 9^\circ - \sin 9^\circ$$

$$- 2 \sin E (\cos 31^\circ 30' - \cos 76^\circ 30');$$

et par conséquent (**156**)

$$(11) \quad \sin B = 1 + \sin 18^\circ - \cos 9^\circ - \sin 9^\circ$$

$$- \sin (E + 31^\circ 30') - \sin (E - 31^\circ 30')$$

$$+ \sin (E + 76^\circ 30') + \sin (E - 76^\circ 30').$$

228. L'équation (**11**) aura aussi des limites de deux côtés ; car la distance la plus petite $eF = 1 - \sqrt{(2-\sqrt{2})}$ est moindre que celle $bf = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, et la plus grande ef est plus grande que bF.

229. Si l'on multiplie par $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4\sqrt{2}}$ l'équation

$$2 \sin B (\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4 \sin E \sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

que l'on a trouvée plus haut (**227**), on aura

$$\sin E = 2\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$

$$-4\sin B\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sin 54^\circ\ \sin 67^\circ 30'\ \sin 45^\circ - \sin 67^\circ 30'$$

$$-4\sin B\ \sin 18^\circ\ \sin 67^\circ 30'\ \sin 45^\circ$$

$$= \sin 67^\circ 30'\,(\cos 9^\circ + \sin 9^\circ) - \sin 67^\circ 30'$$

$$-2\sin B\,\sin 67^\circ 30'\,(\cos 27^\circ - \sin 27^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 76^\circ 30' - \cos 76^\circ 30'$$

$$+\sin 58^\circ 30' + \cos 58^\circ 30')$$

$$-\sin 67^\circ 30' - \sin B\,(\sin 85^\circ 30'$$

$$+\sin 40^\circ 30' - \cos 40^\circ 30' - \cos 85^\circ 30');$$

d'où on a enfin

$$(12)\ \sin E = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\sin 76^\circ 30' - \cos 76^\circ 30'\\ +\sin 58^\circ 30' + \cos 58^\circ 30'\end{array}\right\} - \sin 67^\circ 30',$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\cos(85^\circ 30'-B) + \sin(85^\circ 30'-B)\\ -\cos(85^\circ 30'+B) - \sin(85^\circ 30'+B)\\ +\cos(40^\circ 30'-B) + \sin(40^\circ 30'-B)\\ -\cos(40^\circ 30'+B) - \sin(40^\circ 30'+B)\end{array}\right\},$$

équation qui n'a pas de limites.

230. Si par hasard quelqu'une des valeurs qu'on trouve avec ces douze équations est au premier abord très approchante de quelque valeur utile et cherchée dans la solution des problèmes, on aura l'avantage de parvenir au même but par un moyen très simple; car on n'aura à employer d'autres points pris hors de la circonférence que les trois seuls points *a*, *b* et *e* que l'on a déjà remarqués tant de fois, et dans la circonférence quelqu'un de ceux qui servent à la division exacte de la circonférence par le moyen des solutions des problèmes du livre second. Nous allons actuellement donner quelques exemples.

231. Nous verrons d'abord comment on peut diviser le cercle à l'ancienne manière en degrés et minutes, sans erreur d'une seconde. Pour cela, nous supposerons que la circonférence du cercle BD*d* (*fig.* 12) est divisée en deux cent quarante parties (57, 58), dont chacune, comme Pδ, contient $1°30'$, que l'on commence à compter les quantités positives de B vers F, et de même les quantités négatives de B vers *f*, et que les points Z et Z′ sont des points vagues soumis pour le moment à la seule condition de se trouver, savoir : les points Z et Z′ entre B et F sur la circonférence, et les points *z* et *z*′ entre les points B et *f*. Nous en agissons ainsi pour éviter le trop grand nombre de figures dont on aurait besoin si l'on en répétait une pour chaque problème. D'ailleurs, la petitesse des divisions les laisserait à peine apercevoir même dans une figure beaucoup plus grande que la figure 12.

PROBLÈME.

232. *Trouver* (fig. 12) *l'arc d'un degré de l'ancienne division, ou de* 1° *sans erreur d'une demi-seconde.*

I^re Solution. Soit l'arc $Bz = -55°30'$ (**231**). Prenez avec le compas la distance bz, et du point e comme centre décrivez un arc qui coupe la circonférence en un point Z; on aura l'arc $BZ = 52°59\frac{1739}{1751}$, c'est-à-dire de 53° sans qu'il y manque vingt-cinq tierces. On a ensuite dans les divisions de B vers F exécutées par le problème du n° **42**, l'arc de $54° = \frac{18}{120}$. On aura donc aussi l'arc $54° - 53° = 1°$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation (**12**) on fait $B = -55°30'$, on trouve à la fin du calcul $\sin E = 0,7986343 = \sin 52°59'\frac{1739}{1751}$.

II^e Solution. Soit l'arc $BZ = 10°30'$; du centre a et avec la distance bZ prise pour rayon décrivez un arc qui coupe la circonférence en un autre point Z'; on aura l'arc BZ' $= 29° 29' \frac{2511}{2532}$, c'est-à-dire $= 29° 30'$, sans erreur d'une demi-seconde. On trouve ensuite dans les divisions du cercle faites au n° 58 l'arc de $28° 30' = \frac{19}{240}$ de la circonférence. Donc on aura la différence des deux arcs égale à 1° avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation (7) on fait $B = 10° 30'$, on trouvera à la fin du calcul

$$\sin A = 0,4924215 = \sin 29° 29' \frac{2511}{2532}:$$

donc les arcs ne différeront pas de 29‴ de la valeur d'un degré.

233. Cette seconde solution est moins approchée que la première de 5‴, mais les sections des arcs s'y font sous un angle qui diffère moins de l'angle droit.

234. Puisqu'on a l'arc de 1° 30′ (225), et qu'on a trouvé (226) l'arc de 1°, on aura aussi en soustrayant l'un de l'autre l'arc de 30′, ou le demi-degré, et par conséquent on aura la manière de diviser toute la circonférence en demi-degrés sans accumulation d'erreurs, et sans qu'aucun point soit éloigné d'une demi-seconde de sa véritable situation.

PROBLÈME

235. *Trouver l'arc d'un quart de degré ou de $15'$, sans erreur d'une tierce.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -12°$, la distance ez sera égale à la corde de $87° 15'$; d'un rayon égal à cette distance prise avec le compas et du point B comme centre, coupez l'arc BF en un point Z'; on aura l'arc $BZ' = 87° 15'$. On a de plus, par les divisions du cercle faites au nº **42**, l'arc de $87° = \frac{29}{120}$ de la circonférence. On aura donc la différence de ces deux arcs $= 15'$.

Démonstration. Si dans l'équation (3) (**206**)

$$\cos E' = \sin 45° - \sin 30° + \cos(E - 22° 30') \\ - \cos(E + 22° 30'),$$

on fait $E = -12°$, on aura

$$\begin{aligned} \sin 45° - \sin 30° &= 0{,}2071068 \\ \cos -34° 30' &= 0{,}8241262 \\ -\cos 10° 30' &= -1{,}0167451 \\ \hline \cos E' &= 0{,}0479781. \end{aligned}$$

Or dans les tables qui donnent les sinus naturels avec sept chiffres, on trouve 0,0479781 $=\cos 87^\circ 15'$, sans aucune différence même dans le dernier chiffre. En employant ensuite plus de décimales, on trouve

$$\cos E' = 0,0479780622,$$
$$\cos 87^\circ 15' = 0,0479781285 20;$$

et ne prenant que huit décimales, on a

$$\cos 87^\circ 15' 1'' = 0,04797229.$$

On a donc pour $1''$ la différence 584. Or si 584 donne $60'''$ de différence, 7 donnera $\frac{105}{146}$ de tierce. On aura donc l'arc E', qui a pour corde la distance eZ', $= 87^\circ 15'$ avec une erreur plus petite que $1'''$.

236. On pourra, par le moyen de ce problème, diviser la circonférence en 1440 parties, c'est-à-dire en 1440 quarts de degrés, sans qu'il y ait en aucun point de division une erreur de trois tierces; car si l'on fait sur chaque arc $P\delta$ de $1^\circ 30'$, trois divisions de 15 en $15'$ de P vers δ et deux de δ vers P, l'arc $P\delta$ se trouvera divisé en six parties, dont chacune sera d'un quart de degré, sans qu'il y ait erreur de $1'''$ dans la position d'aucun point de division ; il en sera de même pour le reste de la circonférence. D'après cela, nous supposerons dorénavant la circonférence divisée en degrés et quarts de degrés, en les considérant comme exacts, afin de simplifier le calcul. On pourra, quand on voudra, tenir compte des erreurs.

PROBLÈME.

237. *Trouver un arc de* $10'$ *ou la sixième partie d'un degré, sans erreur de* $10'''$ *ou de la sixième partie d'une seconde.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -49°30'$; la distance bz sera égale à la corde de l'arc de $38°50'$, sans erreur de $10'''$; puis soustrayant l'arc de $38°50'$ de celui de $39° = \frac{13}{120}$ de la circonférence qu'on a par le n° **42**, on aura l'arc de $10'$.

Démonstration. Si dans l'équation (**2**) on fait $B = -49°30'$, elle deviendra

$$\cos B' = 0{,}7789738 = \cos 38°49'\frac{1819}{1824};$$

on a donc $B' = 38°50'$ à moins de $9'''$ près.

238. Soustrayant d'un arc de $50'$ auquel manquent $9'''$ un arc de $45'$ (**236**) auquel il manque quelques tierces, on aura l'arc de $5'$

ou la douzième partie d'un degré, sans qu'il y ait une erreur de $9'''$.

PROBLÈME.

239. *Trouver l'arc de 6′ ou un dixième de degré, sans erreur de 13‴.*

Solution. Soit l'arc $Bz = 45°$, c'est-à-dire soit l'arc BG; du point *b* comme centre et avec la distance BG prise pour rayon soit décrit un arc qui coupe la circonférence en *z*; on aura, sans erreur de $13'''$, l'arc $Bz = -40° \, 6'$.
et soustrayant (**236**) l'arc de... $-40°$

on aura pour reste l'arc de.... $6'$.

Démonstration. Si dans l'équation (**5**) on fait $B' = 45°$, elle deviendra

$$\sin B = -0{,}6441228 = \sin -40° \, 5' \tfrac{2217}{2225}.$$

On aura donc l'arc $B = Bz = -40° \, 6'$, à moins de $12'''$ près.

240. Soustrayant de l'arc de 6′ (**239**) l'arc de 5′ (**238**), l'arc restant sera de 1′ avec une erreur de quelques tierces. Mais on peut trouver immédiatement cet arc par le problème suivant.

PROBLÈME.

241. *Trouver immédiatement l'arc de* $1'$, *sans erreur de* $22'''$.

Solution. Soit l'arc $Bz = -27°$; du point e comme centre et avec un rayon égal à la distance bz, prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z. On aura l'arc $BZ = 29°59'$ avec un excès de $10'''$: donc l'arc BN étant de $30°$ (31), l'arc ZN sera de $1'$ avec $10'''$ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation (12) on fait $B = -27°$, on aura

$$\sin E = 0{,}4997496 = \sin 29°59' \frac{15}{2519} :$$

donc, etc.

PROBLÈME.

242. *Trouver l'arc de* $9'$, *sans qu'il y ait erreur de* $7'''$.

Solution. Du point e comme centre avec la distance bK prise pour rayon soit décrit un arc qui coupe la circonférence en z; on aura l'arc $Bz = -4^\circ 21'$ avec un excédant de $6'''$, lequel, soustrait de $-4^\circ 30'$, donne pour reste $9'$, sans erreur de $7'''$.

Démonstration. Si dans l'équation (12) on fait $B = 15^\circ = BK$ (32), on aura

$$\sin E = -0{,}0758494 = \sin - 4^\circ 21' \frac{5}{2901}:$$

donc l'arc $Bz = -4^\circ 21' 0'' 6'''$.

Ce problème servira encore à la nouvelle division du cercle, ainsi que nous le verrons ci-après (256).

243. L'arc de $15'$ manquant de moins de $1'''$ (235),
celui de $10'$ excédant de moins de $10'''$ (237),
celui de $6'$ manquant de moins de $13'''$ (239),
celui de $1'$. . . . . de moins de $22'''$ (241),
et celui de $9'$. . . . . . de moins de $7'''$ (242),
on pourra les combiner par addition ou soustraction, sans accumuler beaucoup les erreurs, de manière qu'à la fin toute la circonférence se trouve divisée en degrés et minutes, sans autre erreur que de très peu de tierces. En effet, en doublant, par exemple, l'arc de $9'$, on aura un arc de $18'$ à moins de $14'''$ près; et soustrayant de cet arc celui de $6'$ approché à moins de $13'''$, on aura l'arc de $12'$ à moins

d'environ $1'''$. Soustrayant maintenant cet arc de celui de $15'$ approché à moins d'une tierce (**235**), on aura l'arc de $3'$ avec à peine une erreur d'une tierce. Par ce moyen on pourra diviser en cinq parties chaque arc de $15'$, et toute la circonférence se trouvera divisée de trois en trois minutes avec une erreur moindre de six tierces sur cette dernière division; erreur qui deviendra encore moindre, si on la porte en sens contraire de celle de trois tierces au plus qu'on commet dans la division de $15'$ en $15'$ (**235**). Puis employant l'arc de $1'$ qui a $4'''$ de moins (**240**) à diviser chaque arc de $3'$, on ne commettra plus une erreur de $10'''$, et l'on aura divisé la circonférence en degrés et minutes.

On pourrait aussi combiner ces arcs ou d'autres tirés des douze équations précédentes, de manière que l'on parvînt à commettre de moindres erreurs, et nous emploierions pour cela quelques problèmes, si d'un côté la division du cercle en $360°$ ne devait pas avec le temps cesser d'être employée, et si d'ailleurs nous croyions que les artistes qui voudraient continuer à s'en servir trouvassent ces recherches avantageuses pour la pratique. Nous ne croyons pourtant pas devoir omettre les problèmes suivans, dans la solution desquels nous supposerons que le cercle entier est divisé en anciens degrés et minutes que, pour la simplicité du calcul, nous considérerons comme exacts.

PROBLÈME.

244. *Trouver l'arc de 20″ ou un tiers de minute, qui ait à peine 1‴ de trop.*

I^re Solution. On trouve (**201**) l'arc de 40″ avec moins d'une tierce de trop; donc aussi l'arc de 20″, complément d'une minute, n'a pas tout-à-fait 1‴ de moins.

II^e Solution. Du point *e* comme centre et avec un rayon égal à la corde de l'arc de 61°30′ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z; on aura l'arc $BZ = 20° 39' 40''$ avec à peine une tierce de trop; puis soustrayant cet arc de celui de 20°40′, l'arc restant sera de 20″ avec à peine 1‴ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation (**6**) on fait $E' = 61°30'$, en employant de plus grandes tables de sinus, on aura

$$\sin BZ = \sin E = 0{,}35283991\,;$$

on a ensuite

$$\sin 20^\circ 39' 40'' = 0{,}35283984.$$

Or

$$\log 0{,}35283 99 = 9{,}5475777$$
$$\log \sin 20^\circ 39' 40'' = 9{,}5475776$$
$$\log \sin 20^\circ 39' 50'' = 9{,}5476334$$
$$\text{différence} = \quad 558.$$

Donc E surpassera l'arc $20^\circ 39' 40''$ de $\frac{10}{558}$ environ, c'est-à-dire de $1'''$ et un peu plus.

PROBLÈME.

245. *Trouver l'arc de 15″ ou un quart de minute à moins de 10‴ près, ou environ.*

Solution. Du point *e* comme centre avec un rayon égal à la corde de $31^\circ 30'$ prise avec le compas soit coupée la circonférence en un point Z; on aura l'arc $BZ = 57^\circ 30' 15''$ à $9'''$ de moins près.

Démonstration. Si dans l'équation (6) on fait $E' = 31^\circ 30'$, on trouvera $E = 57^\circ 30' \frac{386}{1563}$; mais on a $\frac{390}{1563} = \frac{1}{4}$: donc ce qui lui manque est de $\frac{4}{1563}$ environ, c'est-à-dire d'environ $10'''$.

PROBLÈME.

246. *Trouver l'arc de* $12''$ *ou un cinquième de minute, à* $1'''$ *de moins près, ou environ.*

Solution. Soit B$z = - 10° 30'$; du point a comme centre et d'un rayon égal à la distance bz prise avec le compas soit coupée la circonférence en Z; on aura l'arc BZ $= 40° 40' 12''$ avec environ $1'''$ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation (7) on fait $B = - 10° 30'$, on trouvera par le calcul $A = 40° 40' \frac{440}{2206}$. Or on a $\frac{441}{2206} = \frac{1}{5}$: on a donc en moins une erreur de $\frac{1}{2206}$, c'est-à-dire de $1'''$ environ.

Si l'on avait fait le calcul avec de plus grandes tables, on aurait relevé l'erreur avec plus de précision.

PROBLÈME.

247. *Trouver l'arc de* $10''$ *ou un sixième de minute qui surpasse d'environ* $1'''$.

Solution. Soit l'arc B$z = - 24°$. Du point a

comme centre et d'un rayon égal à la distance ez prise avec le compas soit décrit un arc qui coupe la circonférence en Z; on aura l'arc $BZ = 16°15'10''$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = -24°$, on trouvera pour résultat

$$\log \sin A = 9,4469652.$$

Ce logarithme se trouve être celui du sinus de $16°15'10''\frac{20}{722}$: donc l'excès ne va pas à deux tierces.

PROBLÈME.

248. *Trouver l'arc de 5'' ou d'un douzième de minute avec une erreur inappréciable par les tables ordinaires et moindre que 2'''.*

I^re Solution. Soit l'arc $BZ = 4°30'$; du point a comme centre avec un rayon égal à la distance eZ prise avec le compas, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en un autre point Z'; on aura l'arc $BZ' = 32°51'5''$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = 4°30'$, on aura pour résultat

$$\log \sin A = 9{,}7343692\,;$$

or

$$\log \sin 32^\circ 51' = 9{,}7343529,$$

et la différence est 163; de plus, dans les tables, la différence pour dix minutes est 326, c'est-à-dire précisément double de 163 : donc, etc.

En calculant l'erreur avec de grandes tables, on la trouve moindre que $2'''$.

IIe Solution. Soit l'arc $BZ = 31^\circ 30'$. Du centre a avec un rayon égal à la distance eZ prise avec le compas soit coupée la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 51^\circ 30' 55''$ trop petit de moins d'une tierce.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = 31^\circ 30'$, on trouvera par le moyen des tables ordinaires

$$\log \sin A = 9{,}8936365 = \log \sin 51^\circ 30' 50'' \tfrac{84}{167};$$

laquelle fraction $\frac{84}{167}$ se comparant à $10''$, donnera $5''$ avec un excès moindre de $1'''$. On aura donc $A = 51^\circ 30' 55''$, lequel arc soustrait de $51^\circ 31'$ donnera $5''$ avec l'approximation demandée.

Mais il est temps de passer à la démonstration de l'usage qu'on peut faire des douze équations précédentes quand on veut diviser la circonférence du cercle suivant la nouvelle manière des Français.

249. Suivant cette manière, la circonférence se trouve divisée en 400 degrés, afin que le quart de cercle, qui est le fondement de toute la Trigonométrie, soit par là divisé en 100. Chaque degré est divisé en 100 minutes, chaque minute en 100 secondes, et ainsi de suite. On peut, si l'on veut, se dispenser de dénommer les degrés, minutes ou secondes, la position des décimales faisant assez connaître la nature de ces fractions.

250. Par conséquent on voit que 9 degrés anciens valent 10 degrés nouveaux, ou bien que $9^\circ = 0{,}10$; que $54' = 0{,}01$; que $27' = 0{,}005$; que $5'24'' = 0{,}001$; que $32''24''' = 0{,}0001$; c'est-à-dire qu'un degré nouveau vaut 54 minutes anciennes, qu'une minute nouvelle vaut $32''24'''$ de l'ancienne division, etc.

251. Les divisions obtenues exactement par le moyen des trois points *a*, *b* et *e* dans le second livre donnent jusqu'à la 240^e partie de la circonférence (**59**). L'arc qui forme cette partie est exactement de $1^\circ 32'$ de l'ancienne division. Il ne s'exprime pas également avec un nombre fini de décimales dans la division moderne; le premier arc, formé par l'assemblage de plusieurs 20[es] qu'on exprime avec un nombre fini de décimales du quart de cercle, est celui de $\frac{3}{240}$ ou de $\frac{1}{80}$ de la circonférence, lequel est de $4^\circ 30' = 0,05$ du quart de cercle, c'est-à-dire de 5 degrés de la nouvelle division. On peut donc avec les méthodes du livre second et par le moyen des trois seuls points a, b et e pris hors de la circonférence, la diviser en deux parties égales, chacune de cinq degrés modernes, et cela avec la précision géométrique, ce qui est un des avantages de cette Géométrie.

252. On pourrait, si l'on voulait, par la division des arcs en deux parties égales (**60**), diviser ensuite la circonférence en arcs de deux degrés et demi chacun ou de 0,025, et continuer ainsi cette division; mais il est clair que par ce moyen on ne pourra pas avoir un degré avec précision. Il ne reste donc d'autre moyen à la Géométrie pour obtenir l'arc d'un degré (**63**), que celui de chercher quelque construction qui le donne au moins par approximation.

PROBLÈME.

253. *Trouver l'arc d'un nouveau degré, ou de 0,01, sans qu'il excède d'un sixième de seconde de la nouvelle division ou de $3'''$ de l'ancienne.*

Solution. Prenez avec le compas la corde de 138° de l'ancienne division, ou de quarante-six vingtièmes de la circonférence (42), et du point a comme centre décrivez un arc qui coupe le quart de cercle Bf en un point z; l'arc Bz sera de 11 degrés de la nouvelle division; d'où soustrayant l'arc de $9° = 0,10$ (252), on aura pour reste un arc $= 0,01$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si, dans l'équation (4), on fait $A' = 183°$, on aura

$$\sin A = \frac{1}{2}(\sin 45° + \sin 183° + \sin - 93)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 45° - \sin 3° - \sin 87°).$$

On a ensuite

$$\begin{array}{rr} -\sin 5^\circ = & -0,0523360 \\ -\sin 87^\circ = & -0,9986295 \\ \sin 45^\circ = & 1,2928932 \\ \hline & -0,3438587 \\ & -0,1719293. \end{array}$$

On a de plus

$$\sin 9^\circ 54' = 0,1719291$$
$$\sin 9^\circ 55' = 0,1722156.$$

Donc l'arc $Bz = A = 9^\circ 54'$, avec le seul excès de $\frac{2}{2865}$ d'une minute de l'ancienne division, c'est-à-dire sans qu'il y ait un excédant de $4'''$, et par conséquent sans qu'il y ait erreur d'une seconde de la nouvelle division.

254. On pourrait, avec des tables un peu plus étendues que celles ordinaires, rechercher cette erreur avec plus de précision. Dans tous les cas, elle est si petite, qu'en l'accumulant encore deux ou trois fois, elle ne serait pourtant pas sensible dans les plus grands quarts de cercle. Or, dans leurs divisions, on n'a pas besoin de l'accumuler plus de deux fois; car on a déjà, avec la précision géométrique, l'arc de 0,05 (251). Si sur cet arc on trace deux divisions d'un degré en commençant des deux extrémités et allant en sens contraire, on aura marqué sur cet arc quatre points qui en donneront la division en cinq degrés, et chacun de ces points ne sera pas éloigné de sa véritable position de six tierces entières de l'ancienne division, ou d'un tiers de seconde de la nouvelle.

255. D'après ce problème, on supposera maintenant la circonférence divisée en 400 degrés de la nouvelle division.

PROBLÈME.

256. *Trouver l'arc d'un nouveau demi-degré, sans qu'il y ait excès de six tierces de l'ancienne division ou d'un tiers de seconde de la nouvelle.*

Solution. Prenez avec le compas la distance du point b au point K, et du point e comme centre avec ce rayon bK, décrivez un arc qui coupe la circonférence en un point z; vous aurez l'arc Bz $= - 4^\circ 21'$, avec un excès moindre que $7'''$; soustrayez-en un arc de $3^\circ =$ Np (43), il viendra pour reste $1^\circ 21'$, c'est-à-dire un degré et demi de la nouvelle division : alors de tous les points des degrés

(225) pris pour centre et d'un rayon égal à la corde de cet arc, on pourra diviser tous ces mêmes degrés en deux parties égales.

Démonstration. Si dans l'équation (12) on fait $B = BK = 15°$ (32), on aura $E = - 4° 21' \frac{5}{2901}$; donc, etc. (242).

PROBLÈME.

257. *Trouver l'arc d'un cinquième de degré de la nouvelle division, sans qu'il y ait excès d'une seconde ancienne.*

Solution. Du point e comme centre avec un rayon égal à la corde de 51° prise avec le compas décrivez un arc qui coupe le quart de cercle en Z; l'arc BZ sera de trente-sept degrés nouveaux plus un cinquième de degré, avec la précision demandée.

Démonstration. Si dans l'équation (6) on fait $E' = 51°$, on aura

$$E = 33°28' \frac{1968}{2426} = 33°28'48'' \frac{1632}{2426}.$$

Mais $33°28'48'' = 0,372$; donc, etc.

PROBLÈME.

258. *Trouver l'arc de quatre dixièmes d'un nouveau degré, sans qu'il y ait excès de* $16'''$ *anciennes.*

Solution. Soit l'arc $BZ = 76^\circ 30'$; puis du point a comme centre et d'une ouverture de compas $= bZ'$ prise pour rayon décrivez un arc qui coupe le quart de cercle en un point Z'; on aura l'arc $BZ' = 0{,}094$, c'est-à-dire de neuf nouveaux degrés et quatre dixièmes avec l'excès indiqué.

Démonstration. Si dans l'équation (7) on fait $B = 76^\circ 30'$, elle deviendra $A = 8^\circ 27' \frac{1738}{2877}$. Mais $8^\circ 27' \frac{1726}{2877} = 0{,}094$; donc, etc.

PROBLÈME.

259. *Diviser un degré de la nouvelle division en dix parties égales.*

Solution. Après avoir divisé cet arc en deux parties égales (**256**), ôtez de l'arc de $0{,}005$ les arcs de 0,004 (**258**) et de 0,002 (**257**), et l'on aura les arcs de 0,001 et de 0,003, avec une erreur de quelques tierces de l'ancienne division seulement : on aura donc tous les arcs par la division de l'arc de 0,005 en cinq parties; et divisant ensuite de la même manière l'autre moitié de l'arc, il sera divisé en dix parties égales.

260. On pourra soustraire et ajouter ces arcs, de manière que, balançant les erreurs en plus et en moins, on obtienne exactement la millième partie d'un nouveau degré : on pourra donc par la suite supposer le quart de cercle divisé en millièmes ou de dix en dix nouvelles minutes. On les considérera comme exacts pour la simplicité du calcul.

PROBLÈME.

261. *Trouver l'arc d'une nouvelle minute, sans erreur d'une tierce ancienne.*

Solution. Soit un arc $Bz = -1°\,30'$; la distance az sera corde d'un arc de 1,3609, sans erreur d'une tierce ancienne. Soustrayant cet arc de celui de 1,361 (**260**), on aura l'arc de 0,0001.

Démonstration. Si dans l'équation (1) on fait $A = -1°3'$, elle devient

$$A' = 122°28'\frac{2111}{2454} = 122°28'51''36'''$$
$$= 1,3609 \ (250):$$

donc, etc.

PROBLÈME.

262. *Trouver l'arc de deux nouvelles minutes, sans erreur d'une tierce ancienne.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -48°$; la distance bz sera corde d'un arc de 0,4422 avec la précision demandée. Soustrayant de cet arc celui de 0,442 (**260**), l'arc restant sera de 0,0002.

Démonstration. Si dans l'équation (2) on fait $B = -48°$, elle devient

$$B = 39°47'\frac{1639}{1862} = 39°0'52''48'''$$
$$= 0,4422 \ (250):$$

donc, etc.

PROBLÈME.

263. *Trouver l'arc de trois nouvelles minutes, sans erreur d'une nouvelle tierce.*

Solution. Soit un arc $Bz = -78°$; du

point a comme centre avec la distance ez prise pour rayon soit décrit un arc qui coupe le quart de cercle Bf en un point z'; on aura l'arc Bz' = — 0,0187 avec la précision demandée ; et soustrayant celui-ci de l'arc = — 0,019 (**260**), on aura l'arc restant = — 0,0003.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait E = — 78°, le sinus de A devient négatif; en changeant les signes dans les deux membres de l'équation , on a log sin A = 8,4678991. Or dans les nouvelles tables de *Callet* pour la nouvelle division du cercle, on trouve

$$8.4678990 = \log \sin 0{,}0187\,;$$

puis de log sin A=8,4678991
soustrayant DS=6,1960574 (*V*. Callet),

on aura 2,2718417 = log 187,00004.

On a donc A = — 0,018700004; l'erreur se trouve encore moins forte, si l'on emploie plus de chiffres dans les logarithmes.

264. On a pour la position du point dans les trois problèmes précédens, et spécialement dans le dernier, une telle approximation, qu'on n'en peut pas désirer une plus grande.

Au moyen des arcs trouvés par ces problèmes, on peut diviser de plusieurs manières un millième du quart de cercle (260) en deux parties égales, c'est-à-dire en minutes de la nouvelle division du cercle.

265. On pourrait de même obtenir des divisions plus petites, mais il faudrait employer des tables plus grandes que celles dont je me suis généralement servi dans les calculs des douze équations précédentes. On pourrait aussi, si l'on en avait besoin, étendre la division de la circonférence au delà des minutes du nouveau système français.

PROBLÈME.

266. *Dans un cercle d'un rayon donné* AB, *trouver une corde* Bb *qui approche d'être égale au quart de la circonférence.*

Solution. Faites (*fig.* 101) sur la circonférence à $AB = BC = CD = DE$; puis à $BD = Ba = Ea$; du point C pris pour centre et du rayon Ca décrivez un arc qui coupe la circonférence en b; Bb sera la corde cherchée.

Démonstration. AB étant supposée $= 1$, si l'on fait $BC = A = 60°$ dans l'équation (1), on aura

$$A' = 43°33' \frac{286}{2005} = Cb:$$

donc l'arc BCb sera de $103°33' \frac{286}{2005}$; sa moitié, qui est de $51°46' \frac{1145}{2005}$, a pour sinus 0,7855998; donc la corde Bb aura pour valeur 1,5711996. Le quart de la circonférence étant ensuite égal à 1,5707963, l'erreur ne sera donc que de 0,0004 environ.

267. Suivant le rapport d'Archimède, en supposant le rayon = 1, on trouve pour le quart de la circonférence $\frac{11}{7} = 1,5714$: donc la construction du problème ci-dessus (**266**) donne une plus grande approximation. Cette construction étant d'ailleurs très simple, il sera plus commode de l'employer dans la pratique que les autres que nous pourrions bien donner aussi; mais, quoique susceptibles de donner dans la théorie un plus grand degré d'approximation, elles seraient plus compliquées, et par conséquent plus sujettes à erreur.

PROBLÈME.

268. *Dans un cercle d'un rayon donné* AB, *trouver l'arc qui approche le plus d'être égal au rayon.*

Solution. Faites sur la circonférence BLCMFDOEd (*fig.* 102) à AB $=$ BC $=$ CD $=$ DE $=$ Ed ; à BD $=$ Ba $=$ Ea ; à Aa $=$ BF $=$ Db $=$ db $=$ aL ; à AB $=$ FO, et enfin à bF $=$ OM ; l'arc LM sera celui qui approchera le plus d'être égal au rayon.

Démonstration. Si dans l'équation (4) on fait $A' = 90°$, cet arc ayant pour corde aL, on aura

$$BL = A = 20°42' \frac{786}{2721}.$$

Comme on a de plus OM $=$ bF corde de la cinquième partie de la circonférence (40), ou de 72°, et l'arc FG $=$ 60°; on aura l'arc Fm $=$ 12°, et par conséquent

$$\text{l'arc } LM = BF - BL - FM = 57°17' \frac{1935}{2721}$$
$$= 57°17'43'' + \ldots ;$$

on aura donc pour l'arc égal au rayon 57°17'44'', comme on le sait déjà ; donc, etc.

PROBLÈME.

269. *Trouver le côté d'un carré qui approche le plus d'être égal en surface à un cercle d'un rayon donné* AB.

Solution. Faites sur la circonférence BPCQDRE (*fig.* 103), à $AB = BC = CD = DE$; du même rayon BA et des centres B et E décrivez les deux arcs ALc, AMd; des centres C et D et du rayon DB décrivez les arcs cNM, dNL; faites à $AN = BP = PQ$, puis à $LM = QR$; BR sera le côté cherché.

Démonstration. Si dans le triangle isoscèle CND on suppose la base $CD = 1$, divisée en μ en deux parties égales, on aura

$$(CN)^2 = (C\mu)^2 + (N\mu)^2,$$

ou

$$(2) = 3 = \frac{1}{4} + (N\mu)^2:$$

donc

$$N\mu = \frac{1}{2}\sqrt{11};$$

ensuite on a $(Ca)^2 = (C\mu)^2 + (A\mu)^2$, et par conséquent $A\mu = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Donc on aura

$$AN = \frac{1}{2}(\sqrt{19} - \sqrt{2}) = 0,7922869$$

valeur qui se trouve être celle de la corde de l'arc de $46°40' \frac{1272}{2671} = BP = PQ$: donc l'arc BQ sera de $93°20' \frac{2544}{2671}$. Tirez les droites BL divisées par le milieu au point n, BD, Dn, BE, et les perpendiculaires Dδ, Ll, Mm perpendiculaires à la même ligne BE aux points δ, l et m. L'angle DBE étant égal à 30° (20, *liv.* 3), on aura

$$\sin DBE = \frac{1}{2};\ \cos DBE = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

On a ensuite, suivant les propositions de la Trigonométrie,

$$\cos DBn = \frac{Bn}{DB};$$

$$\sin DBn = \frac{Dn}{DB} \text{ ou } \cos DBn = \frac{1}{6}\sqrt{3};$$

et comme l'on a

$$Dn = \sqrt{[(DB)^2 - (Bn)^2]} = \frac{1}{2}\sqrt{11},$$

on aura

$$\sin DBn = \frac{1}{6}\sqrt{33}.$$

On a ensuite (154)

$$\cos LBl = 6(DBn - DBE) = \cos DBn \cos DBE + \sin DBn \sin DBE = \frac{1}{12}(3 + \sqrt{33}) = \frac{Bl}{BL} = Bl$$

(BL étant égal à BA $=1$); donc

$$Al = AB - Bl = \frac{1}{12}(9 - \sqrt{33}),$$

et par conséquent

$$lm = LM = 2Al = \frac{1}{6}(9 - \sqrt{33}) = 0,5425729,$$

valeur qui est celle de la corde de $31°28' \frac{1518}{2799}$ $=$ QR : donc l'arc BQR sera de $124°49' \frac{6370}{7476}$; sa moitié $62°24' \frac{6923}{7476}$ a pour sinus $0,8863283$, et par conséquent on aura la corde de BQR $= 1,7726566$. Or en faisant le rayon $= 1$, on a la surface du cercle $= 3,1415926$, qui a pour logarithme $0,4971499$. La moitié de ce logarithme, c'est-à-dire $0,2485749$ $= \log \sqrt{3,1415926}$, se trouve être $\log 1,772453$. On n'a donc qu'une erreur de $0,002$ environ; ce qui donne une approximation suffisante.

270. Au lieu de AN, on aurait pu employer les lignes dL ou cM, qu'on doit trouver égales à cette ligne AN.

Démonstration. Menez les droites dL et Dp au point p milieu de AN, on aura

$$\sin LDp = \frac{Lp}{DL}.$$

Mais l'angle $\mathrm{LD}p = \frac{1}{2}\mathrm{LD}d = \frac{1}{2}(\mathrm{BD}d - \mathrm{BDL})$ $= 30° - \mathrm{BD}n$: donc (154)

$$\sin \mathrm{LD}p = \frac{1}{2}\cos \mathrm{BD}n - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin \mathrm{BD}n$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{33} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{3};$$

d'où

$$\mathrm{L}p = \mathrm{DL}\sin \mathrm{LD}p = \frac{1}{4}\sqrt{11} - \frac{1}{4}\sqrt{3},$$

et

$$\mathrm{L}d = \frac{1}{2}\sqrt{11} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \mathrm{AN}.$$

PROBLÈME.

271. *Étant donné le côté* AB *d'un carré* (fig. 104), *trouver le rayon d'un cercle qui approche de lui être égal en surface.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB décrivez la circonférence BCFDLPMEd; faites à AB = BC = CD = DE = Ed; du centre B et avec le rayon BD décrivez l'arc dnNDa; du centre E et avec le même rayon coupez cet arc en a; faites à Aa = BF = Db = db et à AB = Dn = dN; du centre C et avec le rayon CN coupez la circonférence en P; faites à $Nn = PM$ et à $FB = CL$; on aura LM pour le côté cherché.

Démonstration. Si l'on fait $AB = 1$, le triangle BNd ayant les côtés respectivement égaux à ceux du triangle BDL de la fig. 103, on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} dBN = \tfrac{1}{6} \sqrt{3}; \cos \tfrac{1}{2} dBN = \tfrac{1}{6} \sqrt{33} \ (270);$$

d'où

$$\sin dBN = 2 \sin \tfrac{1}{2} dBN \cos \tfrac{1}{2} dBN \ (154)$$
$$= \tfrac{1}{6} \sqrt{11}; \cos dBN = \sqrt{(1 - \sin^2 dBN)}$$
$$= \tfrac{5}{6}.$$

De plus, l'angle OBd étant droit (31, *liv.* 3), on aura

$$\cos CBN = \sin dBN = \tfrac{1}{6} \sqrt{11}.$$

Mais on a par la Trigonométrie,

$$(CN)^2 = (BC)^2 + (BN)^2 - 2BC.BN.\cos CBN:$$

donc

$$CN = \sqrt{\left(4 - 2\sqrt{3}.\tfrac{1}{6}\sqrt{11}\right)} = \sqrt{\left(4 - \tfrac{1}{3}\sqrt{33}\right)}$$
$$= 1,4440025,$$

que l'on trouve être la corde de $92°26'\frac{804}{2013}$ $=$ CP; puis on a

$$\sin NBE = \frac{\frac{1}{2}Nn}{BN} = \sin(CBE - CBN)$$
$$= (154) \sin 60° \cos CBN - \cos 60° \sin CBN$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{11} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6};$$

on aura

$$Nn = 2BN \cdot \sin NBE$$
$$= \frac{1}{6}(3\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0{,}2149367,$$

que l'on trouve être la corde de $12°20'\frac{946}{2892}$ $=$ PM. On aura donc l'arc CPM $= 104°46'\frac{4220}{5821}$; d'où soustrayant l'arc CL, qui est un cinquième de la circonférence (40) $= 72°$, il restera l'arc LM $= 32°46'\frac{4220}{5821}$ dont on trouve la corde $=$ 05643274. Or nommant π le rapport de la circonférence au diamètre et R le rayon du cercle, on a, comme on sait, sa surface $= \pi R^2$; faisant donc $\pi R^2 = 1$, qui est la surface du carré du rayon AB $= 1$, auquel on veut que le cercle soit égal, on aura

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi}},$$

et

$$\log R = -\tfrac{1}{2} . \log \pi = -0,2485749$$

$$= -1 + 0,7514251 = \log 0,5641896;$$

l'erreur ne sera donc pas de 0,0002.

PROBLÈME.

272. *Étant donné le rayon* AB *d'une sphère* (fig. 105), *trouver le côté d'un cube dont la solidité approche d'être égale à la moitié de celle de la sphère.*

Solution. Après avoir décrit du centre A avec le rayon AB la circonférence BGCDPEd, faites à AB = BC = CD = DE = Ed; du centre B avec le rayon BD décrivez l'arc aDNd; du centre E et avec le même rayon soit coupé cet arc en a; faites à AB = aG = dN; et à CN = CP; PG sera le côté cherché.

Démonstration. En effet, on aura (271) CN corde de $92° 26' \frac{804}{2013}$. On aura ensuite GC = 15° (32); d'où PG = $107° 26' \frac{804}{2013}$, dont la corde, en faisant AB = 1, se trouve être égale à 1,6122696. Or dans la même hypothèse, et supposant le rapport de la circonférence au diamètre $= \pi$, on a

$$\text{la solidité de la sphère} = \frac{4}{3}\pi,$$

$$\text{et son logarithme} = \log 4 + \log \pi - \log 3 = 0{,}6220886,$$

dont le tiers 0,2073628 se trouve être le logarithme de 1,611991; et par conséquent l'erreur qui en résulte ne va pas à 0,0003.

PROBLÈME.

273. *Étant donné le côté* AB *d'un cube* (fig. 106), *trouver le rayon d'une sphère qui approche de lui être égale en solidité.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB décrivez la circonférence BLCMFDE; faites à $AB = BC = CD = DE$; à $BD = Ba = Ea$; à $Aa = BF$; puis à $Fa = FM$, et à $FA = FL$; LM sera le rayon cherché.

Démonstration. On aura l'arc $FL = 60°$ (15, *liv.* 4). On a ensuite, en faisant $AB = 1$,

$$aF = Aa - AF = \sqrt{2} - 1 \ (27) = 0{,}4142136,$$

que l'on trouve être corde de $23°54'\frac{976}{2846}$. On aura donc l'arc $LM = 36°5'\frac{1870}{2846}$, qui a pour corde 0,6195986. Or la solidité d'une sphère qui a R pour rayon, est, comme on sait, exprimée par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$; si l'on fait $\frac{4}{3}\pi R^3 = 1$, qui est la solidité du cube donné, on aura

$$\log R = \frac{\log 3 - \log 4 - \log \pi}{3}$$
$$= -1 + 0,7936371 = \log 0,6203504;$$

donc l'erreur en moins qui en résulte ne va pas à 0,0008.

274. Comme toutes ces approximations dans la rectification, la quadrature et la cubature de la circonférence du cercle et de la sphère, et dans les problèmes inverses, ne font pas erreur d'une millième partie du rayon, on les regarde comme suffisantes dans la pratique. Quand on voudra pousser plus loin les approximations, il n'y aura autre chose à faire qu'à trouver en degrés et minutes l'arc dont la quantité linéaire que l'on cherche est la corde; puis tirer cette corde dans le cercle, après l'avoir divisé dans le nombre trouvé de degrés et minutes, en employant les méthodes précédemment démontrées (235, 243).

PROBLÈME.

275. *Doubler le cube par approximation.*

Solution. Soit AB le côté du cube qu'on veut doubler (*fig.* 107); après avoir décrit du centre A avec le rayon AB la circonférence BQMNCFPDE*de*, et y avoir fait à $AB = BC = CD = DE$, à $BD = Ba = Ea$, à $Aa = BF$, et à $FA = FN$; aN sera, à très peu de chose près, le côté du cube double.

Démonstration. L'arc BN sera un douzième de la circonférence $(31) = 30°$; si l'on fait cet arc $BN = A$ dans l'équation (1), l'arc A', dont aN est la corde, sera $= 78° 2' \frac{2358}{2846}$. On a donc, en faisant $AB = 1$,

$$aN = 2 \sin 39° 1' \frac{1179}{2846} = 1{,}2592800;$$

on a ensuite

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209.$$

L'erreur en moins qui en résulte n'est donc pas de 0,0007.

IIe Solution. Si l'on voulait une plus grande approximation, après avoir fait la construction de la première solution, et avoir fait en outre à $AB = Ed = dc$, à $Aa = BF = Db = db$, à $aN = cM = MP$, à $Fb = FQ$; PQ sera le côté cherché, avec une approximation plus grande que dans la solution précédente.

Démonstration. Comme, pour la démonstration de la première solution, on a l'arc cM $= 78° 2' \frac{2358}{2846} = MP$, on aura l'arc cMP $= 146° 5' \frac{1870}{2846}$; puis soustrayant l'arc FQ $= 72°$ (40) de l'arc $FBc = 150°$ (27, 29), on aura l'arc restant $cQ = 78°$; en le soustrayant de l'arc cMP, on aura l'arc QP $= 78° 5' \frac{1870}{2846}$, dont la corde se trouve être $= 1,2599190$; l'erreur en moins qui en résulte ne sera donc que de 0,000019, c'est-à-dire à peine de deux millionièmes de rayon.

PROBLÈME.

276. *Tripler, quadrupler, etc., et octupler le cube* (fig. 108).

Solution. Soit AB le côté du cube donné;

du centre A et avec le rayon AB décrivez la circonférence $B\omega G\mu C\varepsilon\nu FLDOEdc$; faites-y à $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$; des centres B, c, d, E, D avec le même rayon AB décrivez les arcs $A\pi c$, Aqd, $c\beta A\delta E$, Apd, $A\tau E$; du centre B avec le même rayon BD décrivez l'arc $d\tau\delta Da$; du centre E et avec le même rayon coupez cet arc en a; des centres C et D et avec le même rayon décrivez les arcs $cpqE$, $B\beta\pi d$, faites à $Aa = BF$; à $AB = FO = aG = GL$, à $EL = a\omega$, à $\pi\tau = B\varepsilon$, à $p\delta = B\mu$, et à $q\tau = \mu\nu$; on aura

$$\left.\begin{array}{l} AO \\ C\beta \\ OG \\ O\omega \\ c\varepsilon \\ c\nu \\ BE \end{array}\right\} \text{pour côté du cube} \left\{\begin{array}{l} \text{double (275),} \\ \text{triple,} \\ \text{quadruple,} \\ \text{quintuple,} \\ \text{sextuple,} \\ \text{septuple,} \\ \text{octuple.} \end{array}\right.$$

Démonstration. Si l'on fait $AB = 1$, on aura (271)

$$C\delta = \sqrt{\left(4 - \tfrac{1}{3}\sqrt{33}\right)} = 1,4422493;$$

on a ensuite $\sqrt[3]{3} = 1,4422493$: donc l'excès n'est pas de 0,002.

L'arc OFG étant de 105° (29, 30), sa corde

OG sera égale à 2 sin $52°32' = 1{,}5867066$. On a de plus $\sqrt[3]{4} = 1{,}5874007$; donc ce qui manque est de 0,0007 environ.

On aura ensuite l'arc $EL = \frac{5}{24}$ de la circonférence (32) $= 75°$; si dans l'équation (4) on fait $A' = 75°$, on a

$$\text{l'arc } A = B\omega = 32°27' \frac{27}{2454};$$

et comme $FO = 60°$ (15, *liv.* 4), on aura

$$\text{l'arc } OF\omega = 117°32' \frac{2427}{2454},$$

qui a pour corde 1,7102744. On a ensuite $\sqrt[3]{5} = 1{,}7099757$; donc l'excès n'est pas de 0,0003.

Puisque $BD = B\tau = D\pi = \sqrt{3}$, et $D\tau = B\pi = 1$, on aura (23)

$$\pi\tau . BD = (BD)^2 - (B\pi)^2, \text{ c.-à-d. } \pi\tau . \sqrt{3} = 2;$$

d'où

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}1547005,$$

que l'on trouve être la corde de $70°31' \frac{1725}{2375}$ $= B\varepsilon$. On aura donc l'arc $cB\varepsilon$ de $130°31' \frac{1725}{2375}$, qui a pour corde 1,8164964. On a ensuite

$\sqrt[3]{6} = 1,8171204$: donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de 0,0007.

Les deux triangles $C\delta p$, $Bp\delta$ ayant les côtés respectivement égaux, seront égaux (8 et 26, *liv.* 1); et comme ils sont sur la même base $p\delta$, les droites $p\delta$, BC seront parallèles entre elles (39, *liv.* 1). On aura donc l'angle $CB\delta = B\delta p$ (27, *liv.* 1).

Donc $\cos CB\delta = \frac{1}{6}\sqrt{11}$ (271) $= \cos B\delta p$.

On a ensuite par la Trigonométrie,

$$(Bp)^2 = (B\delta)^2 + (p\delta)^2 - 2B\delta . p\delta . \cos B\delta p ;$$

et les lignes Bp et $C\delta$ étant égales, puisqu'on les détermine par la même construction, on aura

$$4 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = 3 + (p\delta)^2 - 2p\delta . \sqrt{3} . \frac{1}{6}\sqrt{11} ;$$

d'où

$$1 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = (p\delta)^2 - p\delta . \frac{1}{3}\sqrt{33} :$$

ajoutant dans les deux membres de l'équation le carré de $\frac{1}{6}\sqrt{33}$, on aura

$$\left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{33}\right)^2 = \left(p\delta - \frac{1}{6}\sqrt{33}\right)^2 ;$$

d'où

$$p\delta - \frac{1}{6}\sqrt{33} = \pm\left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{33}\right).$$

On a ensuite (23)

$$p\delta . dE = (dE)^2 - (pd)^2,$$

c'est-à-dire $p\delta = 1 - (pd)^2$, et par conséquent la ligne $p\delta$ est plus petite que l'unité; puis on déterminera $p\delta = \frac{1}{3}\sqrt{33} - 1 = 0{,}9148541$, que l'on trouve être corde de l'arc de $54^\circ\,26'\,\frac{1408}{2588}$. On a ensuite $q\tau$ = LM de la fig. 103 = la corde de l'arc de $31^\circ\,28'\,\frac{2518}{2799}$ (269 ; donc

$$\text{l'arc } cB\mu\nu = 60^\circ + 54^\circ\,26'\,\frac{1408}{2588} + 31^\circ\,28'\,\frac{2518}{2799}$$
$$= 145^\circ\,55'\,\frac{1607}{3622},$$

arc dont on trouve la corde $c\nu = 1{,}9122214$. On a ensuite $\sqrt[3]{7} = 1{,}9129309$; donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de $0{,}000702$; on a enfin $BE = 2 = \sqrt[3]{8}$: donc, etc.

PROBLÈME.

277. *Sous-doubler le cube par approximation* (fig. 108).

Solution. Soit AB le côté du cube donné; du centre A avec le rayon AB décrivez la circonférence BCDEd, et faites à AB $=$ BC $=$ CD $=$ DE $=$ Ed; du centre B avec le rayon BD tracez l'arc Dδd; du centre d avec le rayon dA tracez l'arc AδE; Dδ sera le côté cherché.

Démonstration. La droite Dδ de cette figure a été déterminée comme celle dL de la fig. 103. On aura donc (269) Dδ $= 0{,}7922869$. Or on a $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}7937039$: donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de 0,002.

278. Nous n'avons pas voulu omettre les solutions de ces deux derniers problèmes, quoiqu'il y ait erreur dans quelques résultats, savoir, d'un ou deux millièmes dans les uns, et de quelques dix-millièmes dans les autres, parce que ces erreurs sont souvent négligeables, et que d'ailleurs les solutions en sont simples. On peut avoir des valeurs beaucoup plus exactes

que les précédentes pour former des cubes, non-seulement dans les rapports ci-dessus exprimés, mais encore dans d'autres, si l'on cherchait les arcs exprimés en degrés, minutes et parties de minutes qui ont pour cordes les racines cubiques, ou leurs moitiés, leurs tiers, etc., nécessaires pour la construction du cube cherché; on retirerait ensuite ces cordes du cercle divisé exactement en degrés, minutes, etc. (243, 244), et on les emploierait ensuite, ainsi que leurs multiples, à la même construction du cube.

279. C'est ici que se termine enfin la Géométrie du Compas; si elle est accueillie favorablement des géomètres, et si elle peut être de quelque utilité aux artistes, aux dessinateurs, et spécialement aux ingénieurs en instrumens de Mathématiques à l'usage des géographes et des astronomes, je me trouverai bien récompensé du long ennui que m'a coûté sa composition.

FIN.

TABLE.

PRÉFACE. . . . . Page 5
LIVRE I. Préliminaires. 25
—— II. De la division de la circonférence et des arcs du cercle. 41
—— III. De la multiplication et de la division des distances en ligne droite. 65
—— IV. De l'addition et de la soustraction des distances ; de la situation des perpendiculaires et des parallèles. 83
—— V. Des distances proportionnelles. 95
—— VI. Des racines. 105
—— VII. De l'intersection des lignes droites avec les arcs de cercle et entre elles. . . 129
—— VIII. De la construction, de la multiplication et de la division des angles et des lignes trigonométriques. 195
—— IX. Des figures semblables et des polygones réguliers. 147
—— X. Des centres. 175
—— XI. Problèmes divers. 185
—— Problèmes résolus par approximation. . . . 259

FIN DE LA TABLE.

TABLE.

Préface . . . . [illegible]
Livre I. Préliminaires. . . . . [illegible]
— II. De la division . . . [illegible] . . . et des [illegible] du [illegible] . . . . . . [illegible]
— III. De la [illegible] et de la [illegible] les distances [illegible] . . . . . . [illegible]
— IV. De l'estimation [illegible] des distances, de la [illegible] des [illegible] et des [illegible] . . . . . . [illegible]
— V. Des [illegible] . . . . [illegible]
— VI. Des racines . . . . [illegible]
— VII. De l'intersection des lignes droites avec les [illegible] 120
— VIII. De la construction [illegible] et de la [illegible] des lignes et des lignes [illegible] . . . . . . [illegible]
— IX. Des figures [illegible] régulières . . . . . . [illegible]
— X. Des [illegible] . . . . [illegible]
— XI. Problèmes divers . . . . [illegible]
— Problèmes résolus par [illegible] . . . . . . [illegible]

FIN DE LA TABLE.

On trouve chez BACHELIER, *libraire, quai des Augustins*, n° 55, *à Paris, les Ouvrages suivans :*

L'ART DE RÉGLER LES MONTRES ET LES PENDULES, 5[e] édition, augmentée d'une planche et de la manière de tracer la ligne méridienne du temps moyen, par Berthoud, mécanicien de la marine; membre de l'Institut de France et de la Société royale de Londres, membre de la Légion-d'honneur; 1827, vol. in-18 avec 5 pl. 2 fr. 50 c.

TABLES BAROMÉTRIQUES portatives, donnant les différences de niveau par une simple soustraction; par Biot; in-8. 1 fr. 50 c.

THÉORIE DE LA MÉCANIQUE USUELLE, ou Introduction à l'étude de la Mécanique appliquée aux Arts, contenant les principes de Statique, de Dynamique, d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique applicables aux Arts industriels; la théorie des moteurs, des effets utiles des machines, des organes mécaniques intermédiaires, et l'équilibre des supports; par Borgnis, ingénieur et membre de plusieurs académies; 1821, 1 vol. in-4. 15 fr.

DICTIONNAIRE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX ARTS, contenant la définition et la description sommaire des objets les plus importans ou les plus usités qui se rapportent à cette science, avec l'énoncé de leurs propriétés essentielles; suivi d'indications qui facilitent la recherche des détails plus circonstanciés; par le même; 1823, in-4. 13 fr.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CONSTRUCTION APPLIQUÉE A L'ARCHITECTURE CIVILE, contenant les principes qui doivent diriger, 1° le choix et la préparation des matériaux; 2° la configuration et les proportions des parties qui constituent les édifices en général; 3° l'exécution des plans déjà fixés; suivi de nombreuses applications puisées dans les plus célèbres monumens antiques et modernes, etc.; par le même, in-4 d'environ 650 pages, et atlas de 30 pl. gravées par Adam; 1823. 36 fr.

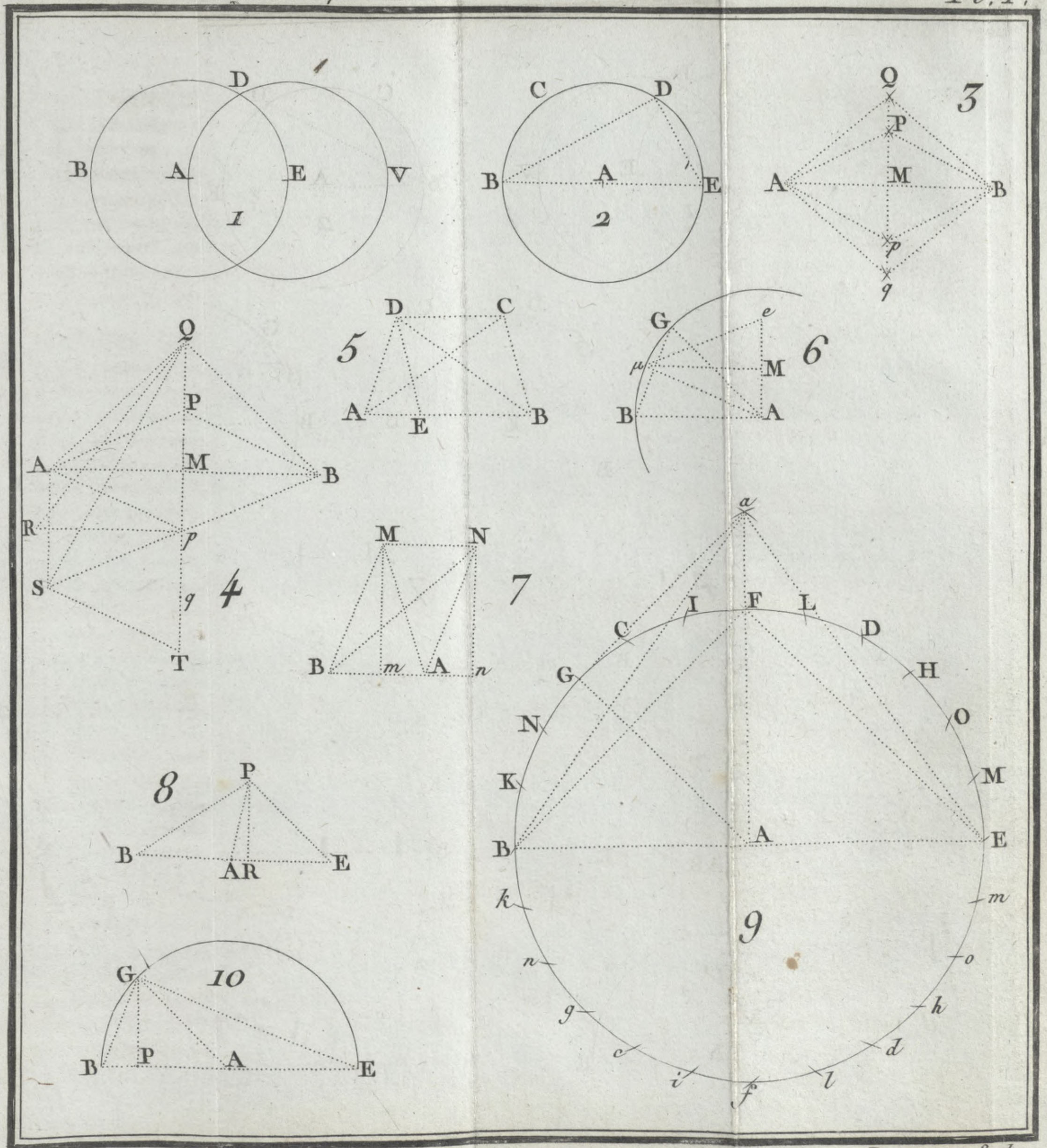
TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE, par Cagnoli, trad. de l'ital. par M. Chompré, 2[e] éd,; 1808, in-4. 18 fr.

NOUVEAU TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE PERSPECTIVE à l'usage des artistes et des personnes qui s'occupent du Dessin; précédé des premières notions de la Géométrie élémentaire, de la Géométrie descriptive, de l'Optique et de la projection des ombres; par Cloquet (J.-B.), ex-professeur de Dessin à l'école des Mines et à celle de la Brigade topographique au Dépôt des fortifications; 1 vol. in-4 et atlas de 84 pl., dont plusieurs coloriées, 1823. 30 fr.

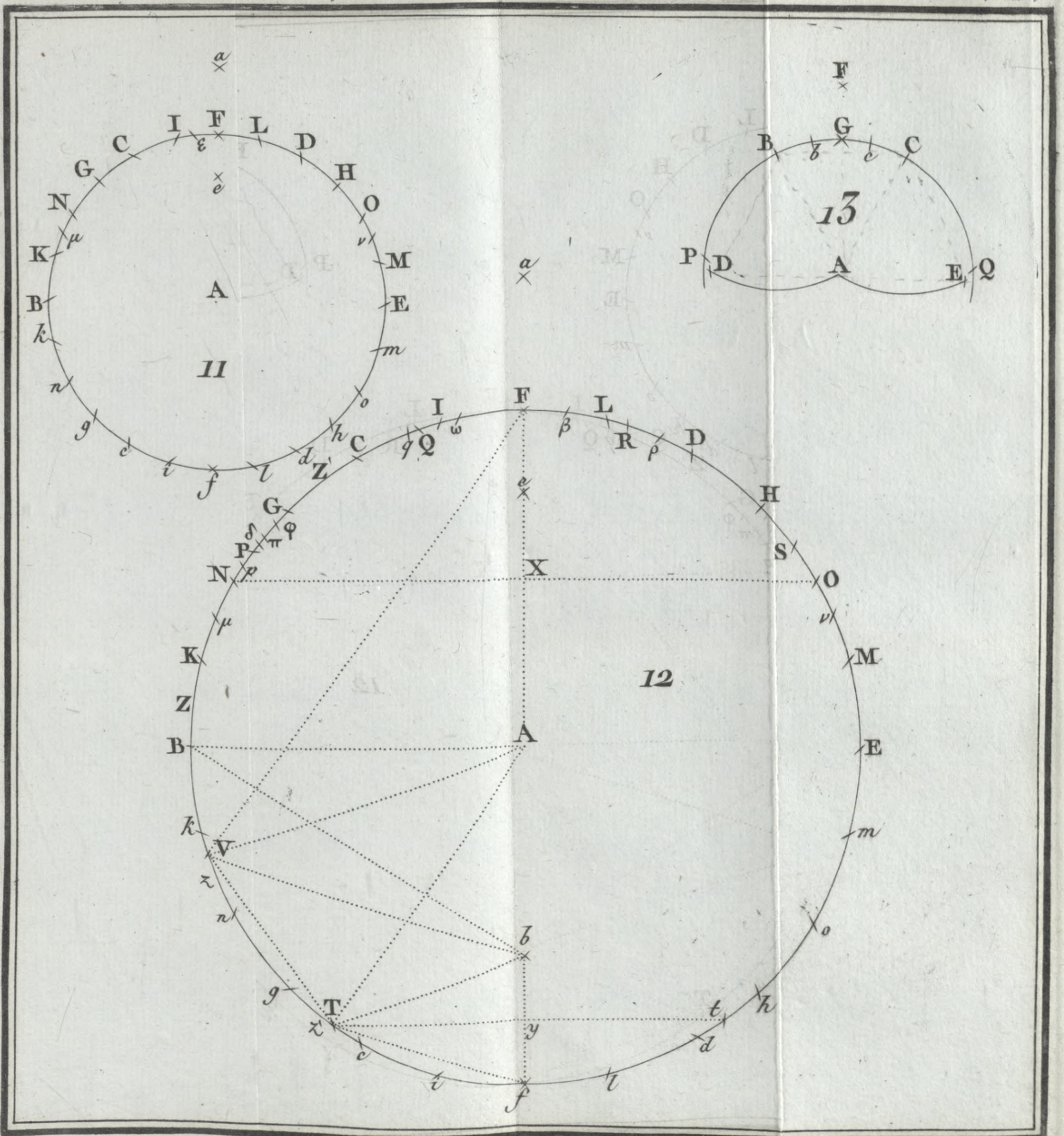
THÉORIE DES MACHINES SIMPLES, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la raideur des cordages. *Nouvelle édition*, à laquelle on a ajouté les Mémoires suivans du même auteur; — sur les frottemens de la pointe des pivots; — recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal; — résultats de plusieurs expériences destinées à déterminer la quantité d'action que les hommes peuvent fournir par leur travail journalier, suivant les différentes manières dont ils emploient leurs forces; — observations théoriques et expérimentales sur l'effet des moulins à vent et sur la figure de leurs ailes; — sur les murs de revêtement et l'équilibre des voûtes, etc.; par Coulomb, chevalier de Saint-Louis, capitaine du Génie, membre de l'Institut de France; 1821, vol. in-4 avec 10 planches. 15 fr.

DESCRIPTION de divers procédés pour extraire la soude du sel marin, vol. in-4 avec 11 planches représentant d'une manière très détaillée les plans et élévations des ateliers de soudières, les fours, fourneaux et instrumens nécessaires à la manipulation de la soude; par Darcet, Lelièvre et Pelletier. 6 fr.

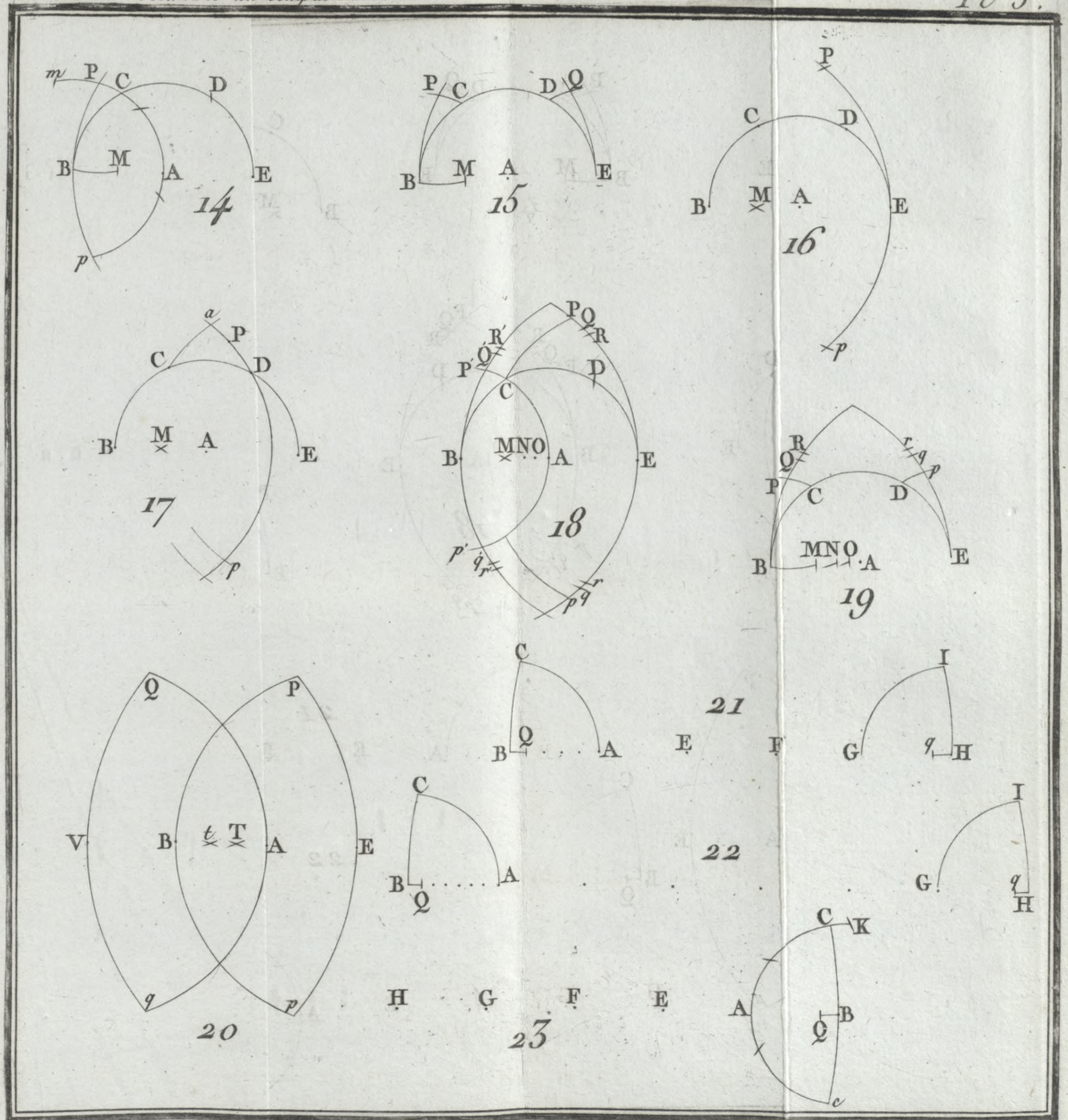
MANUEL D'ÉLECTRICITÉ DYNAMIQUE, ou Traité sur l'action mutuelle des conducteurs électriques et des aimans, et sur la nouvelle théorie du magnétisme, pour faire suite à tous les Traités de Physique élémentaire; par Demonferrand, professeur de Mathématiques et de Physique au collége de Versailles, etc.; 1823, in-8 avec 5 planches. 4 fr.



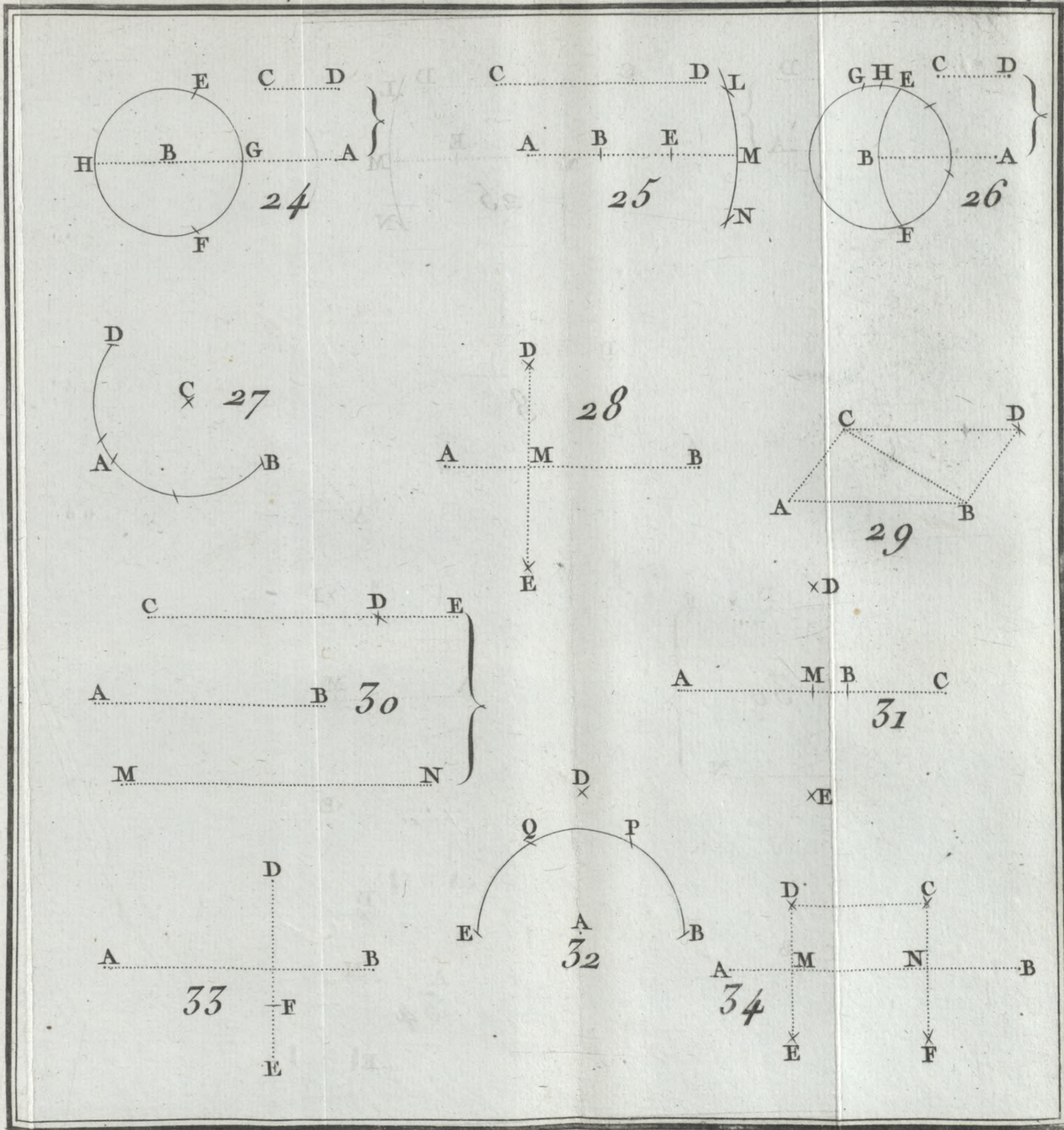
Duruisseau Sculp.



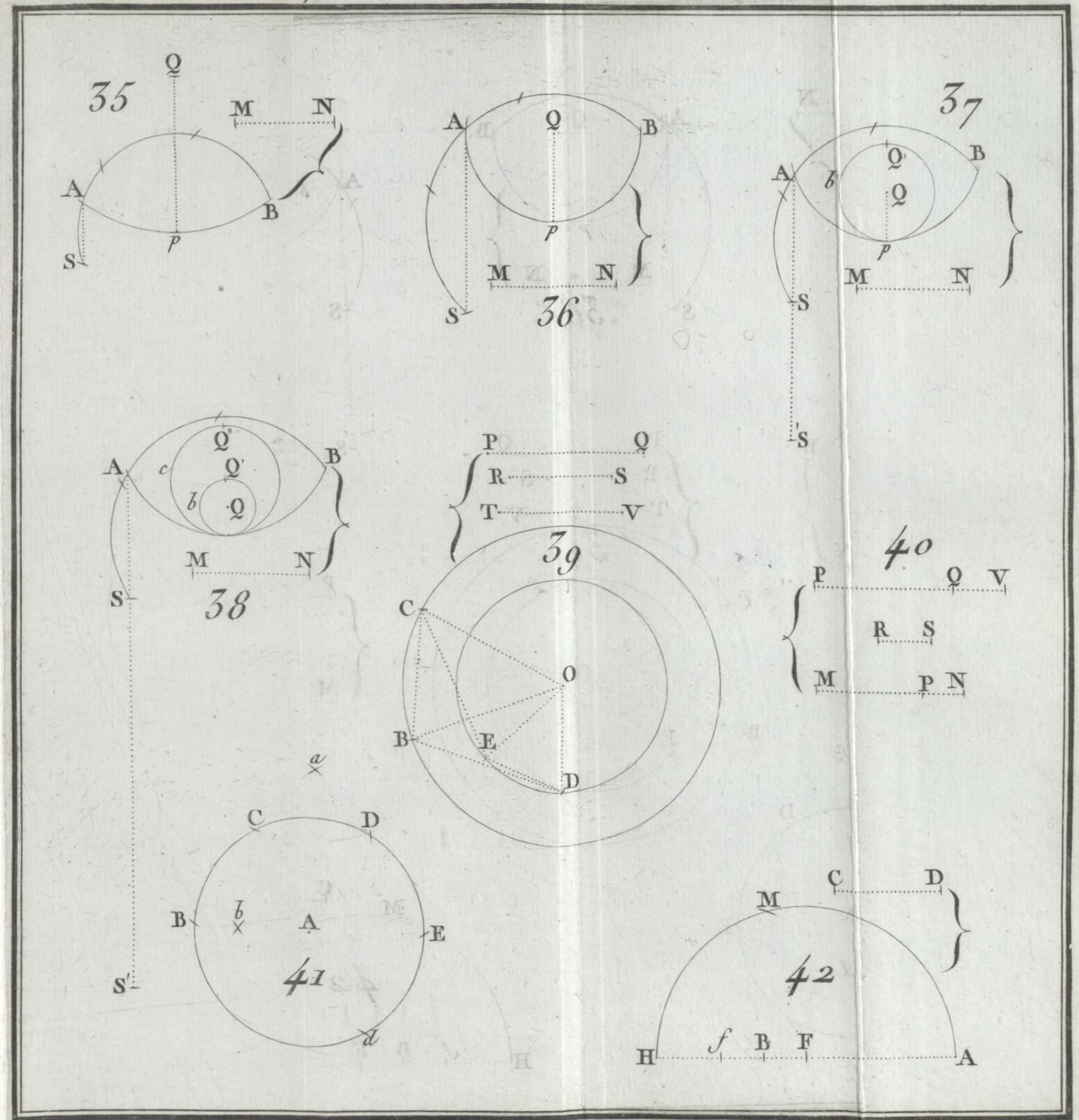
Duruisseau Sculp.



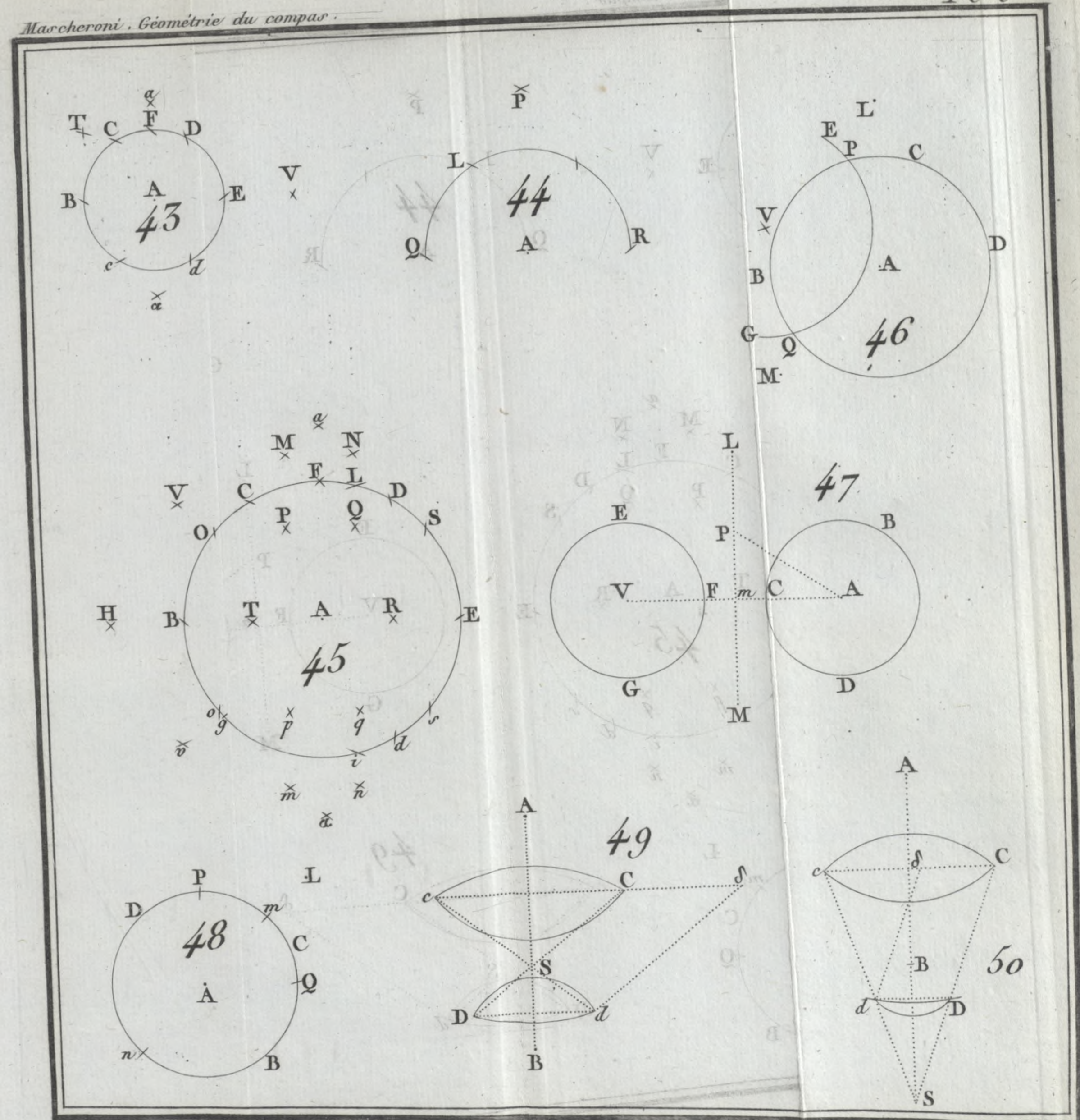
Duruisseau Sculp.



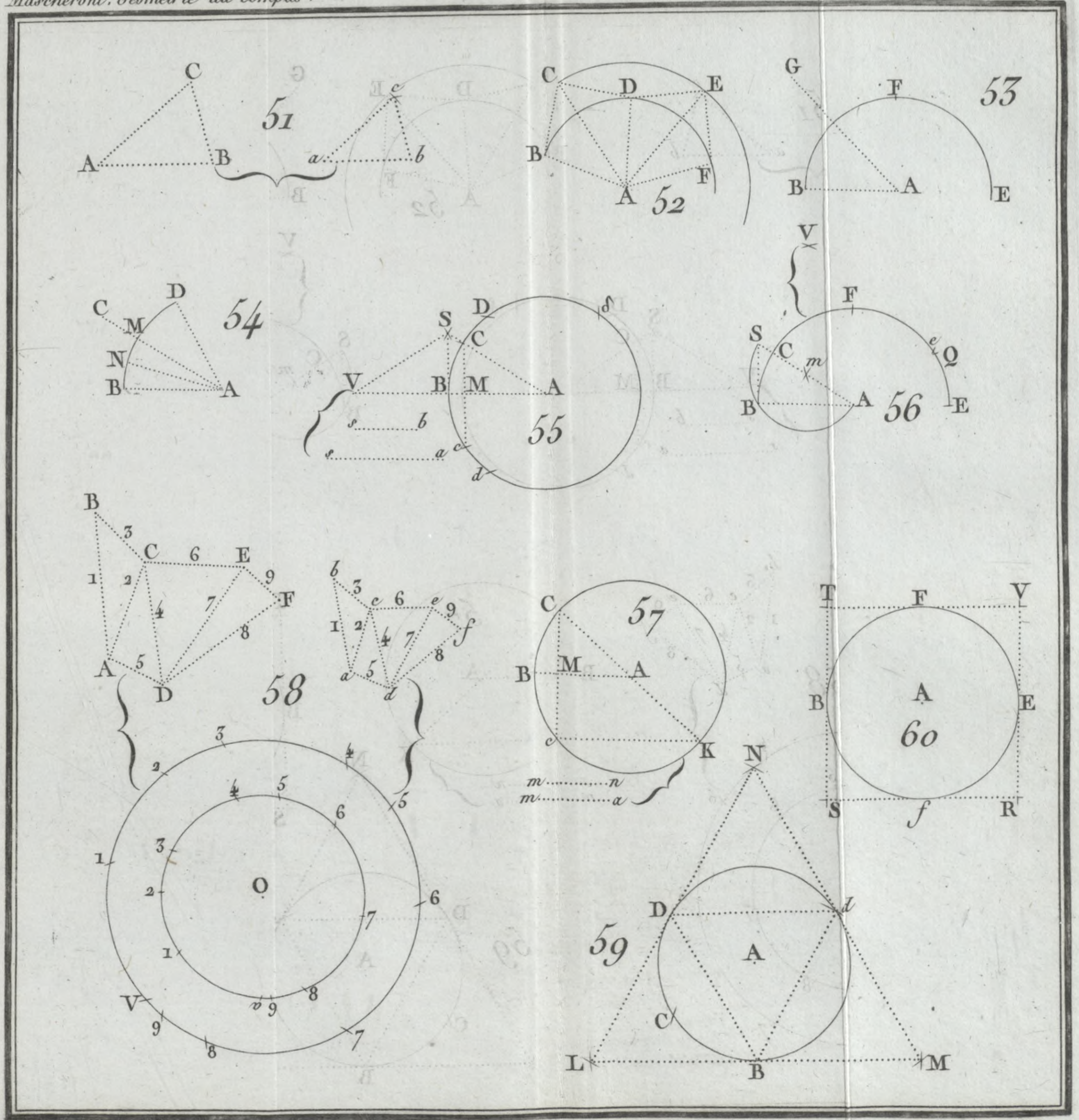
Duruisseau Sculp



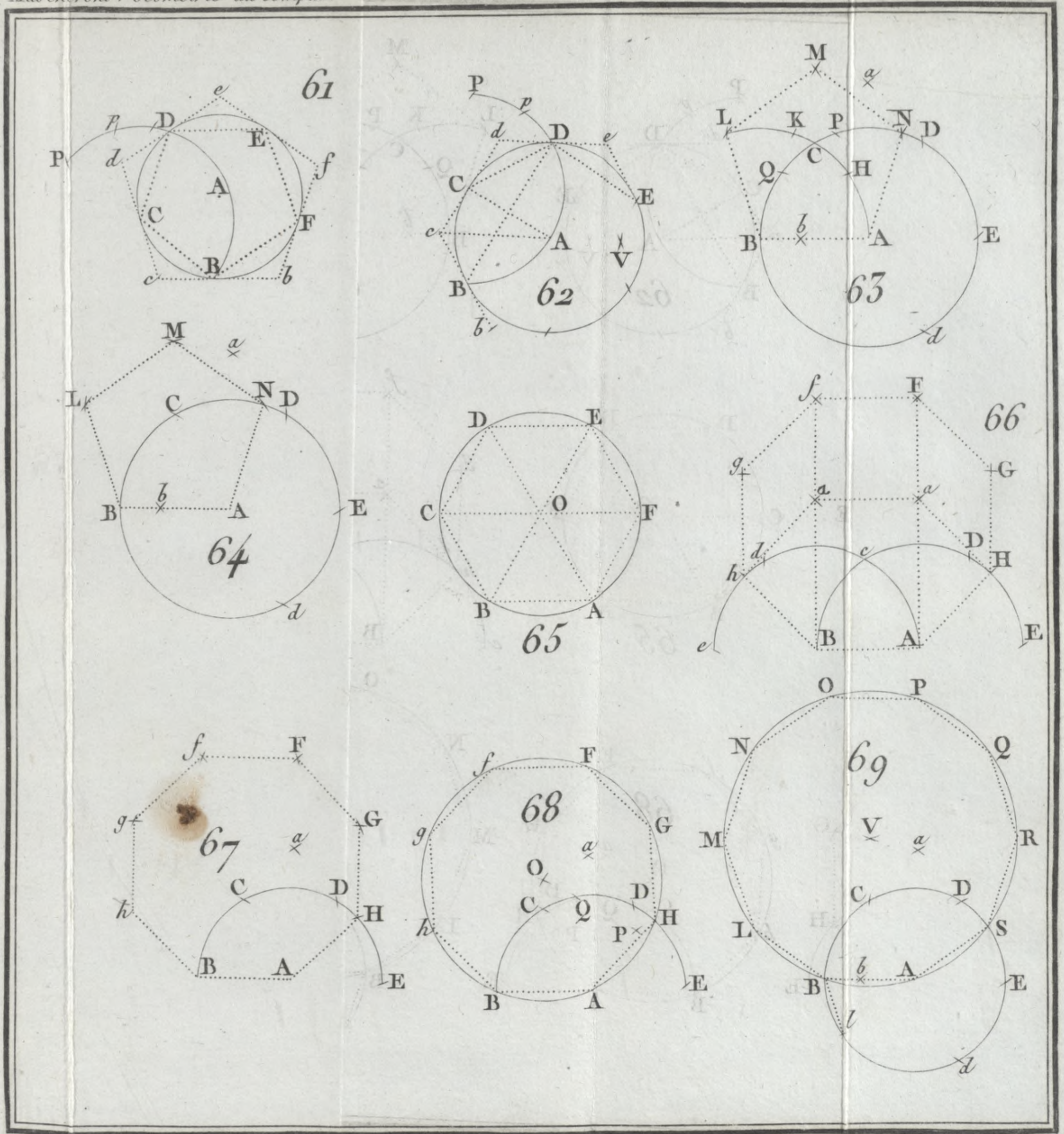
Duruisseau Sculp



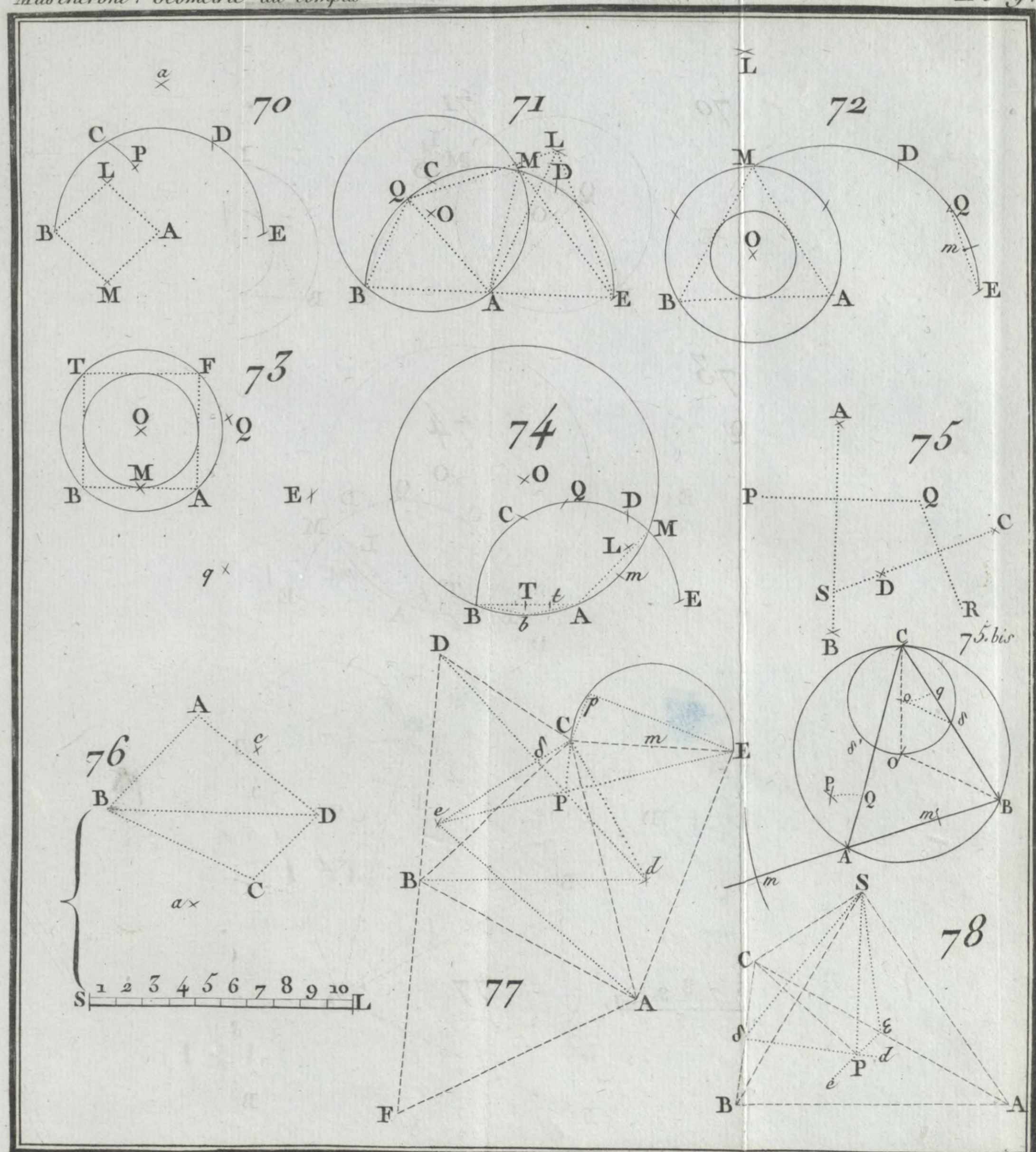
Duruisseau Sculp



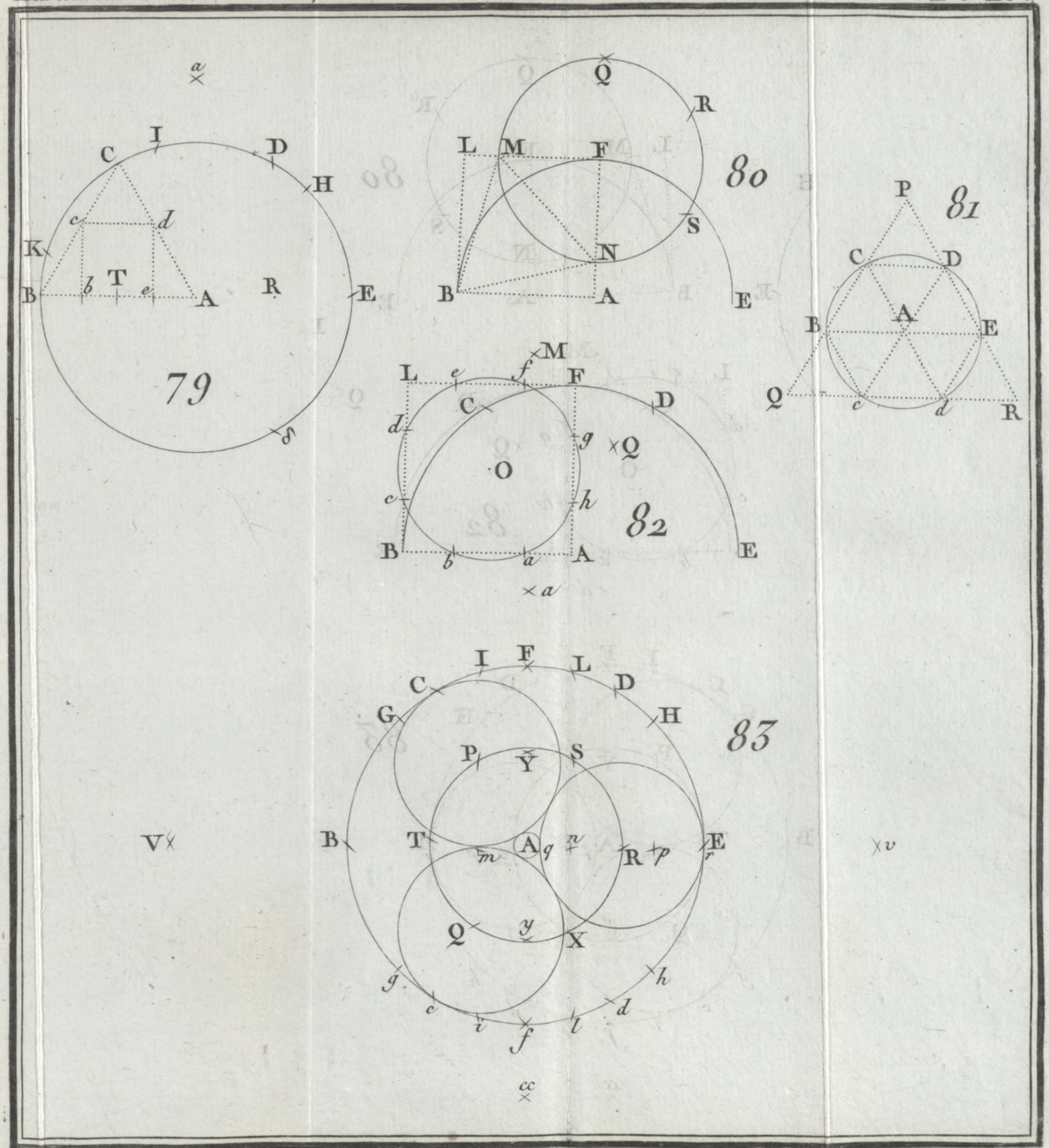
Duruisseau Sculp.



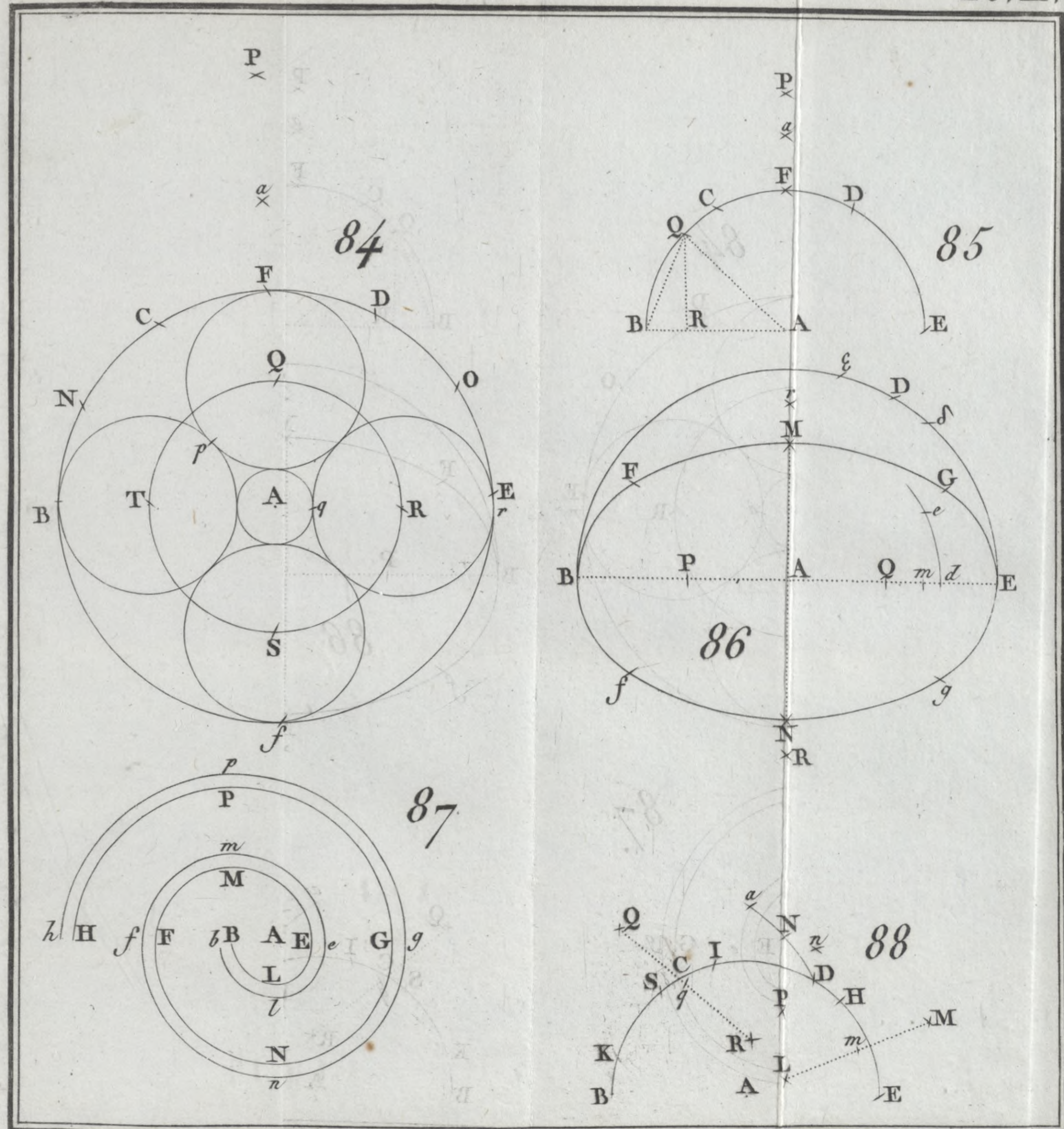
Duruisseau Sculp.



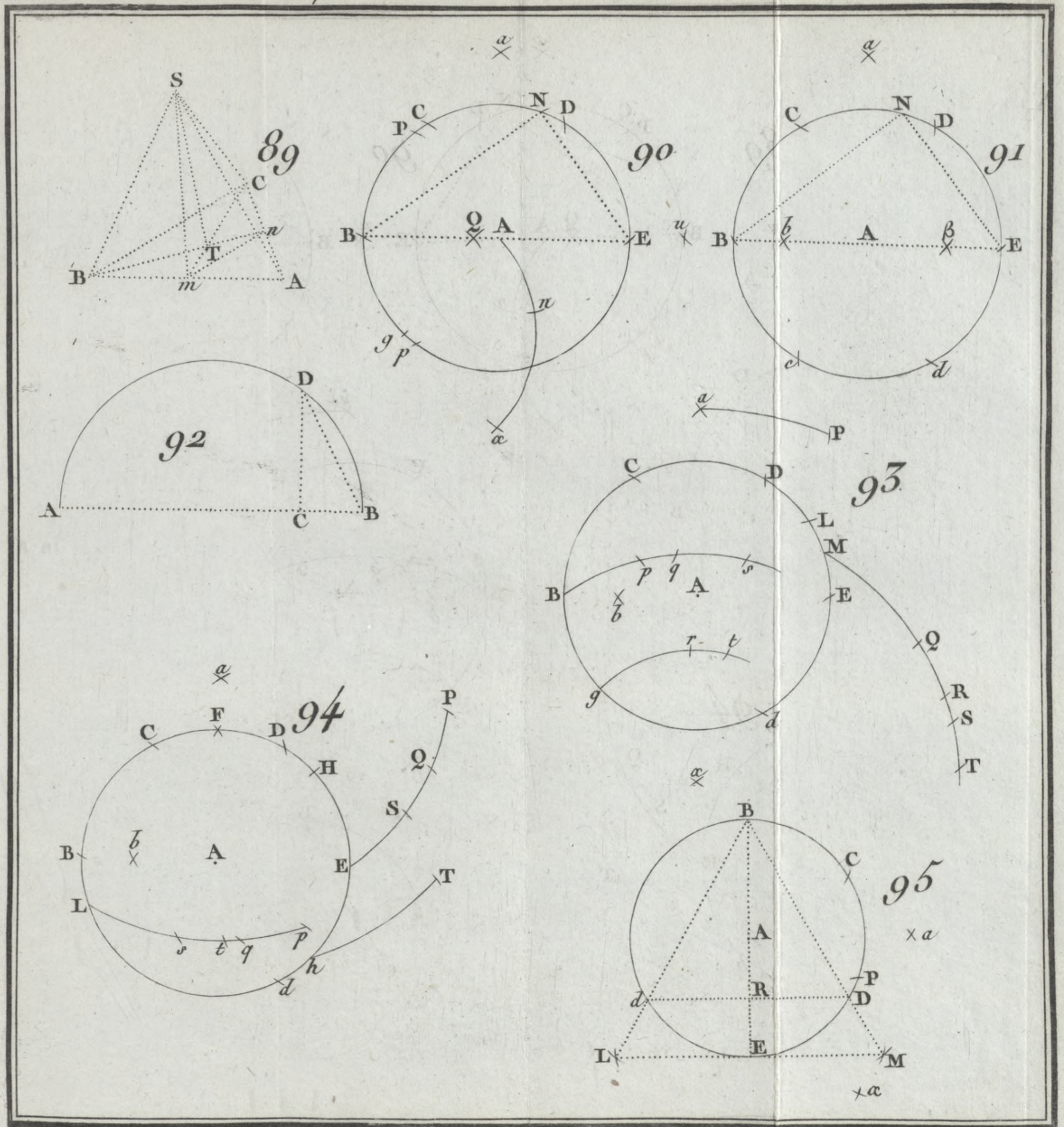
Duruisseau Sculp.



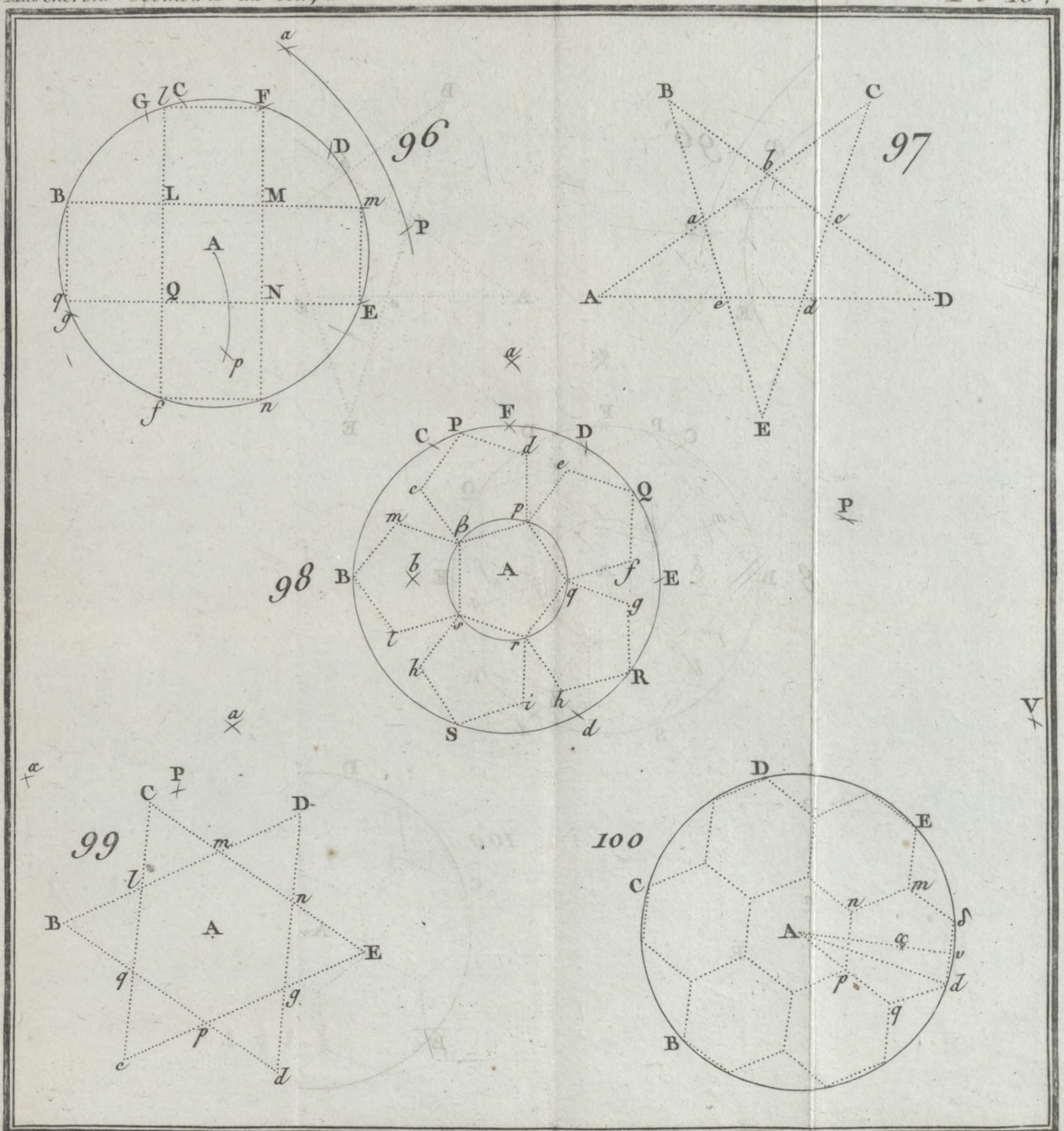
Duruisseau Sculp.



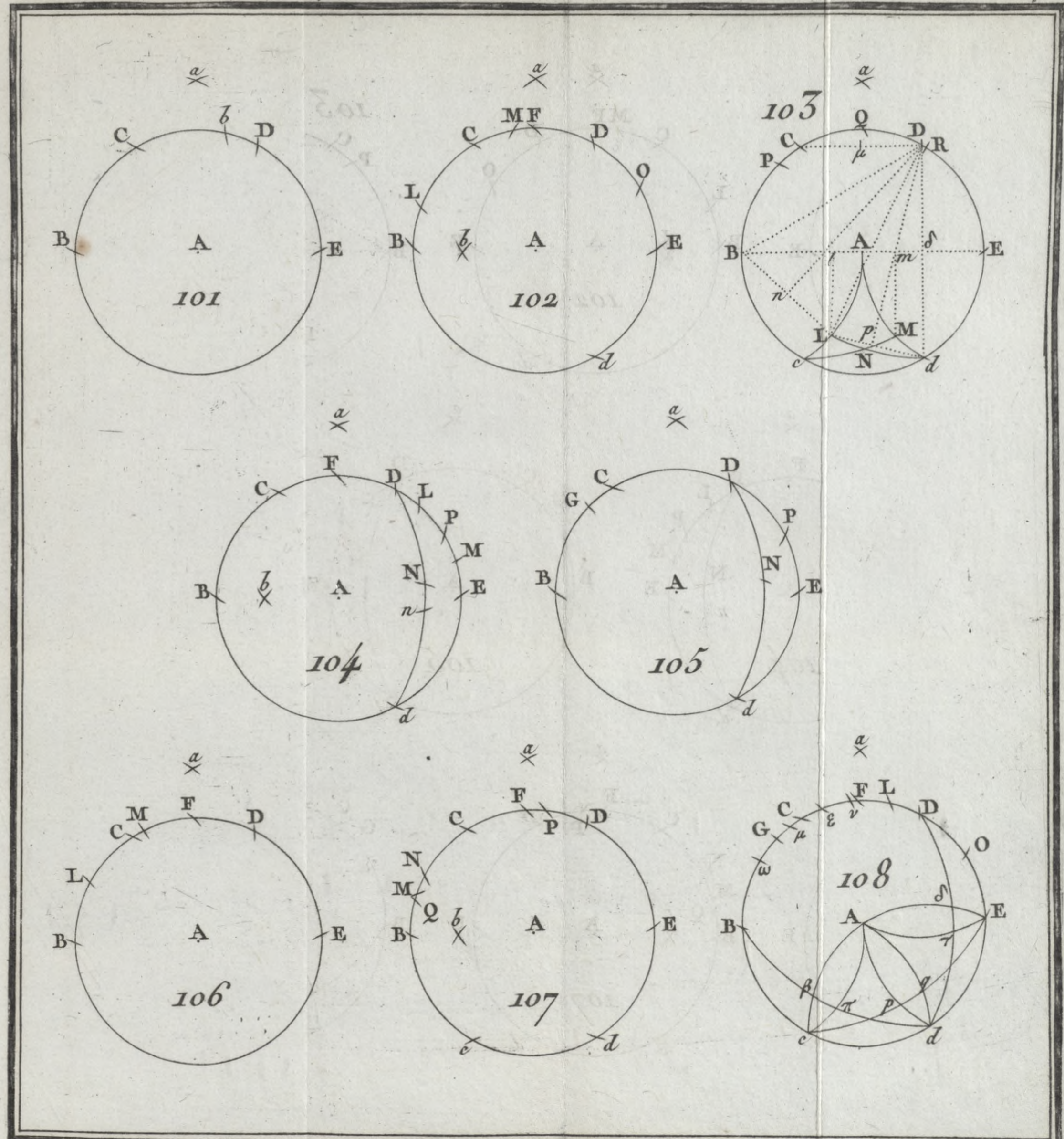
Duruisseau Sculp.



Durwisseau Sculp.



Duruisseau Sculp.



Duruisseau Sculp.