586

DIE VOLLSTÄNDIGE LÖSUNG NUMERISCHER GLEICHUNGEN,

BEI WELCHER

DURCH EIN UND DASSELBE VERFAHREN

SOWOHL DIE IMAGINÄREN, ALS AUCH DIE REELLEN WURZELN LEICHT BESTIMMT WERDEN.

VON

DR. WILLIAM RUTHERFORD.

AUS DEM ENGLISCHEN

ÜBERSETZT VON

DR. AUGUST WIEGAND.

HALLE,

DRUCK UND VERLAG VON H. W. SCHMIDT.

1849.

Die nachfolgenden Untersuchungen haben weniger die Bestimmung der Anzahl der imaginären Wurzeln einer gegebenen Gleichung, als vielmehr die Berechnung ihrer numerischen Werthe bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit zu ihrem Zwecke.

Professor Young zu Belfast hat in seiner „*Theory and Solutions of Equations of the higher ordres*" und in seinen „*Researches respecting the Imaginary Roots of Numerical Equations*", welche letzteren einen Anhang zu dem ersteren schätzenswerthen Werke bilden, die neueren Forschungen und Entdeckungen von Budan, Fourier und Sturm in Betreff der Beschaffenheit der Wurzeln von Gleichungen in so gewandter und erschöpfender Weise behandelt, dass sich meine Untersuchungen einzig und allein auf die Entwickelung eines Verfahrens zur Auffindung der numerischen Werthe der imaginären Wurzeln beschränken konnten.

Als ich diese Untersuchungen begann, hatte ich nur die Bestimmung der imaginären Wurzelwerthe im Auge, es war aber leicht zu ersehen, dass ich bei der Form $\alpha+\sqrt{-\beta}$, die ich für eine imaginäre Wurzel anzuwenden mich veranlasst sah, die Werthe der reellen und der imaginären durch ein und dasselbe Verfahren erhalten würde, indem der Charakter der Wurzel von dem Zeichen des Werthes von β abhängig ist. Ein negatives β wird nämlich offenbar eine reelle, und ein positives eine imaginäre Wurzel anzeigen, die Wurzeln mögen nun gleich, ungleich oder nahe gleich sein.

Hat eine Gleichung zwei nahe gleiche Wurzeln, so lassen sich diese nach der von mir verfolgten Methode sofort unterscheiden, denn ist $-\beta$ positiv und steht von dessen Werthe die erste geltende Ziffer in der $2n$ten Dezimalstelle, so werden die beiden Wurzeln nothwendig bis auf $n-1$ Dezimalstellen übereinstimmen.

Das in Note A. angewandte Verfahren für die gleichzeitige Bestimmung aller drei Wurzeln einer kubischen Gleichung ist bemerkenswerth hinsichtlich seiner Einfachheit und Eleganz, und es dürfte die bequeme Anordnung der Arbeit dieser Methode vielleicht den Eingang in die elementaren Bearbeitungen der Algebra verschaffen.

Königl. Militär-Akademie zu Woolwich.
Januar. 1849.

W. Rutherford.

Der Herr Verfasser hat seine Methode bei Gleichungen des dritten, vierten, fünften und sechsten Grades vollständig und mit der aus seinen übrigen mathematischen Arbeiten hinreichend bekannten Klarheit durchgeführt und durch mehrfache, alle besonderen Fälle berücksichtigende, Beispiele praktisch erläutert. Die Mühe der vollständigen Auflösung von elf Gleichungen des dritten, vierten und fünften Grades ist namentlich dankbar anzuerkennen, weil der hier vor Augen gelegte Umfang der Arbeit den besten Massstab zur Beurtheilung des Verfahrens liefert und klar übersehen lässt, in wie weit durch die befolgte Methode die Lehre von den höheren Gleichungen gefördert ist.

Noch habe ich zu bemerken, dass der Hr. Verfasser nach dem Erscheinen vorliegender Schrift im Märzhefte der engl. Zeitschrift: „*The Mathematician*" noch ein neues und einfaches Verfahren zur Bestimmung aller drei Wurzeln einer cubischen Gleichung mitgetheilt hat. Genanntes Heft bekam ich gerade noch zeitig genug in die Hände, um die betreffende Abhandlung hier noch beifügen zu können.

Halle, d. 21. Mai 1849.

A. Wiegand.

NEUE METHODE

ZUR

LÖSUNG NUMERISCHER GLEICHUNGEN.

1. **D**ie Aufsuchung einer einfachen Methode für die vollständige Lösung der numerischen Gleichungen aller Grade ist Gegenstand der Aufmerksamkeit vieler hervorragenden Mathematiker gewesen. Das schöne Theorem von Sturm in Betreff der Bestimmung der Anzahl aller reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung von einem beliebigen Grade ist theoretisch tadellos, doch wird dessen Anwendung in der Praxis bei Gleichungen vom fünften und von höhern Graden ungemein mühsam. Hat man nur die reellen Wurzeln irgend einer Gleichung im Auge, so lässt Horner's elegante Methode zur angenäherten Bestimmung derselben nichts zu wünschen übrig. So viel aber auch in diesem Gebiete der Wissenschaft namentlich durch Waring, Lagrange, Fourier, Budan, Sturm, Horner, Atkinson, Young, Davies, Lockhardt und Weddle geleistet worden ist, so kann man gleichwohl die Lösung der numerischen Gleichungen nicht als völlig genügend betrachten, so lange man nicht eine leichte, der von Horner bei der angenäherten Bestimmung der reellen Wurzeln verwandte Methode zur Bestimmung der Werthe der imaginären Wurzeln kennt.

2. Der berühmte Lagrange hat in seiner *„Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés“* eine Methode zur Auffindung der imaginären Wurzeln der Gleichungen gegeben, die aber, wie allgemein anerkannt wird, schon fast unbrauchbar ist bei Anwendung auf Gleichungen vom vierten und fünften Grade und es ist dieselbe, wegen der höchst schwierigen Auffindung der Coeffizienten der Unbekannten in der transformirten Gleichung, niemals als Mittel zur Berechnung angewendet worden. Das Wesen von Lagrange's Methode besteht darin, dass die gegebene Gleichung in eine andere transformirt wird, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind; allein die Coeffizienten der verschiedenen Potenzen der Unbekannten in der transformirten Gleichung nehmen eine wahr-

haft formidable Gestalt an; vorzüglich gilt das von denen, die man durch Transformation einer Gleichung des fünften Grades erhält *).

3. Lagrange selbst bemerkt nach Aufstellung der betreffenden Coeffizienten der verschiedenen Potenzen der Unbekannten in den transformirten Gleichungen des dritten und vierten Grades S. 43:

„*On pourrait de même trouver les conditions qui rendent les racines les équations du cinquième degré toutes réelles, ou en partie réelles et en partie imaginaires: mais, comme dans ce cas, l'équation des differences monterait au degré* $\frac{5.\,4}{2} = 10$, *le calcul deviendrait extrêmement prolix et embarrassant.*"

4. Die folgenden Blätter enthalten die Darlegung einer Methode zur Auffindung nicht nur der Werthe der reellen Wurzeln der Gleichungen, sondern vorzugsweise des reellen und imaginären Theils der imaginären Wurzeln der Gleichungen aller Grade, welche besondere Vorzüge vor der von Lagrange besitzen und einfacher und praktischer sein dürfte, als irgend ein Verfahren, welches bis jetzt ausfindig gemacht worden ist.

5. Es ist bereits bemerkt worden, dass das Wesen von Lagrange's Methode darin besteht, dass eine gegebene Gleichung in eine andere transformirt wird, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen von den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind; hieraus folgt ohne Weiteres, dass wenn die gegebene Gleichung zwei imaginäre Wurzeln von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ hat, die transformirte Gleichung eine reelle Wurzel haben wird von der Form $-4\beta^2$, da die Differenz von $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ gleich $\pm 2\beta\sqrt{-1}$, und das Quadrat davon gleich $-4\beta^2$ ist. Nach dieser Methode hat man also zunächst den Werth von β oder den imaginären Theil der imaginären Wurzel zu bestimmen, hierauf, wenn man diesen Werth gefunden hat, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ für x in die gegebene Gleichung zu substituiren, und dann die erhaltene Gleichung in zwei andere zu trennen, von denen die eine lauter reelle Glieder enthält, während die der anderen noch mit dem Factor $\sqrt{-1}$ behaftet sind. Hiernach bekommen wir zwei Gleichungen für α von der Form

$$\alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + R\alpha^{m-3} + \ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$m\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + q\alpha^{m-3} + r\alpha^{m-4} + \ldots\ldots\ldots = 0;$$

worin die Coeffizienten P, Q, R etc. und p, q, r etc. Ausdrücke sind, welche die Coeffizienten der Unbekannten in der gegebenen Gleichung und ausserdem β enthalten. Wenn wir nun dem β einen seiner vorher gefundenen Werthe beilegen, so werden augenscheinlich die beiden Gleichungen, welche gleichzeitig existiren, ein gemeinschaftliches Mass haben. Wenn dann das grösste gemeinschaftliche Mass der polynomischen Ausdrücke in den ersten Gliedern dieser Gleichungen gefunden ist und gleich Null gesetzt wird, so haben wir eine Gleichung mit α und β, worin β bekannt ist, und also α gefunden werden kann.

So ist die mühsame Methode von Lagrange zur Bestimmung der imaginären Wurzeln der Gleichungen aller Grade, deren Wesen diesem ausgezeichneten Analysten, welcher ganz verschiedene und vielweniger complizirte Resultate zu erhalten hoffte, in ganz anderem Lichte erschienen ist.

---

*) Siehe die *Philosophical Transactions*, 1763. oder *Traité des équations numériques* 1808 Note III. p. 111., wo diese Coeffizienten von Waring zuerst bestimmt, aufgestellt sind.

6. Nach der Methode, welche wir nun entwickeln wollen, kann man nach Belieben den reellen oder imaginären Theil der imaginären Wurzeln einer Gleichung finden, jenachdem man β oder α aus den beiden zugleich bestehenden Gleichungen eliminirt, welche diese beiden Grössen enthalten. Die Elimination von β wird in allen Fällen leichter von Statten gehen, als die von α und deshalb wird die Aufsuchung des reellen Theils der imaginären Wurzeln der nächste Gegenstand der Untersuchung sein, worauf dann der imaginäre Theil leicht gefunden wird aus der einen oder der anderen von den erwähnten Gleichungen oder aus dem grössten gemeinschaftlichen Masse der ersten Glieder, nachdem dasselbe gleich Null gesetzt worden ist. Das Wesen der Methode gründet sich auf die Lösung der Aufgabe: Es ist irgend eine numerische Gleichung gegeben, es soll dieselbe in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln um eine gegebene Grösse kleiner oder grösser sind als die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

7. Die gegebene Gleichung sei

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots\ldots + sx + t = 0 \;\ldots\ldots\ldots \;(1);$$

dann ist die Gleichung, deren Wurzeln um die Grösse α kleiner sind als die Wurzeln der Gleichung (1), folgende:

$$(x'+\alpha)^m + a(x'+\alpha)^{m-1} + b(x'+\alpha)^{m-2} + \ldots\ldots + s(x'+\alpha) + t = 0,$$

welche nach Entwickelung der verschiedenen Potenzen von $x'+\alpha$ die Form annimmt:

$$x'^m + \mathrm{A}x'^{m-1} + \mathrm{B}x'^{m-2} + \mathrm{C}x'^{m-3} + \ldots\ldots + \mathrm{S}x' + \mathrm{T} = 0 \;\ldots\ldots\ldots \;(2),$$

wo $x' = x - \alpha$ und die verschiedenen Coeffizienten A, B, C etc. Funktionen von α sind; nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{A} &= m\alpha + a \\
\mathrm{B} &= \frac{m(m-1)}{1.\,2}\alpha^2 + (m-1)a\alpha + b \\
\mathrm{C} &= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}\alpha^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2}a\alpha^2 + (m-2)b\alpha + c \\
\mathrm{D} &= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\alpha^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3}a\alpha^3 + \frac{(m-2)(m-3)}{1.\,2}b\alpha^2 \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad + (m-3)c\alpha + d \\
\mathrm{S} &= m\alpha^{m-1} + (m-1)a\alpha^{m-2} + (m-2)b\alpha^{m-3} + \ldots\; 2r\alpha + s \\
\mathrm{T} &= \alpha^m + a\alpha^{m-1} + b\alpha^{m-2} + c\alpha^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\; s\alpha + t.
\end{aligned}\right\} \ldots (3).$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung (1) mit $\alpha + \sqrt{-\beta}$, $\alpha - \sqrt{-\beta}$, r_1, r_2, etc., wo die Wurzeln von der Form $\alpha \pm \sqrt{-\beta}$ *) reell oder imaginär sein werden, jenachdem der Werth von β negativ oder positiv ist, und die erhaltenen Formeln und Gleichungen sowohl die reellen, als auch die imaginären Wurzeln irgend einer Gleichung bestimmen; dann wird die Gleichung gleich sein dem Produkte aus folgenden binomischen Faktoren:

$$x - (\alpha + \sqrt{-\beta}),\; x - (\alpha - \sqrt{-\beta}),\;\; x - r_1,\; x - r_2, \text{ etc.}$$

Das Produkt der ersten beiden Faktoren ist $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$ und das Produkt aus den übrigen Faktoren wird sich darstellen als ein Ausdruck folgender Art:

$$x^{m-2} + a'x^{m-3} + b'x^{m-4} + c'x^{m-5} +, \text{ etc.} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(A).$$

*) Die gebräuchliche Form einer imaginären Wurzel ist $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, jedoch für unsern Zweck ist die obige angemessener; übrigens lässt sich die unsrige durch Ausziehung der Wurzel aus β (wenn es positiv ist), die man nur vor das imaginäre Symbol $\sqrt{-1}$ zu stellen hat, leicht auf die gewöhnliche Form zurückführen.

Multipliciren wir die beiden letzten Ausdrücke und setzen ihr Produkt gleich Null, so bekommen wir:

$$\left.\begin{array}{l} x^m + (a'-2\alpha)x^{m-1} + (b'-2a'\alpha+\alpha^2+\beta)x^{m-2} + [c'-2b'\alpha + a'(\alpha^2+\beta)]x^{m-3} + \ldots \\ \quad + [r'-2q'\alpha+p'(\alpha^2+\beta)]x^2 + [-2r'\alpha+q'(\alpha^2+\beta)]x + r'(\alpha^2+\beta) \end{array}\right\} = 0 \quad \ldots \; (4).$$

Da diese Gleichung mit (1) identisch ist, so erhalten wir durch Gleichsetzung der Coeffizienten gleich hoher Potenzen von x

$$\left.\begin{array}{l} a = a' - 2\alpha \\ b = b' - 2a'\alpha + \alpha^2 + \beta) \\ c = c' - 2b'\alpha + a'(\alpha^2+\beta) \\ \vdots \qquad \vdots \\ r = r' - 2q'\alpha + p'(\alpha^2+\beta) \\ s = \quad -2r'\alpha + q'(\alpha^2+\beta) \\ t = \qquad\qquad +r'(\alpha^2+\beta) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (5).$$

Substituiren wir in (3) für a, b, c etc. ihre Werthe aus (5), so bekommen wir zwischen A, B, C etc., den Coeffizienten der verschiedenen Potenzen der Unbekannten in der transformirten Gleichung, deren Wurzeln um α kleiner sind, als die der gegebenen Gleichung (1), folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A} = f_1\alpha \\ \mathrm{B} = f_2\alpha + \beta \\ \mathrm{C} = f_3\alpha + \mathrm{A}\beta \\ \mathrm{D} = f_4\alpha + \mathrm{B}\beta - \beta^2 \\ \mathrm{E} = f_5\alpha + \mathrm{C}\beta - \mathrm{A}\beta^2 \\ \mathrm{F} = f_6\alpha + \mathrm{D}\beta - \mathrm{B}\beta^2 + \beta^3 \\ \mathrm{J} = f_7\alpha + \mathrm{E}\beta - \mathrm{C}\beta^2 + \mathrm{A}\beta^3 \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (6)$$

wo $f_1\alpha = (\mathrm{m}-2)\alpha + a'$

$$f_2\alpha = \frac{(m-2)(m-3)}{1.\,2}\alpha^2 + (m-3)a'\alpha + b'$$

$$f_3\alpha = \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\,2.\,3}\alpha^3 + \frac{(m-3)(m-4)}{1.\,2}a'\alpha^2 + (m-4)b'\alpha + c'$$

$$f_4\alpha = \frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\,2.\,3.\,4}\alpha^4 + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\,2.\,3}a'\alpha^3 + \frac{(m-4)(m-5)}{1.\,2}b'\alpha^2$$

$$f_5\alpha = \frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\alpha^5 + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\,2.\,3.\,4}a'\alpha^4$$
$$+ \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\,2.\,3}b'\alpha^3 + \frac{(m-5)(m-6)}{1.\,2}c'\alpha^2 + (m-6)d'\alpha + e';$$

was nach Belieben weiter fortgesetzt werden kann.

8. Aus diesen bemerkenswerthen Relationen der Coeffizienten A, B, C etc., welche aus der Transformation der gegebenen Gleichung in eine andere, deren Wurzeln um α, den reellen Theil der imaginären Wurzel, kleiner sind, hervorgegangen sind, erhalten wir die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der imaginären Wurzeln. Wir dürfen hier nicht unbemerkt lassen, dass die zwei Gleichungen, welche wir aus den Resultaten der vorhergehenden Transformation der gegebenen Gleichung erhalten, genau dieselben sind, als die von Lagrange, welche wir unter 5. pag. 2. aufgestellt haben. Man erhält dieselben leicht, wenn man $\alpha + \sqrt{-\beta}$ oder $\alpha - \sqrt{-\beta}$ für x in die gegebene Gleichung substituirt, die reellen Glieder von denen,

welche mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ behaftet sind, absondert und so zwei Gleichungen bildet, welche α und β enthalten. Die vorigen Formeln werden uns diese Gleichungen in allen Fällen ohne irgend eine Substitution verschaffen und wir wollen nun dieselben auf die vollständige Lösung einiger numerischen Gleichungen vom 3ten, 4ten und von höheren Graden anwenden.

I. Cubische Gleichungen.

9. Die cubische Gleichung sei

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

deren Wurzeln wir bezeichnen durch r, $\alpha + \sqrt{-\beta}$ und $\alpha - \sqrt{-\beta}$, von denen r nothwendig reell, und die beiden anderen reell oder imaginär sein werden, jenachdem β negativ oder positiv ist. Setzen wir nun in der Gleichung (6) . . $m = 3$ und erwägen, dass in diesem Falle alle Coeffizienten der verschiedenen Potenzen von x in dem Ausdrucke (A) mit Ausnahme von a' gleich Null sind, so haben wir $f_2\alpha = 0$ und $f_3\alpha = 0$ und deshalb

$$\mathrm{B} = \beta \text{ und } \mathrm{C} = \mathrm{A}\beta \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Eliminiren wir hieraus β, so erhalten wir die Relation

$$\mathrm{AB} - \mathrm{C} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Setzen wir in den unter 7. aufgestellten Gleichungen (3) . . $m = 3$, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 3\alpha + a \\ \mathrm{B} &= 3\alpha^2 + 2a\alpha + b \\ \mathrm{C} &= \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c; \end{aligned}$$

und wenn wir diese Werthe oben in (3) substituiren:

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + \frac{a^2 + b}{4}\alpha + \frac{ab - c}{8} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

eine Gleichung, welche uns den Werth von α d. h. also den rationalen Theil der beiden anderen Wurzeln der gegebenen Gleichung liefert.

Substituiren wir die Werthe A, B, C in die Gleichungen (2), dann gelangen wir zu den Gleichungen

$$3\alpha^2 + 2a\alpha + b = \beta \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = \beta(3\alpha + a) \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

welche Gleichungen identisch sind mit denen, die man dadurch erhält, dass man für x in der gegebenen Gleichung (1) $\alpha + \sqrt{-\beta}$ oder $\alpha - \sqrt{-\beta}$ substituirt und die rationalen Glieder von den irrationalen trennt.

Soll nun zuerst α gefunden werden, so ist β aus (5) und (6) zu eliminiren; will man hingegen β zuerst bestimmen, so muss α eliminirt werden. Wir haben bereits β eliminirt und dadurch die Gleichung (4) zur Bestimmung von α erhalten. Eliminiren wir α, so bekommen wir für β die Gleichung

$$\beta^3 + \frac{a^2 - 3b}{2}\beta^2 + \frac{(a^2 - 3b)^2}{16}\beta + \frac{4(a^2 - 3b)(b^2 - 3ac) - (9c - ab)^2}{192} = 0 \ldots (7).$$

Die letztere Elimination ist augenscheinlich nicht so leicht ausführbar, als die Elimination von β, und ist deshalb zu vermeiden. Aendert man in den abwechselnden Gliedern von (7) die Zeichen und vergleicht die transformirte Gleichung mit Lagrange's Gleichung in v (s. pag. 44), so überzeugt man sich, dass die Wurzeln der Gleichung in v genau das Vierfache der Wurzeln der auf die angegebene Weise modifizirten Gleichung (7) sind.

Ist der Werth von α aus Gleichung (4) gefunden, so lässt sich β leicht aus (5) oder (6) bestimmen.

Zu einer noch einfacheren Formel zur Bestimmung von β gelangen wir, wenn wir (4) von (6) subtrahiren, wodurch wir nämlich erhalten

$$\frac{9c-ab}{8}-\frac{a^2-3b}{4}\,\alpha=\beta(3\alpha+a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Es ist dies gleichbedeutend mit der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses aus (5) und (6) und es lässt sich demnach β auf das Einfachste aus (5), (6) und (8) bestimmen.

Wenn die gegebene Gleichung in allen ihren Gliedern vollständig ist, so wird es häufig von Vortheil sein, das zweite Glied zu entfernen, wodurch $a=0$ wird und die Gleichungen (4) und (7) zur Auffindung von α und β übergehen in

$$\alpha^3+\frac{b}{4}\,\alpha-\frac{c}{8}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

$$\beta^3-\frac{3b}{2}\beta^2+\frac{9b^2}{16}\beta-\frac{4b^3+27c^2}{64}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

oder die Gleichungen (5) und (8) in

$$\beta=3\alpha^2+b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

oder

$$\beta=\frac{b}{4}+\frac{3c}{8\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

10. Vergleichen wir die Gleichung (1), indem wir dieselbe als auf die reducirte Form gebracht betrachten, also:

$$x^3+bx+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

mit der Gleichung (9), so bemerken wir, dass die Wurzeln von (13) gerade das Doppelte der Wurzeln von (9) sind, und weil die abwechselnden Glieder dieser zwei Gleichungen entgegengesetzte Zeichen haben, so leuchtet ein, dass wenn r_1, r_2, r_3 die Wurzeln der Gl. (13) bezeichnen, dann $-\frac{r_1}{2}$, $-\frac{r_2}{2}$, $-\frac{r_3}{2}$ die Wurzeln der Gl. (9) sein werden. Die Werthe von α sind demnach die Hälften von x mit entgegengesetzten Zeichen.

11. Wir wollen nun diese Formeln auf ein paar Beispiele anwenden, in welchen die gegebene Gleichung bereits auf die reducirte Form gebracht ist.

1. Beispiel.

Vollständige Lösung der Gleichung $x^3-6x-6=0$.

Wenn r, $\alpha+\sqrt{-\beta}$ und $\alpha-\sqrt{-\beta}$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung bezeichnen, so wird, weil das letzte Glied negativ ist, die reelle Wurzel r positiv und der rationale Theil α der beiden andern Wurzeln, sie mögen reell oder imaginär sein, wird negativ und gleich $-\frac{r}{2}$ sein. Der Werth von β wird anzeigen, ob die beiden andern Wurzeln reell oder imaginär sind, jenachdem er nämlich $-$ oder $+$ zum Vorzeichen hat. Wir finden zunächst die reelle Wurzel durch folgende Operation *):

*) Wir setzen voraus, dass der Leser mit Horner's Näherungsmethode vertraut ist. Wir verweisen in dieser Beziehung auf die schätzbare Schrift: *Theorie and Solution, by Professor Young, of Belfast.*

1 + 0	—6	— 6	(2,8473221019
2	4	— 4	
2	—2	— 10	
2	8	9152	
4	6	848	
2	544	714304	
6,8	1144	—133696	
8	608	127795423	
7 6	1752	—5900577	
8	3376	5495637	
8 44	178576	—404940	
4	3392	366430	
8 48	181968	—38510	
4	3392	36643	
8 527	181968	—1867	
7	596 8 9	1832	
8 534	182564 8 9	—35	
7	597 3 8	18	
|85|41	183162 2|7	—17	
	25 6|2	16	
	183187 8|9	—1	
	25 6|2		
	183213|5		
	1|7		
	183215|2		
	1|7		
	183217		

Die reelle Wurzel der Gleichung ist demnach 2,8473221019 und deshalb der rationale Theil der zwei anderen Wurzeln $a = -\frac{r}{2} = -1{,}4236610509$. Nach Gleichung (12) ist $\beta = \frac{b}{4} + \frac{3c}{8a}$; wir finden somit β durch folgende Operation:

—1,4236610509)	—2,2500000000	(1,580432366
	1 4236610509	$-1{,}5 = \frac{1}{4}b$
	8263389491	$0{,}080432366 = \beta$
	7118305254	
	1145084237	
	1138928811	
	6155426	
	5694644	
	460782	
	427098	
	33684	
	28473	
	5211	
	4270	
	940	
	854	
	86	
	85	

Da β positiv ist, so sind die beiden übrigen Wurzeln imaginär und haben die Werthe:

$$-1{,}4236610509 \pm \sqrt{-0{,}080432366} \text{ oder } -1{,}4236610509 \pm 0{,}28360600\sqrt{-1}.$$

2. Beispiel.

Vollständige Lösung der cubischen Gleichung $x^3 - 17x^2 + 54x - 350 = 0$.

Hat man das zweite Glied entfernt, so findet man die Wurzeln der transformirten Gleichung durch eine einzige Operation in folgender Weise:

1 — 17	+ 54	—350 (5$\frac{2}{3}$ oder 5,66666666666
5,6	—64 2	—57,925
— 11,3	—10,2	—407,925
5,6	— 32,1	348
— 5,6	— 42,3	— 59,925925925
5,6	81	41,221333333
0	38 6	—18,704592592
9	162	17,104085333
9	200,66	—1 600507259
9	5 44	1,513517570
18	206,106	—86989689
9	5 48	86569167
27 2	211,5866	—420522
2	2 2144	216434
27 4	213,80106	—204088
2	2 2208	194791
27 68	216 02186 6	—9297
8	19492 9	8657
27 76	216,21679 56	— 640
8	19497 8	433
27 847	216,41177|3	—207
7	1114|4	195
27 854	216,42291|7	—12
7	1114|4	11
2|78|61	216,43406	

(9,28740194295
14,95406860961 = d.reell.Wurzel.

2)—9,28740194295
—4,64370097147
5,66666666666
1,02296569519 = α.

der rationale Theil der zwei anderen Wurzeln. Der Werth von β wird aus Gl. (12) gefunden wie folgt.

	$c =$ —407,925	
	3	
8)	— 1223,777	
— 4,64370097147)	— 152,972222222	(32,941876138
	139 311029144	—10,583333333 $= \frac{1}{4}b$
	13 661193078	22,358542805 $= \beta$
	9 287401943	
	4 373791135	
	4 179330874	
	194460261	
	185748038	

8712222
4643701
4068521
3714960
353561
325059
28502
27862
640
464
176
139
37

Der positive Werth von β zeigt an, dass die übrigen Wurzeln imaginär sind, so dass wir für die Wurzeln der Gleichung folgende Werthe erhalten:

$$14{,}95406860961 \text{ und } 1{,}02296569519 \pm \sqrt{-22{,}358542805}.$$

3. Beispiel.

Vollständige Lösung der Gleichung $x^3 - 7x + 7 = 0$.

Eine reelle Wurzel dieser Gleichung ist negativ, weil das letzte Glied positiv ist und wir erhalten diese negative Wurzel ohne Aenderung der Zeichen in den abwechselnden Gliedern.

1 + 0	—7	+ 7,000000000 (— 3,0489173395 = r
— 3	9	— 6
— 3	2	1,000000
— 3	18	— 814464
— 6	200000	185536000
— 3	3616	— 166382592
— 904	203616	19153408
— 4	3632	—18791228
— 908	207248	362180
— 4	73024	—208875
— 9128	20797824	153305
— 8	73088	—146213
— 9136	2087091|2	7092
— 8	823|0	—6266
—91,44	2087914|2	826
	823|	—627
	208873|7	199
	|9	—188
	208874|6	11
	|9	
	208875	

Also ist $\alpha = -\frac{r}{2} = 1{,}5244586698$, und der Werth von β wird weiter unten durch die Gleichung

$$\beta = \frac{b}{4} + \frac{3c}{8\alpha}.$$

gefunden.

1,5244586698)	2,6250000000	(1,7219227074
	1 5244586698	— 1,75 $= \frac{1}{4}b$
	11005413302	— 0,0280772926 $= \beta$.
	10671210689	
	334202613	
	304891734	
	29310879	
	15244587	
	14066292	
	13720128	
	346164	
	304892	
	41272	
	30489	
	10783	
	10671	
	112	
	106	
	6	

Die Wurzeln sind demnach sämmtlich reell und es stimmen zwei von ihnen in der ersten Ziffer überein, da $\sqrt{-\beta} = 0{,}167562802$; es ist nämlich:

$$\alpha + \sqrt{-\beta} = 1{,}524458669 + 0{,}167562802 = 1{,}692021471$$
$$\alpha - \sqrt{-\beta} = 1{,}524458669 - 0{,}167562802 = 1{,}356895867,$$

und die oben gefundene negative Wurzel $= -3{,}048917339$.

Durch diese Methode wird die Trennung der nahe gleichen Wurzeln der Gleichungen vollständig bewirkt und wir werden dieselbe auf ein Beispiel mit zwei nahe gleichen Wurzeln anwenden.

4. Beispiel.

Aufsuchung der Wurzeln der Gleichung $x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$.

Die reelle Wurzel dieser Gleichung ist negativ, da das Zeichen des letzten Gliedes positiv ist. Durch Aenderung der abwechselnden Zeichen gelangen wir deshalb zu folgender Operation.

1 — 11	— 102	— 181 ($3\frac{2}{3}$ oder	3,66666666666
3,6	— 26,8	— 472,592	
— 7,3	— 128,8	— 653,592592592	(13,77598229514
3,6	— 13,4	346,666666666	17,44264896180
— 3,6	— 142,3	— 306,925925925	
3,6	— 169	274,719666666	2) 13,77598229514
0	26,6	— 32,206259259	6,88799114757
13	338	29,653299666	3,66666666666
13	364,66	— 2,552959592	3,22132448091 $= \alpha$,
13	27,79	2,133559708	
26	392,456	— 419399884	der reelle Theil der beiden übrigen Wurzeln.
13	28,28	384260160	
397	420,7366	— 35139724	
7	2,8819	34159698	
404	423,61856	— 980026	
7	2,8868	853999	
4117	423,50536 6	— 126027	
7	0,20657 5	85400	
4124		— 40627	
7		38430	

```
41315          426,71194 16          — 2197
    5            0,20660 0             2135
------        ------------           ------
41320          426,91854|1            — 62
    5              3719|2                43
------        ------------           ------
4|13|25        426,95573|3               19
                   3719|2
              ------------
               426,9929|3
                     33|0
              ------------
               426,9962|3
                     33|
              ------------
               426,9995
```

```
                    c =  653,5925925925
                                      3
                         --------------
                  8 )   1960,7777777777
    6,88799114757 )      245,0972222222  (   35,58326614703
                         206,6397344271  — 35,58333333333 = 1/4 b
                         --------------  —  0,00006718630 = β.
                          38,4574877951
                          34,4399557378
                          -------------
                           4,0175320573
                           3,4439955738
                           ------------
                             5735364835
                             5510392918
                             ----------
                              224971917
                              206639734
                              ---------
                               18332183
                               13775982
                               --------
                                4556201
                                4132795
                                -------
                                 423406
                                 413279
                                 ------
                                  10127
                                   6888
                                   ----
                                   3239
                                   2755
                                   ----
                                    484
                                    482
                                    ---
                                      2
```

Da β negativ ist, so sind die beiden anderen Wurzeln reell und da $\sqrt{-\beta} = 0{,}0081967265$, so unterscheiden sich diese Wurzeln nur um eine Einheit der zweiten Dezimalstelle; es ist nämlich

$\alpha + \sqrt{-\beta} = 3{,}2213244809 + 0{,}0081967265 = 3{,}2295212074$,

$\alpha - \sqrt{-\beta} = 3{,}2213244809 - 0{,}0081967265 = 2{,}2131277544$,

und die negative Wurzel wurde gefunden $= -17{,}4426489618$.

12. Aus der Lösung des vorigen Beispiels leuchtet ein, dass wenn die gegebene Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, der Werth von β als eine gänzlich verschwindende Grösse gefunden werden wird. Die behandelte Methode lehrt sonach sowohl die imaginären, als auch die reellen Wurzeln finden, dieselben mögen gleich, ungleich oder nahe gleich sein.

13. Bevor wir zur Lösung biquadratischer Gleichungen übergehen, halten wir es für zweckmässig, ein einfaches Verfahren zur Herleitung der nöthigen Gleichungen Behufs der Lösung cubischer Gleichungen anzugeben.

Ist $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eine cubische Gleichung, deren drei Wurzeln wir bezeichnen durch $-(2y + a)$, $y + \sqrt{z}$, $y - \sqrt{z}$; und bilden wir die Gleichung, wovon diese Ausdrücke die Wurzeln sind, so erhalten wir durch Gleichsetzung der Coeffizienten gleichhoher Potenzen der Unbekannten in beiden Gleichungen:

$$z + 3y^2 + 2ay = -b \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$
$$(2y + a)(y^2 - z) = c \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Eliminiren wir z aus diesen Gleichungen, so erhalten wir

$$y^3 + ay^2 + \frac{a^2+b}{4}\, y + \frac{ab-c}{8} = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

und wenn die gegebene Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ wäre, würde (3) übergehen in

$$y^3 + \frac{b}{4} y - \frac{c}{8} = 0.$$

Dies sind in der That die Gleichungen, welche wir bereits gefunden haben und durch welche die Lösung der cubischen Gleichungen vollständig erreicht wird. Der Werth von z wird in derselben Weise gefunden, wie wir früher bei der Bestimmung von β angegeben. Ist $z = 0$, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln, ist z positiv, so sind alle Wurzeln reell, und ist z negativ, dann sind zwei Wurzeln imaginär.

Wir gehen nun über zur Lösung der biquadratischen Gleichungen, welche in allen Fällen durch die Lösung einer cubischen und die Ausziehung der Quadratwurzel bewirkt wird.

II. Biquadratische Gleichungen.

14. Es sei

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

die vom zweiten Gliede befreite biquadratische Gleichung.

Setzen wir in den Gleichungen (6) $m = 4$ und erinnern uns, dass in dem Ausdrucke (A) die Coeffizienten c', d', etc. $= 0$ sind, so haben wir $f_3\alpha = 0$, $f_4\alpha = 0$; folglich

$$A\beta - C = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (2),$$
$$\beta^2 - B\beta + D = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (3).$$

Nach Elimination von β aus diesen Gleichungen erhalten wir die Relation

$$ABC - A^2D - C^2 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Setzen wir in den unter 7. aufgestellten Gleichungen (3) $m = 4$, so haben wir, weil $a = 0$,

$$A = 4\alpha,$$
$$B = 6\alpha^2 + b$$
$$C = 4\alpha^3 + 2b\alpha + c$$
$$D = \alpha^4 + b\alpha^2 + c\alpha + d.$$

Substituiren wir diese Werthe von A, B, C, D in die Relation (4), so bekommen wir

$$\alpha^6 + \frac{b}{2}\alpha^4 + \frac{b^2-4d}{16}\alpha^2 - \frac{c^2}{64} = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (5).$$

Diese Gleichung ist identisch mit der von Waring in den *Philosophical Transactions* i. J. 1779 aufgestellten. Mit Hülfe derselben kann man alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung finden, sie mögen nun reell oder imaginär, theilweise gleich oder nahe gleich sein.

Das letzte Glied der vorigen Gleichung ist negativ, woraus hervorgeht, dass einer der Werthe von α^2 reell und positiv ist, und desshalb wird α zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen ($+\alpha$

und $-\alpha$) haben. Die zwei Werthe von α liefern zwei Werthe von β mittelst der Gleichung (2) oder einer Gleichung von sehr einfacher Natur, welche wir nun hieraus herleiten wollen.

Da $$\mathrm{A} = 4\alpha$$
und $$\mathrm{C} = 4\alpha^3 + 2b\alpha = c,$$
so folgt aus der Gleichung $\mathrm{A}\beta - \mathrm{C} = 0$, dass

$$\beta = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \frac{4\alpha^3 + 2b\alpha + c}{4\alpha} = \alpha^2 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6).$$

Dieser Ausdruck giebt sofort den Werth von β, da α^2 und α bereits bestimmt sind, und wir haben behufs der Bestimmung von β nur noch die Division von $\frac{1}{4}c$ durch α auszuführen.

Ist die gegebene Gleichung von der Form

$$x^4 + ax^3 + bx + cx + d = 0,$$

so ist die resultirende Gleichung für α

$$\alpha^6 + \frac{3}{2}a\alpha^5 + \frac{3a^2+2ab}{4}\alpha^4 + \frac{a(a^2+4b)}{8}\alpha^3 + \frac{a(2ab+c)+b^2-4d}{16}\alpha^2$$
$$+ \frac{a(ac+b^2-4d)}{32}\alpha + \frac{abc - a^3d - c^2}{64} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7).$$

15. Das Resultat (5) erhalten wir auch auf folgende höchst einfache Weise.

Bezeichnen $y \pm \sqrt{z_1}$ und $-y \pm \sqrt{z_2}$ die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0;$$

so erhält man durch Bildung der Gleichung, welche diese Ausdrücke $y \pm \sqrt{z_1}$ und $-y \pm \sqrt{z_2}$ zu Wurzeln hat, und nach Gleichsetzung der Coeffizienten gleichhoher Potenzen der Unbekannten in beiden Gleichungen,

$$2y^2 + z_1 + z_2 = -b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (8).$$
$$2y(z_1 - z_2) = -c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$
$$y^4 - y^2(z_1+z_2) + z_1 z_2 = d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

Durch Elimination von z_1 und z_2 aus diesen drei Gleichungen erhält man

$$y^6 + \frac{b}{2}y^4 + \frac{b^2-4d}{16}y^2 - \frac{c^2}{64} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

Es lässt sich somit y aus einer cubischen Gleichung bestimmen, woraus dann die Werthe von z_1 und z_2 mittelst (8) und (9) gefunden werden.

1. Beispiel.

Lösung der biquadratischen Gleichung

$$x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Hier haben wir durch Vermehrung der Wurzeln um 0,25 das zweite Glied zu entfernen.

1 + 1	+ 4	— 4	+ 1	(—0,25
— 0,25	— 0,1875	— 0,953125	1,23828125	
0,75	3,8125	— 4,953125	2,23828125	
— 0,25	— 0,125	— 0,921875		
0,50	3,6875	— 5,875		
— 0,25	— 0,0625			
0,25	3,6250			
0,25				
0				

Die Gleichung für $x + 0{,}25$ oder x' ist demnach

$$x'^4 + 3{,}625\, x'^2 - 5{,}875\, x' + 2{,}23828125 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2);$$

und es geht somit Gleichung (5) nach Einsetzung dieser Coeffizienten für b, c, d über in

$$\alpha^6 + 1{,}8125\,\alpha^4 + 0{,}26171875\,\alpha^2 + 0{,}539306640625 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Dies ist eine cubische Gleichung für α^2, welche nur eine reelle, positive Wurzel hat, die auf die gewöhnliche Weise gefunden wird.

1 + 1,8125	+ 0,26171875	— 0,539306640625	(0,43507305096 = α^2
4	0,88500	0,458687500	
2,2125	1,14671875	— 0,080619140625	
4	1,04500	684898125	
2,6125	2,19171875	— 12129328125	
4	91275	1195353125	
3,0125	2,28299375	— 175786875	
3	92175	168454089	
3,0425	2,37516875	— 7342786	
3	155375	7220143	
3,0725	2,39070625	— 122643	
3	155625	120336	
3,1025	2,4062687|5	— 2307	
5	2182|3	2166	
3,1075	2,4064869|8	— 141	
5	2182|3		
3,1125	2,406705|2		
5	9|3		
3,|11|75	2,406714|5		
	9|3		
	24,06724		

α^2 = 0,43507305096 (0,65960067538	$\pm$ 0,65960067538) — 1,46875000000 ($\mp$ 2,2267260402
36	1,31920135076
120) 750	14954864924
625	13192013508
1309)12573	1762851416
11781	1319201351
13186)79205	443650065
79116	395760405
1319200)890960	47889660
791520	46172047
99440	1717613
92344	1319201
7096	398412
6596	395760
500	2652
396	2638
104	14
104	13

Es ist also $\alpha = 0{,}65960067538$, und die rationalen Theile der vier Wurzeln haben die Werthe $-0{,}25 \pm 0{,}65960067538$, oder $0{,}40960067538$ und $-0{,}90960067538$.

Die Werthe von β werden aus der Formel $\beta = \alpha^2 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4\alpha}$ gefunden.

$$\begin{array}{rrl} \alpha^2 = & & 0{,}4350730509 \\ \frac{b}{2} = & & 1{,}8125 \\ +\frac{c}{4\alpha} = & - & 2{,}2267260402 \\ \hline \beta = & & 0{,}0208470107 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \alpha^2 = & 0{,}43507305096 \\ \frac{b}{2} = & 1{,}8125 \\ -\frac{c}{4\alpha} = & 2{,}2267260402 \\ \hline \beta = & 4{,}4742990912 \end{array}$$

Die Werthe von β sind beide positiv und somit alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung imaginär. Die Wurzeln sind demnach

$$0{,}40960067538 \pm \sqrt{-0{,}0208470107},$$
$$-0{,}90960067938 \pm \sqrt{-4{,}4742990912}.$$

Im vorigen Beispiele ist die Operation in aller Vollständigkeit durchgeführt worden, um den Umfang der Arbeit zu zeigen, welcher zur Bestimmung der vier, gleichviel ob reellen oder imaginären Wurzeln einer biquadratischen Gleichung erforderlich ist. In den folgenden Beispielen jedoch werden die gemeinschaftlichen Operationen der Division und Quadratwurzelausziehung nur durch die gewöhnlichen Zeichen angedeutet werden.

2. Beispiel.

Vollständige Lösung der Gleichung $x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0$.

(*Prof. Young's Math. Dissertations*, p. 160.)

1	− 80	+ 1998	− 14937	+ 5000	(20
	20	− 1200	15960	20460	
	− 60	798	1023	25460	
	20	− 800	− 40		
	− 40	− 2	983		
	20	− 400			
	− 20	− 402			
	20				
	0				

Es ist also $b = -402$, $c = 983$ und $d = 25460$; folglich geht Gleichung (5) über in

$$\alpha^6 - 201\ \alpha^4 + 3735{,}25\alpha^2 - 15098{,}265625 = 0.$$

Diese Gleichung für α^2 giebt drei reelle und positive Wurzeln. Es reicht hin eine derselben zu bestimmen, woraus zwei Werthe für α und daraus nach (5) zwei Werthe für β erhalten werden.

1 — 201	+ 3735,25	— 15098,265625 (5,80022839388 $= \alpha^2$
5	— 980	13776,25
— 196	2755,25	— 1322,015625
5	— 955	1321,672
— 191	1800,25	— 0,343625000
5	— 148,16	0,300906656
— 1860	1652,09	— 42718344
8	— 147,52	30089858
— 1852	1504,570000	— 12628486
8	— 3672	12035902
— 1844	1504,53328	— 592584
8	— 3672	451346
— |18|36|00	1504,4965|6	— 141238
	— 36|7	135404
	1504,4928|9	— 5834
	— 36|7	4513
	1504,489|2	— 1321
	— 1|4	1203
	1504,487|8	— 118
	— 1|4	
	1504,486	

Somit ist $\alpha = \sqrt{5,80022839388} = \pm 2,4083663330$, und folglich sind die rationalen Theile der vier Wurzeln $20 \pm 2,408366333 = 22,408366333$ und $17,5916333667$. Ferner ist

$$\begin{array}{rl} \alpha^2 = & 5,80022839 \\ \frac{b}{2} = & -201 \\ \frac{c}{4\alpha} = & 102,04012431 \\ \hline \beta = & -93,15964730 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \alpha^2 = & 5,80022839 \\ \frac{b}{2} = & -201 \\ -\frac{c}{4\alpha} = & -102,04012431 \\ \hline \beta = & -297,23989592. \end{array}$$

Da die Werthe von β beide negativ sind, so sind alle vier Wurzeln reell und haben die Werthe

$$22,408366333 \pm \sqrt{93,15964730},$$
$$17,591633667 \pm \sqrt{297,23989592}.$$

Nach Ausziehung der Quadratwurzeln gelangen wir zu folgenden vier positiven Wurzeln:

$$\begin{array}{l} 22,408366333 + 9,651924539 = 32,060290872 \\ 22,408366333 - 9,651924539 = 12,756441794 \\ 17,591633667 + 17,240646621 = 34,832280288 \\ 17,591633667 - 17,240646621 = 0,350987046 \\ \hline \text{Probe} \ . \ . \ 80,000000000 \end{array}$$

3. Beispiel.

Vollständige Lösung der Gleichung

$$x^4 + 312x^3 + 23337x^2 - 14874x + 2366 = 0.$$

Wir entfernen das zweite Glied durch Vermehrung der Wurzel um 78.

1 + 312	+ 23337	— 14874	+ 2360 (—78
— 70	— 16946	— 447790	32386480
242	6397	— 462664	32388840
— 70	— 12046	395010	— 289168
172	— 5643	— 67654	32099672
— 70	— 7149	103800	
102	— 12783	36146	
— 70	— 192	104824	
32	— 12975	140970	
— 8	— 128		
24	— 13103		
— 8	— 64		
16	— 13167		
— 8			
8			
— 8			
0			

Die Coeffizienten der transformirten Gleichung sind:

$b = -13167,$
$c = 140979,$
$d = 32099672.$

Die Gleichung für α^2 ist folglich

$$\alpha^6 - 6583{,}5\alpha^4 + 2810700{,}0625\alpha^2 - 310508451{,}5625 = 0,$$

und hat drei reelle positive Wurzeln. Wir suchen eine derselben auf.

1 —6583,5	+ 2810700,0625	— 310508451,5625	$(225 = \alpha^2;$
200	— 1276700	306800012,5	
—6383,5	1534000,0625	— 3708439,0625	
200	— 1236700	3560601,25	$\therefore \alpha = \pm 15.$
—6183,5	297300,0625	— 147837,8125	
200	— 119270	147837,8125	
—5983,5	178030,0625		
20	— 118870		
—5963,5	59160,0625		
20	— 29592,5		
—5943,5	29567,5625		
20			
—5923,5			
5			
—5918,5			

Die rationalen Theile der vier Wurzeln sind demnach $-78 \pm 15 = -63$ und -93; und wir haben deshalb:

$$\beta = \alpha^2 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4\alpha} = 225 - 6583{,}5 + 2349{,}5 = -4009;$$

$$\beta = \alpha^2 + \frac{b}{2} - \frac{c}{4\alpha} = 225 - 6583{,}5 - 2349{,}5 = -8708.$$

Die vier Wurzeln der Gleichung sind also sämmtlich reell und haben die Werthe

$$-63+\sqrt{4009}= \quad 0{,}3166644731069,$$
$$-63-\sqrt{4009}=-126{,}3166644731069,$$
$$-93+\sqrt{8708}= \quad 0{,}3166651783056,$$
$$-93-\sqrt{8708}=-186{,}3166651783056.$$

Diese merkwürdige Gleichung wurde dem Professor Young zu Belfast übersendet von Mr. Lockhardt, einem Gelehrten, der lange und mit Erfolg in diesem Gebiete der Wissenschaft gearbeitet hat. Professor Young hat in einer kleinen Schrift: *„The Analysis and Solution of Cubic and Biquadratic Equations,"* jene Gleichung mit dem ihm eigenen Geschick gelöst und deren Wurzeln bis zur neunten Decimalstelle genau bestimmt.

III. Gleichungen des fünften Grades.

16. Die gegebene Gleichung des fünften Grades sei nach nöthigenfalls bewirkter Entfernung des zweiten Gliedes:

$$x^5+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad \ldots \quad (1).$$

Setzen wir in Gl. (6) . . $m=5$, dann sind d', e', f', etc. in dem Ausdrucke (A) sämmtlich gleich Null, und wir haben $f_4\alpha=0$, und $f_5\alpha=0$, und erhalten somit

$$\beta^2-\mathrm{B}\beta+\mathrm{D}=0 \quad \ldots \quad (2),$$
$$\mathrm{A}\beta^2-\mathrm{C}\beta+\mathrm{E}=0 \quad \ldots \quad (3).$$

Eliminiren wir β aus diesen beiden Gleichungen, so gelangen wir zu der Relation

$$(\mathrm{AB}-\mathrm{C})(\mathrm{CD}-\mathrm{BE})=(\mathrm{AD}-\mathrm{E})^2 \quad \ldots \quad (4).$$

Wird auch in den unter 7. aufgestellten Gleichungen (3) . . $m=5$ gesetzt, so ist, weil $a=0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=5\alpha\\
\mathrm{B}&=10\alpha^2+b\\
\mathrm{C}&=10\alpha^3+3b\alpha+c\\
\mathrm{D}&=5\alpha^4+3b\alpha^2+2c\alpha+d\\
\mathrm{E}&=\alpha^5+b\alpha^3+c\alpha^2+d\alpha+e.
\end{aligned}$$

Substituiren wir diese Werthe von A, B, C, D, E in die Relation (4), so bekommen wir

$$\alpha^{10}+\frac{3b}{4}\alpha^8+\frac{c}{8}\alpha^7+\frac{3(b^2-d)}{16}\alpha^6+\frac{2bc-11e}{32}\alpha^5+\frac{b(b^2-2d)-c^2}{64}\alpha^4+\frac{c(b^2-4d)-4be}{128}\alpha^3$$
$$+\frac{d(b^2-4d)-c(bc-7e)}{256}\alpha^2-\frac{e(b^2-4d)+c^3}{512}\alpha-\frac{c(cd-be)+e^2}{1024}=0 \quad \ldots \quad (5).$$

Transformiren wir diese Gleichung in eine andere, deren Wurzeln das Doppelte von denen der vorigen sind, so geht sie über in folgende:

$$\alpha^{10}+3b\alpha^8+c\alpha^7+3(b^2-d)\alpha^6+(2bc-11e)\alpha^5+[b(b^2-2d)-c^2]\alpha^4+[c(b^2-4d)-4be]\alpha^3$$
$$+[d(b^2-4d)-c(bc-7e)]\alpha^2-[e(b^2-4d)+c^3]\alpha-c(cd-be)-e^2=0 \quad \ldots \quad (5'),$$

welche zuweilen bequemer sein dürfte als Gleichung (5).

Die Elimination von α aus den Gleichungen (2) und 3) wird zu einer Gleichung des 10ten Grades führen, analog der complicirten und schwerfälligen Gleichung von Waring, welche auch von Lagrange in seiner *„Traité des Résolutions des Équations Numériques"* p. 111 aufgestellt ist.

Hat man aus Gleichung (5) die Werthe von α erhalten, so werden die von β aus den Gleichungen (2) und (3) gefunden. Unter diesen Werthen von β sind jedoch nur die zu nehmen, die beiden Gleichungen zugleich angehören, während die übrigen unberücksichtigt zu lassen sind.

Um jede Zweideutigkeit bei der Bestimmung der Werthe von β zu vermeiden, muss man das grösste gemeinschaftliche Mass von (2) und (3) aufsuchen und gleich Null setzen; die hierdurch erhaltene Gleichung giebt dann die besonderen Werthe von β. Wird (3) durch (2) dividirt, so bleibt als Rest

$$(AB - C)\beta - (AD - E).$$

Dieser Ausdruck vom ersten Grade ist nothwendig das grösste gemeinschaftliche Mass von (2) und (3). Setzen wir ihn gleich Null, so bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{AD - E}{AB - C} = \frac{24\alpha^5 + 14b\alpha^3 + 9c\alpha^2 + 4d\alpha - e}{40\alpha^3 + 2b\alpha - c} \\ \text{oder}\quad \beta &= \frac{3}{5}\alpha^2 + \frac{8b}{25} + \frac{240c\alpha^2 - 4(b^2 - 25d)\alpha + 8bc - 25e}{25(40\alpha^3 + 2b\alpha - c)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Diese Gleichung bestimmt den Werth von β, so dass, wenn α bekannt ist, die Wurzeln der gegebenen Gleichung erhalten werden.

17. Bei der Lösung der Gleichungen fünften Grades wird es hinreichen, eine der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung und auch eine der reellen Wurzeln der Gleichung (5) zu suchen; denn wenn r die reelle Wurzel von (1) und $\alpha_1 \pm \sqrt{-\beta_1}$ und $\alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2}$, die übrigen vier Wurzeln bezeichnen, dann haben wir, weil das zweite Glied der Gleichung fehlt,

$$r + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

eine Gleichung, welche α_2 giebt, wenn r und α_1 bestimmt sind.

Wenn die Coeffizienten b, c, d, e so beschaffen sind, dass sie das letzte Glied der Gl. (5) zu Null machen, dann ist eine Wurzel dieser Gleichung gleich Null und es werden die Wurzeln der gegebenen Gleichung ohne Addition gefunden. Es ist nämlich $\alpha_1 = 0$ und es haben deshalb die beiden Wurzeln die Form $\pm\sqrt{-\beta_1}$, wo

$$\beta_1 = \frac{2}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

1. Beispiel.

Vollständige Lösung der Gleichung

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Diese Gleichung hat eine reelle Wurzel zwischen 0 und 1, weil das letzte Glied negativ ist. Entfernen wir das zweite Glied, so haben wir zur Bestimmung der reellen Wurzel folgende Operation.

1 + 1,0	+ 1,00	— 2.000	+ 2,0000	— 1,00000	(—0,2
— 0,2	— 0,16	— 0,168	4336	— 48672	
0,8	0,84	— 2,168	2,4336	—1,48672	(0,8407459688
— 0,2	— 0,12	— 144	4624	139008	0,6407459688 = d.Wurzel.
0,6	0,72	— 2,312	2,8960	— 966400000	
— 0,2	— 8	— 128	— 11584	947303424	
0,4	0,64	— 2,440	17376	— 19096576	
— 0,2	— 4	992	4544	17918179	
0,2	0,60	— 1448	219200000	— 1178397	
—0,2	64	2016	17625856	1025378	
00,8	124	568	236825856	— 153019	
8	128	3552	18797824	128183	
16	252	4120000	2556236|8'0	— 24836	
8	192	286464	3503|0	23073	
24	444	4406464	2559739|8	— 1763	
8	256	292992	3506|7	1538	
32	70000	4699456	256324|6	— 225	
8	1616	299584	20|0	205	
404	71616	499|90'40	256344|6	— 20	
4	1632	|53	20|	20	
408	73248	500|43	25636|5		
4	1648	|53	|2		
412	74896	500|96	25636|7		
4	1644	|53	|2		
416	76560	|0,5|01	25637		
4					
|0,420					

Die reelle Wurzel von (1) ist deshalb 0,6407459688, und die Coeffizienten der vom zweiten Gliede befreiten Gleichung sind

$$b = 0{,}6,\; c = 2{,}44,\; d = 2{,}896, \text{ und } e = -1{,}48672;$$

$$\therefore \text{ nach (5), } \alpha^{10} + 0{,}45\alpha^8 - 0{,}305\alpha^7 - 0{,}4755\alpha^6 + 0{,}41956\alpha^5 - 0{,}14395\alpha^4 + 0{,}2418335\alpha^3 - 0{,}04173315\alpha^2 - 0{,}004219065\alpha - 0{,}0168705116 = 0 \quad \ldots\ldots (2).$$

Ergänzt man das fehlende Glied der Gleichung durch den Coeffizienten Null, so entstehen sieben Zeichenwechsel; folglich giebt nach Budans Erkennungsregel die Gleichung

für $(\alpha - 0{,}6)$ die Zeichen + + + + + + + + + + + 7 verloren gegangene Zeichenwechsel,

„ $\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{0{,}6}\right)$ . . . . . + + + + + + + + + + — 1 gebliebener Zeichenwechsel.

Die Gleichung hat demnach sechs imaginäre Wurzeln in dem Intervalle 0 bis 0,6. Nach Aenderung der Zeichen in den abwechselnden Gliedern giebt die Gleichung

für $(-\alpha)$ die Zeichen + + + + — — — — — + — 3 Zeichenwechsel,

„ $(-\alpha - 1)$ . . . . + + + + + + + + + + + 3 verloren gegangene Zeichenwechsel.

„ $\left(-\frac{1}{\alpha} - 1\right)$ . . . . + + + + + + + + + + — 1 gebliebener Zeichenwechsel.

Die Gleichung (2) hat deshalb zwei imaginäre Wurzeln in dem Intervalle 0 bis — 1 und hat folglich nur zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative. Wir wollen die positive Wurzel der Gleichung (2) aufsuchen.

<table>
<tr><td>1</td><td>+ 0</td><td>+ 0,45</td><td>—0,305</td><td>—0,4755</td><td>+0,41956</td><td>—0,143950</td><td>+0,2418335</td><td>—0,04173315</td><td>—0,004219065</td><td>—0,0168705116</td><td>(0,517041280</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>25</td><td>350</td><td>225</td><td>— 22650</td><td>96530</td><td>— 237100</td><td>10906175</td><td>33664300</td><td>+ 147226175</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>70</td><td>45</td><td>— 4530</td><td>19306</td><td>— 47420</td><td>2181235</td><td>6732860</td><td>29445235</td><td>— 21478941</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>50</td><td>600</td><td>3225</td><td>— 6525</td><td>63905</td><td>82425</td><td>11318300</td><td>90255800</td><td>12335396</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>120</td><td>645</td><td>— 1305</td><td>12781</td><td>16485</td><td>2263660</td><td>18051160</td><td>11970103|5</td><td>—9143545</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>75</td><td>975</td><td>8100</td><td>33975</td><td>233780</td><td>1251325</td><td>17574925</td><td>365292|1</td><td>9088789</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>15</td><td>195</td><td>1620</td><td>6795</td><td>46756</td><td>250265</td><td>3514985</td><td>356260|85</td><td>12335395|6</td><td>— 54756</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>100</td><td>1475</td><td>15475</td><td>111350</td><td>790530</td><td>5203975</td><td>9031|27</td><td>374644|4</td><td>53058</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>20</td><td>295</td><td>3095</td><td>22270</td><td>158106</td><td>1040795</td><td>8718|960</td><td>365292|12</td><td>1271004|0</td><td>— 1698</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>125</td><td>2100</td><td>25975</td><td>241225</td><td>1996655</td><td>312|311</td><td>9352|3</td><td>27394|5</td><td>1327</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>25</td><td>420</td><td>5195</td><td>48245</td><td>399331</td><td>303|7450</td><td>9031|271</td><td>374644|4</td><td>1298398|5</td><td>— 371</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>150</td><td>2850</td><td>40225</td><td>442350</td><td>8|5658</td><td>321|03</td><td>9682|2</td><td>27885|9</td><td>265</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>30</td><td>570</td><td>8045</td><td>88470</td><td>8|41681</td><td>312|3108</td><td>9352|30</td><td>3843|27</td><td>13262|8|4</td><td>— 106</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>175</td><td>3725</td><td>58850</td><td>|14898</td><td>8|7164</td><td>329|89</td><td>70|2</td><td>1|6|</td><td>106</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>35</td><td>745</td><td>11770</td><td>147320</td><td>8|56579</td><td>321|027</td><td>9682|2</td><td>3913|5</td><td>13264|4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>200</td><td>4725</td><td>1661</td><td>|15065</td><td>8|868</td><td>338|9</td><td>70|2</td><td>1|6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>40</td><td>945</td><td>16495</td><td>148981</td><td>8|7164</td><td>329|89</td><td>10|021</td><td>3983|7</td><td>13266</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>225</td><td>117</td><td>1673</td><td>|1523</td><td>9|02</td><td></td><td>70|2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>45</td><td>1170</td><td>16612</td><td>15065</td><td>8|8687</td><td>338|9</td><td></td><td>|40|54</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>5</td><td>12</td><td>168</td><td>|1540</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>50</td><td>1175</td><td>1673</td><td>15233</td><td>9|0227</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>118</td><td>1685</td><td>15401</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Somit ist $\alpha_1 = 0{,}517041285$ und $r = 0{,}8407459688$; wir haben deshalb nach Formel (7)

$$r + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0\,; \text{ oder } \alpha_2 = -\frac{r}{2} - \alpha_1 = -0{,}9374142644.$$

Ferner haben wir nach der zweiten Formel unter (6)

$$\beta = \frac{3}{5}\alpha^2 + 0{,}192 + \frac{-23{,}424\alpha^2 + 11{,}3536\alpha + 1{,}01824}{40\alpha^3 + 1{,}2\alpha + 2{,}44}\,;$$

daher ist, wenn $\alpha = 0{,}517041280$, der Werth von $\beta = 0{,}4253434585$,
und wenn $\alpha = -0{,}9374142644$, ... $\beta = 1{,}6741603770$;

folglich sind die fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$\begin{aligned} &0{,}6407459688 \\ &0{,}3170412800 \pm \sqrt{-0{,}4253434585} \\ -\,&1{,}1374142644 \pm \sqrt{-1{,}6741603770}. \end{aligned}$$

2. Beispiel.

Vollständige Lösung der Gleichung

$$x^5 - 32x^3 + 72x^2 - 185x + 360 = 0 \text{ . . . . (1).}$$

Nach Aenderung der Zeichen in den abwechselnden Gliedern bleibt offenbar nur ein Zeichenwechsel und es ist deshalb die reelle Wurzel negativ.

<table>
<tr><td>1 — 0</td><td>— 32</td><td>— 72</td><td>— 185</td><td>— 360</td><td>(6,88855036</td></tr>
<tr><td>6</td><td>36</td><td>24</td><td>— 288</td><td>—2838</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td><td>— 48</td><td>— 473</td><td>—3198,00000</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>72</td><td>456</td><td>2448</td><td>2728 23168</td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>76</td><td>408</td><td>19750000</td><td>— 46976832</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>108</td><td>1104</td><td>14352896</td><td>42270253</td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td>184</td><td>1512000</td><td>34102896</td><td>— 4706579</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>144</td><td>282112</td><td>16771584</td><td>4402501</td><td></td></tr>
<tr><td>24</td><td>32800</td><td>1794112</td><td>5087448|0</td><td>— 304078</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>2464</td><td>302336</td><td>196333|6</td><td>276231</td><td></td></tr>
<tr><td>308</td><td>35264</td><td>2096448</td><td>5283781|6</td><td>— 27847</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>2528</td><td>323072</td><td>199123|1</td><td>27630</td><td></td></tr>
<tr><td>316</td><td>37792</td><td>24195|20</td><td>548290|5</td><td>— 217</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>2592</td><td>346|50</td><td>2022|1</td><td>166</td><td></td></tr>
<tr><td>324</td><td>40384</td><td>24541|70</td><td>550312|6</td><td>— 51</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>2656</td><td>348|69</td><td>2024|9</td><td>50</td><td></td></tr>
<tr><td>332</td><td>43|040</td><td>24890|39</td><td>55233|7</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>|273</td><td>350|88</td><td>12|6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|0,3408</td><td>43|313</td><td>252|41</td><td>55246|3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>|273</td><td>|35</td><td>12|6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>43|586</td><td>252|76</td><td>5525|9</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>|273</td><td>|35</td><td>|1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>43|86</td><td>253|11</td><td>5526</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>|27</td><td>|35</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>|0,44|</td><td>|0,2|53</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Die negative Wurzel der Gleichung ist —6,88855039, und wir haben aus der Gleichung für α.. $b = -32$, $c = 72$, $d = -185$, und $e = 360$. Die Berechnung des absoluten Gliedes der Gl. (5) giebt (da $e = 5c$),

$$c(cd - be) + e^2 = 72^2(-185 + 160 + 25) = 0;$$

folglich ist eine Wurzel der Gleichung (5) . . $\alpha_1 = 0$ und wir haben aus Gleichung (7)

$$\alpha_2 = -\frac{r}{2} = 3,444275195.$$

Aus (6) gelangen wir demnach zu folgenden Werthen für β_1 und β_2:

$$\beta_1 = \frac{e}{c} = \frac{360}{72} = 5; \text{ und}$$

$$\beta_2 = \frac{3}{5}\alpha^2{}_2 - \frac{256}{25} + \frac{27}{50}. \frac{160\alpha^2{}_2 - 323\alpha_2 - 254}{5\alpha^3{}_2 - 8\alpha_2 - 9} = -1,4109051373.$$

Die Gleichung hat nur zwei imaginäre Wurzeln und wir erhalten als die fünf Wurzeln:

$$-6,88855039; \; +\sqrt{-5}; \; -\sqrt{-5};$$
$$-3,444275195 + \sqrt{1,4109051373} = 4,632090474;$$
$$-3,444275195 + \sqrt{1,4109051373} = 2,256499916.$$

Das gewählte Beispiel beweist die überraschende Leichtigkeit der Methode bei Bestimmung der Wurzeln der Gleichung, wenn eine die Form $\pm\sqrt{-\beta}$ (β mag positiv oder negativ sein) hat.

IV. Gleichungen des sechsten Grades.

18. Es sei die gegebene Gleichung

$$x^6+bx^4+cx^2+dx^2+ex+f=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Setzen wir $m=6$ in der Gleichung (6), und erwägen, dass e', f' etc. in dem Ausdrucke (A) gleich Null sind, so erhalten wir $f_5\alpha=0$ und $f_6\alpha=0$; folglich

$$\mathrm{A}\beta^2-\mathrm{C}\beta+\mathrm{E}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$\beta^3-\mathrm{B}\beta^2+\mathrm{D}\beta-\mathrm{F}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

Die Elimination von β aus diesen beiden Gleichungen führt zu der Relation

$$[\mathrm{C}(\mathrm{AB}-\mathrm{C})-\mathrm{A}(\mathrm{AD}-\mathrm{E})].[\mathrm{E}(\mathrm{AD}-\mathrm{E})-\mathrm{ACF}]=[\mathrm{E}(\mathrm{AB}-\mathrm{C})-\mathrm{A}^2\mathrm{F}]^2 \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Setzen wir in der Gleichung (3) § 7..$m=6$, so erhalten wir, da $a=0$ ist,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=6\alpha\\
\mathrm{B}&=15\alpha^2+b\\
\mathrm{C}&=20\alpha^3+4b\alpha+c\\
\mathrm{D}&=15\alpha^4+6b\alpha^2+3c\alpha+d\\
\mathrm{E}&=\ 6\alpha^5+4b\alpha^3+3c\alpha+2d\alpha+e\\
\mathrm{F}&=\ \alpha^6+b\alpha^4+c\alpha^3+d\alpha^2+e\alpha+f.
\end{aligned}$$

Substituiren wir diese Werthe von A, B, C, D, E, F in die Relation (4), so erhalten wir nach gehöriger Entwickelung die Gleichung

$$\alpha^{15}+b\alpha^{13}+\frac{c}{4}\alpha^{12}+\frac{3b^2-d}{8}\alpha^{11}+\frac{3bc-5e}{16}\alpha^{10}+\frac{4b(2b^2-d)+11f}{128}\alpha^9+\frac{3c(b^2-d)-6be}{64}\alpha^8$$

$$+\frac{b^2(b^2+2d)-3(2bf+ce)-7d^2}{256}\alpha 7+\frac{8[bc(b^2-2d)-e(b^2+5d)-c^3]+75cf}{2048}\alpha^6$$

$$+\frac{(4bd-27f)(b^2-3d)+12c(be-cd)-24e^2}{2048}\alpha^5+\frac{8[cd(b^2-4d)-c^2(bc-3e)-bde]+3f(5bc+33ef)}{8192}\alpha^4$$

$$+\frac{4[d^2(b^2-4d)-c^2(2bd+c^2)+be(bc-5e)+7cde]-f[8b(2b^2-9d)-3)c^2-36f)]}{16384}\alpha^3-\frac{c(c_2d-3e_2)}{4096}\alpha^2$$

$$-\frac{e^2(b^2-3d)+c^2(d^2+ce)-bcde+3cf(bc-3e)}{16384}\alpha+\frac{e^2(bc-e)-c^2(de-cf)}{32768}=0 \quad \ldots\ldots (5).$$

Sind die Werthe der Coeffizienten b, c, d, e, f so beschaffen, dass sie das letzte Glied zu Null machen, so ist $\alpha_1=0$, und wenn die zwei letzten Glieder verschwinden, $\alpha_1=0$ und $\alpha_2=0$.

Um β zu bestimmen, multipliciren wir Gl. (3) mit A, und dividiren durch $\mathrm{A}\beta_2-\mathrm{C}\beta+\mathrm{E}$, so bleibt nach Bestimmung zweier Glieder des Quotienten als Rest

$$[\mathrm{A}(\mathrm{AD}-\mathrm{E})-\mathrm{C}(\mathrm{AB}-\mathrm{C})]\beta+\mathrm{E}(\mathrm{AB}-\mathrm{C})-\mathrm{A}^2\mathrm{F}.$$

Wird dieser $=0$ gesetzt, so ist

$$\beta=\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}-\mathrm{C})-\mathrm{A}^2\mathrm{F}}{\mathrm{C}(\mathrm{AB}-\mathrm{C})-\mathrm{A}(\mathrm{AD}-\mathrm{E})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6);$$

oder nach Substitution der Werthe für A, B, C. D, E, F

$$\beta=\frac{3}{7}\alpha^2+\frac{1408b\alpha^6+1296c\alpha^5+32(b^2+25d)\alpha^4+20(bc+11e)\alpha^3+2(14bd-9c^2-126f)\alpha^2+14(be-cd)\alpha-7ce}{7[896\alpha^6+128b\alpha^4-40c\alpha^3+8(b^2-3d)\alpha^2-2(bc-3e)\alpha-c^2]}$$

$$\ldots\ldots (7).$$

Ist $\alpha_1 = 0$, dann ist nach (7) . . $\beta_1 = \frac{e}{c}$, und es geht die gegebene Gleichung sofort in eine vom vierten Grade über, so dass die vollständige Lösung durch eine cubische Gleichung bewirkt wird.

Die früheren Beispiele zeigen hinreichend die Anwendung der Methode, so dass die Lösung einer Gleichung des 6ten Grades wohl füglich unterbleiben kann.

Note A.

Wir haben vorher eine einfache Methode zur Auffindung der Wurzeln einer cubischen Gleichung mitgetheilt; es möge hier noch eine andere Platz finden, bei welcher alle drei Wurzeln zu gleicher Zeit gefunden werden.

Bezeichnen $\alpha + \sqrt{-\beta}$, $\alpha - \sqrt{-\beta}$ und r die drei Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so nimmt sie nach deren Einsetzung die Form an

$$x^3 - (2\alpha + r)x^2 + (\alpha^2 + 2r\alpha + \beta)x - r(\alpha^2 - \beta) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Vermindern wir die Wurzeln um α, den rationalen Theil der Wurzeln $\alpha \pm \sqrt{-\beta}$, so haben wir folgende Operation:

$$\begin{array}{rrrl}
1 & -(2\alpha + r) & +\; (\alpha^2 + 2r\alpha + \beta)\,x & -\,r(\alpha^2 + \beta)\,(\alpha \\
 & \alpha & -\;\; \alpha^2 - r\alpha & +\,r\;\alpha^2 + \alpha\beta \\
\hline
 & -\alpha - r & r\alpha + \beta & \beta(\alpha - r) \\
 & -r & r\alpha & \\
\hline
 & \alpha & \beta & \\
\hline
 & \alpha - r & & \\
\end{array}$$

Die transformirte Gleichung für $x - \alpha$ oder x' ist demnach

$$x'^3 + (\alpha - r)x'^2 + \beta x' + \beta(\alpha - r) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2);$$

und es haben die Coeffizienten der verschiedenen Potenzen der Unbekannten die Relation, welche unter 9. (pag. 5. und 6) aufgestellt sind. Es geht hieraus hervor, dass wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ um α vermindert werden, der Coeffizient der ersten Potenz der unbekannten in der transformirten Gleichung den Werth von β haben wird; und da bekanntlich

$$r + 2\alpha = -a \text{ oder } \alpha = -\tfrac{1}{2}(a + r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

so können die Werthe von r, α und β gleichzeitig gefunden werden durch Verbindung der Operation zur Auffindung der reellen Wurzel mit der zur Verminderung der Wurzeln um α.

Beispiel.

Bestimmung aller Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 10x^2 + 5x - 2600 = 0.$$

Die Gleichuug hat eine reelle positive Wurzel, während der rationale Theil der zwei andern Wurzeln negativ ist. Schreiben wir daher die Coeffizienten von x^2 und x doppelt und ändern das Zeichen vom Coeffizienten des zweiten Gliedes, um das Operiren mit dem negativen Werthe von α zu vermeiden, so haben wir folgende Operation:

```
                                                                    10
1 + 10    + 5          — 10         + 5                    — 2600/ 11,00679933972 = r
    11      231          10             0                    2596\ 10,50339966986 = — α
    21      236           0             5                    — 4
    11      352          10           100                      3529548216
    32      5880000      10           105                    — 470451784
    11         258036    10            10,25                    411982355
    43006   588258036    205           10,50                  — 58469429
        6      258072    210              64509                 52972218
    43012   58851610|8   21503            64518                — 5497211
        6       3011|3   21506             645279                5297260
  4|30|18   58854622|1   215093            645288               — 199951
                3011|3   215096            19358991               176575
            5885763|3    2150939           19359072             — 23376
                  38|7   2151008             193591611             17657
            5885802|0    21510179            193591692            — 5719
                  38|7   21510188              25812237             5297
            588584|1     215101976              2581224            — 422
                  |4             2               387184              412
            588584|5     43020395                 34416             — 10
                  |4                               2581
            588585
```

$\beta = 125{,}896220477245(11{,}2203485007038 = \sqrt{\beta}$.

Die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind somit

$$11{,}00679933972 \text{ und } -10{,}50339966986 \pm 11{,}2203485007038\sqrt{-1}.$$

Neues und einfaches Verfahren zur Bestimmung aller drei Wurzeln einer cubischen Gleichung *).

Die cubische Gleichung, deren Wurzeln $\alpha + \sqrt{-\beta}$, $\alpha - \sqrt{\beta}$ und r sind, ist

$$x^3 - (2\alpha + r)x^2 + (\alpha^2 + 2r\alpha - \beta)x - r(\alpha^2 - \beta) = 0.$$

Vermindern wir die Wurzeln um r, so geben die Coeffizienten der transformirten Gleichung sofort die Werthe von α und β, ohne dass die Lösung einer quadratischen Gleichung nöthig wäre. Wir haben somit

$$\begin{array}{llll}
1 - (2\alpha + r) & + (\alpha^2 + 2r\alpha - \beta) & - r(\alpha^2 - \beta) & (r \\
\quad\; r & \quad -2r\alpha & \underline{+ r(\alpha^2 - \beta)} & \\
\quad - 2\alpha & \quad \alpha^2 - \beta & & \\
\quad\; r & \quad -2r\alpha + r^2 & & \\
\quad - 2\alpha + r & \quad \alpha^2 - 2r\alpha + r^2 - \beta & & \\
\quad\; r & \quad 3\alpha^2 + 6r\alpha \quad - 3\beta & = \text{dem dreifachen Coeffizienten von } x. & \\
2) - 2\alpha + 2r & \quad 4\alpha^2 + 4r\alpha + r^2 - 4\beta & & \\
\quad - \alpha + r & \quad -(4\alpha^2 + 4r\alpha + r^2) & = \text{dem Quadrate des Coeffizienten von } x^2. & \\
\quad\; -r & \quad 4) - 4\beta & & \\
\quad - \alpha & \quad - \beta & &
\end{array}$$

*) Diesen mit dem Datum Feb. 2, 1849. unterzeichneten Aufsatz des Dr. Rutherford finde ich in dem mir so eben zugegangenen Hefte der Zeitschrift „*The Mathematician.*" (No. 5. Vol. III. March. 1849.) Da die hier entwickelte Methode vor den beiden früheren entschiedene Vorzüge besitzt, so füge ich die betreffende Abhandlung gleich hier noch bei. D. Uebers.

Wenn daher $x^3+ax^2+bx+c=0$ die gegebene Gleichung ist, so bietet das vorher entwickelte Verfahren folgendes Schema zur Lösung dar.

$$
\begin{array}{lll}
1 + a & + b & + c \;\; (r \\
\quad\;\; r & \quad ra' & \quad rb' \\
\hline
\quad\;\; a' & \quad b' & \quad o \\
\quad\;\; r & \quad ra'' & \\
\hline
\quad\;\; a'' & \quad b'' & \\
\quad\;\; r & \quad 3b \text{ addirt} & \\
\hline
2) \;\; a''' & \quad \cdots & \\
\quad \cdots & \quad a^2 \text{ subtrahirt} & \\
\quad -r & 4) -4\beta & \\
\hline
\quad -\alpha & \quad -\beta &
\end{array}
$$

Es sind somit alle drei Wurzeln bestimmt, die Wurzeln $\alpha \pm \sqrt{-\beta}$ mögen reell sein oder nicht. Wenn die Wurzeln mit r_1, r_2 und r_3 bezeichnet werden, von denen r_1 die reelle ist, so werden bei Anwendung des vorigen Verfahrens ganz in derselben Weise r_2+r_3 und $(r_2-r_3)^2$ gefunden. Ist dann $(r_2-r_3)^2$ positiv, so sind die zwei Wurzeln r_2 und r_3 reell, ist $(r_2-r_3)^2$ hingegen negativ, so sind die Wurzeln r_2 und r_3 imaginär.

Wenn der Werth von r mit dem erforderlichen Grade von Genauigkeit bestimmt ist, so werden die Werthe von α und β auf höchst einfache Weise aus den Coeffizienten der 1. und 2. Potenz der Unbekannten in der gegebenen Gleichung gefunden nach folgendem Verfahren.

Aus den Coeffizienten von x^2 erhalten wir

$$-2\alpha = -(2\alpha+r)+r \text{ oder } \alpha = \tfrac{1}{2}[(2\alpha+r)-r],$$

und aus dem Coeffizienten von x

$$-\beta = (\alpha^2+2r\alpha-\beta)-\alpha(2r+\alpha).$$

Beispiel.

Bestimmung der Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3+8x^2+6x-75{,}9=0.$$

Diese Gleichung hat eine positive Wurzel, welche zwischen 2 und 3 liegt. Entwickeln wir diese Wurzel nach Horner's Verfahren und führen die vorherige Operation zur Auffindung von α und β aus, so haben wir folgende Rechnung.

1 + 8	+ 6	—75,9 (2,425712284
10	26	52
12	50	—23,900
144	5576	22,304
148	6168	—1,596
1522	619844	1,239688
1424	622892	
15265	62365525	— 356312
15270	62441875	311827625
152757	6245256799	— 44484375
152764	6246326147	43716798
1527711	624634142411	— 767577
1527712	624635670123	624634
15277132	624635975666	— 142943
15277134	624636281209	124927
152771362	624636311763	— 18016
152771364	624636342317	12493
1527713668	624636354539	— 5523
1527713676	624636366760	4997
15277136848	624636367982	— 526
15277136856	624636369204	500
152771368644	624636369265	— 26
152771368648	62,4636369326	25
2)15,2771368652	18	
7,6385684326	80,4636369326	— 1
—2,4257122884	—64	
5,2128561442 = $-a$	4) 16,4636369326	
	4,1159092332 = $-\beta$	

Die drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung sind somit

2,4257122884 und $-5,2128561442 \pm \sqrt{-4,1159092332}$.

Note B,

Wenn in der Gleichung des siebenten Grades

$$x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = 0$$

zwei Wurzeln von der Form $\pm\sqrt{-\beta}$ sind, so ist $\alpha = 0$ und die Werthe A, B, C etc. unter (3) pag. 3. reduciren sich auf

$$A = a,\ B = b,\ C = c,\ D = d,\ E = e,\ F = f,\ G = g.$$

Wird in den Gleichungen (6) pag. 4... $m = 7$ gesetzt, so wird $f_6\alpha = 0$ und $f_7\alpha = 0$ und wir erhalten

$$\beta^3 - b\beta^2 + d\beta - f = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

$$a\beta^3 - c\beta^2 + e\beta - g = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Eliminirt man hieraus β, so erhält man die Relation

$$[(ab-c)(cf-bg)-(ad-e)(af-g)][(ad-e)(ef-dg)-(af-g)(cf-bg)] = [(ab-c)(ef-dg)-(af-g)^2]^2 \ (3).$$

Wenn daher in einer Gleichung des 7. Grades die Coeffizienten der Unbekannten so beschaffen sind, dass sie der Relation (3) genügen, so hat die Gleichung zwei Wurzeln von der Form $\pm\sqrt{-\beta}$, wo β durch Herleitung aus (1) und (2) den Werth hat

$$\beta = \frac{(ab-c)(ef-dg)-(af-g)^2}{(ab-c)(cf-bg)-(ad-e)(af-g)} = \frac{(ad-e)(ef-dg)-(af-g)(cf-bg)}{(ab-c)(ef-dg)-(af-g)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Wenn das zweite Glied der Gleichung fehlt, so ist $a=0$ und (3) und (4) geht über in

$$(cf-bg+de)[c(cf-bg)+eg]+e^2f(bc-e)=(cd-g)[2cef-g(cd-g)] \quad \ldots\ldots\ldots (3')$$

und
$$\beta = \frac{c(ef-dg)+g^2}{c(cf-bg)+eg} = \frac{e^2f-g(cf-bg+de)}{cef-g(cd-g)} \quad \ldots\ldots\ldots (4').$$

Wird in der Relation (3).. $g=0$ gesetzt, so geht sie über in

$$(abc-a^2d-c^2+ae)(ade-acf-e^2)=(abe-a^2f-ce)^2,$$

und diese nach theilweiser Multiplication und Streichung der gleichen Glieder auf beiden Seiten in folgende

$$(bc-ad+e)[a(cf-de)+c^2]+c^2(cf-de)=(be-af)[a(af-be)+2ce] \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Für $\alpha=0$ reducirt sich (5) auf

$$c^2(cf-de)=e^2(bc-e) \quad \ldots\ldots\ldots (5').$$

Wird in Gleichung (4).. $g=0$ gesetzt, so wird

$$\beta = \frac{e(ab-c)-a^2f}{c(ab-c)-a(ad-e} = \frac{e(ad-e)-acf}{e(ab-c)-a^2f} \quad \ldots\ldots\ldots (6),$$

und wenn $a=0$, $\qquad \beta=\frac{e}{c} \quad \ldots\ldots\ldots (6').$

Wenn daher in der Gleichung $x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ die Coeffizienten a, b, c, etc. der Relation (5) genügen, so hat erstere zwei Wurzeln von der Form $\pm\sqrt{-\beta}$, deren Werth aus (6) gefunden wird. Fehlt der Gleichung das zweite Glied und wird der Relation (5′) genügt, so sind zwei Wurzeln der Gleichung $=\pm\sqrt{-\frac{e}{c}}$.

Setzt man ferner in der Relation (5) und in der Formel (6).. $f=0$, so erhält man

$$(ab-c)(cd-bc)=(ad-e)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (7),$$

und
$$\beta = \frac{e(ab-c)}{c(ab-c)-a(ad-e)} = \frac{ad-e}{ab-c} \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Für $a=0$ gehen die Formeln (7) und (8) über in

$$c(be-cd)=e^2 \quad \ldots\ldots\ldots (7'),$$

und
$$\beta=\frac{e}{c} \quad \ldots\ldots\ldots (8').$$

Genügen demnach die Coeffizienten der Gleichung

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

der Relation (7), dann hat die Gleichung zwei Wurzeln von der Form $\pm\sqrt{-\beta}$, deren Werthe aus (8) gefunden werden; und wenn die Coeffizienten der Gleichung $x^5+bx^3+cx^2+dx+e=0$ der Relation (7′) genügen, dann sind zwei Wurzeln derselben $=\pm\sqrt{-\frac{e}{c}}$

So ist beispielsweise in der Gleichung des fünften Grades

$$x^5-36x^3+72x^2-37x+72=0,$$

$b=-36$, $c=72$, $d=-37$ und $e=72$, deren Substitution in (7′) giebt

$$c(be-cd)-e^2=72^2(-36+37)-72^2=0.$$

Der Relation (7′) wird demnach genügt und die gegebene Gleichung hat zwei Wurzeln von der Form $\pm\sqrt{-\beta}$. Die Werthe dieser Wurzeln sind nach (8′) $\pm\sqrt{-\beta}=\pm\sqrt{-1}$. Wird obige Gleichung durch x^2+1 dividirt, so bleibt die cubische Gleichung

$$x^3-37x+72=0.$$

Sei endlich $e=0$ in der Relation (7) und der Formel (8), so entsteht die Relation

$$c(ab-c)=a^2d \quad \ldots \quad (9),$$

und

$$\beta=\frac{ad}{ab-c}=\frac{c}{a} \quad \ldots \quad (10);$$

hieraus folgt, dass wenn in der Gleichung des 4. Grades $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, die Coeffizienten der Relation (9) genügen, zwei Wurzeln der Gleichung gleich sind

$$\pm\sqrt{\left\{-\frac{ad}{ab-c}\right\}} \text{ oder } \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Setzt man in der Formel (9).. $d=0$, so erhält man die Relation $ab-c=0$. Genügen deshalb die Coeffizienten der cubischen Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ der Relation $ab-c=0$, so hat die Gleichung zwei Wurzeln von der Form $\pm\sqrt{-\beta}$, nämlich $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ oder, da $ab-c=0$, $\pm\sqrt{-b}$.

Note C.

In der Zeitschrift „*The Mathematician*“ (No. 4. Vol. III. November 1848.)“ habe ich eine Methode zur Lösung einer vollständigen cubischen Gleichung ohne Beseitigung des zweiten Gliedes mitgetheilt. Dieselbe möge hier nach ihrem wesentlichen Inhalte noch eine Stelle finden.

Setzt man in der cubischen Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$

$$x^3+ax^2+bx+c=\frac{\lambda^3(x+y)^3+(x+z)^3}{\lambda^3+1} \quad \ldots \quad (1),$$

so erhält man nach Entwickelung der rechten Seite, wenn man die Coeffizienten gleich hoher Potenzen von x gleichsetzt und $\frac{a}{3}=a'$, $\frac{b}{3}=b'$ setzt:

$$\frac{\lambda^3y+z}{\lambda^3+1}=a',\ \frac{\lambda^3y^2+z^2}{\lambda^3+1}=b',\ \frac{\lambda^3y^3+z^3}{\lambda^3+1}=c \quad \ldots \quad (2).$$

Hieraus erhält man

$$\lambda^3=-\frac{z-a'}{y-a'}=-\frac{z^2-b'}{y^2-b'}=-\frac{z^3-c}{y^3-c} \quad \ldots \quad (3).$$

und nach Gleichsetzung des ersten und zweiten, sowie des ersten und dritten Werthes für λ^3

$$yz+b'=a'(y+z) \quad \ldots \quad (4),$$

$$yz(y+z)+c=a'(y^2+yz+z^2) \quad \ldots \quad (5).$$

Multiplicirt man (4) mit $y+z$ und subtrahirt (5) vom Produkte, so erhält man

$$a'yz+c=b'(y+z) \quad \ldots \quad (6).$$

aus (4) und (6) aber

$$y+z=\frac{a'b'-c}{a'^2-b'},\ \text{und}\ yz=\frac{b'^2-a'c}{a'^2-b'} \quad \ldots \quad (7).$$

Die Gleichungen (7) bestimmen die Werthe von y und z, und aus (3) erhält man

$$\lambda^3=-\frac{z-a'}{y-a'},\ \text{oder}\ \lambda^3(y-a')+z-a'=0 \quad \ldots \quad (8).$$

Da ferner nach (1)

$$\lambda^3(x+y)^3+(x+z)^3=0,\ \text{oder}\ \lambda^3(x+y)^3=-(x+z)^3,$$

so ist

$$\lambda(x+y)=-(x+z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Wird z aus (8) und (9) eliminirt und jede Seite der resultirenden Gleichung durch $\lambda+1$ dividirt, so bleibt

$$x=\lambda(\lambda-1)(y-a')-a' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Ist die Form der Gleichung

$$x^3+bx+c=0,$$

so reduciren sich die obigen Gleichungen auf folgende:

$$y+z=\frac{3c}{b},\ yz=-\frac{b}{3},\ \lambda=-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{3}},\ \text{und}\ x=\lambda(\lambda-1)y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11.)$$

Beispiel.

Lösung der cubischen Gleichung

$$x^3+12x-30=0.$$

Hier ist $a=0$, $b=12$, $c=-3$, folglich hat man $y+z=-\frac{15}{2}$ und $yz=-4$, mithin

$$y=\frac{1}{2},\ z=-8,\ \lambda=-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{2},$$

$$\text{und}\ x=\lambda(\lambda-1)\,y=\sqrt[3]{2}\,(2\sqrt[3]{2}-1)=2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}.$$
