Kilka słów o pewniku Archimedesa w odniesieniu do wielokątów, równych przez rozkład.

Będziemy rozpatrywali figury, utworzone przez linje zamknięte łamane, przyczym rozważymy tylko takie, które tworzą wielokąty proste [1]).

Dwie figury będziemy nazywali równemi przez rozkład, o ile można je za pomocą linji prostych podzielić na jednakową, skończoną liczbę „części“, parami równych.

Natychmiast daje się dowieść ogólnie własność przechodniości (transitive Eigenschaft) t. j.: jeżeli dwie figury oddzielnie są równe przez rozkład trzeciej, są równe przez rozkład sobie (p. np. u Hilberta l. c. str. 40).

Jeżeli dalej do każdej z figur, równych przez rozkład, dołączę figury, równe przez rozkład (t. j. będę rozpatrywał jako jedną figurę jedną z danych i dołączoną), to otrzymam figury, równe przez rozkład.

Bynajmniej nie w tak prosty sposób rzecz się przedstawia, gdy z każdej z figur, równych przez rozkład, wyłączę figury (mogą to być zespoły figur), równe przez rozkład. Tutaj tak samo, jak np. w teorji mnogości albo też wogóle przy działaniach odwrotnych (lytische Operationen, jak je nazywa Stolz) nasuwają się liczne trudności. Z tego powodu w sprawie omawianej Hilbert wprowadza odnośnie do wielokątów prostych prócz pojęcia „Zerlegungsgleichheit" jeszcze

[1]) Wielokątem prostym nazywa Hilbert (p. Grundlagen der Geometrie, wyd. 2-e str. 6) taki wielokąt, w którym wszystkie wierzchołki leżą w punktach oddzielnych, w których co najwyżej schodzą się po dwa boki wielokąta i nieprzyległe boki ze sobą się nie przecinają. Bokiem nazywamy odcinek, łączący 2 wierzchołki kolejne.

„Inhaltsgleichheit" — równoważność. Równoważnemi nazywa takie 2 figury, które stają się równe przez rozkład po dołączeniu do każdej z nich figur, równych przez rozkład.

Wiadomo, że, opierając się na pewniku Archimedesa, można dla wielokątów prostych dowieść możliwości zamiany danego dowolnego wielokąta prostego na prostokąt o dowolnej podstawie, równy jemu przez rozkład. Dzięki temu rozważanie wielokątów, równych przez rozkład, może stanowić bardzo poprawny naukowo i wartościowy pedagogicznie wstęp do mierzenia pól figur, otoczonych linjami łamanemi. W tym wstępie zasadniczą rolę odgrywa kilka twierdzeń zaledwie, jak np. „dwa równoległoboki o tej samej podstawie i równych wysokościach są równe przez rozkład", lub „dwa trójkąty o tej samej podstawie i równych wysokościach są równe przez rozkład". Zwykle się wychodzi z pierwszego twierdzenia, ale można też wyjść z drugiego, jak to robi Gerwien (patrz „Wektor" № 5-ty, str. 301). Zarówno w jednym, jak w drugim przypadku, o ile się obok równości przez rozkład nie używa pojęcia równoważności i nie wychodzi ze specjalnej definicji pola, jak to robi Hilbert (l. c. str. 43: „połowa iloczynu z podstawy przez wysokość jest odcinkiem charakterystycznym dla trójkąta; nazywam tę wielkość miarą pola trójkąta—Inhaltsmass des Dreiecks), pewnik Archimedesa jest potrzebny. Wykażemy tutaj, że w gieometrji nie-Archimedesowej równość przez rozkład jest niemożliwa w całej ogólności dla wielokątów prostych. W tym celu zastosujmy ten sam przykład, jakiego używa bez dowodu Hilbert (str. 41 l. c.), ale w odmiennej interpretacji[1]) elementarnej, a więc odpowiedniejszej dla niniejszej notatki.

Rozważajmy dwa trójkąty (p. fig. 1) ABC i ABD o tej samej podstawie $AB=1$ i tej samej wysokości $AC=1$.

Proste CD i AB są równoległe. Jeżeli pewnik Archimedesa słuszności nie zachowuje, na prostej AB możemy zawsze znaleźć taki punkt F, że odcinek AF nie może spełniać nierówności: $nAB \leqslant AF \leqslant (n+1)AB$ przy każdym skończonym i całkowitym n. W punkcie F wystawiamy prostopadłą FD. Ponieważ wszystkie twierdzenia o przystawaniu trójkątów i kącie zewnętrznym w trójkącie są słuszne, więc $AD > AF$ i $BD > BF$. O ile 2 trójkąty ABC i ABD są równe przez rozkład, na boku AD i BD lub na jednym z nich przynajmniej muszą istnieć wierz-

[1]) Rozważania Hilberta, wyłożone na str. 21—23 wspomnianego dzieła, są ogólne i dotyczą wogóle możliwości skonstruowania gieometrji nie-Archimedesowej, ale w danym przypadku możemy z nich nie korzystać, odsyłając czytelnika do samej książki.

chołki łamanej, która dzieli trójkąt ABD na skończoną liczbę części, odpowiednio równych tym, na jakie się dzieli $\triangle ABC$. W takim razie bok AD np. (ew. BD) podzielić się musi na skończoną liczbę n odcinków. Każdy z tych odcinków jest bokiem jednego z wielokątów prostych, na które się dzieli $\triangle ABC$, a więc długość jego w każdym razie jest mniejsza, niż $AC+AB=2AB$. Uwzględniając największy z tych odcin-

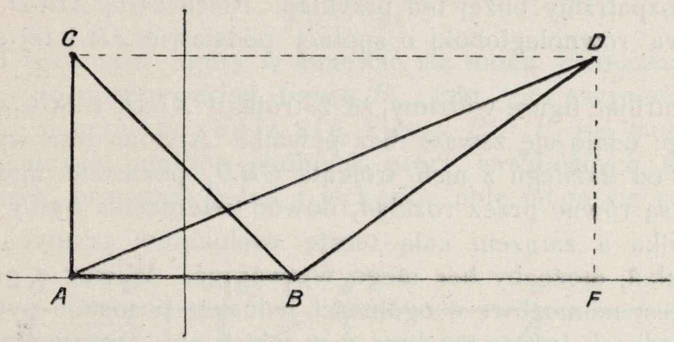

Fig. 1.

ków α, dochodzimy w ten sposób do wniosku, że można znaleźć takie skończone i całkowite m, przy którym

$$m\alpha \leqslant AD \leqslant (m+1)\alpha\,,$$

co prowadzi do sprzeczności wobec $AD > AF$. Jasne jest również, że należy odrzucić ten przypadek, gdy na żadnym z boków: AD i BD

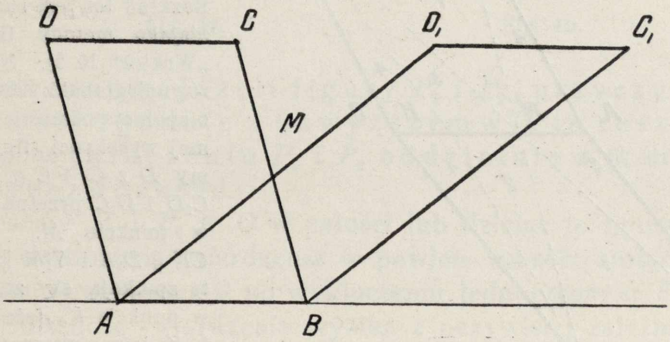

Fig. 2.

wierzchołków wspomnianej łamanej niema. Pewnik Archimedesa jest więc konieczny do tego, aby równość przez rozkład można było rozważać w całej ogólności dla wielokątów prostych.

Z drugiej strony wiadomo, że istnieją przypadki, w których pewnik Archimedesa potrzebny nie jest. Np., gdy na prostej CD (fig. 1) wyznaczymy szereg kolejnych punktów D_1, D_2, D_3 i t. d., poczynając od C, takich, że $CD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \ldots = AB$, to każdy z tych punktów może być wierzchołkiem trójkątów: ABD_1, ABD_2, i t. d., równych przez rozkład $\triangle ABC$. Wiadomo również, że dla wykazania równości przez rozkład dwuch równoległoboków $ABCD$ i ABC_1D_1 nie potrzeba pewnika Archimedesa, o ile podstawy CD i C_1D_1 posiadają bodaj jeden punkt spólny. Rozpatrzmy bliżej ten przykład. Niech będą $ABCD$ i ABC_1D_1 (fig. 2) dwa równoległoboki o spólnej podstawie AB i tej samej wysokości [1]).

Rozpatrując figurę widzimy, że 2 trójkąty ADD_1 i BCC_1 są równe. Gdyby więc udało się zawsze bez pewnika Archimedesa wykazać, że po odjęciu od każdego z nich trójkąta CMD_1 pozostałe figury $ADMC$ i BMD_1C_1 są równe przez rozkład, dowód twierdzenia byłby wolny od tego pewnika a zarazem całą teorję wielokątów prostych, równych przez rozkład, możnaby bez niego wytworzyć. Wiemy z poprzedniego, że to jest niemożliwe w ogólności, jednakże pozostaje pytanie, w jakich przypadkach jest to możliwe, a w jakich nie. Stawiamy teraz pytanie ogólniejsze: w jakich przypadkach od dwuch figur, równych przez

---

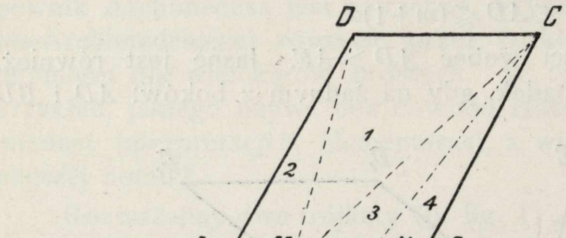

Fig. 3.

[1]) Przy sposobności przytoczę tu nowy rozkład dwuch równoległoboków o tej samej podstawie i wysokości, ale spełniających określone warunki. Rozkład ten jest zastosowaniem niejako metody Gerwiena (p. „Wektor“ № 5). Niech będą 2 równoległoboki: $ABCD$ i ABC_1D_1 o spólnej podstawie AB i tej samej wysokości (fig. 3). Łączymy D z C_1 i C z D_1. Proste C_1D i D_1C przetną się na AB w punkcie M. Prowadzimy $CK \parallel D_1A$ i $C_1M \parallel AD$. Proste te spotkają się znowu na AB w punkcie K. Jeżeli punkty M i K leżą „wewnątrz" odcinka AB, podział jest uskuteczniony, jak to widać z numerów: 1, 2, 3, 4 na figurze. Z tego widoczny jest warunek, który spełniać muszą 2 równoległoboki, aby podobny rozkład był możliwy. Zostawiamy bliższe zbadanie tego czytelnikowi.

rozkład, (lub tej samej figury w różnych miejscach) można odjąć figury, równe przez rozkład, i otrzymać figury, również równe przez rozkład.

Notatka niniejsza nie wyczerpuje całej odpowiedzi na to pytanie, daje natomiast przyczynek, zdaniem autora, dość charakterystyczny.

Będziemy oznaczali dalej, idąc za Bolyai'em, że P_1 jest równe przez rozkład P_2, jak następuje:

$$P_1 \underline{\top} P_2 .$$

Jeżeli wewnątrz figury Q zmieścić się mogą jednocześnie figura P_1 i równa jej przez rozkład figura P_2, fakt ten nazywać będziemy *warunkiem mieszczenia się*. Figury P_1 i P_2 nie mogą przytym posiadać żadnych punktów spólnych prócz znajdujących się ew. na ich obwodach, przyczym jedna z nich albo obie mogą się rozpadać na części.

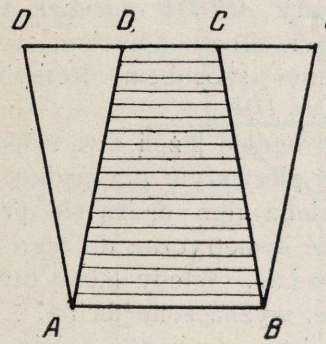

Fig. 4a.

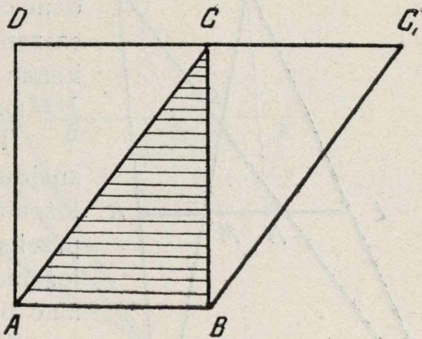

Fig. 4b.

Twierdzenie. Jeżeli figury P_1 i P_2, przyczym $P_1 \underline{\top} P_2$, mieszczą się zgodnie z powyższym w Q, to reszty, otrzymane po wykluczeniu P_1 i P_2 oddzielnie z Q, muszą być równe przez rozkład.

Umieśćmy P_1 i P_2 w Q w całości lub dzieląc te figury na części. Zgodnie z warunkiem twierdzenia w pewien sposób zrobić to można. Niech reszta, otrzymana z Q po wykluczeniu jednoczesnym P_1 i P_2, będzie W. Słuszność twierdzenia wynika z oczywistej zależności:

$$W + P_1 = W + P_2 ,$$

gdzie znak $+$ oznacza jednoczesne wzięcie pod uwagę figur W i P_1 lub P_2 t. j. rozpatrywanie figury, składającej się z ich obu.

Twierdzenie to jest słuszne zarówno w Archimedesowej jak i nie-Archimedesowej gieometrji, gdyż nie zależy zupełnie od potrzeby rozkładania figury zadanej na części równe, a liczy się z faktem istnienia takiego rozkładu dla figur P_1 i P_2, czego gieometrja nie-Archimedesowa nie wyklucza.

Weźmy dla ilustracji parę znanych przykładów.

Niech będą dwa równoległoboki (fig. 4a, 4b), posiadające spólną podstawę i wysokość. Jeżeli boki, do tych podstaw przeciwległe, posiadają przynajmniej jeden punkt spólny, widoczne jest, że trójkąty DAD_1 i BCC_1 (ew. DAC i BCC_1) spełniają względem równoległoboków warunek mieszczenia się, a równość ich przez rozkład jest oczywista i niezależna od pewnika Archimedesa.

Jeżeli w trójkątach ABC i ABD (fig. 5) o tej samej podstawie i równych wysokościach punkt O spotkania się boków BC i AD jest z innej strony środkowej LK niż podstawa AB, albo znajduje się na tej środkowej, trójkąty AOC i BOD spełniają względem całej figury $ACODB$ warunek mieszczenia się, a rozkładu natychmiast dokonać możemy sposobem Réthy'ego $DM \parallel AC$ i $CN \parallel DB$).

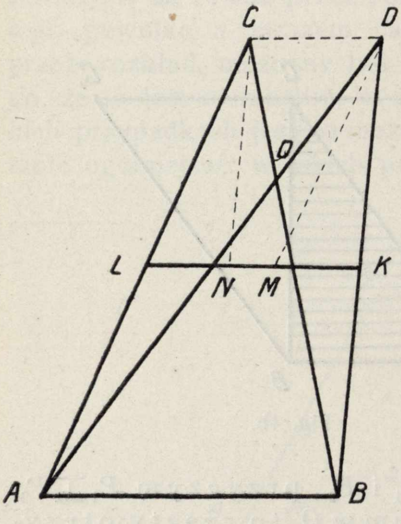

Fig. 5.

To samo będzie jeżeli dwa trójkąty znajdują się w pierwszym przypadku położenia Gerwiena albo dadzą się przez przekształcenie symetryczne do tego położenia sprowadzić. Wtedy łatwo otrzymać położenie, wyznaczone na fig. 5.

Są jednakże przypadki, gdzie nie odrazu jest widoczne, że warunek mieszczenia się jest spełniony. Weźmy dla przykładu dwa trójkąty w położeniu Gerwiena (fig. 6).

Niech będą trzy proste równoległe: CD_1, AB, DD_2. Weźmy 2 trójkąty ABC i ABD w położeniu takim, że prosta CD spotyka podstawę spólną AB w punkcie M jakimkolwiek. Jak wiadomo sposobem Gerwiena można te dwa trójkąty bez pewnika Archimedesa rozłożyć na skończoną liczbę części, parami równych. O warunku mieszczenia się niema mowy, bo figury nie posiadają spólnych części. Możemy jednakże przekształcić ABD symetrycznie względem AB na trójkąt ABD_1, przyczym wobec $\triangle\triangle ABC$ i ABD_1 można mówić o warunku mieszczenia się albo też nie,—zgodnie z powyższym (fig. 5). Jeżeli np. $KD_1 > KC$, to $\triangle ABC$ można przekształcić symetrycznie na ABD_3 względem osi odcinka AB i wtedy warunek mieszczenia się ma zastosowanie. Gdy CD przechodzi przez środek O odcinka AB, trójkąty ABD_3 i ABD_1 do siebie przystają. Weźmy prostą AB za oś X-ów, a oś odcinka AB za oś Y-ów układu Descartesa. Niech odcięta punktu C będzie $-x_1$, a punktu $D - x_2$, długość zaś odcinka $AB - a$. W takim razie dla 2-ch dowolnych trójkątów ABD i ABC można wykazać równość przez rozkład bez pewnika Archimedesa wtedy, gdy

$$|x_1+x_2| \leqslant a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Istotnie, jak widzieć łatwo z fig. 6, musi być D_3D_1 mniejsze niż a [1]), a w takim razie nierówność (1) zachodzić musi.

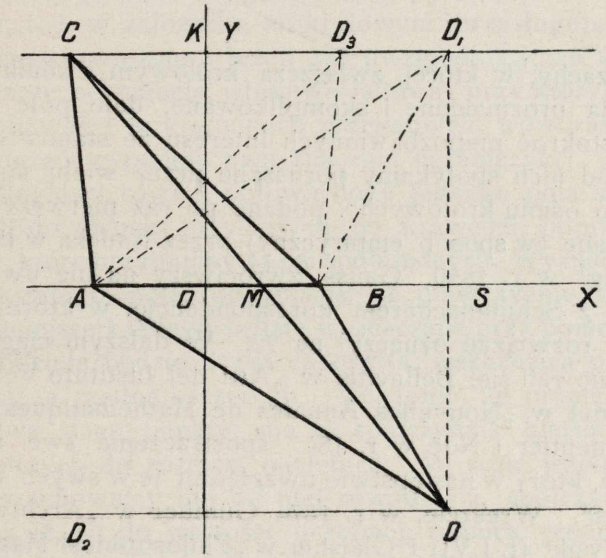

Fig. 6.

Pozostawiam obecnie otwarte rozważania ogólniejsze w tym przypadku, gdy figury P_1 i P_2 względem Q warunku mieszczenia się nie spełniają i posiadają część spólną. Wątpliwe jest, czy bez pewnika Archimedesa można dowieść, że, gdy dwie figury P_1 i P_2 w jednym położeniu wewnątrz Q spełniają warunek mieszczenia się, spełnią go i w każdym innym. W każdym razie zagadnienie jest ciekawe i pouczające, ale nie łatwe, jak wogóle bliższe rozejrzenie się elementarne w gieometrji nie-Archimedesowej.

L. Zarzecki.

---

[1]) Widoczne jest, że $OS - MS < \frac{AB}{2}$, a stąd $2OS - 2MS < AB$ czyli $2KD_1 - CD_1 < AB$ czyli $KD_1 - CK = KD_1 - KD_3 < AB$.