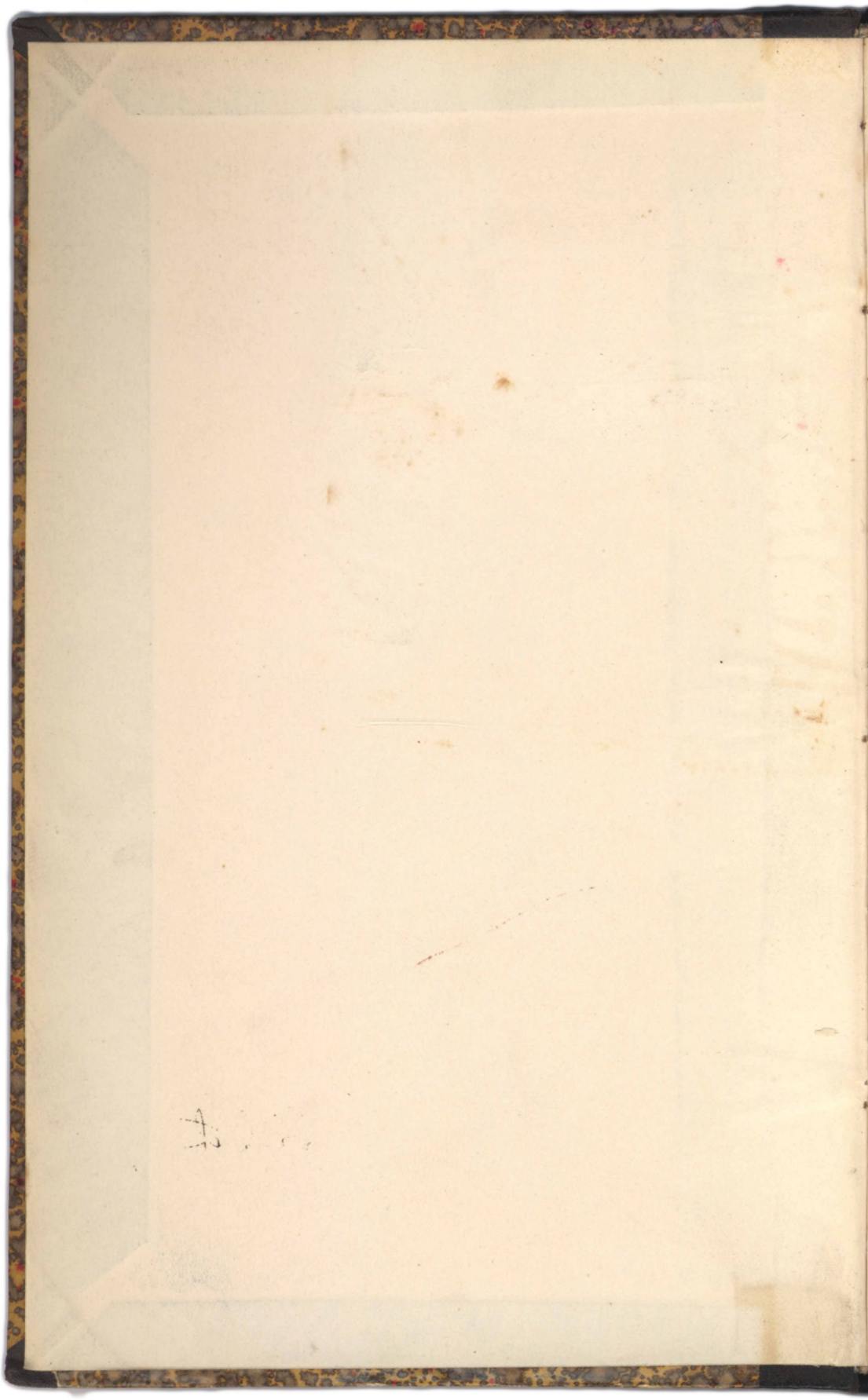


W. Schell

THEORIE
DER
KURVEN





2785

2785

2760

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

Wick itey

2760

Juw.

Kat

WILHELM SCHELLS
ALLGEMEINE THEORIE DER KURVEN
DOPPELTER KRÜMMUNG

DRITTE AUFLAGE
NEU BEARBEITET VON
ERICH SALKOWSKI

MIT 66 FIGUREN IM TEXT



~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego
L. inw. 1568~~

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

U.H. 8-c

c 14/4.906

<http://rcin.org.pl>



5568

g.m. II 874

COPYRIGHT 1914 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

VORWORT.

Die Theorie der Kurven von WILHELM SCHELL stellte sich die Aufgabe, den Stoff mit elementaren und rein anschaulichen Hilfsmitteln so weit zu entwickeln, daß die Tragweite und Fruchtbarkeit dieser Betrachtungsweise zutage tritt. Als die Frage einer Neubearbeitung an mich herantrat, galt es zunächst zu prüfen, ob der Weg auch heute noch gangbar ist, ob nicht etwa die verschärften Anforderungen an Strenge, die der junge Mathematiker von den ersten Semestern an den Beweisführungen entgegenzubringen mit gutem Grunde gelehrt wird, all das illusorisch machen, was seit den Tagen Robervals, Huygens', Réaumurs auf anschaulichem Wege gefunden worden ist. Und in der Tat, wer gewohnt ist, überall pathologische Erscheinungen zu argwöhnen, wird seinen Augen niemals trauen dürfen und geometrische Sätze erst dann für richtig halten, wenn er sie durch analytische Rechnung bestätigt hat. Aber auch der schärfste Kritiker wird ohne Schaden nicht auf die suggestive Wirkung verzichten dürfen, die ihm eine direkte Anschauung der Zusammenhänge vermittelt. Denn auch die virtuoseste Handhabung des vollkommensten analytischen Apparats schützt nicht davor, den geometrischen Gehalt der Ergebnisse in ihrer Bedeutung erheblich zu verkennen.

Es braucht dabei nicht besonders betont zu werden, daß der geometrischen Methode all das verschlossen bleiben muß, was sich analytisch als Singularität fassen läßt; es ist daher notwendig, sich von vornherein ausdrücklich auf den regulären Fall zu beschränken, also z. B. von einer Raumkurve zu verlangen, daß sie in jedem Punkte in erster Näherung durch eine eindeutig bestimmte Gerade, in zweiter Näherung durch einen eindeutig bestimmten Kreis ersetzt werden kann, usw. Nur solche *reguläre Kurvenstücke* dürfen ohne allzu peinliches Mißtrauen geometrisch untersucht werden, und auf sie beschränkt sich alles folgende. Es wäre natürlich eine völlige Verkenning, zu meinen, daß die geometrische Methode die analy-

tische Behandlung der Differentialgeometrie ersetzen wollte: sie kann und will nur eine Ergänzung der letzteren sein, ist aber als solche wohlberechtigt und geradezu notwendig.

Nach all diesen Erwägungen hätte ich es für bedauerlich gehalten, wenn ein Werk wie das Schellsche aus der mathematischen Literatur verschwunden wäre, zumal ich in eigenen Lehrerfahrungen wiederholt die zur Selbstbetätigung kräftig anregende Wirkung des Büchleins beobachten konnte. War nun auch Weg und Ziel durch die beiden vorangehenden Auflagen sicher gewiesen, so bedurfte es doch im einzelnen einer durchgreifenden Neubearbeitung. Daß gelegentlich nicht stichhaltige Gedankengänge, die auch schon von der Kritik mit Recht bemängelt waren, durch andere ersetzt wurden, bedarf keiner Rechtfertigung. Viel durchgreifender noch war eine weitere Änderung, die auf eine straffere und einheitlichere Beweisführung hinzielte: die systematische Einführung der sphärischen Abbildung. Diese kam, wenn auch nur versteckt, schon in der zweiten Auflage an den verschiedensten Stellen zur Anwendung, und es erschien zweckmäßig, sie nunmehr in aller Ausführlichkeit zu behandeln. Denn wenn ja auch im Euklidischen Raum dies Hilfsmittel nicht die alles beherrschende Stellung einnimmt wie die beider sphärischen Bilder in der elliptischen Raumform, so lassen sich doch mit ihrer Hilfe eine ganze Reihe von Eigenschaften viel leichter überschauen als es sonst möglich wäre. Insbesondere sind es die meisten Vorzeichenfragen, die sich so ziemlich leicht entscheiden lassen.

Allerdings sind diese Vorzeichenfragen immer noch die heikelsten Punkte in einer geometrischen Darstellung der Infinitesimalgeometrie. Eine Vogel Strauß-Politik ihnen gegenüber ist gerade für den Anfänger nicht ratsam, damit er nicht von vornherein sich an eine flüchtige unmathematische Denkweise gewöhnt. Die allzubreite Darstellung aber der an sich ganz elementaren Dinge würde ihn ermüden und abschrecken. So ergab sich die Notwendigkeit eines Kompromisses: gelegentlich wurde durch passende, aber nicht sachlich einschränkende Festsetzungen die Frage vereinfacht, gelegentlich wieder beschränkte sich der Beweis auf einen Fall, während in den Schlußformeln alle Möglichkeiten in Betracht gezogen und einzeln charakterisiert wurden. Dabei blieb dem Leser die lohnende Mühe, den Gedankengang in modifizierter Weise noch einmal selbständig zu verfolgen, in räumlichen Verhältnissen, die er sich selbst neu vorzustellen hatte.

Eine zweite inhaltliche Änderung betrifft die breitere Ausführung der Untersuchung spezieller Kurven und Kurvenklassen. Sie rechtfertigt sich wohl ausreichend durch die Tatsache, daß die ganze Schönheit der geometrischen Beweisführung und ihre Überlegenheit gegenüber der Rechnung erst bei der Behandlung von Einzelproblemen zutage tritt: lassen sich doch die geometrischen Gedankengänge zumeist viel schmiegsamer den Bedingungen des Problems anpassen als die allgemeinen Methoden der Analysis. Die Theorie der Raumkurven erweist sich dabei noch als unvergleichlich reicher an schönen Problemstellungen als die weit ausgebaute Lehre von den ebenen Kurven, mit der sie in vielfach überraschender Weise in Beziehung tritt.

Die Kurventheorie ist keine einfache Kette logisch aufeinanderfolgender Sätze, sondern eher ein Gewebe, in dessen Struktur man von den verschiedensten Seiten eindringen kann. Und besonders der Anfänger, für den das Buch ja bestimmt ist, wird gern bald diesen, bald jenen Ausgangspunkt bevorzugen. Dementsprechend hat schon Schell die einzelnen Kapitel so selbständig gestaltet als möglich, und auch Wiederholungen nicht gescheut, wenn dadurch derselbe Sachverhalt von verschiedenen Seiten her beleuchtet werden konnte. Die Neubearbeitung hat sich dies Verfahren als Muster genommen und durch mannigfache Rückverweisungen u. a. m. auszubauen gesucht.

BERLIN, im Juni 1914.

E. SALKOWSKI.

INHALT.

Einleitung	Seite 1
----------------------	------------

I. Kapitel. Das Hauptdreikant einer Raumkurve.

1. Tangente und Bogenelement	2
2. Schmiegungeebene.	3
3. Normalen und Normalebene	4
4. Hauptnormale und Binormale.	4
5. Das Hauptdreikant der Kurve.	4
6. Tangentenfläche	5
7. Polarfläche	6
8. Rektifizierende Fläche	7
9. Die Fläche der Hauptnormalen	7
10. Die Fläche der Binormalen.	8
11. Zusammenfassung	8
12. Übungen: 1. Ebene Kurven. 2. Sphärische Kurven. 3. Allgemeine Schraubenlinien	9

II. Kapitel. Krümmung.

1. Kontingenzwinkel	12
2. Krümmungsmittelpunkt, Krümmung	13
3. Berührung verschiedener Ordnung. Oskulation.	14
4. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte	14
5. Schmiegunzwinkel	15
6. Verschwinden des Schmiegungs- und des Kontingenzwinkels.	16
7. Schmiegunghalbmesser und Schmiegunge.	16
8. Natürliche Gleichungen einer Raumkurve	16
9. Beispiele	18
10. Summe der Kontingenzwinkel.	18
11. Summe der Schmiegunzwinkel.	20
12. Winkel der ganzen Krümmung	21

III. Kapitel. Sphärische Abbildung.

1. Das sphärische Bild einer Geraden	22
2. Das sphärische Bild des Hauptdreikants. Tangentenbild	23

3. Parallele Raumkurven	24
4. Übungen	25
5. Das sphärische Bild der Binormalen. Schmiegunswinkel	26
6. Das Hauptnormalenbild. Der Winkel der ganzen Krümmung	26
7. Radius der ganzen Krümmung	27
8. Das rechtwinklige Dreieck der Radien ρ , r , r	28
9. Bild der rektifizierenden Fläche	29
10. Die Ebene der ganzen Krümmung	30

IV. Kapitel. Tangentenfläche und Filarevolventen.

1. Filarevolventen	30
2. Kontingenzwinkel der Filarevolventen. Sphärisches Bild	32
3. Krümmungsachse der Evolvente	34
4. Übungen	34
5. Schmiegunswinkel	35
6. Krümmungshalbmesser	35
7. Krümmungslinien der abwickelbaren Flächen	36
8. Planevolventen	37
9. Übungen	41

V. Kapitel. Die Polarfläche und die Evoluten.

1. Die Fläche der Normalebenen (Polarfläche)	41
2. Die Evolute	42
3. Die Evolute als Geodätische auf der Polarfläche	43
4. Mongesche Fadenkonstruktion	44
5. Lage der Krümmungsmittelpunktkurve auf der Polarfläche	44
6. Übungen	45
7. Das sphärische Bild der Evolute	46
8. Bogenelement und Krümmungen der Evolute	49
9. Planevolute	50

VI. Kapitel. Schmiegunskugel und Schmiegunskegel.

1. Die Schmiegunskugel	50
2. Die Kurve der Schmiegunskugelmittelpunkte (Polarkurve)	51
3. Radius der Schmiegunskugel	53
4. Beispiele	54
5. Das Bogenelement der Polarkurve	54
6. Die Krümmungen der Polarkurve	55
7. Die Schmiegunskugeln der Filar- und Planevolventen	55
8. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte	56
9. Übung	56
10. Sphärisches Bild der Schmiegunskugelradien	57
11. Sphärische Torsion	58
12. Schmiegunskegel	59
13. Beispiele	60

14. Kurve der Schmiegungskegelspitzen	60
15. Schmiegungskegel zweiter Art	61

VII. Kapitel. Die rektifizierende Fläche.

1. Abwicklung der rektifizierenden Fläche	63
2. Rektifizierende Fläche der Filarevoluten	65
3. Sphärisches Bild.	65
4. Winkel zwischen Tangente und rektifizierender Geraden	66
5. Übungen	67
6. Krümmungswinkel der rektifizierenden Kurve	68
7. Abstand der rektifizierenden Gratlinie von der Kurve	69
8. Bogenelement der Gratlinie.	70
9. Sphärisches Bild und Krümmungen der Gratlinien	71
10. Übungen	72

VIII. Kapitel. Windschiefe Flächen.

1. Mittelpunkt. Striktionslinie.	74
2. Sphärisches Bild.	75
3. Verteilungsparameter	76
4. Bogenelement einer Flächenkurve	78
5. Orthogonaltrajektorien	79
6. Windung einer windschiefen Fläche.	79
7. Asymptotenlinien	80
8. Geodätische Linien	81
9. Das sphärische Bild der Asymptotenlinie und Krümmungslinie.	81
10. Tangentenbild der Striktionslinie	82
11. Tangentenbild einer Kurve auf einer windschiefen Fläche.	83
12. Der Winkel der geodätischen Krümmung	85
13. Gleichung der geodätischen Linien	86
14. Gleichung der Asymptotenlinien	87
15. Krümmungslinien	87
16. Übungen	87
17. Verbiegung von windschiefen Flächen	88
18. Das Rotationshyperboloid.	89

IX. Kapitel. Die Fläche der Hauptnormalen.

1. Die Kurve als Asymptotenlinie ihrer Hauptnormalenfläche.	90
2. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte	91
3. Sphärisches Bild der Krümmungsmittelpunktkurve	92
4. Krümmungen der Krümmungsmittelpunktkurve	96
5. Umkehrung des Problems	97
6. Mittelpunkte der Hauptnormalen	97
7. Bogenelement der Striktionslinie	100
8. Sphärisches Bild der Striktionslinie	101
9. Mittelfläche	102
10. Asymptotenfläche	102

X. Kapitel. Die Fläche der Binormalen.

1. Biegung der Binormalenflächen	103
2. Binormalenflächen der Kurven konstanter Torsion	104
3. Asymptotenfläche und Mittelfläche der Binormalenfläche	105

XI. Kapitel. Besondere Raumkurven.

I. Die Kurven konstanter Krümmung	106
1. Die Kurve und ihre Polarkurve	106
2. Torsion und ganze Krümmung	107
3. Rektifizierende Gratlinie	108
4. Übungen	109
II. Die allgemeinen Schraubenlinien	109
III. Die gewöhnliche Schraubenlinie	111
IV. Die Kurven konstanter Steigung auf der Kugel	113
V. Die zylindrokönische Schraubenlinie (Loxodrome des Rotationskegels).	114
1. Der rektifizierende Zylinder	114
2. Die Hauptnormalenfläche	116
3. Natürliche Gleichungen	117
4. Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche	118
5. Die Fläche der Schmiegunngskugelnradien	118
6. Übungen	120
VI. Bertrandsche Kurven	120
1. Asymptotenlinien auf Hauptnormalenflächen	120
2. Kreuzungswinkel und Abstand entsprechender Punkte.	122
3. Die Bertrandsche Relation	123
4. Andere Form der Bertrandschen Relation	125
5. Torsionsprodukt	126
6. Teilverhältnis der Krümmungsmittelpunkte	127
7. Beziehungen zwischen den Krümmungen zugeordneter Bertrandscher Kurven	128
8. Die Lage eines Paares Bertrandscher Kurven auf ihrer Hauptnormalenfläche.	129
9. Die Wendelfläche als Hauptnormalenfläche	131
VII. Die geodätischen Linien auf Böschungsfächen	133
1. Sphärisches Bild.	133
2. Natürliche Gleichung.	134
3. Übungen	134

XII. Kapitel. Die Schmiegunngshelix und die könische Schmiegunngsloxodrome.

1. Schmiegunngshelix	135
2. Der Torsionsradius der Schmiegunngshelix	136
3. Basisradius und Achse	137

	Seite
4. Achsenfläche	137
5. Die dreipunktig berührenden Kreiszyylinder.	138
6. Die konische Schmiegunxloxodrome.	138
7. Übungen	140

XIII. Kapitel. Geometrie der Bewegung der Kurven doppelter Krümmung.

1. Das Hauptdreikant	140
2. Die Schraubenlinie	141
3. Die Fläche der Schraubungsachsen	142
4. Eine besondere Kurvenklasse	143
5. Die Achsenfläche im Dreikant	144
6. Übung	145

XIV. Kapitel. Die zyklifizierenden Flächen.

1. Existenz der zyklifizierenden Flächen	145
2. Konstruktion einer zyklifizierenden Fläche für einen gegebenen Radius	146
3. Winkel zwischen zyklifizierender Ebene und Schmiegunxebene	147
4. Sphärisches Bild der zyklifizierenden Geraden	147
5. Bogenelement der Gratlinie.	149
6. Kurvenpaar konstanter geodätischer Krümmung	150
7. Oskulationskugeln von konstantem Radius	152
8. Hauptnormalenflächen von Kurven konstanter Krümmung	154

XV. Kapitel. Kurvenpaare.

1. Allgemeines	156
2. Isometrische Kurvenpaare.	158
3. Kurvenpaare, deren Bogenelemente in konstantem Verhältnis stehen	159
4. Übungen	160

XVI. Kapitel. Die Evolutoiden.

1. Evolutoide	161
2. Das sphärische Bild	162
3. Der Réaumurische Satz	163
4. Die Evolutoidenfläche	164
5. Charakteristik der Evolutoidenfläche.	164
6. Die Evolutoide als kürzeste Linie.	168
7. Besondere Kurven auf der Evolutoidenfläche	169
8. Verteilung der Evolutoiden auf ihrer Ortsfläche	170
9. Konjugierte Kurven	171
10. Kontingenz- und Schmiegunxwinkel der Evolutoiden.	171
11. Evolventoiden	172
12. Planevolventoiden	173

XVII. Kapitel. Parallele Raumkurven.

1. Allgemeines	174
2. Parallele Zuordnung ebener Kurven	174
3. Die abwickelbare Fläche paralleler Raumkurven.	175
4. Die Schmiegunskugeln paralleler Kurven	177
5. Übungen.	177
6. Kurven mit parallelen Hauptnormalen	178

XVIII. Kapitel. Mehrfache Evoluten.

1. Die n^{te} Polarkurve	179
2. Die Aoustschen Kurven	180
3. Übungen.	182
4. Die zweite rektifizierende Fläche.	182
5. Bertrandsche Kurven	184
6. Übungen	185

XIX. Kapitel. Weitere Sätze und Aufgaben. 186

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	193
Register	195

Einleitung.

1. Eine Raumkurve ist eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von stetig aufeinander folgenden Punkten im Raume; sie kann kinematisch als die Bahn eines Punktes aufgefaßt werden, der nach einem vorgeschriebenen Gesetz den Raum durchläuft oder auch geometrisch als der Ort aller Punkte, die zwei gegebenen Bedingungen genügen.

Die geometrische Methode des Unendlichkleinen, die in der Folge ausschließlich zur Anwendung kommt, betrachtet nicht den ganzen Verlauf einer Kurve im Raume, sie beschränkt sich vielmehr auf die Untersuchung der Nachbarschaft eines regulären Punktes, auf ein reguläres Kurvenstück; ein solches wird dann eine Kurve schlechthin genannt. Dabei versteht man unter einem regulären Kurvenpunkte einen Punkt M , für welchen die Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte, die Ebene durch drei, die Kugel durch vier Punkte einer bestimmten Grenzlage zustrebt, wenn die Punkte sich dem Punkte M unbeschränkt nähern. Ein reguläres Kurvenstück verhält sich also wie ein räumliches Vieleck; es kann ersetzt werden durch ein solches ihm eingeschriebenes Polygon, dessen Ecken einander unbeschränkt nähern; wir sagen: eine reguläre Raumkurve kann als ein Vieleck mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten aufgefaßt werden.

2. Die Gesamtheit von ∞^1 stetig aufeinander folgenden Ebenen ist das reziproke Gebilde einer Kurve. Eine solche Mannigfaltigkeit ergibt sich, wenn eine Ebene nach einem bestimmten Gesetz sich stetig im Raum bewegt oder als die Gesamtheit aller Ebenen, die zwei gegebenen Bedingungen genügen.

Je zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen der Ebene haben eine Gerade gemein, drei aufeinanderfolgende Ebenen bestimmen zwei Geraden, welche sich in dem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Ebenen treffen. Die Folge dieser Geraden ist stetig und ebenso die Folge ihrer Schnittpunkte zu zweien und der Ebenen zu dreien.

Diese Schnittpunkte bilden daher eine Kurve, welche auf der Ebenenfolge liegt und von deren aufeinanderfolgenden Schnittlinien berührt wird.

Durch eine reguläre Schar von ∞^1 Ebenen wird eine Raumkurve umhüllt.

Man kann somit eine Raumkurve entweder als Punktgebilde ansehen als Gesamtheit ihrer Punkte, oder als Ebenengebilde, als Gesamtheit von einhüllenden Ebenen; durch eine reziproke Transformation wird also eine Raumkurve wieder in eine Raumkurve verwandelt.

3. Während die Gesamtheit von ∞^1 Punkten und ∞^1 Ebenen auf dasselbe Raumgebilde führt, die Raumkurve, bilden ∞^1 Geraden Flächen, die nur in besonderen Fällen eine Raumkurve bestimmen. Man bezeichnet die Flächen, die von ∞^1 Geraden gebildet sind, als geradlinige oder Regelflächen.¹⁾ Eine geradlinige Fläche wird von allen Geraden gebildet, die drei einfachen Bedingungen genügen (da der Raum als Geradenmannigfaltigkeit vierdimensional ist) oder durch die stetige Bewegung einer Geraden im Raume. Schneiden sich je zwei Nachbarlagen g, g', g'', \dots der Geraden in den Punkten M, M', M'', \dots , so bilden diese stetig aufeinanderfolgenden Punkte eine Kurve, sind dagegen die benachbarten Lagen der Geraden windschief, so bilden die Geraden eine windschiefe Fläche.

I. Kapitel.

Das Hauptdreikant einer Raumkurve.

1. Tangente und Bogenelement. Die Verbindungslinie eines Punktes M einer Kurve mit einem zweiten Punkt M' derselben Kurve heißt eine Sekante, der Abstand MM' der beiden Punkte eine Sehne der Kurve. Durchläuft der Punkt M' die Kurve, so dreht sich die Sekante stetig um M . Nähert sich M' dabei dem Punkte M unbeschränkt, so nimmt MM' eine Grenzlage an, die für einen (von uns allein betrachteten) regulären Punkt dieselbe ist, gleichgültig, von welcher Seite her die Annäherung erfolgt.

1) Der Ausdruck „Regelfläche“, durch ungenaue Übersetzung des Mongeschen Ausdrucks „surface réglée“ entstanden, hat sich in der Literatur eingebürgert und wird, da er sich durch seine Kürze empfiehlt, sich schwer ersetzen lassen. Vielleicht ist der von Study in anderem Zusammenhang eingeführte Ausdruck „Band“ empfehlenswerter.

Die Gerade, die diese Grenzlage des Strahls MM' angibt, heißt die Tangente der Kurve im Punkte M , und der Punkt M ihr Berührungspunkt. Die Tangente schmiegt sich der Kurve näher an als irgend eine andere Gerade, sie hat mit der Kurve zwei benachbarte Punkte gemein.

Wenn die Sekante in die Tangente übergeht, so verschwindet die Sehne MM' zugleich mit dem Kurvenbogen, der durch die Endpunkte geht. Beim Grenzübergange nähert sich nun die Sehne immer mehr dem zugehörigen Kurvenbogen, die Länge eines der Kurve eingeschriebenen Polygons immer mehr der Länge des Kurvenstücks. Man denkt sich die Kurve durch ein eingeschriebenes Vieleck ersetzt und die Tangente als die Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte M, M' . Der „unendlich kleine“ Abstand $MM' = ds$ heißt das Bogenelement der Kurve, und die Bogenlänge zwischen zwei Punkten M und N der Kurve wird als die Grenze definiert, der die Summe dieser Bogenelemente zustrebt, wenn jedes von ihnen sich der Null unbeschränkt nähert.

2. Schmiegungeebene. Eine Ebene durch die Tangente einer Kurve heißt Tangentenebene. Es gibt demnach ∞^1 Tangentenebenen, die die Kurve in einem Punkte M berühren; sie bilden einen Büschel, dessen Achse die Tangente $MM' = t$ im Punkte M ist. Durch jeden weiteren Punkt M'' der Kurve geht eine Tangentenebene des Punktes M . Bewegt sich M'' auf der Kurve, so dreht sich die Ebene um t , und nähert sich M'' unbeschränkt dem Punkte M , so nimmt sie eine bestimmte Grenzlage an. Sie geht dann durch drei unendlich benachbarte Punkte M, M', M'' der Kurve und schmiegt sich dieser näher an als irgendeine andere Ebene durch den Punkt M . Sie wird daher als Schmiegungeebene der Kurve im Punkte M bezeichnet. Die Schmiegungeebene enthält die Geraden MM' und $M'M''$, d. h. die Tangente des Punktes M und die des Punktes M' ; sie ist also die Ebene, die durch zwei benachbarte Tangenten der Kurve hindurchgeht.

Die Schar der Schmiegungeebenen einer gegebenen Raumkurve (M) bildet eine Mannigfaltigkeit von ∞^1 Ebenen, die die Raumkurve (M) umhüllen. In der Tat ist jeder Punkt der Kurve der Schnittpunkt dreier benachbarter Schmiegungeebenen, z. B. M'' der Schnittpunkt der zu M, M' und M'' gehörigen Schmiegungeebenen. Umgekehrt sind i. a. die Ebenen einer Schar von ∞^1 Ebenen immer die Schmiegungeebenen der von ihnen bestimmten Raum-

kurve. Sind nämlich $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \dots$ aufeinanderfolgende Ebenen der Schar, so ist der Schnittpunkt von $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ ein Punkt M'' der Raumkurve; der benachbarte Punkt M''' ergibt sich als Schnittpunkt der Ebenen $\varepsilon' \varepsilon'' \varepsilon'''$ und der nächste Punkt liegt zugleich in $\varepsilon'', \varepsilon''', \varepsilon^{IV}$; d. h. die Ebene ε'' enthält drei benachbarte Punkte der umhüllten Kurve, sie ist deren Schmiegungeebene im Punkte M'' .

Der Satz verliert seine Gültigkeit nur in dem trivialen Falle, wenn alle Ebenen durch ein und denselben Punkt gehen oder einer Geraden parallel sind; im ersteren Falle umhüllen sie einen Kegel, dessen Spitze der Punkt ist, im zweiten einen Zylinder, dessen Erzeugenden parallel der gegebenen Richtung sind.

3. Normalen und Normalebene. Jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt M der Tangente geht und zu dieser rechtwinklig ist, heißt eine Normale der Kurve im Punkte M . Alle Normalen des Punktes M liegen in einer Ebene, welche im Berührungspunkte der Tangente senkrecht auf dieser steht, der Normalebene. Eine Kurve hat in jedem Punkte im allgemeinen eine Tangente, aber unendlich viele Normalen, welche alle in einer Ebene liegen und einen Strahlenbüschel bilden, dessen Scheitel der Kurvenpunkt M ist.

4. Hauptnormale und Binormale. Jede Tangentenebene einer Kurve schneidet die Normalebene des Berührungspunktes M in einer Normalen; insbesondere schneidet die Schmiegungeebene die Normalebene in einer Normalen, welche den Namen der Hauptnormalen des Punktes M führt. Diejenige Tangentenebene, welche zur Schmiegungeebene und folglich auch zur Hauptnormalen rechtwinklig ist, heißt die rektifizierende Ebene¹⁾ und ihre Durchschnittslinie mit der Normalebene, nämlich die zur Hauptnormalen senkrechte Normale, nennen wir die Binormale²⁾ des Punktes M .

5. Das Hauptdreikant der Kurve. In jedem Punkte M einer Kurve schneiden sich drei zueinander rechtwinklige Gerade, die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale. Sie bilden ein dreifach rechtwinkliges Dreikant und sind die Durchschnitte dreier gleichfalls zueinander rechtwinkliger Ebenen, der Normalebene, der Schmiegungeebene und der rektifizierenden Ebene. Die Normalebene enthält

1) Lancret, Mém. sur les courbes à double courbure. (Mém. prés. T. I, p. 420.)

2) de Saint Venant, Mém. sur les lignes courbes non planes. (Journ. de l'école polytech. T. XVIII, p. 17.)

die Hauptnormale und Binormale, die Schmiegungeebene die Hauptnormale und Tangente und die rektifizierende Ebene die Tangente und Binormale. Läßt man dieses Dreikant stetig längs der Kurve gleiten, daß seine Ebenen und Kanten stets ihren Charakter behalten, so erzeugen diese eine Reihe von Kurven und Flächen, die mit der Ausgangskurve in sehr nahen Beziehungen stehen. Sie seien einzeln kurz charakterisiert.

6. Tangentenfläche. Es seien M, M', M'', \dots aufeinanderfolgende Punkte einer Raumkurve (M), so daß $MM', M'M'', \dots$ benachbarte Tangenten und die Ebenen $\varepsilon = MM'M'', \varepsilon' = M'M''M'''\dots$ benachbarte Schmiegungeebenen sind. Da ε und ε' die Punkte M' und M'' gemeinsam haben, so folgt der Satz:

Zwei aufeinanderfolgende Schmiegungeebenen einer Raumkurve schneiden sich in der Tangente der Kurve.

Die von den aufeinanderfolgenden Tangenten $MM', M'M'', \dots$ gebildete krumme Fläche ist als die Grenze einer polyedrischen Figur aufzufassen, deren Ecken die Punkte M, M', \dots der Kurve, deren Kanten ihre Tangenten und deren Flächen ihre Schmiegungeebenen sind.

Die Tangentenfläche einer Raumkurve ist demnach die Hüllfläche der Schmiegungeebenen, oder, anders ausgedrückt: Die Tangentenfläche wird von den Schmiegungeebenen längs einer Tangente berührt. Da wegen der stetigen Änderung der Schmiegungeebene zwei benachbarte Lagen einen unendlich kleinen Winkel bilden, erscheint die Tangente als eine scharfe Schneide, und die Kurve bildet auf der Fläche der Tangenten eine scharfe Kante oder einen Grat; man nennt sie daher die Gratlinie der Tangentenfläche.

Dreht man die Fläche $MM'M''$ des Polyeders um ihre Durchschnittslinie $M'M''$ mit der folgenden $M'M''M'''$ so lange um, bis sie mit dieser koinzidiert, dann die so vereinigten Ebenen um den Durchschnitt $M''M'''$ mit der folgenden Ebene $M''M'''M^{IV}$ bis sie mit dieser zusammenfallen usf., so wird die Oberfläche des Polyeders nach und nach zu einer Ebene ausgebreitet oder abgewickelt.

Da diese Eigenschaft von der Zahl und Lage der Seitenflächen unabhängig ist, so geht sie beim Übergange des Polyeders in die Fläche mit auf diese über. Daher ist sie auf die Ebene abwickelbar. Man bezeichnet eine solche Fläche als abwickelbare Fläche schlechthin.

Die Tangentenfläche einer Raumkurve ist eine abwickelbare Fläche (ein Torsus).

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß jede reguläre abwickelbare Fläche, die nicht Zylinder- oder Kegelfläche ist, die Tangentenfläche einer Raumkurve sein muß. Wir werden daher beide Ausdrücke im allgemeinen als gleichwertig nebeneinander brauchen. Aus den Ergebnissen der Nr. 2 folgt in Verbindung mit den eben gefundenen Sätzen:

Die Hüllfläche einer Schar von ∞^1 Ebenen ist entweder ein Kegel, ein Zylinder oder aber eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie diese Ebenen als Schmiegungebenen hat.

7. Polarfläche (Fläche der Krümmungsachsen). Die Normalebene erzeugt eine abwickelbare Fläche, die sie berührt und die wir die Polarfläche¹⁾ nennen wollen (Fig. 1).

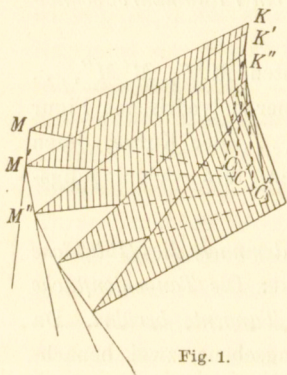


Fig. 1.

Da die Normalebene zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' auf den Tangenten dieser Punkte, infolgedessen auch auf der durch sie hindurchgehenden Schmiegungeebene des einen von ihnen, M , senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie senkrecht auf dieser Ebene. Diese Schnittlinie ist aber die gerade Erzeugende der Fläche; diese hat mithin die Eigenschaft, daß ihre Geraden auf den Schmiegungeebenen der Kurve senkrecht stehen, also parallel zu den Binormalen der Kurve (M) sind.

Die Schnittlinie der Normalebene des Punktes M mit der Normalebene des folgenden Punktes heißt die Krümmungsachse (Polarlinie) des Punktes M , weil sie mit der Krümmung der Kurve in sehr enger Beziehung steht. Daher führt die Polarfläche auch den Namen der Fläche der Krümmungsachsen. Zwei aufeinanderfolgende Krümmungsachsen schneiden sich in einem Punkte, weil sie beide Durchschnittslinien einer Normalebene mit der ihr unmittelbar vorhergehenden bzw. folgenden Normalebene sind. Ihr Schnittpunkt ist der den drei Normalenebenen gemeinsame Punkt, deren Schnittlinien sie selbst sind. Die Folge dieser Schnittpunkte der Krümmungsachsen bildet auf der Fläche die Gratlinie, die von ihnen berührt wird.

1) P. Serret, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris 1860, p. 18.

8. Rektifizierende Fläche. Die abwickelbare Fläche, welche die rektifizierende Ebene erzeugt, heißt die rektifizierende Fläche, weil sie, wie sich später zeigen wird, die Eigenschaft hat, durch ihre Abwicklung die Kurve in eine Gerade zu verwandeln. Die Schnittlinie zweier aufeinanderfolgender rektifizierender Ebenen ist die Erzeugende der Fläche und wird die rektifizierende Gerade genannt. Sie ist senkrecht zu zwei aufeinanderfolgenden Hauptnormalen. Da nämlich die rektifizierende Ebene auf der Hauptnormalen senkrecht steht, so ist auch jede in ihr liegende Gerade zu dieser senkrecht. Nun liegt die rektifizierende Gerade gleichzeitig in zwei aufeinanderfolgenden rektifizierenden Ebenen, also ist sie zu gleicher Zeit senkrecht auf den beiden aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, zu welchen diese senkrecht sind. Die rektifizierende Gerade ist wohl zu unterscheiden von der Binormalen; beide liegen in der rektifizierenden Ebene, aber die Binormale steht nur auf einer Hauptnormalen, dagegen aber noch auf der Schmiegungebene senkrecht, während die rektifizierende Gerade auf zwei Hauptnormalen, aber i. a. nicht auf der Schmiegungebene senkrecht steht. Die rektifizierende Fläche besitzt eine Gratlinie, die von sämtlichen rektifizierenden Geraden berührt wird und deren Schmiegungebenen die rektifizierenden Ebenen sind. In diesen Ebenen liegen die Binormalen und ihnen parallel laufen die Krümmungsachsen (s. o. Nr. 7).

9. Die Fläche der Hauptnormalen. Die drei Geraden, die Tangente, Hauptnormale und Binormale erzeugen drei Flächen, von denen im allgemeinen nur die, welche die Tangente beschreibt, abwickelbar ist: sie ist die in Nr. 6 erwähnte Tangentenfläche der Kurve. Die Fläche der Hauptnormalen dagegen ist für alle nicht ebenen Kurven windschief. Es liegen nämlich die Hauptnormalen zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' in zwei verschiedenen Ebenen, nämlich den Schmiegungebenen $MM'M''$ und $M'M''M'''$ dieser Punkte und gehen nicht durch denselben Punkt ihrer Schnittlinie $M'M''$, der Tangente in M' , folglich fallen sie nicht in dieselbe Ebene, mithin schneiden sie sich nicht und erzeugen also eine windschiefe geradlinige Fläche. Sie können daher auch nicht Tangenten einer Kurve, d. h. Verbindungslinien aufeinanderfolgender Punkte derselben sein. Fallen dagegen je zwei aufeinanderfolgende, mithin alle Schmiegungebenen zusammen, d. h. ist die Kurve eben, so fallen alle ihre Hauptnormalen in ihre Ebene und berühren die in dieser Ebene liegende Evolute der Kurve.

10. Die Fläche der Binormalen ist gleichfalls windschief, wenn die Kurve nicht eben ist. Zwei aufeinanderfolgende Binormalen stehen nämlich auf zwei aufeinanderfolgenden Schmiegungebenen senkrecht und gehen nicht beide zugleich durch denselben Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen, nämlich der Tangente; sie können sich daher im Falle einer eigentlichen Raumkurve nicht schneiden und erzeugen folglich eine windschiefe Fläche. Die Fläche kann nur dann abwickelbar sein, wenn die Binormalen parallel sind, also alle Schmiegungebenen zusammenfallen, d. h. wenn die Kurve eben ist. In diesem Falle wird die Binormalenfläche ein Zylinder, der auf der Ebene der Kurve senkrecht steht, und fällt mit der rektifizierenden Fläche zusammen.

11. Zusammenfassung. Den Nummern 6—10 zufolge hat man mit einer Kurve fünf Flächen in Verbindung zu denken: die Tangentenfläche, die Polarfläche, die rektifizierende Fläche, die Fläche der Hauptnormalen und die Fläche der Binormalen. Von diesen sind die drei ersten abwickelbar, die beiden letzten i. a. windschief. Die Kurve selbst ist der gemeinsame Durchschnitt der Tangentenfläche, der rektifizierenden Fläche und der Fläche der Hauptnormalen, während die Polarfläche nicht durch die Kurve hindurchgeht. Die drei abwickelbaren Flächen besitzen drei Gratlinien, unter denen die Kurve selbst ist; sie ist nämlich die Gratlinie der Tangentenfläche.

Die Beziehungen dieser neuen Gebilde zu der Ausgangskurve und zueinander werden in späteren Kapiteln noch des näheren zu untersuchen sein.

12. Übungen. 1. Ebene Kurven. Alle Schmiegungebenen fallen mit der Ebene der Kurve zusammen. Die Fläche der Tangenten geht in diese Ebene über¹⁾; die Fläche der Normalebenen wird ein Zylinder, weil die Krümmungsachsen alle auf der gemeinsamen Schmiegungeebene aller Punkte der Kurve senkrecht stehen; die Fläche der Binormalen wird gleichfalls ein Zylinder, weil die Binormalen den Krümmungsachsen parallel laufen; die rektifizierende Fläche fällt mit dem Zylinder der Binormalen zusammen, denn die rektifizierenden Ebenen und folglich auch die rektifizierenden Geraden stehen alle auf der gemeinsamen Schmiegungeebene senkrecht, und die Fläche der Hauptnormalen reduziert sich auf die Ebene der Kurve, weil die Hauptnormalen alle in die Schmiegungebenen fallen.

1) Genauer: in denjenigen Teil der Ebene, der als „Äußere der Kurve“ bezeichnet wird, d. h. von dessen Punkten aus man reelle Tangenten an die Kurve ziehen kann. Die Ebene oder gewisse ihrer Teile können dabei mehrfach überdeckt werden.

2. Sphärische Kurven. Für eine Kurve auf einer Kugel sind die Tangenten auch Tangenten an diese Kugel, durch den Kugelmittelpunkt gehen daher alle Normalebenen, also auch alle Krümmungsachsen. Daraus folgt:

Die Polarfläche einer sphärischen Kurve ist ein Kegel, dessen Spitze in den Mittelpunkt der Kugel fällt.

3. Allgemeine Schraubenlinien. Um gleich hier die Grundbegriffe der Kurvenlehre an einer der Untersuchung leicht zugänglichen und doch nicht trivialen Kurvenklasse zu erläutern, betrachten wir die geodätischen (d. h. kürzesten) Linien einer allgemeinen Zylinderfläche. Sie werden als allgemeine Schraubenlinien bezeichnet, da sie mit der gewöhnlichen Schraubenlinie, der Geodätischen des Drehzylinders, zahlreiche Eigenschaften gemein haben.

Die erzeugenden Geraden des Zylinders Γ , auf dem die Kurve (M) geodätisch ist, seien g, g', g'', \dots . Wickelt man den Zylinder in eine Ebene ab, so gehen diese Erzeugenden in parallele Geraden g, g', \dots der Ebene über. Da bei der Abwicklung sich Bogenlängen nicht ändern, geht die Geodätische (M) in eine geodätische Linie der Ebene über, d. h. sie verwandelt sich in eine Gerade (\mathcal{M}). Diese Linie schneidet nun alle Geraden des Parallelbüschels g, g', \dots unter demselben Winkel α , und, da bei der Abwicklung auch die Winkel ungeändert bleiben, schneidet auch die Kurve (M) alle Geraden des Zylinders Γ unter diesem Winkel α , d. h.

Die allgemeinen Schraubenlinien schneiden die Erzeugenden eines Zylinders unter konstantem Winkel.

Dieser Zylinder sei in der Folge als der „zur Schraubenlinie gehörige Zylinder“ bezeichnet.

Als Spezialfall gehören auch die ebenen Kurven zu den Schraubenlinien; für sie wird $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, denn man kann über jeder ebenen Kurve einen Zylinder errichten, dessen Erzeugenden die Kurve senkrecht schneiden (die rektifizierende Fläche der ebenen Kurve; s. o.).

Tangente. Eine Ebene ε schneide die Geraden des Zylinders senkrecht; die Schnittkurve (M_0) ist dann die senkrechte Projektion der Schraubenlinie (M) auf der Ebene ε , und die Tangente M_0M_0' der Projektionskurve die Projektion der Tangente MM' . Beide Geraden schneiden sich im Punkte S . Da der Winkel $MSM_0 = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ für alle Punkte der Kurve M konstant ist, so schneiden die Tangenten von (M) die Ebene ε unter einem konstanten Winkel. Setzt man, wie üblich, ε als Horizontalebene voraus¹⁾, so bezeichnet der Winkel der Tangenten der Kurve gegen die Ebene die Steigung der Kurve; man kann also sagen:

Die allgemeine Schraubenlinie ist eine Kurve konstanter Steigung.

1) Dies wird auch im folgenden durchweg angenommen, um die Sprechweise zu vereinfachen; (M_0) ist daher als Horizontalprojektion oder Grundriß der Schraubenlinie bezeichnet.

Es ist leicht einzusehen, daß jede Kurve konstanter Steigung die Erzeugenden eines gewissen Zylinders unter konstantem Winkel schneiden muß, also eine Schraubenlinie ist.

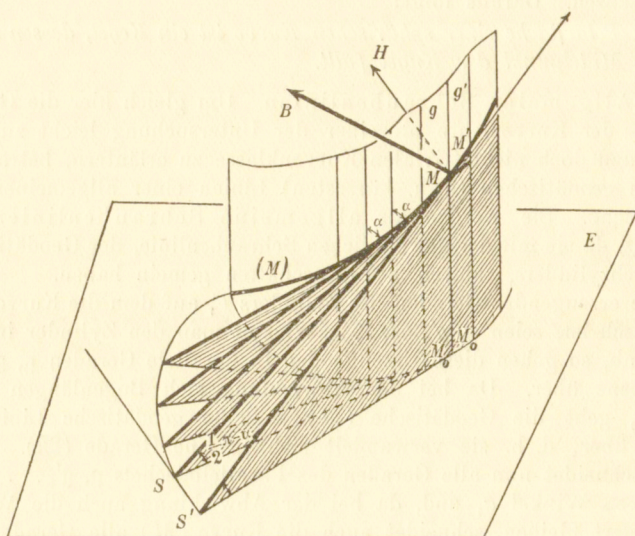


Fig. 2.

Bogenelement und Bogenlänge. Aus der Figur ergibt sich unmittelbar, daß

$$M_0M_0' = MM' \sin \alpha$$

ist. Bezeichnet man die Bogenlänge der Schraubenlinie (von dem Schnittpunkt mit einer beliebigen festgewählten Erzeugenden g ab gerechnet) mit s , die entsprechende Bogenlänge des Orthogonalschnitts (M_0) der Erzeugenden mit s_0 , so ist

$$ds_0 = ds \sin \alpha,$$

also auch

$$s_0 = s \sin \alpha.$$

Schmiegungebene. Die Schmiegungebene ist durch zwei benachbarte Tangenten MM' , $M'M''$ bestimmt. Die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der Ebene ε sind S und S' , die Spurlinie der Schmiegungebene ist also die durch SS' bestimmte Gerade. Aus der Kongruenz der Dreiecke $M'SM_0'$ und $M'S'M_0'$ folgt, daß $M_0'S = M_0'S'$ ist. M_0' ist somit der Mittelpunkt eines Kreises, der durch S und S' hindurchgeht, für den also SS' eine Tangente ist. Daher ist SS' senkrecht auf $M'M_0'$ und, da die Ebene MSM_0 auf ε senkrecht steht, so ist auch

$$SS' \perp MM'.$$

Da M_0M_0' und $M_0'M_0''$ benachbarte Tangenten der Kurve (M_0) sind,

so folgt aus der vorher abgeleiteten Gleichheit von $M_0'S$ und $M_0'S'$, daß SS' das Bogenelement einer Evolvente der ebenen Kurve (M_0) ist.

Die Horizontalspur der Schmiegungebene einer Schraublinie ist die Tangente an eine Evolvente ihrer Horizontalprojektion.

Die Richtung der Evolvententangente ist identisch mit der Richtung der (Haupt-) Normale der ebenen Kurve M_0 . Der vorige Satz ist inhaltlich identisch mit dem folgenden:

Die Schmiegungebene an alle Schraubenlinien eines vertikalen Zylinders haben für die Punkte derselben Erzeugenden parallele Horizontalspuren.

Hauptnormale. Die Hauptnormale einer Raumkurve ist die Normale in der Schmiegungebene. Hier ist $SS' \perp MM'$ und die Spur der Schmiegungebene; zieht man daher durch M zu SS' die Parallele MH , so liegt sie gleichfalls in der Schmiegungebene und steht auf der Tangente MM' senkrecht. Damit ist die Hauptnormale gefunden. Da diese Gerade MH parallel zu ε ist, so schneidet sie die Erzeugenden des Zylinders rechtwinklig; da MH auch MM' senkrecht schneidet, steht sie auch auf der durch g und MM' bestimmten Tangentialebene des Zylinders senkrecht.

Die Hauptnormalen einer Schraublinie sind einer und derselben Ebene parallel.

Da $MH \parallel SS'$ ist und dieses zur Tangente M_0S des Normalchnitts senkrecht, so ist MH parallel zur Normalen der Kurve (M_0), d. h.

Die Hauptnormalen der Schraublinie projizieren sich in die Normalen der Projektionskurve.

Rektifizierende Ebene und rektifizierende Fläche. Die rektifizierende Ebene der Schraublinie im Punkte M steht auf der Hauptnormalen MH senkrecht, ist also nach den vorigen Betrachtungen die Tangentenebene gg' des Zylinders. Die rektifizierende Fläche ist die Hüllfläche der Tangentialebenen, d. h. ist der Zylinder selbst. Dies Ergebnis war zu erwarten, denn nach Definition ist die Schraublinie auf dem Zylinder geodätisch. Man kann aber zeigen, daß eine Raumkurve nur auf einer einzigen abwickelbaren Fläche geodätisch sein kann, und dies ist die rektifizierende Fläche.

Binormale. In der rektifizierenden Ebene liegt die Binormale MB ; ihre Horizontalprojektion fällt somit in M_0M_0' . Da der Winkel der rektifizierenden Geraden g mit der Binormalen das Komplement zu ihrem Winkel mit der Tangente ist, so folgt, daß

$$\sphericalangle (MB, g) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$$

auch stets konstant ist.

Die Binormalen einer allgemeinen Schraublinie bilden mit einer festen Ebene einen konstanten Winkel, der den Winkel ihrer Tangenten zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzt.

Auf einem anderen Wege erhält man dasselbe Ergebnis folgendermaßen. Der Winkel zwischen der Binormalen MB und der Erzeugenden g des Zylinders ist gleich dem Winkel der Schmiegungebene und der Horizontalebene (da jede Gerade auf einer Ebene senkrecht steht). Dieser Winkel aber ist gegeben durch die beiden Lote SM_0 und SM , die in einem Punkte der Schnittgeraden SS_0 in den beiden Ebenen auf dieser Schnittgeraden konstruiert sind.

Normalebene und Polarfläche. Die Normalebene stehen in den Punkten der Kurve auf den Tangenten senkrecht; sie haben also auch eine konstante Horizontalneigung. Ihre Hüllfläche, die Polarfläche, besitzt Erzeugende, die den Binormalen der Ausgangskurve parallel sind. Diese besitzen aber, wie soeben gezeigt ist, eine konstante Neigung; da die Erzeugenden der Polarfläche Tangenten ihrer Gratlinie sind, so ist diese Gratlinie eine Kurve konstanter Steigung, d. h. eine Schraublinie.

Die Polarlinie einer Schraublinie ist wieder eine Schraublinie, deren Neigung das Komplement der Neigung der ersten Schraubenlinie ist.

II. Kapitel.

Krümmung.

1. Kontingenzwinkel. Der unendlich kleine Winkel, welchen die Tangente MM' eines Punktes M der Kurve mit der Tangente $M'M''$ des Nachbarpunktes M' bildet, heißt der Kontingenzwinkel $d\tau$ der Kurve im Punkte M . Er liegt in der Schmiegungebene; seine Schenkel, die Tangenten in den Punkten M und M' , sind Lote zu den entsprechenden Normalebene. *Der Kontingenzwinkel ist also auch der Winkel benachbarter Normalebene.* Nun sind die Normalebene Tangentenebene an die Fläche der Krümmungsachsen und zugleich die Schmiegungebene der Gratlinie dieser Fläche. *Daher ist der Winkel der Schmiegungebene zweier aufeinanderfolgender Punkte der Polarkurve gleich dem Kontingenzwinkel der Kurve (M).*

Die Normalebene der Punkte M , M' und ihre Durchschnittsline, die Krümmungsachse des Punktes M , stehen gleichzeitig senkrecht auf der Schmiegungebene von M , in welcher die beiden Tangenten liegen. Sie schneiden diese Ebene in zwei zu den Tangenten senkrechten Geraden, welche im Durchschnitt C der Krümmungsachse mit der Schmiegungebene zusammenlaufen. Diese Geraden CM , CM' bilden miteinander den Neigungswinkel der Normalebene,

d. h. ihr Winkel ist gleich dem Kontingenzwinkel. Von diesen Geraden ist aber nur die eine (MC) eine Hauptnormale, nämlich die Durchschnittslinie der Normalebene des Punktes M mit der Schmiegungeebene desselben Punktes, die andere $M'C$ nicht. Denn die folgende Hauptnormale ist die Durchschnittslinie der Normalebene des Punktes M' mit dessen Schmiegungeebene, $M'C$ ist aber die Durchschnittslinie dieser Normalebene mit der Schmiegungeebene des Punktes M und ist die senkrechte Projektion der zweiten Hauptnormale auf die erste Schmiegungeebene.

2. Krümmungsmittelpunkt, Krümmung. Beschreibt man um den Punkt C einen Kreis mit dem Radius MC , so ist MM' als Lot im Endpunkte des Radius auch für den Kreis eine Tangente, d. h. M' liegt auf dem Kreise. Dann ist aber auch $M'M''$ Lot im Endpunkte eines Radius, also liegt auch M'' auf dem Kreise um C . Dieser Kreis ist demnach die Grenzlage, dem ein Kreis zustrebt, der durch M und zwei weitere Punkte M_1, M_2 der Kurve hindurchgeht, sobald sich M_1 und M_2 dem Punkte M unbeschränkt nähern. Man nennt ihn daher den Krümmungskreis, seinen Radius $MC = \rho$ den Krümmungsradius und den Punkt C den Krümmungsmittelpunkt. Man kommt auf denselben Kreis durch folgende Grenzbetrachtung.

Legt man durch drei beliebige Punkte M, M', M'' einer Kurve eine Ebene und konstruiert in ihr einen Kreis, welcher durch diese drei Punkte geht, so liegt dessen Mittelpunkt γ in dem Punkte, in welchen die Durchschnittslinie der beiden in den Mitten der Sehnen MM' und $M'M''$ senkrecht auf diesen errichteten Ebenen die Ebene der drei Punkte schneidet. Rücken nun die Punkte M' und M'' dem Punkte M unbegrenzt nahe, so geht die Ebene des Kreises in die Schmiegungeebene über und nimmt der Kreis und sein Mittelpunkt eine bestimmte Größe und Lage in ihr an. Die in den Mitten der Sehnen errichteten Ebenen gehen hierbei in die Normalebenen der Punkte M, M' , ihre Durchschnittslinie in die Krümmungsachse und der Mittelpunkt des Kreises in den Durchschnitt C derselben mit der Schmiegungeebene über. Es ist dies also der vorher eingeführte Krümmungskreis.

Aus dem unendlich schmalen Dreieck MCM' (Fig. 3), welches als rechtwinklig und gleichschenkelig angesehen werden kann (M und M' liegen ja auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte C) und in welchem die dem Winkel $C = d\tau$ gegenüberliegende Seite das Bo-

genelement $MM' = ds$ ist, während seine beiden anderen Seiten $MC = M'C = \rho$ sind, ergibt sich

$$\rho d\tau = ds$$

und mithin:

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}.$$

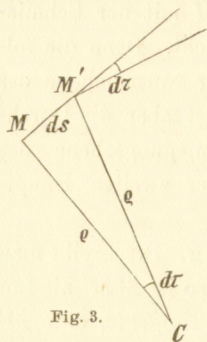


Fig. 3.

Nimmt man die Krümmung eines mit der Längeneinheit beschriebenen Kreises als Einheit der Krümmung an, so verhalten sich die Krümmungen zweier Kreise umgekehrt wie die Radien, und man nennt den reziproken Wert des Radius das Maß der Krümmung eines Kreises. Daher ist $\frac{1}{\rho}$ oder $\frac{d\tau}{ds}$ die Krümmung des Krümmungs-

kreises. Man nennt diesen Ausdruck die Krümmung der Kurve im Punkte M , auch wohl die erste Krümmung der Kurve in diesem Punkte zum Unterschiede von einer bald zu erläuternden zweiten.

3. Berührung verschiedener Ordnung, Oskulation.

Der Krümmungskreis hat drei aufeinanderfolgende Punkte oder, was dasselbe ist, zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente und Tangenten mit der Kurve gemein. Die Berührung zweier Kurven, welche n aufeinanderfolgende (zusammenfallende) Punkte gemein haben, heißt eine n -punktige Berührung oder eine Berührung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Der Krümmungskreis berührt demnach die Kurve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung. Eine Fläche berührt eine Kurve n -punktig oder in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn sie mit ihr n aufeinanderfolgende Punkte gemein hat. Die Schmiegungeebene berührt demnach die Kurve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung. Der Krümmungskreis liegt in der Schmiegungeebene und berührt diese Kurve in derselben Ordnung, wie diese. Dieser Satz ist ein spezieller Fall des allgemeineren: Wenn eine Fläche F eine Kurve C in der n^{ten} Ordnung berührt, so kann auf der Fläche durch den Berührungspunkt keine Kurve gezogen werden, welche C in einer höheren Ordnung, als der n^{ten} berührt. Denn es kann eine auf der Fläche F liegende Kurve mit der Kurve C nicht mehr Punkte gemein haben als auf F liegen.

4. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte. Der Krümmungsmittelpunkt C des Punktes M ist der Durchschnittspunkt der Krümmungsachse mit der Hauptnormalen dieses Punktes. Die Folge der Krümmungsmittelpunkte bildet daher eine Kurve, welche auf der Fläche der Hauptnormalen und der Fläche der Krümmungsachsen liegt und mithin die Durchschnittskurve dieser beiden Flächen ist. Diese Kurve wird von den Hauptnormalen nicht berührt, sondern

geschnitten, wenn die Ausgangskurve (M) eine eigentliche (nicht ebene) Raumkurve ist. (Vgl. Kap. I, Nr. 9, S. 7).

5. Schmiegunswinkel. Die Schmiegunsebenen in zwei aufeinanderfolgenden Punkten M , M' einer Kurve bilden einen infinitesimalen Winkel $d\sigma$, den Schmiegunswinkel (Torsions- oder Windungswinkel). Man kann die Schmiegunsebene des Punktes M mit der des Punktes M' dadurch zur Deckung bringen, daß man sie um die Schnittgerade beider Ebenen, die Tangente $M'M''$ durch den Winkel $d\sigma$ dreht. Diese Drehung ist positiv oder negativ, je nachdem sie für einen Beobachter, der in der Richtung $M'M''$ (d. i. im Sinne der Fortschreitungsrichtung der Kurve) sieht, entgegengesetzt oder im Sinne des Uhrzeigers verläuft. Dementsprechend ist also dem Schmiegunswinkel $d\sigma$ das positive oder negative Vorzeichen beizulegen.

Keht man den Fortschreitungsinn auf der Kurve um, so kehrt sich auch die Reihenfolge der Schmiegunsebenen um, so daß das Vorzeichen des Torsionswinkels dasselbe bleibt. Der Sinn des Torsionswinkels ist also nicht von dem Fortschreitungsinn auf der Kurve abhängig.

Da die Krümmungsachsen und Binormalen dieser Punkte auf den Schmiegunsebenen senkrecht stehen, so bilden sie miteinander denselben Winkel. Der Winkel zweier aufeinanderfolgender Krümmungsachsen ist aber der Kontingenzwinkel der Gratlinie der Polarfläche. Es war schon vorher (S. 12) gezeigt, daß der Kontingenzwinkel der Ausgangskurve gleich dem Winkel zweier aufeinanderfolgender Schmiegunsebenen dieser Gratlinie ist; es gilt daher der Satz:

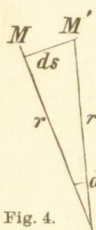
Eine Kurve doppelter Krümmung und die Gratlinie ihrer Polarfläche stehen in solcher Beziehung zueinander, daß, abgesehen vom Vorzeichen, der Kontingenzwinkel und Schmiegunswinkel der einen bzw. dem Schmiegunswinkel und Kontingenzwinkel der andern gleich ist.

Durch Abwicklung einer abwickelbaren Fläche wird der Winkel ihrer Tangentenebenen oder der Schmiegunswinkel der Gratlinie dieser Fläche zerstört (vgl. Nr. 10). Bei der Abwicklung der Tangentfläche geht daher die Kurve in eine ebene Kurve über, welche mit ihr gleiche Kontingenzwinkel hat. Durch Abwicklung der Polarfläche verwandelt sich deren Gratlinie in eine ebene Kurve, deren Kontingenzwinkel den Schmiegunswinkeln der Kurve doppelter Krümmung gleich sind. Von diesen beiden ebenen Kurven hat die erste mit der Kurve doppelter Krümmung gleiche Bogenelemente und folglich auch gleiche

Krümmungshalbmesser, das Bogenelement der zweiten aber ist natürlich im allgemeinen nicht gleich dem Bogenelemente jener.

6. Verschwinden des Schmiegungs- und des Kontingenzwinkels. Der Schmiegungswinkel $d\sigma$ mißt in einer ähnlichen Weise die Abweichung der Kurve von der Schmiegungebene, wie der Kontingenzwinkel $d\tau$ ihre Abweichung von der Tangente. Wird in einem Punkte der Kurve $d\sigma = 0$, so wird die Kurve an dieser Stelle eben, d. h. es fallen zwei Schmiegungebenen zusammen und fallen also vier Punkte oder drei Tangenten in eine Ebene. Die Schmiegungebene berührt alsdann die Kurve vierpunktig oder in der dritten Ordnung. Wird in einem Punkte der Kontingenzwinkel $d\tau$ gleich Null, so wird die Kurve an dieser Stelle geradlinig, d. h. es fallen drei aufeinanderfolgende Punkte in die Tangente, der Krümmungskreis geht in die Tangente über und diese berührt die Kurve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung.

7. Schmiegunghalbmesser und Schmiegunge. Konstruiert man ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 4), in welchem eine Kathete gleich dem Bogenelement ds und der dieser gegenüberliegende Winkel gleich dem Schmiegungswinkel $d\sigma$ ist, so werden die beiden andern



Seiten eine gewisse Länge annehmen, die dauernd mit r bezeichnet werden soll, und zwar wird:

$$r d\sigma = ds,$$

also

$$r = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Der reziproke Wert dieser Länge r mißt die Krümmung

eines Kreises vom Radius r und wird das Maß der

zweiten Krümmung (Torsion oder Windung) der Kurve in dem betrachteten Punkte M , die Länge r selbst der Radius der zweiten Krümmung (Schmiegungs- oder Torsionsradius) jenes Punktes genannt. Einen dem Krümmungskreis entsprechenden Schmiegunskreis gibt es nicht, wir werden aber für den Schmiegunsradius später an der Fläche der Tangenten und der Fläche der Binormalen zwei geometrische Interpretationen entwickeln. Aus der Definition von r ergibt sich noch ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Krümmungsradius ρ : während ρ stets absolut zu nehmen ist, kann der Schmiegunsradius positive und negative Werte annehmen.

8. Natürliche Gleichungen einer Raumkurve. Ist für eine Raumkurve das Gesetz vorgeschrieben, nach dem die erste und

zweite Krümmung von der Bogenlänge abhängt, d. h. kennt man die beiden Krümmungen als Funktionen der Bogenlänge

$$\frac{1}{\rho} = f(s), \quad \frac{1}{r} = \varphi(s),$$

so ist dadurch die Kurve bis auf ihre Lage im Raume vollständig bestimmt. Geht man nämlich von einem beliebigen Punkte M im Raume aus und schreitet von ihm in beliebiger Richtung um das infinitesimale Stück ds zum Nachbarpunkte M' fort, so bestimmt die Gleichung

$$d\tau = \frac{ds}{\rho} = f(s)ds$$

den Winkel, den die Tangente der Kurve im Punkte M' mit der Tangente MM' in M bildet. Unter der Gesamtheit der Geraden, die dieser Bedingung genügen (sie liegen auf einem Rotationskegel mit MM' als Achse und $2d\tau$ als Öffnungswinkel) kann man eine beliebige t' als Tangente in M' herauswählen. Dies kommt darauf hinaus, daß man 1. die Lage des Punktes M , 2. die Richtung der Tangente in M , 3. die Stellung der Schmiegungeebene in M willkürlich vorschreiben kann. Damit ist aber die Willkürlichkeit erschöpft; denn für den Punkt M' ist die Schmiegungeebene bestimmt: sie geht durch t' und bildet mit der Schmiegungeebene in M den Winkel $d\sigma = \varphi(s)ds$; ferner ist durch $M'M'' = ds$ der dem Punkte M' benachbarte Punkt M'' bestimmt; für diesen die Tangente t'' durch die Bedingung, die die Bogenlänge mit dem Kontingenzwinkel verknüpft. In derselben Weise kann man fortfahren, die Kurve also derart punktweise aufgebaut denken.

Die Größen s , ρ , r sind geometrische Elemente der Kurve, die von ihrer analytischen Darstellung unabhängig sind, also in der Sprache der Analysis Invarianten der Kurve. Eine Gleichung zwischen den Invarianten bezeichnet man als natürliche Gleichung. Die eben durchgeführte Betrachtung ergibt den Satz:

Durch zwei Gleichungen zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge ist eine Raumkurve bis auf ihre Lage im Raume vollständig bestimmt.

Da eine Kurve erst durch ihre beiden Krümmungen, durch diese aber auch vollständig, bestimmt ist, nennt man die Raumkurven auch Kurven doppelter Krümmung. Zu ihnen gehören auch als besondere Klasse die ebenen Kurven, deren zweite Krümmung verschwindet.

Eine Gleichung

$$F(s, \varrho, r) = 0$$

zwischen den Invarianten umfaßt unendlich viele verschiedene (d. i. nicht kongruente) Kurven; man bezeichnet ihre Gesamtheit als eine Kurvenklasse.

Anmerkung. Eine Differentialgleichung führt bei ihrer Integration willkürliche Konstanten in die Gleichung hinein; die ihr genügenden Kurven sind also nicht kongruent und bilden auch nicht eine Kurvenklasse im eben definierten Sinne, sondern ∞^n , wobei n eine ganze Zahl ist, die gleich der Ordnung der Differentialgleichung ist.

9. Beispiele. 1. Die ebenen Kurven bilden die Klasse

$$\frac{1}{r} = 0.$$

2. Die Kurven

$$\frac{1}{\varrho} = f(s)$$

erhält man, wenn man die ebene Kurve, die diese natürliche Gleichung besitzt, konstruiert und die Fläche ihrer Tangenten irgendwie stetig so verbiegt, daß die Tangenten geradlinig bleiben. (Vgl. Nr. 10).

3. Die Kurven

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\varrho}{r} \right) = 0$$

bilden die ∞^1 Klassen

$$\frac{\varrho}{r} = \operatorname{tg} \alpha;$$

sie werden später als die allgemeinen Schraubenlinien erkannt werden.

Denkt man sich eine Kurve, welche mit der gegebenen Kurve gleiches Bogenelement, zum Kontingenzwinkel aber deren Schmiegunswinkel hat, so stellt deren Krümmungshalbmesser den Schmiegunsradius r dar. Da der Schmiegunswinkel dieser Kurve hierdurch noch nicht bestimmt wird, so gibt es unzählig viele Kurven, welche dieser Bedingung genügen, im allgemeinen ist keine von ihnen identisch mit der Gratlinie der Fläche der Krümmungsachsen, aber eine ist darunter, deren Schmiegunswinkel gleich dem Kontingenzwinkel der gegebenen Kurve ist. Die erste und zweite Krümmung dieser Kurve ist gleich der zweiten und ersten Krümmung der gegebenen.

10. Summe der Kontingenzwinkel. Konstruiert man in den Punkten M, M', M'', \dots eines Kurvenstücks MN die Tangenten, und wickelt man diese Tangentenfläche in eine Ebene ab, indem man jede Schmiegungebene (die Ebene eines Kontingenzwinkels) um die Tangente dreht, bis sie mit der folgenden Schmiegungebene zu-

sammenfällt, so wird dadurch weder die Größe der Kontingenzwinkel, noch die der Bogenelemente der Kurve geändert und es geht die Kurve doppelter Krümmung in eine ebene Kurve über, welche mit ihr gleiche Bogenelemente und gleiche Kontingenzwinkel, also gleiche Krümmung hat.

Bei der Abwicklung der Tangentenfläche ändert sich weder Bogenlänge noch Krümmung der Kurve.

Zieht man in der Ebene der abgewickelten Kurve (Fig. 5) irgendeine Gerade, welche die Tangenten der Punkte $M, M', M'', \dots, M^{(n-1)}, N$

der Reihe nach in den Punkten $\mu, \mu', \mu'', \dots, \mu^{(n-1)}, \nu$ schneidet und mit diesen die Winkel $\mu, \mu', \mu'', \dots, \mu^{(n-1)}, \nu$ bilden, so ergibt sich jeder Kontingenzwinkel als die Differenz zweier Winkel μ , welche die Transversale mit seinen Schenkeln bildet, und man erhält die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d\tau &= \mu' - \mu, \\ d\tau' &= \mu'' - \mu', \\ d\tau'' &= \mu''' - \mu'', \\ &\vdots \\ d\tau^{(n-1)} &= \nu - \mu^{(n-1)} \end{aligned}$$

und durch deren Addition die Summe der Kontingenzwinkel, nämlich:

$$\tau = \nu - \mu.$$

Die Punkte μ, μ', μ'', \dots der Transversalen bildeten vor der Abwicklung der Tangentenfläche auf dieser eine Kurve, deren Tangenten gegen die Erzeugungslinien der Fläche unter den Winkeln $\mu, \mu' \dots$ geneigt waren und durch die Abwicklung alle in eine Gerade zusammenfielen. Da die Bogenlänge dieser Kurve durch die Abwicklung nicht verändert wurde und die Gerade in der Ebene eine kürzeste Linie zwischen irgend zweien ihrer Punkte ist, so folgt, daß jene Kurve

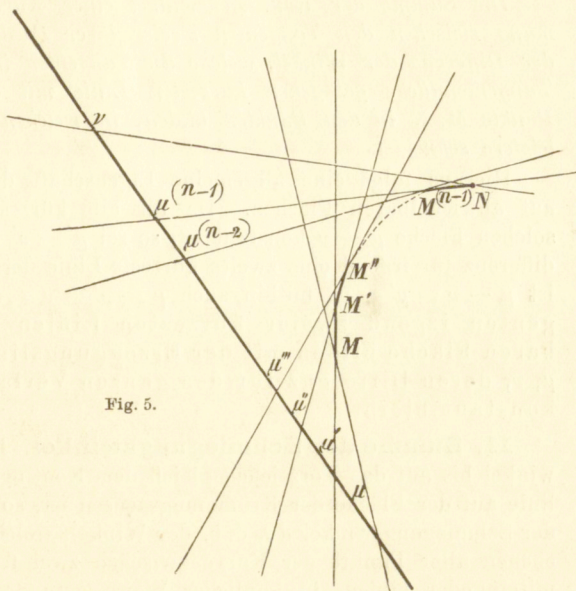


Fig. 5.

auf der Tangentenfläche gleichfalls eine kürzeste Linie sein muß, und da die Transversale in der Ebene ganz willkürlich war, so ergibt sich der Satz:

Die Summe der Kontingenzwinkel einer Kurve doppelter Krümmung zwischen den Tangenten zweier ihrer Punkte M, N ist gleich der Differenz der Winkel, welche die Tangenten irgend einer auf der Tangentenfläche gezogenen kürzesten Linie mit den Tangenten der Punkte M, N in den Punkten bilden, in welchen die kürzeste Linie letztere schneidet.

Hieraus folgt eine allgemeine Eigenschaft der kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen. Da für alle kürzeste Linien auf einer solchen Fläche $\mu - \nu$ konstant ist, so sei $\mu' - \nu'$ die analoge Winkel-differenz für irgend eine zweite kürzeste Linie derselben Fläche; dann ist $\mu - \nu = \mu' - \nu'$, mithin auch $\mu - \mu' = \nu - \nu'$, d. h.: Die Tangenten irgend zweier kürzesten Linien einer abwickelbaren Fläche bilden mit der Erzeugungslinie dieser Winkel μ, ν , deren Differenz für den ganzen Verlauf dieser Kurven konstant bleibt.

11. Summe der Schmiegunzwinkel. Da der Schmiegunzwinkel bis auf das Vorzeichen gleich dem Kontingenzwinkel der Gratlinie auf der Fläche der Krümmungsachsen ist, so kann die Summe σ der Schmiegunzwinkel $d\sigma$, d. h. der Winkel, welche die Schmiegungebenen aller Punkte der Kurve zwischen zwei festen Punkten M, N miteinander bilden, in ähnlicher Weise gefunden werden, wie wir soeben die Summe der Kontingenzwinkel $d\tau$ gefunden haben. Man kann aber auch direkt ihre Summe finden. Nach einem Satze der Elementargeometrie ist die doppelte Summe der Winkel A, B, C einer dreiflächigen Ecke weniger dem vierfachen körperlichen Raume E der Ecke selbst gleich dem vollen körperlichen Winkel Ω , nämlich:

$$2(A + B + C) - 4E = \Omega.$$

Ist nun A' der Nebenwinkel von A , also $A' + A = \frac{1}{2}\Omega$, so kommt, wenn man dies einsetzt,

$$B + C = 2E + A',$$

und mithin wird

$$C = 2E + A' - B,$$

d. h. ein Winkel einer körperlichen Ecke ist gleich der Differenz zwischen einem der Winkel an der Gegenseite und dem diesem nicht anliegenden Außenwinkel, vermehrt um den doppelten Inhalt der körperlichen Ecke.

Schneiden wir nun das System der Schmiegungebenen der Punkte $M, M', M'', \dots, M^{(n-1)}, N$ mit irgend einer Ebene, welche mit diesen der Reihe nach die Winkel $\mu, \mu', \mu'', \dots, \nu$ bildet und bezeichnen die körperlichen Ecken, welche von je zwei aufeinanderfolgenden Schmiegungebenen und der Schnittebene gebildet werden, der Reihe

nach mit $d\varepsilon, d\varepsilon', d\varepsilon'', \dots, d\varepsilon^{(n-1)}$ sowie die Schmiegunswinkel selbst mit $d\sigma, d\sigma', d\sigma'', \dots, d\sigma^{(n-1)}$, so erhält man nach dem angeführten Satze:

$$\begin{aligned}d\sigma &= 2d\varepsilon + \mu' - \mu, \\d\sigma' &= 2d\varepsilon' + \mu'' - \mu', \\d\sigma'' &= 2d\varepsilon'' + \mu''' - \mu'', \\&\vdots \\d\sigma^{(n-1)} &= 2d\varepsilon^{(n-1)} + \nu - \mu^{(n-1)},\end{aligned}$$

mithin durch Addition, wenn wir noch die Summe der Schmiegunswinkel mit σ und die der körperlichen Ecken mit E bezeichnen:

$$\sigma = 2E + (\nu - \mu).$$

Darin bedeutet nun E den körperlichen Raum der von den Schmiegunsebenen in M und N , von dem zwischen ihnen liegenden Teile der Tangentenfläche und der Schnittebene gebildeten krummflächigen Ecke. Daher gilt der Satz:

Die Summe der Schmiegunswinkel, welche die Schmiegunsebenen aller zwischen zwei festen Punkten M, N einer Kurve doppelter Krümmung bilden, ist gleich der Differenz der Winkel, welche die Schmiegunsebenen in M und N mit irgend einer Schnittebene bilden, vermehrt um den doppelten körperlichen Raum der von diesen drei Ebenen und dem zwischen den Schmiegunsebenen liegenden Teile der Tangentenfläche gebildeten krummflächigen Ecke.

12. Der Winkel der ganzen Krümmung. Die Hauptnormalen in zwei aufeinanderfolgenden Punkten M, M' einer Kurve kreuzen sich unter einem unendlich kleinen Winkel, den wir den Winkel der ganzen Krümmung im Punkte M nennen wollen. Dieser Winkel, der mit dk bezeichnet werden soll, wird auch von den rektifizierenden Ebenen in M und M' gebildet, die ja auf den Hauptnormalen senkrecht stehen. Da diese Ebenen Tangentenebenen der rektifizierenden Fläche und also Schmiegunsebenen ihrer Gratlinie sind, so ist, abgesehen vom Vorzeichen, dk auch dem Schmiegunswinkel der Gratlinie der rektifizierenden Fläche gleich.

Zwischen den drei Krümmungswinkeln $d\tau, d\sigma, dk$ besteht eine einfache Beziehung. Man erhält diese naturgemäß durch die Betrachtung der sphärischen Abbildung der Raumkurve, eines Hilfsmittels, das auch in vielen anderen Fragen der Kurventheorie von grundlegender Bedeutung ist. Sie soll daher in dem nächsten Kapitel eingehend behandelt werden.

III. Kapitel.

Sphärische Abbildung.

1. Das sphärische Bild einer Geraden. Um einen Punkt O des Raumes konstruiere man eine Kugel vom Radius Eins, die Bildkugel; dann bezeichnet man als das sphärische Bild g einer Geraden \mathcal{G} den Endpunkt eines zu \mathcal{G} parallelen Radius Og der Bildkugel. Da es zwei solche Radien gibt, die entgegengesetzt gerichtet sind, so entsprechen einer Geraden immer zwei diametral gegenüberliegende Punkte der Kugel.

erteilt man der Geraden einen Richtungssinn (oder nach Study: orientiert man die Gerade zu einem Speer), so entspricht einer jeden solchen gerichteten Geraden \mathcal{G} ein und nur ein Punkt der Kugel g , und den beiden entgegengesetzten Richtungen einer Geraden entsprechen die Endpunkte eines Durchmessers der Bildkugel. In der Folge werden wir es fast durchweg mit gerichteten Geraden oder Speeren zu tun haben.

Für die eben definierte sphärische Abbildung (sowohl der Geraden als auch der Speere) gelten folgende einfachen Sätze:

1. Parallele (und gleichgerichtete) Geraden haben dasselbe Bild.
2. Der Winkel zweier Geraden ist gleich dem Abstand ihrer sphärischen Bilder.

Sind nämlich \mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 zwei Geraden, und g_1, g_2 ihre Bilder, so ist nach der Definition $Og_1 \parallel \mathcal{G}_1, Og_2 \parallel \mathcal{G}_2$, also der Winkel $g_1 Og_2$ gleich dem Winkel der Geraden (Fig. 6). Speziell:

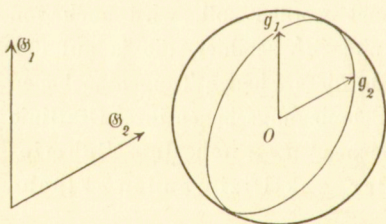


Fig. 6.

2a. Senkrechte Geraden haben Bildpunkte, die um $\frac{1}{2}\pi$ entfernt liegen.

3. Die Bilder aller Geraden einer Ebene liegen auf einem größten Kreise der Kugel; man nennt ihn das sphärische Bild der Ebene.

4. Parallele Ebenen haben dasselbe sphärische Bild.
 5. Der Winkel zweier Ebenen ist gleich dem Winkel ihrer Bilder.
- Denn die Bildkreise der Ebenen E_1, E_2 liegen ihrer Konstruktion nach in Ebenen, die durch den Mittelpunkt O zu E_1 und E_2 parallel gelegt sind. Das Bild einer Ebene enthält die Bilder ihrer sämt-

lichen Geraden; da die Schnittgerade zweier Ebenen beiden Ebenen angehört, muß für sie der Satz gelten:

6. Das Bild der Schnittgeraden zweier Ebenen ist der Schnitt der sphärischen Bilder der Ebenen.

2. Das sphärische Bild des Hauptdreikants. Auf einer Raumkurve (M) setze man einen Fortschreitungsinn $MM'M'' \dots$

fest und bezeichne als Richtung der Tangente in jedem Punkte der Kurve diejenige Richtung, die mit diesem Fortschreitungsinn zusammenfällt. Die sphärischen Bilder t, t', t'', \dots der aufeinanderfolgenden Tangenten $MM', M'M'', M''M''', \dots$ bilden

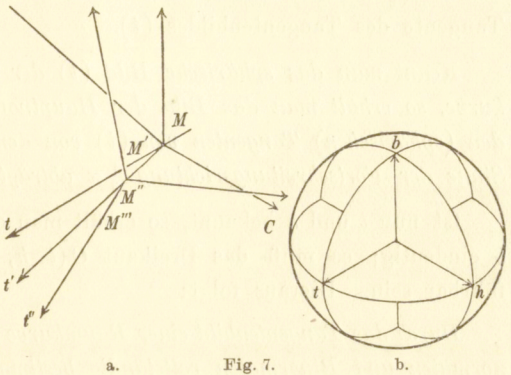


Fig. 7.

dann auf der Kugel eine Kurve, das Tangentenbild (Tangentenindikatrix) der Kurve (M). Nach dem Satze 2 der vorigen Nummer ist das Bogenelement tt' dieser Bildkurve gleich dem Winkel der entsprechenden benachbarten Tangenten, d. h.

Das Bogenelement des Tangentenbildes einer Kurve ist gleich ihrem Kontingenzwinkel.

Als Richtung der Hauptnormale wähle man die Richtung MC vom Kurvenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkte, und die Binormale orientiere man so, daß das Hauptdreikant der Raumkurve mit dem Koordinatendreikant zur Deckung gebracht werden kann, und zwar derart, daß die Tangente, Hauptnormale und Binormale bzw. mit der positiven x -, y - und z -Achse zusammenfallen. Das sphärische Bild der Hauptnormalen sei h , das der Binormalen b ; dann ergibt sich unmittelbar aus den bekannten Eigenschaften des Hauptdreikants in Verbindung mit den Sätzen der vorigen Nummer:

Die sphärischen Bilder aller Geraden, die der

Schmiegungeebene | Normalebene | rektifizierenden Ebene

angehören oder ihr parallel sind, liegen auf dem größten Kreise durch die Punkte

t, h		h, b		$b, t.$
--------	--	--------	--	---------

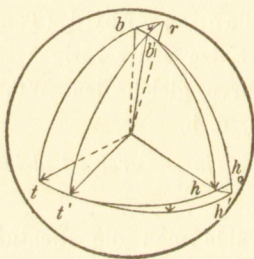
Diese drei größten Kreise sind demnach die Bilder der Ebenen des Hauptdreikants.

Da in der Schmiegungebene des Punktes M nicht nur MM , sondern auch die benachbarte Tangente $M'M''$ liegt, so gehört deren Bild t' dem Kreise th an, und zwar liegt t' auf th selbst (nicht in der Verlängerung), da $M'M''$ mit der Hauptnormale MC einen Winkel $(\frac{1}{2}\pi - d\tau)$ bildet. Der Kreis ht ist somit die sphärische Tangente des Tangentenbildes (t).

Kennt man das sphärische Bild (t) der Tangenten einer Raumkurve, so erhält man das Bild der Hauptnormalen, indem man auf den (sphärischen) Tangenten von (t) von den Berührungspunkten im Sinne der Fortschreitungsrichtung $\frac{1}{2}\pi$ abträgt.

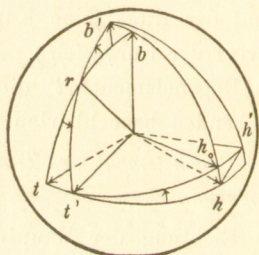
Ist nun t und h bekannt, so erhält man das Bild der Binormalen b eindeutig; es muß das Dreikant $O(t, h, b)$ in $O(x, y, z)$ überführbar sein. Hieraus folgt:

Durch das Tangentenbild einer Raumkurve ist das Bild ihrer Hauptnormalen und Binormalen vollständig bestimmt.



c.
 $d\sigma > 0$

Fig. 7.



d.
 $d\sigma < 0$

Bild des Hauptdreikants.

3. Parallele Raumkurven. Sind sich zwei Raumkurven punktweise so zugeordnet, daß sie in entsprechenden Punkten parallele und gleichgerichtete Tangenten haben, so fallen ihre Tangentenbilder zusammen, und umgekehrt lassen sich zwei Raumkurven, die dasselbe Bild der Tangenten haben, so zuordnen, daß in entsprechenden Punkten die Tangenten parallel sind; zwei derart aufeinander bezogene Kurven mögen parallel zugeordnete oder kürzer parallele Raumkurven genannt werden. Die eben gewonnenen Beziehungen zwischen Hauptnormalen-, Binormalen- und Tangentenbild ergeben unmittelbar den Satz:

Parallele Raumkurven haben in entsprechenden Punkten nicht nur parallele Tangenten, sondern auch parallele Hauptnormalen und Binormalen.

Wenn zwei Raumkurven sich so zuordnen lassen, daß ihre Tangenten in entsprechenden Punkten parallel und entgegengesetzt gerichtet (antitaktisch) sind, so sind auch ihre Hauptnormalen entgegengesetzt gerichtet, während ihre Binormalen gleichgerichtet sind; man wird eine derartige Beziehung zweier Raumkurven, bei der die Tangenten- und Hauptnormalenbilder der einen Kurve die bezüglich des Kugelmittelpunktes symmetrischen Kurven der Tangenten- und Hauptnormalenbilder der zweiten Kurve sind, während die Binormalenbilder beider Kurven zusammenfallen, im weiteren Sinne gelegentlich auch als parallele Zuordnung bezeichnen, sobald es sich um Eigenschaften handelt, die beiden Zuordnungsweisen zukommen.

4. Übungen. 1. Das Tangentenbild einer ebenen Kurve ist ein größter Kreis; derselbe größte Kreis ist das Bild der Hauptnormalen (dabei liegen natürlich entsprechende Punkte t und h auf dem Kreise immer um $\frac{1}{2}\pi$ voneinander entfernt). Das Binormalenbild reduziert sich auf einen Punkt, den Pol des Tangentenbildes. Alle Kurven derselben Ebene lassen sich parallel einander zuordnen.

2. Bei einer allgemeinen Schraubenlinie bilden die Tangenten mit einer festen Richtung \mathfrak{B} einen konstanten Winkel α . Die Parallelen durch O zu den Tangenten bilden daher einen geraden Kreiskegel mit der Öffnung 2α . Dieser schneidet die Kugel in einem Kreise mit dem (sphärischen) Radius α , dessen Mittelpunkt z das Bild der Richtung \mathfrak{B} ist. Die Hauptnormalen der Schraubenlinie sind einer festen Ebene parallel und senkrecht zur Richtung \mathfrak{B} ; ihr Bild ist also der größte Kreis, dessen Pol z ist. Die Binormalen bilden mit der Richtung \mathfrak{B} gleichfalls einen konstanten Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$, ihr Bild ist demnach ein kleiner Kreis.

Die sphärischen Bilder der Tangenten und Binormalen einer Schraubenlinie sind Kreise, deren sphärische Radien sich zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen, das Hauptnormalenbild ist ein größter Kreis. Alle drei Kurven liegen in parallelen Ebenen.

3. Was für Kurven können einer Schraubenlinie parallel zugeordnet werden? Alle Tangenten einer Schraubenlinie bilden mit einer festen Grundebene einen konstanten Winkel; Kurven, die ihr parallel zugeordnet werden können, müssen daher denselben konstanten Steigungswinkel haben.

Einer Schraubenlinie von gegebener Steigung lassen sich nur Schraubenlinien derselben Steigung parallel zuordnen.

4. Zwei kongruente Kurven, die durch Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden können, lassen sich nur im engeren Sinne parallel zuordnen; zwei kongruente Kurven, die bezüglich eines

Punktes symmetrisch liegen, nur in uneigentlichem Sinne. Denn nach der Definition ist die Richtung der Tangente durch die Fortschreitungsrichtung auf der Kurve bestimmt.

5. Das sphärische Bild der Binormalen. Die Bilder der orientierten, d. h. mit einem Richtungssinn versehenen Binormalen erfüllen eine Kurve, deren Bogenelement bb' den Winkel zweier benachbarter Binormalen gibt, also gleich dem absoluten Werte des Winkels $d\sigma$ ist, den die Binormalen in den Punkten M und M' miteinander bilden.

Das Bogenelement des Binormalenbildes ist, abgesehen von dem Vorzeichen, gleich dem Schmiegunswinkel.

Die Binormale eines Punktes M steht auf zwei benachbarten Tangenten MM' , $M'M''$ senkrecht; ihr Bild b liegt somit auf den Bildkreisen bh und $b'h'$ zweier aufeinanderfolgender Normalebene. Umgekehrt enthält die Normalebene eines Punktes, z. B. M' die Richtungen Ob und Ob' , oder anders ausgedrückt, der Kreis $h'b'$ fällt mit der sphärischen Tangente bb' des Binormalenbildes zusammen.

Das Bild der Hauptnormalen einer Raumkurve liegt demnach auch auf der Tangente des Binormalenbildes, um $\frac{1}{2}\pi$ vom Berührungspunkte entfernt.

Dabei können nun — abweichend von ähnlichen Verhältnissen bei dem Tangentenbild, zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten: entweder b liegt auf dem Bogen $b'h'$ selbst, sodaß $bh' < \frac{1}{2}\pi$, oder b liegt auf der Verlängerung dieses Bogens, d. h. $bh' > \frac{1}{2}\pi$. Im ersten Falle sei $d\sigma$ negativ, im zweiten Falle positiv genannt. Dies entspricht der S. 15 getroffenen Festsetzung des Vorzeichens des Schmiegunswinkels.

6. Das Hauptnormalenbild. Der Winkel der ganzen Krümmung. Das sphärische Bild der Hauptnormalen ist eine Kurve auf der Kugel, dessen Bogenelement hh' gleich dem Winkel dk zweier benachbarter Hauptnormalen der Kurve (M) ist. Dieser Winkel dk (S. 21) wird als Winkel der ganzen Krümmung bezeichnet; er steht mit dem Torsionswinkel und Kontingenzwinkel in einer einfachen Beziehung.

Bezeichnet man den Schnittpunkt der größten Kreise tt' und bb' mit h_0 , so ist das Dreieck hh_0h' bei h_0 rechtwinklig, ferner ist

$$hh_0 = h_0t' - ht' = \frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{2}\pi - tt') = d\tau; h_0h' = b'h' - b'h_0 = bb' = d\sigma$$

und $hh' = dk$. Das unendlich kleine sphärische Dreieck hh_0h' kann als eben angesehen werden, also wird:

$$dk^2 = d\sigma^2 + d\tau^2,$$

d. h. es gilt der Lancretsche Satz:

Das Quadrat des Winkels der ganzen Krümmung ist gleich der Summe der Quadrate des Kontingenzwinkels und des Schmiegunswinkels.¹⁾

Aus diesem Satze folgt unmittelbar auch noch der folgende:

Bei keiner Kurve doppelter Krümmung kann der Winkel der ganzen Krümmung kleiner als der Kontingenzwinkel oder kleiner als der Schmiegunswinkel sein.

Ist die Kurve eben, so ist der Schmiegunswinkel Null und der Winkel der ganzen Krümmung gleich dem Kontingenzwinkel.

7. Radius der ganzen Krümmung. Bestimmt man eine Strecke r durch die Gleichung

$$r = \frac{ds}{dk},$$

so soll der reziproke Wert von r das Maß der ganzen Krümmung der Kurve im Punkte M oder auch kurz die ganze Krümmung der Kurve im Punkte M , die Strecke r aber der Radius der ganzen Krümmung heißen. r würde der Krümmungshalbmesser einer Kurve sein, welche bei gleichem Bogenelemente mit der gegebenen Kurve den Winkel dk zum Kontingenzwinkel oder der Schmiegunsradius einer anderen Kurve sein, welche bei demselben Bogenelemente den Winkel dk zum Schmiegunswinkel hätte.

Der Radius r der ganzen Krümmung steht mit dem Krümmungsradius ρ und dem Schmiegunsradius r in einer sehr einfachen Beziehung, nämlich:

Das Quadrat des reziproken Wertes vom Radius der ganzen Krümmung ist gleich der Quadratsumme der reziproken Werte des Krümmungsradius und des Schmiegunsradius. Oder auch: Das Quadrat der ganzen Krümmung ist gleich der Quadratsumme der ersten und zweiten Krümmung der Kurve.

Es ist nämlich nach dem Lancretschen Satze

$$dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2,$$

mithin auch, wenn man durch ds^2 dividiert:

$$\left(\frac{dk}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2,$$

1) Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbure. Mémoires des Savans étrangers. 1, 1805.

oder weil

$$\frac{1}{r} = \frac{dk}{ds}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}, \quad \frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$$

ist,

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung folgt noch

$$r = \frac{\rho \cdot r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}$$

und hieraus ergibt sich, weil sowohl

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \quad \text{als auch} \quad \frac{r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}$$

nicht größer als die Einheit werden kann, der Satz:

Bei keiner Kurve doppelter Krümmung kann in irgendeinem Punkte der Radius der ganzen Krümmung größer sein als der Krümmungsradius oder der Schmiegungradius.

8. Das rechtwinklige Dreieck der Radien ρ , r , r .

Sind a, b, c, h die Katheten, die Hypotenuse und die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 8), so folgt aus den Gleichungen

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad ch = ab:$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

und umgekehrt, besteht diese Relation zwischen zwei Seiten a, b und der zur dritten Seite c gehörigen Höhe h , so liegt c ein rechter

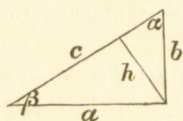
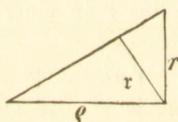


Fig. 8.



Winkel gegenüber. Denn für α und β als Gegenwinkel von a und b ist $\sin \alpha = h : b$, $\sin \beta = h : a$, mithin $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, also $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$. Man kann diesen Satz als eine Art

Reziprokom des pythagoreischen Satzes ansehen. Die Relation besteht nun zwischen ρ, r und r ; konstruiert man daher mit ρ und r als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck und nennt h seine Hypotenusenhöhe, so folgt durch Vergleichung von

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}$$

mit derselben $h = r$. Daher:

Der Krümmungshalbmesser ρ und der Schmiegunghalbmesser r einer Kurve bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenusenhöhe gleich dem Radius r der ganzen Krümmung ist.

Auch hieraus folgt, daß r weder größer als ρ , noch größer als r' sein kann.

Man kann dem hier aufgestellten Satze eine etwas andere Form geben. Auf jedem Radius einer Krümmung, wie $MC = \rho$ (Fig. 8 a), kann man einen Punkt C' bestimmen, sodaß $MC \cdot MC' = 1$ wird. C' heißt der inverse Krümmungsmittelpunkt zu C und $MC' = \frac{1}{\rho} = \rho'$ stellt die Krümmung dar. Die Strecke ρ' wird die Krümmungsstrecke genannt.¹⁾ Bestimmt man nun zu ρ , r , r' die drei Krümmungsstrecken ρ' , r' , r , so sind sie die Katheten und Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks und ist r' die Diagonale eines Rechtecks von den Seiten ρ' , r .

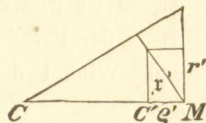


Fig. 8 a.

9. Bild der rektifizierenden Fläche. Da die Hauptnormalen auf den entsprechenden rektifizierenden Ebenen senkrecht stehen, so ist der Winkel dk benachbarter Hauptnormalen gleich dem Winkel benachbarter rektifizierender Ebenen. Diese sind aber Tangentenebenen der rektifizierenden Fläche und Schmiegungebenen der Gratlinie dieser Fläche. Man kann daher dem Lancretschen Satze auch die folgende Form geben.

Das Quadrat des Schmiegunswinkels der Gratlinie auf der rektifizierenden Fläche ist gleich der Summe der Quadrate des Kontingenzwinkels der Kurve und des Kontingenzwinkels der Polarfläche.

Die Bilder benachbarter rektifizierender Ebenen sind die größten Kreise tb und $t'b'$ der Kugel; das Bild ihrer Schnittgeraden, der rektifizierenden Geraden \mathfrak{R} der Kurve (M), besteht aus den beiden Schnittpunkten dieser Kreise. Es ist nun üblich, die rektifizierende Gerade so zu orientieren, daß der Winkel zwischen \mathfrak{R} und der Tangente kleiner als π ist; man wählt daher als das Bild von \mathfrak{R} den Punkt r als denjenigen der beiden Schnittpunkte, zu dem man, auf dem Kreise tb von t aus nach b fortschreitend, zuerst kommt. Dann ist der Bogen $tr = H$ gleich dem Winkel zwischen der Tangente und den rektifizierenden Geraden. Nach der Festsetzung des Vor-

1) Der Begriff des inversen Krümmungsmittelpunktes findet sich schon bei Hachette, indem er mit Hilfe desselben aus dem Meunierschen Satze über die Krümmung der Flächenschnitte gemeinschaftlicher Tangente einen weiteren ableitete. (Vgl. Lamarle, Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral, Paris 1861, 3ième partie, p. 445.) Unabhängig hiervon wurde der Begriff der Krümmungsstrecke von Graßmann eingeführt. (H. Graßmann, Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, Beilagen zum Progr. der latein. Hauptschule zu Halle a. S. 1886, 1888, 1893.)

zeichens für die Torsion $r = ds : d\sigma$ ist H ein spitzer oder stumpfer Winkel, je nachdem die Torsion negativ oder positiv ist.

Die Größe des Winkels H ergibt sich aus dem in der Nummer 6 betrachteten rechtwinkligen Dreieck. Da $rh = rh' = \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist r der (sphärische) Pol des größten Kreises hh' ; ebenso ist t' der Pol des Kreises $b'h'$; also ist der Abstand $tr = t'r$ gleich dem Winkel der beiden größten Kreise. Ist $H > \frac{1}{2}\pi$, so wird $h_0h'h = \pi - H$, für $H < \frac{1}{2}\pi$ ist $h_0h'h = H$; man erhält somit in jedem Falle

$$\sin H = \frac{d\tau}{dk} = \frac{r}{\rho}, \quad \cos H = -\frac{d\sigma}{dk} = -\frac{r}{r}, \quad \text{also} \quad \text{tg } H = -\frac{r}{\rho}.$$

Da der Winkel H der Festsetzung nach kleiner als π sein soll, genügt zu seiner eindeutigen Bestimmung die dritte Gleichung.

Der Winkel H , den die rektifizierende Gerade mit der Tangente bildet, ist durch die Gleichung

$$\text{tg } H = -\frac{r}{\rho} = -\frac{d\tau}{d\sigma}$$

bestimmt.

10. Die Ebene der ganzen Krümmung. Die Ebene, die man durch eine Hauptnormale parallel zur benachbarten Hauptnormale legen kann, bezeichnet man als die Ebene der ganzen Krümmung. Ihr sphärisches Bild ist der größte Kreis durch h und h' . Konstruiert man für alle Punkte der Kurve (M) die Ebenen der ganzen Krümmung, so besitzt die umhüllte abwickelbare Fläche eine Gratlinie, die das sphärische Bild (h) der Hauptnormalen von (M) als Tangentenbild besitzt und deren Binormale parallel zur rektifizierenden Geraden von (M) ist.

IV. Kapitel.

Tangentenfläche und Filarevolventen.

1. Filarevolventen. Läßt man eine Gerade sich so bewegen, daß je zwei aufeinander folgende Lagen sich in den Punkten einer gegebenen Kurve (M) schneiden, so beschreibt sie die Tangentenfläche dieser Kurve und jeder ihrer Punkte P eine Kurve (P), die sämtliche Tangenten unter rechten Winkeln schneidet. Berührt nämlich die Gerade im Punkte M , so geht sie zugleich durch den Nachbarpunkt M' der Kurve. Soll sie nun in die Lage der Tangente des Punktes M' gelangen, welche durch M' und den nächstfolgenden Punkt M'' geht, so muß sie sich in der Ebene beider

Tangenten, d. h. in der Schmiegungeebene der Kurve im Punkte M um den Punkt M' , und zwar um den Kontingenzwinkel $d\tau$, drehen. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt P einen unendlich kleinen Kreisbogen PP' , dessen Mittelpunkt M' und dessen Radius $M'P$ ist. Dieser Kreisbogen, welcher mit dem Bogenelemente der Kurve (P) zusammenfällt, schneidet die Tangente $M'P$ des Punktes M rechtwinklig. Damit die bewegliche Gerade in die Lage einer dritten Tangente gelange, muß sie sich in der Schmiegungeebene des folgenden Punktes M' um den Punkt M'' drehen; dabei beschreibt der Punkt P' den Kreisbogen $P'P''$ vom Radius $M''P'$ um den Punkt M'' als Mittelpunkt, und dieser Kreisbogen steht senkrecht auf der Tangente $M''P'$ des Punktes M' usw.

Die Tangenten der Kurve (M) sind also Normalen der Kurve (P).

Die Kurve (P) kann man sich mechanisch dadurch realisiert denken, daß über die Kurve (M) ein Faden gespannt und dieser von einer bestimmten Stelle M_0 von (M) auf der Tangentenfläche abgewickelt wird. Nach dieser Entstehung bezeichnet man die Kurven (P) als Filarevolventen¹⁾ von (M).

Da $M'P = M'P'$ und $M''P' = M'P' + M'M''$ ist, so folgt:

$$M''P' - M'P = M'M'',$$

ebenso

$$M'''P'' - M''P' = M''M'''$$

usw.

Es ändert sich also die Entfernung der entsprechenden Punkte beider Kurven immer um das Bogenelement der Kurve (M). Durch Addition einer Reihe von Gleichungen der Art ergibt sich daher, daß die Differenz der Entfernungen irgend zweier Punkte P, Q der Kurve (P) von den ihnen entsprechenden Punkten M, N der Kurve (M) gleich dem zwischenliegenden Bogen MN der letzteren Kurve ist.

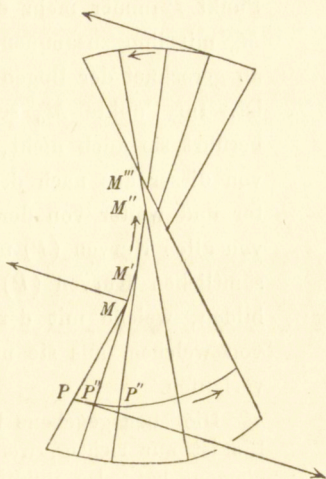


Fig. 9.

1) Monge. Mémoire sur les développées et les points singuliers des courbes à double courbure. Mém. des Sav. Etr. X, 1785.

Es möge die Kurve (M) keinen Rückkehrpunkt und keine Rückkehrtangente haben. Bewegt sich alsdann die Tangente so, daß die Entfernung MP immer wächst, so nimmt sie ab, wenn sich diese im entgegengesetzten Sinne bewegt. Daher nähert sich dann der Punkt P immer mehr dem Punkte M und fällt auch an einer Stelle M_0 mit ihm zusammen. Der Punkt M_0 ist derjenige, von welchem ab gerechnet der Bogen M_0M gleich dem Radius MP des Punktes P ist. Im Punkte M_0 schneidet die Kurve P die Kurve (M) nicht, berührt sie auch nicht, sondern bildet eine Spitze und biegt sich von dieser aus nach der anderen Seite hin ab, um sich immer weiter und weiter von der Kurve (M) zu entfernen. Da dies offenbar von allen Kurven (P) und allen Punkten M gilt, so erhellt, daß die sämtlichen Kurven (P) auf der Tangentenfläche eine Schar Linien bilden, welche mit der Kurve (M) je einen Punkt gemein haben, von welchem aus sie nach entgegengesetzten Seiten auf der Fläche verlaufen.

Die eben gegebene Darstellung darf nicht mißverstanden werden. Sie ist nur richtig, wenn die Kurve (M) als Ganzes kein Rückkehr-element hat. Da infinitesimale Methoden aber immer nur die Kurve in der Nachbarschaft eines Punktes zu untersuchen gestatten, haben wir keine Möglichkeit, bei einer vorgelegten Kurve die Zulässigkeit der Voraussetzung zu prüfen. Es ist durchaus nicht nötig, daß eine Filarevolvente einer regulären Kurve solche reelle Spitzen haben muß. Dies zeigt schon das einfache Beispiel einer Ellipse, wenn man sie als Evolvente ihre Krümmungsmittelpunktskurve betrachtet.

Da jeder Punkt der Tangente eine Filarevolvente liefert, besitzt eine Raumkurve deren ∞^1 , die alle auf der Fläche der Tangenten liegen. Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen:

Eine Raumkurve hat ∞^1 Filarevolventen, die auf der Tangentenfläche als Orthogonaltrajektorien der Tangenten liegen.

Da bei einer beliebigen Verbiegung einer Fläche die Winkel ungeändert bleiben, so geht ein Orthogonalsystem von Kurven immer wieder in ein Orthogonalsystem über, also speziell:

Verbiegt man die Tangentenfläche einer Raumkurve (M) in die Tangentenfläche einer zweiten Kurve (M_1) (die auch eben sein kann), so gehen die Filarevolventen von (M) in die Filarevolventen von (M_1) über.

2. Kontingenzwinkel der Filarevolventen. Sphärisches Bild. Die Tangente PP' einer Filarevolvente ist eine Gerade, die in der Schmiegungebene von M auf der Tangente MP der Kurve

(M) senkrecht steht; sie ist also parallel zur Hauptnormalen dieser Kurve. Der Winkel benachbarter Tangenten von (P) ist somit gleich dem Winkel benachbarter Hauptnormalen von (M).

Denkt man sich die Evolvente durch die vorher beschriebene Fadenkonstruktion erzeugt und definiert den durch diese Konstruktion bestimmten Richtungssinn als positive Richtung auf der Evolvente, so ergibt sich unmittelbar, daß ihre Tangente und die Hauptnormale von (M) stets entgegengesetzt gerichtet sind. Die Kurve (M) teilt ihre Tangentenfläche in zwei Teile; man bezeichne den Mantel, den man erhält, indem man in der festgesetzten Tangentenrichtung fortschreitet als positiv, den anderen negativ; dann liegen alle betrachteten Filarevolventen auf dem negativen Mantel. Liegt dagegen die Kurve (P) auf dem positiven Mantel der Fläche, so ist die Fortschreitungsrichtung PP' der Evolvente gleichgerichtet mit der Hauptnormale.

Alle Filarevolventen einer Kurve (M) auf dem negativen Mantel ihrer Tangentenfläche haben dasselbe Tangentenbild; dieses ist dem Bild der Hauptnormalen von (M) kongruent und symmetrisch bzw. des Kugelmittelpunktes gelegen; ebenso haben alle Filarevolventen auf dem positiven Mantel der Fläche dasselbe Tangentenbild, das Hauptnormalenbild von (M) selbst. In beiden Fällen ist der Kontingenzwinkel $d\tau_1$ der Evolvente gleich dem Winkel dk der ganzen Krümmung von (M).

Aus der früher (S. 30) gegebenen Definition für die Ebene der ganzen Krümmung folgt:

Die Schmiegungebene einer Filarevolvente ist parallel zur Ebene der ganzen Krümmung der ursprünglichen Kurve (M) und steht daher auf der rektifizierenden Geraden von (M) senkrecht.

Denn diese Schmiegungebene ist parallel zu zwei benachbarten Hauptnormalen von (M).

Kurven, die dasselbe sphärische Bild der Tangenten besitzen, werden (S. 24) als parallel zugeordnet bezeichnet; es gilt somit der Satz:

Die Filarevolventen einer Raumkurve (M) sind einander parallel zugeordnet, und zwar liegen entsprechende Punkte auf derselben Tangente von (M).

Die Konstruktion einer Evolvente (P) durch Abwicklung eines Fadens (vgl. Nr. 1) ist nur dann möglich, wenn P auf der negativen Hälfte der Tangente liegt. Natürlich kann jede beliebige Evolvente auf die angegebene Weise erzeugt werden, nur bedarf es dazu even-

tuell einer Umkehrung des Fortschreitungs sinns auf der Kurve (M), wodurch gleichzeitig der Fortschreitungs sinn der Evolvente sich in den entgegengesetzten verwandelt.

3. Krümmungsachse der Evolvente. Die Tangente PM der Kurve (M) steht auf $\dot{P}P'$ senkrecht, ist also eine Normale der Kurve P . Da PP' in der Schmiegungebene PMP' von (M) liegt, so ist die Normalebene von P die Ebene, die auf der Schmiegungebene von (M) senkrecht steht und sie in der Tangente schneidet; sie ist also die rektifizierende Ebene von (M). Die Krümmungsachsen von (P) sind demnach die Schnittlinien benachbarter rektifizierender Ebenen von (M); die Beweisführung gilt für alle Evolventen also:

Die Krümmungsachse einer Evolvente ist die rektifizierende Gerade der Ausgangskurve. Alle Evolventen einer Kurve (M) haben eine gemeinsame Polarfläche, die rektifizierende Fläche der Kurve (M).

Der Krümmungsmittelpunkt einer Kurve ist immer der Fußpunkt des Lotes vom Kurvenpunkte auf die Krümmungsachse; also:

Der Krümmungsmittelpunkt der Evolvente im Punkte P ist der Fußpunkt des Lotes von P auf die zugehörige rektifizierende Gerade der Ausgangskurve.

4. Übungen. 1. Die Filarevolventen einer allgemeinen Schraubenlinie sind ebene Kurven, ihre Ebenen stehen senkrecht auf den Erzeugenden des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie geodätisch ist.

Die Schmiegungebenen der Evolventen fallen hier in eine zusammen, da alle rektifizierenden Geraden einer Schraubenlinie parallel sind.

2. Die Filarevolventen der geodätischen Linien auf einem Kegel sind Kurven auf Kugeln, deren gemeinsamer Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist.

Denn alle Krümmungsachsen, also auch alle Normalebene der Evolvente schneiden sich in der Spitze des Kegels.

Das Ergebnis folgt auch unmittelbar aus der geometrischen Anschauung. Ist S die Kegelspitze und M_0 der Fußpunkt des Lotes von S auf die Geodätische (M), ist ferner MP eine Lage der Tangente, dann ist

$$MP + \text{arc } MM_0 = a = \text{konst.},$$

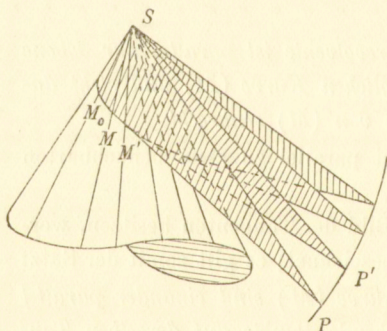


Fig. 10.

da ja P ein fester Punkt der Tangente ist. Da ferner $SM_0 = l$ konstant ist, so folgt unmittelbar, daß auch $SP = \sqrt{a^2 + l^2}$ von unveränderlicher Länge ist; d. h. P liegt auf einer Kugel vom Radius

$$R = \sqrt{a^2 + l^2}.$$

5. Der Schmiegunswinkel der Evolvente. Da die Schmiegunsebene der Evolvente in P auf der rektifizierenden Geraden der ursprünglichen Kurve in M senkrecht steht, so bilden zwei aufeinanderfolgende Schmiegunsebenen denselben Winkel $d\sigma_1$ miteinander, den die entsprechenden rektifizierenden Geraden miteinander bilden. Nun bildet die rektifizierende Gerade mit der Tangente der Kurve einen solchen Winkel H , für den $\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\rho}$ ist, und bildet die folgende rektifizierende Gerade mit der folgenden Tangente den Winkel $H + dH$. Die Winkel $PM'Q$ und $P'M'Q$ sind einander gleich und gleich H , daher schneiden sich die beiden rektifizierenden Geraden unter dem Winkel dH , und man erhält den Satz:

Der Schmiegunswinkel $d\sigma_1$ einer Evolvente ist der Kontingenzwinkel der Gratlinie der rektifizierenden Fläche und gleich dem Differentiale des Winkels H , welchen die rektifizierende Gerade mit der Tangente bildet.

Anmerkung. Der Kürze halber ist im Texte auf das Vorzeichen von $d\sigma_1$ keine Rücksicht genommen; man zeige mit Hilfe der sphärischen Abbildung, daß $dH = \pm d\sigma_1$ ist, je nachdem P auf der negativen oder positiven Hälfte der Tangente liegt.

Die Beziehungen der Evolventen zur rektifizierenden Fläche werden wir im folgenden Kapitel als Beziehungen der ursprünglichen Kurve zur Fläche ihrer Evoluten wiederfinden (S. 43).

6. Krümmungshalbmesser der Evolvente. Bezeichnet man die Länge MP mit p , so ist das Bogenelement $PP' = ds_1$ durch die Gleichung gegeben:

$$ds_1 = p d\tau$$

und der Krümmungshalbmesser PQ der Evolvente:

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1} = p \frac{d\tau}{dk} = p \frac{r}{\rho}.$$

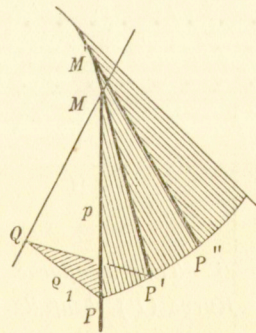


Fig. 11.

Hieraus folgt, daß die Krümmungshalbmesser der Filarevolventen in den Punkten, in welchen sie dieselbe Tangente der ursprünglichen

Kurve schneiden, um so größer sind, je weiter diese Punkte von der Kurve M abstehen. Die Evolventen werden mithin um so flacher, je weiter sie sich auf der Tangentenfläche von der Kurve entfernen.

Für $p = \varrho$ wird $\varrho_1 = r$. Dies ergibt unmittelbar folgende geometrische Interpretation des Radius der ganzen Krümmung einer Kurve (M):

Trägt man auf der Tangente der Kurve vom Berührungspunkte aus den Krümmungsradius ϱ ab und fällt vom Endpunkte P dieser Strecke auf die rektifizierende Gerade das Lot PQ , so ist dies der Radius der ganzen Krümmung der gegebenen Kurve.

7. Krümmungslinien der abwickelbaren Fläche. Konstruiert man in den Normalebene der Evolvente (P) diejenigen Geraden, die mit den Tangenten der Ausgangskurve einen konstanten Winkel α bilden, so schneiden sich je zwei aufeinanderfolgende Geraden in den Punkten einer Kurve (N), die mit (M) die rektifizierende Fläche gemeinsam hat.

Aus der Kongruenz der Dreiecke $M'QP$ und $M'QP'$ (Fig. 11) folgt, daß zwei Geraden, die unter konstantem Winkel α gegen MP bzw. MP' geneigt sind, sich in ein und demselben Punkte N der Gegenseite MQ , d. h. der rektifizierenden Geraden der Kurve (M) oder der Polarachse der Kurve (P) schneiden müssen. Da ferner $NP = NP'$ wird, so folgt, daß die Kurve (P) auch von der Kurve (N) eine Evolvente ist. Konstruiert man auf der Tangentenfläche einer Raumkurve (M) eine Orthogonaltrajektorie (P) der Erzeugenden und dreht dann jede Tangente in der zugehörigen Normalenebene dieser Orthogonaltrajektorie um einen konstanten Winkel α , so bilden die Geraden auch in der neuen Lage

die Tangentenfläche einer zweiten Raumkurve (N), auf der die Kurve (P) ebenfalls Orthogonaltrajektorie ist.

Da die Ebene NPP' mit der Ebene MPP' offenbar auch den Winkel α bildet (MP und NP sind Lote auf der Schnittlinie PP' der beiden Ebenen in ihnen), kann man denselben Sachverhalt so ausdrücken:

Fig. 12.

Legt man durch die Tangenten einer Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche Ebenen unter konstantem Winkel gegen die Tangentenebenen der ersten Fläche, so umhüllen diese eine zweite abwickelbare Fläche, deren Gratlinie dieselbe rektifizierende Fläche besitzt wie die Gratlinie der ersten Fläche.

Setzt man im besonderen $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so werden die Geraden Normalen der Tangentenfläche von (M) ; d. h.

Die Normalen einer abwickelbaren Fläche längs einer Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden bilden wieder eine abwickelbare Fläche.

Man bezeichnet nun in der Theorie der Flächen eine Kurve auf einer Oberfläche, längs deren die Flächennormalen eine abwickelbare Fläche bilden, als Krümmungslinie. Auf abwickelbaren Flächen sind nun offenbar die erzeugenden Geraden ein System von Krümmungslinien (denn längs jeder Geraden sind die Normalen parallel und bilden eine Ebene) und ihre Orthogonaltrajektorien nach dem eben bewiesenen Satze das zweite System.

Ist wie vorher $MP = p$, so folgt aus dem Dreieck MNP :

$$NP = \left| \frac{p \sin(\alpha + H)}{\sin H} \right|,$$

also, wenn $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ wird,

$$NP = |p \operatorname{ctg} H| = p \left| \frac{r}{\rho} \right|.$$

Ist also $p = \rho$, so wird $NP = r$. Damit haben wir eine Interpretation des Schmiegungradius der Kurve (M) gewonnen:

Man trage auf der Tangente von (M) vom Berührungspunkte aus den Krümmungsradius ab und errichte im Endpunkte P das Lot in der rektifizierenden Ebene. Das Stück PR , das die rektifizierende Gerade auf dem Lote abschneidet, ist gleich dem absoluten Werte des Schmiegungradius der Kurve. (Vgl. die ähnliche Interpretation des Radius der ganzen Krümmung auf S. 36.)

8. Planevolventen. Rollt eine Gerade so auf einer Kurve (M) ab, daß sie beständig Tangente an die Kurve bleibt, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine Filarevolvente von (M) .

Rollt eine Ebene so auf der Tangentenfläche einer Kurve (M) ab, daß sie immer Schmiegungebene von (M) bleibt, so beschreibt jeder ihrer Punkte P eine gewisse Kurve, die als Planevolvente von (M) bezeichnet wird. Eine Planevolvente schneidet die Schmiegungebenen von (M) sämtlich unter rechten Winkeln. Denn wenn die bewegliche Ebene die Lage der Schmiegungebene des Punktes M hat, so geht sie noch durch zwei folgende Punkte M' , M'' ; soll sie nun in die

Lage der Schmiegungeebene des folgenden Punktes M' gelangen, die durch M', M'', M''' geht, so muß sie sich um die gemeinschaftliche Durchschnittlinie beider Ebenen, nämlich um die Tangente $M'M''$ des Punktes M' , und zwar um den Schmiegungewinkel $d\sigma$ des Punktes M , drehen. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt P den unendlich kleinen Kreisbogen PP' um einen gewissen Punkt C dieser Tangente, den man erhält, wenn man von P oder P' auf $M'M''$

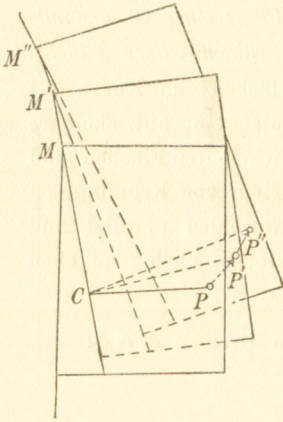


Fig. 13.

das Lot $PC = P'C$ fällt. Die Ebene PCP' dieses Kreisbogens steht senkrecht auf der Tangente $M'M''$ und mithin auch auf der Schmiegungeebene $MM'M''$ des Punktes M , welche durch diese Tangente hindurchgeht. Das Bogenelement PP' ist senkrecht zum Radius PC , mithin ebenfalls senkrecht zur Schmiegungeebene, d. h. die Schmiegungeebene der Kurve (M) ist die Normalebene der Kurve (P). Soll die bewegliche Ebene in die Lage der Schmiegungeebenen der Punkte M'', M''', M^{IV}, \dots gelangen, so muß sie sich stetig um die Tangenten dieser Punkte drehen; der Punkt P beschreibt als-

dann die Bogenelemente $P'P'', P''P''', P'''P^{IV}, \dots$ um die Punkte C', C'', C''', \dots in jenen Tangenten, und die Schmiegungeebenen der Punkte M', M'', M''', \dots sind die Normalebenen der Kurve (P) in den Punkten P', P'', P''', \dots

Hieraus erhellt, daß die Kurve (P) die Schmiegungeebenen der Kurve (M) rechtwinklig schneidet, daß die Punkte C , aus welchen ihre Bogenelemente als Kreisbogen beschrieben wurden, ihre Krümmungsmittelpunkte und die Radien dieser Kreisbogen, nämlich die Lote PC ihre Hauptnormalen und Krümmungshalbmesser sind.

Da die Linienelemente PP' der Kurve (P) auf den Schmiegungeebenen von (M) senkrecht stehen, so ist, abgesehen vom Vorzeichen, der Kontingenzwinkel $d\tau_1$ von (P) gleich dem Schmiegungewinkel $d\sigma$ von (M), also:

$$d\tau_1 = |d\sigma|.$$

Außerdem sind die Tangenten von (P) den Binormalen von (M) parallel, da ja auch diese auf den zugehörigen Schmiegungeebenen senkrecht stehen. Die Schmiegungeebenen PCP' von P stehen auf den Tangenten von M senkrecht; diese sind also den Binormalen

von (P) parallel, so daß der Schmiegunswinkel $d\sigma_1$ der Evolvente gleich dem Kontingenzwinkel von (M) ist. Da endlich die Hauptnormale PC von P eine Gerade ist, die auf der Tangente von M in der Schmiegunsebene senkrecht steht, so ist sie parallel zur Hauptnormale von (M) .

Die Planevolvente einer Kurve (M) hat mit ihr parallele Hauptnormalen; ihre Tangenten sind den Binormalen, ihre Binormalen den Tangenten von (M) parallel. Daher sind Schmiegunswinkel und Kontingenzwinkel der einen Kurve gleich dem Kontingenz- und Schmiegunswinkel der anderen Kurve. Die Polarfläche der Evolvente ist die Tangentenfläche der gegebenen Kurve.

Die letzte Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß die Tangenten von M parallel zu den Binormalen von (P) sind und durch die Krümmungsmittelpunkte C dieser Kurve hindurchgehen.

In der ganzen Betrachtung ist das Vorzeichen der Schmiegunswinkel unberücksichtigt geblieben; sieht man auch, was für viele Zwecke ausreicht, bei der Konstruktion des sphärischen Bildes von der Orientierung ab¹⁾, so läßt sich der Sachverhalt sehr einfach so ausdrücken:

Die Planevolvente hat mit der ursprünglichen Kurve dasselbe sphärische Bild der Hauptnormalen, und ihr Tangenten- und Binormalenbild fällt mit dem Binormalen- und Tangentenbild der ursprünglichen Kurve zusammen.

Um den Sachverhalt unter Berücksichtigung der Vorzeichen zu präzisieren, betrachte man die Ebene E , die auf der Tangentenfläche von (M) abrollt, in der Lage, wo sie mit der Schmiegunsebene der Kurve im Punkte M zusammenfällt. In der Ebene E seien die Punkte P_1 und P_2 so angenommen, daß sie auf entgegengesetzten Seiten der Tangente MM' liegen, und zwar P_2 auf derselben Seite wie der Krümmungsmittelpunkt C von (M) . Dann ist das Lot P_1C_1 auf die Tangente die Hauptnormale der von P_1 beschriebenen Evolvente (P_1) , das Lot P_2C_2 ebenso die Hauptnormale der Evolvente (P_2) , d. h. die Hauptnormalen aller Evolventen (P_1) sind gleich gerichtet wie h , die Hauptnormalen aller Evolventen P_2 entgegengesetzt gerichtet. Dreht sich die Ebene E um die Tangente MM' in

1) Das Bild einer Geraden besteht dann aus zwei diametral gegenüberliegenden Punkten auf der Kugel. Man beachte indes, daß diese Darstellung nur für die erste Orientierung statthaft ist, da man so auf die geometrische Unterscheidung positiver und negativer Windung verzichtet.

die Schmiegeebene des Punktes M' , so beschreibt P_1 und P_2 je eine unendliche kleine Strecke P_1P_1' bzw. P_2P_2' senkrecht zur

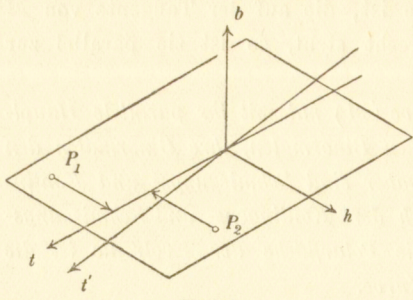


Fig. 14.

Ausgangslage der Ebene E , also parallel (syntaktisch oder anti-taktisch) zur Binormalen von M , und so sind P_1P_1' , P_2P_2' die Bogenelemente der Evolventen (P_1) und (P_2) ; diese bestimmen auch die Tangentenrichtungen beider Kurven. Offenbar sind diese für die beiden Arten der Evolventen stets entgegengesetzt.

Aus der Erklärung des positiven Drehungssinnes ergibt sich, daß, wenn $d\sigma$ positiv ist, P_1P_1' entgegengesetzt, P_2P_2' gleich gerichtet ist wie die Binormale von (M) . Damit ist für alle möglichen Fälle das Tangentenbild der Evolvente bestimmt: Hat (M) positive Torsion, so ist das Tangentenbild t_1 von (P_1) der Gegenpunkt¹⁾ des Binormalenbildes b , hat (M) negative Torsion, so fällt t_1 mit b zusammen, und das Tangentenbild von (P_2) ist immer der Gegenpunkt des Bildes von (P_1) . Durch die Bedingung, daß das Hauptdreikant einer Kurve in das xyz -System durch Bewegung überführbar sein muß, ergibt sich das Bild der Binormalen von (P_1) und (P_2) .

Da die Tangenten von (P_2) immer den Tangenten von (P_1) entgegengesetzt gerichtet sind, und ebenso die Hauptnormalen von (P_2) entgegengesetzt den Hauptnormalen von (P_1) , so sind ihre Binormalen stets parallel, denn die Hauptdreikante beider Kurven werden durch eine Drehung des einen um die Binormalenrichtung durch den Winkel von π dem andern parallel orientiert.

Für eine Kurve positiver Torsion sind die Binormalen der Planevolventen entgegengesetzt gerichtet wie die Tangente der Ausgangskurve, für eine Kurve positiver Torsion gleichgerichtet.

Die Ergebnisse lassen sich bequem in eine Tabelle einordnen, wobei man unter \bar{t} , \bar{b} , \bar{h} die Gegenpunkte von t , b , h zu verstehen hat.

Kurve M	$d\sigma > 0$	$d\sigma < 0$
(P_1)	$t_1 = \bar{b}$, $b_1 = \bar{t}$, $h_1 = h$	$t_1 = \bar{b}$, $b_1 = t$, $h_1 = h$
(P_2)	$t_2 = \bar{b}$, $b_2 = \bar{t}$, $h_2 = \bar{h}$	$t_2 = b$, $b_2 = t$, $h_2 = \bar{h}$

1) Als Gegenpunkt eines Punktes t der Kugel bezeichnen wir den zweiten Endpunkt des Durchmessers durch t .

Das Vorzeichen der Torsion einer Kurve ist positiv, wenn b' auf dem Quadranten bh liegt, d. h. wenn die Richtung bb' mit der Richtung bh übereinstimmt, negativ im umgekehrten Fall. Nun haben (P_1) und (P_2) dasselbe Binormalenbild, aber entgegengesetzte Hauptnormalenbilder: der Richtungssinn weist also immer für die eine Kurve auf das Hauptnormalenbild hin, mit andern Worten: Die Torsionen der Evolventen (P_1) und (P_2) haben immer entgegengesetztes Vorzeichen. Wir brauchen daher nur noch die Torsion von (P_1) zu betrachten. Für $d\sigma > 0$ ist t_1 der Gegenpunkt von t ; der Fortschreitungsinn b_1b_1' ist also $\bar{t}\bar{t}'$, deutet also auf den Gegenpunkt von h , mit andern Worten: (P_1) hat negative, (P_2) positive Torsion. Ist dagegen $d\sigma < 0$, so ist b_1 mit t identisch, $b_1b_1' = tt'$ gibt also die Richtung nach h , dem Hauptnormalenbild von (P_1) an, (P_1) hat positive, (P_2) negative Torsion.

Die Torsion der Evolvente (P_2) hat stets dasselbe Vorzeichen, die Torsion der Evolvente (P_1) immer das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Torsion der Kurve.

9. Übungen. 1. *Die Planevolventen einer Schraubenlinie sind wieder Schraubenlinien.*

Denn für die Ausgangskurve ist $\frac{d\tau}{d\sigma} = k$ konstant, also auch für ihre Planevolventen $\frac{d\sigma_1}{d\tau_1} = \pm k$.

2. *Eine Kurve kann niemals gleichzeitig Planevolvente und Filarevolvente derselben Raumkurve sein.*

3. *Die Filarevolventen (P) einer Kurve (M) sind Planevolventen der Gratlinie der rektifizierenden Fläche von (M) .*

Denn die Schmiegungebenen dieser Gratlinie sind die rektifizierenden Ebenen von (M) und Normalebene von (P) . Wir werden bei der Behandlung der Polarfläche und der rektifizierenden Fläche einer Kurve hierauf zurückkommen.

V. Kapitel.

Die Polarfläche und die Evoluten.

1. Die Fläche der Normalebene. Die Normalebene der aufeinanderfolgenden Punkte M, M', M'', \dots einer Kurve (M) schneiden sich in einer Folge von Geraden k, k', k'', \dots , welche auf den Schmiegungebenen dieser Punkte in den Krümmungsmittelpunkten C, C', C'', \dots senkrecht stehen und die Krümmungs- oder Polarachsen heißen. Diese Geraden bilden die abwickelbare

Polarfläche, und je zwei aufeinanderfolgende von ihnen schneiden sich in den Punkten K, K', K'', \dots der Gratlinie (K) der Fläche und berühren in ihnen diese Kurve (K) (S. 6). Die Normalebenen der Kurve (M) sind Tangentenebenen dieser Fläche längs den Krümmungsachsen k und Schmiegungebenen der Gratlinie (K) in den Punkten, in denen sie von den Krümmungsachsen k berührt wird.

Der Krümmungsmittelpunkt C ist von drei aufeinanderfolgenden Punkten M, M', M'' gleichweit entfernt. Da die Krümmungsachse im Mittelpunkt des Krümmungskreises auf dessen Ebene senkrecht steht, so ist jeder ihrer Punkte G Mittelpunkt eines geraden Kreiskegels, der durch den Krümmungskreis geht, und daher steht dieser Punkt von allen Punkten des Krümmungskreises, insbesondere also auch von den drei Punkten M, M', M'' gleichweit ab.

Die Krümmungsachse enthält alle Punkte, die von drei benachbarten Punkten der Kurve gleichweit entfernt sind.

Fig. 15.

2. Die Evolute.

Die Krümmungsachse k ist der Durchschnitt der Normalebenen der Punkte M und M' , die folgende Krümmungsachse k' ebenso der Durchschnitt der Normalebenen von M' und M'' ; beide Krümmungsachsen liegen in der Normalebene des Punktes M' . Zieht man daher in dieser Normalebene von M' nach irgend einem Punkte G der Krümmungsachse k die Gerade $M'G$, so trifft sie die folgende Krümmungsachse k' in einem Punkte G' ; zieht man hierauf in der Normalebene des folgenden Punktes M'' die Gerade $M''G'$, so trifft sie ebenso die Krümmungsachse k'' in einem Punkte G'' . Ebenso schneidet $M'''G''$ die Krümmungsachse k''' in G''' usw. Hierdurch erhält man auf der Polarfläche eine Kurve $G G' G'' \dots$, deren Tangenten $M'G, M''G', M'''G''$ durch die Punkte der Kurve (M) hindurchgehen und deren Tangenten, da sie in den Normalebenen von (M) liegen, rechtwinklig schneiden. Daher ist die Kurve (M) eine Filarevolvente der Kurve (G) und wird also von dem Punkte M einer beweglichen Geraden beschrieben, welche über die Kurve (G) hingleitet und sie fortwährend berührt. Die Kurve (G) heißt, weil sie durch die Kurve (M) gewissermaßen abgewickelt wird, eine Evolute (Filarevolute) der Kurve (M).

Der Punkt G konnte auf der Krümmungssache CK willkürlich angenommen werden; dadurch war aber der weitere Verlauf der Kurve vollkommen bestimmt; die Kurve (M) besitzt somit eben soviel Evoluten wie die Krümmungssache Punkte; d. h.

Jede Raumkurve besitzt ∞^1 Filarevoluten, die auf der Polarfläche liegen.

Man bezeichnet daher die Polarfläche auch als Evolutenfläche.

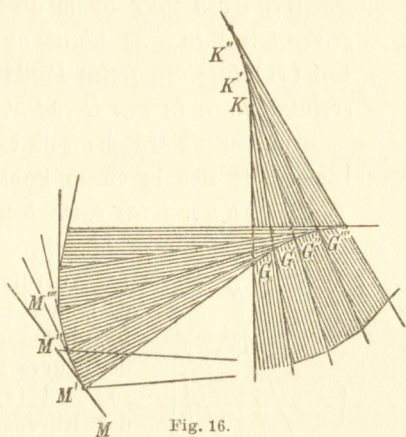
3. Die Evolute als Geodätische auf der Polarfläche.

Die Ebene $M'G'M''$ zweier benachbarter Tangenten $G'M'$, $G''M''$ ist also die Schmiegungebene der Evolute im Punkte G ; da sie die Tangente der Kurve (M) enthält, so steht sie senkrecht auf deren Normalebene oder was dasselbe ist, auf der Tangentenebene der Fläche der Krümmungssachen von (M) , d. h. der Schmiegungebene der Kurve (K) . Oder: Die Normalebene von (M) steht senkrecht auf der Schmiegungebene von (G) und schneidet sie in der Tangente GM , d. h. sie ist die rektifizierende Ebene von (G) . Die Hüllfläche der Normalenebenen, d. h. die Polarfläche von (M) ist somit die rektifizierende Fläche von (G) .

Die Filarevoluten einer Kurve (M) sind geodätische Linien auf der Polarfläche von M .

Die Beziehung der Kurven (G) und (M) ist naturgemäß dieselbe wie die Beziehung zwischen den Kurven (M) und (P) des vierten Kapitels (S. 35). Es handelt sich nun um denselben geometrischen Sachverhalt, nur von verschiedenen Seiten beleuchtet.

Von der Verteilung der Filarevoluten auf der Polarfläche kann man sich folgendermaßen eine Vorstellung machen. Die Kurve (M) ist Planevolvente oder, was dasselbe ist, Orthogonaltrajektorie ihrer Normalebenen. Diese Normalebenen umhüllen fächerartig die Polarfläche; wickelt man diese Fläche in die Ebene ab, so dreht sich jede Normalenebene um die Krümmungssache soweit, bis sie mit der benachbarten Normalenebene zusammenfällt, und je zwei benachbarte Punkte M , M' der Kurve M fallen dabei aufeinander, während $G'M'$ in die Verlängerung von GM fällt. Bei der Abwicklung geht also die



Evolute in eine gerade Linie durch einen festen Punkt \mathfrak{M} über, auf den sich die ganze Kurve (M) reduziert.

Wenn von einer Raumkurve (M) die Polarfläche nebst ihren Tangentenebenen in eine Ebene ausgebreitet wird, so fallen alle Punkte von (M) in einen festen Punkt der Ebene zusammen und die Filarevoluten gehen in den Geradenbüschel über, dessen Mittelpunkt \mathfrak{M} ist.

Auf der Polarfläche selbst sind dann die Evoluten geodätische Linien, die sich in einem Punkte schneiden.

Die Filarevoluten einer Kurve bilden auf ihrer Polarfläche einen Büschel geodätischer Linien.

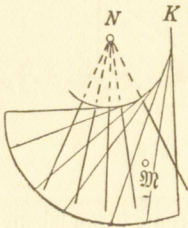


Fig. 17.

Allerdings kann der Scheitel dieses Büschels, d. i. der Schnittpunkt der Geodätischen, auch imaginär sein. Wenn beispielsweise die Ebene der Kurve \mathfrak{R} die Abwicklung der Polarfläche ist, so wird (vgl. Fig. 17) ein Punkt \mathfrak{M} außerhalb der Kurve (d. h. in dem Teil der Ebene, von dem aus reelle Tangenten an die Kurve gezogen werden können) aus einer Kurve (M) entstanden sein, deren Evoluten einen reellen Schnittpunkt besitzen; der Punkt N im Innern der Kurve (K)

dagegen entspricht Filarevoluten, die keinen reellen Schnittpunkt besitzen.

4. Mongesche Fadenkonstruktion. Bei der Abwicklung der Evolute (die man sich als Faden auf die Polarfläche von (M) aufgespannt denken kann) beschreibt ein gewisser Punkt ihrer Tangente (des Fadens) die Kurve (M). Um die Bewegung des Fadens zu regulieren, wickelt Monge gleichzeitig irgend zwei Evoluten ab¹⁾, die auf demselben Mantel der Evolutenfläche liegen; der Durchschnitt ihrer Tangenten (der Knoten, in welchem die Fäden verknüpft sind) beschreibt die Kurve. Ist also die Evolutenfläche gegeben, so kann man einen Punkt mechanisch nötigen, die Kurve (M) zu beschreiben, indem man zwei Fäden frei über die Fläche hinspannt, sie in einen Knoten zusammenbindet und die Fäden, straff gespannt, abwickelt.

Übungen. 1. Ist (M) eine ebene Kurve, so ist die Polarfläche ein Zylinder; die Evolute ist eine Geodätische, also eine Schraubenlinie des Zylinders. Die Evoluten ebener Kurven sind also sämtlich Schraubenlinien.

2. Die Evoluten sphärischer Kurven sind geodätische Linien auf Kugelflächen. (Vgl. Übung 2, S. 34.)

5. Lage der Krümmungsmittelpunktskurve auf der Polarfläche. Auf der Fläche der Krümmungsachsen liegen auch die Kurven (K) und (C), die Gratlinie der Fläche und die Kurve

1) Monge, Applications de l'analyse à la géométrie. S. 415.

der Krümmungsmittelpunkte. Für eine nicht ebene Kurve ist keine von beiden eine Evolute. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Abwicklung der Polarfläche in die Ebene. Die Kurve (K) geht dabei in eine ebene Kurve (\mathfrak{R}) über, die niemals eine gerade Linie sein kann (also kann auch (K) keine Filarevolute von (M) sein). Die Kurve (M) reduziert sich, wie eben gezeigt ist, auf einen Punkt \mathfrak{M} , und die Kurve (C) geht in eine ebene Kurve (\mathfrak{C}) über. Da bei der Abwicklung der rechte Winkel KCM sich nicht ändert, liegen die Punkte \mathfrak{C} auf den Loten, die von \mathfrak{M} auf die Tangenten \mathfrak{f} von (\mathfrak{R}) gefällt werden können.

Bei der Abwicklung der Polarfläche einer Kurve (M) in eine Ebene geht die Krümmungsmittelpunktskurve von (M) in eine Fußpunktskurve derjenigen ebenen Kurve über, in die die Gratlinie sich verwandelt. Der Pol der Kurve ist der Punkt, auf den die Kurve (M) sich bei der Biegung reduziert hat.¹⁾

Diese Fußpunktskurve ist jedenfalls nur dann eine gerade Linie durch (\mathfrak{M}), wenn die Geraden \mathfrak{f} parallel sind, d. h. wenn die Polarfläche ein Zylinder ist; C ist daher nur dann Filarevolvente, wenn die Kurve (M) eben ist.

6. Übungen. 1. *Gibt es Raumkurven, deren Krümmungsmittelpunktskurve auf der Polarfläche eine geodätische Linie ist?*

Zunächst bestimmt man diejenige ebene Kurve (\mathfrak{R}), die eine Gerade \mathfrak{C} als Fußpunktskurve bezüglich eines festen Punktes \mathfrak{M} hat. Die Kurve (\mathfrak{R}) wird umhüllt von dem zweiten Schenkel eines rechten Winkels, dessen erster Schenkel durch den festen Punkt \mathfrak{M} geht und dessen Scheitel \mathfrak{C} auf der festen Geraden (\mathfrak{C}) gleitet. Aus den Elementen ist bekannt, daß (\mathfrak{R}) eine Parabel ist, deren Brennpunkt \mathfrak{M} und deren Scheitelpunkt (\mathfrak{C}) ist.

Verbiegt man die Ebene der Parabel, so daß ihre Tangenten geradlinig werden, so erhält man eine Raumkurve, die als „windschiefe Parabel“ bezeichnet werden mag. Diejenige ihrer Planevolventen, die aus dem Brennpunkt der Parabel hervorgeht, ist die gesuchte Kurve. Ihre Krümmungsmittelpunktskurve ist die Kurve, die bei der Biegung aus der Scheiteltangente hervorgeht.

2. *Diejenigen Raumkurven zu bestimmen, deren Krümmungsmittelpunktskurve ein geodätischer Kreis auf der Polarfläche ist.*

Ein geodätischer Kreis, d. i. eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung, geht bei jeder Biegung wieder in einen geodätischen

1) J. Steiner, Über einige allgemeine Eigenschaften der Kurven von doppelter Krümmung. Monatsber. d. Berlin. Akad. 1839. Werke II, 161—165.

Kreis über. Bei der Abwicklung der Polarfläche soll also die Kurve (C) in einen Kreis \mathfrak{C} übergehen.

Alle ebenen Kurven (\mathfrak{R}) aber, die einen Kreis als Fußpunktskurve besitzen, sind die Kegelschnitte, und zwar ist der Pol ein Brennpunkt und der Kreis (\mathfrak{C}) der Scheitelkreis. Eine Raumkurve (K), die aus einem Kegelschnitt (\mathfrak{R}) entsteht, wenn seine Ebene derart verbogen wird, daß seine Tangenten geradlinig bleiben, heißt ein windschiefer Kegelschnitt.

Läßt man über der Tangentenfläche eines windschiefen Kegelschnitts (K) die Ebene des Kegelschnitts (\mathfrak{R}) selbst abrollen, so beschreiben die Brennpunkte zwei Planevolventen der Kurve K , deren Krümmungsmittelpunktskurve die Biegungskurve des Scheitelkreises von (\mathfrak{R}) ist.¹⁾ Zu den gesuchten Kurven gehören auch die geodätischen Kreise auf Kegelflächen, die durch die Kegelspitze gehen; in diesem Falle reduziert sich der Kegelschnitt auf ein Punktepaar.

7. Das sphärische Bild der Evoluten. Die Tangente MG einer Evolute (G) der Kurve (M) im Punkte G liegt in der entsprechenden Normalebene von (M), ihr sphärisches Bild liegt demnach auf dem größten Kreis bh , dem Bild dieser Normalebene. Es sei MG dadurch orientiert, daß man die Richtung von M nach G als positiv bevorzugt, und der Winkel, den die Binormale mit MG

bildet²⁾, als ϑ bezeichnet. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß $0 < \vartheta < \pi$ sein muß. Das gesuchte sphärische Bild der Tangente der Evolute ist der Punkt t_2 , für den $bt_2 = \vartheta$ ist. Die benachbarte Tangente $M'G'$ liegt in der Ebene durch MM' und MG , ihr sphärisches Bild liegt also auf dem größten Kreise tt_2 , der das sphärische Bild dieser Ebene darstellt. Andererseits liegt aber $M'G'$ in

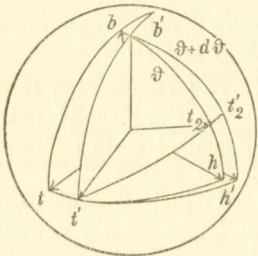


Fig. 18 a.

der Normalebene des Punktes M' , deren Bild durch den Kreis $b'h'$ gegeben ist. Das Bild t_2' von $M'G'$ ist also der Schnittpunkt beider Kreise. Nun schneidet aber tt_2 den Kreis bh rechtwinklig (da t der Pol von bh ist), also ist $b't_2' = b't'$; denkt man sich um die Kurve (b) einen Faden gespannt, und wickelt ihn auf der Kugel ab, so be-

1) Weitere Untersuchungen über windschiefe Kegelschnitte und damit zusammenhängende Probleme findet man (in analytischer Form) in den Dissertationen von H. Kössler (Halle 1911) und Fr. Kurth (Halle 1913).

2) Genauer: der Winkel, um den man die Binormale in positivem Sinne drehen muß, damit sie mit MG zusammenfällt. Als positiven Drehungssinn wählt man in der Normalebene zweckmäßig den Sinn des wachsenden Torsionswinkels, d. h. die Drehung in der man die Binormale um $\frac{1}{2}\pi$ drehen muß, um sie mit der Hauptnormale zur Deckung zu bringen.

schreibt ein Punkt dieses Fadens das Bogenelement $t_2 t_2'$, und bei weiterer Fortsetzung der Bewegung das vollständige Tangentenbild der Filarevolute. Man wird dieser Entstehung der Kurve gemäß die Kurve (t_2) als sphärische Evolvente der Kurve b bezeichnen, dann hat man den Satz:

Das Tangentenbild einer jeden Filarevolute einer Raumkurve ist eine sphärische Evolvente des Binormalenbildes der Kurve.

Aus der eben durchgeführten Betrachtung ergibt sich auch unmittelbar der Wert für die Änderung des Winkels ϑ . Da nämlich $\vartheta + d\vartheta = b't_2' = b't_2 = bt_2 - bb' = \vartheta - d\sigma$ ist, so ergibt sich

$$d\vartheta = -d\sigma,$$

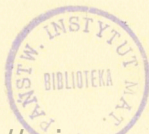
d. h. die Änderung des Winkels ϑ ist gleich dem negativen Schmiegunswinkel der Kurve.

Die Krümmungssachse ist parallel zu der Binormale, man kann daher den Satz auch folgendermaßen aussprechen:

Die Änderung des Winkels, den eine Evolute mit der Krümmungssachse bildet, ist, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem Schmiegunswinkel $d\sigma$ der ursprünglichen Kurve.

Das Vorzeichen läßt sich erst dann bestimmen, wenn über die Orientierung der Krümmungssachse eine Festsetzung getroffen ist.

Die durch die vorher vorgenommene Orientierung festgesetzte Richtung der Evolutentangente MG braucht zunächst nicht immer mit der Fortschreitungsrichtung GG' auf der Kurve (G) übereinzustimmen. Dies ist aber immer der Fall, wenn entweder 1. $d\rho > 0$ ist, d. h. der Krümmungsradius im Punkte M' größer ist als im Punkte M und G mit dem Krümmungsmittelpunkt C auf demselben Mantel der Polarfläche liegt, oder wenn 2. $d\rho < 0$ ist und C und G auf verschiedenen Mänteln der Polarfläche liegen oder wenn 3. $d\rho = 0$ ist und G auf dem negativen Mantel der Polarfläche liegt. Der Beweis hierfür, der der Kürze halber dem Leser überlassen sei, ergibt sich am einfachsten, wenn man die Polarfläche in die Ebene abwickelt und den Richtungssinn der aus den Evoluten entstehenden Geraden untersucht. In jedem Falle aber kann man auf der Ausgangskurve (M) den Fortschreitungsinn (wenn man sich auf einen entsprechend begrenzten Bereich beschränkt) so wählen, daß MG und GG' gleichgerichtet sind. Dies kommt darauf hinaus, daß die Kurve (M) in dem Sinne orientiert ist, in dem ein bestimmter Punkt eines über (G) straff gespannten Fadens bei seiner Abwick-



lung sie durchläuft. Diese Annahme, die den Festsetzungen des vorigen Kapitels (S. 33) entspricht, sei in der Folge stets vorausgesetzt.

Der Kontingenzwinkel $d\tau_2 = t_2 t_2'$ der Evolute ist ein Bogen eines Kreises vom Radius $\sin \vartheta$, der zum Zentriwinkel $hbh' = d\tau$ gehört. Es wird demnach

$$d\tau_2 = d\tau \sin \vartheta.$$

Der Kontingenzwinkel einer Evolute ist gleich dem Produkte des Kontingenzwinkels der ursprünglichen Kurve (M) und dem Sinus des Winkels, den die Tangente der Evolute mit der Binormalen der Kurve (M) bildet. Der Kontingenzwinkel der Evolute ist daher nie größer als der Kontingenzwinkel der ursprünglichen Kurve.

Das sphärische Bild der Hauptnormalen h_2 liegt auf dem größten Kreise durch $t_2 t_2'$ und zwar auf der Verlängerung von $t_2 t_2'$, um $\frac{1}{2}\pi$ von t_2 entfernt, mithin dem Tangentenbilde t der Kurve (M) diametral gegenüber.

Das sphärische Bild der Hauptnormalen einer Filarevolute ist die zum Tangentenbilde der ursprünglichen Kurve bezüglich des Kugelmittelpunktes symmetrische Kurve.

Dies ergibt sich auch durch unmittelbare geometrische Anschauung. Bei der Abwicklung des Fadens von der Evolute G bewegt sich der Punkt M in der jeweiligen Schmiegeungsebene der Kurve G senkrecht zur Tangente, also parallel der Hauptnormale von (G). Dabei ist die Bewegung immer vom Krümmungsmittelpunkte der Evolute weg gerichtet, sobald M auf der negativen Hälfte der Evolutentangente liegt, und dies ist nach den getroffenen Festsetzungen immer der Fall.

Da zwei benachbarte Tangenten von (M) denselben Winkel bilden wie die entsprechenden Hauptnormalen von (G), so folgt:

Der Winkel der ganzen Krümmung der Evoluten ist unabhängig von der Neigung der Evolute gegen die Krümmungsachse und gleich dem Kontingenzwinkel der ursprünglichen Kurve:

$$dk_2 = d\tau.$$

Das Binormalenbild der Evolute endlich liegt von ihrem Tangenten- und Hauptnormalenbild um $\frac{1}{2}\pi$ entfernt, also auf dem Kreise t, b um $\vartheta - \frac{1}{2}\pi$ von b entfernt. Auch die Kurve dieses Binormalenbildes (b_2) ist eine sphärische Evolvente von t_2 (gleichzeitig offenbar das Tangentenbild einer anderen Evolute, deren Tan-

genten die entsprechenden der ersten senkrecht schneiden). Man erhält dann für den Schmiegunswinkel $d\sigma_2$ den Wert

$$d\sigma_2 = -\cos \vartheta \cdot d\tau.$$

Der Schmiegunswinkel $d\sigma_2$ einer Evolute ist das negative Produkt des Kontingenzwinkels der ursprünglichen Kurve und des Kosinus der Neigung der Tangente der Evolute gegen die Krümmungsachse.

Übung. 1. Man leite die Ergebnisse der letzten Nummer aus den Sätzen des vorigen Kapitels her, indem man dort (P) als Ausgangskurve, (M) als eine ihrer Filarevoluten betrachtet.

2. Die Evoluten einer Raumkurve können paarweise sich so zugeordnet werden, daß die Tangenten der einen die Tangenten der anderen senkrecht schneiden. (S. 36).

8. Bogenelement und Krümmungen der Evolute. Das Bogenelement $GG' = ds_2$ der Evolute folgt aus dem Dreieck $KG'G'$. Fällt man von G' auf GK das Lot $G'G_0$, so wird Winkel $G'GG_0$ gleich ϑ oder $\pi - \vartheta$, je nachdem die Richtung GG_0 der Binormalenrichtung entgegengesetzt oder mit ihr zusammenfällt; es ist aber immer:

$$GG' = \frac{G'G_0}{\sin \vartheta}.$$

Setzt man $KG = \varepsilon$, so wird, da der Winkel $G'KG = |d\sigma|$ ist (S. 15):

$$ds_2 = \left| \frac{(\varepsilon + d\varepsilon)d\sigma}{\sin \vartheta} \right|.$$

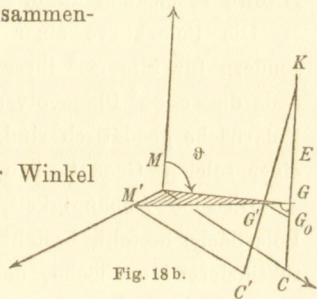


Fig. 18 b.

Oder, wenn man bis auf Unendlich Kleines erster Ordnung abkürzt:

$$ds_2 = \varepsilon \frac{|d\sigma|}{\sin \vartheta}.$$

Berücksichtigt man die in der vorigen Nummer gefundenen drei Krümmungswinkel $d\tau_2$, $d\sigma_2$, dk_2 , so erhält man die Radien der drei Krümmungen:

$$\rho_2 = \frac{\varepsilon}{\sin^2 \vartheta} \left| \frac{d\sigma}{d\tau} \right| = \varepsilon \frac{|r|}{\rho \sin^2 \vartheta},$$

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \left| \frac{d\sigma}{d\tau} \right| = -\varepsilon \frac{|r|}{\rho \sin \vartheta \cos \vartheta},$$

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\sin \vartheta} \left| \frac{d\sigma}{d\tau} \right| = \varepsilon \frac{|r|}{\rho \sin \vartheta}.$$

Man sieht hieraus, daß diese drei Radien mit ε gleichzeitig wachsen. Eliminiert man ϑ , so ergibt sich noch:

$$\varepsilon = \frac{|r|}{e} \cdot \frac{r_2^2}{e_2^2}$$

und durch Elimination von ε

$$e_2 \sin \vartheta + r_2 \cos \vartheta = 0.$$

Diese Relation ist von vornherein zu erwarten, wenn man bedenkt, daß die Binormale von (M) die Richtung der rektifizierenden Geraden von (G) besitzt, und daß daher die Formeln von S. 30 gelten müssen.

9. Planevolute. Die Kurve (M) ist bezüglich ihrer Polarkurve (K) eine Planevolvente (S. 39), man kann daher (K) als Planevolute von (M) bezeichnen. Eine Raumkurve besitzt demnach nur eine Planevolute, dagegen ∞^1 Filarevoluten. Letztere liegen als geodätische Linien auf der Tangentenfläche der Planevolute, d. i. der Polarfläche, so daß man diese auch als Evolutenfläche bezeichnen kann.

Die Polarkurve einer Raumkurve (M) ist nicht nur für (M) , sondern für alle ∞^2 ihrer Planevolventen Gratlinie der Polarfläche. Jede dieser ∞^2 Planevolventen besitzt ∞^1 Filarevoluten, die auf der Polarfläche geodätisch sind, und umgekehrt sind alle Filarevolventen einer solchen Geodätischen Planevolventen der Polarkurve.

Dieselbe Abhängigkeit, welche zwischen einer Kurve und ihrer Polarfläche besteht, besteht zwischen jeder ihrer Evolventen und der rektifizierenden Fläche, denn diese ist (S. 34) die Polarfläche oder die Evolutenfläche für sie.

Die Planevolute besitzt als Gratlinie der Polarfläche derart ausgezeichnete Eigenschaften, daß es gerechtfertigt erscheint, sie in einem besonderen Kapitel eingehender zu untersuchen.

VI. Kapitel.

Schmiegunskugel und Schmiegunkskegel.

1. Die Schmiegunskugel. Jeder Punkt der Krümmungsachse k ist von drei aufeinanderfolgenden Punkten M, M', M'' der Kurve gleichweit entfernt (S. 42, Fig. 15), und ist daher Mittelpunkt einer Kugel, welche durch diese drei Punkte geht, die Kurve also in der zweiten Ordnung berührt.

Die Krümmungsachse ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kugeln, welche die Kurve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung berühren.

Der Krümmungskreis, der auf jeder dieser Kugeln liegt, ist ihr gemeinsamer Durchschnitt. Unter den Kugeln gibt es drei ausgezeichnete, nämlich 1. die kleinste von ihnen; ihr Mittelpunkt ist der Krümmungsmittelpunkt und ihr Radius der Krümmungshalbmesser, denn von allen Punkten der Krümmungsachse hat der Krümmungsmittelpunkt den kürzesten Abstand von der Kurve; 2. die größte, nämlich die Schmiegunugssebene, die einem unendlich großen Radius entspricht und den unendlich fernen Punkt der Krümmungsachse zum Mittelpunkt hat, und 3. die Kugel, deren Mittelpunkt im Durchschnitt K der Krümmungsachse k mit der folgenden Krümmungsachse k' liegt. Weil dieser Punkt in der Krümmungsachse k liegt, so geht die Kugel durch die Punkte M, M', M'' und weil er der Krümmungsachse k' angehört, durch die Punkte M', M'', M''' . Diese Kugel hat daher vier aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'', M''' mit der Kurve gemein und berührt sie inniger als alle anderen, überhaupt so innig als eine Kugel berühren kann, da eine solche durch vier Punkte bestimmt ist, nämlich vierpunktig oder in der dritten Ordnung. Wir nennen sie die Schmiegunugskugel der Kurve im Punkte M . Auf ihr liegen die Krümmungskreise zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' der Kurve.

Der Ort der Mittelpunkte aller Schmiegunugskugeln der Kurve M ist die Gratlinie (K) der Polarfläche.

2. Die Kurve der Schmiegunugskugelmittelpunkte (Polarcurve). Die Kurve (K), die die Mittelpunkte K der Schmiegunugskugeln einer Raumkurve (M) erfüllen, war schon früher von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet worden. Die folgenden unmittelbar einleuchtenden Sätze sind daher nur früher gewonnene Ergebnisse, z. T. in neuer Form gefaßt:

Die Schmiegunugssebene von (K) fällt mit der Normalebene von (M) zusammen; die Normalebene von (K) ist parallel der Schmiegunugssebene von (M); die rektifizierenden Ebenen von (K) und (M) sind einander parallel. (S. 6).

Die Tangente, Hauptnormale und Binormale von (K) ist beziehungsweise parallel der Binormalen, Hauptnormalen und Tangente von (M). (S. 39).

Die rektifizierenden Geraden der Kurven (K) und (M), die rektifizierenden Flächen und deren Gratlinien sind parallel.

Die Winkel, welche die rektifizierenden Geraden von (K) und (M) mit den Tangenten dieser Kurven bilden, ergänzen einander zu $\frac{1}{2}\pi$; wächst der eine, so nimmt der andere ab.

Die Orientierung der Haupttrieder von (M) und (K) gegeneinander ist nicht ganz kurz zu charakterisieren; ihre Bestimmung erfordert einige Hilfsbetrachtungen, aus denen sich weitere Ergebnisse folgern lassen.

Die Ebene der Zeichnung sei die Normalebene des Punktes M' ; in ihr liegt die Hauptnormale $M'C'$ und senkrecht dazu die Krümmungsachse $C'K$, ferner der Krümmungsmittelpunkt C und die Krümmungsachse CK des Punktes M . Die Strecke $M'C$ ist die Projektion des Krümmungsradius (der Hauptnormale) des Punktes M in die Zeichenebene, da C in ihr liegt und das Bogenelement MM' auf der Normalebene des Punktes M' senkrecht steht. Da CM' in der Schmiegungeebene des Punktes M gelegen ist, so ist CM' sowohl auf der Tangente als auch auf der Krümmungsachse CK senkrecht. Der Winkel $C'M'C$ ist¹⁾

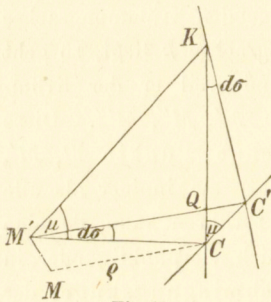


Fig. 19.

gleich dem Schmiegunswinkel $d\sigma$, da seine Schenkel in den benachbarten Schmiegungeebenen auf der Schnittgerade (der Tangente in M') senkrecht stehen. Andererseits weiß man, daß der Winkel CKC' benachbarter Krümmungsachsen gleich $|d\sigma|$ ist.

Über dem Radius $M'K$ der Schmiegunkskugel des Punktes M stehen zwei rechte Winkel $M'CK$ und $M'C'K$; die vier Punkte M', C, C', K liegen somit auf einem Kreise, dessen Durchmesser $M'K$ ist.

Man bezeichne den Schnittpunkt von CK und $M'C'$ mit Q , dann folgt aus dem bei C rechtwinkligen Dreieck $M'CQ$

$$M'C = M'Q,$$

bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung. Nun ist aber $M'C = MC = \rho$, also $M'Q = \rho$ und da $M'C' = \rho + d\rho$ ist:

$$QC' = d\rho \quad \text{und}$$

$$QC = \rho d\sigma.$$

1) Und zwar vorzeichentreu, wenn er der Winkel ist, um den man die Gerade CM' zu drehen hat, um sie mit $C'M'$ zur Deckung zu bringen.

Bei den vorigen Betrachtungen ist auf die richtige Bestimmung des Vorzeichens wohl zu achten. Vgl. Fig. 20a, wo die Verhältnisse für $d\sigma > 0$, und Fig. 20b, wo sie für $d\sigma < 0$ dargestellt sind.

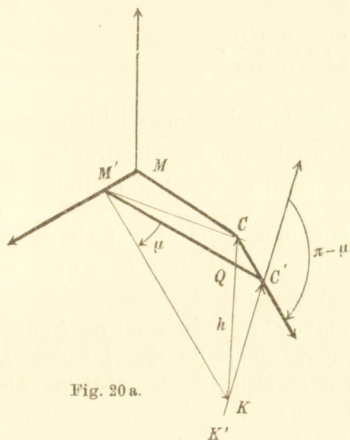


Fig. 20 a.

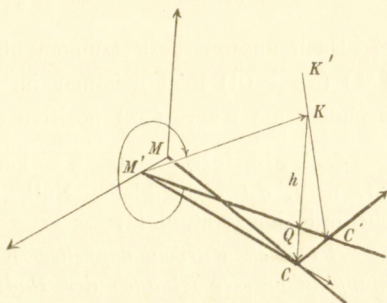


Fig. 20 b.

Beide Male ist $d\varrho \geq 0$ gewählt. Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn wenn für M' der Krümmungsradius kleiner sein sollte wie für M , so braucht man nur auf der Ausgangskurve den Richtungssinn zu wechseln (d. h. M und M' zu vertauschen), um den in der Zeichnung vorliegenden Sachverhalt zu haben.

Ferner ergibt sich aus dem Dreieck KQC' :

$$KQ \cdot d\sigma = d\varrho,$$

und da in der Grenze $KQ = KC$ wird, so erhält man für den Abstand $KC = h$ des Krümmungsmittelpunktes vom Mittelpunkt der Schmiegunskugel die Gleichung $hd\sigma = d\varrho$, also

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma} = r \frac{d\varrho}{ds},$$

wenn man noch für $d\sigma$ seinen Wert $ds : r$ einsetzt. In dieser Gleichung ist h eine gerichtete Größe, und zwar ist h positiv, wenn die Richtung CK der Binormalenrichtung entgegengesetzt ist, negativ, wenn CK und die Binormalenrichtung übereinstimmen.

3. Radius der Schmiegunskugel. Mit Hilfe des für h gefundenen Wertes folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck $M'CK$ sofort für den Radius $MK = MK' = R$ der Schmiegunskugel:

$$R^2 = \varrho^2 + h^2 = \varrho^2 + r^2 \left(\frac{d\varrho}{ds} \right)^2,$$

und für den Neigungswinkel $KM'C$ dieses Radius gegen die Schmiegunugssebene¹⁾

$$\sin \mu = \frac{h}{R}, \quad \cos \mu = \frac{\varrho}{R}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{h}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho} \frac{d\varrho}{ds}.$$

Nach unseren Festsetzungen über die Fortschrittingsrichtung auf (M) ($d\varrho \geq 0$!) liegt μ immer im ersten oder vierten Quadranten, je nachdem die Kurve (M) positive oder negative Torsion besitzt.

4. Beispiele. 1. Ist $\varrho = \text{konstant}$ und die Kurve nicht eben ist, d. h. $d\sigma$ nicht gleich Null, so wird $h = 0$ und $R = \varrho$, also ebenfalls konstant, d. h.:

Bei allen Kurven doppelter Krümmung von konstantem Krümmungshalbmesser ist auch der Radius der Schmiegunugskugel konstant, nämlich gleich dem Krümmungshalbmesser; die Kurve der Mittelpunkte der Schmiegunugskugeln fällt mit der Kurve der Krümmungsmittelpunkte zusammen.

2. Ist $\varrho = \text{konstant}$ und $d\sigma = 0$, d. h. die Kurve ein Kreis, so wird h und hiermit R und die Schmiegunugskugel selbst unbestimmt. Jede durch den Kreis gehende Kugel kann als Schmiegunugskugel angesehen werden.

3. Ist die Kurve eben, also $d\sigma = 0$, aber ϱ nicht konstant, so wird $h = \infty$, $R = \infty$; die Schmiegunugskugel geht in die Schmiegunugssebene über.

4. Für sphärische Kurven wird R konstant und gleich dem Radius der Kugel, auf welcher die Kurve liegt. Die Schmiegunugskugeln fallen alle mit dieser Kugel zusammen, da die Kurve (K) sich auf ihrem Mittelpunkt zusammenzieht.

5. Das Bogenelement der Polarkurve. Sind K und K' benachbarte Punkte der Polarkurve, so wird ihr Bogenelement $ds_0 = |KK'|$ durch die Gleichung gegeben:

$$KK' = KC' - K'C' = KQ - K'C'.$$

Nun ist $KQ = KC - QC = h - \varrho d\sigma$ und $K'C' = h + dh$, also:

$$ds_0 = |KK'| = |h + dh - (h - \varrho d\sigma)|$$

$$ds_0 = |dh + \varrho d\sigma|.$$

1) Der Winkel μ wird also erhalten, indem man die Hauptnormale $M'C'$ im positiven Sinne soweit dreht, bis sie mit der Richtung $M'K$ zusammenfällt.

Anmerkung. Aus den Formeln für R und h erhält man durch formale Rechnung

$$dh + \varrho d\sigma = \frac{RdR}{rd\varrho} ds.$$

Es ist leicht, den hieraus folgenden Wert von ds_0 auch durch geometrische Betrachtungen zu finden, durch Beziehungen, die aus dem Dreieck $M'KK'$ abzulesen sind. Die Durchführung des einfachen Gedankenganges sei dem Leser überlassen.

6. Die Krümmungen der Polarkurve. Die Winkel $d\tau_0$, $d\sigma_0$, dk_0 der Polarkurve haben folgende Werte:

$$d\tau_0 = |d\sigma|, \quad d\sigma_0 = \pm d\tau, \quad dk_0 = dk.$$

Hierin ist noch das Vorzeichen des Torsionswinkels zu ermitteln. Betrachtet man die Ausgangskurve (M) als Planevolvente der Kurve (K), so lassen sich die früher hergeleiteten Beziehungen (S. 40) zwischen Kurve und Evolvente unmittelbar anwenden. Ist (M) eine Evolvente der Art (P_1), so hat der Ausdruck RdR immer dasselbe Vorzeichen wie $d\varrho$; ist (M) eine Evolvente der Art (P_2) so haben RdR und $d\varrho$ immer entgegengesetzte Vorzeichen. In beiden Fällen ist daher (S. 41) das Vorzeichen $d\sigma_0$ der Evolute dasselbe wie das von $-\frac{RdR}{rd\varrho}$.

Die drei Krümmungsradien der Polarkurve sind jetzt eindeutig bestimmt:

$$\varrho_0 = R \left| \frac{dR}{d\varrho} \right| = \left| \varrho + \frac{dh}{d\sigma} \right|, \quad r_0 = -\varrho \frac{RdR}{rd\varrho}, \quad r_0 = r \cdot \left| \frac{RdR}{rd\varrho} \right|.$$

Auf die Untersuchung des sphärischen Bildes der Polarkurve soll verzichtet werden, da es zunächst keine neuen Ergebnisse verspricht, andererseits auch die Frage durch die Entwicklungen von S. 40 im wesentlichen erledigt ist.

7. Die Schmiegunskugeln der Filar- und Planevolventen. Die Gratlinie der Evolutenfläche einer Kurve ist der Ort der Mittelpunkte ihrer Schmiegunskugeln. Nun haben alle Filar-evolventen eine gemeinsame Evolutenfläche, nämlich die rektifizierende Fläche. Daher der Satz:

Die Gratlinie der rektifizierenden Fläche einer Kurve ist der gemeinschaftliche Ort der Mittelpunkte der Schmiegunskugeln aller Filar-evolventen der Kurve.

Die Evolutenfläche einer Kurve ist ferner auch Evolutenfläche aller Planevolventen ihrer Gratlinie. Daher weiter:

Die Gratlinie der Evolutenfläche einer Kurve ist der Ort der Mittelpunkte der Schmiegunskugeln nicht bloß der Kurve selbst, sondern auch aller Planevolventen der Gratlinie.

Man erkennt hierin den Satz von S. 50 wieder.

8. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte. Die Kurve (C) der Krümmungsmittelpunkte von (M) liegt auf der Polarfläche und ihr Bogenelement CC' fällt, wie schon vorher gezeigt, mit dem Bogenelement des Kreises zusammen, der über dem Radius $M'K$ der Schmiegunugskugel als Durchmesser konstruiert werden kann. Da der zugehörige Peripheriewinkel $CKC' = |d\sigma|$ wird, so ist das Bogenelement ds' der Krümmungsmittelpunktcurve

$$ds' = R |d\sigma|.$$

Ferner ist der Winkel $C'CK$ der Sehnentangentenwinkel über der Sehne CK des Kreises; dieser ist gleich dem Peripheriewinkel $CM'K = \mu$, man hat also den Satz:

Der Neigungswinkel des Radius der Schmiegunugskugel gegen die Schmiegunugsebene und der Winkel, welchen die Tangente der Krümmungsmittelpunktcurve mit der Krümmungsachse bildet, sind gleich.

Hierbei ist die Krümmungsachse als (nicht gerichtete) Gerade aufgefaßt und für jeden der beiden Winkel aus den verschiedenen möglichen der spitze Winkel genommen. Wegen genauer Untersuchung vgl. Kap. 9, Nr. 2 (S. 91).

9. Übung. Kurven, für die der Mittelpunkt des Krümmungskreises und der Mittelpunkt der entsprechenden Schmiegunugskugel einen konstanten Abstand besitzen.

Es sei P ein Punkt der gesuchten Kurve (P), M der Krümmungsmittelpunkt dieser Kurve in P , K der Mittelpunkt der Schmiegunugskugel für denselben Punkt. Die Aufgabe fordert die Bestimmung derjenigen Kurven (P), bei denen $MK = h$ für alle Punkte dieselbe Größe besitzt.

Man denke sich an die Polarfläche der Kurve (P) die Tangentialebenen konstruiert und in ihnen jedesmal den in ihr liegenden Punkt P markiert. Wickelt man nun die Polarfläche samt ihren Tangentialebenen in eine Ebene ab, so reduziert sich die Kurve (P) auf einen Punkt P' , die Gratlinie (K) der abgewickelten Fläche auf eine Kurve (K') und die Kurve (M) in eine Kurve (M'), die so beschaffen ist, daß immer $M'K' = h$ wird. Die Kurve (K'), die der Raumkurve (K) isometrisch zugeordnet ist und in entsprechenden Punkten dieselbe Krümmung hat wie (K), ist also so zu bestimmen, daß, wenn

man auf ihren Tangenten in dem konstanten Abstand $K'M' = h$ vom Berührungspunkt die Lote zu den Tangenten konstruiert, diese Lote sich in einem Punkte schneiden; d. h. die Normalen von (K'), die ja parallel zu den Loten $M'K'$ sind, umhüllen

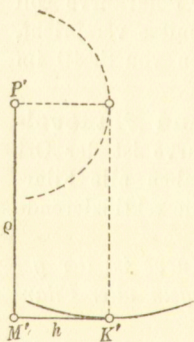


Fig. 21.

einen Kreis vom Radius h . Die Kurve (K') ist also eine Kreisevolvente.

Tordiert man die Ebene einer Kreisevolvente, die zu einem Kreise vom Radius h gehört, so, daß die Tangenten geradlinig bleiben, so erhält man eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie eine natürliche Gleichung der Form

$$\varrho^2 = 2hs$$

besitzt. Rollt über dieser Fläche die Ebene der Kreisevolvente in der Weise ab, daß immer entsprechende Tangenten der Evolvente und der Gratlinie sich berühren, so beschreibt der Mittelpunkt des Kreises eine Kurve, für die der Schmiegunskugelmittelpunkt und Krümmungsmittelpunkt einen konstanten Abstand besitzen.

Die eine natürliche Gleichung einer Kurve der geforderten Art ergibt sich aus der bekannten Größe h dieses Abstands:

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{h}{r}.$$

Als zweite Gleichung kann eine beliebige Relation $r = f(s)$ gewählt werden.

Das Verfahren bleibt auch für $h = 0$ noch richtig, wenn man als Evolvente eines Punktes einen Kreis von beliebigem Radius auffassen will, dessen Mittelpunkt dieser Punkt ist.

Die Schraubenlinien, die unter diesen Kurven enthalten sind, liegen als Kurven konstanter Steigung auf Kreiszyindern oder auf Rotationsparaboloiden mit vertikaler Achse.

10. Sphärisches Bild der Schmiegunskugelradien.

Der Radius MK der Schmiegunskugel liegt in der Normalebene und bildet mit der Hauptnormalen den Winkel μ ; sein sphärisches Bild ist demnach ein Punkt k , der auf dem Kreise hb im Abstände μ von h liegt.

Ist k' das Bild des benachbarten Schmiegunskugelradius $M'K'$, so ist kk' gleich dem Winkel $d\omega$, unter dem sich zwei benachbarte Schmiegunskugelradien kreuzen.

Die aufeinanderfolgenden Radien $MK, M'K', M''K'', \dots$ der Schmiegunskugeln schneiden sich im allgemeinen nicht, sondern erzeugen eine windschiefe Fläche, welche durch die entsprechenden Punkte der Kurven (M) und (K) geht. Sie liegen nämlich in verschiedenen Ebenen, den Normalebene der Kurve (M) und treffen deren Schnittlinien, die Krümmungsachsen, in verschiedenen Punkten K, K', \dots . Nur in einem Falle geht die Fläche dieser Radien in eine abwickelbare Fläche über, nämlich dann, wenn die Kurve (K) sich auf einen (eigentlichen oder unendlich fernen) Punkt reduziert, wie es bei den sphärischen und ebenen Kurven der Fall ist, bei welchen diese Fläche eine Kegelfläche, resp. Zylinderfläche ist.

Hieraus ergibt sich beiläufig ein neuer Beweis dafür, daß die Planevolute einer Raumkurve nicht gleichzeitig Filarevolute sein kann.

Um den Winkel $d\omega$ zu bestimmen, fälle man von k auf $b'h'$ das Lot kk_0 . Dann ist $d\omega = kk'$, und es wird:

$$kk'^2 = kk_0^2 + k_0k'^2.$$

Aus $bk = bk_0 = \frac{1}{2}\pi + \mu$ und $kb'k_0 = d\tau$ folgt $kk_0 = d\tau \cos \mu$, und da $k_0k' = b'k' - b'k_0 = b'k' - b'k_0 = b'k' - (bk - bb') = \mu + d\mu - \mu + d\sigma$ ist, so erhält man schließlich:

Der Winkel $d\omega$ der Radien benachbarter Schmiegunskugeln ergibt sich aus der Gleichung:

$$d\omega^2 = (d\sigma + d\mu)^2 + d\tau^2 \cos^2 \mu.$$

Der Punkt k_0 liegt auf dem größten Kreise $b'h'$, und zwar von b' um $b'k_0 = b'k$ entfernt. Dann ist auch $bk_0 = bk$. Der Punkt k_0 kann demnach als das Bild einer Geraden durch M' aufgefaßt werden, die in der Normalebene von M' gelegen ist und mit der Krümmungsachse CK denselben Winkel ϑ bildet wie der Schmiegunskugelradius MK ; d. h. k_0 ist das Bild des Radius $M'K$ der Schmiegunskugel von M ; daher ist der Bogen $k'k_0$ gleich dem Winkel $KM'K'$ der Radien zweier benachbarter Schmiegunskugeln, die durch M' hindurchgehen.

11. Sphärische Torsion. Der Winkel $d\omega$, welcher zugleich der Winkel der beiden zu den Radien KM und $K'M'$ senkrechten Tangentenebenen zweier aufeinanderfolgenden Schmiegunskugeln ist, mißt die Abweichung der Kurve von der Kugelfläche; den reziproken Wert einer Strecke S , welche durch die Gleichung $Sd\omega = ds$ bestimmt wird, nämlich:

$$\frac{1}{S} = \frac{d\omega}{ds},$$

nennen wir die sphärische Torsion der Kurve im Punkte M und die Linie S selbst, nämlich:

$$S = \frac{ds}{d\omega}$$

den Radius der sphärischen Torsion.¹⁾

1) Vgl. Schell, Über die Schmiegunskugel und die sphärische Torsion der Kurven doppelter Krümmung. (Archiv für Mathem. u. Physik (1) 19, 293.)

12. Schmiegunngskegel. Jeder Punkt der Krümmungsachse ist der Mittelpunkt eines Rotationskegels, welcher mit der Kurve drei aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'' gemein hat, diese also in der zweiten Ordnung berührt. Die Krümmungsachse ist also auch der Ort der Spitzen einer Schar von Rotationskegeln, die die Kurve in der zweiten Ordnung berühren. In der Schar Kegel, welche sämtlich durch den Krümmungskreis hindurchgehen, sind drei besonders ausgezeichnet, nämlich: 1. die Schmiegunngsebene; sie stellt den Kegel dar, dessen Mittelpunkt in den Krümmungsmittelpunkt C fällt, 2. der Zylinder, dessen Erzeugungslinien parallel der Krümmungsachse laufen; er ist ein Kegel, dessen Spitze der unendlich ferne Punkt der Krümmungsachse ist, und 3. ein Kegel, welcher mit der Kurve noch einen vierten Punkt M''' gemein hat und sie also in der dritten Ordnung berührt. Diesen Kegel, den wir sofort näher bestimmen wollen, nennen wir den Schmiegunngskegel der Kurve im Punkte M , weil er von allen derjenige ist, welcher sich der Kurve am innigsten anschmiegt.

Denken wir uns nämlich die Reihe der in zweiter Ordnung berührenden Kugeln und ihrer Mittelpunkte Γ auf der Krümmungsachse, sowie die Reihe der Kegel und ihrer Mittelpunkte Σ auf derselben Geraden, so wird jede Kugel von einem gewissen dieser Kegel längs des Krümmungskreises berührt und die Mittelpunkte Γ, Σ dieser Flächenpaare liegen auf entgegengesetzten Seiten der Schmiegunngsebene und des Krümmungsmittelpunktes C so, daß das Produkt der Abstände $C\Gamma, C\Sigma$ eine Konstante, nämlich gleich dem Quadrat des Krümmungshalbmessers ρ , also

$$C\Gamma \cdot C\Sigma = \rho^2$$

ist und die Dreiecke $\Sigma M\Gamma, \Sigma M'\Gamma, \Sigma M''\Gamma$ bei M, M', M'' rechtwinklig sind, d. h. die Kegelseiten senkrecht auf den Radien der Kugel stehen. Rückt der Punkt Γ in den Krümmungsmittelpunkt C , so entfernt sich der Mittelpunkt Σ des berührenden Kegels ins Unendliche und geht dieser in den vorhin erwähnten Zylinder über; rückt Γ ins Unendliche, so fällt Σ in den Krümmungsmittelpunkt und es gehen die beiden Flächen, Kugel und Kegel, in die Schmiegunngsebene über. Die Mittelpunkte Γ der Kugeln und die Mittelpunkte Σ der Kegel bilden eine gleichliegende Punktinvolution auf der Krümmungsachse mit dem Mittelpunkte des Krümmungskreises als Zentralpunkt und dem Quadrate des Krümmungshalbmessers ρ als Konstante dieser Involution. Lassen wir nun die Kugel in die Schmiegunngskugel übergehen, also ihren Mittelpunkt Γ in den Durchschnitt K der Krümmungsachse mit der folgenden Krümmungsachse fallen. Die Kugel geht alsdann durch die vier aufeinanderfolgenden Punkte M, M', M'', M''' , von denen die drei ersten M, M', M'' auf dem Krümmungskreise des Punktes M , der vierte, M''' , aber auf dem Krümmungskreise des nächstfolgenden Punktes M' liegt und von dem ersten Krümmungskreis unendlich wenig absteht. Legen wir

daher durch die Krümmungsachse und diesen Punkt eine Ebene, so schneidet sie den ersten Krümmungskreis in einem gewissen Punkte N , welcher dem Punkte M''' unendlich nahe liegt, und es ist folglich eine Gerade, welche durch diese beiden Punkte geht, eine Tangente der Kugel in N , und da sie die Krümmungsachse schneidet, die Erzeugungslinie eines geraden Kegels, welcher die Kugel längs des Krümmungskreises berührt. Dieser Kegel geht durch die vier Punkte der Kurve, welche die Schmiegunskugel mit dieser gemein hat und ist also der obige Schmiegunskegel. Der Abstand seines Mittelpunktes S von dem Krümmungsmittelpunkte C ergibt sich aus der Gleichung $CS \cdot CK = \rho^2$, und wenn wir ihn mit k bezeichnen und für $CK = h$ seinen Wert einsetzen, so wird er

$$|k| = \frac{\rho^2}{h} = \rho^2 \left| \frac{d\sigma}{d\varrho} \right| = \left| \frac{\rho^2 ds}{r d\varrho} \right|.$$

Die Neigung der Kegelseite SM gegen die Schmiegunsebene ist $\frac{1}{2}\pi - \mu$ und folglich ihre Neigung gegen die Krümmungsachse selbst gleich μ . Da auch die Tangente der Kurve der Krümmungsmittelpunkte mit der Krümmungsachse denselben Winkel μ bildet, so bildet diese Achse mit ihr und der Kegelseite ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Basis in die Krümmungsachse fällt.

Die Betrachtung des Schmiegunskegels zeigt, daß jede Kurve doppelter Krümmung inbezug auf drei aufeinanderfolgende Elemente als auf einem geraden Kegel liegend angesehen werden kann.

13. Beispiele. Ist die Kurve eben, so wird $h = \infty$, mithin $k = 0$, der Schmiegunskegel fällt mit der Ebene der Kurve zusammen.

Ist die Kurve sphärisch, so wird der Radius der Schmiegunskugel konstant und da $KS \cdot KC = R^2$, so wird die Entfernung KS des Kegelmittelpunkts vom Mittelpunkt der Kugel, auf welcher die Kurve liegt, nämlich:

$$KS = \frac{R^2}{KC}$$

umgekehrt proportional dem Abstand der Schmiegunsebene vom Mittelpunkt der Kugel.

Ist ρ konstant, so wird $h = 0$ und also $k = \infty$, d. h. der Schmiegunskegel ist ein Zylinder, die Kurve kann hinsichtlich dreier Elemente als zylindrisch angesehen werden.

14. Die Kurve der Schmiegunskegelspitzen. Die Spitzen der Schmiegunskegel bilden auf der Fläche der Krümmungsachsen eine Kurve S ; zwischen ihr und der Kurve K liegt die Kurve C und zwar so, daß immer

$$CK \cdot CS = \rho^2, \quad KS \cdot KC = R^2$$

ist. Diese Kurve ist keine Evolute. Denn sind S, S' (Fig. 23) zwei aufeinanderfolgende Punkte derselben, also SS' ihre Tangente, so sieht man leicht, da β diese nicht mit der Kegelseite MS zusammenfallen kann. Sind n \ddot{a} mlich K, K' die den Punkten S, S' entsprechenden Punkte der Kurve (K) und beschreibt man um K mit KS den kleinen Bogen KQ , so wird

$$QS' = K'S' - KQ - KK' = K'S' - KS$$

$$- KK' = d(SK) + ds_0 = d\left(\frac{R^2}{h}\right) + ds_0$$

und

$$QS = KS |d\sigma| = \left|\frac{R^2}{h}\right| |d\sigma|,$$

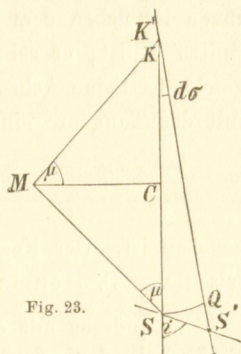


Fig. 23.

mithin, wenn i die Neigung der Tangente der Kurve S gegen die Kr \ddot{u} mmungsachse SK ist,

$$\cotg i = \frac{h}{R^2 |d\sigma|} \left(ds_0 + d\frac{R^2}{h} \right),$$

w \ddot{a} hrend f \ddot{u} r die Neigung der Kegelseite MS gegen dieselbe Achse die Gleichung

$$\cotg \mu = \frac{e}{h}$$

besteht.

F \ddot{u} r die L \ddot{a} nge der Kegelseite erh \ddot{a} lt man: $MS = \frac{R e}{h}$. Ist sie konstant, so ist die Kurve S zugleich der Ort der Mittelpunkte einer Schar Kugeln von konstantem Radius, welche die Kurve in der zweiten Ordnung ber \ddot{u} hren.

Das sph \ddot{a} rische Bild der Kurve (S) ist eine Kurve s , deren Punkte auf dem Bilde th der Normalebene um $\frac{1}{2}\pi$ vom Bilde k der Schmiegun \ddot{u} ngskugelradien entfernt liegen. Hieraus ergibt sich ein neuer Beweis daf \ddot{u} r, da β die Kurve (S) nicht Evolute sein kann. Denn das Bild der Evoluten schneidet (S. 46) die Bilder bh der Normalebenen senkrecht; dies kann f \ddot{u} r s nur dann eintreten, wenn auch k diese Eigenschaft hat, ist also f \ddot{u} r eigentliche Raumkurven nicht m \ddot{o} glich.

Aufgaben. 1. Bei welchen Kurven ist die Kurve der Schmiegun \ddot{u} ngskegelmittelpunkte eine geod \ddot{a} tische Linie auf der Polarfl \ddot{a} che?
2. F \ddot{u} r welche Schraubenlinien ist $MS = \text{konst.}$?

15. Schmiegun \ddot{u} ngskegel zweiter Art. Die Eigenschaft, die Kurve in dritter Ordnung zu ber \ddot{u} hren, ist f \ddot{u} r den in Nr. 12 betrachteten Schmiegun \ddot{u} ngskegel nicht charakteristisch: da durch vier Punkte im Raume unendlich viele gerade Kreisegel gelegt werden

können, gibt es deren unendlich viele, die mit einer Kurve vier benachbarte Punkte gemeinsam haben. Von besonderem Interesse unter ihnen ist neben dem eben betrachteten derjenige Drehkegel, dessen Spitze M ist; er sei als Schmiegunkskegel zweiter Art¹⁾ bezeichnet. Seine Achse liegt in der rektifizierenden Ebene und bildet mit der Tangente einen Winkel ω , der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{3r}{4\rho}$$

gegeben ist. Der Kegel ist analytisch von G. Scheffers²⁾, geometrisch von C. Heuman³⁾ untersucht worden.

Ein anderer mit einer Raumkurve in naher Beziehung stehender Drehkegel, der von de Saint-Venant⁴⁾ zuerst betrachtet wurde, ist der Drehkegel, von dem drei aufeinanderfolgende Erzeugende zur Tangente in M und zu den beiden Nachbartangenten parallel sind. Ist die Kegelspitze O als Mittelpunkt der Bildkugel gewählt worden, so sind drei aufeinanderfolgende Erzeugende des Kegels die Geraden Ot, Ot', Ot'' , die den Mittelpunkt mit drei benachbarten Punkten des Tangentenbildes verbinden; der Kegel selbst schneidet die Bildkugel in einem Kreise, der durch t, t', t'' hindurchgeht, d. h. dem Krümmungskreise des Tangentenbildes; das Bild der Kegelachse ist demnach der (sphärische) Krümmungsmittelpunkt, d. h. der Schnittpunkt der (sphärischen) Normalen tb und $t'b'$, es fällt also mit dem Bild der rektifizierenden Geraden zusammen. Läßt man O mit M zusammenfallen, so fällt die Achse Or mit der rektifizierenden Geraden der Kurve zusammen, und man erhält den Satz:

Die Achse des Drehkegels, dessen Spitze im Punkte M einer Raumkurve liegt und für den die Tangente des Punktes M und die Parallelen zu den beiden benachbarten Tangenten drei benachbarte Mantellinien sind, ist die rektifizierende Gerade.

1) Dieser Kegel scheint zuerst von G. Scheffers (Theorie der Kurven, Leipzig 1902) behandelt zu sein.

2) G. Scheffers, Theorie der Kurven. 2. Aufl. Leipzig 1911, S. 344 ff.

3) C. Heuman, Über einige Krümmungseigenschaften bei abwickelbaren Flächen und bei Kegelkurven. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 6, 302 bis 305. 1903.

4) De Saint-Venant, Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journ. de l'École polytechn. 30. cah. 1845.

VII. Kapitel.

Die rektifizierende Fläche.

1. Abwicklung der rektifizierenden Fläche. Die Schmiegungeebene und die rektifizierende Ebene sind ein Paar zueinander rechtwinklige Tangentenebenen der Kurve. Die rektifizierende Ebene steht senkrecht auf der Hauptnormalen (S. 4), zwei aufeinanderfolgende rektifizierende Ebenen schneiden sich in der rektifizierenden Geraden, einer Linie, welche senkrecht ist zu zwei aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, also senkrecht zu der Ebene, welche diesen beiden parallel läuft, der Ebene der ganzen Krümmung (S. 30).

Läßt man eine Ebene so an der Kurve hingleiten, daß sie fortwährend rektifizierende Ebene bleibt, so erzeugt sie die rektifizierende Fläche, welche abwickelbar ist und die rektifizierenden Geraden der Kurve als Erzeugende enthält. Der Name dieser Fläche rührt daher, daß bei ihrer Abwicklung die Kurve in eine Gerade übergeht. Bei dieser Abwicklung fallen nämlich nach und nach die rektifizierenden Ebenen der Punkte M, M', M'', M''', \dots der Kurve zusammen, indem jede um die Durchschnittslinie mit der folgenden, d. h. um die rektifizierende Gerade gedreht wird, bis der Winkel beider verschwindet. Dreht

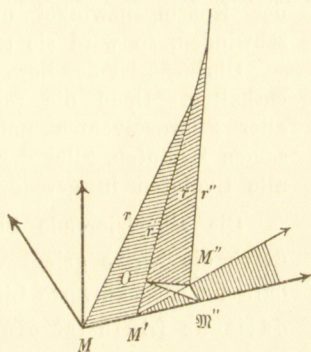


Fig. 24.

man die rektifizierende Ebene des Punktes M' um die rektifizierende Gerade r' , so beschreibt jeder Punkt der Ebene einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt auf der Drehachse r' gelegen ist und dessen Ebene auf r' senkrecht steht, also parallel der Ebene der ganzen Krümmung im Punkte M ist. So bewegt sich der Punkt M'' der Schmiegungeebene von M auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt O der Fußpunkt des Lotes von M'' auf r' ist. Seine Ebene $M''O M'''$ schneidet die Schmiegungeebene in einer Geraden $M'' M'''$, die zur Hauptnormale von M parallel sein muß, da ja die Ebene parallel der Ebene der ganzen Krümmung von M ist. Diese Gerade $M'' M'''$ kann als das Bogenelement eines Kreises mit dem Radius $OM'' = OM'''$, bzw. eines Kreises vom Radius $M'M'' = M'M'''$ angesehen werden. Setzt man die infinitesimale Drehung

der rektifizierenden Ebene von M' soweit fort, bis sie mit der von M zusammenfällt, so kommt der Punkt M'' in die Lage \mathfrak{M}'' auf der Tangente. Dreht man in derselben Weise jede rektifizierende Ebene eines Punktes in diejenige des vorigen Punktes, so fällt jedesmal das Bogenelement der Kurve (M) in die Gerade des vorhergehenden Bogenelementes. Man erhält so das zu Anfang ausgesprochene Ergebnis, das auch folgendermaßen formuliert werden kann:

Eine Raumkurve ist eine kürzeste Linie auf ihrer rektifizierenden Fläche.

Man hätte diesen Satz auch folgendermaßen beweisen können. Zwei aufeinanderfolgende rektifizierende Ebenen bilden miteinander den Winkel dk der beiden auf ihnen senkrechten Hauptnormalen und es ist nach dem Lancretschen Satze $dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2$. Durch die Abwicklung verschwindet dk ; dies ist nicht anders möglich, als dadurch, daß gleichzeitig $d\tau$ und $d\sigma$ verschwinden.¹⁾ Wenn aber der Kontingenzwinkel und Schmiegunzwinkel einer Kurve verschwinden, so wird sie eine Gerade.

Übrigens ist der Beweis bereits in früheren Entwicklungen (S. 44) enthalten. Denn die rektifizierende Fläche ist die Evolutenfläche aller Filarevolventen und die Kurve selbst ist eine ihrer gemeinsamen Evoluten. Bei der Abwicklung der Evolutenfläche gehen aber alle Evoluten in gerade Linien über, also auch die Kurve selbst.

Die rektifizierende Fläche ist nicht die einzige Fläche, welche durch die Kurve gelegt werden kann, auf welcher diese eine geodätische oder kürzeste Linie ist. Man definiert nämlich: Eine geodätische Linie ist eine solche Linie auf der Fläche, deren Hauptnormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen. (Der geometrische Nachweis dafür, daß diese Linien innerhalb gewisser Grenzen mit den kürzesten Linien auf der Fläche zusammenfallen, erfordert flächentheoretische Hilfsmittel, die hier nicht entwickelt werden können.) Daraus folgt, daß jede Fläche, die von der rektifizierenden Fläche längs der Kurve berührt wird, die Kurve als geodätische Linie enthält. Denn die Hauptnormalen der Kurve stehen auf den rektifizierenden Ebenen, also auf den Tangentenebenen aller derartiger Flächen senkrecht.

Aufgabe. Die Lichtgrenze einer Fläche (bei Parallelbeleuchtung) ist nur dann geodätisch, wenn sie eine Schraubenlinie ist.

1) Dabei ist zunächst noch zu beweisen, daß bei jeder Verbiegung der rektifizierenden Fläche die Hauptnormalen der vorgelegten Kurve in die Hauptnormalen der aus ihr nach der Biegung entstandenen Kurve übergeht. Der Nachweis sei dem Leser überlassen.

2. Die rektifizierende Fläche der Filarevoluten. Jede Kurve hat nur eine einzige rektifizierende Fläche, denn sie hat in jedem Punkte nur eine einzige rektifizierende Ebene. Umgekehrt ist dagegen jede abwickelbare Fläche rektifizierende Fläche für alle ihre geodätischen Linien. So ist die Fläche der Krümmungsachsen einer Raumkurve (M) gemeinsame rektifizierende Fläche für alle auf ihr liegenden Evoluten von (M) (S. 43).

Aus den bekannten Beziehungen zwischen Evoluten und Evolventen folgt hieraus sofort:

Die rektifizierende Fläche einer Kurve ist die Fläche der Evoluten aller ihrer Filarevolventen und

Die Gratlinie der rektifizierenden Fläche ist der Ort der Mittelpunkte der Schmiegunskugeln aller Filarevolventen der Kurve.

Auch diese Sätze geben nur eine andere Ausdrucksweise für einen schon früher eingehend untersuchten Sachverhalt. (Vgl. S. 34, 43, 44.)

3. Sphärisches Bild der rektifizierenden Geraden.

Das sphärische Bild r einer rektifizierenden Geraden liegt in den Bildkreisen benachbarter rektifizierender Ebenen $bt, b't'$, ist also der Schnittpunkt dieser größten Kreise (Fig. 7 c, 7 d, S. 24).

Das Tangentenbild der rektifizierenden Geraden ist die Hüllkurve (r) der Großkreise, die durch entsprechende Bilder der Tangenten und Binormalen bestimmt sind.

Solange eine Orientierung der Geraden nicht vorgenommen wird, besteht das Bild (r) aus zwei kongruenten, bezüglich des Kugelmittelpunktes symmetrisch liegenden Kurven.

Da nun $rt = rt'$ wird (denn rt steht senkrecht auf tt'), und ebenso $rb = rb'$, so sind die Bilder der Tangenten und Binormalen sphärische Evoluten der Kurve (r). Wenn nämlich über die Kugel ein Faden straff gespannt ist, der auf der Kurve (r) aufgewickelt ist, so wird bei seiner Abwicklung einer seiner Punkte die Kurve (t) beschreiben.

Das Tangentenbild der Gratlinie der rektifizierenden Fläche ist die gemeinsame sphärische Evolute des Tangentenbildes und des Binormalenbildes der ursprünglichen Kurve. (Vgl. S. 29.)

Dieser Sachverhalt läßt noch eine andere Auffassung zu, wenn man die Kurve (R), die von den rektifizierenden Geraden eingehüllt ist, als Ausgangskurve ansieht. Ihre Tangentenfläche ist rektifizierende Fläche für alle ihre Geodätischen, und jede von ihnen kann mit der Kurve (R) in die Beziehung des vorigen Satzes gebracht werden:

Die Tangenten- und Binormalenbilder aller Geodätischen einer abwickelbaren Fläche sind sphärische Evolventen des Tangentenbildes der Gratlinie.

Mit Hilfe des sphärischen Bildes war schon früher (S. 30) der Winkel H der Tangenten mit der rektifizierenden Geraden erhalten:

$$\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\rho}$$

Die a. a. O. festgesetzte Orientierung war so gewählt, daß der Winkel zwischen Tangente und rektifizierender Geraden kleiner als π ist. Sie soll auch hier beibehalten werden, so daß also

$$\sin H = \frac{r}{\rho}, \quad \cos H = -\frac{r}{\rho}$$

zu setzen ist.

4. Winkel zwischen Tangente und rektifizierender Geraden. Man kann den Winkel H folgendermaßen auch direkt finden.

Es seien MT , $M'T'$ (Fig. 25) zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Kurve (M) und $M'D$ die Schnittlinie der beiden aufeinanderfolgenden rektifizierenden Ebenen $DM'T$ und $DM'T'$, von denen die erste auf der Schmiegungeebene $TM'T$, die zweite auf der folgenden Schmiegungeebene senkrecht steht. Die Tangenten bilden miteinander den Kontingenzwinkel $d\tau$, die rektifizierenden Ebenen den Winkel dk der auf ihnen senkrecht stehenden Hauptnormalen in M und M' . Da durch die Abwicklung der rektifizierenden Fläche, bei welcher die beiden rektifizierenden Ebenen zusammenfallen, die Kurve (M) in eine Gerade übergeht, so fallen hierbei die beiden Tangenten $M'T$, $M'T'$ zusammen; die rektifizierende Gerade $M'D$ bildet daher mit beiden denselben Winkel H . Eine um M' beschriebene Einheitskugel liefert daher ein gleichschenkeliges unendlich schmales Dreieck DTT' , in dem

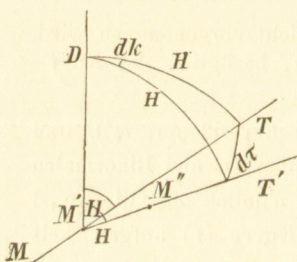


Fig. 25.

woraus

$$dk \cdot \sin H = d\tau,$$

$$\sin H = \frac{d\tau}{dk} = \frac{r}{\rho}$$

folgt, und da

$$d\tau^2 + d\sigma^2 = dk^2 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d\tau}{dk}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma}{dk}\right)^2 = 1$$

ist, so wird

$$\cos H = \frac{d\sigma}{dk} = -\frac{r}{r}$$

und

$$\operatorname{tg} H = \frac{d\tau}{d\sigma} = -\frac{r}{\rho}.$$

Das negative Vorzeichen in $\cos H$ ergibt sich aus der geometrischen Anschauung; seine Begründung sei als Übungsaufgabe empfohlen.

Wir bemerken noch besonders die Eigenschaft der rektifizierenden Geraden, daß sie mit zwei aufeinanderfolgenden Tangenten MT , $M'T'$ denselben Winkel H bildet und daß H zugleich ihr Neigungswinkel gegen die Schmiegungeebene ist, in welcher diese beiden Tangenten liegen.

5. Übungen. 1. Ist $H = \alpha$ konstant, so müssen die rektifizierenden Geraden parallel sein, denn bei der Abwicklung der rektifizierenden Fläche geht die Kurve in eine gerade Linie über, während die rektifizierenden Geraden sie isogonal schneiden; d. h. die rektifizierenden Geraden sind in ein Parallelbüschel verwandelt worden; sie mußten also auch vorher schon parallel sein; die Kurve ist demnach eine geodätische Linie eines Zylinders.

Die allgemeinen Schraubenlinien sind durch die natürliche Gleichung

$$\frac{r}{\rho} = -k$$

charakterisiert, wobei die Konstante k die Tangente des Neigungswinkels der Kurve gegen die erzeugenden Geraden des Zylinders bedeutet, auf dem die Schraubenlinie geodätisch liegt.

2. Geodätische Linie eines Kegels. Ist die Kurve (M) eine geodätische Linie auf einem Kegel, so geht sie bei der Abwicklung des Kegels in eine Gerade (\mathfrak{M}) über, die Erzeugenden in einen Strahlenbüschel $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{M}'$, ... Der Abstand des Punktes \mathfrak{S} von (\mathfrak{M}) sei l und die Bogenlänge der Geodätischen (M) von dem Punkte M_0 aus gerechnet, der der Kegelspitze S am nächsten liegt.

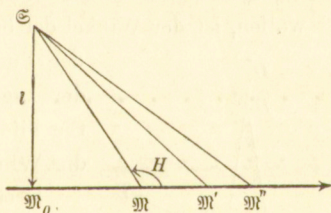


Fig. 26.

Dieser Punkt geht bei der Abwicklung in den Fußpunkt M_0 des Lotes von \mathfrak{S} auf (\mathfrak{M}) über. Dann ist die Bogenlänge

$$\mathfrak{M}M_0 = s;$$

ferner ergibt sich aus der Figur

$$\operatorname{tg} H = -\frac{l}{s};$$

Die oben abgeleitete Relation ergibt den Satz:

Die natürliche Gleichung einer geodätischen Linie auf einem beliebigen Kegel lautet

$$\frac{r}{\rho} = \frac{l}{s}.$$

Dabei ist die Bogenlänge vom Scheitel der Kurve aus gemessen, d. h. von dem Punkte M_0 , der von der Spitze des Kegels das Minimum des Abstands hat.¹⁾

Läßt man den Mittelpunkt O der Bildkugel mit der Spitze S des Kegels zusammenfallen, so erhält man das Bild einer rektifizierenden Geraden dadurch, daß man diese bis zum Schnitt mit der Kugel verlängert.

Das Bild der rektifizierenden Geraden einer Kegelgeodätischen ist also die Schnittkurve des Kegels mit einer konzentrischen Kugel vom Radius Eins.

3. Das Bild der rektifizierenden Geraden der Geodätischen des Rotationskegels ist ein Kreis; ihr Tangentenbild also die Evolvente des Kreises (d. h. eine sphärische Schraubenlinie.)

4. Die Geodätischen eines beliebigen Kegels zweiter Ordnung haben als Tangentenbild die Evolventen sphärischer Kegelschnitte. Nun kann man für jeden Kegel durch endliche Gleichungen (ohne Integrationen) die Geodätische finden, die ein gegebenes Tangentenbild besitzt.²⁾ Das Problem der Bestimmung der Geodätischen auf einem Kegel zweiter Ordnung ist also der Rektifikation der sphärischen Kegelschnitte analytisch äquivalent.

6. Krümmungswinkel der Gratlinie. Der Winkel zweier aufeinanderfolgender rektifizierender Geraden, d. h. der Kontingenzwinkel $d\tau_3$ der Gratlinie der rektifizierenden Fläche, die wir kurz die rektifizierende Gratlinie oder rektifizierende Kurve nennen wollen, ist der Winkel der beiden rektifizierenden Geraden $M'D$, $M'D'$

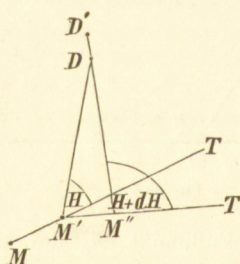


Fig. 27.

der Punkte M und M' . Ihr Schnittpunkt D ist der zugehörige Punkt der rektifizierenden Kurve. Sie bilden mit den Tangenten der Punkte M , M' die Winkel $DM'T = H$ und $DM''T' = H + dH$.

Dreht man die rektifizierende Ebene $DM'M''T'$ um die rektifizierende Gerade DM' soweit, bis sie in die rektifizierende Ebene $DM'T$ fällt, so fällt die Tangente $M'T'$ in die Tangente MT , weil bei der Abwicklung der rektifizierenden Fläche

alle Tangenten der Kurve zusammenfallen. Hieraus folgt, daß Winkel $DM'M''T' = DM'T = H$ ist. (Vgl. auch oben Nr. 4.) Aus dem Dreieck $DM'M''$ ergibt sich daher weiter

1) Enneper, Götting. Nachr. 1866, S. 134—140.

2) Vgl. Math. Ann. 67, 454—456.

$$\sphericalangle M'DM'' = DM''T' - DM'T'$$

oder $d\tau_3 = |dH|$. Man kann übrigens das Vorzeichen von

$$dH = -\frac{r}{\rho} d\left(\frac{r}{\rho}\right)$$

beliebig festsetzen, wenn noch die Fortschreitungsrichtung auf der Kurve (M) freigestellt ist, und daher in diesem Falle $dH > 0$ wählen.

Dies sei von jetzt ab in dem vorliegenden Kapitel stets vorausgesetzt. Nur dann wäre die Annahme nicht statthaft, wenn $dH = 0$ ist, also für Schraubenlinien. In diesem Falle aber degeneriert die Gratlinie der rektifizierenden Fläche in einen unendlich fernen Punkt, und alle folgenden Entwicklungen werden illusorisch. Daß die hier festgesetzte Fortschreitungsrichtung auf (M) im allgemeinen nicht mit der im vorigen Kapitel festgesetzten übereinstimmen wird, ist ohne Nachteil für das folgende.

Der Kontingenzwinkel der rektifizierenden Gratlinie ist gleich dem Differential des Winkels, welchen die rektifizierende Gerade mit der Tangente bildet.

Hierzu kommt noch zufolge der Nr. 1:

Der Schmiegunswinkel $d\sigma_3$ der rektifizierenden Gratlinie ist dem absoluten Betrage nach gleich dem Winkel der ganzen Krümmung der Kurve, nämlich $|d\sigma_3| = dk$. Für den Winkel der ganzen Krümmung der rektifizierenden Gratlinie hat man daher $dk_3^2 = dk^2 + dH^2$

Das Vorzeichen des Schmiegunswinkels soll erst später (Nr. 9) festgestellt werden.

7. Abstand der rektifizierenden Gratlinie von der Kurve. Setzt man $M'D = L$ und fällt von M' auf $M''D'$ das Lot $M'\mu$, so wird $M'\mu = LdH = M'M'' \sin(H + dH)$ oder also wegen $M'M'' = ds$ auch $LdH = ds \sin H$ und folglich:

$$L = \frac{ds}{dH} \sin H = \frac{r}{\rho} \frac{ds}{dH}$$

L kann dabei unter denselben Voraussetzungen wie dH als positiv angesehen werden.

Die eben hergeleitete Formel läßt eine einfache Deutung zu. Beschreibt man in der rektifizierenden Ebene um $M'M''D$ einen Kreis, so ist er in der Grenze ein Kreis, welcher die Tangente in M berührt und den Winkel dH als Peripherie-

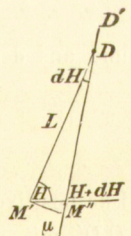


Fig. 28.

winkel faßt. Sein Mittelpunkt liegt in der Binormalen und sein Durchmesser P folgt aus $PdH = ds$, nämlich $P = \frac{ds}{dH}$. Hiermit wird

$$L = P \sin H = \frac{r}{\rho} P.$$

Es ist daher L die Projektion von P auf die rektifizierende Gerade.

Errichtet man in M' auf $M'D$ ein Lot $M'Q$ (Fig. 29), das den genannten Kreis in Q schneidet, so wird $M'Q$ oder in der Grenze $MQ = P \cos H$. Dieser Punkt Q des Kreises hat eine besondere Bedeutung. Die Ebene der ganzen Krümmung in M steht senkrecht auf der rektifizierenden Geraden $M'D$, die Ebene der ganzen Krümmung in M' senkrecht auf $M''D'$. Beide Ebenen schneiden die rektifizierende Ebene von M in den Geraden $M'Q$, $M''Q$ und einander in einer auf der rektifizierenden Ebene in Q senkrecht stehenden

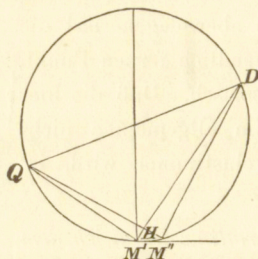


Fig. 29.

Geraden. Die Ebene der ganzen Krümmung erzeugt eine abwickelbare Fläche, deren Erzeugende durch die Punkte Q gehen und den Hauptnormalen der Kurve im Abstände $-P \cos H = \frac{r}{r} P$ parallel laufen.

8. Bogenelement der rektifizierenden Gratlinie. Aus Fig. 28 ergibt sich das Bogenelement der Gratlinie in folgender Weise. Es ist

$$DD' = |M''D' - M''D| = |M''D' - (\mu D - \mu M'')|.$$

Also, da:

$$\mu D = MD = L, \quad M''D' = L + dL$$

und aus dem Dreieck $M''\mu M'$

$$\mu M'' = M'M'' \cos H = dx \cos H:$$

$$ds_3 = \pm (dL + ds \cos H).$$

Das positive oder negative Vorzeichen gilt, je nachdem die Richtung DD' mit der Richtung von L zusammenfällt oder ihr entgegengesetzt ist.

Einen anderen Ausdruck für dies Bogenelement erhält man durch folgende Betrachtung. Vom Punkte D fallen wir auf die Tangente

in M das Lot $DQ = p = L \sin H$; ebenso von D' auf die Tangente in M' das Lot $D'Q' = p + dp$; ein drittes Lot Dq' von D auf die Tangente in M' wird gleich $DQ = p$ wegen der Kongruenz der Dreiecke $DM'Q$ und $DM'q'$, welche beide bei M' den Winkel H enthalten. Zieht man nun noch DV parallel mit $q'Q'$, so erhält man im rechtwinkligen Dreieck DVD' :

$$DD' \sin(H + dH) = D'V$$

und folglich, wegen

$$D'V = D'Q' - Dq' = D'Q' - DQ = dp$$

und $p = L \sin H$

$$ds_3 = \pm \frac{dp}{\sin H} = \pm \frac{d(L \sin H)}{\sin H}.$$

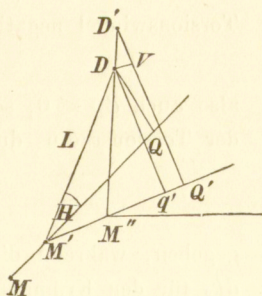
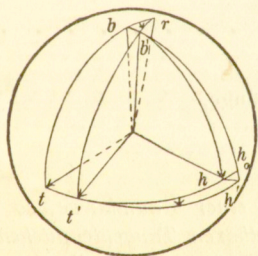


Fig. 30.

9. Sphärisches Bild und Krümmungen der Gratlinie.

Die Tangente DD' der Gratlinie (D) fällt mit der entsprechenden rektifizierenden Geraden MD zusammen; sind die Richtungen DD' und MD dieselben, so fallen auch ihre sphärischen Bilder zusammen, sind die Richtungen entgegengesetzt, so liegt das Bild d der Tangente dem Bilde r der rektifizierenden Geraden diametral gegenüber. Immer aber ist, da $dH > 0$ vorausgesetzt wurde, das Binormalenbild von (D) die Gegenkurve des Hauptnormalenbildes von (M), während das Hauptnormalenbild von (D) auf dem Kreise (rr') um $\frac{1}{2}\pi$ von d entfernt liegt.

Die Drehung, die das Bild trb der rektifizierenden Ebene des Punktes M in das Bild der Nachbarlage überführt, ist (vgl. Fig. 31 a, b)



a.
 $d\sigma > 0.$

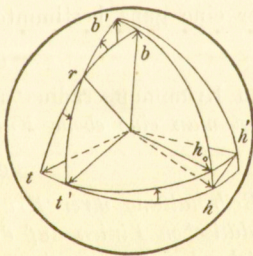


Fig. 31.

b.
 $d\sigma < 0.$

um den Punkt r herum immer negativ, also um seinen Gegenpunkt positiv. Nun gibt aber dieser Drehungssinn der Schmiegungeebene der rektifizierenden Gratlinie das Vorzeichen des Torsionswinkels $d\sigma_3$ an.

Ist also (r) das Tangentenbild der Kurve (D), d. h. (vgl. vorige Nummer) ist $dL + ds \cos H > 0$ oder auch $dp > 0$, so ist der Torsionswinkel negativ, demnach $d\sigma_3 = -dk$. Ist dagegen

$$dL + d \cos H < 0,$$

also auch $dp < 0$, so wird $d\sigma_3 = +dk$. In allen Fällen aber ist der Torsionsradius durch die Formel

$$r_3 = \frac{-1}{\sin H} \frac{dp}{dk}$$

gegeben, während die früher entwickelten Ausdrücke für ds_3 , $d\tau_3$, dk_3 für den Krümmungsradius

$$\varrho_3 = \frac{\pm 1}{\sin H} \left| \frac{dp}{dH} \right|$$

und für den Radius der ganzen Krümmung

$$r_3 = \frac{1}{\sin H} \frac{|dp|}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}$$

ergeben.

10. Übungen. Da H , p , L alles Größen sind, die nur von dem Verhältnis $\frac{r}{\varrho}$ abhängen, so entspricht einer Raumkurve aus der Kurvenklasse

$$\frac{r}{\varrho} = f(s)$$

eine Gratlinie der rektifizierenden Fläche, für die

$$ds_3 = \varphi(s) ds$$

und

$$\varrho_3 = \psi(s) ds$$

ist, oder eine ganz bestimmte Relation

$$\varrho_3 = F(s_3)$$

zwischen Krümmungsradius und Bogenlänge.

Biegt man eine ebene Kurve

$$\varrho_3 = F(s_3)$$

unter Beibehaltung ihrer Krümmung zu einer Raumkurve, so bilden die geodätischen Linien auf den abwickelbaren Tangentenflächen aller so entstehenden Kurven eine natürliche Kurvenklasse, die durch eine Gleichung der Form

$$\frac{r}{\varrho} = f(s)$$

gekennzeichnet ist.¹⁾

1) Pirondini, J. f. Math. 109, 238—260.

Die Grenzfälle, die geodätischen Linien auf Zylinderflächen

$$\frac{r}{\varrho} = \text{konst.}$$

und die geodätischen Linien auf Kegelflächen

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{s}{l}$$

sind schon an früheren Stellen als Beispiele herangezogen worden. Die dabei direkt gefundenen Ergebnisse lassen sich jetzt als unmittelbare Folgerungen der allgemeinen Theorie ablesen.

Ist $f(s)$ allgemein gegeben, so bietet die Aufstellung der Beziehung $\varrho_3 = F(s_3)$ keine geometrisch bemerkenswerten Ergebnisse. Die einfache Rechnung, die aus unseren Gleichungen die Schlußformeln leicht angeben läßt, sei indessen der Vollständigkeit halber durchgeführt.

Aus

$$\frac{r}{\varrho} = f(s)$$

folgt

$$\text{tg } H = -f(s), \quad \frac{dH}{\cos^2 H} = -f'(s) ds.$$

Ferner ist (Nr. 7)

$$ds = \frac{L dH}{\sin H},$$

also

$$f'(s) \frac{L}{\sin H} = -\frac{1}{\cos^2 H}; \quad L = -\frac{\text{tg } H}{f'(s)} \sqrt{1 + \text{tg}^2 H},$$

oder endlich

$$L = \frac{f(s)}{f'(s)} \sqrt{1 + f'^2(s)},$$

also

$$p = L \sin H = \frac{f^2(s)}{f'(s)}.$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar die nicht sehr einfachen Ausdrücke für ϱ_3 und ds_3 .

Eine allgemeine Aufgabe ähnlicher Natur ist die folgende: die Kurven zu finden, für welche zwischen dem Krümmungs- und Schmiegunghalbmesser ϱ , r eine gegebene Relation $f(\varrho, r) = 0$ besteht. Da ϱ und r jedenfalls als Funktionen des Bogens der Kurve gedacht werden können, so kann, weil zwischen ihnen nur eine Bedingung besteht, eine von ihnen willkürlich angenommen werden, z. B. $r = \varphi(s)$; die andere $\varrho = \psi(s)$ ergibt sich alsdann aus dieser Relation. Man hat alsdann

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$$

und mithin

$$\operatorname{tg} H = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}.$$

Es kann L als Funktion von s nach der oben entwickelten Methode bestimmt werden. Diese und ähnliche Aufgaben sind analytisch mehrfach behandelt worden.¹⁾

VIII. Kapitel.

Windschiefe Regelflächen.

Bisher war die Untersuchung grundsätzlich auf die ursprüngliche Raumkurve und die mit ihr verknüpften abwickelbaren Flächen beschränkt. Um auch die zu einer Kurve gehörigen windschiefen Flächen genauer kennen zu lernen, sind noch die wichtigsten Eigenschaften der nicht abwickelbaren geradlinigen Flächen (Regelflächen) vorweg zusammenzustellen. Wir werden die Geraden auch hier, wie es ja in der Theorie der Raumkurven geschehen ist, als gerichtet voraussetzen können.

1. Mittelpunkt; Striktionslinie. Eine geradlinige Fläche entsteht durch die stetige Bewegung einer Geraden im Raume. Zwei benachbarte Erzeugende g, g' (s. Fig. 32) sind im allgemeinen windschief und werden, wenn sie nicht parallel sind, von einem und nur einem Strahl, dem Striktionsstrahl s , gleichzeitig senkrecht geschnitten. Die Gesamtheit der Striktionsstrahlen bildet das Striktionsband; dieses besteht aus einer einzigen Geraden s , wenn g, g', \dots alle dieselbe Gerade s senkrecht schneiden, also dem Normalennetz von s angehören. In jedem anderen Falle ist das Striktionsband wieder eine Linienfläche.

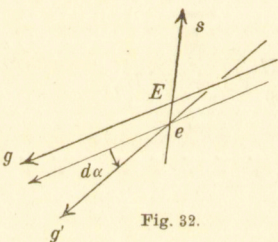


Fig. 32.

Der Fußpunkt E des Striktionsstrahls s von g heißt der Mittelpunkt von g . Der Strahl s schneidet die Nachbarerzeugende g'

1) Molins, De la détermination, sous forme intégrale, des équations des courbes dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque. Journ. de Math. (2) 19, 425—451; Darboux, Théorie des surfaces Bd. 1; Lie, Bestimmung aller Raumkurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind. Christiania Videnskab-Selskabets Forhandl. 1882, Nr. 10. Salkowski, Sitzungsber. d. Berlin. Math. Ges. 4, 64 bis 69, 1905.

in einem Punkte e . Der Striktionsstrahl s' , der g' und g'' senkrecht schneidet, besitze auf diesen Geraden die Fußpunkte E' und e' , usw. Die Striktionsstrahlen schneiden also die Erzeugenden in den Punkten E, E', E'', \dots einer Kurve (E) [oder eigentlich in den Punkten zweier unendlich benachbarter Kurven (E) und (e)], die als Striktionslinie bezeichnet wird.

Die Fläche der Striktionsstrahlen ist abwickelbar, wenn alle Striktionsstrahlen parallel sind. Dies tritt ein, wenn alle Geraden der gegebenen Fläche (g) einer festen Ebene, der Richtebene, parallel sind. In diesem Falle ist das Striktionsband ein Zylinder, der auf dieser Ebene senkrecht steht. Die Striktionsstrahlenfläche ist aber auch dann abwickelbar, wenn je zwei benachbarte Striktionsstrahlen s und s' sich schneiden, d. h. wenn E' und e zusammenfällt. In diesem Falle sind die Strahlen s die Tangenten der Striktionslinie, und alle Erzeugende der Fläche (g) schneiden sie senkrecht. Da jetzt die Gerade g' auf EE' , aber auch auf dem benachbarten Striktionsstrahl $E'E''$ senkrecht steht, also auf zwei benachbarten Tangenten, so ist sie die Binormale der Kurve (E). Umgekehrt werden die Binormalen einer beliebigen Raumkurve (M) von den Tangenten der Kurve senkrecht geschnitten, d. h. diese sind die Striktionsstrahlen der Binormalenfläche.

Die Binormalenflächen der Raumkurven sind die einzigen Linienflächen, für die das Striktionsband eine nicht zylindrische abwickelbare Fläche bildet und zugleich die einzigen, bei denen die nicht geradlinige Striktionslinie die Erzeugenden senkrecht schneidet.

Daß Flächen, deren Erzeugende eine feste Gerade senkrecht schneiden, diese Gerade als Striktionslinie besitzen, war schon vorher betont. Wir werden solche Flächen als Konoide bezeichnen.

Da s auf g und g' , s'' auf g' und g'' senkrecht steht, so steht auch umgekehrt g' auf s und s' senkrecht, d. h. wenn die Fläche (s) der Striktionsstrahlen überhaupt existiert und ein Striktionsband besitzt, also nicht in eine Gerade oder einen Zylinder ausartet, so ist sein Striktionsband die ursprüngliche Fläche.

Ist das Striktionsband einer Regelfläche nicht zylindrisch oder in eine Gerade ausgeartet, so ist ihr Striktionsband die ursprüngliche Fläche.

2. Sphärisches Bild. Konstruiert man zu den (orientierten) erzeugenden Geraden g einer Regelfläche (g) die parallelen und gleichgerichteten Geraden durch den Mittelpunkt O der Einheitskugel, so

schneiden diese Parallelen die Kugel in den Punkten einer Kurve (γ), die man als sphärisches Bild der Regelfläche bezeichnen kann. Der Winkel $d\alpha$ zweier benachbarter Erzeugender g, g' ist gleich dem Winkel $\gamma O \gamma'$ der entsprechenden Parallelen oder gleich dem Bogenelement $\gamma \gamma'$ der Bildkurve γ . Dieser Winkel sei stets absolut genommen. Der Striktionsstrahl s der Geraden g, g' steht auf beiden senkrecht; sein Bild ist also von γ und γ' um $\frac{1}{2}\pi$ entfernt, ist also der eine Pol des größten Kreises, der durch $\gamma \gamma'$ bestimmt ist. Zur Erzielung der Eindeutigkeit sei er so orientiert, daß sein Bild σ auf der linken Seite der Richtung $\gamma \gamma'$ gelegen ist (d. h. sieht man

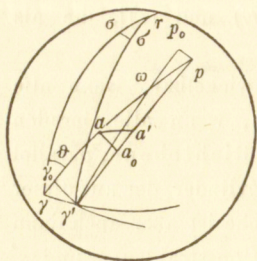


Fig. 33.

die Geraden in der Richtung des orientierten Striktionsstrahls, so geht g in g' durch eine positive Drehung über. Diese Orientierung entspricht der Orientierung der Binormalen einer Raumkurve nach Festsetzung des Fortschreitungs sinnes auf der Kurve).

Für die Regelflächen mit Richtebene reduziert sich das Bild (γ) auf einen größten Kreis und das Bild der Striktionsstrahlen auf seinen Pol; für Regelflächen, deren Erzeugende mit einer festen Ebene einen konstanten Winkel bilden, wird das Bild ein kleiner Kugelkreis, und das Bild des Striktionsbandes ebenfalls ein kleiner Kreis, d. h. auch das Striktionsband besteht aus Geraden, die mit derselben festen Ebene einen konstanten Winkel bilden.

3. Verteilungsparameter. Man bezeichne mit dp den unendlich kleinen Abstand Ee der Erzeugenden g, g' , mit $d\alpha$ wie vorher den unendlich kleinen Winkel, unter dem sie sich kreuzen. Dabei ist $d\alpha$ nach den Festsetzungen der vorigen Nummer absolut zu nehmen, dagegen dp positiv oder negativ, je nachdem die Richtung Ee mit der positiven Richtung des Striktionsstrahls übereinstimmt oder nicht.

3. Verteilungsparameter. Man bezeichne mit dp den unendlich kleinen Abstand Ee der Erzeugenden g, g' , mit $d\alpha$ wie vorher den unendlich kleinen Winkel, unter dem sie sich kreuzen. Dabei ist $d\alpha$ nach den Festsetzungen der vorigen Nummer absolut zu nehmen, dagegen dp positiv oder negativ, je nachdem die Richtung Ee mit der positiven Richtung des Striktionsstrahls übereinstimmt oder nicht.

Die Tangentenebene in einem Punkte A einer Fläche¹⁾ ist durch zwei von P ausgehende Richtungen bestimmt. Für eine geradlinige Fläche geht die Tangentenebene eines Punktes jedenfalls immer durch die Erzeugende der Fläche, die den Punkt enthält. Die Tangentenebenen einer windschiefen Fläche in den verschiedenen

1) Es werden nur solche Flächen betrachtet, die in jedem (regulären) Punkte eine Tangentialebene besitzen.

Punkten A einer Erzeugenden g bilden daher immer einen Ebenenbüschel, dessen Achse g ist.

Die Berührungsebene im Mittelpunkte E heißt die Mittelebene der Erzeugenden, sie ist durch die Gerade g und den Striktionsstrahl bestimmt. Die Berührungsebene des Punktes A im Abstände $EA = x$

vom Mittelpunkte bilde mit der Mittelebene den Winkel ϑ (d. h. man hat die Mittelebene um den Strahl g in positiver Richtung um ϑ zu drehen, damit sie mit der Berührungsebene von A zur Deckung kommt, $-\frac{1}{2}\pi \leq \vartheta$

$\leq \frac{1}{2}\pi$). Man ziehe durch E die Parallele g_0 zu g' und errichte in A auf g die senkrechte Ebene. Diese schneidet g' in A' und g_0 in A_0 . Dann ist $A'A_0 = Ee = dp$ als Lote zwischen Parallelen, und aus dem bei A_0 rechtwinkligen Dreieck $A'A_0A$ folgt:

$$\operatorname{tg} \angle A A' A_0 = \frac{A A_0}{A' A_0}$$

und, da $A'A_0 = |x d\alpha|$ wird und der Winkel $\angle A A' A_0 = \vartheta$, bzw. $\pi - \vartheta$, so erhält man immer, auch im Vorzeichen genau:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{x d\alpha}{dp},$$

also, wenn man $dp : d\alpha = k$ setzt, $\operatorname{tg} \vartheta = x : k$. Die Konstante k heißt der Parameter der Erzeugenden g (Verteilungsparameter der Tangentenebenen längs g).

Dreht sich eine bewegliche Ebene um g als Achse, so ist sie in jeder Lage Tangentenebene in einem Punkte, dessen Abstand vom Mittelpunkte $x = k \operatorname{tg} \vartheta$ ist.

Für $\vartheta = 0$ ist sie die Mittelebene, für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ wird $x = \infty$, d. h. die Tangentenebene im unendlich fernen Punkte von g steht senkrecht auf der Mittelebene. Sie heißt die Asymptotenebene von g .

Bei einem vollen Umschwung der Ebene läuft A von E über die ganze Gerade g und kehrt, durch das Unendliche hindurchgehend, nach ihrem Zentralpunkt E zurück. Diesseits und jenseits des Zentralpunktes in gleichem Abstände des Berührungspunktes A von diesem haben die Tangentenebenen entgegengesetzt gleiche Nei-

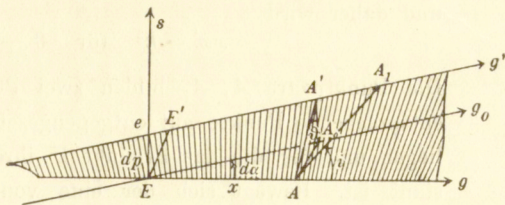


Fig. 31.

gung gegen die Zentralebene. Zu jedem Abstände $EA = x$ gibt es jenseits E einen entgegengesetzten $-x' = -EA_1$, so daß die Tangentenebenen beider Punkte A und A_1 senkrecht zueinander sind. Denn es genügen x und x' den Gleichungen

$$x = k \operatorname{tg} \vartheta, \quad x' = k \operatorname{tg} \vartheta'$$

und daher wird

$$-xx' = k^2 \quad \text{für} \quad \vartheta - \vartheta' = \pm \frac{1}{2}\pi.$$

Die Punktpaare A, A_1 bilden zwei Punktreihen auf g , bei denen entsprechende Punkte auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen und für die das Produkt k^2 ihrer Abstände von diesem konstant ist. Bewegt sich der eine von ihnen auf g in einem bestimmten Sinne, so folgt ihm der andere in demselben Sinne. Die beiden Punktreihen sind gleichliegende involutorische Reihen. Ihre ideellen Doppelpunkte liegen vom Mittelpunkte in dem Abstände k .

Hieraus ergibt sich beiläufig eine neue geometrische Deutung des Schmiegungradius einer Raumkurve (M). Ihre Binormalen sind die Erzeugenden einer Linienfläche, deren Striktionslinie die Kurve selbst ist und für die ihr Bogenelement $MM' = ds$ den kürzesten Abstand benachbarter Geraden darstellt (S. 75). Zwei solche benachbarte Binormalen bilden aber miteinander den Schmiegunswinkel $d\sigma$ der Schmiegungebenen, auf denen sie senkrecht stehen. Daher ist der Parameter k der windschiefen Fläche der Binormalen

$$k = \frac{dp}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} = r, \quad \text{d. h. :}$$

Der Schmiegunghalbmesser r einer Raumkurve ist der Parameter der Fläche der Binormalen.

4. Bogenelement einer Flächenkurve. Ist (Fig. 34) AA_1 das Bogenelement dS einer Kurve, die die Erzeugende g unter dem Winkel i schneidet, so folgt aus dem bei A' rechtwinkligen Dreieck AA_1A' :

$$AA' = dS \sin i,$$

und da in dem bei A_0 rechtwinkligen Dreieck AA_0A' :

$$|dp| = |AA' \cos \vartheta|$$

ist, so ergibt sich

$$dS = \left| \frac{dp}{\sin i \cos \vartheta} \right|.$$

Ferner wird $\operatorname{ctg} i = \frac{A_1A'}{A'A}$, oder, wenn man den Abstand eE' zweier benachbarter Striktionsstrahlen mit dq bezeichnet,

$$\operatorname{ctg} i = \frac{dx + dq}{dp} \cos \vartheta.$$

5. Orthogonaltrajektorien. Es seien PP' , QQ' die Linien-elemente zweier Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden g, g', \dots einer Regelfläche. Dann ist, da $QQ' \perp PQ$ ist, QQ' das Bogenelement eines Kreises vom Mittelpunkte P , also $PQ' = PQ$.

Ebenso ist $P'Q$ das Bogenelement eines Kreises, dessen Mittelpunkt Q' ist, also $Q'P = P'Q'$; aus beiden Gleichungen folgt:

$$PQ = P'Q',$$

d. h.

Zwei Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer Linienfläche schneiden auf allen Erzeugenden dieselbe Strecke ab.

Dies folgt auch aus den Formeln der vorigen Nummer. Für zwei Orthogonaltrajektorien (x_1) , (x_2) wird $\text{ctg } i = 0$, also

$$dx_1 + dq = dx_2 + dq = 0;$$

d. h. $x_1 - x_2 = \text{konst.}$

6. Windung einer geradlinigen Fläche. Die Mittelebene einer Geraden g war die Berührungsebene im Mittelpunkte E ; die abwickelbare Hüllfläche der Mittelebenen berührt also die windschiefe Fläche längs der Striktionslinie, und ihre Erzeugenden gehen durch die Punkte E, \dots , d. h. die Striktionslinie liegt selbst auf dieser Fläche, die als Mittelfläche der windschiefen Fläche bezeichnet sei. Das sphärische Bild der Mittelebene von g ist der größte Kreis $\gamma\sigma'$, von g' der Kreis $\gamma'\sigma'$, also ist das Bild der Erzeugenden der Mittelfläche der Schnittpunkt r beider Kreise, und umgekehrt sind die Bilder der Geraden g und ihrer Striktionsstrahlen zwei sphärische Evoluten der Kurve (r) (Fig. 33). Die Geraden g und ihre Striktionsstrahlen verhalten sich also zu (r) wie die Bilder der Tangenten und Binormalen einer Raumkurve zu dem Bild der rektifizierenden Geraden.

Ist die Fläche (g) eine Fläche mit Richtebene, d. h. liegen alle ihre Geraden parallel zu einer Ebene, so reduziert sich (r) auf einen Punkt, d. h. die Mittelfläche ist ein Zylinder. Die Striktionslinie einer Fläche mit Richtebene liegt auf dem Zylinder, dessen Normalschnitt der scheinbare Umriß der Fläche bei Orthogonalprojektion auf die Richtebene ist.

Ganz ähnlich wie bei den Raumkurven wird man von der Torsion einer windschiefen Regelfläche reden. Eine Raumkurve hatte

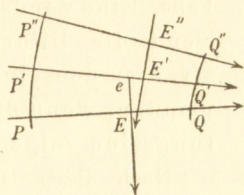


Fig. 35.

positive Torsion, wenn das Tangenten- und Binormalenbild dieselbe Fortschrittingsrichtung besaß, negative Torsion im entgegengesetzten Falle. Eine windschiefe Regelfläche heiße positiv gewunden, wenn die Bilder der Erzeugenden und der Striktionsstrahlen denselben Fortschrittingsinn zeigen, negativ gewunden, wenn diese Kurven entgegengesetzten Fortschrittingsinn zeigen.

Nach dieser Definition haben die Flächen mit Richtebene die Windung Null. Die Windung einer Fläche hat überhaupt immer dasselbe Vorzeichen wie die Drehung, die die Asymptotenebene von g in die Asymptotenebene von g' überführt. Der Windungswinkel $d\beta$ der Fläche ist bis auf das Vorzeichen gleich dem Winkel $\sigma\sigma'$ benachbarter Striktionsstrahlen.

Übung. Alle Regelflächen, die eine bestimmte abwickelbare Asymptotenfläche (d. h. Hüllfläche der Asymptotenebenen) besitzen, werden erhalten, indem man in jeder Tangentenebene der Fläche nach einem bestimmten Gesetze eine gerade Linie aufsucht, die der zugehörigen Tangente parallel ist.

7. Asymptotenlinien. Unter den Kurven auf einer Fläche gibt es gewisse ausgezeichnete Klassen, die für Regelflächen näher untersucht werden sollen; dazu gehören die Asymptotenlinien und die geodätischen Linien.¹⁾

Eine Kurve einer Fläche heißt Asymptotenlinie, wenn sie mit der Tangentialebene der Fläche eine Berührung von mindestens zweiter Ordnung besitzt. Demnach ist jede Gerade, die einer Fläche angehört, eine Asymptotenlinie. Für jede nicht gerade Asymptotenlinie muß die Schmiegungeebene allenthalben mit der entsprechenden Tangentenebene der Fläche zusammenfallen, oder anders ausgedrückt:

Eine krumme Linie auf einer Fläche ist Asymptotenlinie, wenn die Flächennormale mit ihrer Binormale zusammenfällt.

Die Asymptotenlinien einer Fläche brauchen nicht immer reell zu sein; daß es aber auf den windschiefen Flächen außer den Erzeugenden stets noch reelle Asymptotenlinien gibt, kann auf folgende Weise leicht dargetan werden. Durch drei aufeinanderfolgende Erzeugende der Fläche g, g', g'' ist ein einfaches Hyperboloid be-

1) Wir lassen in dieser und den beiden folgenden Nummern ausnahmsweise die Beschränkung auf Regelflächen fallen, da die Definitionen für beliebige Flächen ungeändert gültig bleiben.

stimmt; die drei Erzeugenden gehören der einen Schar von Geraden desselben an, die andere Schar wird von sämtlichen Geraden gebildet, welche diese drei schneiden. Durch jeden Punkt M der Geraden g gehen daher zwei Gerade dieses Hyperboloids, nämlich g selbst als Gerade der einen Schar und die Gerade h , welche außer g noch g' und g'' schneidet. Diese beiden Geraden haben mit der Fläche drei aufeinanderfolgende Punkte gemein, denn g fällt ganz in die Fläche und h trifft die Fläche in den drei Punkten, die sie mit dem Hyperboloid gemein hat. Diese Punkte seien M, M', μ'' . Konstruiert man in M' wiederum das Hyperboloid, dem die Erzeugenden g', g'' und eine weitere Erzeugende g''' angehören, so gibt es durch M' eine Gerade, welche g', g'', g''' in M', M'', μ''' schneidet; ebenso in M'' eine, welche die Fläche in M'', M''', μ^{IV} trifft usw. Die Punkte $M, M', M'', M''' \dots$ bilden eine Kurve, deren Tangenten die Fläche dreipunktig berühren, oder anders ausgedrückt: die Ebene durch zwei benachbarte Tangenten berührt die Fläche; die Kurve ist also eine asymptotische Linie. Durch jeden Punkt M der Erzeugenden g geht eine krumme Asymptotenlinie, da die Konstruktion, die ihre aufeinanderfolgenden Punkte ergab, im allgemeinen eindeutig ist. Die Tangenten dieser verschiedenen asymptotischen Linien schneiden g im allgemeinen unter verschiedenen Winkeln.

8. Geodätische Linien. Als geodätische Linien einer Fläche bezeichnet man außer ihren Geraden die Kurven, für die Flächennormale mit der Hauptnormale zusammenfällt. Sie sind im allgemeinen die kürzesten Linien der Fläche (S. 64). Auf jeder Fläche gehen durch einen Punkt ∞^1 Geodätische.

Für die eben definierten Kurven gilt nun der Satz:

Ist eine Kurve auf einer Fläche Asymptotenlinie oder geodätische Linie, so ist sie dasselbe auch für alle Flächen, die die erste längs der Kurve berühren.

Dies folgt, ebenso wie der schon früher bewiesene analoge Satz für Krümmungslinien, unmittelbar aus der Tatsache, daß die betr. Flächen die Tangentenebenen, also auch die Normalen in den Berührungspunkten gemeinsam haben.

9. Das sphärische Bild der Asymptotenlinien und Krümmungslinien. Unter dem sphärischen Bild eines Flächenpunktes versteht man nach Gauß den Punkt auf der Einheitskugel, dessen Radius zu der (orientierten) Normalen der Fläche parallel

und gleichgerichtet ist. Das Bild einer Flächenkurve ist demnach mit dem Bild der Regelfläche identisch, die von den Flächennormalen in den Punkten dieser Kurve gebildet wird.

Für die Asymptotenlinien fallen die Binormalen mit den Normalen der Fläche zusammen, d. h. das sphärische Bild einer Asymptotenlinie ist das Binormalenbild der Kurve. Da nun das Bogenelement des Binormalenbildes in dem Bild der Normalenebene liegt, steht es auf der entsprechenden Tangente der Kurve senkrecht, d. h.

Eine Asymptotenkurve einer Fläche und ihr sphärisches Bild haben in entsprechenden Punkten orthogonale Tangenten.

Für eine Krümmungslinie (M) ist die Normalenfläche abwickelbar und die Kurve selbst eine Filarevolvente der Gratlinie (G) dieser Normalenfläche. Das Bild von (M) ist also das Tangentenbild von (G), das Tangentenbild von (M) fällt mit dem Hauptnormalenbild von (G) zusammen. Da die Tangenten an das Tangentenbild einer Kurve parallel zu den Radien nach dem Hauptnormalenbild sind, so folgt:

Die Krümmungslinien einer Fläche und ihre sphärischen Bilder haben in entsprechenden Punkten parallele Tangenten.

Ist endlich (M) eine geodätische Linie, so stimmt ihr Bild als Flächenkurve mit ihrem Hauptnormalenbild überein; die Tangente im Punkte M und das sphärische Bild kreuzen sich aber unter dem Winkel $H - \frac{1}{2}\pi$, den die rektifizierende Gerade mit der Binormalen bildet.

10. Tangentenbild der Striktionslinie. Die Kurve, in der die Mittelfläche die Regelfläche berührt, ist die Striktionslinie E . Das sphärische Bild ε der Tangenten der Striktionslinie liegt also auf den Kreisen $\gamma\sigma$, und der Winkel, unter dem die Striktionslinie die Erzeugende schneidet, ist $i = \gamma\varepsilon$. Ist nun i konstant, so ist die Kurve (ε) ebenso wie (γ) eine sphärische Evolvente von (r), also ist (E) eine geodätische Linie auf der Mittelfläche (S. 65), und somit auch auf der Fläche (g). Ist umgekehrt (E) eine geodätische Linie auf (g) und damit auf seiner Mittelfläche, so muß (r) das Bild ihrer rektifizierenden Geraden sein, also r die sphärische Evolute von ε . Dann aber ist $i = \gamma\varepsilon$ konstant, da ja (r) auch für (γ) die Evolute ist.

Ist die Striktionslinie einer windschiefen Fläche geodätisch, so schneidet sie die Erzeugenden der Fläche unter konstantem Winkel.¹⁾

1) O. Bonnet, Journ. de l'École Polytechn. Cah. 32, S. 70. 1848.

Damit hat man folgende Erzeugungsweise dieser Flächen gewonnen: Man lege in der rektifizierenden Fläche einer Raumkurve (M) gerade Linien, die die Tangenten von (M) in den entsprechenden Kurvenpunkten unter konstantem Winkel schneiden. Auf der dadurch erzeugten Fläche ist die Kurve (M) eine geodätische Striktionslinie.

Auf der Mittelfläche einer beliebigen Regelfläche kann man immer geodätische Linien finden, deren Tangentenbild mit dem Bilde (γ) der Regelfläche zusammenfällt. Hieraus ergibt sich die Konstruktion der allgemeinsten windschiefen Fläche, die eine gegebene Kurve als Striktionslinie besitzt:

Man lege durch die Kurve eine beliebige abwickelbare Fläche, konstruiere auf ihr eine geodätische Linie (G) und lege durch jeden Punkt M der gegebenen Kurve die Parallele zu der Tangente an die geodätische Linie in dem Punkte G , der mit M auf derselben Erzeugenden der abwickelbaren Fläche liegt.

Oder: Man betrachte eine Ebene als die Tangentenfläche einer Kurve C_0 und konstruiere in ihr eine zweite Kurve (M_0). Durch die Punkte der letzteren denke man sich parallele starre Geraden gezogen, die mit den entsprechenden Tangenten von C_0 nur in den Punkten von (M) fest verbunden sind. Verbiegt man nun die Tangentenfläche von (C_0) zu einer abwickelbaren Fläche, so gehen die Parallelen in gerade Linien über, deren Fläche die Biegungskurve (M) von (M_0) als Striktionslinie besitzt.

Die abwickelbare Fläche durch (M) ist nämlich die Hüllfläche der Mittelebenen, und die Geraden haben bezüglich der Gratlinie dieser Fläche Bilder, die als das Tangentenbild einer Geodätischen der Fläche aufgefaßt werden können.

Übung. Hat eine Regelfläche, deren Geraden mit der Horizontalebene konstante Winkel bilden, eine geodätische Striktionslinie, so ist dies eine (allgemeine) Schraubenslinie (oder eine vertikale Gerade).

11. Tangentenbild einer Kurve auf einer windschiefen Fläche. Es sei (A) eine Kurve auf der Regelfläche, (a) das Bild ihrer Tangenten, dann ist der Winkel i , unter dem die Kurve die Erzeugende schneidet, durch den Bogen γa gegeben. Dabei ist $0 \leq i \leq \pi$, wenn die Kurve so orientiert ist, daß AA' (A auf g , A' auf g') die Richtung der Tangente bildet.

2. Ist (A) eine geodätische Linie, so ist die längs (A) umgeschriebene abwickelbare Fläche die rektifizierende Fläche der Kurve und daher (a) eine sphärische Evolvente von (p) .

3. Ist (A) eine Asymptotenlinie, so sind die Tangentenebenen, deren Bilder $\gamma a, \dots$ sind, die Schmiegungebenen der Kurve, d. h. (a) fällt mit (p) zusammen.

4. Ist (A) eine Krümmungslinie der Fläche (g) , so ist (A) eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden der umgeschriebenen abwickelbaren Fläche, also $ap = \pm \frac{1}{2}\pi$.

5. Ist (A) endlich der Umriß der Fläche bei Parallelprojektion (Lichtgrenze), so sind die Tangentialebenen alle dieser Richtung parallel, d. h. (p) reduziert sich auf einen Punkt, das Bild der Projektionsrichtung.

12. Der Winkel der geodätischen Krümmung. Die Berührungsebene der Fläche im Punkte A enthält von der Kurve (A) das Bogenelement AA' , also auch je eine Normale auf AA' und $A'A''$. Diese beiden Normalen bilden einen Winkel $d\nu$, den man als den Winkel der geodätischen Krümmung der Kurve (A) bezeichnet. Der Quotient $\frac{d\nu}{ds} = \gamma$ heißt dann die geodätische Krümmung der Kurve.

Das Bild l der Normalen zu AA' in der Tangentialebene liegt auf γa , von a um $\frac{1}{2}\pi$ entfernt. Das Bild l' der Normalen auf $A'A''$, die in der Tangentialebene des Punktes A liegt, ist von a' um $\frac{1}{2}\pi$ entfernt. Wenn man von a' auf al das Lot $a'a_0$ fällt, so ist $a_0l' = \frac{1}{2}\pi$, also $aa_0 = ll'$, m. a. W. der Winkel aa_0 ist der Winkel der geodätischen Krümmung. Dieser Winkel hat je nach der Richtung von aa_0 positives oder negatives Vorzeichen.

Ist $\gamma a = \gamma' a'$, d. h. (A) eine Isogonaltrajektorie der Erzeugenden, so ist $\gamma\gamma_0 = aa_0$ und da $\gamma\gamma_0 = d\alpha \sin \vartheta$, so wird

$$d\nu = d\alpha \sin \vartheta.$$

Da $d\nu$ von der Größe von i unabhängig ist, gilt der Satz:

Alle Isogonaltrajektorien der Erzeugenden einer Regelfläche haben in demselben Punkte denselben Winkel der geodätischen Krümmung.

Benutzt man den in Nr. 4 (S. 78) hergeleiteten Wert für das Bogenelement einer Kurve auf der Fläche, so ergibt sich für die geodätische Krümmung der Isogonaltrajektorie:

$$\gamma = \frac{d\alpha \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \sin i}{dp} = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \sin i}{k}.$$

Konstruiert man also in der Tangentialebene um den Punkt A einen Kreis mit dem Radius $\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{k}$, so erhält man die geodätische Krümmung für eine Isogonaltrajektorie gleich dem Lote, das den Endpunkt des in der Richtung der Kurventangente konstruierten Radius auf die erzeugende Gerade projiziert.

Betrachtet man zwei Kurven γ_1 und γ_2 , die sich rechtwinklig kreuzen, so wird $i_2 = \frac{1}{2}\pi + i_1$ und

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{k^2},$$

d. h.:

Die Summe der geodätischen Krümmungen je zweier sich in einem festen Punkte senkrecht schneidenden Isogonaltrajektorien ist konstant.

13. Geodätische Linien. Bezeichnet man mit i den Winkel, den die geodätische Linie (A) mit der Erzeugenden bildet, so ist, wenn (a) das Tangentenbild der Geodätischen bedeutet, $i = \gamma a$; da nun $aa' \perp \gamma i$ steht, so ist $\gamma_0 a = \gamma' a'$, d. h.

$$di = -d\alpha \sin \vartheta.$$

Für alle Geodätischen durch einen Punkt hat also die Änderung di des Neigungswinkels gegen die Erzeugende denselben Wert.

Außerdem gilt die Formel (Nr. 4):

$$\operatorname{ctg} i = \frac{dx + dq}{dp} \cos \vartheta.$$

Durch Multiplikation ergibt sich aus beiden Gleichungen

$$\operatorname{ctg} i di = -\frac{d\alpha \sin \vartheta \cos \vartheta (dx + dq)}{dp}$$

oder:

$$k d(\log \sin i) = -\sin \vartheta \cos \vartheta (dx + dq)$$

als Gleichung der geodätischen Linien der Fläche, in die noch $\operatorname{tg} \vartheta = x:k$ eingesetzt werden kann. Die Gleichung enthält, wie vorauszusehen war, nur Größen, die bei der Biegung ungeändert bleiben.

Übungen. 1. Für die Geodätischen auf den Binormalenflächen der Kurven konstanter Torsion ($dq = 0$, $k = \text{konst.}$) wird die Gleichung $\sin i = C \cos \vartheta$.

2. In jedem Dreieck aus geodätischen Linien auf der Binormalenfläche einer Kurve C von konstanter Torsion, dessen Grundlinie die Kurve C ist, halbiert das Lot von der Spitze die Basis und halbiert den Winkel an der Spitze.

3. Die geodätischen Linien der Regelflächen zweiter Ordnung zu bestimmen.

14. Asymptotenlinien. Ist die Kurve (A) eine Asymptotenlinie, so wird (a) die Hüllkurve der größten Kreise γa , d. h. p fällt mit A zusammen. Es wird daher (S. 84)

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} \gamma a = \operatorname{tg} \gamma p = -\frac{d\alpha \cos \vartheta}{d\vartheta + d\beta}.$$

Andererseits gilt auch hier die Beziehung (S. 78):

$$\operatorname{ctg} i = \frac{dx + dq}{dp} \cos \vartheta.$$

Hieraus folgt:

$$dp(d\vartheta + d\beta) = -d\alpha(dx + dq) \cos^2 \vartheta.$$

Oder:

$$k(d\vartheta + d\beta) = -(dx + dq) \cos^2 \vartheta.$$

Aus $\operatorname{tg} \vartheta = x : k$ folgt

$$\cos^2 \vartheta k [kdx - xdk] + k^2 d\beta = -k^2(dx + dq) \cos^2 \vartheta$$

oder:

$$\cos^2 \vartheta \cdot [2kdx - xdk - dq] = -kd\beta.$$

15. Krümmungslinien. Die Gleichungen der Krümmungslinien ergeben sich aus der Bedingung, daß $ap = \pm \frac{1}{2}\pi$ ist, also $\gamma a - \gamma p = \pm \frac{1}{2}\pi$ oder $\operatorname{tg} \gamma a = -\operatorname{ctg} \gamma p$. Nun bedeutet $\gamma a = i$ die Neigungswinkel der Krümmungslinie gegen die Erzeugende, sodaß aus den Formeln für $\operatorname{ctg} i$ (S. 78) und $\operatorname{tg} \gamma p$ (S. 84) sich als Gleichung der Krümmungslinien

$$\frac{dx + dq}{dp} = \frac{d\alpha}{d\vartheta + d\beta}$$

ergibt, in die noch der Wert von $d\vartheta$ eingesetzt werden kann:

$$(dx + dq) [\cos^2 \vartheta (kdx - xdk) + k^2 d\beta] = k^2 d\alpha dp.$$

16. Übungen. 1. Für $k = \text{konst.}$, $d\beta = dq = 0$, also für die Wendelfläche, wird

$$dx^2 \cos^2 \vartheta = k d\alpha dp.$$

Also:

$$\operatorname{ctg}^2 i = \left(\frac{dx}{dp} \cos \vartheta \right)^2 = \frac{k d\alpha dp}{dp^2} = 1.$$

Die Krümmungslinien der Wendelfläche schneiden die Erzeugenden unter dem Winkel $\pm \frac{1}{2}\pi$.

2. Man beweise, daß das Rotationshyperboloid die einzige geradlinige Fläche ist, deren eine Schar von Krümmungslinien eben und in parallelen Ebenen gelegen sind.

3. Die Krümmungslinien der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung zu bestimmen.

4. Für windschiefe Flächen mit geodätischer Striktionslinie ist

$$d\alpha = dt \sin(H + i); \quad dt \cos H = -d\sigma, \quad dt \sin H = d\tau,$$

also:

$$d\alpha = d\tau \cos i - d\sigma \sin i.$$

Ferner ist $ds \sin i = |dp|$, damit wird die natürliche Gleichung der Striktionslinie einer solchen Fläche:

$$\frac{\cos i}{\rho} - \frac{\sin i}{r} = \frac{1}{k}.$$

Spezialisierung für Flächen mit konstantem Parameter.

17. Verbiegung von windschiefen Flächen. Man denke sich die Fläche aus ∞^1 windschiefen Streifen znsammengesetzt, die von zwei benachbarten Erzeugenden begrenzt sind. Jeder dieser Streifen sei als starr vorausgesetzt und eine Deformation der Fläche nur soweit gestattet, daß sich die Streifen um die begrenzenden Erzeugenden gegeneinander drehen können. Auf diese Weise realisiert man eine Verbiegung der Fläche, bei der die Geraden geradlinig bleiben, und nur derartige Biegungen sollen betrachtet werden.

Der Flächenstreifen, der von g und g' begrenzt wird, ist durch den Winkel der Erzeugenden $d\alpha$ und den kürzesten Abstand $Ee = dp$ bestimmt. Diese Größen bleiben daher bei jeder Verbiegung ungeändert. Da die Lage des Mittelpunkts eines Strahls ebenfalls nur von dem Streifen abhängig ist, den er bestimmt, muß bei jeder Verbiegung der Mittelpunkt eines Strahls erhalten bleiben, d. h. bei einer Biegung geht die Striktionslinie der Regelfläche in die Striktionslinie der verbogenen Fläche über.

Nun ist die Lage der Striktionslinie durch den Abstand $eE' = dq$ zweier Striktionsstrahlen bestimmt oder auch durch den Winkel eEE' , den die Striktionslinie mit dem Striktionsstrahl bildet.

Zwei windschiefe Flächen sind aufeinander abwickelbar, wenn die Striktionslinien einander entsprechen, die Erzeugenden mit den Striktionslinien in entsprechenden Punkten gleiche Winkel bilden und die Parameter der Flächen in entsprechenden Punkten gleich sind.

Anmerkung. Sind die Parameter gleich, bilden aber die Striktionslinien verschiedene Winkel gegen die Erzeugenden, so fallen bei der oben ausgeführten Biegung im Nachbarstreifen die Mittelpunkte beider Streifen nicht aufeinander. Erst wenn man nach der Biegung noch eine Verschiebung längs der Erzeugenden vornimmt, kommen auch die Nachbarstreifen zur Deckung. Zwei solche Regelflächen können also derart gegeneinander bewegt werden, daß sie in jedem Augenblick sich

längs eines Flächenstreifens berühren, wobei beim Übergang von jedem Flächenstreifen zum nächsten eine Drehung um die zugehörige Erzeugende sich mit einem Gleiten längs derselben Geraden kombinieren läßt. Man bezeichnet diese Bewegung als Abschroten. Zwei Regelflächen können aufeinander schroten, wenn sie in entsprechenden Erzeugenden denselben Verteilungsparameter besitzen.

Bei einer Biegung einer Fläche bleibt eine geodätische Linie immer geodätisch, eine Asymptotenlinie dagegen verliert diese Eigenschaft.

Der Satz, der allgemein gilt, sei nur für den hier allein interessierenden Fall der Biegung von Regelflächen in Regelflächen behandelt. Ist die Kurve (M) eine geodätische Linie, so ist die Berührungsebene im Punkte M die Ebene durch MM' und die Erzeugende g' des Punktes (M'), die Tangentialebene in M' enthält $M'M''$ und die Erzeugende g' durch M'' . Diese letztere Ebene ist aber der Ebene durch $M'M''$ und g' unendlich benachbart, sodaß der Schnitt beider Tangentialebenen, also die rektifizierende Gerade der Kurve, die durch den Punkt M' geht, eine Gerade ist, die mit g' einen unendlich kleinen Winkel bildet; eine Rotation um g' führt den Punkt M'' in einen Punkt über, der von demjenigen Punkte, in den M' bei einer gleichartigen Rotation um r' übergeführt wird, um infinitesimale Größen 3. Ordnung entfernt ist. Bei der Drehung der rektifizierenden Ebene um die rektifizierende Gerade geht die gedrehte Ebene in die rektifizierende Ebene der Biegungskurve über. Die rektifizierende Ebene der verbogenen Kurve und die Tangentialebene der Biegungsfläche stimmen also in der Grenze miteinander überein.

Ist dagegen (M) eine Asymptotenlinie, so bildet die Drehachse g' der Berührungsebene in M' mit der Drehachse MM' der Schmiegungeebene der Kurve einen endlichen Winkel. Hieraus ergibt sich, daß die Schmiegungeebene der verbogenen Kurve nicht mehr mit den Berührungsebenen zusammenfallen kann.

Übungen. 1. Man beweise den eben behandelten Satz mit Hilfe der sphärischen Abbildung.

2. Jede Regelfläche mit geodätischer Striktionslinie läßt sich in eine andere windschiefe Fläche verbiegen, deren Erzeugende eine feste Gerade unter gleichen Winkeln schneiden.

18. Das Rotationshyperboloid. Wenn eine Gerade um eine zu ihr windschiefe Gerade als Achse rotiert, so entsteht eine Regelfläche, die gleichzeitig Rotationsfläche ist. Es sei $OP = a$ der kürzeste Abstand der beiden Geraden, ihr Winkel α . Der Abstand

AQ eines beliebigen Punktes A der rotierenden Geraden von der Achse sei x , die Strecke $OQ = z$. Dann ist die zwischen x und z

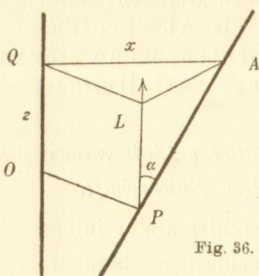


Fig. 36.

bestehende Gleichung die Gleichung der Meridiankurve. Man ziehe durch P zu OQ und durch Q zu OP die Parallelen, die sich in L treffen. Dann ist $QL = a$ und $LA = z \operatorname{tg} \alpha$, und aus dem rechtwinkligen Dreieck QLA folgt:

$$x^2 = a^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

d. h. der Meridian ist eine Hyperbel, deren reelle Achse $2a$ ist und deren Nebenachse $2a \operatorname{ctg} \alpha$ mit der Drehachse zusammenfällt.

Das sphärische Bild der Fläche ist ein kleiner Kugelkreis. Aus der Symmetrie der Fläche kann man schließen, daß der von dem Punkte P beschriebene Parallelkreis die Striktionslinie ist¹⁾, und da zwei benachbarte Flächenstreifen kongruent sind (die Fläche ist ja in sich selbst verschiebbar), ist der Parameter konstant. Da die Striktionslinie von den Erzeugenden unter dem konstanten Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ geschnitten wird, so ist sie eine geodätische Linie der Fläche. Umgekehrt ist jede geradlinige Fläche von konstantem Parameter und mit geodätischer (aber nicht orthogonaler) Striktionslinie auf ein Drehhyperboloid abwickelbar.

Übung. Alle geradlinigen Flächen, die auf das Rotationshyperboloid abwickelbar sind, besitzen eine geodätische Striktionslinie, deren eine natürliche Gleichung $\frac{A}{\rho} + \frac{B}{r} = 1$ lautet.²⁾ (Benutze Nr. 15, Übung 4!)

IX. Kapitel.

Die Fläche der Hauptnormalen.

1. Die Kurve als Asymptotenlinie ihrer Hauptnormalenfläche. Die Fläche der Hauptnormalen einer Kurve (M) doppelter Krümmung ist nach S. 7 windschief. Die Kurve selbst ist der Durchschnitt dieser Fläche mit der rektifizierenden Fläche sowohl als auch mit der Fläche der Binormalen. Sie schneidet die geraden

1) Aufgabe: Man beweise diesen Sachverhalt durch geometrische Schlüsse!

2) Laguerre, Bull. des Soc. math. et astronom. 2, 279 (1871). Implizite schon bei Beltrami, Annali di Mat. Bd. 7, S. 105. 1865.

Erzeugenden der Fläche rechtwinklig, und ihre Schmiegungebenen sind die Tangentenebenen der Fläche in den Durchschnittspunkten mit diesen; denn sie gehen durch die Tangente (M) der Kurve und die erzeugende Gerade. Die Binormalen sind Normalen der Fläche in den Punkten der Kurve, da sie zu diesen Tangentenebenen senkrecht sind. Hieraus folgt sofort der Satz:

Jede Raumkurve bildet auf der windschiefen Fläche ihrer Hauptnormalen eine Asymptotenlinie, deren Tangenten die erzeugenden Geraden dieser Fläche rechtwinklig schneiden.

Umgekehrt:

Schneidet eine Asymptotenlinie einer windschiefen Fläche alle Erzeugenden unter rechten Winkeln, so ist die Fläche die Hauptnormalenfläche der Kurve.

Denn die Tangentenebene der Fläche ist Schmiegungeebene der Asymptotenlinie; da die Erzeugende der Fläche eine Normale der Kurve ist und in ihrer Schmiegungeebene liegt, so ist sie Hauptnormale.

Die Fläche der Hauptnormalen einer eigentlichen Kurve kann niemals eine Fläche 2. Ordnung, d. h. ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid sein. Denn für eine Erzeugende einer solchen Fläche ist die asymptotische Linie irgend eines ihrer Punkte die Gerade dieses Punktes, welche der Schar angehört, in welche die Erzeugende nicht gehört; sie schneidet nämlich je drei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien. Sie ist aber keine Kurve im eigentlichen Sinne.

2. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte. Außer der ursprünglichen liegen auf der Fläche der Hauptnormalen noch zwei besonders ausgezeichnete Kurven: die Kurve der Krümmungsmittelpunkte und die Striktionslinie dieser Fläche. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte ist der Durchschnitt der Hauptnormalenfläche mit der Fläche der Krümmungsachsen. Das Bogenelement CC' und also die Tangente im Punkte C dieser Kurve fällt in die Normalebene der Kurve (M), daher kreuzen sich die Tangenten beider Kurven rechtwinklig. Die Normalebene der Kurve C steht senkrecht auf der Normalebene von (M), ist also parallel der Tangente von (M). Nun ist nach S. 52 die Tangente von (C) zugleich Tangente an den über dem Radius MK der Schmiegungekugel als Durchmesser konstruierten Kreis, daher geht die Normalebene von (C) durch die Mitte des Radius der Schmiegungekugel von (M). Das Bogenelement $CC' = ds'$

der Kurve (C) ergab sich aus den früheren Betrachtungen (S. 56) als der Bogen eines Kreises mit dem Durchmesser R , der zum Peripheriewinkel $|d\sigma|$ gehört. Das Bogenelement der Krümmungsmittelpunktskurve ist (bis auf das Vorzeichen) gleich dem Produkte des Radius der Schmiegunngskugel und des Schmiegunngswinkels, d. h. es ist

$$ds' = R |d\sigma| = \frac{R}{|r|} \cdot ds.$$

Die Tangente der Kurve (C) bildet mit der Krümmungsachse (d. h. der Richtung KC) einen Winkel, der mit dem Winkel μ des Schmiegunngskugelradius und der Hauptnormalen in sehr enger Beziehung steht. Man denke sich auch hier wie im VI. Kapitel die Kurve (M) so orientiert, daß $d\rho \geq 0$ ist; dann ist der Winkel zwischen der orientierten Krümmungsachse KC und der Tangente CC' immer gleich $(\pi - \mu)$. (Vgl. Fig. 20 a und 20 b, S. 53).

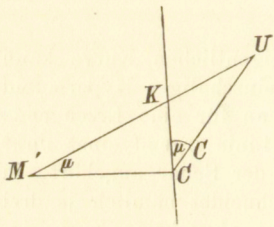


Fig. 37.

Ist $\mu = \frac{\pi}{4}$, so ist die Tangente CC' mit dem Radius der Schmiegunngskugel parallel, ist $\mu \geq \frac{\pi}{4}$, so schneidet sie MK in einem Punkte U (Fig. 37) auf der einen oder andern Seite der Hauptnormalen und bildet mit dieser ein Dreieck $M'CU$, in welchem im einen Falle zwei Winkel gleich μ und $\frac{1}{2}\pi + \mu$, im andern Falle gleich $\pi - \mu$ und $\frac{1}{2}\pi - \mu$ sind, daher ist der Winkel $M'UC = (\pm \frac{1}{2}\pi - 2\mu)$.

Mit der Hauptnormalen und der Schmiegunngsebene bildet die Tangente an (C) den Winkel $-(\mu \pm \frac{1}{2}\pi)$, da sie mit ihm und der Krümmungsachse, mit der sie den Winkel μ bildet, in derselben Ebene, der Normalebene, liegt.

Übung. Für welche Kurven ist $\mu = \text{konst.}$? Man bestimme die Schraubenlinien dieser Kurvenklasse.

3. Das sphärische Bild der Krümmungsmittelpunktskurve. Da das Bogenelement CC' der Kurve (C) der Normalebene von (M) angehört, so liegt das sphärische Bild c ihrer Tangente auf dem größten Kreise hb , und zwar ist der Bogen bc gleich $\pi - \mu$, wenn (M) positive Torsion besitzt, gleich $2\pi - \mu$, wenn die Torsion von (M) negativ ist. (Auch hier ist, wie in diesem Kapitel durchweg, $d\rho \geq 0$ vorausgesetzt.) Der Punkt c liegt also zwischen b und h , wenn $d\sigma < 0$, zwischen h und dem Gegenpunkt von b , wenn $d\sigma > 0$.

Aus dem bei b rechtwinkligen sphärischen Dreieck brc (Fig. 38 und 39), in dem

$$br = H - \frac{1}{2}\pi, \quad bc = \pi - \mu \quad \text{bzw.} \quad 2\pi - \mu$$

ist, ergibt sich der Winkel $\xi = rc$ zwischen der Krümmungsmittelpunktcurve und der rektifizierenden Geraden von (M) :

$$\cos \xi = \mp \cos \mu \sin H = \mp \frac{\rho}{R} \cdot \frac{r}{\rho},$$

d. h.

$$\cos \xi = \mp \frac{r}{R}.$$

Der Kosinus der Neigung der Tangente an die Kurve der Krümmungsmittelpunkte gegen die rektifizierende Gerade wird durch das Verhältnis des Radius der ganzen Krümmung zum Radius der Schmiegunskugel angegeben. Das Verhältnis ist mit positivem oder negativem Vorzeichen zu wählen, je nachdem die Kurve negative oder positive Torsion hat.

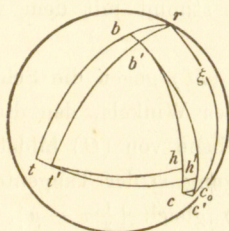


Fig. 38.

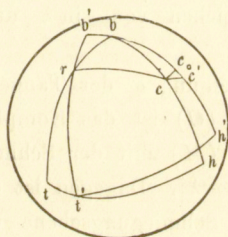


Fig. 39.

Für den speziellen Fall $\mu = 0$, in welchem die Kurve (K) der Schmiegunskugelmittelpunkte mit der Kurve der Krümmungsmittelpunkte zusammenfällt, wird der Krümmungshalbmesser ρ konstant (vgl. S. 54), der Halbmesser der Schmiegunskugel ihm gleich und die Krümmungsachse Tangente an (C) . In diesem Falle werden die Winkel ξ und H komplementär. Man sieht dies auch unmittelbar, wenn man bedenkt, daß die Krümmungsachse der Binormalen parallel ist.

Aus dem sphärischen Bilde ergibt sich auch der Kontingenzwinkel der Kurve (C) . Es seien c und c' die Bilder benachbarter Tangenten; dann ist $bc = \pi - \mu$ [bzw. $2\pi - \mu$], $b'c' = \pi - (\mu + d\mu)$ [bzw. $2\pi - (\mu + d\mu)$]. Das Lot cc_0 von c auf $b'c'$ ist der Bogen eines Kreises vom Radius $\sin bc$, der zu dem Winkel $c'bc = d\tau$ gehört, also ist $cc_0 = \pm d\tau \sin \mu$. Ferner ist

$$c_0c' = b'c' - b'c_0 = b'c' - b'c = b'c - (bc - bb') = -d\mu + d\sigma.$$

Damit hat man für den Kontingenzwinkel $d\tau' = cc'$ der Krümmungsmittelpunktkurve den Wert

$$d\tau'^2 = (d\sigma - d\mu)^2 + \sin^2 \mu d\tau^2.$$

Für die Kurven konstanter Krümmung ist $\mu = 0$, mithin $d\tau' = |d\sigma|$, wie auch einleuchtet, wenn man bedenkt, daß der Kontingenzwinkel der Kurve (K), welche in diesem Falle mit der Kurve (C) zusammenfällt, gleich dem Schmiegunzwinkel der Kurve (M) ist.

Aus dem Dreieck $cc'c_0$, in dem cc' das Bild der Schmiegungeebene von (C) und $c'c_0$ das Bild der Normalebene von (M) ist, ergibt sich der Winkel $\lambda = cc'b$ dieser beiden Ebenen. (Genauer: λ ist der Winkel, durch den man die Schmiegungeebene von (C) um die Tangente CC' in positivem Sinne drehen muß, damit sie mit der Normalebene von (M) zusammenfällt.)

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{d\tau \sin \mu}{d\sigma - d\mu}, \quad \sin \lambda = \mp \sin \mu \frac{d\tau}{d\tau'}, \quad \cos \lambda = \mp \frac{d\sigma - d\mu}{d\tau'}.$$

Das Vorzeichen von $\sin \lambda$ und $\cos \lambda$ stimmt mit dem von $-d\sigma$ überein.

Die Neigung φ der Tangente von (M) gegen die Schmiegungeebene von (C) ist das Komplement des Winkels, den die Normalebene von (M) mit der Schmiegungeebene von (C) bildet, also ist $\varphi = |\frac{1}{2}\pi - \lambda|$. Dagegen ist die Neigung ψ der Tangente von (C) gegen die Schmiegungeebene von (M) gleich $|\frac{1}{2}\pi - \mu|$. Aus der Gleichung für $\sin \lambda$ folgt sodann:

$$\left| \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \right| = \frac{d\tau}{d\tau'},$$

d. h.

Die Kurve (M) und die Kurve (C) ihrer Krümmungsmittelpunkte sind zwei Kurven der Art, daß die Kosinus der Neigung der Tangente jeder von ihnen gegen die Schmiegungeebene der anderen in demselben Verhältnis stehen, wie ihre Kontingenzwinkel.

Der größte Kreis durch cc' ist das sphärische Bild der Schmiegungeebene von (C); er schneidet das Bild th der Schmiegungeebene von (M) in d . Dann sei der spitze Winkel $cdh = \omega$ als Winkel der Schmiegungeebenen beider Kurven bezeichnet. Aus dem bei h rechtwinkligen Dreieck folgt dann

$$\cos \omega = \sin \lambda \sin \mu = \sin^2 \mu \frac{d\tau}{d\tau'},$$

also:

Der Kosinus der Neigung der Schmiegungeebene beider Kurven (M) und (C) ist das Produkt der Kosinus der Neigungen der Tangente je einer von ihnen gegen die Schmiegungeebene der andern.¹⁾

Endlich findet man noch den Winkel der Schmiegungeebene von (C) mit der rektifizierenden Ebene von (M), wenn man den Großkreis cd in e mit dem Bilde tb der rektifizierenden Ebene schneidet. In dem bei b rechtwinkligen Dreieck bce ist bc und der Winkel $bce = \lambda$ (bzw. $\pi - \lambda$) bekannt, während bec der gesuchte Winkel ν wird. Daraus folgt:

$$\cos \nu = |\sin \lambda \cos \mu|.$$

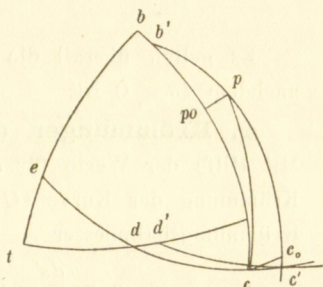


Fig. 40.

Auch der Schmiegunswinkel $d\sigma'$ der Kurve (C) läßt sich aus ihrem sphärischen Bild ablesen. Er ist gleich dem Winkel benachbarter Schmiegungeebenen, also gleich dem Winkel der Kreise cc' und $c'c''$, es ist somit, auch dem Vorzeichen nach genau:

$$d\sigma' = dc'b - d'c'b.$$

Nun ist $dc'b = \lambda$, $d'c'b = \lambda + d\lambda$. Legt man nun durch cc_0 den größten Kreis, so ist sein Pol p auf c_0b , um $\frac{1}{2}\pi$ von c_0 entfernt, gelegen. Der Bogen pb ist daher gleich $\frac{3}{2}\pi - \mu$. Fällt man von p auf cb das Lot pp_0 , so wird, da der Winkel $p_0bp = d\tau$ ist:

$$pp_0 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \mu\right) d\tau = \cos \mu d\tau$$

oder

$$pp_0 = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \mu\right) d\tau = -\cos \mu d\tau,$$

je nachdem $d\sigma \geq 0$ ist.

Andererseits wird p_0p gleich dem Winkel p_0cp , da ja der Bogen cp gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist.

Nun ist bis auf Unendlichkleines höherer Ordnung der Winkel

$$d'c'b = dcp = dc'b + bcp = \lambda + pp_0.$$

Hieraus folgt

$$d\sigma' = \pm (d\tau \cos \mu - d\lambda).$$

1) Molins, Sur quelques nouvelles propriétés du lieu des centres de courbure des courbes gauches. (Mém. de l'Académie des sciences de Toulouse, (8), 10, p. 400—409, 1888.)

Dabei ist $d\lambda$ durch die vorher gefundenen Ausdrücke für λ bestimmt:

$$d\lambda = \frac{d\left(\frac{\sin \mu d\tau}{d\sigma - d\mu}\right)}{1 + \left(\frac{\sin \mu d\tau}{d\sigma - d\mu}\right)^2}.$$

Es gelten überall die oberen oder die unteren Vorzeichen, je nachdem $d\sigma \geq 0$ ist.

4. Krümmungen der Krümmungsmittelpunktkurve.

Mit Hilfe der Werte für ds' , $d\tau'$, $d\sigma'$ können die Fragen über die Krümmung der Kurve (C) erledigt werden. Insbesondere ist der Krümmungshalbmesser

$$\rho' = \frac{ds'}{d\tau'} = \frac{R d\sigma}{\sqrt{(d\sigma - d\mu)^2 + \sin^2 \mu d\tau^2}}.$$

Um diesen Ausdruck zu interpretieren, formen wir ihn um und schreiben:

$$\left(\frac{1}{\rho'}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma - d\mu}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{\sin \mu d\tau}{ds'}\right)^2.$$

Die Kurve (C) geht durch Abwicklung der Fläche der Krümmungsachsen in eine ebene Kurve über von demselben Bogenelement ds' , wie die Kurve (C), aber mit einem Kontingenzwinkel gleich $d\sigma - d\mu$. Ist daher ρ_0' deren Krümmungshalbmesser, so stellt

$$\frac{1}{\rho_0'} = \frac{d\sigma - d\mu}{ds'}$$

die Krümmung der abgewickelten Kurve (C) dar. Legt man ferner durch die Tangente der Kurve (C) den Normalschnitt der Fläche der Krümmungsachsen, so hat auch dieser das Bogenelement ds' , aber sein Kontingenzwinkel wird gleich $\sin \mu d\tau$. Ist also ρ'' sein Krümmungshalbmesser, so ist

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{\sin \mu d\tau}{ds'}$$

seine Krümmung. Daher lautet die gedachte Interpretation so:

Das Quadrat der Krümmung der Kurve (C) der Krümmungsmittelpunkte ist die Quadratsumme der Krümmungen der mit der Polarfläche abgewickelten Kurve (C) und der Krümmung des Normalschnitts der Polarfläche, welcher durch die Tangente der Kurve (C) geführt werden kann.¹⁾

1) Der Satz ist übrigens durchaus nicht charakteristisch für die Beziehung der Krümmungsmittelpunktkurve zur Polarfläche, er ist nichts anderes als die Spezialisierung des Meunierschen Satzes der Flächentheorie auf den vorliegenden Fall. Da Probleme, die wesentlich flächentheoretisches Interesse haben, hier grundsätzlich ausgeschlossen sind, mag dieser Hinweis genügen.

In dem Falle, daß die Kurve konstanten Krümmungshalbmesser besitzt, also für $\mu = 0$ wird $\rho' = R = \rho$; d. h. die Kurve (M) konstanter Krümmung und die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte haben gleiche Krümmungsradien; sie besitzen überhaupt sehr interessante Beziehungen, die wir im folgenden Kapitel entwickeln wollen.

5. Umkehrung des Problems. Zu jeder Kurve (M) gehört eine bestimmte Fläche der Hauptnormalen und auf ihr eine bestimmte Kurve (C) der Krümmungsmittelpunkte, welche der Durchschnitt der Fläche der Krümmungsachsen mit dieser Fläche ist. Umgekehrt ist jede Kurve (C) der Ort der Krümmungsmittelpunkte für unendlich viele Kurven (M).

Um zu einer Kurve (C) irgend eine dieser Kurven (M) zu finden¹⁾, lege man durch zwei benachbarte Punkte CC' eine beliebige Ebene ε und konstruiere in ihr die Geraden $MC \perp CK$; $MC' \perp C'K$. Dreht man jetzt ε um $C'K$ in die Lage ε' , die die Punkte $C'C''K$ enthält, so ist M in die Lage M' übergeführt. Das Lot auf $M'C''$ in C'' schneide $C'K$ in K' . Nun drehe man die Ebene ε' in derselben Weise wie vorher ε , um M'' und K'' zu erhalten. So bestimmt sich aus der Anfangslage ε der Ebene und der Punkte M und K eindeutig der weitere Verlauf der Konstruktion.

Man überzeugt sich leicht, daß (M) die gegebene Kurve C als Krümmungsmittelpunktskurve besitzt. Die Folge der Geraden MK , $M'K'$, ... bildet eine abwickelbare Fläche, deren Tangentenebenen $\varepsilon, \varepsilon', \dots$ die Kurve (M) senkrecht schneiden. Die Fläche ist demnach die Polarfläche von (M) und die Lote auf die Erzeugenden von den Punkten M sind die zugehörigen Hauptnormalen der Kurve (M). Hieraus folgt unmittelbar, daß (C) als Schnittlinie der Polarfläche und der Hauptnormalenfläche die Kurve der Krümmungsmittelpunkte von (M) ist.

6. Mittelpunkte der Hauptnormalen. Die Striktionsstrahlen der Hauptnormalenfläche stehen auf je zwei benachbarten Hauptnormalen senkrecht. Nun kreuzt auch die rektifizierende Gerade zwei aufeinanderfolgende Hauptnormalen senkrecht, steht also senkrecht zur Ebene der ganzen Krümmung, daher ist der Striktionsstrahl zweier Hauptnormalen parallel der rektifizierenden Geraden und senkrecht zur Ebene der ganzen Krümmung.

1) P. Serret, Journ. de Math. (1) 18.

Es sei E der Mittelpunkt der Hauptnormalen in M , Ee der Striktionsstrahl und $M'D$ die rektifizierende Gerade. Denkt man

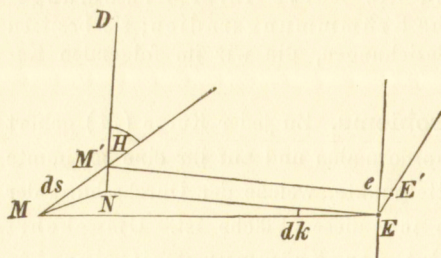


Fig. 41.

sich durch ME die Ebene ganzer Krümmung parallel zu $M'E'$ geführt, welche die rektifizierende Gerade in N rechtwinklig schneidet, so wird EN parallel $M'E'$ und der Winkel $MEN = dk$, d. h. gleich dem Winkel der ganzen Krümmung. Man erhält daher für den kürzesten Abstand Ee der beiden Hauptnormalen,

den wir dp nennen wollen: $Ee = M'N = MM' \cos H$, d. h.

$$dp = ds \cos H = \frac{r}{r} ds = r \cdot d\sigma = \frac{r\varrho}{r} d\tau = \frac{r^2}{r} dk,$$

und für die Entfernung $EM = u$ des Punktes E der Striktionslinie von der Kurve (M) aus der Gleichung $MN = ds \sin H = EM dk$ (die Ebene DNE steht nämlich senkrecht auf der rektifizierenden Ebene, daher ist $\sphericalangle MNE = \frac{1}{2} \pi$)

$$u = \frac{ds}{dk} \sin H = \frac{ds d\tau}{dk^2} = r \sin H = \varrho \sin^2 H = \frac{r^2}{\varrho}, \quad r^2 = u\varrho,$$

d. h.:

Der Radius der ganzen Krümmung ist das geometrische Mittel zwischen dem Krümmungsradius und dem Abstand der Striktionslinie auf der Fläche der Hauptnormalen von der ursprünglichen Kurve.

Die Schmiegeebene der Kurve (M) im Punkte M hat mit der Fläche die Hauptnormale MC und das Bogenelement MM' gemeinsam; sie ist also in M Tangentialebene der Hauptnormalenfläche. Die Normalebene in M enthält ebenfalls die Hauptnormale in M und außerdem den Punkt C' der benachbarten Hauptnormalen $M'C'$; sie berührt also die Fläche im Punkte C , da in ihr außer der Erzeugenden auch das Bogenelement CC' der Kurve (C) gelegen ist. Nun weiß man, daß der Mittelpunkt E eines Strahls immer zwischen den Berührungspunkten M und C senkrechter Tangentialebenen liegt, und zwar so, daß $ME \cdot EC = -K^2$ ist, wenn K den Parameter Fläche darstellt (S. 77). Hieraus ergibt sich zunächst der Satz:

Die Mittelpunkte E der Hauptnormalen liegen zwischen den Punkten der Kurve (M) und den Krümmungsmittelpunkten C . Die

Striktionslinie liegt daher auf der Hauptnormalenfläche immer in dem Bereich zwischen den Kurven (M) und (C).

Weiter kann man aus dem Werte des Parameters $K = dp : dk = ds \cos H : dk = r \cos H$ und den Stücken $ME = u$ und $EC = -CE = \rho - u$ auf neuem Wege den Wert von u finden; es wird

$$r^2 \cos^2 H = ME \cdot CE = u(\rho - u),$$

woraus

$$ME = u = \rho \sin^2 H$$

und

$$CE = \rho - u = \rho - \rho \sin^2 H = \rho \cos^2 H,$$

mithin

$$\frac{ME}{EC} = \operatorname{tg}^2 H = \frac{r^2}{\rho^2},$$

folgt, d. h.:

Das Verhältnis der Entfernungen der Punkte kürzesten Abstandes von den Punkten der Kurven (M) und (C) ist gleich dem Verhältnis des Quadrats des Schmiegungradius zum Quadrate des Krümmungsradius.

Wir fanden (S. 98)

$$dp = r d\sigma = \frac{r\rho}{r} d\tau = \frac{r^2}{r} dk.$$

Hieraus folgt:

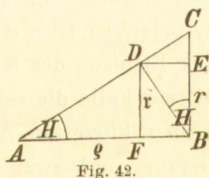
$$\frac{dp}{d\sigma} = r = \frac{ds}{dk}, \quad \frac{dp}{d\tau} = \frac{r\rho}{r}, \quad \frac{dp}{dk} = \frac{r^2}{r}.$$

Diese Linien, sowie die Länge $u = \frac{r^2}{\rho}$ lassen sich sämtlich in dem Kap. III, S. 28 konstruierten Dreieck darstellen.

Ist nämlich (Fig. 42) $AB = \rho$, $BC = r$, so wird $BD = r = \frac{dp}{d\sigma}$, $AD = \frac{r\rho}{r} = \frac{dp}{d\tau}$, $DE = \frac{r^2}{r} = u$ und $DF = \frac{r^2}{r} = \frac{dp}{dk}$.

Das Teilverhältnis $ME : EC$, das oben aus der allgemeinen Theorie der Regelflächen gewonnen wurde, kann auch direkt aus der Figur bestimmt werden.

Legt man durch den Striktionsstrahl Ee eine Ebene senkrecht zur ersten Hauptnormalen, so steht sie senkrecht auf der Schmiegungeebene und schneidet sie in einer Geraden EV , welche parallel der Tangente in M läuft. Eine Parallele $M'V$ zur ersten Hauptnormalen MC wird von ihr in einem Punkte V und die Projektion $M'C$ der zweiten Hauptnormalen auf die erste Schmiegungeebene in einem Punkte Q getroffen, so daß eQ senkrecht zur Schmiegungeebene ist. Da die Ebene $VM'e$ die Richtung



der Ebene der ganzen Krümmung hat, so steht Ee senkrecht auf ihr und das Dreieck EeV ist also bei e rechtwinklig, und Winkel $eEQ = H$. Nun hat man

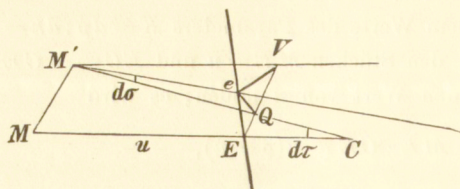


Fig. 43.

$$eQ = M'e \cdot d\sigma = M'Q \cdot d\sigma = ME \cdot d\sigma = u d\sigma,$$

$$QV = M'Q \cdot d\tau = u d\tau,$$

mithin

$$\frac{QV}{eQ} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\rho}.$$

Ferner ist

$$eQ^2 = EQ \cdot QV \quad \text{und} \quad eQ = M'Q \cdot d\sigma = ME \cdot d\sigma$$

$$EQ = EC \cdot d\tau, \quad QV = ME \cdot d\tau,$$

mithin

$$\overline{ME^2} \cdot d\sigma^2 = EC \cdot ME \cdot d\tau^2$$

oder

$$\frac{ME}{EC} = \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2},$$

wie wir oben fanden.

7. Bogenelement der Striktionslinie. Das Bogenelement $EE' = d\bar{s}$ der Striktionslinie folgt aus dem Dreieck EeE' , in welchem $Ee = dp$ und $eE' = M'E' - M'e = M'E' - ME = du$, nämlich

$$d\bar{s}^2 = dp^2 + du^2,$$

oder weil

$$dp = ds |\cos H| = r d\sigma$$

und

$$u = \rho \sin^2 H = \frac{r^2}{\rho}$$

$$d\bar{s}^2 = (ds \cos H)^2 + (d\rho \sin^2 H) = r^2 d\sigma^2 + \left(d\frac{r^2}{\rho}\right)^2.$$

Hat die Kurve insbesondere gleichzeitig konstanten Krümmungs- und Schmiegungradius, ist sie also eine Helix auf einem Kreiszylinder, so ist $du = 0$, mithin $d\bar{s} = dp = r d\sigma$, und es fällt dann das Element der Kurve E in die Linie kürzesten Abstandes. Da in diesem Falle die rektifizierende Fläche der Zylinder ist, so fallen alle Linien kürzesten Abstandes zusammen und die Kurve (E) ist eine Gerade, und zwar findet das letztere ausschließlich in diesem Falle statt. Allgemein ist $du = 0$, wenn $\frac{r^2}{\rho}$ konstant ist. Daher schneidet die Striktionslinie der Fläche der Hauptnormalen bloß dann die Hauptnormalen rechtwinklig, wenn das Quadrat

des Radius der ganzen Krümmung proportional dem Krümmungshalbmesser ist.

Eine Regelfläche hat nur dann orthogonale Striktion, d. h. die Striktionsstrahlen sind die Tangenten der Striktionslinie, wenn sie die Binormalenfläche einer Raumkurve ist (S. 75). Die eben charakterisierten Kurven

$$r^2 = k\rho$$

sind daher diejenigen, deren Hauptnormalen gleichzeitig Binormalen einer zweiten Kurve sind.

8. Sphärisches Bild der Striktionslinie. Die Striktionsstrahlen einer Regelfläche sind immer so zu orientieren, daß sich das Bild der Erzeugenden zum Bilde der Striktionsstrahlen wie das Tangentenbild einer Raumkurve zu ihrem Binormalenbild verhält. Die Striktionsstrahlen sind demgemäß ebenso zu orientieren wie die rektifizierenden Geraden.

Das Bild der Striktionsstrahlen der Hauptnormalenfläche einer Raumkurve ist also identisch mit dem Bilde der rektifizierenden Geraden.

Die Tangenten der Striktionslinie (E) können stets so orientiert werden, daß ihr Winkel mit der Hauptnormalen kleiner als π ist. (Dreht man die Hauptnormale in dem Sinne, daß sie nach der Drehung um $\frac{1}{2}\pi$ mit dem Striktionsstrahl zusammenfällt, so ist dadurch der positive Drehsinn in der Mittelebene der Fläche definiert. Die Orientierung der Tangenten EE' braucht nicht mit der Fortschrittingsrichtung EE' zusammenzufallen.)

Man bezeichne mit ε das sphärische Bild der Tangenten von (E), mit $\eta, \vartheta, \varphi, \chi$ der Reihe nach ihre Winkel mit der Hauptnormale, der rektifizierenden Geraden, Tangente und Binormale von (M). Dann ist $\eta = h\varepsilon$, $\vartheta = r\varepsilon$, $\varphi = t\varepsilon$ und $\chi = b\varepsilon$. Dann ist zunächst

$$\eta - \vartheta = \frac{1}{2}\pi,$$

ferner folgt aus dem bei r rechtwinkligen Dreieck $tr\varepsilon$, in dem $tr = H$, $t\varepsilon = \varphi$ ist:

$$\cos \varphi = \cos H \cos \vartheta = \cos H \sin(-\eta)$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck $br\varepsilon$:

$$\cos \chi = -\sin H \cos \vartheta = \sin H \sin \eta.$$

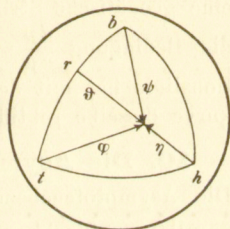


Fig. 44.

Alle auftretenden Größen sind jetzt durch H und η ausgedrückt, und aus dem Dreieck EeE' folgt:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{Ee}{eE'} = \frac{dp}{du} = \frac{ds \cos H}{d(\rho \sin^2 H)}.$$

9. Die Mittelfläche der Hauptnormalenfläche. Die Mittelebene einer Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche ist die Berührungsebene im Mittelpunkte; sie ist durch die Erzeugende und den Striktionsstrahl bestimmt. Für die Hauptnormalenfläche ist aber die Mittelebene die Ebene durch die Hauptnormale und die rektifizierende Gerade, d. h. also die Ebene durch die Tangente und Binormale der Gratlinie (D) der rektifizierenden Fläche von (M). Die Mittelebene der Hauptnormalenfläche ist also die rektifizierende Ebene der Kurve (D), und ihre Hüllfläche, die Mittelfläche, ist daher die rektifizierende Fläche der Gratlinie der rektifizierenden Fläche von (M). Es sei diese Fläche kurz als zweite rektifizierende Fläche der Kurve (M) bezeichnet, dann kann der eben dargestellte Sachverhalt auch so ausgedrückt werden:

Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche einer Raumkurve (M) liegt auf der zweiten rektifizierenden Fläche derselben Kurve.

Übung. Für welche Raumkurven hat die Hauptnormalenfläche eine geodätische Striktionslinie? Ihre natürliche Gleichung ist durch die Bedingung $\frac{dp}{du} = \text{konst.}$ gegeben, d. h. $d \frac{r^2}{\rho} = \frac{r}{\rho} ds$; die Striktionslinie hat mit der rektifizierenden Gratlinie der gesuchten Raumkurve dieselbe rektifizierende Fläche.

10. Die Asymptotenfläche der Hauptnormalenfläche. Die Asymptotenebene war die Ebene, die durch eine Erzeugende parallel zur Nachbarerzeugenden gelegt wurde. Die Asymptotenebene der Hauptnormalenfläche ist demnach die Ebene der ganzen Krümmung. Die Asymptotenfläche der Hauptnormalenfläche ist also die Hüllfläche der Ebenen der ganzen Krümmung.

Die Asymptotenfläche einer Schraubenlinie degeneriert, da hier die Ebenen der ganzen Krümmung alle untereinander parallel sind.

Übungen. 1. Man untersuche die Asymptotenflächen der Hauptnormalenflächen von geodätischen Linien auf Kegeln.

2. Für welche Raumkurven umhüllen die Ebenen der ganzen Krümmung einen Kegel?

X. Kapitel.

Die Fläche der Binormalen.

1. Biegung der Binormalenflächen. Es war schon früher (S. 75) gezeigt, daß jede nicht ebene Raumkurve auf der Fläche ihrer Binormalen Striktionslinie ist und daß die Tangenten der Kurve die Striktionsstrahlen der Binormalenfläche sind.

Jede Binormalenfläche einer nicht ebenen Kurve ist eine Linienfläche orthogonaler Striktion und umgekehrt jede Fläche mit orthogonaler Striktion die Binormalenfläche ihrer Striktionslinie, wofern diese nicht gerade ist.

Da nun bei einer Biegung einer Linienfläche der Winkel der Striktionslinie mit der Erzeugenden ungeändert bleibt, geht jede Fläche orthogonaler Striktion wieder in eine Fläche orthogonaler Striktion über, d. h. eine Binormalenfläche muß immer wieder in eine Binormalenfläche verbogen werden, falls nicht die Striktionslinie in eine Gerade und das ganze Striktionsband in diese Gerade ausartet. Daß man jede Binormalenfläche in eine solche Fläche verbiegen kann, ergibt sich aus der Anschauung unmittelbar. Hält man nämlich den Flächenstreifen fest, der durch zwei Erzeugende g, g' begrenzt ist, so bewegt sich bei jeder Biegung der Striktionsstrahl $E'E''$ des Nachbarstreifens $g'g''$ in einer Ebene, die auf g' senkrecht steht, also auch den Striktionsstrahl EE' des ersten Streifens enthält. Man kann daher den Streifen $g'g''$ so weit drehen, daß $E'E''$ in die Verlängerung von EE' fällt. Setzt man das Verfahren fort, so wird die vorgelegte Binormalenfläche in eine Linienfläche gebogen, deren Erzeugende ein und dieselbe Gerade senkrecht schneiden, eine Fläche die als gerades Konoid bezeichnet wird.

Daß umgekehrt jedes gerade Konoid, dessen Geraden starr vorausgesetzt werden, in Binormalenflächen und nur in solche verbogen werden kann, ergibt sich aus der Umkehrbarkeit der eben beschriebenen Konstruktion.

Bei der Biegung bleibt, wie S. 88 gezeigt wurde, der Verteilungsparameter der Fläche ungeändert. Ist eine Kurve, deren natürliche Gleichung die Form

$$r = \varphi(s)$$

hat, vorgelegt, so ist ihr Parameter für einen durch einen bestimmten Wert von s festgelegten Punkt der Striktionslinie gleich r . Bei der

Biegung ändert sich nun weder die Bogenlänge s noch der Parameter r ; die Biegungsfläche ist daher entweder ein Konoid oder die Binormalenfläche einer Raumkurve, deren eine natürliche Gleichung dieselbe Form hat wie die ursprüngliche Kurve. Faßt man die Ergebnisse zusammen, so erhält man den Satz:

Jede Linienfläche, in die die Binormalenfläche einer Raumkurve gebogen werden kann, ist wieder eine Binormalenfläche oder ein gerades Konoid. Für die Striktionslinien aller dieser Flächen (wofern sie nicht geradlinig sind) besteht zwischen Bogenlänge und Torsion dieselbe Beziehung.

Dieser Satz gibt die Lösung der Aufgabe:

Alle Kurven zu konstruieren, deren natürliche Gleichung

$$r = \varphi(s)$$

ist.

Man gehe von einer beliebigen Kurve dieser Klasse aus (die eventuell punktweise gefunden werden muß), konstruiere ihre Binormalenfläche und biege diese zu einer anderen Regelfläche, deren Striktionslinie nicht geradlinig ist. Vgl. die Bestimmung der Kurvenklassen $\varrho = f(s)$, $\frac{\varrho}{r} = F(s)$ (S. 18, 72).

2. Binormalenflächen der Kurven konstanter Torsion.

Zu jeder Klasse $r = \varphi(s)$ von Binormalenflächen gehört ein eindeutig bestimmtes Konoid. Ist z. B. r konstant, so wird der Winkel benachbarter Erzeugender $d\sigma = \frac{ds}{r}$ proportional mit ds . Denkt man sich daher die Binormalenfläche einer solchen Kurve konstanter Torsion aus Streifen konstanter Höhe ds zusammengesetzt, so sind alle diese Flächenstreifen kongruent, da ja die Winkel wie die Abstände der begrenzenden Erzeugenden für alle dieselben sind. Biegt man nun die Fläche so, daß sich ihre Striktionslinie in eine Gerade verwandelt, so kann man einen Streifen der Fläche mit seinem benachbarten dadurch zur Deckung bringen, daß man ihn einer Schiebung längs der Striktionsgeraden um ds und einer Drehung um diese Striktionsgerade durch $d\sigma$ unterwirft, d. h. einer eindeutig bestimmten Schraubung. Dieser Prozeß führt jede Lage einer Erzeugenden in ihre Nachbarlage über, und da er fortgesetzt werden kann, erhält man als Biegungsfläche diejenige Regelfläche, die entsteht, wenn eine Gerade eine Schraubung um eine sie senkrecht schneidende Achse ausführt. Diese Fläche heißt Wendelfläche (gerade geschlossene

Schraubenregelfläche). Nach ihrer Entstehung hat sie die Eigenschaft, sich bei einer bestimmten Schraubung in sich selbst zu verschieben.

Die Binormalenfläche einer Kurve konstanter Torsion ist auf eine Wendelfläche abwickelbar.

3. Asymptotenfläche und Mittelfläche der Binormalenflächen. In den Mittelpunkten M der Binormalen sind die Ebenen Berührungsebenen der Fläche, die die Tangenten MM' enthalten, d. h. die rektifizierenden Ebenen:

Die rektifizierende Fläche der Kurve ist die abwickelbare Fläche, die der Binormalenfläche längs der Kurve umgeschrieben werden kann.

Dies ergibt sich übrigens auch aus der Tatsache, daß die Kurve auf ihrer Binormalenfläche geodätisch ist; es war gezeigt, daß eine geodätische Linie auf einer Fläche auch auf allen Flächen geodätisch ist, die die erste längs der Kurve berühren (S. 81); die Tangentenebene der Binormalenfläche fällt daher in jedem Kurvenpunkte mit der rektifizierenden Ebene der Kurve zusammen.

Die Tangentialebenen in den Mittelpunkten der Erzeugenden einer windschiefen Fläche waren als Mittelebenen bezeichnet; ihre Hüllfläche als Mittelfläche; der eben bewiesene Satz kann also auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

Die Mittelfläche einer Binormalenfläche ist die rektifizierende Fläche der Kurve.

Auf der Tangentenebene im Mittelpunkte eines Strahls steht die Asymptotenebene, d. i. die Tangentenebene im unendlich fernen Punkt der Erzeugenden senkrecht. Diese Asymptotenebene ist demnach die Normalebene der Kurve; deren Hüllfläche ist demnach Asymptotenfläche der Binormalenfläche, d. h.:

Die Polarfläche ist Asymptotenfläche der Binormalenfläche.

XI. Kapitel.

Besondere Raumkurven.

Schon in der Darstellung der allgemeinen Theorie waren zur Erläuterung und als Anwendungen gelegentlich besondere Kurven und Kurvenklassen betrachtet worden. Aber erst, wenn man diese gelegentlichen Anwendungen weiter verfolgt und sich mit der Theorie besonderer Kurven beschäftigt, eröffnet sich die ganze Tragweite und Brauchbarkeit der geometrischen Methoden. Sie lassen sich zumeist

dem Problem weitaus schmiegsamer anpassen als die analytischen Methoden, und die Lösung wird daher vielfach direkter und naturgemäßer gewonnen als durch Rechnung. Um dies zu zeigen, ist der Untersuchung spezieller Kurven ein breiterer Raum zu widmen.

I. Die Kurven konstanter Krümmung.

1. Die Kurve und ihre Polarkurve. Für jede Kurve doppelter Krümmung (M) ist die Schmiegungebene, Normalebene und rektifizierende Ebene eines Punktes M parallel der Normalebene, Schmiegungebene und rektifizierenden Ebene der Kurve (K) der Schmiegungekugelmittelpunkte in dem entsprechenden Punkte K . Insbesondere fallen die Normalebene von M und die Schmiegungeebene von K zusammen. Daher sind auch die Tangente, Hauptnormale, Binormale und rektifizierende Gerade von M parallel der Binormalen, Hauptnormalen, Tangente und rektifizierenden Geraden von K (S. 51). In die Normalebene von M fallen die Hauptnormale von (M), die Tangente der Krümmungsmittelpunktskurve (C) von (M), die Tangente von (K) und der Radius MK der Schmiegungekugel; es ist der Winkel μ , welchen MK mit MC bildet, gleich dem Winkel der Tangenten von (C) und (K) und der Abstand $CK = h = \rho \operatorname{tg} \mu = \frac{d\rho}{d\sigma}$ (S. 54). Für die Kurven konstanter Krümmung wird $d\rho = QC'$, h und $\operatorname{tg} \mu$ gleich Null und folgt:

Für die Kurven (M) konstanter Krümmung fällt die Kurve (K) der Mittelpunkte der Schmiegungekugeln mit der Kurve (C) der Krümmungsmittelpunkte zusammen und schneidet (C) die Hauptnormalen von (M) rechtwinklig.

Die Kurven konstanter Krümmung haben mit der Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte gemeinschaftliche Hauptnormalen in den entsprechenden Punkten M und C .

Die Schmiegungeebene jeder dieser Kurven ist die Normalebene der andern; jede ist die Kurve der Krümmungsmittelpunkte der andern und ebenso ist die Tangente der einen die Krümmungsachse der andern und ist die Fläche der Evolventen der einen die Fläche der Evoluten der andern.

Alle diese Sätze sind unmittelbare Folgerungen aus früheren Ergebnissen.

Aus dem vorigen ergibt sich, daß die Kurve der Krümmungsmittelpunkte (C) einer Kurve konstanter Krümmung (M) wieder

eine Kurve derselben konstanten Krümmung ist, deren Krümmungsmittelpunktskurve die Ausgangskurve (M) ist. Die Kurven (M) und (C) sind daher völlig gleichberechtigt; man bezeichne zwei derartige Kurven daher als Kurvenpaar konstanter Krümmung. Zwischen den Kurven eines solchen Paares bestehen mannigfache Wechselbeziehungen. (Vgl. Kap. XV.)

Die Ergebnisse des Kap. II, Nr. 10 (S. 19) führen auf die folgende Entstehungsweise solche Kurven konstanter Krümmung: Man verbiege die Ebene eines Kreises (\mathfrak{M}) so, daß die Tangenten des Kreises geradlinig bleiben, dann geht der Kreis in eine Raumkurve konstanter Krümmung über. Diese Erzeugung rechtfertigt den Namen windschiefe Kreise, mit dem man die Kurven gelegentlich bezeichnet.¹⁾

2. Torsion und ganze Krümmung. Die rektifizierenden Geraden beider Kurven (M) und (C) sind parallel, und die Tangente der einen ist parallel der Binormalen der andern, daher sind die Winkel H und H_c , welche ihre rektifizierenden Geraden mit den Tangenten bilden, komplementär, $H + H_c = \frac{1}{2}\pi$, bzw. $\frac{3}{2}\pi$, je nachdem $d\sigma \geq 0$ ist; also wird $\operatorname{tg} H \cdot \operatorname{tg} H_c = 1$. Sind daher ϱ und ϱ_c , r und r_c resp. ihre Krümmungs- und Schmiegunghalbmesser, so daß $\operatorname{tg} H = -r : \varrho$, $\operatorname{tg} H_c = -r_c : \varrho_c$, so wird $rr_c : \varrho\varrho_c = rr_c : \varrho^2 = 1$, d. h.:

Das Produkt der Torsionen der Kurven (M) und (C) ist konstant, nämlich gleich dem Quadrate der konstanten Krümmung.

Die Kurven eines Paares haben demnach stets Torsionen mit gleichem Vorzeichen.

Da die Kurven (M) und (C) gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen, so ist der Winkel der ganzen Krümmung für beide derselbe. Kontingenz- und Schmiegunswinkel haben sie aber (bis auf das Vorzeichen) reziprok gemein, d. h. es ist

$$dk = dk_c, \quad d\tau = \pm d\sigma_c, \quad d\sigma = \pm d\tau_c,$$

und da

$$\varrho = ds : d\tau = \varrho_c = ds_c : d\tau_c$$

ist, so folgt

$$ds : ds_c = d\tau : d\tau_c = d\tau : \pm d\sigma = \pm r : \varrho \quad \text{und}$$

$$r : r_c = \frac{ds}{dk} : \frac{ds_c}{dk_c} = ds : ds_c = \pm r : \varrho,$$

1) Cesàro-Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig 1901. S. 182.

d. h.

$$r\varrho = \pm r_c r$$

oder wegen

$$r r_c = \varrho^2$$

$$r r_c = \pm r_c \varrho,$$

also $r r_c^2 = r_c^2 \varrho$ und damit

$$r^2 + r_c^2 = r^2 \left(1 + \frac{r_c}{r}\right) = r^2 \left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) = \varrho^2 r^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right) = \varrho^2,$$

d. h.

$$r^2 + r_c^2 = \varrho^2.$$

Dabei haben alle Größen mit dem Index c dieselbe Bedeutung für die Kurve (C) wie die nicht gezeichneten Größen für die Kurve (M). Überall ist das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem $r : \varrho$, d. h. $d\sigma$ positiv oder negativ ist.

3. Rektifizierende Flächen zweier zugeordneter Kurven konstanter Krümmung. Für die Abstände L, L_c der entsprechenden Punkte der Gratlinie der rektifizierenden Flächen von (M) und (C) ergibt sich nach S. 69

$$L = \frac{ds}{dH} \sin H, \quad L_c = \frac{ds_c}{dH_c} \sin H_c,$$

mithin

$$L : L_c = - \frac{ds}{ds_c} \cdot \operatorname{tg} H = - \operatorname{tg}^2 H = - \frac{r^2}{\varrho^2}.$$

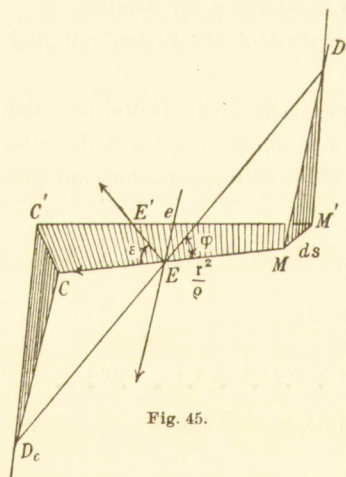


Fig. 45.

Die Abstände dieser Punkte von den Tangenten von (M) und (C) sind:

$$p : p_c = L \sin H : L_c \sin H_c \\ = - \operatorname{tg}^3 H = \frac{r^3}{\varrho^3}.$$

Die Gratlinien (D) und (D_c) der beiden rektifizierenden Flächen liegen (s. Kap. IX, S. 102) auf der Mittelfläche der Hauptnormalenfläche, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte $DD_c, D'D'_c, \dots$ schneiden die Hauptnormalen $MC, M'C', \dots$ in ihren Mittelpunkten E, E', \dots

In dem bei M rechtwinkligen Dreieck EMD ist der Winkel $DEM = \varphi$ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{DM}{EM} = \frac{L}{\frac{r^2}{\rho}} = \frac{\rho ds \sin H}{r^2 dH} = \frac{ds}{r dH}$$

gegeben, während aus dem Dreieck eEE' für den Winkel $CEE' = \varepsilon$ der Striktionslinie mit der Hauptnormalen die Relation

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{eE}{eE'} = \frac{dp}{dq} = \frac{ds \cos H}{d \frac{r^2}{\rho}} = \frac{ds \cos H}{\rho d(\sin^2 H)} = \frac{ds}{2\rho \sin H dH} = \frac{ds}{2r dH}$$

folgt.

Also wird:

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Hieraus folgt: *Die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung besitzt eine geodätische Striktionslinie, wenn die Kurve eine geodätische Linie einer Böschungsfäche ist.*

4. Übungen. 1. Die Kurve konstanter Krümmung, die auf einer Böschungsfäche geodätisch ist, liegt auf einer Rotationsfläche zweiter Ordnung; ihre rektifizierende Fläche besitzt als Gratlinie eine Kurve konstanter Steigung auf einer zweiten Rotationsfläche zweiter Ordnung. Der Orthogonalschnitt des Zylinders, auf dem diese Schraubenlinie geodätisch ist, ist eine Epizykloide oder Hypozykloide. Die Schraubenlinie und mit ihr die Kurve konstanter Krümmung ist algebraisch, wenn die zyklische Kurve algebraisch ist.¹⁾

2. Man bestimme die Hauptnormalenflächen aller Kurven konstanter Krümmung.

II. Die allgemeinen Schraubenlinien.

Die Schraubenlinien oder Zylinderloxodromen²⁾ waren im Verlaufe der Untersuchung schon wiederholt als Beispiele herangezogen worden. Ihre Haupteigenschaften seien hier noch einmal zusammengestellt und vervollständigt.³⁾

1. Die Zylinderfläche ist rektifizierende Fläche der Schraubenlinie, die Ebenen der ganzen Krümmung sind sämtlich untereinander und die Hauptnormalen ihnen parallel; die Hauptnormalen sind Normalen des Zylinders.

1) Math. Ann. 66, 534 ff. 1908.

2) Unter einer Loxodrome einer Fläche versteht man eine Kurve, die gegen die Krümmungslinien der Fläche unter konstantem Winkel geneigt ist. Die Krümmungslinien eines Zylinders sind die Erzeugenden und ihre Orthogonaltrajektorien.

3) Ausführlicheres, auch über besondere Klassen von Schraubenlinien gibt mit sorgfältiger Literaturangabe die Dissertation von Frieda Nugel, Halle 1912.

2. Die Verhältnisse der Radien ϱ , r , τ sind konstant, nämlich

$$\frac{r}{\varrho} = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\tau}{\varrho} = \sin \alpha, \quad \frac{\tau}{r} = -\cos \alpha,$$

wenn α den konstanten Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen die Mantellinie des Zylinders bedeutet.

3. Die Verhältnisse des Kontingenz-, Schmiegungs- und des Winkels ganzer Krümmung sind konstant, nämlich

$$\frac{d\tau}{dk} = \sin \alpha, \quad \frac{d\sigma}{dk} = -\cos \alpha, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = -\operatorname{tg} \alpha$$

und dk ist zugleich der Winkel der Projektionen zweier Krümmungshalbmesser auf die Ebene ganzer Krümmung, mithin der Kontingenzwinkel des Orthogonalschnitts der Fläche (Linie stärkster Krümmung).

4. Die sphärischen Bilder der Tangenten und Binormalen sind kleine Kreise, das Hauptnormalenbild ist ein größter Kreis; alle drei Bilder liegen in parallelen Ebenen.

5. Die Bogenelemente ds der Schraubenlinie und ds_0 des Orthogonalschnitts sind durch die Gleichung verknüpft:

$$ds_0 = ds \sin \alpha.$$

6. Daher besteht zwischen den Krümmungshalbmessern ϱ , ϱ_0 der Schraubenlinie und des Orthogonalschnitts die Beziehung

$$\varrho_0 = \varrho \sin^2 \alpha$$

und es ist mithin

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sin^2 \alpha}, \quad r = \frac{-\varrho_0}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad \tau = \frac{\varrho_0}{\sin \alpha}.$$

7. Der kürzeste Abstand dp zweier Hauptnormalen ist die Projektion des Bogenelementes auf die Erzeugungslinie des Zylinders, nämlich

$$dp = ds \cos \alpha = ds_0 \operatorname{cotg} \alpha = \varrho_0 \operatorname{cotg} \alpha dk.$$

8. Die Entfernung u des Striktionsstrahls zweier Hauptnormalen von dem entsprechenden Punkte der Kurve ist

$$u = \frac{\tau^2}{\varrho} = \varrho_0,$$

d. h.: Der Striktionsstrahl geht durch die Punkte der Evolute des Orthogonalschnitts, und die Striktionslinie der Fläche der Hauptnormalen projiziert sich in diese Evolute (S. 11). Daher ist das Bogenelement der Striktionslinie durch die Gleichung gegeben

$$d\bar{s}^2 = \varrho_0^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha \cdot dk^2 + d\varrho_0^2,$$

und die Tangente seiner Neigung gegen die Hauptnormale ist

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{ds \cos \alpha}{d(\varrho \sin^2 \alpha)} = \frac{ds_0}{d\varrho_0} \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

9. Der Abstand des Mittelpunktes der Schmiegunskugel von dem Krümmungsmittelpunkt ist

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma} = - \frac{d\varrho_0}{dk} \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos \alpha},$$

der Radius der Schmiegunskugel

$$R = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\varrho_0^2 + \left(\frac{d\varrho_0}{dk \cos \alpha}\right)^2}$$

und die Tangente seiner Neigung gegen die Schmiegunsebene:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{h}{\varrho} = \frac{-1}{\varrho_0 \cos \alpha} \cdot \frac{d\varrho_0}{dk}.$$

10. Die Polarkurve einer Schraubenlinie ist wieder eine Schraubenlinie.

11. Die Projektion der Krümmungsmittelpunktskurve auf die Ebene des Normalschnitts ist eine Zwischenevolute des Normalschnitts. (Unter Zwischenevolute¹⁾ einer Kurve (C) versteht man den Ort aller Punkte, die die Krümmungsradien von (C) in konstantem Verhältnis teilen).

III. Die gewöhnliche Schraubenlinie.

Die gewöhnliche Schraubenlinie oder die Schraubenlinie des Kreiszyinders teilt alle diese Eigenschaften; insbesondere folgt, da hier $\varrho_0 = \text{konst.}$ ist, aus Satz 8: $\eta = \frac{1}{2}\pi$; $d\bar{s} = dp = ds \cos \alpha$, $u = \varrho_0$; ferner aus Satz 5: $\varrho = \text{konst.}$, also auch $r = \text{konst.}$

Die gewöhnliche Schraubenlinie besitzt konstante Krümmung und konstante Torsion; ihre Hauptnormalenfläche hat die Zylinderachse als Striktionslinie, und die Hauptnormalen sind die Lote auf diese Achse.

Die gewöhnliche Schraubenlinie teilt also auch alle Eigenschaften der Kurven konstanter Krümmung, die im vorigen Abschnitt behandelt waren; also insbesondere gilt der Satz:

Die Kurve der Schmiegunskugelmittelpunkte einer gewöhnlichen Schraubenlinie ist wieder eine gewöhnliche Schraubenlinie.

Übung. Eine Schraubenlinie ist ihrer Polarkurve kongruent und liegt mit ihr auf demselben Kreiszyinder, wenn ihr Steigungswinkel $\alpha = \pm \frac{1}{4}\pi$ ist.

1) L. Braude, Diss. Heidelberg 1911.

Man denke sich in einem Punkte M einer gewöhnlichen Schraubenlinie das Hauptdreikant konstruiert und verschiebe es parallel zur Zylinderachse um die Strecke dp . Dann verschiebt sich der Punkt M auf der Mantellinie des Zylinders um dieselbe Strecke, während der Mittelpunkt E der Hauptnormale in M in den Mittelpunkt E' der benachbarten Hauptnormale rückt. Dreht man jetzt das System um die Zylinderachse durch den Winkel dk der ganzen Krümmung, so fällt die Hauptnormale in M mit der in M' zusammen, also fällt der Punkt M auf M' , die rektifizierende Ebene von M in die rektifizierende Ebene von M' (da sie ja die zu den zugehörigen Hauptnormalen senkrechten Ebenen sind) und die rektifizierende Gerade von M in die entsprechende Linie des Nachbarpunktes. Da nun alle Tangenten der Kurve (M) mit den rektifizierenden Geraden denselben Winkel α bilden, so muß auch die Tangente des Punktes M in die Tangente des Punktes M' übergegangen sein; d. h. aber, daß die beschriebene Bewegung das Hauptdreikant von M in das Hauptdreikant von M' übergeführt hat. Genau ebenso geht bei derselben Bewegung das Fundamentaldreikant von M' in das des benachbarten Punktes M'' über, für den $M'M'' = MM' = ds$ ist, da ja die Schiebungsgröße und Drehwinkel nur von ds abhängig sind. Eine aus Schiebung längs einer Achse und Drehung um dieselbe Achse komponierte Bewegung bezeichnet man als Schraubung, das konstante Verhältnis $\frac{dp}{dk}$ als den Parameter der Schraubung. Unsere Ergebnisse lassen sich nun folgendermaßen zusammenfassen:

Eine jede gewöhnliche Schraubenlinie bewegt sich in sich selbst, wenn man sie einer Schraubung um die Zylinderachse vom Parameter $\frac{dp}{dk} = \varrho_0 \cotg \alpha$ unterwirft. Bei dieser Bewegung fällt das Hauptdreikant eines beweglichen Punktes der Kurve der Reihe nach mit dem Hauptdreikant aller festen Kurvenpunkte zusammen.

Die Hauptnormalenfläche einer gewöhnlichen Schraubenlinie ist eine Wendelfläche. Denn sie wird durch die Schraubenbewegung einer die Achse senkrecht schneidenden Geraden beschrieben (S. 104): Umgekehrt sieht man:

Die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer Wendelfläche sind gewöhnliche Schraubenlinien.

IV. Die Kurven konstanter Steigung auf der Kugel.

Für die Schraubenlinien auf einer Kugel ist der Radius R der Schmiegunskugel konstant; zu der Gleichung

$$\frac{\varrho}{r} = - \operatorname{ctg} H \quad (H = \text{konst.})$$

der Schraubenlinien tritt also die Gleichung der sphärischen Kurven

$$\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)^2 = R^2 \quad (R = \text{konst.})$$

oder, wenn $d\sigma = ds : r = - ds \operatorname{ctg} H : \varrho$ eingesetzt wird:

$$\operatorname{tg}^2 H \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + 1 = \frac{R^2}{\varrho^2}.$$

Hieraus folgt:

$$\varrho^2 + \operatorname{ctg}^2 H \cdot s^2 = R^2.$$

Wickelt man die Tangentenfläche dieser Schraubenlinie in die Ebene ab, so verwandelt sich die Kurve in eine ebene Kurve, für die zwischen Krümmungsradius und Bogenlänge die eben gefundene Gleichung besteht, d. h. in eine zyklische Kurve, and zwar in eine Epizykloide, Zykloide oder Hypozykloide, je nachdem $\operatorname{tg}^2 \alpha \cong 1$ ist.¹⁾

Für den Orthogonalschnitt des zugehörigen Zylinders ergibt sich (nach S. 110):

$$\varrho_0^2 + \left(\frac{d\varrho_0}{dk \cos H}\right)^2 = R^2 \sin^4 H$$

und, da $dk = ds_0 : \varrho_0$ ist:

$$\left(\frac{d\varrho_0}{ds_0}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 H} + 1 = \frac{R^2}{\varrho_0^2} \sin^4 H.$$

Also:

$$\varrho_0^2 + \cos^2 H \cdot s_0^2 = R^2 \sin^4 H.$$

Der Orthogonalschnitt des zu einer sphärischen Schraubenlinie gehörigen Zylinders ist immer eine Epizykloide.

Die Normalebene einer jeden sphärischen Kurve gehen durch den Mittelpunkt der Kugel, sie umhüllen einen Kegel, der für die Schraubenlinien, deren Normalebene mit der Horizontalebene einen konstanten Winkel H bilden, ein Drehkegel mit vertikaler Achse ist. Der Schnittkreis dieses Kegels mit der Kugel ist die Hüllkurve aller größten Kreise, in denen die Kugel von den Normalebene geschnitten

1) Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. Leipzig 1908. S. 197. Cesàro-Kowalewski, Natürliche Geometrie. 1901. S. 9.

wird. Andererseits werden diese größten Kreise von den Tangenten der Schraubenlinie senkrecht geschnitten; diese kann also als Orthogonaltrajektorie der Kreise aufgefaßt werden und somit als sphärische Evolvente ihrer Hüllkurve. Es ist nur eine andere Ausdrucksweise für denselben Sachverhalt, wenn man den Satz so ausspricht:

Rollt ein größter Kugelkreis auf einem kleinen Kreise ab, so beschreibt jeder Punkt des ersten Kreises eine sphärische Schraubenlinie.¹⁾

Aus den sphärischen Schraubenlinien ergeben sich sofort die Kurven konstanter Steigung auf einem Rotationsellipsoid mit vertikaler Achse. Transformiert man den Raum dadurch, daß man alle zu den Erzeugenden eines Zylinders parallelen Strecken in dem konstanten Verhältnis verändert, so verwandeln sich die Schraubenlinien des Zylinders wieder in Schraubenlinien desselben Zylinders, nur mit einer anderen Steigung. Eine Kugel verwandelt sich in ein Rotationsellipsoid, dessen Achse der Zylinderachse parallel läuft. Umgekehrt läßt sich jedes Rotationsellipsoid durch eine zweckmäßig gewählte Transformation der beschriebenen Art in eine Kugel umformen. Damit ist der Satz gewonnen:

Der Orthogonalschnitt des Zylinders, der zu einer Kurve konstanter Steigung auf einem Rotationsellipsoid mit vertikaler Achse gehört, ist eine Epizykloide.

Ganz analog wie vorher kann man hieraus schließen, daß die Kurven, in die diese Schraubenlinien bei der Abwicklung ihrer Tangentenfläche in die Ebene sich verwandeln, zyklische Kurven sind.

V. Die zylindrokonische Schraubenlinie.

1. Der rektifizierende Zylinder. Auf einem Rotationskegel vom Mittelpunkte S , der Achse SD und der halben Öffnung $DSG = \gamma$ liege eine Loxodrome, deren Tangente MT gegen die Mantellinie SG des Kegels unter dem konstanten Winkel α geneigt sei. Sie hat den Mittelpunkt S zum asymptotischen Punkt, dem sie sich in unendlich vielen Windungen annähert. Eine Gerade ME parallel der Achse SD , die Erzeugende MG und die Tangente MT bilden in M eine Ecke, die an der Kante MG einen rechten Winkel hat, da die Tangentenebene des Kegels die Meridianebene SDG senk-

1) Betreffs der Literatur dieses ganzen Abschnitts sei auf die vorhin erwähnte Monographie von Fr. Nügel verwiesen.

recht schneidet. Die diesen rechten Winkel einschließenden Seitenflächen der Ecke haben die konstanten Winkel α und γ ; die Ecke bleibt daher unveränderlich, wo auch immer der Punkt M auf der Loxodrome liege. Die Tangenten der Kurve bilden somit einen konstanten Winkel H mit einer festen Richtung, der Richtung der Kegelachse. Dieser Winkel ergibt sich unmittelbar aus der sphärischen Abbildung. Der Richtung SD entspricht der Punkt s , den Mantellinien ein kleiner Kreis vom sphärischen Radius γ , auf dem g das Bild der Linie SG bedeutet.

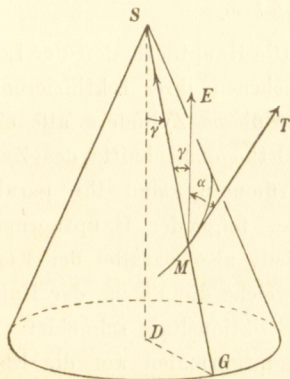


Fig. 46.

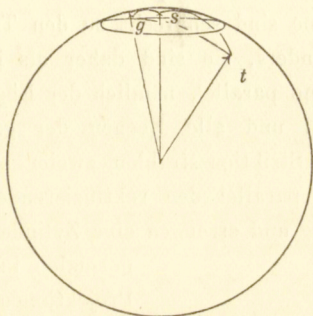


Fig. 47.

Das Tangentenbild t der Kurve liegt auf dem größten Kreise, der sg in g senkrecht schneidet, und zwar um $gt = \alpha$ von g entfernt. Hieraus ergibt sich der Winkel $H = st$ der Tangente mit der Achsenrichtung:

$$\cos H = \cos \alpha \cos \gamma,$$

also wie schon vorher gezeigt war, konstant; d. h. die Tangente MT der Loxodrome hat eine konstante Neigung gegen die Erzeugenden ME eines Zylinders, die parallel zur Kegelachse SD sind. Daher ist die Kurve (M) zugleich eine Loxodrome dieser Zylinderfläche und diese ihre rektifizierende Fläche. Man bezeichnet daher die Kurve (M) als zylindrokonische Loxodrome oder zylindrokonische Schraubenlinie.

Die Erzeugende ME ist die rektifizierende Gerade und die Tangentenebene EMT des Zylinders die rektifizierende Ebene. Es bildet daher die rektifizierende Ebene der Loxodrome mit der Meridianebene DSG einen konstanten Winkel ψ , für welchen $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha : \sin \gamma$ ist. Der Orthogonalschnitt des rektifizierenden Zylinders, d. h. die Projektion der

zylindrokonischen Schraubenlinie auf eine zur Kegelachse senkrechte Ebene ist daher eine logarithmische Spirale, deren Pol auf der Kegelachse liegt und deren Tangente den Radiusvektor, der vom Pole nach dem Punkte der Spirale geht, unter dem Winkel ψ schneidet.

Die rektifizierende Fläche der zylindrokonischen Schraubenlinie ist ein Zylinder, dessen Normalschnitt eine logarithmische Spirale ist; die Achse des Kegels steht auf der Ebene dieser Spirale in ihrem Pol senkrecht und die Meridianebene des Kegels bildet mit der Berührungsebene des Zylinders den konstanten Winkel ψ .

2. Die Hauptnormalenfläche. Die Hauptnormalen der Loxodrome sind senkrecht zu den Tangentenebenen ihres rektifizierenden Zylinders, sie sind daher als Normalen dieses Zylinders alle einer Ebene parallel, nämlich der Ebene des Orthogonalschnitts des Zylinders, und alle Ebenen der ganzen Krümmung sind ihr parallel. Die Striktionsstrahlen zweier aufeinander folgender Hauptnormalen sind parallel den rektifizierenden Geraden, also parallel der Kegelachse und erzeugen eine Zylinderfläche, welche die Fläche der Hauptnormalen in deren Striktionslinie schneidet. Die Projektionen der Hauptnormalen auf die Ebene des Orthogonalschnitts, der logarithmischen Spirale, sind deren Normalen und schneiden sich daher in den Krümmungsmittelpunkten c_0 dieser Kurve. Die Striktionsstrahlen der Hauptnormalen gehen durch die Punkte c_0 der Evolute der logarithmischen Spirale, und ihre Abstände u von den Kurvenpunkten M der Loxodrome sind gleich den Krümmungshalbmessern ρ_0 des Orthogonalschnitts. Nun ist die Evolute einer logarithmischen Spirale selbst wieder eine logarithmische Spirale von derselben Tangentenneigung ψ , aber um $\frac{1}{2}\pi$ in der Ebene gegen jene gedreht.¹⁾ Daher ist das (hier zylindrische!) Striktionsband der Hauptnormalen ein Zylinder,

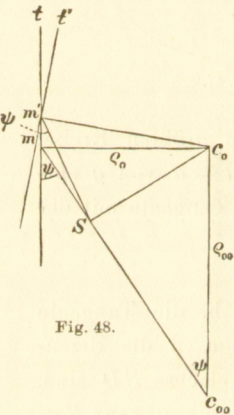


Fig. 48.

1) Man beweist diesen Satz aus der Theorie der ebenen Kurven folgendermaßen: Ist S der Pol der logarithmischen Spirale m und bilden die Tangenten t, t' in zwei aufeinander folgenden Punkten m, m' mit den Radienvektoren Sm, Sm' gleiche Winkel ψ , so folgt aus dem Dreieck $Sm m'$, daß der Winkel mSm' der Radienvektoren gleich dem Kontingenzwinkel $tm't'$ der Spirale ist. Dieser Kontingenzwinkel ist aber gleich dem Winkel $mc_0 m'$ der Normalen $mc_0, m'c_0$, und daher liegen die Punkte $m,$

dessen Normalschnitt eine logarithmische Spirale von gleicher Neigung ψ , wie der Normalschnitt des rektifizierenden Zylinders, aber um $\frac{1}{2}\pi$ gegen diesen gedreht.

3. Natürliche Gleichungen. Die Verhältnisse der drei Radien ϱ , r , r sind, wie bei allen Schraubenlinien, konstant, weil der Winkel H konstant ist, den die Tangente der Kurve mit der rektifizierenden Geraden bildet. Man hat (S. 30) gefunden:

$$\frac{r}{\varrho} = -\operatorname{tg} H, \quad \frac{r}{\varrho} = \sin H, \quad \frac{r}{r} = -\cos H.$$

Ebenso sind die Verhältnisse des Kontingenz-, Schmiegungs- und Winkels der ganzen Krümmung konstant, nämlich

$$\frac{d\tau}{dk} = \sin H, \quad \frac{d\sigma}{dk} = -\cos H, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = -\operatorname{tg} H.$$

dk ist zugleich der Winkel zweier Krümmungshalbmesser oder der Kontingenzwinkel des Orthogonalschnitts der rektifizierenden Fläche.

Zwischen den Bogenelementen ds der Loxodrome und ds_0 des Orthogonalschnitts besteht die Gleichung

$$ds_0 = ds \sin H,$$

zwischen den Krümmungshalbmessern ϱ und ϱ_0 der Loxodrome und des Orthogonalschnitts die Relation:

m' , S , c_0 in einem Kreise, der in der Grenze in m berührt und also die Normale mc_0 zum Durchmesser hat. Daher bildet der Radiusvektor Sc_0 der Evolute mit deren Tangente gleichfalls den Winkel ψ und ist senkrecht zum Radiusvektor Sm der Spirale (m). Daher ist die Evolute selbst eine logarithmische Spirale, und ihre vom gemeinsamen Pole S ausgehenden Radienvektoren stehen senkrecht auf den Radienvektoren der ursprünglichen Spirale. Die beiden Normalen mc_0 , $m'c'_0$ der Spirale m bestimmen das Element der Evolute und sind Tangenten an diese. — Die Normalen c_0c_{00} , $c'_0c'_{00}$ dieser Evolute bestimmen den Punkt c_{00} der zweiten Evolute und bilden denselben Winkel mit einander, wie die Normalen in m und m' . Der Radiusvektor Sc_{00} der zweiten Evolute steht daher auf dem Radiusvektor Sc_0 der ersten senkrecht, d. h. es liegen m , S , c_{00} in gerader Linie. Es ist mc_0 der Krümmungshalbmesser ϱ_0 der ersten und c_0c_{00} der Krümmungshalbmesser der zweiten Evolute und daher $\cotg \psi = \frac{\varrho_{00}}{\varrho_0}$. Sind daher die Punkte m , c_0 , c_{00} der ursprünglichen Spirale und ihrer ersten und zweiten Evolute bekannt, so kann der Pol S und die Neigung ψ der Tangente gegen den Radiusvektor des Pols gefunden werden. Ein Lot c_0S , vom Evolutenpunkt c_0 auf die Linie mc_{00} gefällt, welche den Punkt m der Spirale mit dem entsprechenden Punkte ihrer zweiten Evolute verbindet, liefert der Pol S und das Verhältnis $\varrho_{00} : \varrho_0$ der Krümmungshalbmesser der zweiten und ersten Evolute gibt die Kotangente der Neigung ψ .

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{ds : d\tau}{ds_0 : dk} = \frac{1}{\sin^2 H}$$

und daher wird:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sin^2 H}, \quad r = \frac{-\varrho_0}{\sin H \cos H}, \quad r = \frac{\varrho_0}{\cos H}.$$

Da die natürliche Gleichung der logarithmischen Spirale

$$\varrho_0 = s_0 \operatorname{ctg} \psi$$

lautet¹⁾, erhält man als die natürlichen Gleichungen der zylindrokonischen Schraubenlinie

$$\frac{r}{\varrho} = -\operatorname{ctg} H,$$

$$\varrho = \frac{k}{\sin H} s = \frac{\operatorname{ctg} \psi}{\sin H} s.$$

4. Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche. Da der Striktionsstrahl zweier aufeinander folgender Hauptnormalen durch den Evolutenpunkt des Orthogonalschnitts geht, so ist $u = \varrho_0$ und der kürzeste Abstand dp der Hauptnormalen (S. 98)

$$dp = ds \cos H = ds_0 \operatorname{ctg} H$$

und daher der Parameter der Hauptnormalenfläche

$$K = \frac{dp}{dk} = \frac{ds_0}{dk} \operatorname{ctg} H = \varrho_0 \operatorname{ctg} H.$$

Ferner ist der Neigungswinkel η der Striktionslinie der Fläche der Hauptnormalen gegen den Striktionsstrahl durch die Gleichung

$$\frac{d\varrho_0}{ds \cos H} = \frac{d\varrho_0}{ds_0} \operatorname{tg} H = \frac{d\varrho_0 : dk}{ds_0 : dk} \operatorname{tg} H = \frac{\varrho_{00}}{\varrho_0} \operatorname{tg} H = \operatorname{cotg} \psi \operatorname{tg} H$$

gegeben, wenn wie oben $\varrho_{00} = d\varrho_0 : dk$ den Krümmungshalbmesser der Evolute bezeichnet. Da dieser Wert konstant ist, so bildet die Striktionslinie auf dem Zylinder der Striktionsstrahlen eine Loxodrome.

5. Die Fläche der Schmiegunskugelradien. Der Neigungswinkel μ der Kurve der Krümmungsmittelpunkte gegen die Krümmungsachse genügt der Gleichung (S. 111):

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{d\varrho}{\varrho d\sigma} = \frac{d\varrho_0}{\sin^2 H} : \frac{\varrho_0}{\sin^2 H} : dk \cos H = \frac{d\varrho_0}{dk} : \varrho_0 \cos H = \frac{\varrho_{00}}{\varrho_0 \cos H} = \frac{\operatorname{cotg} \psi}{\cos H}$$

d. h. es ist

$$\cos H = \operatorname{cotg} \psi \operatorname{cotg} \mu.$$

1) Wieleitner, Spezielle Kurven S. 221.

Der Winkel μ wird von der Tangente der Kurve der Krümmungsmittelpunkte und der Krümmungsachse gebildet; er ist aber gleich dem Winkel, welchen der Radius der Schmiegunngskugel mit der Hauptnormalen bildet (S. 54). Der Radius der Schmiegunngskugel und die Hauptnormale sind aber senkrecht zur Tangentenebene der Schmiegunngskugel und zur rektifizierenden Ebene. Daher bilden die Tangentenebene der Schmiegunngskugel und die rektifizierende Ebene gleichfalls miteinander den Winkel μ und zwar an der Tangente der Loxodrome, welche ihre Durchschnittslinie ist. Die rektifizierende Ebene bildet mit der Meridianebene des Kegels, auf welchem die Loxodrome liegt, den Winkel ψ , und zwar liegt dieser Winkel an deren Durchschnittslinie, nämlich an der rektifizierenden Geraden. Die drei genannten Ebenen, die Tangentenebene der Schmiegunngskugel, die rektifizierende Ebene und die Meridianebene des Kegels bilden in dem Kurvenpunkt M ein Dreikant, dessen Kanten die Tangente, die rektifizierende Gerade und die Schnittlinie der Tangentenebene der Schmiegunngskugel mit der Meridianebene des Kegels sind. Die vorstehende Gleichung zeigt, daß die Tangentenebene der Schmiegunngskugel zur Meridianebene des Kegels senkrecht ist. Es ist aber auch die Tangentenebene des Kegels, welche durch die Tangente der Loxodrome in M geht, senkrecht zu dieser Meridianebene, und da es durch die Tangente der Loxodrome nur eine Ebene gibt, welche senkrecht auf der Meridianebene des Kegels steht, so fällt die Tangentenebene der Schmiegunngskugel mit der Tangentenebene des Kegels zusammen.

Der Schmiegunngskugelradius steht also auf der Berührungsebene des Kegels senkrecht, d. h. die Schmiegunngskugelradien einer zylindrokonischen Schraubenlinie schneiden sämtlich die Achse des zugehörigen Kreiskegels.¹⁾

Es ist wohl zu beachten, daß dieser Kreiskegel durchaus nicht mit dem Schmiegunngskegel der Kurve zusammenfällt, obwohl beide Kegel im Punkte M dieselbe Berührungsebene besitzen; ihre Achsen sind windschief und kreuzen sich unter konstantem Winkel.

1) Dies Ergebnis läßt sich noch einfacher aus der Theorie der Zwischenevolventen einer logarithmischen Spirale ablesen. Die Krümmungsmittelpunktkurve (C) der Kurve (M) projiziert sich in eine solche Zwischenevolvente (S. 111) und die Tangenten an die Polarkurve in eine bestimmte ihrer schiefen Evoluten, so daß die Schmiegunngskugelradien sich als die Polstrahlen der logarithmischen Spirale abbilden. Hieraus ergibt sich aber unmittelbar der oben ausgesprochene Satz.

6. Übungen. 1. Mit einer zylindrokonischen Schraubenlinie sind drei andere Kurven derselben Art verknüpft: die Krümmungsmittelpunktskurve, die Polarkurve, die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche. Alle vier Kurven liegen auf konzentrischen Kreiskegeln, deren Achsen zusammenfallen.

2. Welches ist der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskegel einer zylindrokonischen Schraubenlinie?

3. Man untersuche die Fläche der Schmiegungskegelradien einer zylindrokonischen Schraubenlinie. Welches ist die Striktionslinie dieser Fläche?

4. Man zeige, daß die Kurven konstanter Steigung auf Rotationsflächen zweiten Grades isogonale Trajektorien der Erzeugenden zweier Kegel sind, deren Spitzen in den Brennpunkten der Fläche liegen. Man suche ihre natürlichen Gleichungen

$$(\rho : r = m; \rho^2 + As^2 = B),$$

die zugehörigen Zylinder und untersuche ihre Krümmungsmittelpunktskurve, Polarkurve, ihre Hauptnormalenfläche.

VI. Bertrandsche Kurven.

1. Asymptotenlinien auf Hauptnormalenflächen. Zu jeder ebenen Kurve gibt es eine Schar paralleler Kurven, welche mit ihr gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen. Die Fläche dieser Hauptnormalen ist die Ebene der Kurve. Dasselbe findet bei der Schraubenlinie des Kreiszyinders statt. Denn da diese Linie eine geodätische Linie des Zylinders ist, so sind ihre Hauptnormalen zugleich Normalen dieser Fläche; sie bilden eine Wendelfläche mit der Zylinderachse als Striktionslinie (S. 112). Diese Wendelfläche wird aber von der Zylinderschar, welche die Achse gemein hat, in Schraubenlinien geschnitten und ist deren gemeinsame Hauptnormalenfläche. Die Wendelfläche ist die einzige windschiefe Fläche, die für unendlich viele ihrer Kurven Hauptnormalenfläche ist; auf einer anderen Linienfläche gibt es entweder keine oder eine oder zwei Kurven, für die sie zugleich Fläche der Hauptnormalen ist. Beispiele für die Kurven, deren Hauptnormalenfläche noch für eine zweite Kurve dieselbe Bedeutung hat, sind die Kurven konstanter Krümmung, die ja mit der Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen (S. 106).

Jede Kurve ist eine asymptotische Linie auf der Fläche der Hauptnormalen und zwar zugleich eine rechtwinklige Trajektorie der Erzeugenden dieser Fläche (S. 91). Die Frage, ob und wie

viel Kurven auf einer windschiefen Fläche möglich sind, für welche sie gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen ist, kommt daher auf die Untersuchung hinaus, wie viel Asymptotenlinien eine Erzeugende g einer windschiefen Fläche rechtwinklig schneiden können. Die Fläche selbst kann hierfür durch das Schmiegunghyperboloid vertreten werden, welches sie längs g oskuliert, d. h. mit ihr außer g noch zwei unmittelbar folgende Erzeugende gemein hat. Jeder rechtwinklig schneidenden Asymptotenlinie entspricht eine erzeugende Gerade des Hyperboloids, die auf g senkrecht steht. Nun sind alle Geraden eines Hyperboloids parallel den Mantellinien einer Kegelfläche zweiten Grades. Denken wir diese Kegelfläche gebildet und suchen wir die Mantellinie γ derselben auf, welche g parallel ist. Eine Ebene, die durch den Mittelpunkt der Kegelfläche senkrecht zu γ gelegt wird, enthält alle Richtungen, welche zu γ , also auch zu g senkrecht sind, also auch die Richtungen der Erzeugenden des Hyperboloids, die auf g senkrecht stehen. Diese Ebene schneidet die Kegelfläche entweder in keiner, oder einer oder zwei Geraden. Suchen wir daher umgekehrt zu diesen als Erzeugenden des Kegels die parallelen Geraden des Schmiegunghyperboloids auf, so sind sie die Tangenten der Kurven, die g zur gemeinschaftlichen Hauptnormalen haben, in den Punkten, in welchen sie g schneiden. In besonderen Fällen kann das Schmiegunghyperboloid ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid sein; dann zerfällt die Kegelfläche in zwei zueinander senkrechte Ebenen, und es gibt zu jeder Geraden γ in der einen dieser Ebenen unendlich viele Geraden der andern welche zu γ senkrecht sind. Dann gibt es aber auch unendlich viele Kurven, die g zu gemeinsamer Hauptnormale haben. Daher gilt der Satz:

Auf einer windschiefen Fläche gibt es entweder keine, oder eine oder zwei oder unendlich viele Kurven, für welche eine Erzeugende g die gemeinschaftliche Hauptnormale ist. Die Entscheidung, welcher dieser Fälle eintritt, hängt von der Beschaffenheit der Linienfläche 20 ab, welche sich längs der Erzeugenden g der windschiefen Fläche anschmiegt. Ist diese ein Hyperboloid (kein hyperbolisches Paraboloid) und wird die Kegelfläche, deren Erzeugungslinien den Erzeugungslinien des Hyperboloids parallel sind, von einer Ebene durch die Spitze welche zu g senkrecht ist, in 0, 1, 2 Geraden geschnitten, so ist g für ebenso viele Kurven auf der windschiefen Fläche gemeinschaftliche Hauptnormale. Ist aber die Schmiegunghyperboloid ein gleich-

seitiges hyperbolisches Paraboloid, so gibt es unendlich viele solcher Kurven.

Der Satz darf nicht dahin mißverstanden werden, daß jede windschiefe Fläche als Ganzes die Hauptnormalenfläche von zwei reellen oder imaginären, ev. zusammenfallenden Kurven wäre. Man kann allerdings auf jeder Erzeugenden nach dem eben hergeleiteten Satze 0, 1, 2 Punkte bestimmen, für welche die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden die Gerade g als Hauptnormale besitzen, wofern nicht alle Orthogonaltrajektorien g zur Hauptnormale haben. Ist dies letztere für jede Erzeugende der Fall, d. h. reduziert sich die Schmiegungsfläche für alle Erzeugende auf ein gleichseitiges Paraboloid, so ist die Fläche für alle ihre Orthogonaltrajektorien die gemeinsame Hauptnormalenfläche, und es wird später gezeigt werden, daß dies nur für den schon erwähnten Fall der Wendelfläche eintreten kann. Wenn dagegen die Schmiegungsfläche ein Hyperboloid ist, so werden im allgemeinen die beiden (reellen oder imaginären) Orthogonaltrajektorien, die die Erzeugende g als gemeinsame Hauptnormale haben, von denen verschieden sein, für die die Erzeugende g' dieselbe Bedeutung hat. Vielmehr wird im allgemeinen jede Orthogonaltrajektorie einer windschiefen Fläche eine der erzeugenden Geraden als Hauptnormale besitzen, und es bedarf einer besonderen Bedingung, wenn die durch die vorige Konstruktion durch g, g', g'', \dots unabhängig voneinander bestimmten Kurven zusammenfallen sollen. Jedenfalls aber ist ihre Zahl sicher nicht größer als zwei.

Eine windschiefe Fläche ist entweder für alle Orthogonaltrajektorien ihrer erzeugenden Geraden Hauptnormalenfläche oder für höchstens zwei von ihnen.

2. Kreuzungswinkel und Abstand zweier Punkte mit gemeinsamen Hauptnormalen. Wir wollen jetzt die Beziehungen entwickeln, welche zwischen zwei Kurven (M) und (N) bestehen müssen, wenn sie in den Punkten M und N , M' und N' , M'' und N'' , \dots gemeinschaftliche Hauptnormalen MN , $M'N'$, $M''N''$, \dots haben sollen. Da die Hauptnormalen gemeinschaftlich sind, so sind es auch die Ebenen der ganzen Krümmung und beide Kurven besitzen parallele rektifizierende Ebenen und rektifizierende Geraden. Daher ist auch der Winkel dH benachbarter rektifizierender Geraden von (M) gleich dem Winkel dH_1 der entsprechenden mit ihnen parallelen rektifizierenden Geraden von (N). Diese Winkel dH , dH_1 sind aber die Änderungen der Winkel H und H_1 ,

welche die rektifizierenden Geraden beider Kurven mit ihren Tangenten bilden. Es ist daher $dH = dH_1$ oder $d(H - H_1) = 0$, mithin $H - H_1$ konstant für den ganzen Verlauf der beiden Kurven. Legt man nun durch die gemeinsame Hauptnormale MN und die Tangente in M die Schmiegungeebene des Punktes M und durch dieselbe Hauptnormale und die rektifizierende Gerade von M die Ebene, welche den kürzesten Abstand der Hauptnormalen von der folgenden Hauptnormalen enthält, so bilden beide Ebenen, da sie zur rektifizierenden Ebene von M senkrecht sind, den Winkel H mit einander. Ebenso bildet die Schmiegungeebene des Punktes N mit jener Ebene den Winkel H_1 . Daher ist $H - H_1$ der Winkel der Schmiegungeebenen beider Kurven in den Punkten M und N derselben Hauptnormale und folglich auch der Winkel, unter dem sich die Tangenten in M und N kreuzen. Dieser Winkel ist also konstant, d. h.:

Haben zwei Kurven (M) und (N) gemeinschaftliche Hauptnormalen, so kreuzen sich die Tangenten in den Punkten M und N , in welchen sie dieselbe Hauptnormale treffen, unter konstantem Winkel.

Dasselbe Ergebnis liefert noch schneller die Betrachtung der sphärischen Abbildung. Die Hauptnormalenbilder von (M) und (N) sind entweder identisch oder ein Paar Gegenkurven. Die rektifizierenden Ebenen beider Kurven haben demnach dasselbe Bild, also sind ihre rektifizierenden Geraden entweder durch dieselbe Kurve oder durch Gegenkurven abgebildet. Da das Tangentenbild einer Kurve eine sphärische Evolute des Bildes der rektifizierenden Gratlinie ist, so sind die Tangentenbilder von (M) wie von (N) Evoluten ein und derselben sphärischen Kurve (oder auch: Orthogonalschnitte einer und derselben Schar von größten Kreisen); entsprechende Punkte t und t_1 haben also immer einen konstanten sphärischen Abstand und dieser ist $H - H_1$.

Da beide Kurven die Erzeugenden senkrecht schneiden, ist (S. 79) der Abstand entsprechender Punkte konstant, d. h.:

Zwei Kurven, welche gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen, haben konstanten Abstand voneinander.

3. Die Bertrand'sche Relation. Da die Hauptnormalen einer Kurve (M) im allgemeinen nicht gleichzeitig Hauptnormalen einer zweiten Kurve (N) sind, muß für die Kurve (M) irgend eine Bedingung bestehen. Diese ist nach Bertrand¹⁾ eine lineare Re-

1) Journal de Mathém. pures et appliquées (1) 15.

recht zu den Erzeugenden dieser Fläche, so sind diese parallel den rektifizierenden Ebenen von (M) und erzeugen eine abwickelbare Fläche, parallel jener, sodaß ihre Erzeugenden den Erzeugenden jener parallel sind und ihre Gratlinie denselben Kontingenzwinkel besitzt, wie sie. Die Ebene dieser Art, durch N senkrecht zu MN geführt, liefert aber das rechtwinklige unendlich kleine Dreieck $NN'Q$, für welches, wie oben die Gleichung

$$\frac{a}{\rho} - \frac{a \cotg \alpha}{r} = 1$$

besteht. Vergleicht man diese mit

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1$$

so folgt, daß $a \cotg \alpha = b$, also α konstant sein muß. Der Winkel α ist der Winkel, den die Tangenten in M und N miteinander bilden. Dieser Winkel ist gleich der Differenz der Winkel H und H_1 , welche die rektifizierenden Geraden von (M) und ihrer Parallellfläche an (N) mit den Tangenten der beiden Kurven in M und N bilden. Daher ist die Differenz $H - H_1$ konstant. Es wächst aber H um den Kontingenzwinkel der Gratlinie der rektifizierenden Fläche von (M) und mithin H_1 um denselben Winkel. Daher ist die Parallellfläche nach Früherem die rektifizierende Fläche von (N) , und da ihre Tangentenebenen senkrecht zu MN sind, so sind MN , $M'N'$, . . . die Hauptnormalen nicht bloß von (M) , sondern auch von (N) . Daher:

Besteht zwischen der Krümmung $\frac{1}{\rho}$ und Schmiegunq $\frac{1}{r}$ einer Kurve (M) eine lineare Relation $\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1$, so gibt es auf der Fläche ihrer Hauptnormalen in konstantem Abstände a eine zweite Kurve (N) , welche mit (M) gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen besitzt und deren Tangenten gegen die Tangenten der ersteren unter dem Kreuzungswinkel α geneigt sind, für den $\cotg \alpha = -b : a$ ist.

Wegen der grundlegenden Bedeutung der Bertrandschen Untersuchungen für die Theorie der betrachteten Kurven werden sie als Bertrandsche Kurven bezeichnet.

4. Andere Form der Bertrandschen Relation. Wäre man statt von der Kurve (M) von der Kurve (N) ausgegangen, deren Krümmungs- und Schmiegunqshalbmesser ρ' und r' sein mögen, so hätte man (Fig. 49) aus dem Dreieck $MM'Q'$ gezogen:

$$\sin \alpha = \pm \frac{a d\sigma'}{M M'}, \quad \cos \alpha = \pm \frac{(\varrho' + a) d\tau'}{M M'}$$

und weiter erhalten

$$\pm \frac{a}{\varrho'} + \frac{b}{r'} = 1,$$

wo wie vorher $-a \cotg \alpha = b$ gesetzt ist.

Ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so wird $\varrho = a$; d. h. die Kurven konstanter Krümmung gehören, wie von vorn herein zu erwarten, auch zu den gesuchten Bertrand'schen Kurven.

Als Grenzfall kann man auch die Kurven konstanter Torsion zu den Bertrand'schen Kurven zählen; für sie verschwindet der konstante Kreuzungswinkel gleichzeitig mit dem konstanten Abstand, sodaß das Produkt $a \cotg \alpha$ gleich dem Schmiegungradius wird.

Für $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ wird $b = 1$, und die Bertrand'sche Relation reduziert sich auf:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a}.$$

Es genügen daher auch die Kurven, für welche die Summe der Krümmung und Schmiegungradius konstant ist, der Bedingung gemeinschaftlicher Fläche der Hauptnormalen.

5. Torsionsprodukt. Durch Elimination von a aus den beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r} \cotg \alpha = \frac{1}{a}, \quad \mp \frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{r'} \cotg \alpha = \frac{1}{a}$$

folgt

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \cotg \alpha - \left(\frac{1}{\varrho} \pm \frac{1}{\varrho'}\right) = 0; \quad \text{also} \quad \cotg \alpha = \frac{\frac{1}{\varrho} \pm \frac{1}{\varrho'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}$$

die Elimination von α gibt

$$\frac{1 - \frac{a}{\varrho}}{1 \pm \frac{a}{\varrho'}} \cdot \frac{r}{r'} = 1 \quad \text{oder} \quad a = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{r'} \pm \frac{1}{\varrho'} \cdot \frac{1}{r}}$$

Die Vorzeichen hängen von der gegenseitigen Lage der Kurven (M) und (N) ab; sie werden in Nr. 8 genauer charakterisiert.

Aus

$$\sin \alpha = \pm \frac{a d\sigma}{ds}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{a d\sigma'}{ds'}$$

folgt mit Hilfe von

$$r = \frac{ds}{d\sigma}, \quad r' = \frac{ds'}{d\sigma'};$$

$$r r' = \left(\frac{a}{\sin \alpha}\right)^2,$$

d. h.:

Das Produkt der Torsionen zweier Kurven von gemeinsamer Fläche der Hauptnormalen in den Punkten derselben Hauptnormalen hat für den ganzen Verlauf der Kurven denselben Wert.

Setzt man die beiden für $\sin \alpha$ gefundenen Werte einander gleich, so erhält man einen Ausdruck für das Verhältnis der γ Torsionen zugeordneter Bertrandscher Kurven.

Aus:

$$\frac{a d\sigma}{ds'} = \frac{a d\sigma'}{ds}$$

ergibt sich, wenn man durch $a ds ds'$ dividiert:

$$r ds'^2 = r' ds^2$$

oder

$$r : r' = ds^2 : ds'^2.$$

Die Torsionsradien zweier Bertrandscher Kurven in entsprechenden Punkten verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Bogenelemente.

6. Teilverhältnis der Krümmungsmittelpunkte. Es ist

$$\cos \alpha = (\rho - a) \frac{d\tau}{ds'}, \quad \cos \alpha = (\rho' + a) \frac{d\tau'}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{ds}{d\tau} = \rho, \quad \frac{ds'}{d\tau'} = \rho',$$

also:

$$\cos^2 \alpha = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \left(1 + \frac{a}{\rho'}\right).$$

Diese Relation läßt eine interessante geometrische Interpretation zu. Sind auf der Hauptnormalen MN die Krümmungsmittelpunkte der Kurven (M) und (N) die Punkte C und C' , so hat man

$$MC = \rho, \quad NC' = \rho', \quad MC' = \rho' + a, \quad NC = \rho - a$$

und mithin

$$\frac{MC}{CN} : \frac{MC'}{C'N} = \cos^2 \alpha,$$

d. h.:

Der konstante Abstand MN zweier Kurven (M) und (N) gemeinschaftlicher Hauptnormalen wird durch die Krümmungsmittelpunkte C, C' nach konstantem Doppelverhältnis geteilt. Der Wert dieses Doppelverhältnisses ist das Quadrat des Kosinus des konstanten Winkels, unter dem sich die Tangenten in M und N kreuzen.¹⁾

Da dieser Wert positiv ist, so folgt:

Die Krümmungsmittelpunkte beider Kurven liegen entweder beide zwischen M und N oder außerhalb der Strecke MN , niemals aber

1) A. Mannheim, Comptes rendus Bd. 85. 1877.

liegt der eine dazwischen und der andere außerhalb. M, N, C, C' können nie vier harmonische Punkte sein.

Die Herleitung knüpfte an die Figur 49, doch gilt der Satz auch in jedem andern Fall, wenn auch in der Zwischenrechnung die Vorzeichen sich abändern können. Der Kürze halber sei die Ausarbeitung der verschiedenen möglichen Fälle hier übergangen.

7. Beziehungen zwischen den Krümmungen zugeordneter Bertrand'scher Kurven. Aus den Relationen

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1, \quad \mp \frac{a}{\rho'} + \frac{b}{r'} = 1$$

ergibt sich, wenn wir die Bogenelemente ds, ds' beider Kurven einführen,

$$ds = a d\tau + b d\sigma, \quad ds' = \mp a d\tau' + b d\sigma'.$$

Ferner ist:

$$\begin{cases} ds'^2 = \overline{NN'^2} = \overline{N'Q^2} + \overline{QN^2} = \overline{N'Q^2} + \overline{N'Q^2} \cotg^2 \alpha = (1 + \cotg^2 \alpha) \overline{N'Q^2} \\ = (1 + \cotg^2 \alpha) (\overline{M'N'} d\sigma)^2 = (1 + \cotg^2 \alpha) a^2 d\sigma^2 = (a^2 + b^2) d\sigma^2 \end{cases}$$

und ähnlich

$$\begin{cases} ds^2 = \overline{MM'^2} = \overline{M'Q^2} + \overline{Q'M^2} = \overline{M'Q^2} + \overline{M'Q^2} \cotg^2 \alpha \\ = (1 + \cotg^2 \alpha) \overline{M'Q^2} = (1 + \cotg^2 \alpha) (a d\sigma')^2 = (a^2 + b^2) d\sigma'^2, \end{cases}$$

also:

$$ds'^2 = (a^2 + b^2) d\sigma^2, \quad ds^2 = (a^2 + b^2) d\sigma'^2.$$

Hieraus folgt:

$$d\tau' = \pm \frac{b d\tau - a d\sigma}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d\sigma' = \pm \frac{a d\tau + b d\sigma}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

mithin

$$\rho' = \frac{ds'}{d\tau'} = \pm \frac{(a^2 + b^2) d\sigma}{b d\tau - a d\sigma} = \frac{a^2 + b^2}{\frac{b}{\rho r} - \frac{a}{r^2}} = \pm \frac{(a^2 + b^2) \rho}{br - a\rho}$$

oder wegen $b = r \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)$, bzw. $b = -a \cotg \alpha$,

$$\rho' = \pm \frac{\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2}{\frac{1}{\rho} - a \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)} = \pm \frac{a\rho}{\sin \alpha (r \cos \alpha - \rho \sin \alpha)}$$

und ebenso

$$r' = r \left[\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 \right].$$

Die letzte Formel ist natürlich inhaltlich gleichwertig mit dem Ergebnis der Nr. 6.

Übung. Man leite die Ergebnisse der letzten Nummer mittelst der sphärischen Abbildung her.

8. Die Lage eines Paares Bertrandscher Kurven auf ihrer Hauptnormalenfläche. Die in den vorigen Nummern auftretenden scheinbaren Unsicherheiten in der Bestimmung der Vorzeichen hätten sich zumeist formal durch die Bemerkung heben lassen, daß die Bogenelemente und Krümmungsradien absolute Größen sind. Eine wirkliche Einsicht in dem Sachverhalt wird aber erst gewonnen, wenn man auf den geometrischen Inhalt der Formeln zurückgeht.

Die Kurven (M) und (N) sind zwei Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden ihrer gemeinsamen Hauptnormalenfläche, und für jede von ihnen besteht eine lineare Relation zwischen Krümmung und Schmiegunq. Auf derselben Fläche liegen auch die Kurven (C) und (C') der Krümmungsmittelpunkte von (M) und (N), und zwar so, daß (M) und (C), (N) und (C') auf verschiedenen Seiten der Striktionslinie (E) liegen (S. 98). Dagegen können (M) und (N) sowohl auf derselben als auch auf verschiedenen Seiten der Striktionslinie liegen.

1. *Die Kurven (M) und (N) liegen auf derselben Seite der Striktionslinie.*

Die Hauptnormalen MC und $M'C'$ beider Kurven sind in diesem Falle gleichgerichtet, und, wenn (M) von (E) weiter entfernt ist als (N), so wird der Abstand $MN = a$ positiv, also $NM = -a$ negativ zu rechnen sein. Der Winkel H , um den man die Tangente von (M) drehen muß, um sie mit dem Striktionsstrahl parallel zu richten, ist für Kurven positiver Torsion größer als $\frac{1}{2}\pi$ und wächst bis π , wenn (M) sich dem Punkte E immer mehr nähert. Für die Tangente in N ist demnach $H > H'$ und somit für $d\sigma > 0$ der Winkel

$$\alpha = H - H'$$

der beiden Bertrandschen Kurven negativ.

Für Kurven negativer Torsion dagegen wird $\alpha = H - H' > 0$, da der Winkel zwischen der Tangente an die Orthogonaltrajektorie und dem Striktionsstrahl um so kleiner ist, je mehr die Kurve sich dem Striktionsstrahl nähert. Beide Male aber ist H und H' gleich-

zeitig spitz oder stumpf, d. h. die Kurven (M) und (N) haben immer dasselbe Vorzeichen der Torsion.

Die Gleichung für (M), die in Nr. 3 mit Hilfe der Fig. 49 hergeleitet wurde, also unter der Annahme negativer Torsion, gilt ebenso auch für Kurven positiver Torsion, während für (N) die Gleichung

$$(N) \quad -\frac{a}{\rho'} - \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{r'} = 1$$

gilt. Es ist sehr anzuraten, die Herleitung dieser Relation, ebenso wie der folgenden, mit Hilfe zweckmäßiger Figuren auch wirklich durchzuführen.

Dabei ist wohl zu beachten, daß in der Gleichung für (N) der Winkel α eine andere Rolle spielt wie in der für (M): es ist nicht der Winkel, um den man die Tangente der durch die Gleichung (N) dargestellten Kurve zu drehen hat, um sie mit der Tangente der zugeordneten Kurve parallel zu drehen, sondern vielmehr der negative Wert dieses Winkels. Überhaupt sind in diesem Falle die Kurven (M) und (N) nicht in jeder Hinsicht gleichberechtigt.

2. Die Kurven (M) und (N) liegen auf verschiedenen Seiten der Striktionslinie.

Die Kurven (M) und (N) haben jetzt entgegengesetzte Hauptnormalenrichtungen, und zwar liegt (C) mit (N), (C') mit M auf derselben Seite der Striktionslinie. Ist $|\alpha| < \frac{1}{2}\pi$, so liegen (M) und (N) beide auf dem durch ihre Krümmungsmittelpunktkurven begrenzten Teil der Hauptnormalenfläche, ist $|\alpha| = \frac{1}{2}\pi$, so fällt (C) mit (N) und gleichzeitig (C') mit (M) zusammen, ist $|\alpha| > \frac{1}{2}\pi$, so liegen die Krümmungsmittelpunktkurven zwischen den Kurven (M) und (N). All dieses ergibt sich aus der Tatsache, daß in den Punkten einer Kurve und in denen ihrer Krümmungsmittelpunktkurve die Tangentialebenen an die Fläche der Hauptnormalen zueinander senkrecht sind.

Da die Hauptnormalen von (M) und (N) entgegengesetzt orientiert sind, so ist der Abstand a der beiden Kurven positiv, gleichgültig, welche als die Ausgangskurve angesehen wird. Auch der Winkel α hat für beide Kurven dieselbe Bedeutung, so daß für beide Kurven dieselbe Gleichung

$$\frac{a}{\rho} - \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{r} = 1$$

gilt. Diesmal sind beide Kurven ihrer Lage nach vollkommen gleichberechtigt.

Damit ist für jeden überhaupt möglichen Fall eine Entscheidung über das Vorzeichen getroffen.

9. Die Wendelfläche als Hauptnormalenfläche. Bisher war nur der Fall ins Auge gefaßt, daß auf der Hauptnormalenfläche der Kurve (M) außer ihr noch eine Kurve (N) existiert, für die ihre Erzeugenden Hauptnormalen sind; sollen nun noch dieser Art zwei andere Kurven (N) und (P) vorhanden sein, so muß die Bertrand'sche Relation von der Kurve (M) zweimal erfüllt werden. Ist nämlich α der konstante Winkel, unter welchem die Tangenten an (M) und (N), β der konstante Winkel, unter welchem die Tangenten (M) und (P) sich kreuzen, und sind a und a' die Abstände der Kurven (M) und (N) sowie (M) und (P) voneinander, so hat man

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \cotg \alpha = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \cotg \beta = \frac{1}{a'},$$

woraus für ρ und r konstante Werte folgen. Daher ist (nach S. 111) die Kurve (M) eine gemeine Schraubenlinie und mithin die Fläche der Hauptnormalen eine Wendelfläche, welche die Achse des Zylinders zur Striktionslinie hat und gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen ist für alle Schraubenlinien, in welchen sie von der Schar coaxialer Zylinder geschnitten wird. Daher gilt der schon erwähnte Satz:

Gibt es auf einer windschiefen Fläche drei Kurven, für welche sie gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen ist, so gibt es auf ihr unendlich viele solche Kurven. Die Fläche ist eine Wendelfläche und die Kurven sind Schraubenlinien auf einer Schar Kreiszyylinder, welche die gerade Striktionslinie der Wendelfläche zur gemeinschaftlichen Achse haben; sowie:

Die Wendelfläche ist die einzige geradlinige Fläche, auf der es mehr als zwei Kurven gibt, für welche die Erzeugenden gemeinschaftliche Hauptnormalen sind.

Diese Sätze erhalten wir auch unmittelbar mit Hilfe des Schmiegunghyperboloids. Denn die Tangenten jener drei Kurven schneiden drei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien rechtwinklig; daher sind diese Erzeugungslinien alle drei parallel einer Ebene, ebenso wie die drei Tangenten einer zu dieser Ebene senkrechten Ebene parallel laufen. Daher ist das Schmiegunghyperboloid ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Diese Beziehungen gelten für jede und die beiden ihr folgenden Erzeugungslinien. Daher laufen alle Erzeugenden der Hauptnormalenfläche einer Ebene parallel, diese ist die Ebene der ganzen Krümmung, und der kürzeste Abstand zweier Hauptnormalen hat die Richtung der rektifizierenden Geraden. Diese

Die drei Kurven sind demnach Schraubenlinien auf Kreiszyklindern und die Fläche ihrer gemeinschaftlichen Hauptnormalen ist eine Wendelfläche, deren Erzeugende alle einer Ebene parallel laufen. Auf dieser Fläche gibt es nun unzählig viele Schraubenlinien, nämlich jeder um die gerade Striktionslinie derselben mit beliebigem Radius beschriebene Kreiszyklinder schneidet die Fläche in einer solchen Kurve, und für alle diese ist sie gemeinsame Fläche der Hauptnormalen.

VII. Die geodätischen Linien auf Böschungsflächen.

Unter einer Böschungsfläche versteht man eine abwickelbare Fläche, deren Tangentenebenen mit einer festen Richtung einen konstanten Winkel bilden. Die Gratlinie einer Böschungsfläche ist daher immer eine Schraubenlinie und umgekehrt gehört die Tangentenfläche einer jeden Schraubenlinie zu den Böschungsflächen.

Da die Polarlinie einer Schraubenlinie wieder eine Schraubenlinie ist, und die Filarevoluten einer Kurve auf ihrer Polarfläche geodätisch liegen, so sind die geodätischen Linien der Böschungsflächen identisch mit den Filarevoluten der Schraubenlinien. Wir bezeichnen die Kurve zur Abkürzung in der Folge dauernd als Kurven E (Evoluten).

1. Sphärisches Bild. Bei jeder abwickelbaren Fläche ist die Hauptnormale einer geodätischen Linie parallel zur Binormale in dem entsprechenden Punkte der Gratlinie (S. 71); die sphärischen Bilder beider Kurven sind also identisch oder Gegenkurven (Gegenkurven auf der Kugel heißen zwei kongruente Kurven, die bezüglich des Mittelpunktes symmetrisch sind). Nun ist das Binormalenbild einer Schraubenlinie auf der Kugel ein kleiner Kreis: also

Das Hauptnormalenbild der E -Kurven ist ein kleiner Kreis der Bildkugel.

Da die rektifizierenden Geraden einer E -Kurve mit den Tangenten der rektifizierenden Schraubenlinie übereinstimmen, so wird ihr Bild ebenfalls ein kleiner Kreis.

Das Bild der rektifizierenden Geraden ist ein zweiter kleiner Kreis auf der Kugel.

Man überzeugt sich leicht, daß die Sätze auch umgekehrt werden können.

Aus der allgemeinen Theorie ist bekannt, daß das Tangentenbild einer Raumkurve eine (sphärische) Evolvente des Bildes ihrer

rektifizierenden Geraden ist; das Binormalenbild ist eine zweite Evolvente derselben Kurve:

Das Tangentenbild einer E-Kurve ist die sphärische Evolvente eines kleinen Kreises, d. h. es wird von einem Punkte eines größten Kugelkreises beschrieben, wenn dieser auf einem kleinen Kreise abrollt.

Es ist schon früher, bei der Untersuchung der Schraubenlinien auf der Kugel (S. 114) gezeigt worden, daß diese Evolventen eines Kugelkreises die Kurven konstanter Steigung auf einer Kugel sind.

Das Binormalenbild ist eine Kurve derselben Art. Da nun das Binormalenbild einer Kurve gleichzeitig Tangentenbild ihrer Polarkurve oder seine Gegenkurve ist, so folgt:

Die Polarkurve einer E-Kurve ist wieder eine E-Kurve.

Dies Ergebnis hätte man auch daraus schließen können, daß die Hauptnormalen der ursprünglichen Kurve parallel der ihrer Polarkurve ist, da die E-Kurven durch das Hauptnormalenbild charakterisiert sind.

2. Natürliche Gleichung. Die Gleichung der E-Kurven ergibt sich am einfachsten aus den Beziehungen, die die Kurve mit der rektifizierenden Schraubenlinie anknüpfen.

Ist

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = -\operatorname{tg} \alpha$$

die Gleichung dieser letzten Kurve, so erhält man aus den Gleichungen S. 30, Nr. 9

$$\frac{dk}{dH} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

wobei

$$dk = \sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2} = \frac{ds}{r} \sqrt{1 + \frac{r^2}{\varrho^2}}$$

und

$$\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\varrho}$$

zu setzen ist. Hieraus folgt als gesuchte natürliche Gleichung¹⁾

$$ds \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{\varrho^2}\right)^3} = -r d \frac{r}{\varrho} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

3. Übungen. 1. Man ermittle diese durch Differentiation gefundene Gleichung durch rein geometrische Betrachtungen.

1) Die Gleichung ist inhaltlich gleichwertig mit der von Aoust (Courbes dans l'espace, Paris 1876) angegebenen Gleichungsform $\tau^2 + \sigma^2 = \text{konst.}$ Dort werden diese Kurven „Cyclides“ genannt.

2. Man bestimme die der betrachteten Klasse angehörigen Bertrandschen Kurven.¹⁾

3. Die natürlichen Gleichungen der geodätischen Linien des geraden Kreiskegels zu bestimmen. (Sie gehören zu den E -Kurven.)

4. Was für Kurven sind die Filarevolventen der Geodätischen eines geraden Kreiskegels?

XII. Kapitel.

Die Schmiegunghelix und die konische Schmiegungheloxodrome.

1. Schmiegunghelix. Hat eine Schraubenlinie (H) eines Kreiszylinders mit einer Kurve (M) doppelter Krümmung drei aufeinanderfolgende Punkte gemein, so hat sie auch die Tangente, Schmiegungebene, Hauptnormale, rektifizierende Ebene und den Krümmungskreis mit ihr gemein.

Wenn dagegen die Kurve (M) mit (H) vier benachbarte Punkte gemeinsam haben soll, so müssen auch die Schmiegungheloxodrome zusammenfallen. Nun fällt aber für die Helix²⁾ der Mittelpunkt der Schmiegungheloxodrome mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammen, was für die Kurve (M) nur dann der Fall ist, wenn sie konstante Krümmung besitzt.

Die Kurven konstanter Krümmung sind die einzigen Raumkurven, für die eine Helix existiert, die sie in der dritten Ordnung berührt.

Während es also im allgemeinen keine Helix gibt, die eine Berührung dritter Ordnung mit einer gegebenen Raumkurve hat, gibt es unendlich viele Schraubenlinien, die sie in zweiter Ordnung berühren, d. h. drei benachbarte Punkte M, M', M'' mit ihr gemeinschaftlich haben.

Zieht man durch diese Punkte drei parallele Gerade, welche gleiche Neigung gegen die Tangenten MM' und $M'M''$ haben, und schneidet sie durch eine Ebene senkrecht zu ihrer Richtung, so erhält man drei neue Punkte, welche einen Kreis bestimmen, den man als Basis eines Zylinders ansehen kann; auf diesem gibt es offenbar eine Helix, welche durch jene drei Punkte geht. Da man aber un-

1) E. Salkowski, Zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Ann. 69, 560—579.

2) Als Helix werde der Kürze halber die gewöhnliche Schraubenlinie bezeichnet.

endlich viele Richtungen finden kann, welche gegen die Tangenten in M und M' gleich geneigt sind, so ist der Zylinder und mit ihm die Helix unbestimmt, d. h. es gibt eine ganze Schar Zylinder und Schraubenlinien, welche durch die drei Punkte gehen. Unter diesen Zylindern gibt es aber einen, von dem eine Erzeugende mit der rektifizierenden Geraden zusammenfällt. Diese ist nämlich auch eine Linie, die gegen zwei Tangenten der Kurve gleich geneigt ist, weil durch Abwicklung der rektifizierenden Fläche die Kurve in eine Gerade übergeht (S. 64). Die Helix, welche auf diesem Zylinder liegt, hat mit der Kurve nicht bloß die rektifizierende Ebene des Punktes M , sondern auch die rektifizierende Ebene des folgenden Punktes M' gemein, welche diese in der rektifizierenden Geraden schneidet; sie hat folglich mit der Kurve auch die zweite Hauptnormale gemein, wenn auch nicht den Krümmungskreis des Punktes M' . Sie schmiegt sich daher der Kurve enger an, als alle andern Schraubenlinien, welche sie in der zweiten Ordnung berühren, und ihre Berührung ist, wenn man so sagen will, von einer Ordnung, welche zwischen die zweite und dritte Ordnung fällt. Die Helix eines Kreiszylinders, welche mit der Kurve drei aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'' und die rektifizierende Gerade in M gemein hat, nennen wir die **Schmiegunghelix** der Kurve im Punkte M .

Die Schmiegunghelix ist somit unter den dreipunktig berührenden Schraubenlinien dadurch ausgezeichnet, daß sie mit der Kurve (M) zwei benachbarte Lagen des Hauptdreikants gemeinsam hat. Das Tangentenbild einer jeden Schraubenlinie, die (M) in zweiter Ordnung berührt, ist ein Kreis auf der Bildkugel, der das Tangentenbild von (M) berührt; das Tangentenbild der Schmiegunghelix ist der Krümmungskreis des Tangentenbildes von (M).

2. Der Torsionsradius der Schmiegunghelix. Die Schmiegunghelix hat mit der Kurve nicht bloß den Krümmungshalbmesser, sondern auch den Schmiegunghalbmesser gemein. Ist nämlich α der konstante Winkel, unter welchem die Helix die Erzeugenden des Zylinders schneidet und H die Neigung der rektifizierenden Geraden der Kurve gegen die Tangente, so ist, weil diese Geraden zusammenfallen sollen, $\alpha = H$. Sind nun $\varrho, r, \varrho_0, r_0$ die entsprechenden Radien der Krümmung und Schmiegunghelix der Kurve (M) und der Helix, so ist

$$\frac{r}{\varrho} = -\operatorname{tg} H, \quad \frac{r_0}{\varrho_0} = -\operatorname{tg} \alpha$$

und folglich

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{r_0}{\varrho_0}$$

und da beide Kurven den Krümmungskreis gemeinsam haben, also $\varrho = \varrho_0$ ist, so ist auch

$$r = r_0.$$

Dies ergibt sich auch ohne Rechnung durch folgende direkte Überlegung: da die Kurve mit der Helix zwei benachbarte Schmiegungebenen gemeinsam hat, so sind ihre Schmiegungebenenwinkel $d\sigma$ und $d\sigma_0$ identisch. Da auch ihre Bogenelemente ds und ds_0 zusammenfallen, so wird $ds : d\tau = ds_0 : d\tau$, also $r = r_0$.

3. Basisradius und Achse der Schmiegunghelix. Da die rektifizierende Gerade eine Erzeugende des Zylinders ist, auf dem die Helix liegt, so fällt sein Orthogonalschnitt in die Ebene der ganzen Krümmung. Daher ist die Helix bestimmt, sobald der Radius a dieses Orthogonalschnitts bekannt ist. Dieser folgt aber aus der Gleichung (S. 110)

$$\frac{a}{\sin^2 a} = \varrho$$

wegen $\alpha = H$, als:

$$a = \varrho \sin^2 H = \frac{r^2}{\varrho} = u.$$

Er ist der Abstand des Zentralpunktes der Hauptnormalen vom Kurvenpunkte, und die Achse der Schmiegunghelix ist der Striktionsstrahl der Hauptnormalenfläche.

Der Satz ergibt sich auch folgendermaßen: Die Kurve (M) und ihre Schmiegunghelix (H) haben zwei benachbarte Hauptnormalen gemeinsam, also auch den Mittelpunkt und den Striktionsstrahl der Hauptnormalen. Nun ist aber der Striktionsstrahl der Helix mit der Achse identisch und sein Abstand vom Kurvenpunkt gleich dem Radius des Orthogonalschnitts des zugehörigen Kreiszyinders. Dies ist aber der Inhalt des Satzes.

Die Schmiegungebene schneidet den Zylinder in einer Ellipse, die die Kurve im Nebenscheitel dreipunktig berührt und in diesem Punkte den Krümmungsradius ϱ hat.

4. Achsenfläche der Schmiegunghelix. Die rektifizierende Fläche ist der Ort der Erzeugenden der Zylinder, auf welchen die Schraubenlinien liegen, die mit der Kurve eine dreipunktige Be-

rührung haben. Die Achsen dieser Zylinder sind die Linien kürzesten Abstandes der Hauptnormalen und bilden eine Fläche, deren Erzeugungsline den rektifizierenden Geraden parallel ist. Diese Fläche ist im allgemeinen¹⁾ windschief und asymptotisch zur rektifizierenden Fläche. Sie ist abwickelbar, wenn die Hauptnormalen der betrachteten Kurve gleichzeitig Binormalen einer zweiten Kurve, der Striktionslinie sind.

5. Die dreipunktig berührenden Kreiszyylinder. Die Erzeugende eines Kreiszyinders, der eine die Kurve in der zweiten Ordnung berührende Helix enthalten soll, muß, wie vorher (S. 135) erkannt wurde, gleiche Neigung gegen zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Kurve haben. Der Ort aller solcher Geraden ist eine Ebene, welche senkrecht auf der Schmiegungheloxodrome steht und den Kontingenzwinkel halbiert. Diese Ebene fällt in der Grenze mit der rektifizierenden Ebene zusammen. Daher gilt der Satz:

Die Erzeugenden der Zylinder, deren Schraubenlinien eine Kurve doppelter Krümmung in der zweiten Ordnung berühren, sind parallel der rektifizierenden Ebene.

Der Zylinder dieser Schar, dessen eine Erzeugende mit der Binormalen zusammenfällt, geht durch den Krümmungskreis; derjenige, dessen Erzeugende die Tangente ist, reduziert sich auf diese selbst. Ist β der Winkel der Tangente und der Erzeugenden, so ist der Kontingenzwinkel des Orthogonalschnitts $\frac{d\tau}{\sin \beta}$ und sein Bogenelement $ds \sin \beta$; also sein Radius

$$a = \frac{ds}{d\tau} \sin^2 \beta = \rho \sin^2 \beta.$$

Er wächst von Null bis ρ , wenn β von Null bis $\frac{1}{2}\pi$ zunimmt.

6. Die konische Schmiegungheloxodrome. Durch vier aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'', M''' einer Kegelloxodrome (zylindrokonischen Schraubenlinie) ist diese Kurve vollständig bestimmt. Denn man kennt damit drei aufeinanderfolgende Tangenten, welche die Richtungslinien der drei Bogenelemente $MM', M'M'', M''M'''$ sind; man kennt ferner zwei aufeinanderfolgende Schmiegungheloxodrome $MM'M'', M'M''M'''$ und in ihnen zwei aufeinanderfolgende Hauptnormalen und zwei aufeinanderfolgende Krümmungs-

1) Nur für $a = \frac{r^2}{\rho} = \text{konst.}$ ist die Fläche abwickelbar und besitzt die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche als Gratlinie. Ist $\frac{r}{\rho} = \text{konst.}$, so ist die Achsenfläche ein Zylinder (S. 11, 75).

achsen, in welchen sich die drei Normalebene der Punkte M, M', M'' schneiden. Mithin ist auch deren Durchschnitt, der Mittelpunkt der Schmiegunghkugel des Punktes M , bekannt, welche durch die vier gegebenen Punkte geht; also auch deren Tangentenebene in M , welche die Tangente von M enthält. Ferner sind zwei auf den Schmiegunghsebenen von M und M' zu deren Hauptnormalen senkrechte und die Tangenten an M, M' enthaltende rektifizierende Ebenen und mithin auch die rektifizierende Gerade bekannt, in welcher sich die beiden rektifizierenden Ebenen schneiden. Durch die rektifizierende Gerade ist die Ebene der ganzen Krümmung gegeben, und man hat damit die Richtung der Achse des Kegels, auf welchem die Loxodrome liegt und vier Punkte der logarithmischen Spirale, welche die Projektion der Loxodrome auf die Ebene der ganzen Krümmung und der Orthogonalschnitt des rektifizierenden Zylinders der Loxodrome ist. Vier Punkte einer logarithmischen Spirale bestimmen aber drei Tangenten ihrer Evolute und zwei Tangenten der zweiten Evolute. Daher sind der Krümmungshalbmesser der Spirale, sowie der Krümmungshalbmesser ihrer Evolute bekannt. Hiermit ist aber der Winkel ψ und der Pol derselben bekannt. Mit dem Pol dieser logarithmischen Spirale ist die Kegelachse der Loxodrome und durch deren Durchschnitt mit der Tangentenebene der Schmiegunghkugel der Mittelpunkt S des Kegels und seine halbe Öffnung γ , sowie die Neigung α der Tangente der Loxodrome gegen dessen Erzeugungslinie gefunden und somit die ganze Loxodrome bestimmt.

Hieraus geht hervor, daß es in jedem Punkte einer Kurve doppelter Krümmung eine Kegelloxodrome gibt, welche die Kurve vierpunktig oder in der dritten Ordnung berührt. Sie heißt die konische Schmiegungheloxodrome der Kurve. Sie hat mit dieser die Tangente, die Schmiegunghsebene, Normalebene und rektifizierende Ebene, die Hauptnormale, Krümmungsachse und Binormale, die Schmiegunghkugel, die Ebene der ganzen Krümmung und die drei Radien ϱ, r, \mathfrak{r} der Krümmung gemein.

Aus dem Dreikant TGE (Fig. 46, S. 115) hat man für die Elemente ψ, α, γ der konischen Schmiegungheloxodrome

$$\cos H = \cotg \psi \cotg \mu, \quad \sin \gamma = \sin H \sin \mu, \quad \sin \alpha = \sin H \sin \psi,$$

worin H und μ bekannt sind, nämlich

$$\cos H = -\frac{\mathfrak{r}}{r}, \quad \sin H = \frac{r}{\varrho}, \quad \cotg \mu = \frac{\varrho}{h}, \quad \sin \mu = \frac{h}{R}.$$

Den Abstand der Kegelachse c_0S von dem Zentralpunkte E der Hauptnormalen findet man mit Hilfe von $c_0S = \rho \cos \psi$ und den Abstand MT des Mittelpunktes aus $MS = mS : \sin \gamma$.

Für $\rho = \text{konst.}$ geht die Kegelloxodrome in die Schraubenlinie des Kreiszyinders über.

7. Übungen. 1. Man untersuche die konische Schmiegungsloxodrome einer E -Kurve (S. 133).

2. Die Achsenfläche der konischen Schmiegungsloxodrome zu untersuchen.

XIII. Kapitel.

Geometrie der Bewegung der Kurven doppelter Krümmung.

1. Das Hauptdreikant. Die Normalebene, Schmiegungebene und rektifizierende Ebene einer Raumkurve bilden für jeden Punkt der Kurve ein dreifach rechtwinkliges Dreikant von bestimmter Lage, dessen Kanten mit der Tangente t , der Hauptnormalen h und Binormalen b zusammenfallen.

Von Punkt zu Punkt ändert es seine Lage; man kann es daher beweglich denken und sich die Frage vorlegen, wie dasselbe aus einer einem Punkte M der Kurve entsprechenden Lage in die unmittelbar folgende, dem Punkte M' entsprechende Lage gelangen könne.

Man kann das Dreikant als das Achsenkreuz eines mit ihm fest verbundenen räumlichen Punktsystems auffassen, das in dem Raume, dem die Kurve angehört, sich gesetzmäßig so bewegt, daß seine Achsen mit den aufeinanderfolgenden Lagen des Hauptdreikants der Kurve zusammenfallen. Zwei solche Lagen des sich bewegenden Raumes sind zwei kongruente räumliche Punktsysteme, und jedem Punkt des einen ist ein Punkt des andern homolog. So entspricht dem Punkte M der Punkt M' , der Tangente in M die Tangente in M' , der Hauptnormalen die Hauptnormale, der Binormalen die Binormale usw.

Eine jede infinitesimale Bewegung eines räumlichen Systems kann nun durch eine Schraubung um eine Achse, d. h. durch eine Schiebung längs der Achse und eine Drehung um dieselbe Achse hervor gebracht werden. Dabei kann sowohl die Schiebungs- als auch die Rotationskomponente verschwinden. Um die Achse dieser Schraubung,

den infinitesimalen Drehwinkel, sowie die Schiebungsgröße für den hier vorliegenden Fall zu finden, bedarf es keiner besonderen Sätze der Geometrie der Bewegung, da die bisher entwickelten Hilfsmittel dazu vollständig ausreichen.

2. Die Schraubenlinie. Es ist bekannt, daß für jede Raumkurve an jeder Stelle M eine gewöhnliche Schraubenlinie konstruiert werden kann, die mit der Kurve drei Punkte und zwei benachbarte Lagen der Schmiegungebene und Normalebene gemeinsam hat. Dann stimmen auch die entsprechenden Lagen der rektifizierenden Ebenen miteinander überein, so daß die Raumkurve bezüglich zweier benachbarter Lagen, also auch bezüglich der Elementarschraubung ihres Hauptdreikants durch ihre Schmiegungeebene ersetzt werden kann.

Jede Raumkurve hat mit ihrer Schmiegungeebene zwei benachbarte Lagen des Hauptdreikants gemein.

Nun weiß man aber, daß jede Schraubenlinie in sich selbst verschiebbar ist, und daß eine Lage des Hauptdreikants in die Nachbarlage übergeht, wenn man das System um die Achse der Schraubenlinie sich schrauben läßt. Dabei ist der kürzeste Abstand der Hauptnormalen die Schiebungsgröße, ihr Winkel der infinitesimale Drehwinkel. Die momentane Schraubungsachse für das Dreikant der Kurve (M) ist also mit der Achse ihrer Schmiegungeebene identisch, und deren bekannte Elemente ergeben die Lage der Achse und die Komponenten der Schraubung.

Man hat so den Satz gewonnen:

Das Hauptdreikant einer Raumkurve kann aus der einem Punkte M der Kurve entsprechenden Lage in die unmittelbar folgende Lage durch eine Elementarschraubung übergeführt werden, deren Achse die Linie des kürzesten Abstandes der beiden aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, deren Schiebungsgröße die Projektion $ds \cos H$ des Bogenelements auf diese Achsenrichtung, deren Amplitude gleich dem Winkel dk der ganzen Krümmung und deren Parameter p die dritte Proportionale $p = \frac{r^2}{r}$ zum Radius der ganzen Krümmung und dem Schmiegungeebeneradius ist.

Dabei bedeutet der Parameter p den Quotienten aus Schiebungsgröße und Amplitude, er ist also gleich dem Radius der Schmiegungeebene.

3. Die Fläche der Schraubungsachsen. Die aufeinanderfolgenden Schraubungsachsen bilden eine im allgemeinen windschiefe Fläche, welche die Fläche der Hauptnormalen in deren Striktionslinie schneidet. Diese Kurve ist zugleich auch die Striktionslinie der Fläche der Schraubungsachsen, immer wenn diese Fläche windschief ist, da ja die Fläche der Striktionsstrahlen einer Linienfläche, wenn überhaupt, dieselbe Striktionslinie besitzt wie die Linienfläche selbst (S. 75). Aus den bekannten Sätzen über Striktionsstrahlen folgt weiter unmittelbar, daß die Fläche der Schraubungsachsen und die Fläche der Hauptnormalen einander längs der Striktionslinie berühren.

Der kürzeste Abstand zweier Schraubungsachsen ist gleich du und ihr Winkel ist dH , da sie zwei rektifizierenden Geraden parallel sind. Der Parameter der Fläche der Windungsachsen längs der betrachteten Erzeugenden ist daher:

$$k_1 = \frac{du}{dH} = - \frac{d \frac{r^2}{\rho}}{d \operatorname{arctg} \frac{r}{\rho}}.$$

Die Achsenfläche ist eine abwickelbare Fläche, wenn zwei benachbarte Achsen sich schneiden, oder wenn sie parallel sind. Im ersten Fall muß also der kürzeste Abstand $du = 0$ werden, also die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche die Hauptnormalen rechtwinklig schneidet. Die Schraubungsachsen sind alsdann die Tangenten der Striktionslinie; diese ist Orthogonaltrajektorie der Hauptnormalen der gegebenen Kurve, also (S. 75) ist die Fläche die Binormalenfläche der Striktionslinie. Anders ausgedrückt: die gegebene Kurve und die Striktionslinie stehen in einem solchen Verhältnis, daß die Hauptnormalen der ersten die Binormalen der zweiten Kurve sind.

Nun ist $du = 0$ nur, wenn $\frac{r^2}{\rho} = \text{konst.}$ ist. Hieraus folgt:

Diejenigen Raumkurven, deren Hauptnormalen gleichzeitig Binormalen einer zweiten Kurve sind, gehören der Kurvenklasse

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{h\rho} \quad (h = \text{konst.})$$

an (S. 101).

Die Achsenfläche wird aber auch dann abwickelbar, wenn sie in einen Zylinder übergeht. Dann aber müssen alle ihre Hauptnormalen senkrecht zu der Mantellinie dieses Zylinders, d. h. einer festen Ebene

des Raumes parallel sein. Dies tritt aber nur ein, wenn die Kurve eine allgemeine Schraubenlinie ist.

Die Achsenfläche einer allgemeinen Schraubenlinie ist ein Zylinder.

Endlich kann sich die Achsenfläche auf eine Gerade reduzieren, dann schneiden die Hauptnormalen der Kurve diese Gerade rechtwinklig, und die Kurve selbst ist die gemeine Schraubenlinie.

4. Eine besondere Kurvenklasse. Soeben war gezeigt, daß die Kurven

$$r^2 = h\varrho$$

eine abwickelbare Fläche der Schraubungsachsen besitzen. Die Gratlinie dieser abwickelbaren Fläche hat selbständiges Interesse, und man erhält diese Kurve, wenn man fragt:

Für welche Raumkurven sind die Binormalen gleichzeitig Hauptnormalen einer zweiten Raumkurve?

Es seien P, Q, R, \dots benachbarte Punkte einer derartigen Kurve C , P_1, Q_1, \dots die entsprechenden Punkte einer Kurve C_1 auf ihrer Binormalenfläche, für die diese Binormalen Hauptnormalen sind. Dann ist immer

$$PP_1 = QQ_1 = RR_1 = \dots$$

Konstruiert man nun durch P_1, Q_1, \dots zu den Tangenten von C die Parallelen, so schneiden diese sich auf der rektifizierenden Fläche von C , umhüllen dort eine Kurve $C_2 \equiv (P_2, Q_2, R_2, \dots)$ deren Bogenelemente P_2Q_2, \dots parallel den entsprechenden Bogenelementen PQ, \dots , von C sind, und die daher eine geodätische Linie auf der rektifizierenden Fläche von C ist. Dabei sind die Ebenen $P_1Q_1Q_2, \dots$ die Schmiegungebenen von C_2 als zur Hauptnormalen senkrechte Ebenen die rektifizierenden Ebenen von C_1 , ihre Hüllfläche also die rektifizierende Fläche der Kurve C_1 , d. h.:

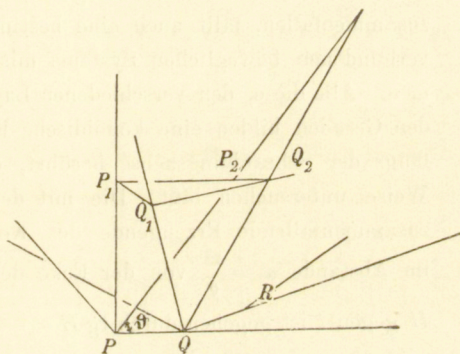


Fig. 51.

Die Gratlinie der rektifizierenden Fläche der Kurve C_1 und die Kurve C besitzen dieselbe rektifizierende Fläche.

Die Gratlinie der rektifizierenden Fläche der Kurve C_1 und die Kurve C besitzen dieselbe rektifizierende Fläche.

Beispiel. Ist C eine allgemeine Schraubenlinie, so wird die rektifizierende Fläche PP_2, QQ_2, \dots ein Zylinder, also C_2 eine kongruente Schraubenlinie auf demselben Zylinder. Ferner ist der Winkel

$P_2 P Q = Q_2 Q R = \dots$ gleich dem konstanten Steigungswinkel der Schraubenlinie. Demnach wird

$$P_1 P_2 = Q_1 Q_2 = \dots = h \operatorname{ctg} \vartheta$$

konstant, wenn h den konstanten Abstand entsprechender Punkte der Kurven C und C_1 bezeichnet. Bei der Abwicklung der Tangentfläche von C_2 geht die Kurve C_1 (die auf ihr geodätisch ist) in eine Gerade über, und die Gratlinie C_2 in eine ebene Kurve \mathfrak{C}_2 , für welche das Stück ihrer Tangente vom Kurvenpunkte bis zur Geraden \mathfrak{C}_1 eine konstante Länge besitzt. Die Kurve \mathfrak{C}_2 ist also eine Traktrix, deren natürliche Gleichung

$$\varrho = h \operatorname{ctg} \vartheta \sqrt{e^{\frac{2 \operatorname{stg} \vartheta}{h}} - 1}.$$

Diese Schraubenlinien sind, nebst einigen anderen allgemeineren Kurven neuerdings von O. Weber¹⁾ eingehend studiert worden.

5. Die Achsenfläche im Dreikant. Während das Dreikant sich längs der Kurve hinbewegt, so daß seine drei Geraden t, n, b fortwährend mit der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen zusammenfallen, fällt auch eine bestimmte Gerade des mit ihm fest verbundenen beweglichen Systems mit der Schraubungsachse zusammen. Alle diese, den verschiedenen Lagen des Dreikants entsprechenden Geraden bilden eine konoidische Fläche, welche die Achsenfläche längs der Schraubungsachse berührt, deren Natur sich auf folgende Weise untersuchen läßt. Die mit der jeweiligen Schraubungsachse zusammenfallende Erzeugende des Konoids schneidet die Gerade n im Abstände $u = \frac{r^2}{\varrho}$ von der Ecke des Dreikants, und ihre Neigung

H gegen t ist gegeben durch $\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\varrho}$. Mit Hilfe der Lancret-

schen Relation $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}$ ergibt sich $u =$

$\frac{\varrho r^2}{\varrho^2 + r^2}$ und zugleich wird $\sin 2H = -\frac{2\varrho r}{\varrho^2 + r^2}$.

Hieraus folgt

$$u = -\frac{1}{2} r \sin 2H.$$

Während der Bewegung des Dreikants bildet die Erzeugungslinie des Konoids mit der Geraden t den veränderlichen Winkel H und schneidet die Gerade n im Abstände $u = ME$

(Fig. 52) von der Ecke gleich dem Produkte aus dem halben

1) O. Weber, Binormalflächen mit einer zur Striktionslinie äquidistanten Asymptotenlinie. Diss. Halle 1914.

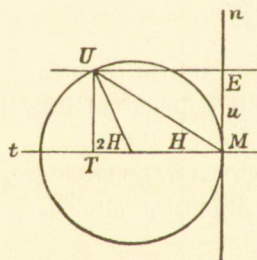


Fig. 52.

Schmiegungradius r und dem Sinus des doppelten Winkels H . Ein Kreis, welcher die Gerade n in M berührt und zum Durchmesser $MT = \overline{\pi} r$ hat, liefert mit Hilfe des Winkels $TMU = H$ bzw. $\pi - H$ den Abstand

$$u = PM = ME = -\frac{1}{2}r \sin 2H.$$

Für die Kurven konstanten Schmiegungradius r beschreibt die Erzeugungslinie daher ein Plücker'sches Konoid (Ball'sches Zylindroid).¹⁾

Aus dem Schraubungsparameter $p = \frac{r^2}{r}$ findet man $p = \frac{1}{2}r \sin 2H$ und mithin $u : p = r : r = -\operatorname{tg} H$.

6. Übung. Bewegt sich das Hauptdreikant einer Kurve (M) längs der Kurve, so beschreiben alle Geraden, die in der rektifizierenden Ebene parallel zur Tangente konstruiert werden können, abwickelbare Flächen, deren Gratlinien mit der Kurve auf derselben rektifizierenden Fläche geodätisch liegen. Außer diesen existieren noch andere Geraden des bewegten Systems, die abwickelbare Flächen beschreiben, wenn die Kurve (M) eine Cesàrosche Kurve ist, d. h. wenn zwischen ihrer ersten und zweiten Krümmung eine gewisse Gleichung zweiten Grades $\frac{A}{e^2} + \frac{B}{er} + \frac{C}{r^2} = \frac{P}{e} + \frac{Q}{r}$ existiert.²⁾

XIV. Kapitel.

Die zyklifizierenden Flächen.

1. Existenz der zyklifizierenden Flächen. Die rektifizierende Fläche ist die abwickelbare Fläche, welche durch die Kurve hindurchgeht und bei ihrer Abwicklung diese in eine Gerade transformiert. Das Problem, die rektifizierende Fläche einer Kurve zu finden, ist ein besonderer Fall eines allgemeineren, welches verlangt, durch die Kurve eine abwickelbare Fläche zu legen, durch deren Abwicklung sie in den Bogen eines Kreises von gegebenem Radius A übergeht. Eine solche Fläche nennen wir eine zyklifizierende Fläche, ihre Tangentenebenen die zyklifizierenden Ebenen und ihre Erzeugenden die zyklifizie-

1) Vgl. Demoulin, Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches (Bulletin de la société mathém. de France, T. XX, p. 43—46). Über das Plücker'sche Konoid vgl. Plücker, Neue Geometrie des Raumes. Leipzig 1868, S. 97; Ball, The theory of screws, Dublin 1876; Lewis, On the Cylindroid. Messenger of Math., Vol. IX, p. 1—5 (1879); sowie Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1879, B. II, S. 218 u. fig.

2) Joachimi, Diss. Münster 1911. E. Salkowski, Münch. Ber. 1911.

Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 3. Aufl.

10

renden Geraden der Kurve.¹⁾ Wird der Radius $A = \infty$, so geht der Kreis in eine Gerade und die zyklifizierende Fläche in die rektifizierende über.

Es seien MG , $M'G'$, $M''G''$, ... benachbarte zyklifizierende Geraden der Kurve (M). Dreht man das Flächenelement $M'G'M''$ um die Gerade $M'G'$, bis es mit dem Flächenelemente $M'GM$ in eine Ebene fällt, so gelangt die Tangente $M'M''$ in die Lage $M'W''$ und zwar ist W'' die senkrechte Projektion des Punktes M'' auf die zyklifizierende Ebene $M'GM$, da die Drehungsachse $M'G'$ in dieser Ebene liegt.

Die Punkte $MM'W''$ sind drei Punkte der transformierten Kurve, also eines Kreises mit dem Radius A . Sein Mittelpunkt N liegt in der Ebene $M'GM$, und es ist $NM = NM' = NW'' = A$. Andererseits aber folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck $NM''W''$, daß $NM'' = NW''$ ist, d. h. der Punkt N ist ein Punkt, der von drei aufeinanderfolgenden Punkten der Kurve (M) gleichweit entfernt ist; N ist also ein Punkt der Krümmungsachse des Punktes M . Nun hat aber die Krümmungsachse vom Punkte M den Abstand ρ ; es muß daher, damit die Verwandlung der Kurve in einen Kreisbogen überhaupt möglich sein soll, für alle Punkte M

$$A = MN \geq \rho$$

werden.

Die zyklifizierende Fläche, die eine Kurve in einen Kreis vom Radius A verwandelt, ist nur dann reell, wenn für alle Punkte der Kurve der Krümmungsradius kleiner als A ist.

2. Konstruktion einer zyklifizierenden Fläche für einen gegebenen Radius. Die zyklifizierende Ebene, die zu einem Punkte M gehört, ist wie soeben dargetan wurde, durch das Bogenelement MM' und den Mittelpunkt N des Kreises bestimmt, in den die Kurve bei der Abwicklung der Fläche in die Ebene transformiert wird.

Man konstruiert demnach die zyklifizierenden Ebenen einer Kurve (M) als die Ebenen durch zwei benachbarte Punkte M , M' und einen solchen Punkt N der Polarachse, dessen Abstand vom zugehörigen Kurvenpunkte M gleich A ist. Da es für $A > \rho$ immer zwei derartige Ebenen gibt, die bezüglich der Schmiegungebene

1) Molins, De la surface développable passant par une courbe donnée quelconque, et qui, par son développement, transformerait cette courbe en un arc de cercle de rayon donné. Journ. d. Math. (2) 1, 265.

symmetrisch liegen, so gibt es in diesem Falle zwei zyklifizierende Flächen, die als Hüllflächen je einer Schar der auf angegebene Weise konstruierten Ebenen gewonnen werden.

3. Winkel zwischen der zyklifizierenden Ebene und der Schmiegungeebene. Die zyklifizierende Ebene und die Schmiegungeebene des Punktes M schneiden sich in der Tangente der Kurve (M), ihr Winkel i wird demnach durch den Winkel der in ihnen gelegenen Normalen, der Hauptnormalen MC und der Normalen MN gemessen, d. h. durch den Winkel, um den die Hauptnormale in positiver Richtung gedreht werden muß, um mit MN zusammenzufallen. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $M CN$ ergibt sich unmittelbar

$$\cos i = \frac{\rho}{A}.$$

Jedem Werte von A entsprechen zwei Werte von i , die sich zu 2π ergänzen.

Übung: Legt man durch die Tangenten einer Kurve konstanter Krümmung Ebenen, die mit den Schmiegungeebenen einen konstanten Winkel i bilden, so umhüllen diese eine abwickelbare Fläche, die bei ihrer Ausbreitung in die Ebene die gegebene Kurve in einen Kreis vom Radius $\frac{\rho}{\cos i}$ verwandelt.

4. Sphärisches Bild der zyklifizierenden Geraden. Das sphärische Bild ρ einer zyklifizierenden Ebene von der Neigung i ist ein größter Kreis durch das Tangentenbild t , der mit dem sphärischen Bild tt' der Schmiegungeebene den Winkel i bildet. Zwei benachbarte zyklifizierende Ebenen schneiden sich in der zyklifizierenden Geraden, deren Bild z der Schnittpunkt, aufeinanderfolgender Kreise ρ ist. Im Dreieck $tt'z$ ist nun $tt' = d\tau$, die Winkel $zt't = i$ und $zt't = \pi \pm (i + di - d\sigma)$, $tz = \vartheta$ der Winkel der Tangente und der zyklifizierenden Geraden, endlich der Winkel $tzt' = d\sigma_0$ der Winkel benachbarter zyklifizierender Ebenen, d. h. der Schmiegunge-
 winkel der Gratlinie der zyklifizierenden Fläche.

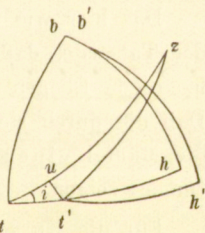


Fig. 53.

Das Lot tu von t auf $t'z$ schneidet das unendlich kleine Dreieck $tt'u$ ab, aus dem sich

$$t'u = d\tau \cos i$$

$$tu = \pm d\tau \sin i$$

ergibt. In dem bei u rechtwinkligen Dreieck ztu ist der Winkel

10*

$$\begin{aligned} ztu &= \pm i + \frac{1}{2}\pi \mp (i + di - d\sigma) \\ &= \frac{1}{2}\pi \mp (di - d\sigma), \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi \mp (di - d\sigma))}{\operatorname{tg}(tu)},$$

also bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung:

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \pm \frac{di - d\sigma}{d\tau \sin i}.$$

Da bisher in der zyklifizierenden Ebene ein Drehungssinn nicht festgesetzt war, ist über das Vorzeichen von $\operatorname{ctg} \vartheta$ noch zu verfügen; es sei so festgesetzt, daß in der eben hergeleiteten Formel das obere Vorzeichen gilt. Damit ist noch keine Orientierung der zyklifizierenden Geraden vorgenommen; diese kann noch in der Weise erfolgen, daß $0 < \vartheta < \pi$ festgesetzt wird. Dies entspricht der Figur und den späteren Formeln.

Aus der Gleichung

$$\cos i = \frac{e}{A}$$

folgt¹⁾

$$di = -\frac{de}{A \sin i} = \mp \frac{de}{\sqrt{A^2 - e^2}},$$

daher wird

$$\operatorname{cotg} \vartheta = \frac{-\frac{de}{d\tau}}{A\left(1 - \frac{e^2}{A^2}\right)} \pm \frac{\frac{d\sigma}{d\tau}}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{A^2}}}.$$

Das hier wie überall auftretende doppelte Vorzeichen entspricht der Tatsache, daß durch jeden Punkt der Kurve (M) zwei zyklifizierende Ebenen mit gegebenem Radius A gelegt werden können. Daß die durch sie bestimmten zyklifizierenden Flächen trotzdem als die Mäntel einer Fläche aufzufassen sind, werden spätere Betrachtungen zeigen.

Für die Kurven konstanter Krümmung ist $de = 0$, mithin

$$\operatorname{cotg} \vartheta = \pm \frac{e \cdot A}{r \sqrt{A^2 - e^2}},$$

für die Schraubenlinie des Kreiszyinders wird ϑ konstant.

1) Statt formal zu differenzieren, kann man di auch durch geometrische Betrachtungen finden, die der Kürze halber übergangen seien.

Der Kontingenzwinkel $d\tau_0$ der Gratlinie ist gleich dem Abstand zweier benachbarter Punkte z und z' . Nun ist

$$z't' = \vartheta + d\vartheta.$$

Andererseits

$$z't' = z'z + zt' = d\tau_0 + \vartheta - d\tau \cos i;$$

demnach

$$d\tau_0 = |d\vartheta + d\tau \cos i|.$$

Der Schmiegunswinkel $d\sigma_0$ ist aus dem Dreieck $tz'u$ zu entnehmen, und zwar wird

$$\pm d\sigma_0 \sin \vartheta = t'u = d\tau \sin i,$$

also

$$d\sigma_0 = \pm \frac{\sin i}{\sin \vartheta} d\tau.$$

Dieser Ausdruck gestattet noch mannigfache Umformungen. Es war

$$\sin i d\tau = \operatorname{tg} \vartheta (di - d\sigma),$$

also ist

$$d\sigma_0 = \pm \frac{di - d\sigma}{\cos \vartheta},$$

oder, weil

$$\cos \vartheta = \frac{di - d\sigma}{\sqrt{(di - d\sigma)^2 + d\tau^2 \sin^2 i}}$$

ist, hat man

$$d\sigma_0^2 = (di - d\sigma)^2 + d\tau^2 \sin^2 i.$$

Setzt man noch für di und $\sin i$ die bekannten Werte und schreibt $d\varrho = h d\sigma$, so erhält man schließlich

$$d\sigma_0^2 = \frac{(h \mp \sqrt{A^2 - \varrho^2})^2}{A^2 - \varrho^2} d\sigma^2 + \left(1 - \frac{\varrho^2}{A^2}\right) d\tau^2.$$

Für die Kurven von konstanter Krümmung wird

$$d\sigma_0^2 = d\sigma^2 + d\tau^2 \cdot \sin^2 i.$$

Die Gratlinien aller zyklifizierenden Flächen einer Kurve bilden eine Fläche, auf der die Gratlinie der rektifizierenden Fläche und die Gratlinie derjenigen zyklifizierenden Fläche, welche dem kleinsten Wert von A entspricht, bei welchem die Kreistransformation noch möglich ist, ausgezeichnete Linien sind.

Für $A = \infty$ ergeben sich die Formeln für die Gratlinie der rektifizierenden Fläche.

5. Bogenelement der Gratlinie. Man fälle das Lot $M'Q$ von M' auf MG . Dann läßt sich das Bogenelement $GG' = ds_0$ der Gratlinie der zyklifizierenden Fläche folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} G'G &= G'M' - GM' = G'M' - GQ = G'M' - (GM - MQ) \\ &= (G'M' - GM) + MQ. \end{aligned}$$

Also:

$$ds_0 = d(MG) + ds \cos \vartheta.$$

Nun folgt aber aus dem Dreieck $MG M'$:

$$MG \cdot d\tau_0 = ds \sin \vartheta,$$

demnach wird:

$$ds_0 = d \left(\frac{ds}{d\tau_0} \sin \vartheta \right) + ds \cos \vartheta.$$

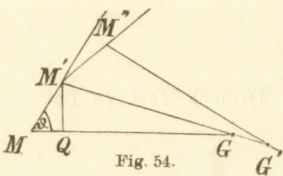


Fig. 54.

Übung: Man untersuche die Kurven, für die $ds_0 = 0$ wird. Es sind die geodätischen

Kreise von Kegelflächen.

6. Kurvenpaar konstanter geodätischer Krümmung.

Es war schon vorher (Nr. 1) der Kurve (M) eine Kurve (N) zugeordnet, und zwar so, daß die Punkte N von (N) auf den Krümmungsachsen der entsprechenden Punkte M von (M) liegen und daß der Abstand entsprechender Punkte $M_i N_i$ konstant gleich A ist. Da

$$N_1 M_1 = N_1 M_2 = N_1 M_3 = A$$

ist, so kann N_1 als Mittelpunkt einer Kugel vom Radius A angesehen werden, die durch drei benachbarte Punkte M_1, M_2, M_3 von (M) geht. Nun ist auch

$$N_2 M_2 = N_2 M_3 = N_3 M_4 = A$$

und

$$N_3 M_2 = N_3 M_3 = N_2 M_4 = A,$$

also auch

$$M_2 N_1 = M_2 N_2 = M_2 N_3 = A,$$

d. h. es ist M_2 der Mittelpunkt einer Kugel vom Radius A , welche durch die drei Punkte N_1, N_2, N_3 geht und also die Kurve (N) im Punkte N_1 in der zweiten Ordnung berührt. Ebenso ist M_3 Mittelpunkt einer Kugel von demselben Radius, welche die Kurve (N) im folgenden Punkte N' oskuliert usw. Daher liegt die Kurve (M) auf der Fläche der Krümmungsachsen der Kurve (N) , d. h.:

Von beiden Kurven (M) und (N) ist jede der Ort der Mittelpunkte der Oskulationskugeln vom konstanten Radius A für die andere und liegt jede auf der Fläche der Krümmungsachsen der anderen.

Ferner hat $N_1 N_2$ die Richtung einer Tangente an die Kugel um M_2 , welche durch N_1, N_2, N_3 geht, und steht mithin senkrecht auf $M_2 N_1$, ebenso ist es aber Tangente an eine Kugel, welche durch

den dem Punkte N_1 vorhergehenden Punkt, durch N_1 und N_2 gehen würde und ihren Mittelpunkt in M_2 hätte, daher steht N_1N_2 auch senkrecht auf M_2N_1 ; folglich steht N_1N_2 auf der Ebene M_2NM_3 senkrecht. Diese Ebene ist aber zyklifizierende Ebene in M_2 . Daher:

Die Tangente der Kurve (N) steht senkrecht auf der zyklifizierenden Ebene oder die zyklifizierende Ebene von (M) ist die Normalebene der Kurve (N).

Ebenso ist die zyklifizierende Ebene von (N) Normalebene der Kurve (M). Es stehen also die Kurven (M), (N) in solcher Beziehung, daß die Normalebene jeder Kurve durch die Tangente der andern geht, also ihre Normalebenen aufeinander senkrecht stehen und die Bogenelemente sich rechtwinklig kreuzen.

Wickelt man die Fläche der Krümmungsachsen von (M) ab und denkt dabei die Punkte der Kurve (M) in den Tangentenebenen der Fläche als fest, so gelangt bei diesem Vorgange M_2 nach M_3 und es stehen N_1 und N_2 von den vereinigten Punkten, nämlich von M_3 um den Radius A ab. Bei der weiteren Abwicklung gelangt M_3 nach M_4 und es stehen N_2, N_3 also auch N_1, N_2, M_3 von M_4 um A ab; gelangt M_4 nach M_5 , so folgt, daß N_1, N_2, N_3, N_4 von diesem Punkte um dieselbe Strecke A abstehen usw. Die ganze Kurve (M) reduziert sich auf einen Punkt (vgl. S. 44), der von den Punkten der bei der Abwicklung aus (N) entstandenen ebenen Kurve denselben Abstand A hat; die Polarfläche von (M) ist somit die zum Radius A gehörige zyklifizierende Fläche der Kurve (N). Die Kurven (M) und (N) stehen also in einer wechselseitigen Beziehung, die folgendermaßen charakterisiert werden kann:

1. *Entsprechende Punkte haben konstanten Abstand.*
2. *Entsprechende Tangenten stehen aufeinander senkrecht.*

Daraus folgt:

3. *Jede Kurve liegt auf der Polarfläche der anderen.*

Zwei derart miteinander verknüpfte Kurven bilden ein orthogonales Kurvenpaar. (Vgl. das nächste Kapitel.)

Die Beziehung von (M) und (N) läßt sich auch an eine flächentheoretische Begriffsbildung knüpfen. Ist auf einer Fläche eine Kurve gegeben, so bezeichnet man den Schnittpunkt der Krümmungsachse der Kurve mit der Berührungsebene der Fläche als den Mittelpunkt der geodätischen Krümmung der Kurve. Er hat von drei benachbarten Punkten der Kurve gleichen Abstand. Aus der Definition der

geodätischen Krümmung folgt, daß eine Kurve auf allen Flächen, die sich in ihr berühren, dieselbe geodätische Krümmung besitzt, dieselbe nämlich, wie auf der abwickelbaren Fläche, die von den Berührungsebenen eingehüllt wird. Eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung wird ein geodätischer Kreis genannt; er ist so beschaffen, daß er bei der Abwicklung der Hüllfläche der Tangentenebenen in einen ebenen Kreis übergeht, diese abwickelbare Fläche ist also eine zyklifizierende Fläche für sie. Die Kurve seiner Mittelpunkte hat nach dem vorigen die Eigenschaft, ein geodätischer Kreis auf gewissen Flächen zu sein, und zwar so, daß die Mittelpunkte ihrer geodätischen Krümmung mit der ersten Kurve zusammenfallen. Insbesondere sind (M) und (N) zwei geodätische Kreise auf der geradlinigen Fläche, die durch die Verbindungslinien entsprechenden Punkte gebildet sind. Man kann die Kurven daher zur Abkürzung als Paare zugeordneter geodätischer Kreise bezeichnen.

Ein orthogonales Kurvenpaar ist ein Paar zugeordneter geodätischer Kreise und umgekehrt.

Übungen. 1. Eine Kurve (M) liegt auf einer Kugel vom Radius A . Man untersuche die Kurven, die mit ihr ein orthogonales Kurvenpaar bilden.

2. Man untersuche die Kurven, die mit einer sphärischen Schraubelinie ein orthogonales Kurvenpaar bilden.

7. Oskulationskugeln von konstantem Radius. Betrachtet man, wie im Anfang, die Kurve (M) als gegeben und (N) aus ihr hergeleitet, so war (N) als Kurve der Mittelpunkte aller Kugeln von konstantem Radius A erkannt, die die Kurve (M) in zweiter Ordnung berühren. Die Ergebnisse der vorigen Nummer lassen sich dann auch so aussprechen:

Die zyklifizierende Fläche einer Kurve (M) für den Radius A ist die Fläche der Krümmungsachsen der Kurve (N) , welche den Ort der Oskulationskugelmittelpunkte vom Radius A für die Kurve (M) bildet.

Die Kurven der Mittelpunkte der Oskulationskugeln von konstantem Radius erlangen durch diese Betrachtungen eine auffallende Bedeutung. Ihr Kontingenzwinkel und Schmiegunzwinkel ist schon bekannt. Da nämlich die zyklifizierende Fläche die Fläche der Krümmungsachsen für die Kurve (N) ist, so ist der Kontingenzwinkel der Kurve (N) gleich dem Schmiegunzwinkel der Gratlinie der zyklifizierenden Fläche, nämlich gleich

$$\sqrt{(di - d\sigma)^2 + d\tau^2 \sin^2 i},$$

und der Schmiegunswinkel ist, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem Kontingenzwinkel derselben, nämlich gleich

$$\pm (d\vartheta + d\tau \cos i).$$

Das Bogenelement ds'' der Kurve (N) ist gleich dem Bogenelement des Kreises mit dem Radius A , in den die Kurve bei der Abwicklung der Polarfläche von (M) übergeht. Der zugehörige Zentriwinkel ist gleich dem Winkel $NM'N'$, der erhalten wird, wenn die Normalebene von M mit der ihres Nachbarpunktes M' zusammenfällt; dabei ist:

$$NM'N' = |di - d\sigma|,$$

und daraus folgt:

$$ds'' = A |di - d\sigma|.$$

Setzt man hier den früher gefundenen Wert von di (S. 148) ein, so erhält man:

$$ds'' = \left| \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}} \pm A d\sigma \right|.$$

Das Auftreten des doppelten Vorzeichens entspricht der Tatsache, daß die Kurve (N) jede Erzeugende der Polarfläche in zwei Punkten N_1 und N_2 schneidet, oder, wie es vorher ausgesprochen wurde, daß es für jeden Punkt M zwei Kugeln von konstantem Radius A gibt, die sie dreipunktig berühren. Bezeichnen wir das Bogenelement des Kurvenstückes (N_1) mit ds_1'' , das von (N_2) mit ds_2'' , so wird:

$$ds_1'' + ds_2'' = 2 \left| \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}} \right|,$$

also

$$\frac{1}{2} (s_1'' + s_2'') = A \arcsin \left(\frac{\varrho}{A} \right) + \text{konst.}$$

Diese letzte Gleichung ergibt sich durch unmittelbare Anschauung. Man wickele die Polarfläche der Kurve M samt ihren Berührungsebenen in die Ebene der Zeichnung ab. Dabei verwandelt sich (S. 44) die Kurve (M) in einen festen Punkt \mathfrak{M} , die Gratlinie der Polarfläche K in eine ebene Kurve \mathfrak{K} und die Kurve (N) mit ihren Stücken (N_1) und (N_2) in zwei Kreisbögen $N_1^0 N_1'$ und $N_2^0 N_2'$ vom Radius A und dem Mittelpunkt \mathfrak{M} .

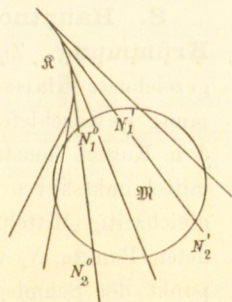


Fig. 55.

Rechnet man die Bogenlänge s_1'' bzw. s_2'' der Kurven von zwei beliebigen festen Punkten N_1^0 bzw. N_2^0 , so ist

$$s_1'' + s_2'' = N_1''N_2'' - N_1'N_2^0 = 2A\varphi - \varphi_0,$$

wenn man den Winkel $N_1''\mathfrak{M}N_2''$ mit φ bezeichnet und $N_1'N_2^0 = \varphi_0$ setzt. Da $\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \rho$ ist, so wird $\sin \varphi = \frac{\rho}{A}$, woraus die obige durch formale Integration gewonnene Gleichung folgt. Die Kurven (N_1) und (N_2) können demnach als zwei Stücke ein und derselben Raumkurve aufgefaßt werden, die allerdings nur dann zusammenhängen, wenn an einer Stelle der Krümmungsradius von M gleich A ist.

Beispiel. Für die gewöhnliche Schraubenlinie ist i sowie ϑ konstant, nämlich

$$\cos i = \frac{\rho}{A}, \quad \cos \vartheta = \frac{\rho A}{r\sqrt{A^2 - \rho^2}};$$

die zyklifizierenden Ebenen bilden mithin mit den Schmiegungebenen und in ihnen die zyklifizierenden Geraden mit den Tangenten der Helix konstante Winkel. Da nun auch die Schmiegungeebene der Helix mit der Erzeugenden des Zylinders einen konstanten Winkel bildet, nämlich den Winkel, unter dem die Helix gegen die Erzeugenden des Zylinders geneigt ist, so folgt, daß die zyklifizierenden Ebenen und in ihnen die zyklifizierenden Geraden gegen die Erzeugungslinien des Zylinders ebenfalls konstante Neigung haben. Hieraus ergibt sich weiter, daß die Punkte der Gratlinie der zyklifizierenden Fläche von den Erzeugenden des Zylinders gleichen Abstand haben und folglich selbst wieder auf einem mit jenem konzentrischen Zylinder liegen und daß die Tangenten der Gratlinie gegen die Erzeugenden dieselbe konstante Neigung haben. Daher ist die Gratlinie ebenfalls eine Helix und die zyklifizierenden Flächen sind abwickelbare Helikoide.

8. Hauptnormalenflächen von Kurven konstanter Krümmung. Zu den orthogonalen Kurvenpaaren gehören als ausgezeichnete Klasse die Paare zugeordneter Kurven konstanter Krümmung (windschiefe Kreise). Sind (M) und (N) zwei solche Kurven, d. h. Kurven konstanter Krümmung, von denen jede die Krümmungsmittelpunktskurve der anderen ist, so ist jeder Punkt M_i von (M) gleichzeitig Mittelpunkt der Schmiegungekugel, die zu dem zugeordneten Punkte N_i von (N) gehört, und dieser umgekehrt der Mittelpunkt der Schmiegungekugel von (M) im Punkte M_i . Daraus ergibt sich, daß die Kurven (M) und (N) in der Tat in der behaupteten Beziehung stehen.

Verbiegt man die Linienfläche (M_iN_i), deren Geraden entsprechende Punkte M_i und N_i verbinden, in eine andere Regelfläche, so gehen

(M) und (N) in zwei Kurven über, die ein orthogonales Paar bilden, da ja bei der Verbiegung die Winkel der beiden Kurven in entsprechenden Punkten ungeändert bleiben.

Ist umgekehrt (M), (N) ein beliebiges Paar von Kurven konstanter geodätischer Krümmung A , so kann man die zugeordnete Linienfläche (MN) so verbiegen, daß die Erzeugenden in die Hauptnormalen der Kurve (M') übergehen, in die sich (M) bei der Biegung verwandelt. Die Kurve (N) geht dabei über in eine Kurve (N'), deren Punkte in den Normalebenebenen der Kurve (M') gelegen sind und deren Tangenten die Hauptnormalen $M'_i N'_i$ senkrecht treffen, also den Binormalen von (M') parallel laufen. Dann laufen aber die Binormalen von (N') den Tangenten von (M') parallel und die Hauptnormalen sind in entsprechenden Punkten parallel (S. 24). Nun ist in dem vorliegenden Falle der dem Punkte M'_i zugeordnete Punkt N'_i auf der Hauptnormalen von M'_i selbst gelegen; die Hauptnormale von N'_i hat also einen Punkt mit der von M'_i gemeinsam, d. h. die Hauptnormalen fallen zusammen. Daraus folgt, daß (M') und (N') zugeordnete Bertrandsche Kurven sind, und da sie sich rechtwinklig kreuzen, insbesondere Kurven konstanter Krümmung.

Die mit einem orthogonalen Kurvenpaare verbundene Linienfläche läßt sich stets in die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung verbiegen.

Damit ist eine charakteristische Eigenschaft dieser Klasse von Regelflächen aufgedeckt:

Die Biegungsflächen der Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung sind die einzigen, auf denen ein orthogonales Kurvenpaar existiert, d. h. ein geodätischer Kreis, dessen Mittelpunktskurve ebenfalls auf der Regelfläche liegt.

Die Beziehungen zwischen den Kurven (M) und (M') lassen sich ohne weiteres angeben. Bezeichnet man mit einem Akzent die zur Kurve konstanter Krümmung (M') gehörigen Größen, so ist (S. 148):

$$\varrho' = A = \frac{\varrho}{\cos i}.$$

Der Winkel benachbarter Geraden $M_i N_i$ und $M_{i+1} N_{i+1}$ bleibt bei der Biegung ungeändert und er geht über in den Winkel dk' benachbarter Hauptnormalen von (M').

Der Winkel benachbarter Lagen von MN ergibt sich aus der sphärischen Abbildung. Da die Gerade MN der Normalebene an-

gehört und mit der Hauptnormale den Winkel i bildet, so liegt ihr Bild n auf dem Hauptkreis hb , um i von h entfernt. Ebenso liegt das Bild n' der Nachbargeraden auf $h'b'$, um $i + di$ von h' entfernt.

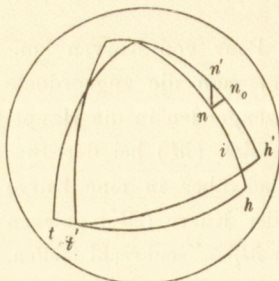


Fig. 56.

Fällt man von n auf $n'h'$ das Lot nn_0 , so ist der Winkel der Nachbargeraden durch nn' gegeben, und es ist

$$nn'^2 = nn_0^2 + n'n_0^2.$$

Nun ist $nn_0 = d\tau \cos i$ und $n'n_0 = di - d\sigma$; also wird

$$dk'^2 = nn'^2 = d\tau^2 \cos^2 i + (d\sigma - di)^2,$$

und da $d\tau \cos i = \pm d\tau'$ ist, so hat man für den Schmiegunswinkel $d\sigma'$ die Gleichung:

$$d\sigma' = d\sigma - di.$$

Das Vorzeichen ist richtig bestimmt, denn bei einer stetigen Biegung wird der Schmiegunswinkel keine sprunghafte Änderung erfahren.

Ist (M) selbst eine Kurve konstanter Krümmung, so wird

$$\cos i = \frac{\rho}{A}$$

konstant, also

$$d\sigma' = d\sigma,$$

und da die Bogenlänge gleichfalls ungeändert bleibt, $r' = r$, d. h.

Biegt man die Hauptnormalenfläche einer Raumkurve konstanter Krümmung (M') , so daß (M') wieder in eine Kurve konstanter Krümmung (M) übergeht, so bleibt die Torsion der Kurve ungeändert.

Nach einem früheren Satze sind dann die Binormalenflächen von (M) und (M') aufeinander verbiegbar. Damit ist ein bemerkenswert miteinander gekoppeltes Paar von Linienflächen gewonnen, bei dem die stetige Biegung der einen Fläche eine stetige Biegung der zweiten Fläche nach sich zieht.

XV. Kapitel.

Kurvenpaare.

1. Allgemeines. Zwei Kurven (P) , (Q) , die punktweise sich so zugeordnet sind, daß jeder Punkt P_i der einen Kurve in der Normalebene des zugeordneten Punktes Q_i der anderen Kurve liegt,

bilden ein Kurvenpaar.¹⁾ Die Verbindungslinien $P_i Q_i$ entsprechender Punkte liegen in den Normalebene beider zugeordneter Punkte P_i und Q_i , und die gegebenen Kurven sind dabei zwei Orthogonaltrajektorien auf der Regelfläche der Geraden $P_i Q_i$; umgekehrt kann man sagen:

Zwei Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer geradlinigen Fläche bilden stets ein Kurvenpaar.

Diese geradlinige Fläche heiße die mit dem Kurvenpaar verbundene Regelfläche.

Da bei einer Verbiegung der Fläche die Winkel auf ihr un geändert bleiben, so folgt:

Bei einer beliebigen Verbiegung der mit dem Kurvenpaar verbundenen Regelfläche geht dieses wieder in ein Kurvenpaar über.

Da die entsprechenden Punkte zweier Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden immer denselben Abstand haben (S. 79), so folgt:

Die entsprechenden Punkte der Kurven eines Paares haben konstanten Abstand.

Man bezeichne diesen konstanten Abstand mit k , das Bogenelement $P_1 P_2$ von (P) mit ds , das Bogenelement $Q_1 Q_2$ von (Q) mit ds_1 , den Krümmungsradius $P_1 C_1$ von (P) in P_1 mit ρ , den Schnittpunkt von $P_1 Q_1$ und der Krümmungssache $C_1 K_1$ mit S_1 . Fällt man ferner von Q_1 auf die Hauptnormale $P_1 C_1$ das Lot, dessen Fußpunkt D_1 sei, so ist

$$(1) \quad p = \frac{S_1 Q_1}{S_1 P_1} = \frac{C_1 D_1}{C_1 P_1}.$$

Dabei bedeutet

$$(2) \quad p = 1 - \frac{k}{\rho} \cos i$$

und i den Winkel $C_1 P_1 Q_1$ der Hauptnormale und erzeugenden Geraden.

Der Schmiegunswinkel $d\sigma$ der Kurve (P) ist bis auf das Vorzeichen gleich dem Winkel $C_1 K_1 C_2$ benachbarter Polarachsen und gleich dem Winkel $C_2 P_1 C_1$, dessen Schenkel auf den Schenkeln von $C_1 K_2 C_2$ senkrecht stehen.

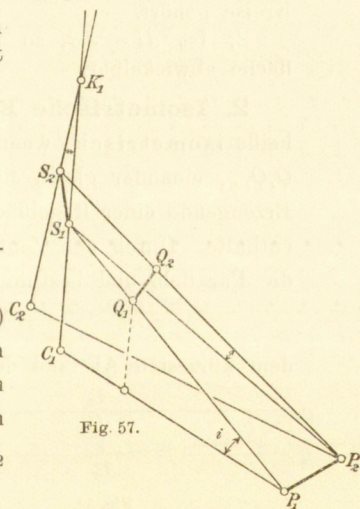


Fig. 57.

1) A. Voß, Kurvenpaare im Raume. München. Ber. 1909. E. Salzkowski, Deutsche Math.-Ver. 19, 1910. Ähnliche Fragestellungen bei L. Bianchi, Palermo Circolo mat. Rend. 25, 1908; G. Darboux, Comptes rendus 146, 1910.

Dreht man die Normalebene von P_2 um $K_1 C_2$ in die Normalebene von C_1 , so fällt P_2 auf P_1 , Q_1 mit dem Punkte Q_1' von $S_1 P_2$ zusammen, für den Punkt $P_2 Q_1' = k$ ist, und man erhält:

$$\begin{aligned} di &= C_2 P_1 S_2 - C_1 P_1 S_1 = C_2 P_1 S_1 + S_1 P_1 S_2 - C_1 P_1 S_1 \\ &= d\sigma + S_1 P_2 S_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(3) \quad Q_1' Q_2 = k \cdot (di - d\sigma),$$

d. h. $Q_1' Q_2$ ist das Bogenelement desjenigen Kreises, in den sich die Kurve (Q) bei der Abwicklung der Polarfläche von (P) verwandelt.

Aus der Gleichung (1) folgt, daß für $p = 0$ die Punkte S_i und Q_i zusammenfallen; in diesem Falle liegt (Q) auf der Polarfläche von (P) und die entsprechenden Linienelemente beider Kurven kreuzen sich demgemäß rechtwinklig. Die Folge der Ebenen $P_1 P_2 Q_1, P_2 P_3 Q_2, \dots$ umhüllt dann die zum Radius k gehörende zyklifizierende Fläche der Kurve (P) , die Folge der Ebenen $Q_1 Q_2 P_1, Q_2 Q_3 P_2, \dots$ ebenso die entsprechende zyklifizierende Fläche der Kurve (Q) . (Vgl. das vorige Kapitel.)

Übungen. 1. Die Bedingung $p = \text{konst.}$ bedeutet, daß die Kurve (Q) auf der Regelfläche liegt, die zu einem Paare geodätischer Kreise gehört.

2. Ist $di = d\sigma$, so ist die zum Paare (P, Q) gehörige Regelfläche abwickelbar.

2. Isometrische Kurvenpaare. Ein Kurvenpaar $(P), (Q)$ heißt isometrisch, wenn entsprechende Bogenelemente $P_i P_{i+1}$ und $Q_i Q_{i+1}$ einander gleich sind. Es seien $P_1 Q_1, P_2 Q_2$ zwei benachbarte Erzeugende einer Regelfläche, die ein isometrisches Kurvenpaar (PQ) enthalte. Durch den Zentralpunkt U_1 von $P_1 Q_1$ lege man zu $P_2 Q_2$ die Parallele und bestimme auf ihr P' und Q' , so daß

$$P' P_2 = Q' Q_2 = dh$$

dem kürzesten Abstand der Nachbarerzeugenden gleich ist.

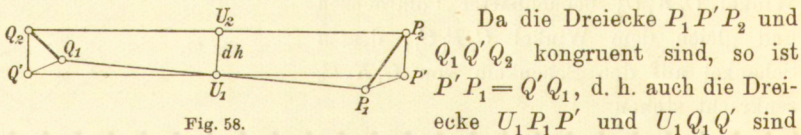


Fig. 58.

Da die Dreiecke $P_1 P' P_2$ und $Q_1 Q' Q_2$ kongruent sind, so ist $P' P_1 = Q' Q_1$, d. h. auch die Dreiecke $U_1 P_1 P'$ und $U_1 Q_1 Q'$ sind kongruent und der Mittelpunkt U_1 halbiert die Strecke $P_1 Q_1$. Die Striktionslinie (U) bildet also auch mit jeder der Kurven (P) und (Q) ein Paar; sie ist also eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden.

Ist aber die Striktionslinie einer Regelfläche eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden, so ist sie entweder geradlinig oder hat die Erzeugenden zu Binormalen.

Man erhält das allgemeinste isometrische Kurvenpaar, wenn man auf der Binormalenfläche einer Raumkurve zwei Orthogonaltrajektorien bestimmt, die von der Striktionslinie gleichen Abstand haben.

Verbiegt man jetzt die Linienfläche, so daß die Striktionslinie gerade wird, so gehen die Erzeugenden der Fläche in Geraden über, die ein und derselben Ebene parallel sind, und die Kurven des Paares in zwei Kurven, die auf einem Kreiszyylinder mit der Striktionsgeraden als Achse gelegen sind.

Bei der ganzen Betrachtung war außer acht gelassen, daß die Striktionslinie (U) sich auf einen Punkt reduzieren kann; in diesem Falle sind (P) und (Q) Kurven derselben Kugel, die bezüglich des Mittelpunktes symmetrisch liegen. Wir fassen die Ergebnisse in den Satz zusammen:

Isometrische Kurvenpaare sind

1. *zwei bezüglich des Mittelpunktes symmetrische Kurven derselben Kugel,*
2. *zwei bezüglich der Achse symmetrische Kurven eines Kreiszyinders und die aus ihnen bei beliebiger Biegung der Regelfläche des Paares entstehenden Kurven.*

Man bezeichnet die Striktionslinie (U) zweckmäßig als Mittelkurve des Paares.

Übung. Die Kurven eines isometrischen Paares haben in entsprechenden Punkten die gleiche Krümmung, wenn die Mittelkurve eine Kurve konstanter Torsion oder eine Gerade ist oder in einen Punkt ausartet.

3. Kurvenpaare, deren Bogenelemente in konstantem Verhältnis stehen. Für jedes isometrische Kurvenpaar ergab sich die Existenz einer Mittelkurve, deren Tangentenrichtung den Winkel der Tangentenrichtungen der Kurven des Paares halbierte. Stehen allgemeiner die Bogenelemente der Kurven eines Paares in einem von 1 verschiedenen Verhältnis, so kann man wie vorher die Existenz eines Kurvenpaares nachweisen, welches hier eine ähnliche Rolle spielt wie die Mittelkurve der isometrischen Kurven, und das daher als Mittelpaar bezeichnet werden soll.

Betrachtet man zwei benachbarte Erzeugenden P_1Q_1, P_2Q_2 der mit dem Kurvenpaar verbundenen Regelfläche und zieht durch P_1

formation miteinander verbunden“. Zwei Kurven eines Paares sind stets zwei derartige Kurven. Aus jeder Kurve kann man durch Normaltransformation unendlich viele andere herleiten. Sind nun (P) und (Q) zwei Kurven, die mit (M) durch Normaltransformation verknüpft sind, so existiert eine vierte Kurve (M_1) , die ihrerseits mit (P) und (Q) durch Normaltransformation verknüpft ist. Die entsprechenden Punkte der vier Kurven bilden ein Tetraeder, dessen Seitenflächen die Normalebene der von den Ecken beschriebenen Kurven sind. Welches ist das allgemeinste Kurvensystem, für das alle ∞^1 derartigen Tetraeder kongruent sind?

5. Zwei Kurven, die punktweise derartig zugeordnet sind, daß jeder Punkt der einen Kurve in der Schmiegungebene des entsprechenden Punktes der zweiten Kurve liegt, heißen asymptotisch zugeordnet. Beide Kurven liegen als asymptotische Linien auf der Linienfläche, die aus den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte gebildet wird, und umgekehrt stehen irgend zwei (krumme) asymptotische Linien einer Regelfläche in asymptotischer Zuordnung. Ist d der Abstand zweier entsprechender Punkte, γ der Winkel ihrer Schmiegungebenen, r und r' ihre Torsionsradien, so ist

$$rr' \sin^2 \gamma = d^2.$$

Jeder Kurve konstanter Torsion $1 : r$ kann man durch asymptotische Transformation ∞^1 Kurven derselben konstanten Torsion zuordnen, deren Punkte von den entsprechenden Punkten der ersten Kurve einen konstanten Abstand haben (Bäcklund'sche Transformation der Kurven konstanter Torsion). Zu den Übungen 4 und 5 vgl. die oben (S. 157) angegebene Literatur, die den Gegenstand, zumeist analytisch, behandelt.

XVI. Kapitel.

Die Evolutoiden.

1. Evolutoide. Zieht man durch die aufeinanderfolgenden Punkte M, M', M'', \dots einer Kurve Gerade, welche mit den Tangenten in diesen Punkten konstante Winkel α bilden und sich aufeinanderfolgend in den Punkten N, N', N'', \dots schneiden, so bildet die Folge der Punkte N eine Kurve, welche eine Evolutoide der Kurve (M) genannt wird.¹⁾ Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so geht die Evolutoide in eine Evolute über. Die Evoluten bilden also eine besondere Klasse der Evolutoiden.

1) Lancret, Mém. sur les développées des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables. Mém. prés. à l'Inst. T. II, p. 19. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Chap. 10. Paris. 1876.

Die Evolutoide ist die Gratlinie einer abwickelbaren Fläche, die durch die Kurve geht und deren Erzeugenden mit den Tangenten der Kurve konstante Winkel bilden. Diese Fläche und mit ihr die Evolutoide ist vollständig bestimmt, sobald der Winkel α und irgend eine Erzeugende, z. B. die durch den Punkt M gehende, gegeben ist. Ein und demselben Winkel α entsprechen aber unendlich viele Evolutoiden, denn man kann zur Anfangstangente derselben jeden Strahl eines Rotationskegels wählen, dessen Mittelpunkt in M liegt, dessen Achse die Tangente der Kurve in diesem Punkte und dessen halbe Öffnung gleich α ist. Es hängt daher die spezielle Evolutoide von zwei Bedingungen ab, von der Größe des Winkels α und der Lage der Anfangstangente. Die sämtlichen Evolutoiden einer Kurve bilden daher eine Schar von ∞^2 Kurven. In dieser sind einzelne ausgezeichnete Scharen enthalten, insbesondere die Schar der Evoluten, die dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entsprechen; für $\alpha = 0$ reduziert sich die Schar auf die Kurve selbst.

Es gibt ∞^2 Geraden, die durch die Punkte der Kurve gehen und mit ihr einen konstanten Winkel α bilden. Sie bilden also nach der Ausdrucksweise der Liniengeometrie eine Linienkongruenz (nach Kummer Strahlensystem). Sie lassen sich auf zweifach unendlich viele Weisen zu abwickelbaren Flächen anordnen: einmal in die ∞^1 eben charakterisierten Rotationskegel, deren Spitzen auf der Kurve selbst liegen, dann die Schar der abwickelbaren Tangentflächen der Evolutoiden. Jede Kongruenz besitzt zwei Brenn-mäntel, den Ort der Schnittpunkte benachbarter Geraden. Ist ein Brenn-mantel eine Fläche, so wird diese von allen Geraden der Kongruenz berührt, ist er eine Kurve, so wird diese von allen Strahlen der Kongruenz geschnitten. Der erste Brenn-mantel der Evolutoiden-kongruenz reduziert sich auf die gegebene Raumkurve.

2. Das sphärische Bild der Evolutoide. Der Winkel, den die Tangente an eine Evolutoide mit der Kurventangente bildet, ist konstant gleich α ; das sphärische Bild der Evolutoidenstrahlen liegt also auf dem Kreise mit dem Radius α um das Tangentenbild t . Die Erzeugenden aller zum Winkel α gehörigen Evolutoiden-flächen sind demnach die Punkte der Schar kongruenter Kreise, deren Mittelpunkte auf dem Tangentenbild liegen.

Weiter gehört das Bogenelement MM' der Kurve (M) der Schmiegungebene einer jeden Evolutoide an; d. h. das Bild der Schmiegungebene enthält das Bild t der Geraden MM' , oder anders ausgedrückt: die Verbindungslinie der Bilder ee' benachbarter Er-

zeugender einer Evolutoidenfläche ist ein sphärischer Radius des Kreises, auf dem e liegt, und dieser schneidet den Kreis senkrecht.

Die sphärischen Bilder der Evolutoiden einer Kurve (M), die zu dem Winkel α gehören, sind die Orthogonaltrajektorien der Kreisschar von konstantem Radius α , deren Mittelpunkte das Tangentenbild (t) der Kurve (M) erfüllen.

Damit ist das Problem der Evolutoiden auf die Bestimmung der Orthogonaltrajektorien einer Kreisschar zurückgeführt.

Übung. 1. Man untersuche die Evolutoiden einer Schraubenlinie. Wann sind sie wieder Schraubenlinien?

2. Alle Evolutoiden eines Kreises zu bestimmen.

3. Das sphärische Bild einer Evolutoide einer ebenen Kurve ist eine sphärische Traktrix.

3. Der Réaumurische Satz. Ist (M) eine ebene Kurve, so gibt es eine Evolutoide, die zu dem Winkel α gehört und in derselben Ebene liegt. Es seien $MN, M'N', \dots$ benachbarte Evolutoidenstrahlen, dann ist Winkel $NMM' = N'M'M'' = \dots = \alpha$. Der Außenwinkel des Dreiecks NMM' ist $\alpha + d\tau$, wobei $d\tau$ den Kontingenzwinkel der Kurve (M) bezeichnet. Hieraus folgt, daß

$$\sphericalangle NMM' + MNM' = \alpha + d\tau,$$

d. h. der Kontingenzwinkel der Evolutoide $MNM' = d\tau$ ist. Da der Winkel MCM' benachbarter Normalen gleichfalls gleich $d\tau$ ist, so liegen die Punkte M, M', N und der Krümmungsmittelpunkt C der Kurve (M) auf einem Kreise, für den MM' eine Tangente und MC ein Durchmesser ist. Also wird Winkel $CNM = \frac{1}{2}\pi$, d. h. NC ist die Normale der Evolutoide.

Die Normalen einer Evolutoide gehen durch den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt der Ausgangskurve und umhüllen eine Evolutoide der Evolute.

Der zweite Teil dieses von Réaumur¹⁾ gefundenen Satzes folgt einfach daraus, daß der Winkel $MCN = \alpha$ ist. Er läßt sich in zweckmäßiger Weise für den Raum verallgemeinern. Die Schmiegungebene MNM' der Evolutoide (E) schneide die Krümmungsachse von M im Punkte Z . Dann ist der Winkel $ZMM' = \frac{1}{2}\pi$

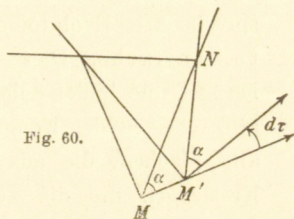


Fig. 60.

1) Réaumur, Méthodes générales . . ., Mém. de l'Acad. des Sciences. 1709. G. Loria, Spezielle ebene Kurven. 1. Aufl. (1902). S. 627.

und auch $ZM'M'' = \frac{1}{2}\pi$, da ja die Krümmungsachse auf zwei benachbarten Tangenten senkrecht steht. Da aber $NMM' = NM'M'' = \alpha$

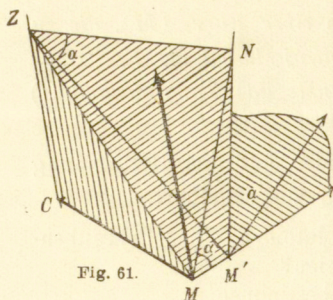


Fig. 61.

ist, so wird $ZMN = ZM'N = \frac{1}{2}\pi - \alpha$; die vier Punkte Z, N, M, M' liegen also wieder auf einem Kreise, oder der Kreis, der die Tangente der Kurve (M) in M berührt und durch Z geht, geht auch durch den Punkt N . ZM ist daher ein Durchmesser und ZEM ein rechter Winkel. ZN ist also eine Normale, und da sie der Schmiegungeebene von (N) angehört,

die Hauptnormale der Evolutoiden.

Die Hauptnormalen der Evolutoiden schneiden die zugehörigen Krümmungsachsen der ursprünglichen Kurve.

4. Evolutoidenfläche. Alle einem bestimmten Winkel α entsprechenden Evolutoiden bilden eine krumme Fläche, die Evolutoidenfläche. Diese Fläche wird von allen Geraden der Kongruenz berührt und bildet daher deren zweiten Brennmantel. Wenn aber alle Geraden der Kongruenz die Fläche berühren, so müssen es auch alle Flächen, die aus diesen Geraden gebildet sind; also auch die Kreiskegel, die die zweite Schar von abwickelbaren Flächen bilden; d. h.

Die Berührungskegel an die Evolutoidenfläche von den Punkten der gegebenen Kurve aus sind gerade Kreiskegel mit der Öffnung 2α .

Die Gesamtheit der Evolutoidenflächen bildet eine Flächenschar, in welcher die Fläche der Krümmungsachsen als die Fläche der Evoluten enthalten ist. Läßt man den Winkel α stetig von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so ändert sich die Evolutoidenfläche selbst stetig und geht schließlich in ihre Grenze, die Fläche der Krümmungsachsen, über.

5. Charakteristik der Evolutoidenfläche. Es war eben gezeigt, daß der gerade Kreiskegel mit der Spitze M , der aus den die Evolutoiden berührenden Geraden besteht, die Evolutoidenfläche berührt; diese ist also die Hüllfläche aller dieser unendlich vielen Kegel, und die Schnittkurve zweier aufeinanderfolgender Kegel erzeugt daher die Fläche der Evolutoiden, diese Linie ist die Charakteristik und der Kegel die Erzeugungsfläche der Evolutoidenfläche.

Die Schnittkurve zweier kongruenter Kreisegel, deren Achsen (in dem betrachteten Falle die Tangenten) sich schneiden und einen unendlich kleinen Winkel (hier den Kontingenzwinkel $d\tau$) bilden, zerfällt in einen Kreis und eine Hyperbel. Legt man nämlich durch die Achse MM' des ersten Kegels eine Ebene, so werden die beiden Flächen in den Geraden $MN, MN_1, M'N, M'N_1$ geschnitten, die vier Punkte N, N_1, P, P_1 gemeinsam haben. Da in den Dreiecken MPM' und $MP'M'$ die Winkel bei M und M' sich nun um eine infinitesimale Größe unterscheiden, so sind sie gleichschenkelig und $PP' \perp MM'$ bis auf infinitesimale Größen höherer Ordnung. Dies gilt für jede Lage der Ebene; alle P, P' liegen somit in einer Ebene, die MM' im Mittelpunkte senkrecht durchschneidet; also auf einem Kreise. Dieser Teil des Schnitts beider Flächen reduziert sich, wenn in der Grenze M und M' zusammenrücken, auf einen Punkt, den Scheitel M . Daraus folgt, daß der Restschnitt, die gesuchte Charakteristik der Evolutoidenfläche ein Kegelschnitt, also eine ebene Kurve sein muß.

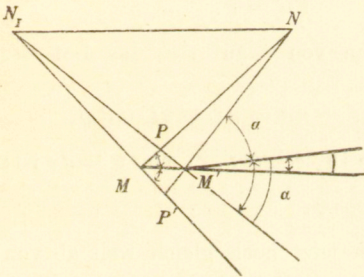


Fig. 62.

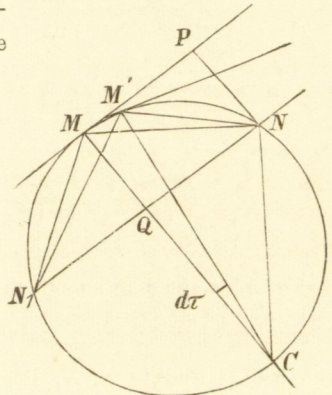


Fig. 63.

Um die Natur dieses Kegelschnitts näher zu untersuchen, lege man zunächst die vorher konstruierte Ebene $MM'NN_1$ durch die beiden Kegelachsen, d. h. also durch zwei benachbarte Tangenten; sie fällt dann mit der Schmiegungeebene zusammen, und die Winkel MN_1M und MNM' sind gleich dem Kontingenzwinkel $d\tau$ der Kurve (M). Die Punkte N und N_1 liegen daher gleichweit ab von der Tangente in M , und ihre Verbindungslinie, die dieser Tangente parallel ist, wird von der Hauptnormalen des Punktes M in Q halbiert. Die Punkte N, N_1 liegen aber auch, da die Winkel $MNM' = MN_1M'$ gleich $d\tau$ sind, auf einem Kreise, der über dem

Krümmungshalbmesser $MC = \rho$ als Durchmesser beschrieben werden kann; daher ist Winkel MNC ein Rechter. Fällt man von N das Lot NP auf die Tangente, so wird:

$$MN = \rho \sin \alpha, \quad NP = \rho \sin^2 \alpha, \quad MP = \rho \sin \alpha \cos \alpha.$$

Legen wir jetzt durch die Tangente des Punktes M irgend eine andere Ebene, welche mit der Schmiegungeebene einen Winkel ϑ bildet, so schneidet sie die Durchschnittskurve beider Kegel gleichfalls in zwei Punkten N, N_1 , welche die Spitzen von zwei Dreiecken MNM' sind, deren Winkel $MNM' = d\psi$ aber nicht gleich $d\tau$, sondern gleich $d\tau \cdot \cos \vartheta$ sind.

Das sphärische Bild der Tangenten in M, M' seien die Punkte t und t' , die Geraden MN und $M'N$ liegen in einer Ebene, die mit der Schmiegungeebene von M den Winkel ϑ bildet (ϑ sei der spitze Winkel der beiden Ebenen); ihre sphärischen Bilder n, n' liegen daher auf einem größten Kreise durch t , der mit tt' einen Winkel α bildet; ferner ist

$$tn = \alpha, \quad tn' = \alpha + d\psi$$

und

$$t'n' = \alpha.$$

Fällt man nun von t auf $t'u'$ das Lot tu , so ist

$$ut' = nt' - nu = nt' - ut = d\psi,$$

und es folgt aus dem unendlich kleinen Dreieck tut' , in dem $tt' = d\tau$ ist:

$$d\psi = d\tau \cos \vartheta.$$

Die beiden Punkte N, N_1 liegen auch jetzt noch gleich weit ab von der Tangente in M , und ihre Verbindungslinie ist daher auch jetzt zu dieser parallel. Sie liegen auch jetzt auf einem Kreise, welcher über der Sehne MM' den Peripheriewinkel $d\psi$ faßt, und daher ist der Durchmesser dieses Kreises

$$\frac{MM'}{d\psi} = \frac{MM'}{d\tau} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta}$$

oder, weil $\frac{MM'}{d\tau}$ gleich dem Krümmungshalbmesser ρ der Kurve (M) ist

$$\frac{\rho}{\cos \vartheta}.$$

Projiziert man sie auf die Tangente und Schmiegungeebene nach p und N_0 , so wird ähnlich, wie vorher

$$MN = \frac{\varrho}{\cos \vartheta} \sin \alpha, \quad NP_0 = \frac{\varrho}{\cos \vartheta} \sin^2 \alpha, \quad MP_0 = \frac{\varrho}{\cos \vartheta} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$P_0N_0 = NP_0 \cdot \cos \vartheta = \varrho \sin^2 \alpha, \quad NN_0 = NP_0 \cdot \sin \vartheta = \varrho \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sin^2 \alpha.$$

Hieraus ersieht man, daß die Projektionen der Punkte N auf die Schmiegungeebene mit den in dieser Ebene selbst liegenden Punkten N in eine Gerade fallen, die der Tangente des Punktes M im Abstände $\varrho \sin^2 \alpha$ parallel läuft. Es liegen daher alle Punkte N , d. h. die sämtlichen Punkte der Durchschnittslinie der beiden Kegel in einer Ebene, welche auf dem Krümmungshalbmesser senkrecht steht und von der rektifizierenden Ebene um die Strecke $\varrho \sin^2 \alpha$ entfernt ist. Diese Durchschnittslinie ist also, wie schon vorher dargetan wurde, eine ebene Kurve. Da aber ihre Ebene der Tangente in M , d. h. der Achse des Kegels in M parallel läuft, so ist sie eine Hyperbel.

Die Ebene der Hyperbel steht auf der Schmiegungeebene senkrecht und ihre Hauptachse liegt auf der Schnittlinie dieser beiden Ebenen. Die Hauptachse $2A$ ist daher gleich dem Abstände NN_1 der in der Schmiegungeebene konstruierten Kurvenpunkte, also

$$A = \varrho \sin \alpha \cos \alpha.$$

Der Mittelpunkt der Hyperbel ist der Schnittpunkt P von NN_1 und der Hauptnormalen und, weil die Ebene der Hyperbel mit der rektifizierenden Ebene, also auch mit den beiden Strahlen des Kegels in M , welche in diese fallen, parallel ist, sind die Asymptoten parallel zu diesen beiden Strahlen. Der Winkel der Asymptoten wird demnach gleich dem Winkel 2α dieser Erzeugenden und die halbe Nebenachse

$$B = A \operatorname{tg} \alpha = \varrho \sin^2 \alpha.$$

Die Punkte N , N_1 der Hyperbel liegen auf einem Kreise, dessen Durchmesser gleich $\frac{\varrho}{\cos \vartheta}$ ist und dessen Mittelpunkt O in der Normalebene liegt. Konstruiert man den von M ausgehenden Durchmesser, so ist sein zweiter Endpunkt P von M um $\varrho : \cos \vartheta$ entfernt, seine Projektion auf die Schmiegungeebene fällt daher mit dem Krümmungsmittelpunkt C zusammen.

Läßt man jetzt ϑ alle möglichen Werte annehmen, so durchläuft O die ganze Krümmungachse und die Kreise umhüllen eine Fläche, auf der die Hyperbel liegt, die den Ort der Punkte N bildet. Da der Kreis von dem besonderen Werte des Winkels α nicht abhängt, so liegen auf der Fläche auch alle anderen Hyperbeln, welche den

verschiedenen Werten des Winkels α entsprechen und deren Ebenen der rektifizierenden Ebene der Kurve parallel laufen. Die Fläche wird daher parallel der rektifizierenden Ebene in Hyperbeln geschnitten, und wenn α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ anwächst, so bewegt sich die Ebene eines solchen Schnitts von der rektifizierenden Ebene der Kurve M bis zur rektifizierenden Ebene der Kurve der Mittelpunkte ihrer Schmiegunskugeln; dabei wächst der Asymptotenwinkel von 0 bis π und die Hyperbel geht stetig von der Tangente der Kurve M durch alle Zwischenstufen hindurch in die Krümmungsachse über.

Konstruiert man in den Tangentenflächen einer Raumkurve alle Kreise, die die Tangente berühren und durch den Schnitt mit der Krümmungsachse gehen, so wird die von diesen Kreisen umhüllte Fläche von jeder zur rektifizierenden Ebene parallelen Ebene in einer Hyperbel geschnitten, deren Hauptachse in der Schmiegungebene parallel zur Tangente liegt.

Man kann diese Fläche auch unabhängig von der Theorie der Raumkurven gewinnen: als Ort aller Kreise, die eine von zwei windschiefen Geraden in dem Punkte berühren, wo sie von der zweiten den kürzesten Abstand besitzt, und die diese zweite Gerade schneiden.

Übungen. 1. Die Ergebnisse dieser Nummer als Folgerungen des Réaumur'schen Satzes darzustellen.

2. Die Evolutoidenfläche des Kreises ist ein Rotationshyperboloid.

6. Die Evolutoide als kürzeste Linie. Die Evolutoide ist die Gratlinie einer abwickelbaren Fläche, deren Erzeugende mit den Tangenten der gegebenen Kurve (M) konstante Winkel bilden. Daher ist die Ebene zweier aufeinanderfolgender Erzeugenden die Schmiegungebene der Evolutoide. Sie geht aber durch die Tangente der Kurve (M) und steht folglich auf der Tangentenebene des geraden Kegels senkrecht, dessen Achse diese Tangente ist und auf dem die Tangente der Evolutoide liegt.

Nun aber berührt der Kegel die Evolutoidenfläche in ihrer Charakteristik (H), hat also mit ihr in sämtlichen Punkten dieser Charakteristik die Berührungsebene gemein. Auf der Hyperbel (H) liegt aber der betrachtete Evolutoidenpunkt, dessen Schmiegungebene somit auf der Berührungsebene der Fläche senkrecht steht. Die Hauptnormale der Evolutoide fällt also mit der Flächennormalen zusammen, d. h. die Kurve ist geodätische Linie auf der Fläche.

Jede Evolutoide ist eine kürzeste Linie auf der Evolutoidenfläche.

Jede Evolutoide ist daher auch eine Kurve, längs welcher ein über die Evolutoidenfläche frei hingespannter Faden ohne Reibung im Gleichgewichte sich befindet. Befestigt man daher im Punkte M

der Kurve einen Faden und spannt ihn über den Kegel in M hin bis zu einem Punkte N der Hyperbel, welche die Charakteristik der Evolutoidenfläche ist, und längs welcher der Kegel diese Fläche berührt, und führt ihn dann frei über die Fläche hin, so zeichnet er auf dieser die durch N gehende Evolutoide der Kurve M . Zieht man also nach allen Punkten N der Charakteristik solche Fäden, so erhält man alle Evolutoiden, welche demselben Winkel α entsprechen.

Übung. Die Evolutoidenkongruenzen sind Normalenkongruenzen von Flächen, bei denen die erste Schar von Krümmungslinien aus Kreisen, die zweite Schar aus den Evolventen der Evolutoiden besteht.

7. Besondere Kurven auf der Evolutoidenfläche. Auf der Evolutoidenfläche gibt es zwei besonders ausgezeichnete Kurven, nämlich die Kurve der Scheitel und die Enveloppe aller Hyperbeln. Keine von beiden ist eine Evolutoide. Um dies für die Kurve der Scheitel zu erweisen, genügt es zu bemerken, daß zwei aufeinanderfolgende Linien MC , $M'C'$, welche die Punkte M , M' der Kurve mit den ihnen entsprechenden Scheiteln C , C' verbinden, in den Schmiegungebenen von M und M' liegen und sich also, wenn überhaupt, nur auf der Durchschnittsebene dieser Ebenen, nämlich der Tangente, schneiden könnten. Dies ist aber nicht möglich, da die Geraden MC , $M'C$ die Tangente in den nicht zusammenfallenden Punkten M und M' schneiden. Sie umhüllen daher überhaupt keine Kurve, also auch nicht die Kurve der Scheitel, mithin ist diese keine Evolutoide. Eine Ausnahme macht der Fall, daß die Kurve M eben ist; dann ist nämlich die Kurve der Scheitel eine Evolutoide; sie ist die Durchschnittslinie der Ebene der Kurve mit der Evolutoidenfläche, und um sie gruppieren sich die Evolutoiden symmetrisch zu beiden Seiten der Kurvenebene, die also eine Symmetrieebene der Evolutoidenfläche wird.

Daß die Hüllkurve der Hyperbeln keine Evolutoide ist, ergibt sich einfach aus der Bemerkung, daß im Berührungspunkte die Kurve und Hüllkurve die Tangente gemeinsam haben; die Tangenten der Hüllkurve liegen also immer in Ebenen, die der rektifizierenden Ebene parallel sind, die also niemals durch den Punkt M der Kurve gehen können, um so weniger daher Tangenten an eine Evolutoide sein können.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht die Kurve der Scheitel in die Kurve der Krümmungsmittelpunkte und die Enveloppe der Hyperbeln in den Ort der Mittelpunkte der Schmiegungeknugeln über.

Es ist leicht, den Winkel dk zu bestimmen, welchen die Strahlen MC , $M'C'$ bilden, welche nach den Scheiteln zweier Hyperbeln gehen.

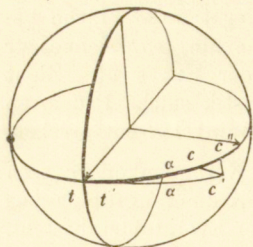


Fig. 65.

Der Strahl MC liegt in der Schmiegungebene von M und bildet mit der Tangente einen Winkel α , sein sphärisches Bild ist demnach auf dem größten Kreise tt' der Schmiegungebene gelegen und zwar so, daß

$$tc = \alpha$$

wird. Ebenso ist das sphärische Bild von $M'C'$ auf dem Kreise $t't''$ gelegen, der als Bild der Schmiegungebene von M' aufgefaßt werden kann, und es ist auch $t'c' = \alpha$. Fällt man nun von c' auf tc das Lot $c'c''$, so ist $cc'' = tt = d\tau$, $c'c'' = d\sigma \sin \alpha$ und $c'c = dk$. Daraus folgt

$$dk^2 = d\tau^2 + \sin^2 \alpha d\sigma^2.$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhält man hieraus den Lancretschen Satz (S. 27).

Die Scheitelstrahlen MC erzeugen eine windschiefe Fläche, die für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die Fläche der Hauptnormalen übergeht.

8. Verteilung der Evolutoiden auf ihrer Ortsfläche.

Durch jeden Punkt der Evolutoidenfläche geht eine einzige Evolutoide, denn dieser Punkt liegt auf der Durchschnittslinie zweier benachbarter Kegelflächen, nach ihm gehen zwei Strahlen dieser Kegel, von denen der eine bereits genügt, um die Evolutoide vollständig zu bestimmen. Auch durch jeden Punkt der Scheitelkurve geht eine Evolutoide, und diese wird von allen Evolutoiden getroffen. Nur wenn die Kurve eben ist, ist die Scheitelkurve selbst Evolutoide und haben die übrigen mit ihr keinen Punkt gemein. Ebenso trifft jede Evolutoide die Enveloppe der Hyperbeln in einem Punkte.

Ist M ein Schnittpunkt der Kurve (M) mit ihrer Evolutoidenfläche, so ist dieser Punkt ein Punkt der Durchschnittslinie des Kegels in M mit dem folgenden Kegel, also ein Punkt der charakteristischen Hyperbel. Nun läuft die Ebene der Hyperbel mit der rektifizierenden Ebene parallel, fällt also in diesem Falle mit der rektifizierenden Ebene selbst zusammen; daher reduziert sich die Hyperbel auf die beiden Geraden, in welchen die rektifizierende Ebene dieses Punktes den Kegel, dessen Mittelpunkt in ihm liegt, schneidet, nämlich auf die beiden Geraden, die mit der Tangente von M gleiche Winkel α bilden. Dieser Punkt ist Scheitel und Mittelpunkt der Hyperbel zugleich, mithin geht die Kurve der Scheitel durch ihn hindurch. Da die Tangenten der Evolutoiden die Strahlen

des erzeugenden Kegels sind und alle durch diesen Punkt gehen, so gehört er zugleich allen Evolutoiden gemeinschaftlich an. In ihm stoßen die beiden Flächenäste zusammen, welche den Ort der Evolutoiden bilden.

9. Konjugierte Kurven. Die Evolutoiden einerseits und die charakteristischen Hyperbeln andererseits bilden auf der Evolutoidenfläche zwei Scharen von Kurven, welchen hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage eine ausgezeichnete Eigenschaft zukommt. Zieht man nämlich längs einer Kurve des einen Systems in allen Punkten, in welchen sie von den Kurven des andern Systems geschnitten wird, Tangenten an die letzteren, so bilden diese eine abwickelbare Fläche.

Betrachtet man zunächst eine Hyperbel, so ist die Schar der schneidenden Kurven von den Evolutoiden gebildet; deren Tangenten sind aber die Strahlen des Hüllkegels der Fläche, auf dem die Hyperbel liegt, und dieser Kegel ist jene abwickelbare Fläche.

Betrachtet man andererseits eine Evolutoide (E), so sind die Kurven des andern Systems Hyperbeln, und die Tangente an eine solche Hyperbel ist der Durchschnitt zweier Tangentenebenen der Kegel, welche sich in der Hyperbel schneiden. Diese Tangenten sind also die Durchschnitte einer stetigen Folge von Ebenen und erzeugen mithin eine abwickelbare Fläche (F).

Die Ebenen, von denen die Fläche (F) eingehüllt wird, sind die Berührungsebenen der Evolutoidenfläche längs der Kurve (E) und stehen, wie vorher gezeigt, auf den Hauptnormalen der Kurve (E) senkrecht. Daher ist F die rektifizierende Fläche der Evolutoide, und diese geht bei der Abwicklung von (F) in eine Gerade über.

Zwei Kurvenscharen auf einer Fläche, die ein derartiges System bilden, daß die Tangenten an die Kurven des einen Systems längs einer jeden Kurve des anderen Systems abwickelbare Flächen bilden, nennt man konjugiert. Es gilt also der Satz:

Die Evolutoiden und charakteristischen Hyperbeln bilden auf der Evolutoidenfläche ein konjugiertes System.

Anmerkung: Der Satz ist nur ein besonderer Fall der allgemeinen Tatsache, daß die Strahlen eines Strahlensystems auf den Brennflächen konjugierte Kurvensysteme bestimmen.

10. Kontingenz- und Schmiegunswinkel der Evolutoiden. Den Kontingenzwinkel $d\tau_1$ einer Evolutoide haben wir bereits S. 166 bestimmt; er ist nämlich $d\tau_1 = d\psi = d\tau \cdot \cos \vartheta$, wenn ϑ den (spitzen) Neigungswinkel der Schmiegunsebene der Evolu-

toide gegen die Schmiegungebene der Kurve bedeutet. Er ist unabhängig von α , mithin für alle Evolutoiden, die verschiedenen Werten von α bei demselben Werte von ϑ entsprechen, derselbe.

Der Schmiegungewinkel $d\sigma_1$ der Evolutoide ergibt sich aus derselben sphärischen Abbildung, in der tn und $t'n'$ die Bilder benachbarter Schmiegungebenen, also ihr Winkel $tn't'$ ihren Winkel, den Schmiegungewinkel der Evolutoide darstellen. (Fig. 64, S. 166.)

Aus dem Dreieck $n'tu$ ergibt sich dann sofort

$$ut = \pm d\sigma_1 \sin \alpha,$$

und da

$$ut = d\tau \sin \vartheta$$

bekannt ist, so wird:

$$d\sigma_1 = \pm \frac{d\tau}{\sin \alpha} \sin \vartheta.$$

Das Verhältnis beider und mithin das Verhältnis der Krümmung und Torsion der Evolutoide ist demnach

$$\frac{d\tau_1}{d\sigma_1} = \pm \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Aus dem Kontingenzwinkel und dem Schmiegungewinkel der Evolutoide erhält man für den Winkel dk_1 der ganzen Krümmung:

$$dk_1^2 = d\tau^2 \left\{ \cos^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{\sin^2 \alpha} \right\}.$$

Für das Bogenelement ds_1 der Evolutoide erhält man in wohlbekannter Weise (vgl. S. 69), wenn $MN = L$ gesetzt wird.

$$ds_1 = \pm (dL + ds \cos \alpha)$$

und weil

$$L = \sin \alpha \frac{ds}{d\tau_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \vartheta} \frac{ds}{d\tau} = \frac{\rho \sin \alpha}{\cos \vartheta},$$

so wird

$$ds_1 = \left| \sin \alpha d \left(\frac{\rho}{\cos \vartheta} \right) + ds \cos \alpha \right|.$$

11. Evolventoiden. Das Problem der Evolutoiden ist einer Umkehrung fähig. Man kann verlangen, alle Kurven anzugeben, für welche eine gegebene Kurve (N) Evolutoide ist. Solche Kurven stehen zu der Evolutoide in ähnlicher Beziehung, wie die Evolventen zu den Evoluten, daher mögen sie Evolventoiden heißen. Da die Tangente der Evolutoide mit der Tangente der Kurve, der sie als Evolutoide angehört, einen konstanten Winkel bildet, so sieht man

ein, daß die Evolventoiden einer Kurve alle auf ihrer Tangentenfläche liegen und diejenigen Kurven sind, welche die Tangenten unter konstantem Winkel α schneiden.¹⁾ Sie sind einander demnach alle parallel zugeordnet und ihre Untersuchung knüpft sich naturgemäß an die Theorie der parallelen Zuordnung an, die im nächsten Kapitel behandelt wird.

Da ihre Tangenten in der Schmiegungeebene der ursprünglichen Kurve liegen, so ist das Tangentenbild auf dem Bogen th gelegen, um α von t entfernt. Aus der sphärischen Abbildung folgt für den Kontingenzwinkel $d\tau_1$ der Evolventoide:

$$d\tau_1^2 = \sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2 \sin^2 \alpha}$$

und für den Winkel φ ihrer Schmiegungeebene mit der ursprünglichen Kurve

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\sigma}{d\tau} \sin \alpha.$$

Übung. Die Evolventoiden einer Schraubenlinie sind wieder Schraubenlinien.

12. Planevolventoiden. Die Kurven, die in der vorigen Nummer als Evolventoiden bezeichnet wurden, entsprechen den Filarevolventen. Der Begriff der Planevolvente kann nun in zweifacher Weise verallgemeinert werden. Die Tangenten der Planevolventen schneiden die Schmiegungeebenen der gegebenen Kurve rechtwinklig. Man wird also die Kurve, die eine Ebenenschar unter konstantem Winkel schneidet, als Planevolventoide der Gratlinie der abwickelbaren Fläche nennen können, die von den Ebenen eingehüllt ist. Jede Raumkurve besitzt für jeden Winkel α ∞^3 Planevolventoiden dieser Art.

Übung. Als Planevolventoide einer Geraden kann man die Kurven bezeichnen, die den Ebenenbüschel isogonal durchsetzen, dessen Achse die Gerade ist. Sie sind identisch mit den Loxodromen²⁾ der Rotationsflächen.

Die Planevolventen können aber auch angesehen werden als die Kurven, deren Punkte in den entsprechenden Schmiegungeebenen der ursprünglichen Kurve (M) liegen und deren Schmiegungeebenen die der Kurve (M) rechtwinklig schneiden. Daher kann man auch die

1) Molins, Sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure. J. de Math. 8, 132. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Paris 1876. Kap. 15.

2) G. Scheffers, Über Loxodromen. Leipz. Ber. 1902. E. Salkowski, Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. 7. 1908.

Kurven (P) als Planevolventoiden bezeichnen, deren Punkte in den entsprechenden Schmiegungebenen von (M) liegen und deren Schmiegungebenen die der Kurve (M) unter konstantem Winkel α schneiden.¹⁾ Das Tangentenbild einer solchen Evolventoide ist die sphärische Evolutoide des Tangentenbildes der Ausgangskurve.

XVII. Kapitel.

Parallele Raumkurven.

1. Allgemeines. Im Laufe der bisherigen Untersuchungen sind schon mehrfach die Beziehungen gestreift worden, die zwischen zwei Raumkurven bestehen, wenn sie sich punktweise so zuordnen lassen, daß in entsprechenden Punkten die Tangenten parallel sind. Zwei solche Kurven werden als parallele Kurven bezeichnet, und es war gezeigt, daß zwei Kurven sich dann und nur dann parallel zuordnen lassen, wenn ihre Tangentenbilder kongruent sind. In diesem Falle kann man nämlich durch passende Bewegung der einen Kurve ihr Tangentenbild mit dem der zweiten Kurve zur Deckung bringen, und dann sind die Tangenten als entsprechende zu wählen, deren Bilder zusammenfallen.

Wenn die Tangentenbilder zweier Raumkurven zusammenfallen, so tun es auch die Haupt- und Binormalenbilder (S. 24), d. h. in entsprechenden Punkten paralleler Kurven sind die Winkel $d\tau$, $d\sigma$, dk gleich, also auch die Quotienten je zweier; umgekehrt:

Zwei Raumkurven lassen sich dann und nur dann parallel zuordnen, wenn in entsprechenden Punkten das Verhältnis der Krümmungen denselben Wert hat.

2. Parallele Zuordnung von ebenen Kurven. Ist in einer Ebene ein reguläres Kurvenstück (M) vorgelegt, und zieht man durch den Mittelpunkt eines beliebigen Kreises (K) derselben Ebene die Parallelen zu den (beliebig orientierten) Normalen der Kurve, so schneiden diese den Kreis in je einem Punkte K , der als das Bild des entsprechenden Punktes M auf der Kurve (M) angesehen werden kann. Die Tangenten in den Punkten K und M sind dann immer parallel; es gilt also der Satz:

1) Molins, Note sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées. J. de Math. 12, 394.

Jede ebene reguläre Kurve kann durch parallele Tangenten auf ein Stück eines Kreises stetig abgebildet werden.

Die Abbildung ist sogar eindeutig, wenn das Kurvenstück (M) so abgegrenzt ist, daß es keinen Wendepunkt und keine Spitze enthält. Wird eine zweite Kurve (N) in derselben Weise auf einen Kreisbogen abgebildet, so kann man durch eine Drehung es stets erreichen, daß die sphärischen Bilder von zwei beliebig gewählten Punkten M und N zusammenfallen. Dadurch decken sich die sphärischen Bilder der passend begrenzten Bogen (M), (N), d. h. die Punkte dieser Bogen lassen sich punktweise so aufeinander beziehen, daß in entsprechenden Punkten die Tangenten parallel sind.

Zwei ebene Kurven können sich stets auf unendlich viele Weisen parallel zugeordnet werden.

Der Satz ist natürlich nur ein Spezialfall des Schlußsatzes der vorigen Nummer; er ist nur wegen seiner Wichtigkeit noch besonders hergeleitet worden.

3. Die abwickelbare Fläche paralleler Raumkurven.

Es seien M, M', M'', \dots und N, N', N'', \dots entsprechende Punkte parallel zugeordneter Raumkurven. Da MM' und NN' parallel sind, so schneiden sich die Verbindungslinien $MN, M'N'$ entsprechender Punkte. Die Verbindungslinien $MN, M'N', M''N'', \dots$ entsprechender Punkte bilden daher eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie (G) durch die Schnittpunkte benachbarter Verbindungslinien bestimmt ist.

Teilt man den (im allgemeinen veränderlichen) Abstand $MN, M'N', \dots$ zugeordneter Punkte von (M) und (N) in den Punkten P, P', P'', \dots nach einem konstanten Verhältnis $m : n$, so daß

$$\frac{MP}{PN} = \frac{M'P'}{PN'} = \dots = \frac{m}{n}$$

ist, so bilden die Punkte P, P', \dots eine Kurve (P), deren Tangenten $PP', P'P'', \dots$ nach dem Strahlensatz der ebenen Geometrie parallel zu den entsprechenden Tangenten der Kurven (M) und (N) sind.

Bezeichnet man die Bogenelemente der Kurven (M), (N) und (P) der Reihe nach mit ds_1, ds_2, ds , ihre Krümmungs- und Schmiegungradien entsprechend mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho$ und r_1, r_2 und r , so wird, da die drei Kurven infolge der parallelen Zuordnung denselben Kontingenzwinkel $d\tau$ und denselben Schmiegunswinkel $d\sigma$ haben:

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho = r_1 : r_2 : r = ds_1 : ds_2 : ds.$$

Ferner ist:

$$GM : GN : GT = ds_1 : ds_2 : ds.$$

Da die Hauptnormalen in M , N , P parallel sind, so liegen sie in ein und derselben Ebene, die auch die Gerade MG enthält. Auf der Hauptnormalen liegen die Krümmungsmittelpunkte C_1, C_2, C der drei Kurven, und zwar nach den oben gefundenen Relationen, so daß

$$MC_1 : NC_2 : PC = ds_1 : ds_2 : ds$$

wird, also

$$MC_1 : NC_2 : PC = MG : NG : PG;$$

die Punkte C_1, C_2, C gehören also ein und derselben Geraden an, die durch G hindurchgeht. Wir fassen die Ergebnisse folgendermaßen zusammen:

Teilt man die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf zwei parallelen Raumkurven nach einem konstanten Verhältnis, so liegen die Teilpunkte auf einer dritten Kurve, die den ersten beiden parallel ist. Die Krümmungsmittelpunkte aller Kurven, die den verschiedenen Werten des Teilverhältnisses entsprechen, liegen auf einer Geraden, die durch den zugehörigen Punkt der Gratlinie derjenigen abwickelbaren Fläche geht, auf der alle konstruierten Kurven liegen.

Dieser allgemeine Satz umfaßt eine ganze Reihe von wichtigen speziellen Fällen. Eine ganz spezielle Schar parallel zugeordneter Kurven im Raume sind die ebenen Kurven, in denen eine beliebige abwickelbare Fläche durch parallele Ebenen geschnitten wird. Stehen insbesondere die Ebenen auf einer Erzeugenden der Fläche senkrecht, so erhält man den Satz:

Die Krümmungsmittelpunkte C aller zur Tangente in G der Kurve (G) senkrecht geführten Normalschnitte der Tangentenfläche liegen auf einer durch G hindurchgehenden Geraden, und die Krümmungshalbmesser dieser Normalschnitte sind dem Abstand von G proportional.

Nimmt man nun den Abstand $GM = \varrho_0$, nämlich gleich dem Krümmungshalbmesser der Kurve (G) in G , so wird $MM' = \varrho_0 d\tau_0 = ds_0 = GG'$ und folglich $MC = ds_0 : d\sigma_0 = r_0$, d. h.:

Der Schmiegunghalbmesser r_0 einer beliebigen Raumkurve (G) im Punkte G ist der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes der Tangentenfläche der Kurve, der im Abstände des Krümmungshalbmessers ϱ_0 dieser Kurve vom Berührungspunkte der Tangente senkrecht zu dieser Tangente geführt werden kann.

Damit ist eine neue geometrische Interpretation für den Schmiegungradius einer Kurve gewonnen.

4. Die Schmiegunskugeln paralleler Kurven. Aus den vorigen Überlegungen ergibt sich ds sofort durch ds_1 und ds_2 ausgedrückt. Es wird nämlich:

$$\frac{ds_1 - ds}{ds - ds_2} = \frac{m}{n},$$

also

$$ds = \frac{m ds_2 + n ds_1}{m + n}.$$

Hieraus folgt ebenso

$$\varrho = \frac{m \varrho_2 + n \varrho_1}{m + n}$$

und

$$r = \frac{m r_2 + n r_1}{m + n}.$$

Bezeichnet man die Abstände der Mittelpunkte von Krümmungskreis und Schmiegunskugel der Reihe nach mit h_1, h_2 und h , so wird

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{1}{m + n} \left(m \frac{d\varrho_2}{d\sigma} + n \frac{d\varrho_1}{d\sigma} \right) = \frac{m h_2 + n h_1}{m + n}.$$

Auch die Krümmungsachsen der drei parallelen Kurven sind parallel und in einer Ebene gelegen, d. h. auch die Mittelpunkte der Schmiegunskugeln paralleler Raumkurven auf einer abwickelbaren Fläche liegen auf einer Geraden. Diese Gerade geht aber im allgemeinen nicht durch G . Soll dies eintreten, so muß

$$h_1 : h_2 : h = ds_1 : ds_2 : ds = \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho$$

sein, d. h.

$$d\varrho_1 : d\varrho_2 : d\varrho = \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho,$$

$$\varrho_1 = k \varrho_2,$$

wo k konstant ist. Dann sind (M) und (N) Parallelkurven auf einem Kegel.

5. Übungen. 1. Man bestimme die Polarkurven aller Filar-evolventen einer Raumkurve (S. 34).

2. Die allgemeinen Schraubelinien lassen sich den Schraubelinien eines geraden Kreiszyinders und nur diesen parallel zuordnen.

3. Die geodätischen Linien auf Böschungflächen lassen sich von Kegelgeodätischen nur denjenigen des geraden Kreiskegels parallel zuordnen.

4. Wenn man eine Kurve konstanter Krümmung und eine Kurve konstanter Torsion durch parallele Tangenten zuordnet, so liegen alle Punkte, die den Abstand entsprechender Punkte in konstantem Verhältnis teilen, auf einer Bertrandschen Kurve.

5. Gibt es solche Kurven konstanter Krümmung, denen man eine Kurve konstanter Torsion so parallel zuordnen kann, daß die

Verbindungsline entsprechender Punkte auf den zugehörigen Kurventangenten senkrecht stehen?

6. Welche Beziehungen bestehen zwischen Kurven, die punktweise so aufeinander bezogen sind, daß in entsprechenden Punkten die Binormalen parallel sind?

6. Kurven mit parallelen Hauptnormalen. Die Hauptnormalenbilder der beiden Kurven fallen zusammen, also auch deren sphärische Polarkurve, das Bild der rektifizierenden Kurve. Die Tangentenbilder beider Kurven sind von der letzteren sphärische Evoluten; ihre sphärischen Abstände, d. h. der Winkel entsprechende Tangenten ist also immer konstant.

Haben zwei Kurven (M), (N) parallele Hauptnormalen, so sind ihre rektifizierenden Kurven parallel und ihre Tangenten in entsprechenden Punkten bilden einen konstanten Winkel.

Bezeichnet man den sphärischen Abstand des Tangentenbildes von (M) und (N) von dem Bilde der entsprechenden rektifizierenden Geraden mit H_1 und H_2 , so ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} H_1 = -\frac{\varrho_1}{r_1}, \quad \operatorname{tg} H_2 = -\frac{\varrho_2}{r_2},$$

da nun $H_1 - H_2 = H$ konstant ist, so muß

$$\operatorname{tg} H = \frac{\operatorname{tg} H_1 - \operatorname{tg} H_2}{1 + \operatorname{tg} H_1 \operatorname{tg} H_2} = \frac{\frac{\varrho_2}{r_2} - \frac{\varrho_1}{r_1}}{1 + \frac{\varrho_1 \varrho_2}{r_1 r_2}},$$

d. h. das Verhältnis von Krümmung und Torsion der einen Kurve ist eine lineare gebrochene Funktion derselben Größe für die andere Kurve.

XVIII. Kapitel.

Mehrfache Evoluten.

Die Theorie der parallelen Zuordnung zweier Kurven findet ihre einfachste und fruchtbarste Anwendung bei denjenigen Problemen, die dem Prozeß der mehrfachen Evolutenkonstruktion in der Theorie der ebenen Kurven analog ist, und zwar sind hier zwei Verfahren, die als naturgemäße Verallgemeinerungen sich darbieten. Auf der einen Seite wird man die Kurve betrachten, deren Schmiegungebenen die Normalebenen der gegebenen Kurve sind, also die Polarkurve und von dieser Polarkurve wieder die Polarkurve suchen. Setzt man dies Verfahren bis zum n^{ten} Schritt fort, so erhält man eine Kurve, die man als n^{te} Polarkurve (oder auch n^{te} Planevolute) der Ausgangskurve bezeichnen kann. Auf der anderen Seite kann man die Kurve

betrachten, deren Schmiegungeebene mit den rektifizierenden Ebenen der gegebenen Kurve zusammenfällt und zu dieser wieder die rektifizierende Kurve bilden. Auch hier kann das Verfahren im allgemeinen beliebig weit fortgesetzt werden; es bricht nur ab, wenn man bei einem Schritt auf die geodätische Linie eines Zylinders oder Kegels kommt. Die Kurve, die so nach n -maliger Anwendung der Konstruktion erhalten wird, sei als n^{te} rektifizierende Kurve der gegebenen bezeichnet. Die Aufgabe, die jetzt behandelt werden soll, ist, die Beziehungen einer Kurve mit der n^{ten} aus ihr auf die eine oder andere Art abgeleiteten aufzudecken.

1. Die n^{te} Polarkurve. Zu jeder Raumkurve (M) gehört eine eindeutig bestimmte Planevolute (K), die gleichzeitig die Kurve der Schmiegunskugelmittelpunkte (S. 51) und die Gratlinie der Polarfläche ist. Sie sei als (erste) Polarlinie der Kurve (M) bezeichnet. Die Tangenten, Binormalen und Hauptnormalen von (K) sind entsprechend parallel¹⁾ den Binormalen, Tangenten und Hauptnormalen von (M). Konstruiert man in derselben Weise die Planevolute (L) der Kurve (K), so wird die Kurve (L) zu (K) in demselben Verhältnis stehen wie (K) zu (M). Daher sind in entsprechenden Punkten M_i und L_i ($i = 1, 2, \dots$) die Tangenten, somit auch die Haupt- und Binormalen beider Kurven entsprechend parallel. In derselben Weise wird man als 3. Polarlinie von (M) die Planevolute von (L) bezeichnen usf.

Aus der Erklärung ergibt sich, daß die n^{te} Polarlinie der m^{ten} Polarlinie einer Kurve (M) die $(m + n)^{\text{te}}$ Polarlinie dieser Ausgangskurve ist, daß ferner alle Polarlinien parallele Hauptnormalen und daher auch parallele rektifizierende Flächen besitzen, daß bei Polarlinien, deren Index sich um eine gerade Zahl unterscheidet, die entsprechenden Tangenten parallel sind, dagegen senkrecht, wenn ihr Index sich um eine ungerade Zahl unterscheidet.

Alle Polarkurven einer Raumkurve mit geradem Index sind der Raumkurve, diejenigen mit ungeradem Index ihrer ersten Polarkurve parallel zugeordnet.

Aus der parallelen Zuordnung folgt weiter unmittelbar:

Eine Raumkurve und ihre $2n^{\text{te}}$ Polarkurve können auf ein und dieselbe abwickelbare Fläche gelegt werden.

1) Ob die Richtungen der Haupttriederkanten dieselben oder entgegengesetzte sind, kommt für das folgende nicht in Betracht.

Die Anzahl der Polarlinien einer Raumkurve ist im allgemeinen unbeschränkt groß; sie bricht mit der n^{ten} abgeleiteten Polarlinie ab wenn diese sphärisch ist; dann wird die $(n + 1)$ -te ein Punkt.

Im besonderen Falle kann die abwickelbare Fläche durch die Kurve (M) und ihre zweite Polarkurve (L) ein Kegel sein; dann sind die Kurven ähnlich und ähnlich gelegen, wobei die Kegelspitze das Ähnlichkeitszentrum bildet. Offenbar ist dann auch die vierte, sechste . . . Polarkurve auf demselben Kegel gelegen und ist den ersten ähnlich. Ebenso sind dann die erste, dritte, . . . Polarkurve untereinander ähnlich und auf einem zweiten Kegel gelegen. Denn der Übergang von der Kurve (M) zu ihrer zweiten Polarkurve ist ja nur eine Ähnlichkeitstransformation des ganzen Raumes, der gegenüber alle hier betrachteten Eigenschaften invariant sind.

Liegt eine Kurve mit ihrer zweiten Polarkurve auf einem Kegel, so liegen auf demselben Kegel alle weiteren Polarkurven gerader Ordnung. Die Polarkurven ungerader Ordnung liegen sämtlich auf einem zweiten Kegel, der mit dem ersten dieselbe Spitze hat. (Arch. d. Math. u. Phys. 3. Ser. Bd. 14, S. 231.)

2. Die Aoustschen Kurven. Die Kurven, die mit ihrer zweiten Polarkurve auf einem Zylinder gelegen sind, hat Aoust zuerst aufgesucht.¹⁾ Sie lassen sich bis zu einem gewissen Grade ohne analytische Hilfsmittel untersuchen.

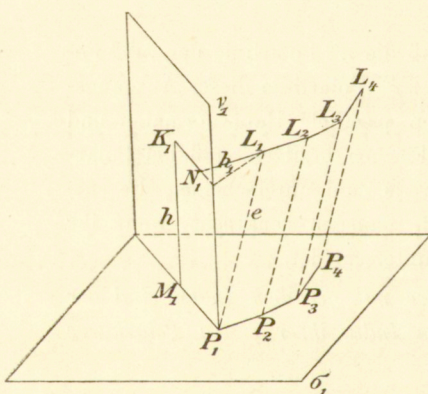


Fig. 66.

Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 benachbarte Punkte einer Kurve (P), M_1 der Krümmungsmittelpunkt, K_1 der Mittelpunkt der Schmiegunskugel in P_1 . Der Krümmungsmittelpunkt N_1 der Kurve (K) im Punkte K_1 liegt in der Normalebene ν_1 von P_1 und zwar so, daß $K_1 N_1 \parallel P_1 M_1$ wird. Der Mittelpunkt der Schmiegunskugel L_1 von (K) liegt auf der Krümmungsachse, die in N_1 auf der Schmiegunsebene von (K), auf ν_1 nämlich, senkrecht steht,

und $N_1 L_1$ ist die Tangente der Kurve (L).

1) Aoust, Bulletin de la Société Math. 7, 1878. Das Problem wurde von Hoppe, Archiv der Math. u. Phys. (1) 66, 386 von neuem aufgenommen und seither wiederholt in der Literatur behandelt.

Soll nun die Kurve (L) der Kurve (M) kongruent sein, so muß $L_1 L_2 = M_1 M_2$, also auch $M_1 L_1 = M_2 L_2 = e$ sein, d. h. entsprechende Punkte der Kurven (M) und (L) haben eine konstante Entfernung e voneinander. Wenn also (b, e) den Winkel zwischen der Binormalen und $P_1 L_1$ bezeichnet, so ergibt sich unmittelbar aus der Figur, daß die Bedingung

$$h = e \cos(b, e)$$

für sie notwendig und hinreichend ist.

Nun ist aber

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma},$$

sodaß

$$(1) \quad d\varrho = e d\sigma \cos(b, e)$$

die Differentialgleichung dieser Kurven ist. Sie seien als Aoustsche Kurven, der Zylinder, den die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden, als Aoustscher Zylinder bezeichnet.

Zu den Aoustschen Kurven gehören auch die Kurven konstanter Krümmung, die ja offenbar die eben abgeleitete Gleichung befriedigen und bei denen die zweite Polarlinie mit der Ausgangskurve zusammenfällt.

Die Konstruktion einer allgemeinen Aoustschen Kurve ergibt sich folgendermaßen. Man nehme drei Punkte P_1, P_2, P_3 beliebig so an, daß $P_1 P_2 = P_2 P_3 = ds$ wird, ferner drei Punkte L_1, L_2, L_3 derart, daß $L_1 L_2 \neq P_1 P_2$, $L_2 L_3 \neq P_2 P_3$. Man legt nun durch P_1 die Orthogonalebene ν_1 zu $P_1 P_2$, sowie die Orthogonalebene ν_2 zu $P_2 P_3$ durch P_2 . Der Schnittpunkt der beiden Normalenebenen mit der Ebene σ_1 des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ ist der Mittelpunkt M_1 seines Umkreises. Verlängert man $L_1 L_2$ bis zum Schnitt N_1 mit der Normalebene durch P_1 und zieht $N_1 K_1 \parallel P_1 M_1$, so erhält man in dem Schnittpunkte K_2 dieser Parallelen mit der Schnittgeraden p_1 der Ebenen ν_1 und ν_2 den Mittelpunkt einer Kugel, die P_1, P_2, P_3 und den folgenden noch zu bestimmenden Punkt P_4 der Kurve (P) enthält. Jetzt ist noch das Gesetz willkürlich, das die Lage des Punktes P_4 auf der Kugel bestimmt. Dieses kann etwa durch eine Vorschrift gegeben sein, nach welcher die Ebene $P_2 P_3 P_4$ von der Ebene σ_1 abweicht. Wird diese gegeben, so lege man durch $P_2 P_3$ die Ebene, die den vorgeschriebenen Winkel du mit der Ebene σ_1 bildet, und nehme auf ihrem Schnittkreise mit der Kugel um K_1 den Punkt P_4 so an, daß $P_3 P_4 = ds$ wird. Dies Verfahren wird fortgesetzt, um aus $P_2 P_3 P_4$ einen Punkt P_5 zu erhalten usf.

Das die Veränderlichkeit des Punktes P_4 einschränkende Gesetz kann etwa auch durch die Bedingung gegeben werden, daß die ge-

suchte Kurve einer beliebig gegebenen Fläche angehört. Daraus ist ersichtlich, daß man im allgemeinen auf jeder Fläche von einem Punkte P_1 nach P_2 und P_3 beliebig fortschreitend, sodann $L_1L_2 \# P_1P_2$, $L_2L_3 \# P_2P_3$ willkürlich im Raume annehmend, eine Kurve der verlangten Art konstruieren kann.

Es sei (M) eine Aoustsche Kurve und (M_0) eine Kurve konstanter Krümmung, die der ersten durch parallele Tangenten zugeordnet ist, so wird, wenn die Bestimmungsgrößen von (M_0) mit dem Index 0 gekennzeichnet werden:

$$d\varrho_0 = 0, \quad d\sigma_0 = ds, \quad \cos(b, e) = \cos(b_0, e).$$

Konstruiert man auf den Verbindungslinien entsprechender Punkte M und M_0 denjenigen Punkt, der die Strecke MM_0 nach einem festen Verhältnis λ schneidet, so erfüllen die Punkte P gleichfalls eine Aoustsche Kurve. Ihr Bogenelement, der Krümmungs- und Torsionsradius sei $ds_\lambda, \varrho_\lambda, r_\lambda$; dann ist (S. 177)

$$\varrho_\lambda = \frac{e + \lambda \varrho_0}{1 + \lambda}.$$

Die hieraus folgende Beziehung

$$d\varrho_\lambda = \frac{1}{\lambda + 1} d\varrho = \frac{e}{\lambda + 1} d\sigma \cos(b, e)$$

ist aber für die Aoustschen Kurven charakteristisch.

Ordnet man eine gegebene Aoustsche Kurve einer Kurve konstanter Krümmung durch parallele Tangenten zu, so ist der Ort aller Punkte, die die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte beider Kurven nach einem gegebenen Verhältnis teilen, wieder eine Aoustsche Kurve.

3. Übung. 1. Die Aoustschen Schraubenlinien sind geodätische Linien auf den Zylindern, deren Basiskurve die zweiten Evoluten der gemeinen Zykloide und deren Ausartungen sind. Zu ihnen gehören u. a. die Kurven konstanter Steigung auf einem Drehparaboloid mit vertikaler Achse, ferner die Kurven konstanter Steigung auf einem parabolischen Zylinder mit horizontalen Erzeugenden.

2. Für welche Aoustschen Schraubenlinien ist der Aoustsche Zylinder rektifizierende Fläche?

3. Welche Kurven sind mit ihrer vierten Polarkurve kongruent? Welche Schraubenlinien gehören dazu?

4. Welche Kurven sind zu ihrer zweiten Polarkurve ähnlich?

4. Die zweite rektifizierende Fläche. Wenn man für die Gratlinie der Hüllfläche der Normalebene die Konstruktion ausführt, mit deren Hilfe sie selbst aus der ursprünglichen Kurve gewonnen wurde, erhielt man die zweite Polarkurve und durch Wieder-

holung des Verfahrens ergaben sich die mehrfachen Polarlinien (Plan-evoluten) einer gegebenen Raumkurve. Dieser Verallgemeinerung des Evolutenproblems einer ebenen Kurve läßt sich, wie schon in Nr. 1 erwähnt wurde, eine zweite an die Seite stellen:

Man konstruiere für die rektifizierende Gratlinie einer Raumkurve (M) die rektifizierende Fläche und untersuche ihre Beziehungen zur gegebenen Kurve. Die so entstehende abwickelbare Fläche sei als zweite rektifizierende Fläche bezeichnet.

Es seien M_1, M_2, \dots benachbarte Punkte der Kurve (M), R_1, R_2, \dots die entsprechenden Punkte der rektifizierenden Gratlinie. Dann ist die Schmiegungebene von (R) mit der entsprechenden rektifizierenden Ebene von (M) identisch, also die Binormale von (R) im Punkte R_1 parallel zur Hauptnormalen h_1 von (M) im Punkte M_1 . Die rektifizierende Ebene ist immer durch Tangente und Binormale bestimmt, sie ist also die Ebene durch die rektifizierende Gerade r_1 und durch h_1 .

Die rektifizierende Ebene der rektifizierenden Gratlinie einer Kurve (M) enthält die Hauptnormale und die rektifizierende Gerade von (M).

Sie enthält demnach auch den Striktionsstrahl der Hauptnormalenfläche und ist die Tangentenebene der Hauptnormalenfläche im Mittelpunkte.

Die zweite rektifizierende Fläche der Kurve (M) ist die abwickelbare Fläche, die die Hauptnormalenfläche der Kurve (M) längs der Striktionslinie berührt. (Vgl. S. 102.)

Ist die Hauptnormalenfläche von orthogonaler Striktion, hat also die Ausgangskurve (M) die natürliche Gleichung

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho k},$$

so ist die Striktionslinie auf der zweiten rektifizierenden Fläche eine zur Kurve (r) parallele geodätische Linie.

Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche einer Raumkurve liegt auf ihrer zweiten rektifizierenden Fläche; sie ist dort eine zur rektifizierenden Gratlinie parallele geodätische Linie, wenn die Hauptnormalenfläche der Ausgangskurve orthogonale Striktion besitzt.

Nimmt man auf der zweiten rektifizierenden Fläche Γ eine zu (R) parallele geodätische Linie (T) in dem konstanten Abstand a an, haben die Geodätischen auf der Tangentenfläche von (T) Hauptnormalen, die parallel den Binormalen von Γ , also auch parallel den entsprechenden Binormalen von (R) sind. Wenn man nun die Haupt-

normalen von (M) in N_1, N_2, \dots mit den entsprechenden Tangenten von (T) schneidet, so ist

$$M_1 N_1 = M_2 N_2 = M_3 N_3 = \dots = a.$$

Dies ist gleichwertig mit dem Satz:

Trägt man auf den Hauptnormalen einer Raumkurve (M) von der Kurve aus konstante Strecken ab, so umhüllen die durch die Endpunkte der Strecken zu den rektifizierenden Geraden gezogenen Parallelen abwickelbare Flächen, deren Gratlinien dieselbe rektifizierende Fläche haben wie die rektifizierende Gratlinie von (M) .¹⁾

Ist (M) die geodätische Linie eines Kegels, so reduziert sich (R) auf einen Punkt, während (T) eine geodätische Linie auf dem von den Normalebenebenen des ersten Kegels umhüllten Kegel wird.

Liegt (R) als geodätische Linie auf einem Zylinder, so gehört (T) demselben Zylinder an.

Da das sphärische Bild der rektifizierenden Gratlinie die sphärische Evolute des Tangentenbildes der Raumkurve ist, so folgt:

Das Tangentenbild der zweiten rektifizierenden Gratlinie einer Raumkurve ist die zweite sphärische Evolute des Tangentenbildes der Raumkurve.

5. Bertrandsche Kurven. Ist die Kurve (M) eine Bertrandsche Kurve und h ihr konstanter Abstand von der zugeordneten Bertrandschen Kurve (N) , so ist (N) eine geodätische Linie der Fläche (T) , auf der sie liegt, also:

Die rektifizierenden Gratlinien zweier zugeordneter Bertrandscher Kurven sind parallel und besitzen dieselbe rektifizierende Fläche.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Bertrandschen Kurven (M) , deren rektifizierende Gratlinie (R) eine Schraubenlinie ist.

Die zugeordnete Bertrandsche Kurve (N) besitzt dann eine zu (R) parallele Schraubenlinie (T) desselben Zylinders als rektifizierende Gratlinie. Da (R) und (T) als parallele geodätische Linien auf demselben Zylinder kongruent sind, so kann man ihre Tangentenflächen durch eine Parallelverschiebung in der Richtung der Zylindermantellinien miteinander zur Deckung bringen. Auf der Tangentenfläche von (R) gibt es demnach eine Kurve (S) , die der Kurve (N) kongruent ist und in die sie durch eine Parallelverschiebung übergeführt werden kann. Bezeichnet man nun mit M_i, N_i, R_i, T_i, S_i ($i = 1, 2, \dots$)

¹⁾ R. von Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig 1908. Bd. I. S. 225 ff.

entsprechende Punkte der gleichnamigen Kurven, so ist $N_i T_i$ immer parallel und gleich $R_i S_i$.

Die Dreiecke $M_i N_i S_i$ ($i = 1, 2, \dots$) sind alle kongruent, da sie in dem rechten Winkel $N_i M_i S_i$, der Kathete $M_i N_i$ und der Hypotenuse $N_i S_i = R_i T_i$ übereinstimmen. Also ist auch $M_i S_i$ von konstanter Länge. Bezeichnet man den Abstand $M_i N_i$ entsprechender Punkte der Bertrandschen Kurven mit l , den konstanten Winkel, unter dem die kongruenten Schraubenlinien (R) und (T) die Erzeugenden $R_i T_i$ ihres Zylinders treffen, mit β , so wird

$$N_i S_i = R_i T_i = \frac{l}{\cos \beta}, \quad M_i S_i = l \operatorname{ctg} \beta.$$

Wickelt man jetzt die Tangentenfläche von (R) in die Ebene ab, so gehen die auf dieser Fläche geodätischen Linien (M) und (S) in zwei Geraden (\mathfrak{M}) und (\mathfrak{S}) über, die sich unter dem für das betrachtete Paar Bertrandscher Kurven charakteristischen konstanten Kreuzungswinkel der Tangenten α schneiden. Die Verbindungslinien $M_i S_i$ entsprechender Punkte umhüllen die Verwandelte (\mathfrak{R}) der Kurve (R); da $M_i S_i = l \operatorname{ctg} \beta$ konstant ist, so ist die Hüllkurve (\mathfrak{R}) dieser Strecken eine Astroide, deren Achsen die festen Geraden sind.

Konstruiert man in der Ebene eine allgemeine Astroide und tordiert die Ebene so, daß die Tangenten der Kurve geradlinig bleiben, in die Tangentenfläche einer Schraubenlinie, so verwandeln sich die Achsen der Astroide in zwei Bertrandsche Kurven, von denen jede durch Parallelverschiebung in die zugeordnete der anderen übergeführt werden kann.

6. Übungen. 1. Man stelle die natürlichen Gleichungen der eben untersuchten Bertrandschen Kurven auf $\left(\frac{\sin \alpha}{\varrho} + \frac{\cos \alpha}{r} = \frac{\sin \alpha}{l}; s = \frac{l \operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha} \frac{r \cos \alpha - \varrho \sin \alpha}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}}\right)$.

2. Ist $\alpha = 90^\circ$, so gehen die Bertrandschen Kurven in Kurven konstanter Krümmung über; ihre rektifizierenden Gratlinien liegen auf Zylindern, deren Basiskurve eine Epizykloide ist, und sind Kurven konstanter Steigung auf Rotationsflächen 2. Ordnung mit senkrechter Drehachse.

3. Verbiegt man durch Torsion ihrer Ebene eine Kegelschnitt-evolute so, daß die Tangenten geradlinig bleiben, zu einer geodätischen Linie einer Kegelfläche, so gehen die Achsen der Evolute in zwei Kurven konstanter Krümmung über, von denen jede durch eine bestimmte Ähnlichkeitstransformation in die zugeordnete der anderen übergeht.

Zu dem letzten Abschnitt vgl. Math. Ann. 66, 517 und 69, 562.

XIX. Kapitel.

Weitere Sätze und Aufgaben.

1. Das sphärische Bild der rektifizierenden Geraden einer Kegelgeodätischen ist der Schnitt des Kegels mit der konzentrischen Einheitskugel.

2. Das Binormalenbild einer sphärischen Kurve ist die sphärische Evolute der Kurve.

3. Die natürliche Gleichung der sphärischen Kurven $\frac{d^2 \rho}{d\sigma^2} + \rho = 0$ gibt integriert $\rho = R \sin(\sigma + \sigma_0)$. Diese Formel ist geometrisch herzuleiten.

4. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte einer sphärischen Kurve liegt auf der Polarfläche als geodätischer Kreis.

5. Die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind nur dann sphärisch, wenn die Gratlinie der Fläche eine Kegelgeodätische ist.

6. Die geodätischen Linien auf Rotationsflächen sind die Kurven, deren Hauptnormalen eine feste Gerade schneiden (d. h. einem Strahlengebüsche angehören).

7. Die Raumkurven zu bestimmen, deren Hauptnormalen zwei feste Geraden schneiden. Liegt die eine Gerade unendlich fern, so sind die Kurven Schraubenlinien, die geodätische Linien auf einer Rotationsfläche sind. Diese Kurven liegen auf gewissen Zylindern 2. Ordnung als Kurven konstanter Steigung.¹⁾

8. Die geodätischen Linien eines Zylinders, dessen Normalschnitt eine Kettenlinie ist, liegen auf einem hyperbolischen Zylinder, dessen Erzeugende die Geraden des ersten Zylinders senkrecht schneiden.

Anleitung. Für die Kettenlinie ist $y^2 = s^2 + a^2$, $a\rho = s^2 + a^2$; für die Schraubenlinie $z = ms$, also $y^2 = m^2 z^2 + a^2$.

9. Auf dem Zylinder, dessen Normalschnitt eine Kettenlinie ist, werden die geodätischen Kreise, deren Mittelpunkte auf der Erzeugenden durch den Scheitel liegen, durch gerade Kreiszyylinder herausgeschnitten.

1) Pirondini, *Giornale di Mat.* 23 (1885). Cesàro, *Ebenda*, Bd. 24 (1886). Piccioli, *Duporcq*, *Nouv. Ann. de Math.* (4) 2, 1902. Barré, *Journ. de l'Éc. Polyt.* 2. Ser. Bd. 16. 1912.

Anleitung. Ist s die Bogenlänge der Kettenlinie vom Scheitel, so gilt für den geodätischen Kreis die Gleichung $z^2 + s^2 = r^2$ ($1 : r$ die konstante geodätische Krümmung). Andererseits ist $y^2 = s^2 + a^2$, also $y^2 + z^2 = r^2 + a^2$.

10. Die Kurven, deren Hauptnormalen eine feste Gerade unter konstantem Winkel schneiden, sind geodätische Linien auf Rotationskegeln.

Anleitung. Nach Aufgabe 6 sind die Kurven geodätische Linien auf einer Rotationsfläche, deren Achse die feste Gerade ist. Sämtliche Normalen der Fläche schneiden diese Achse unter gleichem Winkel, daher kann der Meridian nur eine Gerade sein.

11. Welche sphärischen Kurven sind die Evolventen der Geodätischen eines geraden Kreiskegels?

Anleitung. Die Binormalen der gesuchten Kurven sind den Erzeugenden des Kegels parallel, ihr sphärisches Bild ist ein kleiner Kreis, die Kurven sind also Schraubenlinien.

12. Welche Kurven sind ihrer Polarkurve kongruent?

Die Kurven der konstanten Steigung 1 auf Rotationszylinder und Rotationsparaboloid.

13. Auf welchem Zylinder gibt es geodätische Kreise, deren erste Krümmung konstant ist?¹⁾

14. Für welche Kurven schneidet die Kurve der Krümmungsmittelpunkte die Polarachsen unter konstantem Winkel?

Anleitung. Die Polarfläche der gesuchten Kurve (\mathcal{M}) werde samt ihren Tangentialebenen in eine Ebene abgewickelt; dabei verwandelt sich ihre Gratlinie in eine ebene Kurve (\mathcal{R}), die Kurve (\mathcal{M}) reduziert sich auf einen Punkt \mathcal{M} und die Krümmungsmittelpunktkurve (\mathcal{C}) geht in die Fußpunktkurve (\mathcal{G}) von (\mathcal{R}) bezüglich des Punktes \mathcal{M} über (S. 44). Die Aufgabe ist auf das ebene Problem zurückgeführt: die Kurve (\mathcal{R}) zu bestimmen, deren Tangenten von einer ihrer Fußpunktkurven unter konstantem Winkel α geschnitten wird. Verbindet man \mathcal{M} mit den Punkten von (\mathcal{R}), so schneiden diese Geraden die Kurve (\mathcal{R}) unter dem Winkel $(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$, d. h. (\mathcal{R}) ist eine Kurve, die den Strahlbüschel mit dem Scheitel \mathcal{M} unter dem konstanten Winkel $(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ schneidet, also eine logarithmische Spirale.

1) Eisenhart, Differential Geometry. S. 150.

15. Für welche Kurven berühren die Schmiegungebenen eine feste Kugel? ¹⁾

Anleitung. Die Schnittlinie benachbarter Schmiegungebenen ist eine Tangente der Kurve, sie berührt auch die Kugel. Die Binormale der Kurve steht senkrecht auf der Schmiegungeebene, ist also parallel ihrem Berührungsradius, und die rektifizierende Fläche, die Ebene durch Tangente und Binormale, enthält daher diesen Berührungsradius und damit den Mittelpunkt der Kugel O . Die gesuchten Kurven besitzen also rektifizierende Ebenen, die sich in einem festen Punkte O schneiden; sie sind also geodätische Linien auf Kegeln.

15 a. Die Kurven, deren Tangenten eine feste Kugel berühren, sind entweder sphärisch oder Kegelgeodätische. ²⁾

15 b. Die abwickelbaren Flächen einer Linienkongruenz, von der ein Brennmantel eine Kugel ist, sind Tangentenflächen geodätischer Linien auf konzentrischen Kegeln.

16. Die Kurven, deren Normalebenen von einem festen Punkte konstanten Abstand haben, sind Planevolventen von Kegelgeodätischen. ¹⁾

Anleitung. Die Normalebenen einer Kurve sind Schmiegungebenen ihrer Polarkurve.

17. Die Kurven, deren rektifizierende Ebenen von einem festen Punkte konstanten Abstand haben, sind die geodätischen Linien auf den Tangentenflächen von Kegelgeodätischen. ¹⁾

Anleitung. Die rektifizierenden Ebenen sind die Schmiegungebenen der Gratlinie der rektifizierenden Fläche.

18. Man untersuche die Hüllfläche der Ebenen, die die Schmiegungebenen einer gegebenen Kurve in der Hauptnormalen unter konstantem Winkel schneiden. ³⁾

19. Bewegt sich das Hauptdreikant einer Raumkurve längs der Kurve hin, so beschreibt jede Parallele zur Tangente in der rektifizierenden Ebene eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinien zur gegebenen Kurve parallel ist und mit ihr die rektifizierenden Fläche gemeinsam hat.

1) Schell, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 5, S. 4—9.

2) P. Serret, Théorie géométrique et mécanique des courbes à double courbure. Paris 1860.

3) Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Paris 1876. S. 318.

Anleitung. Das Hauptdreikant geht in seine Nachbarlage dadurch über, daß es um den Striktionsstrahl der Hauptnormalenfläche eine Schraubung vollführt. Dabei beschreibt die Tangente eine abwickelbare Fläche (die Tangentenfläche der gegebenen Kurve) und mit ihr jede Parallele in gleichem Abstand von der Schraubungsachse, d. h. jede Parallele in der rektifizierenden Ebene.

20. Konstruiert man in einer Schmiegungeebene einer Kurve konstanter Krümmung die Parabel, deren Scheitel der Punkt der Kurve und deren Brennpunkt der Krümmungsmittelpunkt ist, so beschreibt jede der Tangenten dieser Parabel eine abwickelbare Fläche, wenn das Hauptdreikant sich längs der Kurve bewegt.¹⁾

21. Bei der Bewegung des Hauptdreikants längs der Kurve beschreibt eine mit ihm fest verbundene Gerade (außer den in Aufgabe 19 genannten) nur dann eine abwickelbare Fläche, wenn zwischen der Krümmung und Torsion eine (nicht ganz willkürliche) quadratische Gleichung besteht.²⁾

Anleitung. Man drücke die Bedingung dafür aus, daß bei einer Elementarschraubung um die Achse der Schmiegunge-schraubenlinie auf einanderfolgende Lagen der Geraden sich schneiden.

22. Die Kurven, deren Binormalen eine feste Gerade treffen, sind Asymptotenlinien einer Rotationsfläche, deren Achse die feste Gerade ist.

23. Die Kurven konstanter Torsion, deren Binormalen eine feste Gerade treffen, haben die natürlichen Gleichungen $\varrho = \frac{a}{2} \cos \frac{s}{a}$, $r = a$ (Asymptotenlinien auf der Pseudosphäre).

24. Die Loxodromen, deren Binormalen eine feste Gerade schneiden, liegen auf der Rotationsfläche der Kettenlinie³⁾, ihre natürlichen Gleichungen sind $\frac{r}{\varrho} = \frac{s}{2a}$, $\varrho s = s^2 + 2a^2$.

25. Die Einheitskugel sei auf Parallelkreise $\varphi = \text{konst.}$ und Meridiane $\vartheta = \text{konst.}$ bezogen. Dann bestehen für ihre Loxodromen die Beziehungen $d\tau^2 = d\varphi^2 + d\vartheta^2$, $1 + r \operatorname{tg} \alpha (1 - \varrho^2 \sin^2 \alpha) = 0$.

1) Die Hüllfläche dieser Parabeln ist für den Fall der zylindrischen Schraubenlinie von E. Müller (Wien. Ber. Bd. 120. S. 1797. 1911) in ganz anderem Zusammenhang untersucht worden.

2) E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig 1901. S. 190. E. Salkowski, Münchner Ber. 1911. S. 523.

3) E. Cesàro, Vorlesungen. S. 228.

26. Legt man durch die Punkte einer zylindrokönischen Schraubelinie in den Schmiegungebenen die Geraden, die die Tangenten unter konstantem Winkel schneiden, so bilden die Geraden die Binormalenfläche eine Raumkurve.¹⁾

27. Konstruiert man durch die Punkte einer beliebigen Kurve C auf einem Kreiszyylinder die Geraden, die die Achse unter einem konstanten Winkel α treffen, so erhält man eine Regelfläche mit geradliniger Striktionslinie, aus der die allgemeinste Regelfläche mit geodätischer Striktionslinie durch eine beliebige Verbiegung hervorgeht.

28. Konstruiert man in den rektifizierenden Ebenen einer ebenen Kurve C

$$\frac{1}{\rho} = \varphi(s)$$

diejenigen Geraden, die sie unter dem konstanten Winkel ϑ schneiden, so erhält man Regelflächen, die die Kurve C als Striktionslinie besitzen. Verbiegt man nun diese Fläche auf alle nur möglichen Weisen zu einer anderen Linienfläche, so geht die ebene Kurve in Raumkurven über, die durch die natürliche Gleichung

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{r} = \varphi(s)$$

charakterisiert sind, oder in eine Gerade.²⁾

29. Konstruiert man in den Punkten einer Raumkurve (M) die Normalen der Fläche, die von den Krümmungskreisen der Kurve eingehüllt werden, so gehen diese durch die Schmiegungekugelmittelpunkte.³⁾

Anleitung. Im Punkte M'' schneiden sich die Krümmungskreise durch die Punkte M, M', M'' und die Punkte M', M'', M''' beide liegen auf der Schmiegungekugel von M ; ihre Tangenten bestimmen sowohl die Berührungsebene der Kugel als auch der Hüllfläche im Punkte M'' ; die Tangentialebenen beider Flächen und somit ihre Normalen fallen zusammen. — Die betrachtete Fläche kann auch als Hüllfläche der Schmiegungekugeln der Kurve (M) aufgefaßt werden.

30. Welche Raumkurve hat mit ihrer zweiten Polarkurve die rektifizierende Fläche gemein?

1) E. Salkowski, Deutsche Math. Ver. 22. S. 71.

2) D. Math. Ver. 22, S. 68.

3) R. v. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2. Bd. S. 40 (1913).

Anleitung. Die erste Polarkurve muß dieselbe Krümmung haben wie die Ausgangskurve, es muß also $h = \text{konst.}$ sein (S. 55).

Ferner muß $h_1 = \frac{d\varrho_1}{d\sigma_1} = \pm \frac{d\varrho}{d\tau}$ mit h durch die Gleichung $h_1 = \pm h \operatorname{ctg} H = \mp \frac{h\varrho}{r}$ verknüpft sein. Dies stellt keine neue Bedingung dar.

31. Die Kurven, die mit ihrer Polarkurve in entsprechendem Punkte gleiche Krümmung haben, sind gewisse Planevolventen derjenigen Raumkurven, die bei der Abwicklung ihrer Tangentenfläche sich in Kreisevolventen verwandeln.

32. Auf jeder windschiefen Fläche gibt es immer zwei (reelle oder imaginäre) Kurven, in deren Punkten die krummen Asymptotenlinien die Erzeugenden der Fläche senkrecht schneiden (S. 121). Ist eine dieser Ortskurven selbst eine Orthogonaltrajektorie, so ist die Fläche die Hauptnormalenfläche einer Raumkurve. Man bestimme für den allgemeinen Fall die natürlichen Gleichungen dieser Kurven durch die Bestimmungsgrößen der Fläche.

33. Zieht man durch die Punkte einer Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden einer windschiefen Fläche (F) die Parallelen zu den Striktionsstrahlen, so bilden diese eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie (wenn sie überhaupt existiert, d. h. wenn (F) keine Fläche mit Richtebene ist) eine Geodätische auf der Mittelfläche von (F) ist.

Anleitung. Jede Parallele zu einem Striktionsstrahl s liegt in der Mittelebene der zugehörigen Erzeugenden. Die Ebene durch das Bogenelement MM' der Erzeugenden und die Parallele zu s steht auf der erzeugenden Geraden g' senkrecht und enthält alle Richtungen, die zu g normal sind, also auch die Richtung des benachbarten Striktionsstrahls s' . Die konstruierten Geraden bilden also eine abwickelbare Fläche. Daß ihre Gratlinie auf der Mittelfläche geodätisch ist, lehrt Kap. VIII, Nr. 10 (S. 83).

34. Man biegt die Hauptnormalenfläche einer Kurve (M) so, daß die Fläche in die Hauptnormalenfläche einer Orthogonaltrajektorie (N) übergeht, deren Punkte von denen der ursprünglichen Kurve den konstanten Abstand $MN = M'N' = \dots = l$ haben. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Kurven (M) und (N)?

35. Für welche Schraubenlinien ist die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche a) eine geodätische Linie, b) ein geodätischer Kreis auf dem zylindrischen Striktionsband der Fläche?

Anleitung. Ist $f(s_0, \varrho_0) = 0$ die natürliche Gleichung des Normalschnitts für den zur Schraubenlinie gehörigen Zylinder und bezieht man den Zylinder des Striktionsbandes auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x -Achse mit einem Normalschnitt zusammenfällt und dessen y -Achse eine Erzeugende ist, so ist bei passender Wahl des Anfangspunktes

$$x = \varrho, \quad y = s_0 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Wickelt man den Zylinder in die Ebene ab, so ergibt sich hieraus unmittelbar die Gleichung der Kurve, in die die Striktionslinie übergeht: $f(x, y \operatorname{tg} \alpha) = 0$. Hieraus liest man sofort die Antwort für die gestellte Frage ab. — Man beachte den Zusammenhang dieser Fragestellung mit der Theorie der „Mannheimschen Kurven“.¹⁾

36. Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche einer Schraubenlinie, die zu dem Zylinder gehört, dessen Normalschnitt eine Kreisevolvente ist, liegt auf einem geraden Kreiszyylinder und verwandelt sich bei der Abwicklung dieser Fläche in eine Parabel.²⁾

37. Verbiegt man die Ebene eines Kegelschnitts so, daß seine Normalen geradlinig bleiben und der Kegelschnitt in eine sphärische Kurve übergeht, so verwandelt sich die Krümmungsmittelpunktkurve in eine Kurve konstanter Krümmung, die gleichzeitig eine geodätische Linie eines Kegels ist.³⁾

38. Die Bogenlängen einer Kurve konstanter Torsion auf einer Kugel stehen in konstantem Verhältnis zu den Bogenlängen entsprechender Stücke ihrer Krümmungsmittelpunktkurve.

1) G. Loria, Spezielle ebene Kurven. Leipzig 1902. S. 598.

2) G. Pirondini, Giornale di Mat. Bd. 23. S. 228 (1885).

3) Math. Ann. Bd. 69. S. 576—577.

Formeltafel.

Krümmung: $\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}$. Torsion: $\frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$.

Ganze Krümmung: $\frac{1}{\nu} = \frac{dk}{ds}$.

Lancrettsche Gleichung: $dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2$; $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}$.

Radius der Schmiegunngskugel: $R = \sqrt{\rho^2 + h^2}$; $h = \frac{d\rho}{d\sigma}$.

Winkel μ des Schmiegunngskugelradius mit der Hauptnormale: $\cos \mu = \frac{\rho}{R}$, $\sin \mu = \frac{h}{R}$, $\operatorname{tg} \mu = \frac{h}{\rho}$.

Winkel H der rektifizierenden Geraden mit der Tangente:
 $\sin H = \frac{r}{\rho}$, $\cos H = -\frac{r}{r}$, $\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\rho} = -\frac{d\tau}{d\sigma}$.

Parameter der Hauptnormalenfläche: $\frac{r^2}{r}$.

Parameter der Binormalenfläche: r .

Polarkurve: $ds_1 = |dh + \rho d\sigma|$, $\rho_1 = \rho + \frac{dh}{d\sigma} = \left| R \frac{dR}{d\rho} \right|$,
 $r_1 = -\frac{\rho R}{r} \frac{dR}{d\rho}$.

Gratlinie der rektifizierenden Fläche:

$$ds_3 = |dL + ds \cos H|, \quad \rho_3 = \frac{1}{\sin H} \left| \frac{dp}{dH} \right|, \quad r_3 = \frac{-1}{\sin H} \frac{dp}{dk},$$

$$L = \frac{ds}{dH} \sin H, \quad p = \frac{ds}{dH} \sin^2 H.$$

Filarevolvente: $ds_1 = s d\tau$, $\rho_1 = \frac{sr}{\rho}$, $r_1 = \frac{dH}{ds_1} = \frac{dH}{s d\tau}$.

Gleichung der Schraubenlinien: $\frac{r}{\rho} = -\operatorname{tg} \alpha$.

Orthogonalschnitt des zugehörigen Zylinders: $s_0 = s \sin \alpha$,
 $\rho_0 = \rho \sin^2 \alpha$.

Gewöhnliche Schraubenlinie: $\varrho = \text{konst.}$

Zylindrokönische Schraubenlinie: $\varrho = ks$.

Schraubenlinie auf dem Rotationsparaboloid: $\varrho^2 = ks$.

Schraubenlinie auf dem Rotationsellipsoid und -hyperboloid:
 $A\varrho^2 + Bs^2 = 1$.

Aoustsche Schraubenlinien: $\varrho = A \sin k\sigma + B\sigma + C$.

Geodätische Linien auf Kegelflächen: $\frac{r}{\varrho} = \frac{l}{s}$ ($l = \text{konst.}$).

Geodätische Linien auf dem Rotationskegel: $\varrho = k(h^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}$.

Sphärische Kurven:

$$\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)^2 = R^2, \quad \varrho = R \sin(\sigma + \sigma_0) \quad (R = \text{konst.}).$$

Bertrandsche Kurven: $\frac{a}{\varrho} - \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{r} = 1$.

Geodätische Linien auf Böschungsflächen (Aoustsche Cykliden):

$$\tau^2 + \sigma^2 = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad \frac{d\left(\frac{r}{\varrho}\right)}{ds} = \frac{k}{r} \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{\varrho^2}\right)^3} \quad (k = \text{konst.}).$$

Kurven, deren Hauptnormalenfläche orthogonale Striktion

$$\text{besitzt: } \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{k\varrho} \quad (k = \text{konst.}).$$

Kurven, deren Binormalen die Hauptnormalen einer zweiten

$$\text{Kurve sind: } k^2 \frac{dr}{d\tau} = r^2 + k^2 \quad (k = \text{konst.}) \quad \text{oder} \quad r = k \operatorname{tg} \tau.$$

Register.

- Abwickelbare Fläche 5.
 Abwicklung der Tangentenfläche 119.
 Achsenfläche 137. 144.
 Acoustische Kurven 180.
 Asymptotenebene einer Linienfläche 77.
 Asymptotenfläche 80.
 — - der Hauptnormalenfläche 102.
 — - der Binormalenfläche 105.
 Asymptotenlinien 80, 87.
 — - auf Hauptnormalenflächen 120.
 — - auf Rotationsflächen 189.
 Belertrandsche Kurven 120—133.
 Biegung von Linienflächen 88.
 — - von Binormalenflächen 103.
 Bild s. sphärisches Bild.
 Binormale 4.
 Binormalenflächen 75. 103—105.
 I Parameter der B. 78.
 Böschungsf lächen 133.
 Charakteristik der Evolutoidenfläche 164.
 Evolute s. Filar- bzw. Planevolute;
 n mehrfache E. 178; sphärische E. 65.
 Evolutoide 161.
 Evolutoidenfläche 164.
 Evolvente s. Filar- bzw. Planevolvente;
 sphärische E. 47.
 Evolventoide 172.
 Fililarevolute 42—50.
 Fililarevolvente 31—36.
 — - der Kegelgeodätischen 34. 42. 43.
 Fläche, geradlinige 2; windschiefe
 F F. 2. 74—88.
 — - der Krümmungsachsen 6. 41—50.
 — - der Hauptnormalen 7. 90—103.
 — - der Binormalen 8. 103—105.
 Ganze Krümmung 21. 27. 36;
 Ebene der g. K. 30. 36. 70.
 Geodätische Linien 9. 64. 81.
 — auf Kegeln 34. 67.
 — auf Linienflächen 82. 86.
 — auf Rotationsflächen 186.
 — auf Zylindern 9.
 Geodätische Krümmung 85.
 Geodätische Kreise 45.
 Gratlinie 5.
 Hauptdreikant 4; Bewegung des
 H. 140.
 Hauptnormale 4.
 Hauptnormalenfläche 90—103.
 — der Kurven konst. Krümmung 154.
 — der Schraubenlinien 11. 112.
 Helix 135.
 Indikatrix 23.
 Invarianten einer Kurve 17.
 Inverser Krümmungsmittelpunkt 29.
 Kongruenz 162.
 Konische Loxodrome 114—120.
 Konoid 75. 103.
 Kontingenzwinkel 12; Summe der
 K. 18.
 Krümmung 13.
 Krümmungsachse 6.
 Krümmungslinie 36. 81. 87.
 Krümmungsmittelpunkt 13.
 Krümmungsstrecke 29.
 Kurve, ebene 8. 34; sphärische 9.
 34. 54. 186; parallele 24; Bertrand-
 sche 120—133; Cesàrosche 145. 189.
 — konst. Krümmung 54. 106—109.
 — konst. Torsion 104.
 — konst. Steigung 9. 113.
 — der Krümmungsmittelpunkte 14.
 52. 91.
 Kurvenklasse 18.

- Kurvenpaar 156.
 Kurvenpaar konst. Krümmung 107.
 —, orthogonales 151.
 —, isometrisches 158.
 Lancretscher Satz 27.
 Linienflächen = geradlinige Fl.
 Loxodrome 109.
 — des Rotationskegels 114—120.
 Mittelebene 77.
 Mittelfläche 79.
 — der Hauptnormalenfläche 102.
 — der Binormalenfläche 105.
 Mittelpunkt einer Erzeugenden 74.
 Natürliche Gleichung 16.
 Normale 4.
 Normalebene 4.
 Normalenkongruenz 169.
 Orthogonaltrajektorie 32. 79.
 Oskulation 14.
 Oskulationskugeln 152.
 Oskulierende Schraubenlinie
 = Schmiegunsschraubenlinie.
 Parallele Raumkurven 24. 174.
 Parameter einer Linienfläche 77.
 Polarfläche 6. 41; die n^{te} 179.
 Polarlinie 6. 51—55.
 Planevolute 50.
 Planevolvente 37. 55.
 Planevolventoide 173.
 Réaumur'scher Satz 163.
 Regelfläche 2. 74.
 Rektifizierende Ebene 4.
 — Fläche 7. 63; der Filarevoluten
 65; zweite 182.
 Rotationshyperboloid 89.
 Schmiegunng einer Kurve 16.
 Schmiegunngsebene 3.
 Schmiegunngskegel 59.
 Schmiegunngskugel 50.
 Schmiegunngsloxodrome. koni-
 sche 138.
 Schmiegunngsradius 16. 37. 78.
 Schmiegunngsschraubenlinie
 (Schmiegunngshelix) 135.
 Schmiegunngswinkel 15; Summe
 der S. 20.
 Schraubenlinie, allgemeine 9, 109
 —111; gewöhnliche 111—112.
 Schraubung 112.
 Schraubungsachse 140—142.
 Sphärisches Bild 22.
 — der Tangenten 23. 25.
 — der Binormalen 26.
 — der Hauptnormalen 26.
 — der rektifizierenden Fläche 29.
 Sphärische Evolute 65.
 — Evolvente 47.
 — Kurven 9. 34. 54.
 — Torsion 58.
 Striktionsband 74.
 Striktionslinie 75. 82.
 — der Hauptnormalenfläche 100.
 Striktionsstrahl 74.
 Tangenten 3; -ebene 3; -fläche 5.
 Torsion s. Schmiegunng.
 Verbiegunng von Flächen s. Biegunng-
 Verteilungsparameter 77.
 Wendelfläche 104. 112. 120.
 Windung einer Raumkurve siehe
 Schmiegunng; W. einer Linienfläche
 79.
 Winkel der ganzen Krümmung 21.
 Windschiefe Flächen s. gerad-
 linige Fl.
 — Kreise 107.
 — Kegelschnitte 47.
 Zyklifizierende Fläche 145.
 Zylindrokoni-sche Schrauben-
 linie 114—120.

~~GABINET MATEMATYCZNY.
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~



~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

