DICKSTEIN – GIEOMETRYJA

# GIEOMETRYJA

elementarna

przez

S. DICKSTEINA.

Odbitka z „Encyklopedyi wychowawczéj.“

WARSZAWA.
W drukarni Józefa Sikorskiego pod zarządem Aleksandra Saładyckiego, Warecka 14.
1889.

Дозволено Цензурою
Варшава 4 Ноября 1889 года.

# TREŚĆ.

# ROZDZIAŁ I.

## Krótki rys rozwoju geometryi elementarnej i nauczania jéj w Europie.

Gieometryja jest jedną z wielkich gałęzi nauk matematycznych, którą określają zwykle jako naukę, mającą za przedmiot mierzenie rozległości. Określenie to jest jednak niewystarczającém, gdyż mierzenie rozciągłości, to jest mierzenie figur przestrzennych, stanowi tylko jedno z zadań gieometryi, prócz którego do dziedziny jéj należą badania, dotyczące formy i położenia wzajemnego utworów gieometrycznych. Z tego to powodu, opiérając się na zasadzie dwoistości, którą wyśledzić można w przyrodzie i nauce, określa Chasles („Aperçu historique sur l'origine et le développement de géométrie“, Paryż, 1862. Nota V) gieometryją, jako naukę porządku i miary utworów przestrzennych. Girard („Mémoire sur la géométrie“, Namur, 1881), jako naukę formy i ruchu w przestrzeni. Wiedza ta, według Girarda, składa się z dwóch części: pierwszą jest gieometryja właściwa, drugą cynematyka; gieometryją właściwą określa on jako naukę o formach; cynematykę jako naukę o ruchu. W podziale tym powtarza właściwie Girard poglądy matematyka polskiego Hoene-Wrońskiego (ogłoszone w „Sept manuscrits inédits", Paryż, 1879), o których będzie mowa niżéj. Tu powiemy tylko, że Wroński dzieli matematykę na dwie wielkie gałęzie: algorytmiją, t. j. analizę i gieometryją; pierwszą uważa jako wiedzę czasu, t. j. następstwa momentów, stanowiącego liczby; drugą poczytuje za wiedzę przestrzeni, t. j. ogółu punktów stanowiącego rozciągłość. (Introduction à la philosophie des mathématiques, Paryż, 1811). Piérwszéj przypisuje Wroński większą wagę i jest zdania, że prawa gieometryi utworzyć się dają na wzór i podobieństwo praw algorytmii.

Piękny i oryginalny pogląd na istotę gieometryi wypowiedział uczony niemiecki Grassmann (Ausdehnungslehre, 1844). Według niego nauka o przestrzeni nie jest równorzędną z czystą analizą, to jest nauką o ilościach; jest ona właściwie nauką stosowaną, a mianowicie zastosowaniem do przestrzeni praw ogólnéj nauki ilościowéj (Ausdehnungslehre). Ta ostatnia według Grassmanna jest wiedzą czysto umysłową, nie posiłkującą się żadnymi przedmiotami świata zewnętrznego, jestto wiedza czysta, któréj prawa stosować można do przestrzeni i ruchu; gieometryja zaś wprowadza do umiejętności to, co wynika z właściwości przestrzeni, jako przedmiotu będącego zewnątrz umysłu ludzkiego. Do podobnego poglądu na istotę gieometryi doprowadziły późniejsze sławne badania Riemanna (Ueber die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen, (wypowiedziane w 1854, wydane w 1868) i Helmholtza (Ueber die Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen, 1868), które wzbogaciły naukę nowemi pojęciami i przyczyniły się do znakomitego wyjaśnienia podstaw wiedzy gieometrycznéj.

Badania gieometryczne, począwszy od pierwszych słabych kroków uczonych egipskich aż do głębokich abstrakcyjnych dociekań dzisiejszych gieometrów, stanowią niezmiernie bogaty świat zjawisk, których porządek i związek wzajemny stanowi przedmiot wielce pociągający dla umysłów, oddanych poszukiwaniu prawdy. Jeżeli dodamy do tego niewyczerpane prawie bogactwo zastosowań gieometryi, począwszy od nakreślenia najprostszéj figury aż do odtworzenia najbardziéj oderwanych związków matematycznych; to zrozumiemy, że gieometryja stanowi jednę z najwspanialszych umiejętności. Zgłębienie praw téj nauki, poznanie dróg jéj rozwoju, zaprawienie umysłu do nowych w niéj poszukiwań i odkryć, może być tylko owocem długoletnich i poważnych studyjów. Nie każdemu jest daną możność sięgnięcia tak głęboko do téj skarbnicy prac ducha ludzkiego, ale obowiązkiem każdego człowieka, mającego pretensyją do wykształcenia, by poznał pierwsze zasady téj pięknéj nauki, jéj elementy, czyli tak nazwaną gieometryją niższą, elementarną.

Przedmiotem gieometryi elementarnéj jest badanie własności i związków najprostszych utworów gieometrycznych, to jest, utworzonych z linij prostych i płaszczyzn, do czego dołącza się nauka o kole, kuli, walcu i ostrokręgu. Taki to jest zakres wiadomości, zawartych w nieśmiertelném dziele Euklidesa, o którém mowa będzie niżéj. Wiadomości te, jak to zobaczymy, nie wyczerpują wszelako całego zasobu badań, którym oddawali się starożytni greccy gieometrowie; badali oni stożkowe, t. j. linije krzywe, powstające z przecięcia płaszczyzny ostrokręgu (elipsa, hyperbola, parabola), liniją spiralną, ślimakową i t. p., a także niektóre powierzchnie, jak paraboloidy, sferoidy, konoidy i t. p. Ta część badań gieometrycznych długo wszelako nie była znaną w Europie; w wieku XVII-ym na nowo podjęta, a dziś znakomicie rozwinięta i rozszerzona, należy do zakresu gieometryi wyższéj, która ze względu na metodę badania, dzieli się na analityczną i syntetyczną. Pierwsza, stworzona przez Descartes'a, przeprowadza badanie linij i powierzchni przy pomocy rachunku analitycznego i korzysta z zasobów algiebry i analizy nieskończonościowéj, dzięki przedstawieniu figur pod postacią równań między współrzędnemi ich punktów; druga, rozwinięta w nowszych czasach, dzięki pracom Ponceleta, Steinera, Chasles'a, Staudta i t. d. bada utwory gieometryczne, ze względu na ich wzajemne położenia, związki i zmiany, obywając się często bez rachunku i unikając oznaczeń miarowych (gieometryja położenia). Inna znów gałąź gieometryi, zwana gieometryją wykreślną, albo opisową, któréj twórcą jest Monge, bada figury przestrzenne za pomocą ich rzutów i odwzorowań.

Powyższy podział gieometryi na różne oddzielne gałęzie nie jest właściwie ścisłym i stanowczym, gdyż rozwój umiejętności usuwa ustanowione granice i metody jednéj nauki przeprowadza nieznacznie w dziedzinę drugiéj. Tym sposobem gieometryja analityczna schodzi się nieraz z syntetyczną; ta ostatnia ma dziedziny wspólne z gieometryją miarową. Nowsze badania doprowadziły pod tym względem do daleko sięgających uogólnień i związały dziedziny, pozornie żadnego związku z sobą nie mające, np. gieometryją rzutową (projektywną) z teoryją form algiebraicznych (Prace Kleina w dzienniku: „Mathematische Annalen“ oraz tegoż dziełko: „Vergleichende Betrachtungen ueber neuere geometrische Forschungen“). Nie możemy tu wchodzić w bliższe wyjaśnienie tego przedmiotu i dlatego ograniczamy się na powyższéj wzmiance o różnych gałęziach gieometryi, która dla celu, jaki sobie w niniejszéj pracy zakładamy, zupełnie wystarcza. Dodać tylko winniśmy, że do gieometryi elementarnéj zalicza się zwykle trygonometryją, któréj przedmiotem właściwym jest rozwiązywanie trójkątów sposobem rachunkowym, a która dzieli się na płaską, mającą za przedmiot trójkąty na płaszczyźnie, oraz kulistą czyli sferyczną, która zajmuje się trójkątami nakreślonymi na powierzchni kuli.

Od gieometryi odróżnić należy gieodezyją, albo miernictwo, którego przedmiotem jest wymierzanie i odwzorowywanie całkowitéj powierzchni ziemi i jéj części. Gieodezyja dzieli się na niższą i wyższą. Do gieodezyi niższéj, czyli do gieometryi praktycznéj, należy wymiar mniejszych części powierzchni ziemi, do gieodezyi wyższéj—oznaczenie kształtu całéj powierzchni ziemi. Granica między temi dwiema naukami nie daje się ściśle oznaczyć, tak, że często miano gieometryi praktycznéj nadają całéj gieodezyi. Rozumié się, że gieometryja praktyczna jest nauką stosowaną, opartą na zasadach gieometryi teoretycznéj.

---

Gieometryja bierze swa nazwę od wyrazów greckich γῆ—ziemia, pole, grunt i μετρεῖν—mierzyć co wskazuje wyraźnie, że pierwotnie nauka ta podawała prawidła i sposoby mierzenia gruntu, miała więc zadanie gieometryi praktycznéj, i w początkach rozwoju swego była raczéj sztuką, rzemiosłem, niż umiejętnością. Dopiéro późniéj, z biegiem czasu, z téj czysto-praktycznéj wiedzy powstała nauka w prawidłowém znaczeniu tego wyrazu; nauka, ktora, odsuwając na plan dalszy praktykę i zastosowania, zajęła się badaniem figur gieometrycznych, pomyślanych w przestrzeni. Rzecz jasna, że do prawd, jakie obecnie należą do dziedziny wiedzy, gieometryja doszła nie odrazu, lecz w ciągu wiekowego, powolnego a skutecznego rozwoju, który nie ustał po dzień dzisiejszy, wbrew dość rozpowszechnionemu, a błędnemu mniemaniu, jakoby w naukach matematycznych w ogóle, a w gieometryi w szczególności, nic już nowego do zrobienia nie pozostawało. Dzieje rozwoju gieometryi przedstawiają wspaniały obraz usiłowań umysłu ludzkiego do wzbijania się coraz wyżéj na drodze uogólniania prawd, które stosują się wprawdzie do idealnych figur gieometrycznych, niemniéj jednak stanowią podstawę umiejętnego badania przyrody, a więc mechaniki, astronomii, fizyki i wielu umiejętności stosowanych. Nie możemy tu przedstawić w całéj rozciągłości dziejów gieometryi, stanowiących przedmiot wielu dzieł i studyjów; postaramy się, idąc tu przeważnie z Chasles'em i Cantorem, zaznaczyć tylko najważniejsze momenta jéj rozwoju, oraz wymienić najważniejszych twórców, uwzględniając głównie gieometryją elementarną, stanowiącą właściwy przedmiot téj pracy. Pragnących bliżéj poznać dzieje gieometryi, odsyłamy do dzieł specyjalnych, wymienionych dwóch uczonych, a mianowicie do Chasles'a: Aperçu i t. d. i do M. Cantora: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I Band“, Lipsk, 1880, oraz do dzieł Hankela: „Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.“ Lipsk, 1874; Günthera: „Vermischte Untersuchungen zu Geschichte der mathematischen Wissenschaften.“ Lipsk, 1876. Do historyi gieometryi greckiéj ważnemi są prace: Bretschneidera: „Die Geometrie und die Geometer vor Euclides.“ Lipsk, 1870; P. Tannery'ego: „La géométrie grecque.“ Paryż, 1887. Przystępny wykład historyi rozwoju gieometryi znaleść można w niedawno wydanym popularnym kursie historyi matematyki Balla: „A short account o the history of mathematics.“ Londyn, 1888). Z dawniejszych dzieł dla studyjów historycznych ważnemi są: Montucla: „Histoire des mathématiques“ (pierwsze wydanie 1758, drugie 1790—1802), Bossut: „Essai sur l'histoire générale des mathématiques (1810). Historyją gieometryi w bieżącém stuleciu streszcza dziełko Gino Loria, profesora w Genui: „Przeszłość i stan teraźniejszy najważniejszych teoryj gieometrycznych.“ Przekład polski, Warszawa, 1889. Wogóle literatura tego przedmiotu jest bardzo obszerną; niektóre ważniejsze dzieła, prócz wyliczonych, wymienimy w dalszym ciągu w miejscach właściwych.

F Gow. A Short history of the Greek mathematics (Cambridge 1884. Allman Greek Geometry from Thales to Euclid Dublin 1889

Gieometryja taka, jaką odziedziczyliśmy po starożytnych, jest przeważnie wytworem ducha greckiego; z najnowszych jednak badań historycznych wyprowadzić się daje niewątpliwy wniosek, że pierwotnego źródła gieometryi szukać należy w starożytnym Egipcie i Babilonii. Gdyby nawet żadne świadectwa piśmienne nie stwierdzały tego mniemania odnośnie do Egiptu, to dowodu dostarczyć mogą nieme, lecz potężne pomniki wiekowéj pracy egipskiego ludu: piramidy, obeliski, świątynie, których stawianie nie mogło się obyć bez znajomości chociażby najprostszych własności figur gieometrycznych. Na szczęście jednak posiadamy świadectwo bezpośrednie, własnemi rękami uczonych egipskich sporządzone, a stwierdzające fakt, że nad Nilem, w odległéj bardzo starożytności uprawiano matematykę. Tém świadectwem jest niedawno znaleziony papyrus treści matematycznéj Ahmesa, napisany według wszelkiego prawdopodobieństwa w XVIII-ym lub XX-ym wieku przed Chr. Droga, jaką zdobywano najprostsze prawdy matematyki była jak przekonywa ten zabytek piśmienny, drogą prób i doświadczeń. Zawiera ten papyrus wykład praktyczny rozmaitych działań z zakresu arytmetyki i gieometryi według metod ówczesnych. Pomijając wiadomości arytmetyczne, jako nie należące do treści niniejszéj pracy, powiemy tylko, że w podręczniku egipskim znajdujemy zadania na oznaczanie powierzchni trójkątów i czworokątów, na obliczanie objętości niektórych brył, oraz wskazówki, na zasadzie których można sądzić, że egipcyjanie znali dość dokładnie stosunek okręgu koła do średnicy. Jest nawet ślad używania pewnych linij, przypominających linije trygonometryczne. Podane w podręczniku Ahmesa sposoby obliczania powierzchni, są naukowo błędne, ale dają rezultaty dość przybliżone.

I w starożytnym Babilonie uprawiano również gieometryją. Szczupłemi dotąd są wiadomości nasze o téj zamierzchłéj matematyce, ale okoliczność, że w Babilonie robiono obserwacyje astronomiczne, pozwala nam przypuszczać, że zajmowano się tam i gieometryją. Podział sześćdziesiętny koła na stopnie, minuty i sekundy jest pochodzenia babilońskiego i przechował się niezmiennie do naszych czasów. Wiemy także, że babilończycy byli w posiadaniu systemu miar i wag, który z czasem rozpowszechnił się w całym ówczesnym ucywilizowanym świecie, a do ułożenia swego wymagał pewnych wiadomości gieometrycznych. (Brandis, Das Münz-Mass-und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf Alexander den Grossen. Berlin, 1866.) Zresztą na cegiełkach z pismem klinowém znajdujemy rysunki rozmaitych figur gieometrycznych (Cantor, Vorlesungen, str. 89).

Pomijamy gieometryją starożytnych chińczyków i indusów, która lubo powstać mogła samodzielnie, nie wywarła jednak wpływu na rozwój nauki europejskiéj, i przechodzimy wprost do prawdziwéj ojczyzny gieometryi, do Grecyi, po któréj najwspanialszą i najpiękniejszą spuściznę stanowi, obok filozofii, wiedza gieometryczna, świadcząca o niepospolitych zdolnościach umysłowych rasy greckiéj. Pierwszym grekiem, o którego odkryciach gieometrycznych mamy pewne wiadomości był Tales z Miletu (645—548 przed Chr.) Jemu to zawdzięczamy twierdzenie, że kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe; że kąty wierzchołkiem przeciwległe są równe; że trójkąt jest oznaczony, gdy danemi są jeden z jego boków i dwa kąty przyległe; że średnica koła dzieli je na dwie równe części. Prócz tego pokazał Tales, jak wpisać trójkąt prostokątny w koło i, jak za pomocą cienia oznaczyć można wysokość przedmiotów. Drobną i nieznaczącą wydaje się ta wiązanka prawd prostych, znanych dziś nieledwie każdemu dziecku, ale nie zapominajmy, że w owym czasie było już zasługą niemałą zebrać liczne spostrzeżenia i próby i wyrazić je w twierdzeniach ogólnych. Twierdzenia te posłużyły uczniom i następcom Talesa za podstawę do dalszych dociekań gieometrycznych, stanowiących wówczas nieodzowną część składową wykształcenia filozoficznego.

539? (Wolf)

Wielki postęp uczyniła gieometryja w szkole drugiego sławnego mędrca Pytagorasa z Samosu (558—500 przed Chr.). Znaném powszechnie jest twierdzenie o trójkącie prostokątnym, noszące jego nazwę, a które pozostało kamieniem węgielnym gieometryi. Nieznaną jest droga, jaką doszedł Pytagoras do odkrycia tego twierdzenia; niewiado-

580? Wolf

[Szkoła ta była w Krotonie

mo też, czy sam dał ogólne jego dowodzenie; wątpliwości tylko nie ulega, że znał przypadki szczególne, odnoszące się do trójkątów, których boki miały pewne długości oznaczone. Twierdzenie o trójkącie prostokątnym doprowadziło Pytagorasa do odkrycia długości wzajem niewspółmiernych, poczytywanego za jedno z największych w matematyce. Wiadomo też, że pytagorejczycy dowiedli ogólnie twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych trójkąta i że za przykładem mistrza zajmowali się badaniem własności wielościanów foremnych i kuli.x) Urósł tedy zapas wiadomości gieometrycznych do tego stopnia, że wkrótce potém Hippokrates z Chijosu (około roku 450 przed Chr.) mógł już, zebrawszy znane odkrycia, ułożyć pierwszy podręcznik, pierwsze zasady, στοιχεῖα (Elementa) gieometryi. Podręcznik ten zaginął, ale nazwisko autora wsławiło rozwiązanie zadania o kwadraturze tak nazwanych księżyców, t. j. odcinków koła, opisanego na kwadracie, oraz zadania o podwojeniu sześcianu, t. j. o odszukaniu krawędzi sześcianu, którego objętość ma być dwa razy większą od objętości danego sześcianu. Zadanie ostatnie przez długie wieki zajmowało starożytnych gieometrów. Hippokrates sprowadził je do znalezienia dwóch długości średnio proporcyjonalnych między dwiema danemi długościami.x+)

Spekulacye liczbowe Pytagoreików.

Do wysokiego stopnia rozwoju doszła gieometryja w akademii platońskiéj. Twórca téj akademi, wsławiony filozof Platon (429 – 348 przed Chr.), będąc wielkim wielbicielem matematyki, nie przyjmował uczniów, nie przykładających się do gieometryi: Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην. Dewizy téj trzymali się następcy Platona. Opowiadają, że jeden z nich, Ksenokrates, pewnemu młodzieńcowi, który zgłosił się bez odpowiedniego przygotowania w gieometryi, odmówił przyjęcia do akademii, wyrzekłszy te słowa: Πορεύου λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας (Odejdź, bo nie posiadasz jeszcze rękojeści do filozofii).

x+) Według legendy [illegible]

Imię Platona wsławione jest i w dziejach gieometryi nietyle nowemi odkryciami, ile staraniami skierowanemi ku

x) Die griechischen Elemente der Mathematik welche wir als mustergültig nach Form und Inhalt bewundern, mögen dem Genius des Pythagoras viel zu danken haben, allein auf den Abwegen, auf welche die begeisterten Anschauungen [illegible] führen musste haben sie sich losgemacht. Hankel, Abh. [illegible] (1889) str. 88

ugruntowaniu metody dochodzenia prawd gieometrycznych. Platon to powszechnie uważany jest za twórcę metody analitycznéj, będącéj przeciwstawieniem przeważnie przedtém używanéj metody syntetycznéj. Gdy w syntezie prawda, mająca być udowodnioną, wyprowadza się jako wniosek z prawd, poprzednio już udowodnionych; analiza postępuje drogą odwrotną, a mianowicie od prawdy, mającéj być stwierdzoną przez wnioski logiczne, dochodzi kolejno do prawd za pewne uznanych. Najważniejsze zastosowanie pozyskała metoda analityczna, jako droga rozwiązywania zagadnień. Gdy w zadaniu szło o konstrukcyją figury na zasadzie danych, odpowiadających zbiorowi warunków, to przyjmowano zadanie za rozwiązane przy pomocy pewnéj figury, czyniącéj zadość hypotetycznie warunkom danym; na téj figurze operowano przy pomocy wszystkich środków syntezy, t. j. za pomocą linij pomocniczych i znanych już twierdzeń i dochodzono do związku, który umożliwiał wykreślenie hypotetycznéj, a właściwie szukanéj części figury. Od téj chwili ta część figury należała już do danych i należało szukać znów związku, pozwalającego na wykreślenie innéj części szukanéj, przy pomocy danych pierwotnych i danych nowowprowadzanych. Po znalezieniu téj części uważano ją znowu za daną i postępowano w ten sposób daléj, póki całéj figury nie oznaczono w zupełności. Na tém polegała istota analizy starożytnych. (Porów. Hankel l. c. str. 141). Bezwątpienia i przed Platonem musieli gieometrowie greccy używać metody analitycznéj; zasługę Platona stanowi to, że metodzie téj nadał cechę naukową. (Cohen: „Platons Ideenlehren und Mathematik.“ Marburg, 1879, str. 25). Prócz tego położył Platon wielkie zasługi w sprawie ścisłych definicyj gieometrycznych. On to dał określenia punktu, linii, powierzchni; on prawdopodobnie na czele gieometryi postawił aksyjomaty, czyli pewniki i położył tym sposobem podwaliny systemu gieometryi, który się tak świetnie przedstawił w mistrzowskiéj pracy Euklidesa.

Każdego obrobytale rozwiązanie zadania; znaleźć dwie średnie proporcyjonalne między dwoma danemi liniami.



Nim poświęcimy obszerniejszą wzmiankę ostatniemu dziełu, winniśmy wspomnieć kilku słowy o uczniach i następcach Platona: Teetosie, który zajmował się dawszym ciągu linijami niewspółmiernemi i wielościanami foremnymi; o Eudoksosie (405—355 przed Chr.), który rozwiązał zadanie o podziale linii w stosunku skrajnym i średnim i zajmował się wymierzaniem objętości ostrosłupa, walca i ostrokręgu; *) o Menechmosie, którego uważać należy za pierwszego badacza linij stożkowych, t. j. elipsy, hyperboli i paraboli; **) o Demostratosie bracie poprzedniego), który zajmował się między innemi oznaczeniem długości ćwiartki okręgu koła z wymierzaniem jego powierzchni; wreszcie o Arystotelesie (384—322 przed Chr.), wsławionym na wszystkich polach ówczesnéj wiedzy, filozofie i przyrodniku, którego największą zasługę w matematyce stanowi zgłębienie pojęć nieskończoności i ciągłości, z któréni gieometrowie spotkać się musieli w swych dociekaniach.

Prace wymienionych gieometrów przygotowały nowy zasób materyjału naukowego, dostatecznie przetrawionego i pogłębionego, i czekały tylko dzielnéj ręki, któraby prawdy po rozmaitych pismach rozsypane zebrała i w całość systematyczną skupiła. Gieometra, który to wiekopomne zadanie przedsięwziął i znakomicie rozwiązał, był wspomniany już wyżéj Euklides (około roku 300 przed Chr.). Dzieło główne Euklidesa στοιχεῖα (Elementa) po dziś dzień służy za podstawę nauczania gieometryi. Proklus, matematyk, żyjący w V-ym wieku po Chr., w komentarzu napisanym do I-éj księgi Euklidesa, w następujący sposób mówi o tém dziele: „Z zasad swoich jest on (Euklides) platonikiem i dla tego za cel ostateczny swego dzieła uważał konstrukcyją, tak zwanych brył platońskich, t. j. wielościanów foremnych; inne prace matematyczne tego męża są pełne zadziwiającej ścisłości i naukowego poznania, jak: Optyka i Katoptryka, Elementa muzyki i księga o dzieleniach. Lecz najbardziéj godnymi podziwu są Elementa ze względu na porządek, wybór

409-356 Hasny jako astronom

[Quadratrix odkryta przez Hippiasa i zastosowana przez Dinostratosa do kwadratury koła. (Obacz kwadratryka przypiski)]

[Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii ex recog. G. Friedlein, Lipsiae, 1873, p. 68.

*) Prawdopodobnie cała V-a księga Euklidesa pochodzi od Eudoxosa, a księgi [illegible] (Hultsch. Bibliotheca mathematica)

**) Dowiódł do tego zagadnienia też zadania o podwojeniu sześcianu

Porówn. Gino Loria. Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico, Torino, 1890 pag. 5–6.. Tannery La géométrie grecque p. 95–107



twierdzeń i zagadnień, albowiem zebrał w nich Euklides nie to wszystko, coby się dało powiedzieć, lecz tylko to, co się dało powiedzieć w pewném po sobie następstwie." Cieszył się więc już wówczas Euklides wielką powagą, która w ciągu wieków nie zmalała wcale. W trzynastu księgach Elementów wyróżnić można cztery działy główne (Cantor, Vorlesungen i t. d. str. 225) W pierwszym mowa jest o figurach na płaszczyźnie i o stosunku ich względnéj wielkości, t. j. równości i nierówności. W przypadku równości wystarcza okazanie tożsamości; w przypadku zaś nierówności poszukuje się oczywiście miary dla porównywanych wielkości; stąd przejście do działu drugiego, zajmującego się badaniem liczb. Liczba zupełnie oznaczona nie wystarcza jednak do wyrażenia wszelkich wielkości gieometrycznych; istnieją linije, powierzchnie i bryły, które z jednostką tego samego gatunku nie mają wspólnéj miary, nie przestają być jednak wielkościami; wielkości takie są niewspółmiernemi z jednością i badanie ich stanowi dział trzeci. Dział wreszcie czwarty stanowi badanie figur w przestrzeni. Powyższy ustęp daje ogólną charakterystykę treści Elementów, któréj szczegółowe przedstawienie zajęłoby zbyt wiele miejsca i dlatego dajemy jeszcze tylko krótkie wyliczenie treści każdéj z trzynastu ksiąg. W księdze I-éj mowa jest o linijach prostych, przystawaniu trójkątów, o linijach równoległych, równoległobokach, o równoważności figur; kończy się ta księga twierdzeniem Pytagorasa i jego dowodzeniem. Księga II-ga jest niejako dopełnieniem pierwszéj i zawiera zagadnienia, dotyczące konstrukcyi kwadratów i prostokątów w najróżniejszych kombinacyjach. Księga III-a zajmuje się własnościami koła, siecznemi, stycznemi, oraz miarą kątów. Księga IV-ga poświęcona jest wielkościom proporcyjonalnym; VI-a zastosowaniu proporcyi do stosunku powierzchni figur, stosunku kątów środkowych, oraz do podobieństwa figur. Księga VII-a, VIII-a oraz IX-a zajmują się własnościami liczb; X-a zawiera naukę o wielkościach niewspółmiernych. W XI,

W twierdzeniach tej księgi dają się wyrazić w postaci następujących wzorów algebraicznych

$m(a+b+c+\ldots) = ma+mb+mc$

$(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$; $ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$(a+b)2 \ldots$ ; $(a+b)a+\frac{a^2}{2} \ldots$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ ; $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$

XII i XIII-éj zawiera się stereometryja, która kończy się twierdzeniami o pięciu wielościanach foremnych. W XII-éj księdze jest jeszcze mowa o stosunku powierzchni wieloką-tów podobnych do kół. O pedagogiczném znaczeniu dzieła Euklidesa powiemy niżéj. Dzieła Euklidesa wydali: David Gregory, (Oxford 1703) i F. Peyard (Paryż, 1814—1818, 3 tomy).

Dzieło Euklidesa: „Data“ (Δεδόμενα), można uważać za dalszy ciąg Elementów. „Data“ daną, nazywa się u Euklidesa wielkość, wynikająca bezpośrednio z warunków danego zagadnienia. Danemi są np. powierzchnie, linije, kąty, gdy umiemy znaleźć inne, które są im równe; stosunek jest dany, gdy można znaleźć inny równy mu i t. d. Po téj definicyi następuje 95 twierdzeń, z których okazuje się, że ile razy danemi są pewne wielkości, to wraz z innemi danemi są jednocześnie inne. Oto przykłady kilku takich twierdzeń. Wielkości dane są w stosunku danym; suma wielkości danych jest daną; punkt przecięcia prostych o daném położeniu jest dany. Gdy dwie figury dane jednego gatunku mają stosunek dany, to stosunek ich boków jest dany. „Data“ uważa Cantor za zbiór ćwiczeń do „Elementów“ (Vorlesungen, str. 245). Z pozostałych dzieł Euklidesa, nad których stratą najbardziéj ubolewają gieometrowie, wymienić należy cztery księgi o przecięciach ostrokręgu, dwie księgi o miejscach na powierzchni i nakoniec trzy księgi o poryzmach. Późniejsi gieometrowie starożytni, Pappus i Proklus, wspominają o poryzmach, ale już za czasów pierwszego (w 3-cim wieku po Chr.) znaczenie tego wyrazu uległo zmianie. Kwestyja ta bardzo interesowała gieometrów nowożytnych. Halley, który zgłębił ducha gieometryi starożytnych, przyznaje się do tego, że nie rozumié znaczenia poryzmów; R. Simson uważa je za twierdzenia, wyrażające możność oznaczenia pewnych wielkości, pozostających w związku wskazanym z wielkościami stałemi i znanemi, oraz z innemi wielkościami zmiennemi, których wzajemna zależność wyraża się za pomocą jednego, lub kilku związków danych (Chasles, Aperçu, str. 13). Objaśnijmy to na przykładzie: Dane są dwie osie stałe; jeżeli z każdego punktu prostéj poprowadzimy prostopadłe p i q do tych osi, to można będzie znaleść długość $a$ i stosunek $\alpha$, aby było $\frac{p-a}{q} = \alpha$. Tu rzeczami znanemi są dwie osie, zmiennemi— prostopadłe p i q; prawem wspólném, któremu są poddane wielkości zmienne, jest to, że punkt zmienny, z którego te prostopadłe są spuszczone, należy do prostéj danéj; nakoniec wielkościami szukanemi są długość $a$ i stosunek $\alpha$, które ustanawiają między wielkościami stałemi i zmiennemi związek przepisany. Hoene-Wroński (Introduction i t. d. str. 211) jest zdania, że poryzmy były to zagadnienia, których rozwiązanie miało pewność apodyktyczną (konieczną), gdy tymczasem zagadnienia właściwe (problemata) odnosiły się do przypadków, w których rozwiązanie mogłoby być uważane wogóle tylko za możliwe. Chasles, uważając powyższe wyjaśnienie Simsona za niezupełne, poddał kwestyją powtórnemu badaniu, z którego wynikło, że poryzmy należy uważać, jako twierdzenia, odnoszące się do „miejsc gieometrycznych" i odgrywające względem tych ostatnich tę samą rolę, jaką „Dane" odgrywały względem twierdzeń w „Elementach." Są to zatém według niego twierdzenia, mające na celu ułatwienie rozwiązywania zagadnień, odnoszących się do miejsc gieometrycznych. Zbiór poryzmów, była to niejako tablica różnych własności, lub różnych wyrażeń linij krzywych, odpowiadająca nowożytnéj gieometryi analitycznéj. Zeuthen, który ogłosił gruntowne studyja nad gieometryją Apolloniusza („Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum." Kopenhaga, 1885) dochodzi nietylko do tego samego wniosku, ale widzi prócz tego w poryzmach istotne narzędzie do badań gieometrycznych. Przypuszcza on, że Euklides napisał księgę o poryzmach w związku z nauką o stożkowych.

Niedługo po Euklidesie zasłynął gienijuszem i wiedzą matematyczną Archimedes z Syrakuz (287—212 przed Chr.)

Dzieła Archimedesa wydał Venatorius (Thomas Gechauf) w Bazylei 1544 pierwsze wydanie oryginał. łacińskie, następnie Torelli Oxford 1793. łacińskie i greckie — Przekład francuski Peyrarda (1760-1822), w Paryżu 1807.

On to pierwszy uskutecznił kwadraturę paraboli, t. j. obrachował powierzchnią pola, ograniczonego z jednéj strony łukiem téj krzywéj, z innych stron prostemi; on odkrył i zbadał własności spiralnéj; oznaczył środek ciężkości wycinka parabolicznego, objętość odcinków sferoidów i konoidów parabolicznych i hyperbolicznych; znalazł stosunek objętości kuli do objętości walca w niéj opisanego, wyrachował stosunek okręgu koła do średnicy. Te znakomite prace, jako téż odkrycia w mechanice, unieśmiertelniły imię Archimedesa. Jest on prócz tego twórcą, tak zwanéj „metody wyczerpania" (methodus exhaustionis), którą uważać należy za zaród metod rachunku całkowego nowożytnych. b

O tem wyrachowaniu [illegible] objętości

Drugim wielkim następcą Euklidesa był wspomniany już Apollonijusz z Pergi (w 3-cim wieku po Chr.) Napisał on o stożkowych dzieło z ośmiu ksiąg złożone. Cztery pierwsze księgi zawierają z pewnemi uogólnieniami i rozwinięciami to, co wiedziano o tym przedmiocie przed nim; cztery następnie księgi obejmują własne odkrycia gieometry. Appolonijusz pierwszy uważał przecięcia ostrokręgu jakiegokolwiek o podstawie kołowéj, gdy do jego czasów badano tylko przecięcia ostrokręgu, powstałego z obrotu trójkąta prostokątnego około jednéj z przyprostokątnych. Znajdujemy tu wykład najpiękniejszych własności stożkowych: twierdzenia o asymptotach, o stosunku stałym iloczynów odcinków, utworzonych przez stożkową na dwóch poprzecznych, równoległych od dwóch osi stałych, lub przechodzących przez punkt stały; własności ognisk, średnic i t. d.; twierdzenia o przecinaniu się stożkowych, zadania dotyczące maximum i minimum i t. d. Te oryginalne badania stawiają Apolonijusza w rzędzie najgienijalszych matematyków greckich. Tylko siedm pierwszych ksiąg nas doszło; cztery pierwsze po grecku i trzy następne po arabsku. Halley odtworzył ósmą w swém wspaniałém wydaniu dzieła Apollonijusza (Chasles, Aperçu str. 20—21). Dzięki uczonym, którzy zgłębili tę znakomitą spuściznę, możemy dziś w zupełności prawie utwo-

b O Archimedesie (z Rühlmanna str 19)

rzyć sobie obraz dróg i metod badania starożytnych gieometrów. Prócz dzieła o przecięciach ostrokręgu, napisał Apollonijusz inne z których doszło do nas: Περὶ λόγου ἀποτομῆς (De sectione rationis); kilka nowych zaginionych prac odtworzyli nowocześni gieometrowie według wskazówek Pappusa.

Prace Archimedesa i Apolonijusza są szczytem badań gieometryi greckiéj; następcy ich, jakkolwiek wzbogacili naukę niejedném odkryciem, nie pogłębili jednak wiedzy matematycznéj. Należą tu: Nikomedes (około roku 200 przed Chr.), któremu zawdzięczamy badanie linii ślimakowéj, czyli konchoidy i zastosowanie téjże do podziału kąta na trzy części równe. Dijokles (150 lat przed Chr.) odkrywca tak zwanéj cissoidy, a zwłaszcza Heron z Aleksandryi (na 100 lat przed Chr.), wsławiony w dziejach zarówno fizyki, jak i matematyki. On to według wszelkiego prawdopodobieństwa ułożył podręcznik gieometryi praktycznéj, na który powoływali się późniejsi kompilatorzy i przepisywacze. Wzór, służący do obliczenia powierzchni trójkąta z trzech danych boków, nosi nazwę wzoru Herona. Czy Heron jest w saméj rzeczy jego odkrywcą, nie wiadomo; ale w dziele Herona „O dyjoptrze“ znajdujemy ten wzór wraz z dowodem. W piśmie Herona o gieometryi znajdujemy historyczne wiadomości o jéj początku, sposoby obliczania powierzchni kwadratów i prostokątów, metody Pytagorasa i Platona, służące do wynajdywania trójkątów o bokach wymiernych, oraz inne twierdzenia o trójkątach; daléj twierdzenia o czworokątach, o kole i jego częściach, o wielokątach foremnych. W „Gieodezyi“ Herona znajdujemy sposoby obliczania powierzchni figur, wspomniany wzór na powierzchnią trójkąta i twierdzenia o trójkątach prostokątnych; w „Stereometryi“ obliczanie powierzchni i objętości ciał, własności kuli, ostrokręgu, ostrokręgu ściętego, walca, sześcianu, równoległościanu, klina i t. p.

Obok właściwych gieometrów zaszczytne miejsce w historyi gieometryi należy się astronomom Hipparchowi i Ptolemeuszowi. Pierwszy (między 161 a 126 przed Chr.) uważany jest za twórcę astronomii umiejętnéj. Jemu téż słusznie należy się sława wprowadzenia do nauki metody badań, która zmieniła się późniéj w trygonometryją. Hipparch bowiem, jak to świadczy Teon aleksandryjski (w IV-ym wieku po Chr.) pierwszy miał ułożyć tablicę cięciw, odpowiadającą temu, co dziś nazywamy tablicą wstaw. Po nim Menelaos w sześciu księgach (zaginionych) zajmuje się obliczaniem cięciw, a w trzech księgach o kuli — własnościami trójkątów płaskich i kulistych. Wielki astronom Ptolemeusz (w II-gim wieku przed Chr.) rozwinął powyższe początki i podał metodę rozwiązywania trójkątów, któréj używano w ciągu tysiącolecia po nim. Te wiadomości trygonometryczne zawarte są w wielkiém dziele Ptolemeusza, w tak zwanym Almageście (μεγάλη σύνταξις). Punktem wyjścia jest twierdzenie planimetryczne, znane pod nazwą twierdzenia Ptolemeusza, mianowicie, że iloczyn przekątnych czworokąta wpisanego w koło równa się sumie iloczynów boków przeciwległych. I początki trygonometryi sferycznéj również znajdujemy w Almageście. Prócz tego, z wyjątków, jakie podał Proklus, przekonywamy się, że Ptolemeusz był autorem dzieła czysto-gieometrycznego; że on pierwszy wygłosił zdanie, iż twierdzenie, znane w nauce pod nazwą 11-go postulatu Euklidesa, a odnoszące się do teoryi linij równoległych, nie może być uważane, jako rozumiejące się samo przez się. Tym sposobem Ptolemeusz dał niejako początek temu ruchowi, który w XIX-ém stuleciu doprowadził do pytań o prawdziwości pewników gieometrycznych, a więc do badań filozoficzno-matematycznych nad istotą gieometryi.

Z późniejszych gieometrów, którym nauka najwięcéj zawdzięcza, na pierwszém miejscu postawić należy Pappusa z Aleksandryi, który żył w czwartym wieku po Chrystusie. Matematyczne dzieło jego, noszące nazwę zbioru (συναγωγή), wydane w łacińskim przekładzie Kommandurosa w 1588, niedawno zaś w doskonałém opracowaniu Hultscha, z przekładem łacińskiém i objaśnieniami, zawiera w skróceniu treść ważniejszych dzieł matematycznych, będących wówczas w użyciu, z wyjaśnieniami i dopełnieniami, w których zawiera się sporo nowych i pięknych twierdzeń. Twierdzenia te uważa Chasles (Traité de géométrie supérieure, str. 561) za zaczątek dzisiejszéj, nowszéj, tak zwanéj syntetycznéj gieometryi. Dzieło Pappusa składało się z ośmiu ksiąg; pierwsza nie doszła nas; druga, zachowana tylko w części, podaje metodę mnożenia Apolonijusza. W trzeciéj są cztery rozprawy: jedna o wyszukiwaniu dwóch średnich proporcyjonalnych między danemi dwiema długościami według metod Erastotenesa, Nikomedesa, Herona i samego Pappusa; druga, o średniéj arytmetycznéj, gieometrycznéj i harmonicznéj; trzecia, o pewném twierdzeniu Euklidesa, odnoszącém się do linij wewnątrz trójkąta, czwarta o wpisywaniu w kulę wielościanów foremnych. W księdze czwartéj znajdujemy: twierdzenia o poprzecznych w kole, zadanie o kole stycznémi do trzech kół danych zewnętrznie, twierdzenia o spiralnéj Archimedesa, konchoidzie Nikomedesa, o kwadratycy (quadratix), rektyfikacyi koła, oraz zadania, dające się rozwiązać przy pomocy powyższych krzywych. Księga piąta traktuje o figurach równo-obwodowych i równo-objętościowych; szósta zawiera ułatwienia dla studyjujących dzieła astronomiczne. W średniéj są twierdzenia, odnoszące się do miejsc gieometrycznych, a więc do „Danych" i „Poryzmów" Euklidesa. Ósma wreszcie księga zawiera interesujące zagadnienia mechaniczne.

Rzymianie nie mieli szczególnego uzdolnienia do abstrakcyjnych badań gieometrycznych i uprawiali głównie praktyczną sztukę mierniczą, do któréj naturalnie potrzebnemi były wiadomości z gieometryi elementarnéj. Wiadomości te rzymscy miernicy (agrimensores) czerpali ze źródeł greckich, prawdopodobnie z dzieł Herona aleksandryjskiego.

Żadném oryginalném odkryciem w gieometryi, mającém naukowe znaczenie, naród rzymski pochlubić się nie może. Wieki średnie również nie dały nic czystéj nauce gieometryi. Wiadomości z gieometryi obcemi być wówczas nie mogły, przynajmniéj w takim zakresie, w jakim są niezbędne dla architektury; liczne świątynie, w wiekach średnich stawiane, świadczą o talencie i pewnéj wiedzy ich twórców. Rozpowszechniano téż, jak to zobaczymy niżéj, wiadomości gieometryczne po szkołach, w zakresie jednak niezmiernie szczupłym; o świetnych rezultatach badań greckich gieometrów nie wiedziano wcale. Jedni arabowie, a za nimi żydzi, uprawiali z zamiłowaniem matematykę i astronomiją i skrzętnie gromadzili i chronili od zniszczenia szczątki wiedzy greckiéj oraz zabytki nauki wschodniéj. W ciągu wieków od XII-go do XVI-go prawie dzieła arabskie były wzorami, na których kształcili się europejczycy. Źródła arabskie, dotąd jeszcze niezupełnie wyzyskane (Chasles, Traité etc. str. 56), są wielce ciekawe i rzucają dużo światła na stan wiedzy matematycznéj w wiekach średnich.

Boethius
Planudes
Rhabdas
Moschopulos

W wieku XV-ym a zwłaszcza w XVI-ym rozpoczyna się odrodzenie nauk matematycznych. Przekład łaciński Euklidesa znany był wprawdzie już wcześniéj, ale dopiero wynalazek druku mógł przyczynić się do rozpowszechnienia książek matematycznych. Na uniwersytetach włoskich, niemieckich i krakowskim, wykład gieometryi stał się powszechnym, a niektórzy matematycy jak Puerbach i Müller (Regiomontanus) przyczynili się do ułatwienia studyjów matematycznych. Nieśmiertelne dzieło Kopernika, zawierające ważne twierdzenia trygonometryczne, zaszczytne zajmuje miejsce w dziejach gieometryi (ob. niżéj). Właściwą jednak rewolucyją w gieometryi, a właściwie w całéj matematyce, sprawiły dopiero prace Viète'a i Descartesa. Viète (1540—1603) zajmował się trygonometryją sferyczną, oraz zadaniami konstrukcyjnémi z dzieł Apolonijusza; ale największą jego zasługę stanowi wprowadzenie liter do rachunków ilo-

Tycho Brahe
Van Ceulen

[illegible]

+ Regiomontanus: De triangulis omnimodis libri V. Norimbergae (1533) w fol. [illegible] pisane w 1463.

ściowych i stworzenie tym sposobem powszechnego narzędzia badań matematycznych, które nietylko rozwinęło i udoskonaliło analizę, ale i wpłynęło na znakomity postęp gieometryi w nowéj metodzie Descartes'a. Gieometryja analityczna Descartesa (1596—1650) zmieniła zupełnie oblicze wiedzy matematycznéj. Pomysł przedstawiania figur gieometrycznych za pomocą równań, wyrażających związek między współrzędnemi ich punktów, w odniesieniu do tak nazwanych osi współrzędnych, jest najwspanialszém zastosowaniem narzędzia, wprowadzonego do nauki przez Viète'a (Rys rozwoju gieometryi analitycznéj, znajdzie czytelnik w dziele d-ra Wł. Zajączkowskiego: „Gieometryja analityczna.“ Warszawa, 1884). Dzieło, w którém Descartes wyłożył swoje wielkie odkrycie, zawiera, oprócz wielu twierdzeń czysto-algiebraicznych, nowe twierdzenia o prowadzeniu stycznych do wszystkich krzywych gieometrycznych, które to zadanie starożytni umieli rozwiązywać tylko dla niektórych krzywych. Rozwiązanie tego zadania stanowiło niejako wstęp do rachunku nieskończonościowego.

Doniosłe znaczenie w historyi gieometryi wyższéj mają badania Fermata, Robervala, Cavalieri'ego, Desargues'a, Pascala, dotyczące teoryi linij krzywych, a zwłaszcza stożkowych; wprowadziły one do nauki wiele nowych twierdzeń z dzisiejszéj gieometryi syntetycznéj, które przeszły następnie do wykładów elementarnych. Wiek XVII-ty był w ogóle najbogatszym pod względem odkryć matematycznych; najwyższą sławą, oprócz wyżéj wymienionych, szczycą się w nim: Kepler, Huyghens i Newton, którzy, odznaczywszy się znakomitémi odkryciami w astronomii i fizyce, pozostawili ślady twórczości swojéj i w gieometryi. Kepler (1571—1680) rozwinął piękne badania Archimedesa nad sferoidami i konoidami; Huygensowi (1629—1695) zawdzięczamy teoryją krzywych rozwiniętych, oraz siły odśrodkowéj, które umożebniły Newtonowi (1642—1720) wyjaśnienie ruchu planet za pomocą siły przyciągania w sławném dziele: „Principia

Traité des indivisibles, Paris 1693
Cavalieri Geometria indivisibilibus
Bononiae 1615

philosophiae naturalis mathematica" (1687). W dziele tym używa Newton metod dowodzenia, ułożonych na wzór metod starożytnych gieometrów. Prócz tego ogłosił Newton prace, odnoszące się do dziedziny czystéj gieometryi, a mianowicie do teoryi linij krzywych trzeciego rzędu. Rówieśnik Newtona, Halley (16561—724), należy do najgłębszych znawców gieometryi starożytnéj. Znalazłszy manuskrypt arabski dzieła Apolonijusza: „De sectione rationis"; w gorącéj chęci poznania téj pracy, mimo licznych zajęć astronomicznych, bierze się do nauki języka arabskiego i przekłada Apolonijusza na język łaciński. Z hebrajskiego znów wydaje: „Sphaerica" Menelausa. Inny uczony angielski Maclaurin (1698—1746), znany z prac w dziedzinie analizy, napisał: „Gieometryją organiczną", oraz traktat o krzywych trzeciego rzędu. Robert Simpson (1687—1768) wydał sławny traktat o poryzmach, odtworzył dzieło o miejscach płaskich, oraz dwie księgi dzieła: „De sectione rationis" Apolonijusza; on téż przygotował (lubo nie wykończył) edycyją: „Collectanea mathematica" Pappusa. Dzięki tym uczonym, prace gieometrów greckich stały się znanemi w Europie.

W wieku XVIII-ym wsławili się następujący uczeni: Clairaut (1713—1761) zastosował rachunek wyższy do badania linij krzywych w przestrzeni; Euler (1707 — 1783) wzbogacił naukę pierwszorzędnemi odkryciami, napisał klasyczne podręczniki; w dziedzinie gieometryi elementarnéj, upamiętnił nazwisko swoje twierdzeniem, wyrażającém związek między liczbą ścian wierzchołków i krawędzi w wielościanach, w dziedzinie zaś gieometryi wyższéj badaniem krzywizny powierzchni, klasyfikacyją powierzchni 2-go rzędu i t. p. Monge (1746—1818) jest twórcą nowéj gałęzi gieometryi, zwanéj gieometryją wykreślną, albo opisową. Odkrycie to, jak i „Gieometryja położenia" Carnota (1753—1823) wkracza już w dziedzinę obecnego stulecia.

Zadaniem gieometryi wykreślnéj jest oznaczenie postaci, położenia i wielkości brył gieometrycznych za pomocą innych figur gieometrycznych, na powierzchni lub na płaszczyźnie. Początki tego sposobu badania figur znajdujemy już u Desargues'a, ale dopiero Monge zbudował prawdziwą umiejętność, wprowadziwszy badanie figur za pomocą ich rzutów na dwie płaszczyzny wzajem prostopadłe i rozwinąwszy szczegółowo metody, za pomocą których od figur można przejść z łatwością do ich rzutów i odwrotnie. Mała liczba łatwych operacyj graficznych wystarcza do zastosowań téj metody, podobnie, jak znajomość czterech działań arytmetycznych, wystarcza do rozwiązywania zagadnień arytmetycznych. Tym sposobem gieometryja wykreślna, utworzona głównie dla potrzeb techniki i sztuki, staje się zarazem użyteczną do zagadnień czysto-gieometrycznych i wstępuje w związek z innémi badaniami, dotyczącémi położenia figur, a więc z gieometryją syntetyczną. Nauka gieometryi wykreślnéj uprzystępniła bliższe poznanie różnych familij powierzchni krzywych, zastępując często trudne do wykonania modele; dała naukowe podstawy rysunku, znalazła zastosowanie w perspektywie, konstrukcyi płaskorzeźb, teoryi cieniów, kamieniarce i ciesiołce, stała się tym sposobem jedną z najużyteczniejszych umiejętności, któréj zasady i w szkole średniéj znaleźć mogą należne sobie miejsce.

Prace wspomnionego wyżéj Carnota, mają za przedmiot wprowadzenie do metod gieometryi starożytnych tych uogólnień, jakie wprowadziła algiebra do zagadnień arytmetycznych. Carnot stara się wykazać, że dowodzenie dane dla stanu dość ogólnego figury winno wystarczyć dla przypadków szczególnych i pokazuje, jak przez zmianę znaku w wyrazach wzoru, dowiedzionéj dla danéj figury, otrzymujemy wzór dla figury, różniącéj się położeniem względném niektórych części. Własność ta nazwana korelacyją figur podniesioną została późniéj przez Ponceleta do t. zw. zasady ciągłości. Za pomocą swéj metody dowiódł Carnot z nadzwyczajną prostotą wielu pięknych twierdzeń o stożkowych. W gieometryi Carnota znajduje się pomysł do nieznanéj wówczas umiejętności, pośredniéj między gieometryją, a mechaniką, a która nosi nazwę cynematyki (kinematyki) lub foronomii. Za twórcę pomysłu téj umiejętności uważany jest téż Ampère (1775—1836); naszém jednak zdaniem pierwszeństwo pod tym względem, obok Carnota, należy się matematykowi polskiemu Hoene-Wrońskiemu (obacz niżéj). Dzieła Monge'a i Carnota najwięcéj przyczyniły się do rozwoju gieometryi we Francyi i w innych krajach. Z pomiędzy innych uczonych francuskich, którzy w umiejętności téj położyli wielkie zasługi, wymienimy najprzód Ponceleta (1788 — 1818), autora traktatu o własnościach rzutowych figur (Traité des propriétés projectives des figures, 1822), stanowiących jedno z najpiękniejszych dzieł naszego stulecia. Podstawą tego traktatu jest teoryja poprzecznych. Znajdujemy tu piękną teoryją biegunowych, metodę przekształcania figur trójwymiarowych, analogiczną do perspektywy dla figur płaskich i t. p., nie mówiąc już o wielu pomysłach ogólnych wielkiego znaczenia.

Z pomiędzy późniejszych gieometrów francuskich, Chasles (1793—1883), zasłużył się nauce gieometryi i jéj dziejom klasyczną pracą p. t. „Aperçu historique sur l'origine et le devéloppement des methodes de géométrie“ (1837) w któréj przedstawia w sposób nadzwyczaj interesujący prace gieometrów: starożytnych i nowożytnych, podnosi wysokie znaczenie badań czysto gieometrycznych, a w notach daje mnóstwo najpiękniejszych zastosowań metod dawnych i nowych. W rozprawach: „O dwóch zasadach ogólnych nauki“, „O dwoistości i homografii“, wyprowadza z zadziwiającą elegancyją wiele pięknych i nowych związków gieometrycznych; w dziełach: „Traité de géométrie supérieure“ (1852) „Traité des sections coniques,“ daje systematyczny wykład umiejętności, oparty na zasadach wygłoszonych w powyższych rozprawach i notach. W Niemczech znakomity matematyk Gauss (1777—1855) podał nową teoryją krzywizny powierzchni, wypowiedział nowe poglądy (po jego śmierci dopiero ogłoszone) o zasadach gieometryi; Möbius (1790—1868) stworzył nowy rachunek barycentryczny (1826), w którym położenie punktu na płaszczyźnie odnosi się do trzech punktów zasadniczych i przy pomocy tego nowego rodzaju współrzędnych przeprowadza badanie utworów gieometrycznych. Jemu też zawdzięcza nauka ogólne pojęcie pokrewieństwa gieometrycznego. Plücker (1801—1868) dziełem: „Analytisch-geometrische Entwickelungen" (1828), rozpoczyna nową erę gieometryi analitycznéj, która od téj chwili operować może niejako wprost samymi utworami, podobnie jak gieometryja syntetyczna.

Najważniejsze w dziedzinie gieometryi są prace Steinera (1796—1863), którego dzieło: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" postawiło autora w rzędzie największych gieometrów naszego wieku. W dziele tém wykłada autor własności zasadnicze utworów gieometrycznych, które stanowią zarodek wszystkich twierdzeń, poryzmów, oraz zadań gieometryi; odkrywa, wyrażając się własnemi jego słowy, organizm, przy którego pomocy związane są najróżnorodniejsze zjawiska świata przestrzennego. W piękném twierdzeniu, że stożkowa może być uważana, jako utworzona przez przecięcie dwóch pęków kolinearnych (rzutowych) i w odpowiadającém mu twierdzeniu dualném, widzi on tę walną zasadę, z któréj najpiękniejsze własności stożkowych rozwijają się prawie, jakby w zabawie. Potrzeba tylko kombinacyj najprostszych twierdzeń, żywéj fantazyi gieometrycznéj, by wyprowadzić stąd całe bogactwo prawd gieometrycznych. Do klasycznych prac uczonych niemieckich należy: „Gieometryja położenia" v. Staudt'a (1847), która wskazała czysto-syntetyczne metody badania utworów gieometrycznych, takaż gieometryja Reye'go (1860), Clebscha odczyty o gieometryi (1876) i t. d.

Do wysoce oryginalnych i stanowiących epokę w nauce należy wspomniana wyżéj nauka rozciągłości (Ausdehungslehre, 1844 i 1862) Grassmanna (1809—1878). Nie jestto właściwie, jak już wspomniano, czysta gieometryja, lecz najogólniejsza umiejętność matematyczna, z któréj rozwinąć się daje analiza, gieometryja i mechanika. Umiejętność tę z wielkiém powodzeniem twórca jéj i jego nieliczni uczniowie stosowali do różnych pytań gieometryi; tak Schlegel na jéj podstawie napisał: „System der Raumlehre“ (1872—1875); nie jest ona wszakże uprawianą tak, jak na to zasługuje. Nauka, o tak zwanych kwaternionach, którą zawdzięczamy uczonemu angielskiemu Hamiltonowi (1847), stanowiąca właściwie tylko przypadek szczególny nauki Grassmanowskiéj, jest względnie bardziéj znaną. Nauka kwaternionów w wielu kwestyjach gieometrycznych okazała się narzędziem bardzo dogodném.

Mówiąc o postępie gieometryi, nie możemy pominąć i prac, mających na celu zbadanie podstaw gieometryi. O ile prace wyżéj wymienione bogaciły wiedzę nowemi faktami, metodami i teoryjami, o tyle prace nad podstawami gieometryi mają za zadanie rozjaśnić te trudności, jakie napotyka się przy budowie całego systemu. Podstawy gieometryi euklidesowéj dawały pobudkę do podobnego rodzaju dociekań. Już Robert Simpson, jak wspomnieliśmy wyżéj, zajmował się badaniem pewników gieometrycznych; po nim gieometra francuski Legendre (1752—1833) pracował nad reformą gieometryi elementarnéj, a mianowicie ugruntowaniem tych twierdzeń gieometryi euklidesowéj, które zdawały się nie posiadać dostatecznego uzasadnienia. Szczególniéj teoryja linij równoległych, wymagająca przybrania nowego pewnika, domagała się gruntownego opracowania. Te usiłowania Legendre'a nie doprowadziły jednak do rozjaśnienia trudności. Z tego powodu matematyk Łobaczewskij wpadł na myśl zbudowania systemu gieometryi bez postulatu o linijach równoległych gieometryi euklidesowéj. Jednocześnie Bolayi w tym samym kierunku pracował nad ugruntowaniem zasad gieometryi. Dzięki tym pracom, powstała gieometryja nie-euklidesowa, czyli urojona, któréj cechą zasadniczą jest to, że w niéj suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest mniejsza od dwóch kątów prostych. Badania te przez dłuższy czas wszelako pozostawały bez wpływu na rozwój nauki. Dopiero współczesne prawie badania Riemanna i Helmholtza nad podstawami gieometryi rzuciły nowe światło na ten przedmiot, wykazały z nadzwyczajną jasnością znaczenie pewników gieometrycznych, określiły istotę różnych gieometryj, i uogólniły wiele pojęć matematycznych. Badania te wkraczają zarazem w dziedzinę teoryi poznania; to też pobudziły one filozofów do nowego zastanowienia się nad teoryją przestrzeni, stanowiącéj podwalinę filozofii kantowskiéj. (John Stuart Mill (System logiki indukcyjnéj), Delboeuf, (Prolegomènes philosophiques de la géométrie), Girard (Memoire sur la géométrie), Schmitz Dumont (Die mathematischen Elemente der Erkenntnisslehre), Erdman (Die Axiome der Geometrie), Wundt (Logik) i t. d. poświęcili przedmiotowi temu rozległe i ważne prace), a najbardziéj wpłynęły na rozwój gieometryi, która wzbogaconą została nowémi odkryciami Beltrami'ego, Frischaufa (Die absolute Geometrie), Kleina (Ueber die Nicht-Euklidische Geometrie), Killinga (Die Nicht-Euklidische Raumformen), Clifforda, Segre'go i wielu innych. Prace te przyczyniły się do postępu gieometryi elementarnéj, która, dzięki im, powoli uwalnia się z więzów gieometryi euklidesowéj.

W powyższym krótkim zarysie historycznym mieliśmy głównie na widoku gieometryją elementarną i pokrewne jéj dziedziny gieometryi wyższéj; wspomnimy tu tylko, że w drugiéj zwłaszcza połowie bieżącego stulecia badania gieometryczne uczyniły postęp znakomity. Teoryja linij krzywych (Plücker, Jacobi, Salmon, Cayley, Cremona, Hesse, Steiner, Chasles, Clebsch, Brill, Nöther, Halphen i inni), teoryja powierzchni (Darboux, Sturm, Affolter, Zeuthen, Kummer, Beltrami, Laguerre i i.), teoryja odwzorowywania jednych powierzchni na drugich (Gauss, Magnus, Cremona, Cayley, Clebsch, Klein i i.) nowa gałąź gieometryi poświęcona badaniu punktów osobliwych w trójkącie (Brocard, Lemoine i inni) i rozmaite inne teoryje i metody gieometryczne, których tu wymieniać nie możemy, posunęły gieometryją daleko poza granice, jakie zakreśliły jéj badania gieometrów greckich. Szczegóły znajdzie czytelnik we wspomnianém dziełku Gino Loria. Gieometryja jest obecnie wielką i bogatą umiejętnością, któréj studyja wymagają lat całych i zupełnego oddania. Na gieometryją elementarną odkrycia nowożytne oddziałały w pewnym stopniu; ale gieometryja szkolna pozostaje jeszcze prawie wyłącznie w granicach gieometryi euklidesowéj. Czy, i o ile granice te w szkole przekroczyć się dadzą, rozpatrzymy w dalszym ciągu niniejszéj pracy.

---

Przechodząc od historyi gieometryi, jako wiedzy, do historyi nauczania tego przedmiotu, zauważymy przedewszystkiém, że stan danego przedmiotu w szkole rzadko kiedy odpowiada stanowi nauki współczesnéj, gdyż odkrycia naukowe powoli tylko i to nie bez trudności dostają się do szkoły. Tak było dawniéj, tak bywa w znacznéj części i dzisiaj. Historyja pedagogiki zbiera jeszcze dotąd materyjały, na podstawie których można będzie odtworzyć z czasem dokładny obraz historyczny nauczania gieometryi. Na zasadzie danych dotychczasowych z pewnością twierdzić wolno, że w wiekach średnich zapomniano o pięknéj dewizie Platona i gieometryi uczono bardzo niewiele; zresztą piękna spuścizna gieometrów greckich przez długie wieki nie była znaną. Zaniedbywano matematykę nietylko w szkołach niższych i średnich, ale i w uniwersytetach. Tak nazwane „quadrivium“ obejmowało arytmetykę i gieometryją, muzykę i astronomiją w najskromniejszym zakresie; kompendyja ówczesne dawały raczéj poznać wiedzę ich autorów,

Quintilian (Institutiones oratoriae, porów. Baum. Pedagogik): "Von der Mathematik ist die Kenntniss der Zahlen jedem nothwendig, aber auch Figuren oder Linienwissenschaft kommt oft in Prozessen vor und die strenge Ordnung in dieser Wissenschaft, das mathematische Beweisen hat etwas sehr Bildendes"

i astrologiaj

niż stan nauczania w szkołach. W VIII-ym wieku słynął w Anglii, jako uczony i nauczyciel, Beda Venerabilis, którego dzieła, wydane drukiem w Paryżu, 1554, i potém niejednokrotnie przedrukowywane, poświęcone były przeważnie kosmologii, kosmografii i chronologii i służyły przez długi czas, jako źródło wiedzy matematycznéj. Zasługi w sprawie rozpowszechnienia téj wiedzy położył również znany Alkuin (736—804), który lubo przeważnie zajmował młodzież arytmetyką, nie zaniedbywał jednak w wykładzie swoim prostych wiadomości gieometrycznych, potrzebnych zresztą wówczas do nauki gieografii, którą nie zawsze odróżniano od gieometryi i kosmografii. To pomieszanie nauk i pojęć wprowadził Marcianus Capella, Filozof w V-go wieku autor powszechnie używany do nauki w IX-ym i X-ym wieku. Najważniejszym przedstawicielem nauki gieometrycznéj w końcu wieku X-go był Gerbert, późniejszy papież Sylwester II-gi. „Geometria Gerberti“ (niektórzy badacze są zdania, że gieometryja, znana pod tym tytułem, nie jest dziełem samego Gerberta) zawierała ważniejsze pojęcia gieometryczne, twierdzenie o sumie kątów trójkąta, teoryją trójkątów pytagorasowych, rozmaite zadania gieodezyjne, kwadraturę koła, kubaturę kuli i t. p. Treść jéj zatém była dość obfitą; trudno jednak przypuścić, aby w owych czasach podobne wiadomości mogły rozpowszechniać się szybko; prawdopodobnie więc zakres gieometryi w większości szkół ówczesnych był niższym od zakresu gieometryi Gerberta. Uprawiana była matematyka u arabów i żydów średniowiecznych, którzy wydali sporo prac, poświęconych gieometryi. Żywszy wszakże ruch na polu nauczania gieometryi rozpoczyna się od poznania oryginalnych dzieł greckich. Euklidesa przekłada na język łaciński Adelard z Bath (około 1200) Almagest Ptolemeusza-Gerhard z Kremony (1114—1187) i t. d. W XIII i XIV w. studyjowano już gieometryją z samego Euklidesa, ograniczając się wszelako na cząstce całego dzieła. Z dowodzeniami twierdzeń nie zadawano sobie wielkiego starania;

trudniejsze dowodzenia opuszczano lub zastępowano objaśnieniami praktycznémi. Duch gieometrycznéj ścisłości, tak świetnie panujący w dziełach greckich, nie wstąpił jeszcze do przybytków nauki nowszéj. Zresztą i teraz oddawano się więcéj astronomii, któréj wykład składał się z dwóch części: z nauki o sferze i z teoryi planet. Astronomii uczono powszechnie według dziełka Sacrobosco (z XIII wieku) które miało zupełny monopol we wszystkich krajach ówczesnéj Europy.

W wieku odrodzenia matematyka pozyskuje wysokie uznanie w uniwersytetach i od téj pory gieometryja Euklidesa jest prawie zawsze stałym przedmiotem wykładowym we wszechnicach, w zakresie wszakże niższym od dzisiejszego zakresu nauki téj w szkołach średnich. Po za szkołą, rozumiano jednak znaczenie gieometryi w dziedzinie sztuki i rękodzieł. Sposobiący się na mechaników, budowniczych, malarzy i t. p. kształcili się obowiązkowo w zasadach gieometryi. Pomiędzy artystami słyną jako wielcy znawcy gieometryi Leonardo da Vinci (1452—1519) i Albrecht Dürer (1471—1528).

W XVI-ym wieku w gimnazyjach uczono tylko pierwszych początków gieometryi. Pedagog Johannes Sturm w gimnazyjum strasburskiém, w roku 1578, uczył arytmetyki w sekundzie, gieometryi zaś w prymie, t. j. w najwyższéj klasie gimnazyjalnéj; nauka gieometryi ograniczała się na niektórych twierdzeniach z pierwszéj księgi Euklidesa (porówn. Schmid. Encyclopädie der gesammten Erziehungs und Unterrichtswesens. Artykuł: Mathematik). Okazuje się, że w owych czasach nie rozumiano jeszcze należycie pedagogicznego znaczenia gieometryi w wychowaniu młodzieży. W najznakomitszym przedstawicielu pedagogiki [1592-1671 w wieku XVII-ym, Komeńskim (Wielka dydaktyka (1628)), znajdujemy następujące uwagi o znaczeniu matematyki. Mówiąc o planie szkoły średniéj (łacińskiéj) żąda Komeński wprowadzenia arytmetyki i gieometryi, jako przedmiotów ważnych

Melanchton był autorem książek w arytmetyce i geometryi (Hausmann 17) Zwingli (1524) (Hausmann 20): „Bei Mess- Rechen- und Tafelkunst ist Kenntniss von grossem Nutzen, die Nichtkenntniss gereicht zu grossem Hinderniss, aber um ihrer selbst willen sie treiben wäre gefährlicher Müssiggang"

Ludwik Vives (Hol. w Valencia, um. 1540) De disciplinis 1531).

Szkoły jezuickie (Ratio et institutio studiorum societatis Jesu 1599, Baumann 23 twierdzi, że szkoły jezuickie zaniedbywały matematykę) Ratio została [illegible] w roku 1832 przez Roothaan nietylko praktycznie, ale i dla tego, że te nauki bardziéj od innych pobudzają umysł do myślenia. Zastanawiając się tu nad tém, czy matematyka za przykładem starożytnych ma być dawaną przed naukami przyrodniczemi, mówi: „Co do klasy matematycznéj, powstaje wątpliwość, czy ona ma następować po klasie przyrodniczéj (fizycznéj), czy poprzedzać tę ostatnią. Starożytni zaczynali wprawdzie od rozważania rzeczy przy pomocy studyjów matematycznych i Platon chciał, aby nikt nie znający gieometryi nie odwiedzał jego akademii. Przyczyna tego jest jasną: umiejętności matematyczne mają do czynienia z liczbami i wielkościami i dlatego są łatwiejsze i pewniejsze, wpływają na koncentracyją i rozwój wyobraźni, wreszcie uzdalniają pobudzają do innych rzeczy, bardziéj odległych od poglądu zmysłowego. Jestto w ogólności prawdziwém, ale na jedno muszę zwrócić uwagę: 1) poleciłem, aby już w szkole ludowéj ćwiczono zmysły i pobudzano umysł i to nietylko za pomocą przedmiotów zmysłowych, ale i za pomocą starannie pielęgnowanéj nauki rachunku; naszych uczniów nie można więc w ogóle uważać jako wprost nieświadomych gieometryi; 2) moja metoda postępuje zawsze stopniowo; nim więc dochodzi się do wyższego uważania wielkości, wprowadza się nauka o rzeczach konkretnych, będąca stopniem do owych rzeczy abstrakcyjnych, które należy subtelniéj rozważać; łączę z nauczaniem matematyki niektóre rzeczy z rękodzieł, których łatwe i dobre poznanie jest niemożliwém bez nauki o rzeczach naturalnych; te muszą poprzedzać tamte.“ Czego mianowicie z matematyki uczyć każe Komenijusz w szkole średniéj nie dowiadujemy się z „Wielkiéj dydaktyki.“

Montaigne (†1592) Essais: (Logik, fysyka, geometry, retoryka.

Mimo wspaniałego rozwoju wiedzy matematycznéj, jaki znamionuje wiek XVII-y, wsławiony odkryciem gieometryi analitycznéj, oraz rachunku różniczkowego, matematyka, jak widzimy, słabém jeszcze cieszyła się uznaniem w systemie wychowania. W pierwszéj połowie XVIII-go wieku nie o wiele było lepiéj; dopiero pod koniec ubiegłego i na począt-

Locke Some thoughts concerning education 1693 przedewszystkiem francuski, holenderski i niemiecki. (Baumann 81): „Geometrie werde nicht über den ersten sechs Büchern Euklids getrieben (1/ Die Physik lerne man aus Newton).

Carnot, Poncelet, Dupin
Arago
École polytechnique
Conservatoire des arts et métiers



ku bieżącego stulecia matematyka zajęła w szkole należne jéj stanowisko. Pod tym względem Francyja i Polska wyprzedziły inne kraje. O nauczaniu gieometryi w Polsce mowa będzie niżéj; tu zaś wspomnimy, że we Francyi w końcu ubiegłego stulecia cały szereg znakomitych matematyków pracował nietylko nad rozwojem wiedzy matematycznéj, ale i nad podniesieniem matematyki w szkole (Lagrange, Lacroix, Monge, Bézout i inni). Reforma wychowania narodowego stawia matematykę na jedném z pierwszych miejsc. D'Alembert w artykule: „Collège“ w Encyklopedyi, wyraża życzenie, aby chłopcy wcześnie zaczynali naukę gieometryi. Od matematyki oczekują niektórzy odrodzenia narodowego, w niéj widzą podstawę wiedzy i sztuki. Na czele znakomitéj „Gieometryi wykreślnéj“ Monge'a, czytamy: „Dla uwolnienia narodu francuskiego od zależności przemysłowéj od obcych, należy przedewszystkiém skierować wychowanie narodowe ku poznaniu przedmiotów, wymagających ścisłości, t. j. matematyki, a zwłaszcza gieometryi.“ Obok dzieł przeznaczonych dla wyższych studyjów, wychodzi mnóstwo doskonałych podręczników do nauczania średniego, które wkrótce stają się znanemi poza granicami Francyi. Dobry układ, nadzwyczajna jasność i powab wykładu, oto nieporównane zalety podręczników francuskich. Dzięki dobrym nauczycielom i znakomitym książkom, podnosi się poziom nauczania w szkołach i kurs matematyki elementarnéj zawiera już nietylko arytmetykę, algiebrę elementarną, planimetryją, stereometryją, trygonometryją płaską, ale często trygonometryją sferyczną, gieometryją wykreślną, oraz zasady gieometryi analitycznéj.

W Niemczech i w Austryi na początku tego stulecia, matematyka pozyskała również zaszczytniejsze, niż dotąd, miejsce w planie wychowania szkolnego, a zwłaszcza po otwarciu szkół realnych, w których matematykę obszerniéj, niż w szkołach klasycznych wykładać zaczęto. Znakomity postęp nauk matematycznych w Niemczech w ostatnich cza-

pierwszy raz nazwę szkoły realnej napotykamy w pismach Semmlera z r. 1738 (ze zbioru Franckego)

müssen sich der Naturbeobachtung und überhaupt der Erfahrung anschliessen, um Eingang in den Gedankenkreis des Zöglings zu bekommen.

sach przyczynił się do podniesienia znaczenia tego przedmiotu w szkole. Mimo to, uczeni i pedagodzy-matematycy nie są dotychczas zadowoleni z obecnego stanowiska matematyki w szkole. Pojęcie o ważności tego przedmiotu powiada (Schellbach: Ueber die Zukunft der Mathematik, 1887) nie przenikło dość głęboko do sfer inteligentnych w Niemczech, skoro niedawno na jedném z publicznych posiedzeń na sejmie odezwał się głos, że matematyka została zaprowadzoną w gimnazyjach po to tylko, aby szpecić abituryjentom świadectwa dojrzałości; ścisły klasycyzm gimnazyjów niemieckich nie pozwala dotąd na należyte postawienie w nich nauk matematyczno-fizycznych. W wielu jednak zakładach naukowych w Niemczech, matematyka wykładaną jest gruntownie przez wybornych nauczycieli, literatura zaś matematyczno-pedagogiczna, a zwłaszcza gieometryczna, bogatą jest we wzorowe podręczniki dla wszystkich stopni nauczania.

W Anglii wykład gieometryi jest bardzo niejednostajny: w jednych szkołach ogranicza się na mechaniczném prawie uczeniu się Euklidesa, w innych sięga do gieometryi nowożytnéj i do mechaniki. Podręczników, zalecających się wysokiemi zaletami pedagogicznemi jest wiele. W innych krajach europejskich zakres wykładu gieometryi niewiele różni się od zakresu téj nauki we Francyi i w Niemczech. W szczegóły tu wdawać się nie możemy.

# ROZDZIAŁ II.

## O postępach i nauczaniu gieometryi elementarnéj w Polsce.

W Polsce gieometryja była uprawianą i wykładaną od dość dawnych czasów; okaże to się z poniższego zarysu, w którym postaramy się zawrzéć obraz postępu wiedzy gieometrycznéj w kraju naszym. I tu główną uwagę poświęcimy gieometryi elementarnéj, odsyłając czytelnika, interesującego się historyją gieometryi analitycznéj w Polsce, do wspomnianego już wyżéj zarysu d-ra Wł. Zajączkowskiego. Uczono u nas prawdopodobnie gieometryi w szkołach, tak zwanych katedralnych i w parafijalnych, jakie istniały jeszcze przed założeniem akademii krakowskiéj, gdyż szkoły te, urządzone na wzór podobnych instytucyj w innych krajach, obejmowały trivium i quadrivium; w zakres zaś tego ostatniego wchodziła, jak wiadomo gieometryja. Niewiele wszakże w szkołach tych z matematyki uczono; z gieometryi podawano przypuszczalnie tylko najprostsze własności linij, kątów i figur płaskich, bez dowodów. Według jakich podręczników uczono? dojść trudno, gdyż żaden kodeks matematyczny z owego czasu nie doszedł rąk naszych. Wszakże, jeżeli młodzież polska już wówczas na naukę do Włoch i Paryża jeździła; do szkół zaś polskich sprowadzano zakonników cudzoziemców: niepodobna przypuścić, jak to słusznie twierdzi Łukaszewicz (Historyja szkół w Koronie i wielkiém Księstwie litewskiém, tom I, 18), by ten, lub ów kodeks matematyczny nie dostał się do szkół polskich. Może tym sposobem dostała się i do nas gieometryja Gerberta. Zresztą nauka astronomii wykładana wraz z astroogiją, wymagała, jak to wiadomo, pewnych wiadomości gieometrycznych. Podręcznik Sacrobosca był w Polsce znany i używany.

Otwarcie akademii w Krakowie przyczyniło się w wysokim stopniu do postępu nauk matematycznych. W piętnastém stuleciu słynęła akademija, jako siedlisko wiedzy matematycznéj w Europie. Wielce niekorzystne o niéj zdanie Łukaszewicza, jakoby zaniedbała nauki użyteczne, a karmiła młodzież scholastyką, teologiją, bredniami astrologicznemi i t. p. jest za surowe. Gdzież wówczas w Europie było inaczéj? Czyż uniwersytety w Pradze, Lipsku, Paryżu i t. p. mniéj zajmowały się scholastyką, astrologiją i teologiją, niż akademija krakowska? Była to epoka panowania wymienionych wyżéj nauk i żaden uniwersytet nie mógł się uchylać od hołdowania potężnemu obyczajowi. Na chlubę wszechnicy krakowskiéj powiedziéć można, że właśnie w końcu XV-go stulecia mniéj od innych uniwersytetów uprawiała astrologiją, górując natomiast uprawą umiejętności ścisłych, oraz duchem humanizmu, jakiego nie widziano gdzieindziéj (por. L. Prowe, Nicolaus Coppernicus, t. I, str. 125). Ze wszystkich stron tysiące słuchaczów zjeżdżało się do Krakowa dla korzystania z wykładów znakomitych nauczycieli. Przybywali nawet tacy, którzy w Niemczech, Francyi pozyskali byli stopnie naukowe. Już przed rokiem 1431 trzy księgi Euklidesa w akademii wykładano (Wiszniewski, Hist. liter. pols. t. 4, str. 180). Katedra astronomii w Krakowie, według statutu z roku 1449, obejmowała: „Euclidem, perspectivam, musicam et theoricas planetarum, tabulas Alphonsii praemisso algorismo munitiarum," do czego w roku 1475 dodano: „Tabulas resolutas Regiomontani, Eclipses. Confectionem Almanach singulis annis." Współczesne świadectwo o kwitnącym stanie matematyki i astronomii w Krakowie daje Hartman Schedel, który w dziełku: „Commentarioli de Sarmatia" (Norymberga, 1493) pisze między innemi: „Cracoviae est celebre gymnasium (ma to być akademia) multis clarissimis doctissimisque viris pollens, ubi plurimae ingenuae artes recitantur, studium eloquentiae, politices philosophiae ac physices, astronomiae tamen studium maxime viret. Nec in tota Germania ut ex multorum relatione satis mihi cognitum sit illo clarius repetitur (Prowe l. c. 137)." Wychowańców akademii krakowskiéj powoływano na katedry do obcych krajów. Tak np. magister Stefanus Rosinus był profesorem matematyki na uniwersytecie wiedeńskim (w 1501 roku). W rękopisach matematycznych z owego czasu znajdujemy traktaty gieometryczne, między innemi Jana z Olkusza: „Euclidis liber tertius" (1444 r.), Jana z Oświęcima: „Tres libri Euclidis" (1447), Marcina Polaka z Przemyśla, zwanego Marcinem królem: „Geometria Regis" (1450), zawierająca praktyczny wykład wiadomości gieometrycznych (p. Żebrawski) „Biblijografija piśmiennictwa polskiego z dziedziny matematyki i fizyki i t. d." 1873). Michał z Wrocławia nie pozostawił żadnego dzieła gieometrycznego, miał być jednak bardzo biegłym w nauce i wykształcił takiego ucznia, jakim był Wojciech z Brudzewa. Jan z Głogowy, autor dziełka: „Introductorium compendiosum in tractatum sphaerae Johannis de Sacrobosco" uważany jest przez Czackiego, jako pierwszy miernik w Polsce Andrzej z Łęczycy (O litewskich i polskich prawach, t. 2, str. 222). Sołtykowicz w dziele: „O stanie akademii krakowskiéj" za niezupełnie pewne to uznaje. Wszystkich wszelako ówczesnych matematyków przewyższył nauką i sławą wspomniany już Wojciech z Brudzewa (1445—1497), który w akademii wykładał rozmaite przedmioty, a między innemi arytmetykę, perspektywę, teoryją planet i t. p. i pozostawił rękopisy przeważnie astronomiczne. Z czasów pobytu Kopernika w Krakowie, Euklidesa wykładali: Leonard z Krakowa (1491-2), Bartłomiéj z Lipnicy (149 2-3), Stanisław z Kleparza (1493, 1494-5), Bartłomiéj z Oraczowa (1495).

Największą sławą akademii krakowskiéj i kraju jest wychowaniec akademii, Mikołaj Kopernik (1473—1543), twórca astronomii nowożytnéj. Ponieważ tu obchodzą nas przedewszystkiém zasługi Kopernika dla gieometryi, powiemy więc, że w nieśmiertelném jego dziele: „De revolutionibus orbium coelestium“ trzy ostatnie rozdziały księgi pierwszéj, a mianowicie: 12-ty, 13-ty i 14-ty poświęcone są trygonometryi. W rozdziale 12-ym p. t.: „O cięciwach w kole“, podaje Kopernik sześć twierdzeń i zagadnień, oraz tablicę cięciw, odpowiadającą dzisiejszéj tablicy wstaw. W rozdziale 13-tym: „O bokach i kątach w trójkątach“ zawierają się zasady trygonometryi płaskiéj. Rozdział 14-ty poświęcony jest trójkątom kulistym i zawiera zasady trygonometryi sferycznéj. Wyjątek z dzieła Kopernika, zawierający wymienione rozdziały, wyszedł przed wydaniem całego dzieła w r. 1542 p. t.: „De lateribus et angulis triangulorum etc.“ staraniem Retyka w Norymberdze. Poprzednikami Kopernika w trygonometryi, prócz wymienionych wyżéj gieometrów starożytnych: Hipparcha, Menelaosa i Ptolomeusza, byli matematycy niemieccy Puerbach i Regiomontanus. Dzieło tego ostatniego p. t.: „De triangulis omnimodis libri quinque,“ traktujące ten sam przedmiot, co powyższe dziełko Kopernika, wydaném zostało w r. 1533. Śniadecki Jan, idąc za Retykiem, utrzymuje (Rozprawa o Koperniku, 1802, dzieła Jana Śniadeckiego, 1837, tom II, 166—168). że Kopernik miał już swą pracę gotową, gdy wyszło dzieło Regiomontana, że więc sposób rozwiązania zagadnienia o wyznaczeniu trzech kątów trójkąta z trzech danych boków jego, który znajdujemy u Kopernika i u Regiomontana, pierwszy z nich podał niezależnie od drugiego. Istotnie, porównanie obu prac wykazuje (Prowe, l. c. t. I, część I, str. 487), że układ i wykonanie u Kopernika zupełnie jest różném, niż w trygonometryi Regiomontana, przyczém zauważyć należy, że rozdziały trygonometryczne w dziele o obrotach ciał niebieskich należą do najwcześniéj napisanych. Prócz tego, zasługę Kopernika stanowi to, że piérwszy ułożył tablicę siecznych i uprościł praktykę interpolacyi w rachunku funkcyj trygonometrycznych. Tym sposobem Kopernikowi należy się zaszczytne miejsce w dziejach gieometryi.

Ze śmiercią Kopernika kończy się u nas świetna karta prac naukowych i jednocześnie upadają nauki w akademii krakowskiéj, oraz w innych szkołach polskich. Tu już przyznać musimy słuszność Łukaszewiczowi, przynajmniéj w tém, co dotyczy stanu nauk matematycznych. Czystą wiedzę, która miała tak świetnych przedstawicieli, jak Brudzewski i Kopernik, przestano uprawiać w Polsce; katedry matematyki i astronomii nie mogą poszczycić się ani jedném nazwiskiem, znaném w dziejach nauki. Gieometryją zupełnie prawie zaniedbano, jak o tém świadczy kompetentny świadek, Stanisław Grzepski, profesor akademii krakowskiéj, żyjący w drugiéj połowie XVI-go stulecia. W dedykacyi do dziełka, o którém niżéj mowa będzie, znajdujemy u Grzepskiego ustęp taki: „To, co sobie ludzie wielcy, ludzie mądrzy tak bardzo ważyli, t. j. gieometryją, mówią u nas nizacz nie stoi, ani się tego tak pospolicie, jako inszych nauk uczymy. Odleciliśmy gieometryją ludziom prostym, nikczemnym, tak, że się nie obierają w niey jedno trochę ci, co rolę, albo imienie z naymu mierzyć zwykli: aczci y takowych u nas w Krakowie niema.“ Słowa te wypowiedziane były w Krakowie w lat kilkadziesiąt zaledwie od tego czasu, w którym Kopernik odbywał tam swoje studyja. Smutnym zaiste być musiał stan akademii krakowskiéj, po tak świetnych niedawno czasach. Nie umiano nietylko utrzymać związku z nauką, ożywiającą się na zachodzie Europy, ale nawet i tradycyi własnéj. Zbliżały się czasy reakcyi, która coraz silniéj gnębiła wszelką swobodę rozwoju nauk. Mimo to jednak przyczyniała się jeszcze akademija do szerzenia oświaty przez zakładanie szkół w rozmaitych miastach i dostarczanie szkołom tym nauczycieli.

Szkoły, z wyjątkiem protestanckich, pozostawały wyłącznie pod kierunkiem duchowieństwa, a uczono w niższych szkołach czytania, pisania, rachunków (działań na liczbach całkowitych), w wyższych zaś, prócz tego, łaciny, niekiedy greckiego i retoryki. O gieometryi nie zawsze znajdujemy wzmiankę; gdzieniegdzie przedmiotu tego uczono, naturalnie w bardzo szczupłym zakresie. Zresztą, jak wiemy, i w szkołach ówczesnych na zachodzie gieometryja szczególnéj łaski nie doznawała. W ogóle zakres nauczania w szkołach polskich nie musiał być zbyt rozległym, skoro reforma, jakiéj dla szkół, zwanych miejskiemi, domagał się Marycki (De scholis seu academiis libri duo, Cracoviae, 1555), nie sięgała daleko od wzorów z poprzedniego stulecia. Matematyki, według Maryckiego, uczyć ma nauczyciel, zwany cantorem, którego zadaniem główném było nauczanie muzyki i śpiewu. Autor nasz jest zdania, że w siedmiu naukach wyzwolonych należy młodzież ćwiczyć w ten sposób, by trzy pierwsze (gramatykę, dyjalektykę i retorykę), młodzież znała doskonale, cztery zaś pozostałe (arytmetykę, astronomiją, gieometryją i muzykę) o tyle, aby jéj obcemi nie były. Lecz, ile i czego z tych nauk, a zwłaszcza z interesującéj nas gieometryi uczyć należy? Marycki nie podaje, ograniczając się na planie nauk filologicznych, które były jego specyjalnością. (Porów. ks. Jeżowski. Wiadomość o życiu i pismach Szymona Maryckiego, w popisie konwiktu na Żoliborzu z r. 1825). Nie zaspakaja też ciekawości naszéj w tym względzie Frycz Modrzewski w swéj „Poprawie Rzeczypospolitéj,“ gdzie szkole poświęcił oddzielną księgę (wydanie Turowskiego, 1817, str. 310—331) i gdzie również matematyki od muzyki nie odróżnia. („Przydano też kantory, którzyby młodzieńce w nauce muzyki i w inszych naukach matematyckich ćwiczyli“ (l. c. str. 318). Petrycego przekład: „Polityki Arystotelesowéj“, Kraków 1601), wzbogacony licznymi dodatkami zastosowanymi do okoliczności krajowych,“ zawiera ustęp taki (Przydatek do ósmych ksiąg str. 345): „Nauki głębokie iedne są iako śrzodki, przez które dostawamy innych głębszych: drugie są iako końce, do których przez pierwsze dochodzimy. Naprzykład grammatika, dialektyka, rethorika, geometria y insze nauki są śrzodkami, abyśmy przez nie przyszli do głębszych iako do samey philosophiey, ktora jest iakoby końcem.“ Widać z tego ustępu, że doniosłość gieometryi czystéj dla badań naukowych Petrycy rozumiał, jakkolwiek w dalszym ciągu powyższego ustępu nie radzi ludziom, powołanym do rządzenia w Rzeczypospolitéj, zbytnio zagłębiać się w gieometryi.

Wydanie „Polityki“ przypadło już w czasie, w którym rozszerzać się począł w kraju wpływ jezuitów i szkół przez nich zakładanych. Nim do tego okresu przejdziemy, winniśmy poświęcić obszerniejszą wzmiankę pierwszéj gieometryi w języku polskim, przez wspomnianego wyżéj Stanisława Grzepskiego oryginalnie napisanéj. Wydana została w roku 1566 p. t.: „Geometria to iest miernicka nauka, po polsku krótko napisana z greckich y łacińskich ksiąg, naydziesz też tu iako naszy miernicy zwykli imienie na włoki albo na łany, item iugerum romanum iako wiele ma w sobie, albo co inszego wysokiego zmierzyć, albo dalekość iaką. Naprzykład kiedyby chciał wiedzieć, iako daleko do zamku przez błoto, albo przez wodę etc. Teraz nowo wydana roku 1566, w Krakowie, Łazarz Andrysowicz wybijał.“ Nie zakłada w niéj sobie autor napisania umiejętnego wykładu gieometryi, pragnie tylko obok podania wiadomości praktycznych, zachęcić do studyjów samego Euklidesa. Wyłożywszy w przedmowie wielkie pożytki gieometryi, tak ciągnie daléj: „Tego wszystkiego oni mądrzy ludzie przez geometrię dochodzili, nad którą niemasz pewniejszey, nieomylniejszey nauki, przeto ja, chcąc naród nasz ku tej nauce pobudzić, napisałem po polsku ty książki niewielkie. Pisałoć o tem ich przedtem dosyć, a zwłaszcza Euklides, starożytny autor grecki, w którym i dziś ludzie uczeni się kochają. Alem ja tu po prostu iako nałacniej mogło być pisał, aby każdy sam przez się wyrozumieć mógł." Istotnie, dziełko napisane jest jasno i przystępnie; zasługuje w niém na szczególną uwagę terminologija polska w wielu miejscach lepsza, niż w niektórych późniejszych książkach matematycznych. Nie wszystkie jednak wyrazy przekłada autor na polskie.

Na początku znajdujemy definicyje punktu, linii, (którą Grzepski nazywa „linea"), powierzchni („zwierzchność"), ciała („corpus" albo „hrubość"), linii „prostéj" i „krzywéj", płaszczyzny („równi"), linii równoległych („aequidistantes") kąta „prostego," ostrego („kończastego") i rozwartego („tępego"). Idą zatém ustępy: o „liniey, co ią zowią perpendykularem", gdzie podany jest sposób prowadzenia prostopadłéj do linii danéj. Dowodu na to Grzepski nie podaje, mówiąc tylko: „ażeby to tak było, tegoby się dowieść mogło, ale, y kromia dowodów, każdy na figurę patrząc, obaczy, że tak iest." Ustęp o figurach zawiera definicyje i rysunki trójkątów, które nazywa „klinami" i czworokątów, daléj figur „o pięci, sześci i więcéj węgłach," o których błędnie mówi „Żadna niemoże mieć równych kątów, aby nie miała y stron równych." Następują: określenie koła, figur wpisanych i opisanych, twierdzenia: o sumie kątów wewnętrznych w trójkącie; że w wielokątach, mających o jeden, dwa i t. d. więcéj, suma kątów wewnętrznych, zwiększa się o dwa, cztery i t. d. kąty proste. Dowód twierdzenia o sumie kątów w trójkącie jest niezupełny, bo opiera go Grzepski na twierdzeniu o linijach równoległych, którego nie podaje. W tymże rozdziale przechodzi do tego: „iakoby se naleść to y ukazać mogło iako wielki iest który plac" czyli do mierzenia powierzchni: kwadratu (gdzie jest także podany, bez nazwy jednak, szczególny przypadek twierdzenia Pytagorasa), prostokąta, równoległoboku, trójkąta, wielokąta i koła. Przy mierzeniu koła długość okręgu, t. j. „circumferentia" jest według niego tak wielka iako trzy diametry y siodma część diametra bez małego kęska", przytacza przybliżony sposób Durerusa (Dürera) i Forcyusa (?) zamiany koła na kwadrat. Resztę książeczki wypełniają ciekawe dla historyka wiadomości o miarach używanych w Polsce do pomiarów ziemi i o sposobach stosowanych przez mierników. Dowiadujemy się tu, że „koło za się miernicy naszy tak liczą: naprzód pół diametra wezmą, a potym sześć tych liczą na circumferencią to iest na obód, potym zasie pół średnicy mnożą". Miernicy tedy, mówi Grzepski, nie dobrze czynią..... a tak koła nie według naszych mierników masz mierzyć, ale według nauki, którąm wyszey napisał." Ustępy o mierzeniu wysokości, dalekości i głębokości" zawierają niektóre twierdzenia o podobieństwie trójkątów. O mierzeniu objętości ciał autor nie pisze, usprawiedliwiając się tém: „iż geometria jeszcze nigdy w polskim języku nie była, ani się jeszcze naszy takowym rzeczom przysłuchali, przetoby nierad przedłużał, ani zatrudniał, aby ci, co czytać będą, łacniey się wyprawić mogli, a wszakże, gdy się otrze naszym to o uszy, może się potyce około tego y to y co drugiego napisać, jeżeli Pan Bóg będzie raczył." Stanowi to niespożytą zasługę Grzepskiego, że naukę gieometryi przy pomocy języka ojczystego pierwszy rodakom uprzystępnił i żałować bardzo należy, że drugiéj zapowiedzianéj przez siebie książeczki nie wydał.

W XVII-ym wieku kolegija jezuickie szybko nabrały u nas rozgłosu, tak, że młodzież szlachecka, pomijając szkoły akademickie, przeważnie do jezuitów się garnęła. Skutkiem tego rozpoczęła się na polu nauczania niższego i wyższego konkurencyja wzajemna akademii krakowskiéj i zakonu jezuickiego, która jednak żadnéj ze stron na dobre nie wyszła. Nie szukali bowiem ani akademicy, ani jezuici przewagi w doskonaleniu szkół, w podnoszeniu w nich nauki, lecz w walkach o przywileje, o zyski materyjalne. Była to walka smutna, na któréj najbardziéj cierpiała oświata narodowa. Liczba szkół rosła, lecz bez przyczynienia się do postępu oświaty. Usiłowali niektórzy światli przewodnicy akademii, jak rektor Jan Brożek, zaprowadzić reformy zwłaszcza na wydziale filozoficznym, ale wycieńczona w walce z jezuitami akademija zdobyć się na te reformy nie mogła. Zakres wiadomości z matematyki, a specyjalnie z gieometryi w akademii udzielanych, był bardzo szczupły, jak to wnieść można z wykazu wykładów w wydziale filozoficznym z pierwszéj połowy XVII-go stulecia, z którego widać, że nauka gieometryi ograniczała się do Elementów Euklidesa, których nie wszystkie wykładano księgi (por. J. N. Franke: „Jan Brożek", str. 18). Jeszcze mniéj, albo wcale prawie nie uczono gieometryi w ówczesnych szkołach akademickich. Akademija wileńska i kolegija jezuickie nie stały pod tym względem wyżéj. Gieometryi uczono w nich według wzorów z poprzednich stuleci. Mamy pod ręką dokładnie zachowany rękopis łaciński z XVII-go stulecia, kursu jezuity, Oswalda Krygiera, według którego uczono, zdaje się, w kolegijum wileńskiém. Oswald Krygier, jak podaje Bentkowski (Historyja literatury polskiéj, tom II, str. 313—314), był profesorem matematyki w Wilnie i autorem kilku prac matematycznych drukiem ogłoszonych. Rękopis, o jakim mówimy, nie wydany jak się zdaje, drukiem, nosi tytuł: „Compendium mathematicarum disciplinarum," i zawiera wykład wszystkich umiejętności wówczas do matematyki liczonych. Umiejętności te klasyfikuje autor w następującéj tablicy:

1627. Jan Strauss Introductio ad Architectonicam utramque continens principia arithmeticae geometricae quibus instructus sit necesse, et studiosus cui ad studia praesertim architectonica accedere animus est. Królewiec, druk. Segebada, 8° min. str. 178, k. n. 12, rył. ... 1 tabl. ...

1648

- Matheseos objectum Quantitas
  - Abstracta
    - Arithmetica
    - Geometria
  - Concreta cum aliquo subjecto
    - Corpore
      - Immobili: Geodaesia
      - Mobili: Astronomia
      - Mobili-Immobili Geographia in plano vel globo
    - Qualitate
      - Visibili: Optica
      - Audibili: Musica

Zgodnie z tą tablicą po: „Tractatus arithmeticus," zawierającym krótki wykład czterech działań z liczbami całkowitemi i niektórych reguł, następuje obszerniejszy: „Tractatus geometricus", obejmujący definicyje, opisy figur, zadania, niektóre twierdzenia z Euklidesa (między innemi twierdzenie Pytagorasa), opis konchoidy. „Tractatus geodaesiae" zawiera opis niektórych narzędzi gieometrycznych, sposoby mierzenia odległości, wysokości i głębokości, podówczas używane, sposoby obliczania powierzchni kwadratu, prostokąta, kwadratu ukośnego, trójkąta, oraz koła (stosunek okręgu koła do średnicy przyjęty jako $^{22}/_{7}$), objętości prostopadłościanu i kuli. Inne części rękopisu, jako nie odnoszące się wprost do gieometryi, pomijamy.

W szkołach pijarskich, wówczas w Polsce zaprowadzonych, uczono gieometryi (Łukaszewicz l. c. I, 293), lecz w jakim zakresie i według jakiego dzieła, Łukaszewicz nie podaje. W szkołach socyjanów polskich uczono matematyki według książki Joachima Stegmana p. t.: „Institutionum mathematicarum libri duo," któréj księga druga zawierała gieometryją. Uczono również tego przedmiotu w szkołach kalwińskich, w szkołach braci czeskich, które należały do najlepszych w Polsce, wreszcie w szkołach luterskich w Prusach, które miały doskonałych nauczycieli matematyki, że tu wymienię Kekermana i Piotra Crügera. Uczono naturalnie i matematyki, w założonéj przez Jana Zamoyskiego, celem przeciwdziałania wpływowi jezuitów, akademii w Zamościu. W ustawach téj akademii w punkcie III: „O opisaniu nauk y ich pożytkach", wyliczone są: „matematyka, arythmetyka i geometrya" i określone w ten sposób: „Matematyka z dowcipnych ludzi ciekawości wynaleziona nauka, przez którą o rzeczach niebieskich y ziemskich możemy niejako powziąć wiadomości; ta dzieli się na arythmetykę, geometryą, astronomią, astrologią, chronografią, hidrografią, statykę, optykę, architektonikę, taktykę y inne." O gieometryi powiedziano: „Geometrya uczy rozmierzania pól y granic, lasów, budynków, gór, wód etc.; do rozgraniczenia potrzebna, do kondenscendyi prawnym osobliwie ludziom wielce pomocna, nietylko na karcie uczyć się, ale się też w polu praktyce pokazować będzie.“ Pokazuje się stąd, że miano tu głównie na względzie zastosowania praktyczne gieometryi do pomiaru i podziału gruntów; w jakim stopniu tego udzielano wiadomości teoretycznych, dokładnie nie wiemy; zależało to naturalnie w znacznéj części od wykładającego. W samych początkach byli w akademii wyborni profesorowie; matematyki nauczał znany uczony, Adrianus Romanus, późniéj akademija upadła. Z profesorów matematyki już w XVIII stuleciu najbardziéj znanym jest Stanisław Duńczewski, lecz bardziéj jako autor licznych kalendarzy, w których mieszczą się wiadomości z rozmaitych dziedzin wiedzy.

Wiek XVII, jak już powiedziano wyżéj, był pod względem odkryć matematycznych jednym z najpłodniejszych. We Francyi, Niemczech i Anglii wielcy uczeni pracowali nad rozszerzeniem granic wiedzy matematycznéj i stworzyli nowe zupełnie umiejętności, jak: gieometryją analityczną, rachunek różniczkowy i t. p. Do Polski wielki ten ruch naukowy nie przeniknął, a nasza ówczesna literatura matematyczna, obracająca się przeważnie w dziedzinie matematyki elementarnéj, na postęp, wiedzy nie wpłynęła. Nawet nauka Kopernika, astronomija, nie zdołała pozyskać dla siebie w kraju zwolenników i pracowników. Jeden tylko Jan Brożek (1585—1632) umiał należycie ocenić wielkość odkrycia Kopernikowego, któremu w pracach swoich należyty hołd oddaje. Brożek téż jest autorem kilku dziełek, którym należy się zaszczytne miejsce w historyi matematyki. J. N. Franke w dziele, wydaném na uczczenie trzechsetnéj rocznicy urodzin Brożka przez Akademiją umiejętności w Krakowie, podaje rozbiór wszystkich prac matematycznych naszego uczonego (Porównaj téż artykuł „Broscius“ w téj Encyklopedyi, tom II, str. 319—325, w którym według badań Frankego należy sprostować datę urodzenia Brożka). Dzieło gieometryczne Brożka p. t.: „Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum etc.“ (Gdańsk, 1652) zawiera oryginalne poglądy, doszące się do teoryi wielokątów gwiaździstych. Zasługi Brożka w tym kierunku streszcza J. N. Franke w sposób następujący: 1) On pierwszy wykazał, że między wielokątem o parzystéj liczbie wierzchołków istnieje zawsze jeden rodzaj, którego kąty czynią razem dwa proste; okazał zarazem prawdziwość tego twierdzenia tak dla wielokątów foremnych, jak i nieforemnych. Tą własnością wielokątów gwiaździstych on pierwszy się zajmował. 2) Podał sposób tworzenia różnych rodzajów wielokątów dla danéj liczby wierzchołków przez odpowiedni rozkład téj liczby; wyznaczył tym sposobem poraz pierwszy liczbę wielokątów o 7, 8, 14 i 15 wierzchołkach, chociaż mylnie zaliczył do nich figury nie będące wielokątami. Liczby transformacyi, przez Brożka podane, powiększone o jedność, dają tak zwany przez Poinsota rodzaj (espèce) wielokąta. 3) Podał nowy sposób tworzenia wszystkich wielokątów foremnych o téj saméj liczbie wierzchołków z jednego takiego wielokąta, zwany transformacyją, przyczém figury utworzone mają tę osobliwszą własność, iż są równoobwodowemi.

W témże dziele Brożka znajduje się sposób mierzenia kątów bryłowych za pomocą odpowiednich wielokątów sferycznych. Sposób ten jednak nie jest własnością Brożka. Brożek pozostawał w stosunkach z wielu uczonymi i był jedynym może z ówczesnych profesorów akademii, który doniosłe znaczenie badań naukowych pojmował.

Zaszczytne miejsce w dziejach matematyki w wieku XVII-tym u nas należy się Maciejowi Głoskowskiemu, autorowi dzieła p. t.: „Geometria peregrinans,“ wydanemu w roku 1643. Dzieło to jest właściwie wykładem gieometryi praktycznéj, to jest zbiorem zadań mierniczych takich, jak wynalezienie długości niedostępnéj linii, nakreślenie linii równoległéj do danéj tykami odznaczonéj, spuszczanie, prostopadłéj i t. d. Dzieło to opisał i zbadał również J. N. Franke wraz z Antonim Jakubowskim (Kraków 1878), przyczém wykazał, że Głoskowski, obeznawszy się w Holandyi z nowszymi postępami nauk matematycznych, z teoryją i praktyką logarytmów, z zastosowaniem ich do trygonometryi, z udoskonalonemi narzędziami mierniczémi, zamyślał za pomocą dziełka zaszczepić w kraju zamiłowanie do zajęć naukowych w dziedzinie gieometryi. On téż należy do uczonych, którzy pierwsi pracowali u nas nad wykonaniem mapy Polski. Dzieło: „Geometria peregrinans" było znane po za grani-cami kraju naszego. Sławny matematyk holenderski Franciszek Schooten korzystał z niego (jak wykazuje Franke) przy układaniu swéj książki: „Exercitationum mathematicarum libri quinque" któréj, księga druga w „Appendix simplicum problematum" zawiera zadania Głoskowskiego.

Na szczególną uwagę zasługuje dziełko Jana Tońskiego, profesora akademii krakowskiéj, p. t.: „Arithmetica vulgaris et Trigonometria rectilineorum, prout universae Geometriae practicae, aliisque Matheseos partibus, Geographiae Architectonicae, Gnomonicae etc. subservit. Ingolstadii, 1640, formatu 16-ki, 102 stronice tekstu i 182 stronice tablic trygonometrycznych, wydanie drugie) 1645). Zwięźle i jasno napisane, oraz praktycznie ułożone dziełko, zawiera najprzód: krótki rys arytmetyki (Arithmetica vulgaris, Pars prima: de integris, str. 1—23, Pars secunda de fractis, str. 23—27, Pars tertia: de integro-factis, str. 28—33), po którym następuje rozdział zatytułowany: „Fragmentum logisticae astronomicae" (str. 35—40), gdzie zawiera się rachunek stopni, minut i sekund, a następnie rachunek ułamków dziesiętnych (fragmentum logisticae decimalis). Na stronicach od 41-éj do 82-éj podany jest wykład trygonometryi prosto-linijnéj (Trigonometria rectilineorum) podzielony na trzy części. Część pierwsza: „De communibus trigonometriae principiis" zawiera: wykład najważniejszych własności trójkątów, określenia linij trygonometrycznych (inscriptarum); sinus rectus, sinus versus, sinus complementi, (nazwa cosinus jeszcze nie występuje) tangens, secans, tangens et secans complementi, nazw cotangens i co-secans niéma. Dla wyrażenia wielkości linij trygonometrycznych promień (sinus totus) podzielony jest na $10^7$ lub $10^{10}$ części równych i w takich jednostkach długości tych linij w tablicy są przedstawione. Tablica ta daje długości, odpowiadające kolejnym łukom, różniącym się o jednę minutę i postępującym od $0^0$ do $90^0$. Użycie tablicy jest opisane i na przykładach pokazane. Część druga trygonometryi: „De ratione laterum et angulorum trianguli“ zawiera rozwiązanie zagadnienia zasadniczego: „mając dane kąty trójkąta, znaleść stosunki boków kątom przeciwległych. Część wreszcie trzecia: „De praxi trigonometriae rectilineorum“ podaje rozwiązanie następujących zagadnień: 1) mając jeden bok trójkąta i dwa kąty, znaleść kąt pozostały i pozostałe boki. 2) mając dwa boki i jeden kąt, znaleść pozostałe dwa boki i kąt. 3) mając trzy boki trójkąta znaleść trzy kąty. Następują zatém specyjalne zadania, odnoszące się do trójkątów prostokątnych. Na stronicach od 88—102 zawarte są: „Problemata miscellanea“ w zastosowaniu do architektoniki, gieografii matematycznéj i gnomoniki. Dziełko Tońskiego może być uważane za jedno z najlepszych w swoim rodzaju w ówczesnéj literaturze europejskiéj.

Najważniejszém dziełem polskiego z tego okresu jest dzieło Stanisława Solskiego (1622 — 1701) jezuity, p. t.: „Geometra polski to jest nauka rysowania podziału przemieniania y rozmierzania linij, angułów, figur y brył pełnych.“ Część I-a, wydana w r. 1683, druga w 1686. W dziele tém autor, podobnie jak poprzednik jego Grzepski, nie zakłada sobie wcale umiejętnego traktowania gieometryi; idzie mu bowiem przedewszystkiém o przystępność i o zastosowania praktyczne, gdyż uważa za „najcelniejsze przedsięwzięcie praxes traktować.“ Tam gdzie okazuje się potrzeba dowodu, wskazuje Solski autorów, u których dowód ten znaleźć można. Księga I-a „Geometry“ podzielona jest na siedm tak nazwanych „zabaw“, w których po spisie terminów gieometrycznych i tak zwanych „sentencyj,“ t. j. pewników, następuje mnóstwo zagadnień, odnoszących się do linij prostych, okręgu koła, kątów, wielokątów, elipsy, hyperboli, paraboli i wężownicy; mowa tu jest też o linijach trygonometrycznych. Zagadnienia rozwiązuje autor często bardzo wielu sposobami, lecz dowodów, jak to zaznaczyliśmy, nie podaje. W zabawie 6-éj wraca Solski do samego początku i podaje „własności,“ t. j. twierdzenia o linijach, kątach, figurach płaskich i bryłach. „Na przeczytanie zabawy 6-éj, powiada, nie żałuj czasu. Jest to w geometryi, co dusza w ciele i iako ciało bez dusze ani widzi, ani słyszy, ani smakuie, ani czuie, tak też bez wiadomości własności linij, angułów y figur geometra do inwencyj praktycznych martwym będzie: y ieżeli co godnego podziwienia usłyszy, przeczyta, albo obaczy, bez gustu iako niewiadomy puści mimo się.“ Jak sam twierdzi, korzystał z Euklidesa, Clausiusa (? pewno Claviusa), Taqueta (jezuity, profesora w Antwerpii) i innych gieometrów. Zdaje się, że nie obcą mu była praca Huygensa „de circuli magnitudine.“ Żałować tylko należy, iż nie poszedł za Euklidesem pod względem porządku i systematyczności. Słusznie twierdzi Adryjan Krzyżanowski (O życiu uczoném Stanisława Solskiego, Warszawa, 1822) że od „zabawy“ 6-éj winien był zacząć Solski „Geometrę,“ a od téj cofając się dojść do pierwszéj i na téj zakończyć. Księga druga „Geometry,“ złożona z pięciu „zabaw,“ obejmuje gieometryją praktyczną, zawiera jednak rozmaite prawdy, należące do gieometryi teoretycznéj; dużo w niéj rzeczy, dowodzących pomysłowości autora; księga trzecia, z trzech „zabaw“ złożona, daje wiadomości z nauki o bryłach, o zegarach słonecznych i z arytmetyki. W sądzie o „Geometrze polskim“ można pójść za Krzyżanowskim, że zwłaszcza część praktyczna, jest pismem na swój czas wyborném, oraz że Solskiemu zawdzięczamy znaczną część terminologii gieometrycznéj polskiéj, dziś używanéj. Solski jest téż autorem dzieła po łacinie napisanego p. t.: „Praxis nova et expeditissima mensurandi geometrice etc. Cracoviae, 1688, które jest właściwie dziełem mierniczém, ale zawiera, zwłaszcza w części pierwszéj, różne zagadnienia z gieometryi elementarnéj.

Z pomiędzy samodzielnych prac polskich w dziedzinie gieometryi w tym okresie zasługuje na uwagę rozprawa jezuity Kochańskiego p. t.: „Observationes cyclometricae ad facilitandam praxin accomodatae“, ogłoszone w r. 1685 w „Acta eruditorum,“ w Lipsku. Rozwiązuje w niém Kochański zadanie rozwinięcia okręgu koła na prostą sposobem, dającym znaczne przybliżenie. Sposób ten rozpowszechniony jest w dzisiejszych podręcznikach. (Patrz o tém rozprawę Teofila Żebrawskiego. Kraków, 8-a, str. 11, 1862). Należy tu wspomnieć o następujących dziełach matematycznych, wydanych lub używanych u nas w XVII-ém stuleciu. Keckerman: „Systema mathematicum propositum in gymnasio Dantisco (1617), w którém mieszczą się: „Elementa geometriae“; tenże: „Systema compendiosum totius Mathematices, videlicet geometriae, opticae, astronomiae et geographiae“ (1661); Piotr Crüger: „Tetragonismus circuli per lineas“ (1607); tenże: „Synopsis trigonometriae sive doctrinae trinagulorum“ (1612). Tenże: „Doctrinae sphaericae libri duo“ (1612); Georgius Germanus: „Trigonometriae triangulorum sphaericorum logarithimicae practica secreta mirabilis“ (Gdańsk 1627); Adam Pszonka: „Decas theorematum mathematicorum illustrium“ etc. (1629). Mikołaj Kauffman: „Trigonometria sphaericorum etc.“ (Gdańsk 1651); Wojciech Tylkowski: „Geometria practica curiosa in tres libros divisa, quorum primus agit: de lineae, secundus de superficiei, tertius de corporis dimensione (Poznań, 1692). W dziele tém znajdujemy tablicę wstaw, stycznych i siecznych od stopnia do stopnia, oraz praktyczne sposoby kreślenia elipsy i paraboli wszakże bez dowodów. Stanisław Buchawski: „Quaestio geometrica de quantitate planarum superficierum ex tribus prioribus libris Elementorum Euclidis et Polybii, Kraków, 1699.

W pierwszéj połowie XVIII-go stulecia wychowanie młodzieży niczém nie było lepsze, niż w epoce poprzedzającéj; była więc i nauka matematyki na tym samym stopniu, co poprzednio. Dopiero od otwarcia w Warszawie konwiktu szlacheckiego przez Stanisława Konarskiego w roku 1740, rozpoczyna się u nas rzeczywista poprawa wychowania młodego pokolenia. W skreślonym przez Konarskiego planie nauk w konwiktach i seminaryjach pijarskich wyraźnie są wymienione: arytmetyka, algiebra i gieometryja, które, zarówno jak i inne przedmioty szkolne, uczone być mają odtąd w języku ojczystym. Ponieważ książek takich dotąd w języku polskim brak był zupełny, zaleca przeto Konarski tłómaczenie na język polski dzieł nieodzownie potrzebnych lub téż napisanie podręczników oryginalnych. Tym sposobem pijarzy, jeszcze przed Komisyją edukacyjną, myśl dostarczenia dobrych podręczników do matematyki powzięli i istotnie nauczyciele, pijarzy, naszą literaturę pedagogiczną dobremi książkami matematycznemi wzbogacili. Wiadomości o wydanych przez pijarów książkach z dziedziny arytmetyki i algiebry, znajdzie czytelnik w artykułach Encyklopedyi wychowawczéj: „Arytmetyka“ i „Algiebra“; o książkach gieometrycznych powiemy niżéj.

Założenie korpusu kadetów w Warszawie w roku 1766 jest drugim ważnym faktem w dziejach wychowania młodzieży polskiéj w poprzedniém stuleciu. Wykład nauk w tym instytucie był daleko lepszym, niż w innych szkołach polskich, nie wyłączając nawet konwiktu pijarskiego (Łukaszewicz). Na matematykę, jako przedmiot ważny w zawodzie wojskowym, szczególną zwracano uwagę. Do nauki gieometryi używano w samym początku dziełka Kaufmana p. t.: „Początki miernictwa krajowego dla szlachetnéj młodzi rycerskiéj, króla Imci polskiego, Toruń, 1766.“ Dziełko to ma po jednéj stronie tekst niemiecki, po drugiéj tłómaczenie polskie (księdza Jelinka) i zawiera początki gieometryi (Bentkowski, l. c. Tom II, str. 230). Najdonioślejszym jednak faktem w historyi wychowania w Polsce było ustanowienie w roku 1773 Komisyi edukacyi narodowéj, téj najwyższéj magistratury wychowawczéj, która miała wlać nowe życie w chylące się do upadku szkoły, nadać kierunek zbawienny wychowaniu młodego pokolenia, podnieść oświatę krajową we wszystkich warstwach narodu, przygotować zdolnych nauczycieli, stworzyć literaturę pedagogiczną, jednóm słowem odrodzić naród przez należyty system wychowania publicznego. Nie tu miejsce na przedstawienie doniosłości prac Komisyi edukacyjnéj; (porów. rozprawę Wł. Smoleńskiego: „Żywioły zachowawcze i Komisya edukacyjna.“ Ateneum, 1889); nas tu obchodzi przedewszystkiém wpływ, jaki działalność jéj wywarła na podniesienie nauk matematycznych w szkołach krajowych. Przedmiot ten zasługuje na oddzielne opracowanie; tu zauważymy tylko, że wpływ ten był wielce doniosły. Z jednéj bowiem strony Komisyja dbała o to, aby w szkołach wszystkie gałęzie matematyki wykładane były należycie; z drugiéj zaś ustanowione przez nią Towarzystwo do ksiąg elementarnych rozpisało konkursa na ułożenie wzorowych podręczników do matematyki, a mianowicie arytmetyki, algiebry i gieometryi, wraz z trygonometryją. W szkołach narodowych gieometryja rozpoczynała się w klasie 3-éj i dawaną była według podręcznika zatwierdzonego przez Komisyją; w dawaniu geometryi przepisano nauczycielowi trzymanie się prawideł ułożonych dla wykładu arytmetyki, t. j., aby z jednéj do drugiéj części nie postępowano, póki pierwszéj nie przyswoją sobie uczniowie. Dla ćwiczenia w gieometryi praktycznéj wyprowadzano uczniów na pole dla robienia pomiarów, pokazywano narzędzia matematyczne i obznajmiano z rysunkami mierniczemi. Na gieometryją przeznaczano w każdéj klasie po cztery godziny tygodniowo, w piątéj zaś, prócz tego, dwie godziny na rysunki miernicze. Książka elementarna do nauki gieometryi była to: „Gieometryja dla szkół narodowych“, o któréj niżéj powiemy. Z treści téj książki poznamy, jaki był zakres wykładu gieometryi w szkołach narodowych (wydziałowych).

Nie ograniczając się na umiejętnym wykładzie gieometryi w szkołach wydziałowych, uważała Komisyja edukacyjna za właściwe wprowadzić wiadomości praktyczne z gieometryi i do szkół niższych, parafijalnych. Fakt ten zasługuje na szczególne zaznaczenie. W „Powinnościach dla nauczycieli, zwłaszcza szkół parafijalnych“, przez Grzegorza Piramowicza ułożonych, czytamy następujące uwagi ogólne: „Nauka rozmiaru gruntów, nie wchodząc w wyższą umiejętność gieometryczną, powinna wchodzić w liczbę tych, które dla młodzi w tych szkołach ćwiczącéj się, a do rolnictwa i rzemiosł, albo do dozoru gospodarskiego i do włodarstwa po dworach przeznaczonéj potrzebne, albo wielce przydatne są. Ma nauczyciel mieć wielką baczność, żeby téj nauki nie wystawiał dzieciom, jak wysoką umiejętność i trudną. Bo naprzód każda nauka jest łatwą, kiedy uczący umié ją dawać, kiedy porządnie od rzeczy prościejszych i bliższych do dalszych i złożonych postępuje. Powtóre ta, którą uczniom po wsiach i miasteczkach z pożytkiem podawaną być może, bardzo jest określona, mało rzeczy zawiera, bardzo łatwo pod oko podpadających. Samo rozmierzanie, wykonywanie, które dzieci czynić będą, stanie się im miłą zabawą: zwyczajnie to ćwiczenie lubią, jak tego doświadczenie uczy.“ Dobrze tu określono nietylko ważność wiadomości gieometrycznych w nauczaniu elementarném, ale zarazem i drogę, jaką w wykładzie tych wiadomości obrać należy. Droga ta, polegająca na pobudzaniu uczących się do samodzielnych zajęć, do przyjmowania zatém czynnego, a nie biernego udziału w wykładzie, jest jedynie pedagogiczną i służyć może i dzisiaj jako racyjonalna wskazówka przy nauczaniu początków gieometryi, jak o tém mowa będzie niżéj.

Przejdźmy teraz do literatury pedagogicznéj z dziedziny gieometryi w rozważanym okresie. O dziełku Kaufmana wspomnieliśmy już wyżéj. W sześć lat po niém wychodzi przekład księdza Poczobuta: „Początków gieometryi Clairauta“ (Wilno, 1772). Przekład ten, pełen barbaryzmów, stoi pod względem językowym stosunkowo niżéj od dziełka Grzepskiego, o dwa stulecia wcześniéj wydanego. Skaradkiewicz ogłasza: „Gieometryją, czyli naukę o ziemiomiernictwie“ (Warszawa, 1774). Na czele tego dziełka znajduje się obszerniejsza „przemowa o potrzebie y pożytku nauk matematycznych.“ We wstępie podane są objaśnienia wywodów takich, jak: definicyja, postulatum, aksyjoma i t. d., następnie idą trzy postulata według Euklidesa, aksyjomata, czyli prawdy niezawodnie przez się jasne. Księga I-ga „o linijach y węgłach“ zawiera definicyje, propozycyje (twierdzenia) i wnioski o kątach, linijach prostopadłych, równoległych. Księga II-ga traktuje „o troygranach (trójkątach), czworogranach, pięciogranach, sześciogranach y innych wielogranach“ i daje definicyje, oraz szereg twierdzeń, odnoszących się do związku między bokami i kątami, o sumie kątów w trójkątach, o wielokątach, równoważności figur, oraz niektóre zadania. Księga III-a: „O kole albo cyrkule“ zawiera własności koła, miarę kątów, styczność kół, wielokąty foremne, zadania. Księga IV-a „o proporcyi y podobieństwie figur płaskich“ obejmuje: proporcyje, podobieństwo trójkątów, twierdzenie Pytagorasa, twierdzenie o stosunkach obwodów, oraz powierzchni figur podobnych i kół; zadania. Księga V-ta „o bryłach“ mieści w sobie twierdzenia o obliczaniu objętości brył. Księga V-ta „o przecięciach konu (ostrokręgu), y o liniach krzywych“ mówi o własnościach elipsy, hyperboli, paraboli, cykloidy, logistyki, spiralnéj, konchoidy, kasynoidy. Według jakiego wzoru ułożony został ten podręcznik, autor nie podaje; jest to książeczka wcale nie zła, jakkolwiek dowodzenia w wielu miejscach przedstawiają dużo do życzenia pod względem ścisłości. Ksiądz Bystrzycki

Ks. Marcin Bystrzycki, J. J. Geometrya gospodarska w wydaniach Odkoneck. Hausa z r. 1774 i 1757

Bazyli, pijar, wydaje w roku 1769 w Warszawie: „Gieometryją z francuskiego przełożoną;“ ksiądz Józef Marquart w „Nauce matematycznéj“, 1772, (Wilno) daje krótki wykład wiadomości gieometrycznych. Jakubowski wydaje w roku 1781 w przekładzie polskim: „Naukę matematyki“ Bézouta, któréj tom I-y zawiera arytmetykę i gieometryją, tom II-gi algiebrę i przystosowania do gieometryi. Jan Kolonna Cieciszewski ogłasza w roku 1786, w Krakowie: „Początki miernictwa“; ksiądz Zaborowski układa swoję wyborną: „Jeometryją praktyczną,“ która doczekała się czterech wydań (1786, 1796, 1806, 1820) Łęski ogłasza w roku 1790: „Miernictwo wojenne.“

Staraniem komisyi edukacyjnéj wydaną została L'Huiliera: „Gieometryja dla szkół narodowych“ w przekładzie księdza Gawrońskiego, Część I, 1780. Następne wydania téj książki wychodziły w latach 1785, 1803, 1810, 1816. Jest to podręcznik stojący na wysokości wymagań ówczesnych i odznaczający się wysokiemi zaletami pedagogicznemi. Euklidesowa metoda zachowana w ogóle, z dołączeniem wszakże pierwiastku genetycznego; autor stara się przy pomocy wyjaśnień, wziętych z doświadczenia, dojść do zasadniczych pojęć i określeń. W wielu miejscach tekstu dołączone są i uwagi przypisy dydaktyczne dla wykładającego. Znany postulat Euklidesa o linijach równoległych, podany bez dowodzenia, jakoby twierdzenie w sobie tak jasne, że można „i bez dowodzenia na nie przystać.“ Autor jest jednak zdania, że „można tego twierdzenia dowieść bez popadnięcia omyłce, dowody tylko są tak długie, że ciąg i związek ich wielkiego natężenia rozumu wymagający, znudziłby uczniów.“ Zagadnienia następują tuż po odpowiedniéj grupie twierdzeń, rozważanie ilościowe i przykłady liczebne obficie użyte do wyjaśnienia twierdzeń gieometrycznych. Część I-a zawiera całkowity wykład planimetryi, wraz z podnoszeniem do kwadratu, wyciąganiem pierwiastku kwadratowego i proporcyjami; daléj idą pierwsze początki miernictwa, trygo-

Geometrya albo nauka która zawiera w sobie sposoby do rozmierzania wszelkiej ciągłości, [illegible] z francuskiego przełożona. Warszawa 1769. ([illegible] [illegible]) nometryja płaska, poprzedzona nauką rachunku logarytmowego, pierwsze początki równoważenia (niwelacyi). Część II-ga obejmuje całkowitą stereometryją elementarną, wraz z podnoszeniem do sześcianu, i wyciąganiem pierwiastku sześciennego. Podręcznik ten posiadał te same zalety co Arytmetyka i Algiebra tego samego autora; nie był jednak bez braków, na które w późniejszym czasie (1816) zwrócił uwagę ksiądz Dąbrowski, profesor matematyki w uniwersytecie warszawskim. Opuszczono mianowicie twierdzenie o dwóch trójkątach, mających po dwa boki odpowiednio równe i po kącie między nimi zawartym nierównym, o podziale koła na pięć i piętnaście części równych, o stosunku kątów środkowych w przypadku niewspółmierności łuków i o wynajdywaniu przybliżonego stosunku okręgu koła do średnicy; w trygonometryi brak wielu twierdzeń goniometrycznych (np. twierdzenia o wstawie i dostawie sumy lub różnicy łuków, o wstawie i dostawie łuku wielokrotnego i t. d.). Są to istotnie braki znaczne. Z dzisiejszego stanowiska dałoby się metodzie L'Huiliera niejedno zarzucić; ale jeżeli zwrócimy uwagę na to, że podręcznik gieometryi elementarnéj miał w owym czasie za zadanie przedstawienie w wykładzie możliwie dostępnym i jasnym najważniejszych prawd i zastosowań gieometryi elementarnéj: to nie można będzie usprawiedliwić w zupełności niepochlebnego sądu Dąbrowskiego o wartości „Gieometryi" L'Huiliera, która była w języku naszym pierwszym dobrym, pedagogicznym i napisanym ze znajomością rzeczy podręcznikiem do nauki gieometryi.

Na czele matematyków polskich z owego okresu stoi Jan Śniadecki, który najlepiéj może z ówczesnych rozumiał wielkie znaczenie uprawy nauk matematycznych i starał się przyswoić literaturze krajowéj owoce najnowszych badań naukowych na zachodzie. Jego: „Rachunku algiebraicznego teoryja przystosowań do linii krzywych" w roku 1783 wydana, stanowi pracę znakomitą, stojącą na wysokości nauki europejskiéj, i nie ustępującą wzorowym dziełom z koń-

[illegible]

ca XVIII-go stulecia. Rozdział czwarty tomu I-go tego dzieła, zawiera zasady trygonometryi a raczéj goniometryi wyłożone sytematycznie i naukowo.

Znakomity wpływ Komisyi edukacyjnéj przetrwał upadek kraju; owszem sprawa wychowania narodowego nie przestała zaprzątać lepszych umysłów; nauki matematyczne pozyskały sobie należyte uznanie w planach szkolnych przez następne reformy szkół wprowadzanych. Wznowienie uniwersytetu w Wilnie, założenie gimnazyjum w Krzemieńcu, a następnie uniwersytetu w Warszawie, wpłynęło dodatnio na rozwój literatury matematycznéj. W pierwszéj połowie bieżącego stulecia wychodzą już to nowe dzieła pedagogiczno-matematyczne, już to samodzielne rozprawy z rozmaitych dziedzin matematyki. Józef Czech tłómaczy Euklidesa i wydaje go pod tytułem: „Euklidesa początków gieometyi ksiąg ośmioro: sześć pierwszych, jedynasta i dwunasta z dodanymi przypisami i trygonometryją dla pożytku młodzi akademickiéj (Wilno, 1807). Po śmierci autora wydanie 2-gie, 1817 z trygonometyą R. Simpsona. Tłómaczem kierowało życzenie dania młodzieży w ręce oryginalnego wykładu samego Euklidesa który dotąd dawany był w wyjątkach i przeróbkach. Paschalis Poullin przełożył z francuskiego: „Gieometryją wykreślną“ Lacroix'a i wydał w r. 1814 we Wrocławiu, w 2-ch częściach p. t.: „Gieometryja płaszczyzn i powierzchni krzywych, czyli miernictwo opisujące.“ Tenże autor wydaje w r. 1813: „Teoryją przecięć ostrokręgowych i ich kwadrowania, jako téż kilka innych krzywych, znanych pod nazwiskiem konchoidy Nikomedesa, cysoidy Dyjoklesa, logarytmiki, cykloidy, kwadratycy Dinostratosa, wężownicy Archimedesa, wężownicy równorzutniowéj (parabolicznéj), hyperbolicznéj, logarytmicznéj, czyli traktat rozbiorowy (analityczny) tych linij krzywych.“ Dzieło to odznacza się jasnym wykładem i obfitością cytat historycznych. W roku 1817 Jan Śniadecki wydaje: „Trygonometryją kulistą“ analitycznie wyłożoną (Wilno, drugie wydanie tamże, 1820). Jestto wyborny podręcznik, zajmujący chlubne miejsce w literaturze europejskiéj, (istotnie wyszedł i w przekładzie niemieckim) Sumienny rozbiór téj pracy ogłosił Józef Twardowski w „Pamiętniku warszawskim,“ z roku 1817. Dzieło Śniadeckiego i dziś jeszcze z pożytkiem służyć może do nauki. Wspomniany już wyżéj ksiądz Dąbrowski wydaje Gieometryją podług Lacroix'a. Część I-a na klasę II, III, IV dla szkół departamentowych, Warszawa, 1813; drugie wydanie 1818, trzecie 1820, czwarte 1834; część II-ga téj gieometryi, obejmująca stereometryją, wydaną została w Warszawie, w r. 1826. Karol Hube, profesor uniwersytetu krakowskiego, ogłasza rozprawy z trygonometryi kulistéj (Kraków, 1820), o wyznaczeniu bryłowatości klina ostrokręgowego (tamże, 1823), z dziedziny gieometryi analitycznéj (tamże, 1824, 1828, 1831). Wincenty Karczewski wydaje: „Początki gieometryi w ośmiu księgach.“ (Część I-a, Kielce, 1823), Andryjan Krzyżanowski: „Gieometryją analityczną linii i powierzchni drugiego rzędu,“ (Warszawa, 1822) i ogłasza rozprawę: „O trudnościach zachodzących przy wykładzie gieometryi elementarnéj, w któréj usiłuje, jakkolwiek bezskutecznie, dać racyjonalną teoryją linij równoległych. (Pam. Umiejętności sztuk i nauk. Warszawa, 1825). Michał Pełka Poliński ogłasza dzieła: „O geodezyi“ (Wilno, 1816), „Początki trygonometryi płaskiéj“ (Wilno, 1816, 1821, 1828); Hreczyna tłómaczy Potiera: „Wykład gieometryi rysunkowéj dla użycia uczniów dróg komunikacyjnych“ (Wilno, 1817), Colberg wydaje drobniejsze rozprawy z dziedziny gieometryi praktycznéj (Warszawa, 1818 —1828). Ksiądz Ignacy Przybylski pisze: „Gieometryją początkową“ (Warszawa, 1823), zawierającą planimetryją, trygonometryją, stereometryją i przecięcia ostrokręgu. Franciszek Sapalski wydaje wyborną: „Gieometryją wykreślną, (Warszawa, 1823), któréj część druga, zawierająca zastosowanie wychodzi w roku 1839 w Krakowie, już po śmierci autora. Augustyn Frączkiewicz ogłasza w „Pamiętnik, warszawskim", a następnie w „Biblijotece warszawskiéj" rozprawki, dotyczące podań z gieometryi elementarnéj (1829—1844); Antoni Wyrwicz tłómaczy Biota: „Początki gieometryi analitycznéj" (Wilno, 1819, 1828) i wydaje: „Początki gieometryi dla szkół powiatowych" (Wilno, 1825, 1826); Onufry Lewocki ogłasza: „Gieometryją dla szkół wydziałowych" (Warszawa 1828—1830); Hipolit Rumbowicz wydaje: „Gieometryją wykreślną, czyli wykład rzutowych i obrazowych wykreśleń" (Wilno, 1829); Kajetan Garbiński, profesor uniwersytetu warszawskiego, ogłasza w roku 1822 rozprawę: „Wykład syntetyczny własności powierzchni skośnych" i t. d. Tenże autor ogłosił rozprawy gieometryczne w dziennikach matematycznych: Gergonne'a: (Annales des mathematiques) w Paryżu i Crelle'a: (Journal für reine und angewandte Mathematik) w Berlinie. A. Szahin wydał: „Miernictwo i równoważenie", oraz „Gieodezyją wyższą" (Wilno, 1829). P. Chlebowski i A. Tylman tłómaczą wyborne dzieło Dupina p. t.: „Gieometryja i mechanika sztuk i rzemiosł" (Warszawa trzy tomy, 1827—1828). Antoni Krauz, podporucznik artyleryi wydaje: „Matematykę na klasę drugą Szkoły zimowéj Artyleryi" (Warszawa, 1828), w któréj zawiera się solidometryja (Nauka I — VI), Trygonometryja (Nauka VII—IX), Zastosowanie Algebry do Geometryi (Nauka X—XI, początki geometryi analitycznéj); daléj następuje Statyka i dynamika (Nauka XII —XX), Solidometryja Krauza wyszła następnie w wydaniu drugiém (Warszawa, 1830).

Spis powyższy dzieł gieometrycznych, elementarnych, lubo niezupełny, wykazuje, że w pierwszéj trzeciéj części bieżącego stulecia literatura tego przedmiotu rozwijała się u nas pomyślnie. Z rokiem trzydziestym ożywienie na tém polu ustaje i przez następne trzy dziesiątki lat mało u nas wychodzi prac w téj dziedzinie. Nim zajmiemy się wyliczeniem najważniejszych dzieł gieometrycznych z tego okresu, winniśmy poświęcić słów kilka wspomnianemu już przez nas Hoene-Wrońskiemu (1778—1853), który, w końcu zeszłego stulecia opuściwszy kraj, zamieszkał we Francyi i tam przez pół wieku przeszło oddany był niezmordowanéj pracy we wszystkich prawie dziedzinach umiejętności ścisłych, któréj owocem były liczne dzieła matematyczne i filozoficzne w języku francuskim ogłoszone, oraz niewydane dotąd rękopisy, znajdujące się w biblijotece kórnickiéj. Usiłowania Wrońskiego na polu matematyki miały charakter reformatorski; pragnął on nietylko wiedzę matematyczną doprowadzić do możliwéj doskonałości, ale i oprzéć ją na niewzruszonych podstawach. Usiłowania te, noszące na sobie bezwątpienia piętno genijuszu, nie były należycie ocenione za życia autora, a i dziś jeszcze mało są znane uczonemu światu. W dziedzinie matematyki uprawiał Wroński głównie analizę, którą nazywa algorytmiją i uważa za zasadniczą gałąź matematyki. Gieometryją, jak już wspomniano, uważał jako podrzędną pod względem znaczenia dla reformy matematyki; prawa gieometryi są według niego tylko zastosowaniem praw algorytmii. Ten pogląd wielkiego analityka znajduje niejakie urzeczywistnienie swoje w najnowszych pracach szkoły Kleina, Liego i t. d., która badania gieometryczne tak ściśle, jakkolwiek w odmienny sposób, związała z badaniami analitycznémi Nie tu miejsce na przedstawienie zasad reformy Wrońskiego, niedostatecznie jeszcze zbadanéj; powiemy tylko, że ze względu na ważność i znaczenie prac ogłaszanych, należy się Wrońskiemu jedno z pierwszych miejsc w rzędzie matematyków-filozofów, którzy pracowali nad zgłębianiem wiedzy. Jeszcze między 1803—1806 napisał Wroński rozprawę (wydaną dopiero w roku 1879): „o filozofii, albo prawodawstwie matematyki (po francusku), gdzie głęboko sięga do podstaw wiedzy i wykazuje gruntowną znajomość filozofii Kanta. Praca ta jest ważną z tego względu,że w niéj (następnie w piśmie przez siebie wydawaném: „Sphinx“, 1818) Wroński z rozważań teoretycznych wyprowadza nową umiejętność foronomiją, dzisiejszą cynematykę. Oto jego słowa: „Tę część gieometryi ogólnéj, która ma za przedmiot rozciągłość właściwą, nazywamy wprost gieometryją. Nazywać będą foronomiją czystą inną część gieometryi ogólnéj, mającą za przedmiot prawa prędkości, uważanéj spekulacyjnie (to znaczy, jako wielkość ruchu, obejmującego prędkość właściwą i kierunek)." Tu także miejsce wspomnieć o tablicy genetycznéj gieometryi, jaką spotykamy w dziełach Wrońskiego. Zasada klasyfikacyi w téj tablicy przyjęta jest ta sama, jakiéj używał Wroński we wszystkich umiejętnościach: wynikała ona z jego systemu filozoficznego. Czytelnika, interesującego się szczegółami odsyłamy do dzieł Wrońskiego.

Wracamy do podręczników gieometryi wydanych po r. 1830. Wincenty Józefowicz wydał w r. 1840: „Wykład praktyczny miernictwa i niwelacyi ze wszelkiémi zastosowaniami" (Warszawa, 1843, 1844); w roku zaś 1843: „Gieometryją stosowaną do sztuk i rzemiosł." Wincenty Wrześniewski ogłosił w r. 1841: „Miernictwo niższe." Warszawa, 8-ka, str. 256, 1841), w którém mieści się krótki wykład własności linij poprzecznych (1—12). Libelta: „Wykład matematyki (Poznań, 1844) zawiera w tomie I Planimetryją, w II Trygonometryją prostokreślną i Solidometryją. A. Świerzbieński, nauczyciel mamatyki w gimnazyjum realném w Warszawie, wydaje w roku 1848: „Kurs gieometryi z rysunkiem gieometrycznym i zastosowaniami." Część druga téj książki, zawierająca stereometryją, wydaną została w roku 1849. W wykładzie starał się autor o zastosowanie metody gienetycznéj, nie szczędził szczegółowych wyjaśnień, wskazówek praktycznych i t. d., nie wszędzie jednak utrzymał należytą ścisłość, a obok tego zbytecznie powiększył liczbę twierdzeń. Planimetryją podzielił na dwa działy: 1) Linije uważane na płaszczyźnie i ich połączenia; 2) Płaszczyzny ograniczone linijami. Dział 1-y dzieli na rozdziały: linije uważane oddzielnie; linije proste, połączone z prostemi; połączenie okręgów kół. Dział 2-gi składa się z czterech rozdziałów: równość, podobieństwo, równoważność i stosunek figur, zależność wielkości figur od kształtu. Stereometryja składa się także z dwóch działów: 1) Linije i powierzchnie uważane oddzielnie, 2) własności brył. Dział 1-y składa się z rozdziałów: powierzchnie uważane oddzielnie, połączenie płaszczyzny z linijami i płaszczyznami, powierzchnie krzywe, połączone z płaszczyznami; powierzchnie krzywe, połączone z krzywemi. Dział drugi z rozdziałów: równość, podobieństwo, równoważność i stosunek brył, wzajemna zależność wielkości i kształtu brył. Teofil Żebrawski napisał: „Początkowe wiadomości z geometryi dla praktycznego użytku (Część I, Kraków, 1849).

Zasady gieometryi, napisane przez Józefa Mazurkowskiego, zawierają w tomie I-ym: Planimetryją (Epipedometryją), Warszawa, 1853. Kurs obszerny, w końcu pierwszego i drugiego tomu dość liczny zbiór twierdzeń do dowiedzenia, oraz zagadnień. Jan Kanty Steczkowski, profesor uniwersytetu krakowskiego, w swym „Elementarnym wykładzie matematyki“, oprócz Arytmetyki i Algiebry, objął Planimetryją i Stereometryją (Kraków, 1858), Trygonometryją prostokreślną i sferyczną (tamże, 1859), oraz Gieometryją analityczną (tamże, 1861). Jul. Żebrowski napisał Planimetryą według Kambly'ego (Poznań, 1857). G. H. Niewęgłowski, (obok Arytmetyki, Algiebry i Mechaniki), wydał „Gieometryją“ (Poznań, 1854, drugie wydanie, Paryż, 1870), złożoną z gieometryi płaskiéj i z gieometryi przestrzeni i zawierającéj wiadomości z gieometryi syntetycznéj o przecięciach ostrokręgu i niektórych powierzchniach krzywych. Tegoż autora jest: „Trygonometryja“ (Paryż, 1870), najzupełniejsze dotąd z dzieł polskich w tym przedmiocie. Niewęgłowski układał swoje książki według wzorów francuskich. „Trygonometryją prostokreślną z zadaniami“ napisał Stanisław Przystański (Warsz., 1859). Geometryja J. Regnaulta, przekł. z franc., część I Planimetryja, wydaną została w Warszawie, w r. 1863. Bardzo starannie ułożony i z wielką

Urbański Wojc.
Geometrya wy-
łożona spo-
sobem stosu-
jącym się do
użytku cało-
[illegible]
[illegible] Lwów,
1851, 8° str. [illegible],
tablic VI.

jasnością napisany jest: „Kurs solidometryi“ (stereometryi) Józefa Krysińskiego (Warsz., 1865). Gieometryją zawiera: „Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach, napisany przez Wawrzyńca Żmurkę (Lwów, 1864). Według zasad Żmurki napisał dr. O. Fabian, część kursu gieometryi: „Matematyka dla szkół średnich i Geometrya na klasy niższe. Zeszyt I na 1-ą i 2-ą klasę. Lwów, 1876. W szkołach w Królestwie polskiém przez długi czas używane były: „Początki gieometryi“ Legendre'a w tłómaczeniu Jana Pankiewicza, oraz: „Zasady gieometryi“ Clairaut'a (w powtórném tłómaczeniu Stanisława Przystańskiego). W Galicyi używane są spolszczone podręczniki gieometryczne Močnika (przekłady Staneckiego, Sternala, Bączalskiego i Maryniaka). W Poznańskiém używaną była H. Brettnera: „Geometrya dla szkół wyższych“ w przekładzie z niemieckiego przez Ustymowicza (Część I, Berlin, 1850, wydanie drugie, 1865). Dla szkół ludowych napisał Józefczyk Andrzéj: „Gieomeryją“ (Lwów, 1879). W roku 1875 wydano (Kraków) w przekładzie polskim Nawratila: „Przewodnik do rysunku cyrklowego i linijowego, zawierający sporo ciekawych twierdzeń i zagadnień gieometrycznych; wspomnieć też tu należy o wydanéj przez Józefa Łapińskiego: „Gieometryi zastosowanéj do sztuk i rzemiosł“ (Warszawa, 1868). Gieometryja wykreślną Lefebura de Fourcy wydał w polskim przekładzie F. Bernhardt (Warszawa, 1849). „Gieometryją wykreślną wraz z zastosowaniem do teoryi i cieniów i wolnéj perspektywy dla użytku wyższych szkół realnych,“ napisał Daniel Wierzbicki (Kraków, 1871). Dla szkół średnich napisał: Gieometryją wykreślną“ K. Maszkowski (Lwów, 1883). Zupełny zaś kurs gieometryi wykreślnéj, przeznaczony do wykładu wyższego, napisał E. Sągajłło (Paryż, 1882). Ksiądz Tomasz Kowalski, w Jarosławiu (Galicyja) wydał: „Gieometryją praktyczną wiejską.“ S. Dickstein: „Początkową naukę gieometryi w zadaniach“ (książeczka I, wyd. 1-sze 1881, 2-gie 1883). W „Panteonie wiedzy ludzkiej" gieometryją napisał Bykowski (Warszawa, 1875). Karol Hertz, w Warszawie napisał: „Planimetryją" (w 1882), oraz przełożył cenne dziełko Petersena: „Metody i teoryje rozwiązywania zagadnień gieometrycznych" (1881). Tenże autor napisał: „Pierwsze zasady kwaternijonów" (Warszawa, 1887). Klasyczna rozprawa Riemanna: „O podstawach gieometryi" przełożoną została na język polski (1877) przez S. Dicksteina, z przypisami Wł. Gosiewskiego. W „Biblijotece matematyczno-fizycznéj", wydawanéj z zapomogi kasy imienia Mianowskiego, przez M. A. Baranieckiego i A. Czajewicza; wydane zostały dotąd dwa dzieła, należące do dziedziny gieometryi, a mianowicie: „Gieometryja analityczna Zajączkowskiego" (Warszawa, 1884) i „Elementarny wykład własności syntetycznych przecięć stożkowych" przez M. A. Baranieckiego (Warszawa, 1885). Pierwsze początki gieometryi wyższéj ogłosił Julijan Bayer w kursie litografowanym, bez wymienienia daty (wydano około r. 1867).

Dodajemy tu, że powyższe wyliczenie dzieł polskich z działu gieometryi elementarnej, które nie jest wcale zupełném, o ile sądzę, wystarczyć może czytelnikowi, do wytworzenia obrazu ruchu piśmienniczego w dziedzinie gieometryi elementarnéj. Dokładną biblijografiją wszystkich dzieł gieometrycznych po roku 1830 wydanych znajdzie czytelnik w przygotowywaném obecnie dziełku, mającém stanowić ciąg dalszy: „Biblijografii Żebrawskiego.

Wspomnieć tu należy jeszcze choć kilku słowy o pracach polskich, dotyczących historyi gieometryi w ogólności, oraz w kraju naszym. Literatura i historyja matematyki u nas jest bardzo ubogą i ogranicza się do jednéj obszerniejszéj biblijografii, jednéj większéj monografii, oraz pewnéj liczby artykułów charakteru przeważnie-kompilacyjnego. Spis wszystkich tych prac znajduje się w artykule: „Note bibliographique sur les études historico-mathémati-

(Wiadomości bibliogr. Prace mat.-fiz. II) ques en Pologne.“ „Bibliotheca mathematica“ Stockholm (1889). Wymienimy tu pomiędzy niemi: rozprawy Wolickiego o wzroście arytmetyki i gieometryi w rozmaitych krajach i wiekach; Adryjana Krzyżanowskiego: „O życiu uczonego Stanisława Solskiego (1822) i „O trudnościach zachodzących przy wykładzie gieometryi elementarnéj (1824), gdzie znajdujemy krótki rys historyi teoryi linij równoległych; Franciszka Wręczyckiego: „Rys historyi geometryi do epoki wynalezienia analizy Descartesa, wraz z ocenieniem zasług znakomitszych geometrów polskich w tymże czasie (Warsz., 1829). Najwięcej historyi nauk matematycznych u nas przysłużyli się: Teofil Żebrawski i Jan Nepomucen Franke, pierwszy zwłaszcza ułożeniem nader cennéj: „Biblijografii piśmiennictwa z dziedziny matematyki i fizyki,“ wydanéj w roku 1873, do któréj „Dodatki“ ogłosił w r. 1886; drugi wydaniem wspomnianych wyżéj monografij: o Głoskowskim i Brożku. Biblijografija Żebrawskiego, z któréj korzystaliśmy przy układaniu niniejszego rysu jest nadzwyczaj ważną dla chcących pracować nad historyją gieometryi, gdyż podaje spis prac drukowanych i rękopiśmiennych, odnoszących się do gieometryi w Polsce, od wieku XIV-go roku 1830. Dopełnienie możliwych w pracy téj opuszczeń i poprowadzenie jéj daléj jest obowiązkiem współczesnego nam pokolenia biblijografów matematyki. Ważną usługę pod tym względem oddał praca D-ra Szeligi o stanie nauk matematyczno-fizycznych za czasów wszechnicy wileńskiéj, która wkrótce ukaże się w tomie 2-gim: „Prac matematyczno-fizycznych.“ Zarys historyi gieometryi analitycznéj w Polsce daje Wł. Zajączkowski we wspomnionéj „Gieometryi analitycznéj.“ Pierwiastek historyczny uwzględniają dzieła, wychodzące we wspomnianéj wyżéj „Biblijotece matematyczno-fizycznéj,“ Krótki zarys historyi matematyki u starożytnych napisał Julijan Fąfara (Tarnopol, 1884). „O życiu i dziele optycznem Vitellona,“ pisał L. Wituski (Poznań,

Zaborowski Józef (1824-1918) Teorya linij równoległych uważana [illegible] ze stanowiska ścisłej [illegible] [illegible] Płock 1857.

Wydawanie [illegible]
1. [illegible] — [illegible]
2. [illegible]

1880). Dzieje gieometryi u nas nie mogą być traktowane zupełnie niezależnie od historyi innych gałęzi nauk matematycznych, która także nie jest dotąd należycie zbadana. Przyczynki do historyi arytmetyki i jéj nauczania dostarczyli Trybulski w artykule: „Arytmetyka“ (Encyklopedyja wychowawcza, tom I) i M. A. Baraniecki w swojéj: „Arytmetyce“ (Warszawa, 1884). Historyja matematyki i w ogóle nauk ścisłych w Polsce, jestto przedmiot wielce godny badania historycznego. Na zakończenie wspomnimy jeszcze, że wydane w Warszawie: „Sprawozdania z piśmiennictwa naukowego polskiego w dziedzinie nauk matematycznych i przyrodniczych“ (I, 1882, II, 1883, III, 1884, IV, 1885) zawierają referaty o wszystkich ogłoszonych w okresie 1882 — 1885 książkach i rozprawach z dziedziny matematyki, a więc i gieometryi. Dalszy ciąg tych sprawozdań za lata od 1886 pomieszcza wydawnictwo: „Prac matematyczno-fizycznych.“

Poza literaturą matematyczną polską dotyczącą dydaktyki nauk geometryi. — Przegląd krakowskiego w zakresie pedagogicznym matematyki. — Z programów szkolnych i uniwersytetu.

# ROZDZIAŁ III.

## Uwagi o znaczeniu pedagogicznem oraz o zakresie i metodach wykładu gieometryi.

Gieometryja stanowi, jak wiadomo, jeden z głównych przedmiotów wykładanych w gimnazyjach, szkołach realnych i w ogóle w szkołach średnich wszelkiéj kategoryi, w szkołach przemysłowych i rzemieślniczych, a w ostatnich czasach wprowadzono ją do szkół żeńskich i elementarnych.

Postaramy się odpowiedzieć na pytanie, czemu przypisać należy to ważne stanowisko gieometryi w szkole, co czyni przedmiot ten niezbędnym we wszelkim systemie wychowania szkolnego i domowego? Gieometryja, jak i każda nauka, ma swoję treść i metodę. Rozpatrzmy kolejno jednę i drugą. Pod względem treści gieometryja jest zbiorem prawd o figurach gieometrycznych, będących utworami wyobraźni, budowanych według praw logicznych, na podstawie rzeczywistych form ciał, znajdujących się w przyrodzie. Geneza tych utworów, związek między niemi, przejście od jednych do drugich, słowem, badanie form gieometrycznych stanowi zadanie gieometryi. Bez znajomości tych form i ich najprostszych własności nie mogą się obejść nauki fizyczne, rzemiosła i sztuki; stąd téż znajomość gieometryi jest konieczną ze względu na ważne jéj zastosowania. ~~Ale jest to dopiero jedna strona i to nie najważniejsza w nauczaniu.~~ Gieometryja sama w sobie przedstawia naukę nadzwyczaj przydatną do rozwijania umysłu. Potrzeba tylko odpowiedniego rozbudzenia zmysłu spostrzegania i porównywania, aby od spostrzeżeń konkretnych doprowadzić młody umysł do produkowania idealnych form gieometrycznych, oraz do szukania związków pomiędzy niemi, do prawd gieometrycznych, a nawet do pobudzenia pewnéj zdolności twórczéj, t. j. inwencyi, tak ważnéj w nauce i w życiu. Abstrakcyjne, na pozór suche i nie zajmujące twierdzenia, przy umiejętnym wykładzie, stają się żywemi, rozbudzają ciekawość i usposabiajają umysł do samodzielnego użytku sił własnych. I prawidła logiki są również suche i oderwane, potrafią jednak zająć młodsze nawet umysły, gdy się pokaże, jak te prawidła ujawniają się w myśleniu, jak żyją w codziennym i nieustającym biegu życia, jak się uwidoczniają w przyrodzie, w któréj badaniu są kierowniczemi. Prawdy gieometryczne mają jeszcze tę wyższość nad logicznemi, że wskazanie ich bezpośredniego zastosowania w nauce i sztuce, na każdym niemal kroku z łatwością okazać się daje. Wszelka przytém nowa prawda gieometryczna wprowadza do umysłu treść nową i trwałą, w sposób nie luźny, lecz w związku ścisłym z poprzednio poznanemi prawdami. Już w gieometryi elementarnéj, zasadnicze własności utworów gieometrycznych: równość i podobieństwo figur, proporcyjonalność ich części, stosunek powierzchni i objętości figur gieometrycznych i t. p. nie mogą nie zająć umysłu ucznia; a jeżeli go nie zajmują, świadczy to w większości przypadków raczéj o braku odpowiedniego przygotowania i należytego kierunku w udzielaniu wiedzy, niż o braku zdolności pojmowania i interesu.

Jeżeli teraz przejdziemy do metody wykładu gieometryi, to przekonamy się, że stanowi ona niemniéj ważny, a może i ważniejszy jeszcze czynnik, kształcący władze umysłowe i pobudzający do samodzielności. Metoda nauczania gieometryi jest różną, stosownie do stopnia przygotowania i rozwoju uczącego się. Na stopniu najniższym, kiedy dla umysłu wychowańca dostępne są tylko fakty konkretne, a uogólnienia mogą być wprowadzane tylko z wielką ostrożnością, najodpowiedniejszą metodą jest tak zwana metoda poglądowa. Uczeń rozpoczyna od rozważania pewnych prostych brył i figur gieometrycznych, uczy się na nich poznawać linije, kąty, powierzchnie i t. p., uprzytomnia to sobie w wyobraźni i na rysunku, a przez porównywanie dochodzi do pewnych spostrzeżeń, stanowiących już proste prawdy gieometryczne. Prawdy, osiągnięte na téj drodze, są jakby wynikiem własnego doświadczenia ucznia i jako takie, utrwalają się w jego umyśle, stanowiąc dobry podkład dla dalszéj nauki. Do tego ważném dopełnieniem jest rozwiązywanie prostych zagadnień gieometrycznych za pomocą linijki i cyrkla, oraz odpowiednich zadań rachunkowych, które wprowadzają stosunki ilościowe do rozważań gieometrycznych. To wszystko stanowić może pewną całość zamkniętą, wystarczającą dla pierwszego stopnia nauczania i dla szkół elementarnych; albo też stanowi tylko przygotowanie do nauki systematycznéj.

Systematyczny wykład gieometryi jest zbiorem prawd, ułożonych według pewnego planu. Podstawą tego zbioru, fundamentem całéj budowy gieometrycznéj są definicyje, czyli określenia, oraz pewniki, czyli aksyjomaty i postulaty. Prawd w gieometryi dochodzimy za pomocą konstrukcyi i rozumowania (odpowiadających doświadczeniu w pierwszém stadyjum nauczania) i wyrażamy je za pomocą twierdzeń. Jeżeli w dochodzeniu prawd posiłkujemy się jedynie konstrukcyjami gieometrycznemi, bez uciekania się do środków pomocniczych, jakich dostarcza arytmetyka, gieometryja będzie czysto syntetyczną (albo lepiéj gieometryją położenia); jeżeli zaś wprowadzamy środki arytmetyczne, gieometryja przyjmuje nazwę gieometryi miary. W wykładzie szkolnym gieometryi elementarnéj uwzględniamy jednę i drugą metodę. Definicyje w matematyce, a w szczególności w gieometryi, są typem definicyj naukowych. Odgraniczają one ściśle przedmiot badany od każdego innego, nie dają powodu do żadnéj dwuznaczności, a w rozwoju wykładu są podstawą pewną, na któréj opiera się całe badanie. Jeżeli definicyja wyraża sposób, w jaki dany utwór gieometryczny powstaje, to nazywa się definicyją genetyczną; definicyja, która utwór, uważany za gotowy, opisuje, nazywa się definicyją opisującą. Definicyja genetyczna i w ogóle wszelka konstrukcyja (synteza) utworów gieometrycznych, opierać się musi na pewnych założeniach (hypotezach), czyli pewnikach, zwanych aksyjomatami i postulatami. Pewniki gieometryczne wyrażają istnienie najprostszych utworów gieometrycznych (linii prostéj, płaszczyzny, linij równoległych i t. d.), albo wyrażają zasadnicze własności tych utworów, czyli mówiąc językiem najnowszych badań gieometrycznych, wyrażają zasadnicze własności, t. j. stosunki miarowe, przestrzeni, stanowiącéj przedmiot gieometrycznego badania. Dany układ pewników – oto charakterystyka całego układu prawd gieometrycznych. Pewniki gieometryczne, stanowiące podstawę naszéj gieometryi (euklidesowéj), dają się sprawdzić doświadczeniem. Doświadczenie stosować można wprawdzie tylko do form konkretnych, nie zaś do form idealnych gieometryi; mimo to doprowadza ono do wyników zgodnych z treścią pewników, gdy się je podda (doświadczenie), że tak powiem, idealnéj poprawce, którą, jakby z konieczności, wykonywa umysł ludzki w przejściu od tworów konkretnych przyrody do utworów idealnych gieometryi. W tém znaczeniu należy utworom idealnym gieometryi przyznać rzeczywistość, a związki, jakie z badania ich wyprowadzamy, stosować można i należy w badaniu zjawisk przyrody. Tam nawet, gdzie badanie umiejętne wydaje się najbardziéj odległém od rzeczywistości, nauka nie traci nigdy z oka związku między prawdami nowemi a dawniéj odkrytemi, które zastosowanie znalazły, i nie wątpi, że badanie w mowie będące może mieć wartość istotną dla postępu wiedzy ludzkiéj. Powiedzieliśmy, że dany układ pewników stanowi cechę charakterystyczną układu prawd gieometrycznych i w tém znaczeniu pewniki Euklidesa stanowią cechę téj gieometryi, jaka po dzień dzisiejszy w szkołach jest wykładaną. Inny układ pewników, t.j. inny system prawd podstawowych, określających istnienie utworów zasadniczych, może stanowić podstawę nowego układu twierdzeń, stanowiącego inną gieometryją, różną od euklidesowéj. Nie możemy tu wchodzić w rozbiór pytania, czy układ inny pewników gieometrycznych, różny od euklidesowego, jest wogóle możliwy ze stanowiska doświadczenia; powiemy tylko, że matematycy układy takie wymyślili i na ich podstawie nowe gieometryje, różne od euklidesowéj zbudowali. Taka jest gieometryja Łobaczewskiego, Bolay'a, Riemann'a, Helmholtza, Kleina i innych. Przedmiot to zbyt rozległy, abyśmy się nim w niniejszéj rozprawie zająć mogli; nie wchodzi on zresztą w zakres wykładów szkolnych i dla tego, napomknąwszy jeszcze, że ma on bardzo interesującą stronę filozoficzną i teoretyczno-poznawczą, odsyłamy ciekawego czytelnika do specyjalnych w tym przedmiocie prac, wymienionych wyżéj autorów (Wiadomość o pracach w nowéj dziedzinie znaleść można: w „Pracach matematyczno-fizycznych," t. I, Warszawa, 1888, str. 129—136); a z teoryją Riemanna poznać się może czytelnik przy pomocy polskiego przekładu jego pracy: „O hypotezach gieometryi" (Pamiętnik Towarzystwa Nauk ścisłych, tom IX, Paryż, 1877). Wypada nadmienić, że właśnie wspomniane badania doprowadziły do zgłębienia podstaw wiedzy gieometrycznéj, do wyjaśnienia zasadniczéj roli pewników, do utworzenia nowego i ważnego pojęcia rozmaitości (przestrzeni) wielokrotnie rozciągłéj, oraz do pojęcia krzywizny takiéj przestrzeni. Dodajemy wreszcie, że fakt utworzenia nowych gieometryj nie znosi wcale gieometryi euklidesowéj, podobnie jak wprowadzenie liczb urojonych do analizy, nie znosi teoryi liczb rzeczywistych. I jak istotnym, koniecznym, podstawowym materyjałem naszéj wiedzy arytmetycznéj pozostanie arytmetyka liczb rzeczywistych, całkowitych, dodatnich; podobnie podstawą nauki gieometrycznéj pozostanie system gieometryi, oparty na pewnikach euklidesowych.

Jeżeli pozwoliliśmy sobie dłużéj zaprzątnąć uwagę czytelników kwestyją pewników, to uczyniliśmy to dla tego, że wiemy z doświadczenia, iż nauczyciele matematyki z pewną obojętnością kwestyją tę w wykładach swych traktują. Zapewne, jest rzeczą niewłaściwą i niemożliwą w początkowym wykładzie wdawać się z uczniami w rozbiór téj kwestyi; ale jest możliwą rzeczą, a nawet konieczną, aby przy dochodzeniu twierdzeń geometrycznych, nauczyciel skrupulatnie zaznaczał części składowe każdéj konstrukcyi i każdego rozumowania, jakich w dowodzie używa. Zastanawiając się nad temi częściami składowemi, nauczyciel będzie miał sposobność wykazania podstawowego znaczenia definicyj i pewników i tym sposobem powoli w umysłach swych wychowańców wytwarzać będzie wyobrażenie o tém, jak cały gmach wiedzy gieometrycznéj na wymienionych podstawach się opiera.

Twierdzenia i zagadnienia wypełniają treść gieometryi. O znaczeniu pedagogiczném téj treści mówiliśmy już wyżéj; tu winniśmy objaśnić, w jaki sposób treść ma być dawaną. Wzorem dla wykładu gieometryi przez długie wieki była gieometryja Euklidesa. Nieśmiertelne dzieło aleksandryjskiego matematyka, w starożytności i w czasach nowszych stanowiło przedmiot podziwu nietylko ze względu na bogactwo treści, ale i ze względu na układ i metodę wykładu. Najwięksi uczeni, że tu wymienię Newtona, na niém zaprawiali się do badań naukowych, a i w dzisiejszéj szkole księgi „Elementów“ euklidesowych, z większemi lub mniejszemi zmianami, służą za podstawę nauczania gieometryi.

Co dziełu temu tak długotrwałe zapewniło znaczenie? Otóż, pod względem treści księgi Euklidesa zawierały prawie wszystkie znane w owym czasie najważniejsze twierdzenia planimetryi i stereometryi, pod względem zaś ścisłości dowodów czyniły zadość najwybredniejszym wymaganiom logiki. Na czele ksiąg definicyje i pewniki, następnie szeregi twierdzeń, wypowiedzianych ściśle i dowiedzionych metodą syntetyczną przy pomocy konstrukcyi, oraz rozumowania, opartego na prawdach poprzednio uznanych. O tym charakterze dowodów euklidesowych ma wyobrażenie każdy, kto przeszedł kurs elementarny gieometryi gimnazyjalnéj. Cechą dowodzenia euklidesowego jest przekonywająca siła, z jaką uczący się uznać musi prawdziwość ostatecznego wyniku; każdy bowiem dowód, to łańcuch konstrukcyj i rozumowań, powiązanych logicznie i doprowadzających konsekwentnie do celu. Jak już wiemy, metoda dowodów euklidesowych, jest przeważnie syntetyczną; w niektórych tylko przypadkach zastępuje ją metoda „sprowadzania do niedorzeczności“ (reductio ad absurdum), będąca szczególnym przypadkiem metody analitycznéj. Ta ostatnia była, jak wiadomo, stosowaną do badań gieometrycznych od czasów Platona; ale dla umysłów greckich nie wystarczała, gdy szło o dowodzenie twierdzeń; po dojściu tedy do prawdy drogą analityczną, przeprowadzano rozumowanie w kierunku syntetycznym. Metoda wykładu euklidesowego stanowi dobrą szkołę logicznego myślenia, ale nie jest drogą inwencyi i wynalazku. Czytelnik, lub uczeń dowiaduje się, co ma być, co jest prawdą i dla czego; ale w jakim celu przeprowadza się pewne badanie, to dopiero ocenić może, gdy dojdzie do wyników. Uczeń, idąc od twierdzeń do twierdzeń, nie widzi często ich wzajemnego związku, nie widzi celu przed sobą. Dla wprowadzenia młodocianych umysłów w ten świat gieometryi, potrzeba przeto odpowiedniego przygotowania i gienetycznéj metody wykładu. Euklides nie pisał gieometryi dla początkujących, lecz pragnął ułożyć całość wiedzy gieometrycznéj, wówczas znanéj i odpowiadającéj warunkom umiejętnéj budowy; rzeczą pedagogiki szkolnéj jest ten świat pojęć i prawd uczynić przystępnym dla młodzieży. Usiłowania na tém polu są czynione, nietylko w tak zwanych „propedeutykach“ gieometrycznych i „gieometryjach popularnych“, przeznaczonych dla początkowéj nauki, ale i w kursach gieometryi przeznaczonych dla szkół średnich. Niektóre, nowsze podręczniki gieometryi (Huberta Müllera, Henrici'ego i Treutleina, Beckera i innych oddalają się już od formy euklidesowéj oryginalnéj (lub zmienionéj, jak np. w podręczniku Legendre'a), uwzględniają wyniki nowszéj gieometryi syntetycznéj, jako też metody téj ostatniéj, a głównie starają się wprowadzić ogólność, stanowiącą cechę nowożytnéj matematyki, podczas gdy nauka matematyki u starożytnych była specyjalizacyją, to jest rozważaniem wszystkich przytrafiających się w daném twierdzeniu lub zagadnieniu przypadków szczególnych. Przytém nowsze podręczniki zwracają baczniejszą uwagę na precyzyją w pojęciach zasadniczych w ogóle i w układzie podstaw umiejętności. W ten sposób prowadzony wykład, pozwala widzieć drogę, wiodącą do odkrycia prawd, pozwala widzieć związek wzajemny twierdzeń, zagadnień, słowem nadaje przedmiotowi cechę, rozwijającéj się konsekwentnie całości. Myśl taką organicznego rozwijania się całości najdobitniéj wyraził Steiner we wspomnioném wyżéj dziele swém; w gieometryi szkolnéj wymienione dopiero co prace stanowią pierwsze próby jéj urzeczywistnienia. Na innéj drodze urzeczywistnienie téj myśli mogłoby dać zastosowanie poglądów Grassmanowskich, jak to częściowo wykazał Schlegel (System der Raumlehre, Handbuch der Mathematik). Metody genetyczne najlepiéj nadają się do osiągnięcia celów pedagogicznych nauki gieometryi, a mianowicie: uświadomienia drogi, po któréj się postępuje dla zdobycia prawdy, podtrzymania interesu, pobudzenia samodzielności. Ta dbałość o samodzielność uczących się była po największéj części pod tym względem między pedagogami niéma. Jedni z nich chcą miéć przystępny, popularny, że tak powiemy, wykład najprostszych własności niektórych figur gieometrycznych; inni chcą uczyć gieometryi na rysunku i rozwiązywaniu konstrukcyjném prostych zagadnień; inni znów wprowadzają naukę na tory praktyczne, radząc uskutecznianie pomiarów na gruncie; inni wreszcie w kursie gieometryi w szkole elementarnéj chcą widzieć głównie przygotowanie do tych rozumowań, jakie stanowią cechę umiejętnego wykładu. Trudno orzec, któremu z tych kierunków należy się pierwszeństwo; najlepiéj może będzie gdy w miarę możności, uwzględni się wymagania każdego z nich. W szkole początkowéj, w któréj mała dziatwa rozpoczyna dopiero naukę, wystarczy, naturalnie, obznajmianie z rozmaitemi formami, spotykanemi w przyrodzie, rzemiosłach i przemyśle; ~~w~~ szkole, w któréj młodzież przebywa dłuższy przeciąg czasu, należy podawać znaczniejszy zasób faktów, bacząc zarazem na rozwój logicznego myślenia, oraz na zastosowania praktyczne. Wprowadzanie w tym stopniu pojęć nieskończonościowych (jak to czynią niektórzy pedagogowie niemieccy np. Hoffmann („Vorschule der Geometrie)“ wydaje się nam nieodpowiedniém. We Francyi, Niemczech, Austryi, Hiszpanii, Hollandyi i we Włoszech, gieometryja w szkołach elementarnych jest przedmiotem wykładowym; w Szwajcaryi wykładaną bywa w wielu kantonach. W Szwecyi jest nieobowiązującą dotąd; w Danii, Norwegii, Anglii i Szkocyi nie jest wymienianą, jako oddzielna gałąź nauczania.

W szkołach, zwanych miejskiemi, które uważać należy jako środkujące między szkołami elementarnemi a średniemi, gieometryja wykładana być może i powinna w zakresie pełniejszym. Do kursu gieometryi w szkole takiéj wchodzić mogą te prawdy z planimetryi i stereometryi, które dają poznać najważniejsze własności figur gieometrycznych i prowadzą do sposobów mierzenia długości, nachylenia (kątów), powierzchni i objętości, oraz do rozwiązywania prostych zagadnień gieometrycznych. Twierdzenia, cechy bardziéj teoretycznéj, winny być opuszczane; dowody należy dawać, o ile można, najprzystępniejsze i sprawdzić się dające doświadczalnie.

Zakres wykładu gieometryi w szkołach średnich jest, a przynajmniéj był do niedawnego bardzo czasu zupełnie ustalony. Elementy Euklidesa (z wyłączeniem ksiąg arytmetycznych) z dodaniem sposobów mierzenia powierzchni i objętości kuli, trygonometryja płaska, rzadziéj kulista, niekiedy zasady gieometryi wykreślnéj, lub początki gieometryi analitycznéj i najprostsze wiadomości z nowszéj gieometryi syntetycznéj,—oto program gieometryi, wykładanéj w większości szkół średnich. O każdym z tych przedmiotów należy nam kilka słów powiedzieć.

Na treść gieometryi elementarnéj (planimetryi i stereometryi) składają się mniéj więcéj poniższe ustępy: a) Planimetryja: Pojęcia wstępne, określenia. Twierdzenia o linijach prostych i kątach. Twierdzenia o linijach równoległych. O figurach w ogóle i o trójkątach w szczególności. Suma kątów zewnętrznych i wewnętrznych w wielokątach i trójkątach. Przystawanie trójkątów. Twierdzenia o zależności między bokami i kątami w trójkącie. Zastosowanie powyższéj teoryi do trójkątów prostokątnych. Linije prostopadłe i pochyłe. Twierdzenia o czworokątach w ogóle, o trapezach i równoległobokach w szczególności. Okrąg koła i linije w kole. Figury wpisane i opisane. Przecięcie się i styczność kół. Miara kątów. Konstrukcyje gieometryczne: kreślenie linij prostopadłych, równoległych, kątów równych, trójkątów, najprostszych miejsc gieometrycznych, stycznéj do koła i t. d. Proporcyjonalność linij. Podobieństwo trójkątów. Podobieństwo wielokątów. Zastosowanie teoryi podobieństwa do wywodu różnych własności trójkątów prostokątnych i nieprostokątnych. Linije proporcyjonalne w kole. Twierdzenia o przecinających się cięciwach, o dwóch siecznych, o stycznéj i siecznéj, wychodzących z jednego pun-

Podać bardziej szczegółowe [illegible] o [illegible] dla [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] równoległe — [illegible]) ktu. Podział linii w stosunku skrajnym i średnim. Twierdzenie Ptolemeusza. Wielokąty foremne, wpisane i opisane. Obliczanie długości boków wielokątów foremnych. Stosunek obwodów wielokątów foremnych. Stosunek długości okręgów kół. Liczba $\pi$. Przybliżone jéj obliczanie. Obliczanie długości łuku. Równoważność figur. Równoważność równoległoboków i prostokątów. Twierdzenie Pappusa. Twierdzenie Pytagorasa. Obliczanie powierzchni prostokątów, kwadratów, równoległoboków, trójkątów, trapezów. Formuła Herona. Stosunek powierzchni figur podobnych. Powierzchnia wielokąta foremnego. Powierzchnia koła i jego części. Zastosowanie twierdzeń o podobieństwie lub o równoważności do podziału harmonicznego i do teoryj poprzecznych. Tu dodawaną bywa, tam gdzie jest wykładana, teoryja syntetyczna stożkowych. b) Stereometryja: Twierdzenia o linii prostéj i płaszczyźnie. O linii prostopadłéj do płaszczyzny. Płaszczyzny i proste równoległe, kąty na płaszczyznach równoległych, kąt między prostą a płaszczyzną. Najkrótsza odległość dwóch prostych, nie leżących na jednéj płaszczyźnie. Twierdzenia o kątach dwuściennych. Kąty bryłowe i figury sferyczne: własności, przystawanie i symetryja kątów bryłowych. O wielościanach w ogólności. Twierdzenie Eulera o wielościanach; wnioski z tego twierdzenia. Wielościany foremne. Graniastosłupy, równoległościany i prostopadłościany; własności tych brył gieometrycznych i obliczanie ich powierzchni. Równoważność równoległościanów. Ostrosłupy; twierdzenia o ostrosłupach; związek ich z graniastosłupem. Obliczanie powierzchni tych brył. Wymierzanie objętości prostopadłościanów, równoległościanów, graniastosłupów, ostrosłupów i graniastosłupów uciętych. Pryzmatoidy i ich objętość. O walcu kołowym, obliczaniu jego powierzchni i objętości. O ostrokręgu (stożku), wymierzaniu jego powierzchni i objętości. Przecięcia stożka. Własności kuli i figur na powierzchni kuli. Wymierzanie powierzchni kuli, trójkątów i wielokątów kulistych. Objętość kuli i części kuli. Twierdzenie Archimedesa.

Porządek, w jakim podane są tu rozmaite części kursu, może naturalnie, uledz zmianom; zależy to od programu przepisanego, od poglądu wykładającego i t. p. Nie pisząc tu metodyki gieometryi, nie możemy wdawać się w szczegółowe rozpatrzenie téj rzeczy; powiemy tylko, że metodyka gieometryi szkolnéj nie jest dotąd w ogóle należycie opracowaną, a wyżéj już wspomnieliśmy, że domaga się ulepszeń. Jedną z gruntownych reform, jakie w wykładzie systematycznym gieometryi szkolnéj polecają niektórzy matematycy, jest zerwanie z dotychczasowym podziałem na planimetryją i stereometryją. Za podziałem tym wprawdzie przemawiają dotąd powaga Euklidesa, rutyna wieków i ten wzgląd dydaktyczny, że planimetryja, mając do czynienia z figurami dwuwymiarowemi, stanowi przygotowanie do teoryi figur trójwymiarowych (przestrzennych). Lecz z drugiéj strony zauważmy, że figury dwuwymiarowe (na płaszczyźnie), są tylko granicami figur trójwymiarowych, których formy konkretne znajdujemy w przyrodzie; że metoda Euklidesa ogranicza badanie tych form do figur na płaszczyźnie, by potém dopiero przejść do form przestrzennych, tak, że powtórzenie badania w przestrzeni okazuje się często konieczném. Wiele twierdzeń dałoby się ogólniéj wysłowić i dowieść, gdyby figury, do których się odnoszą, były odrazu uważane w przestrzeni; inne znów twierdzenia dałyby się uprościć, a związek wzajemny figur daleko lepiéj dałby się uwydatnić, niż przy badaniu ograniczoném do płaszczyzny (np. teoryja miejsc gieometrycznych). Pewniki, t. j. aksyjomaty i postulaty gieometryczne stosują się do prostéj i płaszczyzny w przestrzeni, a nietylko do prostéj na płaszczyźnie; tak, że traktowanie gieometryi bez podziału na planimetryją i stereometryją najlepiéj odpowiadałoby duchowi badań nowoczesnych. Rozumié się, że w samém wykonaniu tego planu trzeba będzie nieraz rozpoczynać od form płaskich; ale bada-

Schwering (Aufgaben aus [illegible] 1885) jest przeciwnego zdania, że [illegible] dydakt. [illegible] nie to, podjęte z ogólnego stanowiska, w niczém nie zmieni charakteru ogólnego planu kursu. Próbę podobnego traktowania gieometryi, znajdujemy u Bretschneidera (Lehrgebäude der niederen Geometrie. Jena, 1844), oraz w niedawno wydanéj świetnéj: „Gieometryi,“ włoskiego matematyka de Paolisa (1884). Kurs gieometryi, w tém ostatniém dziełku składa się z następujących działów. W dziale pierwszym traktowane są prawdy zasadnicze (postulaty, aksyjomaty i twierdzenia), odnoszące się do figur elementarnych, t. j. do odcinków prostolinijnych, kątów linijnych, kątów dwuściennych i linij równoległych; twierdzenia o linijach prostopadłych i pochyłych, o figurach symetrycznych, o kole i kuli, o konstrukcyi figur gieometrycznych. Dział drugi traktuje własności figur gieometrycznych: trójkątów, wielokątów, kątów bryłowych i wielościanów. Dział trzeci ma za przedmiot badanie powierzchni walca, ostrokręgu, kuli, wielokątów, i wielościanów wpisanych i opisanych. Dział czwarty poświęcony jest teoryi równoważności figur (pod względem powierzchni i objętości); dział następny teoryi proporcyjonalności i podobieństwa, dział wreszcie ostatni zajmuje się ogólną teoryją pomiaru wielkości gieometrycznych.

O zadaniach konstrukcyjnych wspominaliśmy już wyżéj; dodamy jeszcze, że rozwiązywanie tych zagadnień, ze względu na różność zadań, jako téż ze względu na liczne ich zastosowania, może tworzyć prawie oddzielny przedmiot wykładowy, co téż ma miejsce w szkołach realnych u nas. Przedmiot ten, nazwany: „nauką kreślenia,“ zawiera w sobie zagadnienia planimetryczne, jako téż sposoby kreślenia różnych linij krzywych, elipsy, hyperboli, paraboli, spiralnéj Archimedesa, cykloidy, linii śrubowéj i t. d., wraz ze sposobami prowadzenia stycznych i normalnych do niektórych z nich i t. d. W gimnazyjach, wobec szczupłéj liczby godzin na gieometryją przeznaczonych, niéma czasu na rozwiązywanie znacznéj liczby zagadnień i dlatego w kursie ograniczyć się należy do zadań najprost-

Indem ich nur für den synthetischen Theil meines Werkes die durch die Natur der Wissenschaft selbst gebotene Scheidung derselben in die Geometrie der Lage, der Gestalt, des Maasses und in die organische Geometrie zu Grunde legte, konnte die Trennung des Stoffes in Planimetrie und Stereometrie als Hauptabtheilung [illegible] fallen gelassen werden szych, lub typowych, które służyć mogą jako doskonały środek utrwalenia znajomości twierdzeń gieometrycznych. Wogóle, zbiór zagadnień konstrukcyjnych traktowanych nie urywkowo, ale w pewnym ładzie i według pewnego planu, stanowi ważne dopełnienie do kursu gieometryi i otwiera drogę do studyjów gieometryi nowożytnéj, jak to widzieć można w doskonałéj książeczce Petersena, o któréj była już mowa. Zagadnienia konstrukcyjne z dziedziny stereometryi należą już przeważnie do zakresu gieometryi syntetycznéj lub wykreślnéj (opisującéj), o któréj mowa będzie niżéj.

Treść trygonometryi płaskiéj, wykładanéj w szkołach, jest następująca: Określenia funkcyj kołowych, czyli trygonometrycznych lub goniometrycznych: wstawy, stycznéj, dostawy dotycznéj. Funkcyje kołowe odwrotne (łuk wstawy i t. d.). Teoryja rzutów i zastosowania tejże do teoryi funkcyj kołowych. Związki między funkcyjami kołowemi jednego i tego samego łuku. Dodawanie argumentów. Mnożenie i dzielenie argumentów. Przekształcenie sum i różnic funkcyj kołowych na iloczyny. Układ tablic funkcyj trygonometrycznych. Trygonometryja właściwa. Twierdzenia o trójkątach prostokątnych i ukośnokątnych.—Wyrażenie kątów trójkąta w funkcyi boków. Rozmaite wyrażenia powierzchni trójkąta. Wyrażenie promieni kół stycznych do boków trójkąta. Wyrażenie promienia koła opisanego. Rozwiązywanie trójkątów jakichkolwiek (cztery przypadki główne). Rozwiązywanie trójkątów w przypadkach, gdy danemi są nie same elementy, lecz ich różne kombinacyje. Zastosowania do zagadnień rachunkowych, pomiarowych, tryjangulacyi i t. p. Trygonometryja sferyczna, o ile w szkołach wykładaną bywa, obejmuje wykład własności trójkątów sferycznych, związków między trzema bokami i kątem, między dwoma bokami i dwoma kątami przeciwległymi, między dwoma bokami, kątem między nimi zawartym i kątem przeciwległym jednemu z nich; związek między jednym bokiem i trzema kątami.

Wyrażenie kątów w funkcyi boków. Wyrażenie boków w funkcyi kątów. Wzory Delambre'a, analogije Nepera. Różne wyrażenia przepełnienia kulistego. Koło wpisane w trójkąt kulisty i opisane na nim. Rozwiązywanie trójkątów kulistych prostokątnych (sześć przypadków). Rozwiązywanie trójkątów kulistych jakichkolwiek (sześć przypadków). Powierzchnia trójkąta kulistego. Zastosowania trygonometryi kulistéj do zagadnień gieograficznych i astronomicznych. Do trygonometryi włączają niekiedy teoryją analityczną funkcyj trygonometrycznych, lecz przedmiot ten, wymagający znajomości już to teoryi szeregów nieskończonych, jużto innych części analizy, nie nadaje się do wykładu w szkołach średnich, zwłaszcza przy dzisiejszym planie nauk. Trygonometryja ma ważne znaczenie dydaktyczne, jako łącznik pomiędzy gieometryją właściwą a analizą; z jednéj strony utrwala w uczniach wiadomości z gieometryi, z drugiéj zaś obznajmia z najprostszemi metodami ilościowego badania figur gieometrycznych, wprawiając zarazem w rachunek logarytmowy. Wprowadzając pojęcie ilości zmiennych i funkcyj, stanowi trygonometryja przejście od matematyki niższéj do wyższéj. Pojęcie zmienności i zależności jest jedném z kardynalnych pojęć w naukach ścisłych i, jeżeli nie w swych ogólniejszych przejawach, to przynajmniéj w specyjalniejszych postaciach nie powinno pozostać obcém młodzieży, która kończy szkoły średnie. Zgodnie z tym swoim charakterem trygonometryja niéma być uważana jedynie, jako nauka rozwiązywania trójkątów, lecz jako część wiedzy, dająca metody badania metodycznego; przy wykładzie zaś tego przedmiotu nauczyciel tę właśnie okoliczność winien mieć na oku.

rachunkowa

Gieometryja analityczna kwalifikuje się właściwie do kursów uniwersyteckich, ale zasad téj nauki, bez używania rachunku wyższego, uczą niekiedy w wyższych klasach szkół średnich. W wykładzie takim jest rzeczą najważniejszą, by uczniowie zrozumieli całą ważność i doniosłość pomysłu Dekartowskiego wyrażania figur gieometrycznych w obrazie analitycznym przy pomocy związków (równań) między zmiennemi, oznaczającemi współrzędne punktów, w odniesieniu ich do osi danych,—i odwrotnie, odtwarzania figury, odpowiadającéj danemu związkowi analitycznemu. Odpowiedniość przekształceń analitycznych i konstrukcyj gieometrycznych stanowi fakt naukowo i pedagogicznie ważny, z którego płynie niemała korzyść dla umysłowego rozwoju uczniów. Pojęcie współrzędnych napotyka uczący się już przy początkowym wykładzie gieografii, nauka fizyki przedstawia mu sporo przypadków zależności między wielkościami, wykład zaś trygonometryi, gdzie uczeń obznajmia się z pojęciem funkcyj trygonometrycznych, daje zarazem najlepszą podstawę do wprowadzenia współrzędnych prostokątnych i biegunowych. I pojęcie współrzędnych w przestrzeni w odniesieniu do układu trzech osi prostokątnych nie może przedstawiać trudności. Przed dwoma z górą dziesiątkami lat gieometryja analityczna, wykładana w szkołach naszych, obejmowała prawie zupełny kurs gieometryi dwuwymiarowéj, z wyłączeniem naturalnie teoryj, wymagających rachunku wyższego, a więc: teoryją współrzędnych, zamianę współrzędnych, badanie analityczne prostéj i koła, teoryją analityczną krzywych drugiego stopnia, własności tychże ogólne i specyjalne. Treść wymieniona, o ile gieometryja analityczna wchodzi w zakres planu szkolnego, stanowi doskonały i interesujący przedmiot wykładowy, który dopełnićby należało najprostszemi wiadomościami z gieometryi trójwymiarowéj, raz dla ich ważności, powtóre dlatego, że gdy uczniowie są już przygotowani do słuchania gieometryi analitycznéj, to uważanie figur w przestrzeni nietylko nie sprawia im trudności, lecz przeciwnie ogólnością swą bardziéj zainteresować ich może.

Wprowadzenie początków nowszéj gieometryi syntetycznéj do szkoł średnich jest jeszcze kwestyją sporną. Jedni pedagogowie chcą mieć w szkole średniéj zupełnie oddzielny kurs elementarny gieometryi syntetycznéj, inni zadawalają się włączeniem niektórych tylko jéj części do wykładu gieometryi euklidesowéj, inni wreszcie są zdania, że gieometryja ta wcale do szkoły średniéj nie należy. Zastanówmy się bliżéj nad tą kwestyją i rozważmy gieometyją syntetyczną ze względu na jéj treść i metodę. Pod względem treści gieometryja ta nie może w istocie rzeczy różnić się od innéj gieometryi, gdyż badanie figur jest zadaniem każdéj gieometryi, tylko że gieometryja syntetyczna rozpoczyna badania swe od najprostszych utworów, jakim dawniéj nie poświęcano należytéj uwagi. Szeregi punktów, pęki linij i płaszczyzn, teoryja figur perspektywicznych, teoryja utworów harmonicznych, teoryja biegunów i biegunowych i t. d. (znane w części starożytnym) i oparte na powyższych teoryjach badanie linij i powierzchni krzywych— oto treść gieometryi syntetycznéj. Ze względu na metodę, gieometryja syntetyczna nowsza tém się różni od metody starożytnych, że, jak to wspomniano już wyżéj, w traktowaniu zagadnień posługuje się tą ogólnością, jaka jest c chą matematyki nowożytnéj; obejmuje więc całe grupy zagadnień w zagadnieni ogólném, posługuje się ogólnemi zasadami (ciągłość, dwoistość i t. p.), które pozwalają od związków pomiędzy utworami jednéj kategoryi przejść bezpośrednio do związków pomiędzy utworami innéj kategoryi i t. p. Przedmiot ten, ze względu na treść, a szczególniéj ze względu na metodę, nadaje się przeważnie tylko do wykładu wyższego; do wykładu zaś elementarnego w szkole średniéj, o ile okoliczności pozwalają, przenieśćby można teoryją szeregu punktów i pęków linij, teoryją podziału harmonicznego, teoryją biegunów i biegunowych i oprzéć na tém elementarną teoryją stożkowych. Wybór części działów, nadających się do elementarnego wykładu, nie jest dotąd zupełnie ustalony. Badanie czysto syntetyczne własności figur niezmiernie podnosi zamiłowanie do badań gieometrycznych; przy dzisiejszym jednak programie matematyki szkolnéj, przy metodzie nieodstępującéj prawie od Euklidesa, przy niewielkiéj liczbie godzin na gieometryją przeznaczonych, wprowadzenie elementarnego kursu gieometryi syntetycznéj z trudnością dałoby się w szkołach naszych uskutecznić. Pomyślniejszego rezultatu oczekiwać będzie można dopiero wtedy, gdy metoda wykładu gieometryi zostanie odpowiednio zmodyfikowaną: wtedy bowiem metody i twierdzenia nowszéj gieometryi syntetycznéj, nie stanowiąc istotnie nic różnego od reszty kursu, będą częścią integralną zasad gieometryi elementarnéj.

Wspomnieliśmy wyżéj, że zadania konstrukcyjne ze stereometryi należą już właściwie do gieometryi wykreślnéj, czyli opisowéj. I ta gałąź gieometryi należy właściwie do przedmiotów, wykładanych w wyższych zakładach naukowych, jakkolwiek zasady jéj tu i owdzie wykładają w szkołach średnich, zwłaszcza realnych i profesyjonalnych, już to jako dopełnienie nauki rysunku, już jako samodzielną gałąź. Kurs gieometryi opisowéj w szkole średniéj zawiera zwykle najważniejsze zagadnienia, odnoszące się do przedstawienia w rzutach, na płaszczyźnie rysunkowéj, linij prostych i płaszczyzn w najrozmaitszych położeniach względnych, ich przecięć i t. p.; daléj przedstawienie w rzutach graniastosłupa i ostrosłupa, genezę powierzchni przy pomocy ruchu prostéj; powierzchnie walcowe, ostrokręgowe, płaszczyzny styczne do nich, przecięcia ostrokręgu i walca, liniją śrubową; wykładane bywają i ogólne zasady perspektywy. Traktowanie gieometryi elementarnéj bez podziału na planimetryją i stereometryją, jak to wyżéj wykazaliśmy, może znakomicie ułatwić wprowadzenie początków gieometryi wykreślnéj do wykładu szkolnego.

Program gieometryi w szkole średniéj, obejmujący gieometryją elementarną (starożytnych), wraz z wiadomościami z gieometryi nowszéj, trygonometryją prostą i niekiedy kulistą, zasady gieometryi analitycznéj i początki wykreślnéj, wydać się może słusznie za obszerny i niemożliwy do przejścia w ciągu szeregu lat na naukę przeznaczonego, zwłaszcza w szkołach klasycznych, gdzie prawie połowa całkowitéj ilości godzin przeznaczona jest na naukę języków starożytnych. Już bardziéj możliwym do przeprowadzenia jest program powyższy w szkołach realnych, w których na naukę matematyki przeznacza się znaczniejsza liczba godzin. Lecz zaznaczona wyżéj niemożliwość jest, zdaniem naszém względną, i tkwi raczéj w brakach dotychczasowego uczenia matematyki. Wykład matematyki szkolnéj nie odznacza się dotąd tą prostotą, jaka cechować winna wzorową naukę szkolną. Wolno przypuszczać, że z czasem elementy gieometryi starożytnéj, nowożytnéj i wykreślnéj zleją się w jednę całość, że wykład stanie się prostszym i że, bez obciążania uczniów zbytecznemi szczegółami, osięgać będzie można rezultaty pożądane szybciéj, niż dotychczas. A gdy i dzięki reformie, jakiéj z czasem poddaną zostanie szkoła średnia, liczba godzin przeznaczonych na matematykę nieco podniesioną zostanie, będzie wtedy rzeczą możliwą ułożenie takiego kursu gieometryi elementarnéj, któryby, stanowiąc całość jednolitą, obznajmiał uczniów z elementami każdéj poszczególnéj dziś gałęzi wiedzy gieometrycznéj.

Pozostaje nam jeszcze do omówienia program nauki gieometryi w dzisiejszych szkołach, przeznaczonych dla młodzieży żeńskiéj. Pod względem nauki gieometryi i matematyki w ogóle, szkoły żeńskie były i są po większéj części bardzo upośledzone. Zwykle ograniczano się w szkołach żeńskich na nauce arytmetyki, a wiadomości z gieometryi dawano powierzchownie, w zakresie nader szczupłym. Tak ograniczony wykład matematyki uważano za konieczny, już to ze względu na słabe jakoby zdolności matematyczne dziewcząt, już to ze względu na rolę kobiet, wyłączającą ją ze sfery nauki i życia publicznego. Dziś, pod wpływem warunków ekonomicznych, oraz nowoczesnych prądów nauki i oświaty, zmieniły się i zmieniają poglądy na uzdolnienie

Q. Podręcz.. „Die Zahl der einzig prägenden Lehrsätze ist auf das genauste Maass zu beschränken, welches zum Aufbau des Systems notwendig ist. Alle Sätze von untergeordneter Bedeutung tendieren



kobiet: dziś od szkoły żeńskiéj wymagamy już czegoś więcéj ponad ćwiczenie w językach, kształcenie pamięci i dostarczenie pewnego zasobu wiadomości praktyczno-gospodarskich. Dziś przyznajemy, co najmniéj, kobietom prawo kształcenia się nie powierzchownego, lecz gruntownego i dlatego kobieta ma słuszne prawo domagać się, by szkoła dawała jej gruntowne początki wiedzy, a tém samém podstawę do dalszego kształcenia się, gdy okoliczności powołają ją do pracy zawodowéj, właściwéj jéj usposobieniu. To téż w szkole elementarnéj dziewczęta mają zarówno z chłopcami korzystać z wykładu początków gieometryi; w wychowaniu domowém, przedszkolném dziewcząt na przedmiot ten również baczną należy zwracać uwagę. W szkole żeńskiéj, odpowiadającéj szkole średniéj męskiéj, kurs gieometryi elementarnéj, stanowić winien nieodzowną część programu. Kurs ten zbliżony do kursu w szkołach męskich, z wyłączeniem balastu wielu niepotrzebnych twierdzeń, dawać ma zupełnie wystarczającą podstawę do zrozumienia wykładu fizyki i kosmografii; dla uczennic zaś, okazujących większe uzdolnienie do pracy samodzielnéj, można dopełnić kurs ten wykładem trygonometryi i początków gieometryi analitycznéj.

---

Winniśmy tu poświęcić słów kilka podręcznikom i pomocom naukowym w wykładzie gieometryi. Zachodzi pytanie, czy wykład gieometryi w szkole potrzebuje pomocy podręcznika. Na niższym stopniu nauczania gieometryi, wykład ustny, poparty modelami i rysunkiem, powinien najzupełniéj wystarczać i dawanie uczniom książki do ręki jest zbyteczném. Przy systematycznym atoli wykładzie rzecz ma się nieco inaczéj. Nie ulega wątpliwości, że uczenie się z książki dla większości początkujących byłoby po największéj części pracą daremną; żywego wykładu i objaśnień

Übungen zu verwerten. ~~Einen~~ grossen Theil der Sätze wird so verlassen durch das moderne ... der eindeutigen Grössenbestimmung entbehrlich. Das ... Element ist ... als bester zu betonen ...

nauczyciela książka nie zastąpi, gdy tymczasem sam wykład ustny bez książki często wystarcza. Można nawet twierdzić, że zdolny nauczyciel żywym wykładem może tak zainteresować młodzież, że ta robiąc notatki w szkole, może z nich powtarzać lekcyją w domu i usposabiać się do dalszego słuchania wykładu. Lecz, w tym przypadku nie zaszkodzi wcale, gdy obok tego, zwłaszcza w klasach wyższych, korzystać będzie z dobrego podręcznika, przy którego pomocy odświeżać sobie może wykład nauczyciela i wprawiać się zarazem do czytania dzieł naukowych, co jest rzeczą wielce pożądaną. Nauczyciel bacznie śledzić powinien, by czytanie podręcznika nie przechodziło w mechaniczne uczenie się na pamięć, które tylko ujemny może mieć skutek.

Podręczniki do gieometryi, jak i do każdéj innéj nauki różne zakładają sobie cele: jedne pragną zupełnie zastąpić nauczyciela: te są zazwyczaj rozwlekłe i kwalifikują się raczéj dla samouków; inne znów są zbyt treściwe i stanowią niejako konspekt wykładu szkolnego; inne wreszcie trzymają się drogi pośredniéj i zawierają w dokładném odtworzeniu całość wykładu, z opuszczeniem tych wyjaśnień, często ubocznych, któremi nauczyciele zwykli ułatwiać naukę uczniom mniéj rozwiniętym. Napisanie dobrego podręcznika jest zadaniem niełatwém; podjąć je mogą tylko nauczyciele w fachu swym wykształceni, z literaturą przedmiotu obznajmieni, a nadewszystko w doświadczenie pedagogiczne bogaci. Z ogromnego mnóstwa dobrych podręczników, oprócz wymienionych już polskich i obcych, możemy do użytku nauczycieli zalecić następujące: 1) Rouché et Comberousse „Traité de géométrie élémentaire.“ Jestto jeden z najlepiéj opracowanych i bogatych treścią podręczników; zawiera téż wykład ważniejszych twierdzeń z gieometryi nowszéj i liczne ćwiczenia. 2) Tychże autorów: „Cours de géométrie élémentaire“ do użytku uczniów. 3) Spitz: „Lehrbuch der ebenen Geometrie,“ tegoż: „Lehrbuch der Stereometrie“ zawierają, prócz zupełnego kursu, liczne zadania i ćwiczenia. 4) Faifofer: „Elementi di geometria" (1888). Wyborny podręcznik szkolny. 5) J. K. Becker: „Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage." Dzieła tego, biorącego rozbrat z metodą euklidesową, wyszła dotąd część pierwsza, zawierająca wykład prawd zasadniczych, odnoszących się do położenia i kształtu najprostszych figur gieometrycznych. Wykład ściśle umiejętny dla bardziéj posuniętych. 6) Tenże autor wydał kurs gieometryi elementarnéj do użytku szkolnego p. t.: „Lehrbuch der Elementargeometrie." 7) Henrici i Treutlein: „Lehrbuch der Elementargeometrie." I z téj książki usunięto metodę euklidesową, a natomiast wprowadzono ściśle genetyczną; obznajmia ona z metodami gieometryi nowszéj. 8) J. Pasch: „Vorlesungen über neuere Geometrie." Odznacza się nadzwyczajną precyzyją w wyjaśnianiu zasad gieometryi nowszéj. 9) Milinowski: „Elementar synthetische Theorie der Kegelschnitte." 10) Richard Baltzer: „Die Elemente der Mathematik" zawiera (oprócz arytmetyki i algiebry) gieometryją i trygonometryją. Cenny podręcznik dla nauczycieli (cytaty historyczne). 11) V. Schlegel: „Lehrbuch der elementaren Mathematik," dzieło opracowane według zasad nauki grasmanowskiéj. 12) Brict et Bouquet: „Leçons de trigonométrie." 13) Spitz: „Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 13) Jullien: „Cours élémentaire de géométrie descriptive" i t. d. i t. d. Do studyjów głębszych nad gieometryją koniecznėm jest czytanie prac: Poncelet'a, Chasles'a, Clebscha i t. d.; dla celów zaś dydaktycznych dzieł: Reidt'a, Dauge'a, Krusego, Rausenbergera. (O Rausenbergerze powiedzieć obszerniej)

Ważne znaczenie w nauczaniu gieometryi przypada rysunkom i modelom. W gieometryi elementarnéj rysunek jest nieodzowny; przy dowodzeniu twierdzeń jest on tu raczéj środkiem, niż celem. Wywód wprawdzie od dokładności rysunku nie zależy; nie idzie jednak zatém, by dbałość o czystość i o możliwą dokładność rysunku była zbyteczną. Jest ona nawet konieczną, gdy idzie o zastosowania praktyczne, gdy rysunek stanowi drogę rozwiązania zadania. Nauczyciel winien wymagać od uczniów, aby rysunek, czy to odręczny, czy przy pomocy linijki i cyrkla uskuteczniony, był, ile można, dokładny; zaprawienie do dokładnego rysunku, jest szczególniéj ważném dla gieometryi wykreślnéj, a ze względów estetycznych najbardziéj zaleconém być winno. W wielu razach rysunek jest niewystarczającym i słaba wyobraźnia uczącego się wymaga pomocy silniejszéj; taką pomocą są modele figur gieometrycznych. Wiadomo naprzykład, że uczniom sprawia niekiedy trudności zrozumienie dowodów w stereometryi z tego powodu, że rysunku figur przestrzennych na jednéj płaszczyźnie nie pojmują. Zastosowanie w takich razach modeli usuwa trudności i jednocześnie kształci wyobraźnią. Kształcenie wyobraźni jest dotąd w wychowaniu niesłusznie zaniedbywaném, co wpływa niekorzystnie na rozwój samodzielności i inwencyi u młodzieży. Nauka gieometryi przy pomocy modeli i rysunku figur przestrzennych przyczynić się może do rozwoju téj ważnéj zdolności odtwórczéj umysłu. Modele najprostszych brył, modele figur, odnoszących się do wzajemnego położenia linij i płaszczyzn, modele figur do przecięć ostrosłupów, piramid, walców, ostrokręgu, kuli i t. p. wszystko to unaocznia naukę i ułatwia niezmiernie pojmowanie twierdzeń. Dziś i matematyka wyższa ucieka się do modeli gieometrycznych (modele Brilla) do przedstawiania powierzchni drugiego i wyższych rzędów.

---

Na zakończenie wreszcie artykułu naszego należy poświęcić słów kilka sprawie uwzględnienia wiadomości historycznych w wykładzie elementarnym gieometryi w szkołach. Jesteśmy zdania, że podawanie treściwych i odpowiednio przedstawionych wiadomości historycznych, odnoszących się do rozmaitych twierdzeń i metod w kursie, jest pożyteczne pod względem dydaktycznym i ogólno-wychowawczym, albowiem z jednéj strony wyjaśnia uczącym się kolejny rozwój nauki, z drugiéj zaś wiąże odkrycia naukowe z ogólnym biegiem rozwoju cywilizacyi. Wiadomości historyczne podnoszą przytém zainteresowanie się uczniów do danéj nauki i dlatego działają bardzo zachęcająco. Gieometryja właśnie przedstawia pod tym względem bardzo wdzięczne pole dla wykładającego, albowiem zawiera mnóstwo faktów, bardzo dobrze historycznie zbadanych, należycie usystematyzowanych i pojęciu młodych słuchaczy dostępnych. Przytém z osobistościami, jakie przyczyniły się najbardziéj do rozwoju gieometryi, spotyka się uczący i w historyi powszechnéj, jak z nazwiskami: Talesa, Pytagorasa, Platona, Arystotelesa, Archimedesa i t. d.; bliższe zatém poznanie zasług tych mężów w dziedzinie nauki matematycznéj będzie z pożytkiem dla uczących się. Naturalnie, nauczyciel nie może i nie powinien wdawać się z uczniami w rozstrząsania historyczne, lecz przedstawiać fakty pewne, jasne i przystępne, a takich znajdzie mnóstwo. Z faktów tych dałby się ułożyć bardzo elementarny wykład dziejów gieometryi, który może stanowić część składową kursu, lecz ten należałoby dawać dopiero na samym końcu nauki, lub przy powtórzeniu w klasach wyższych; w klasach niższych zaś należy w odnośnych miejscach podawać krótkie wiadomości historyczne, odnoszące się do rozważanych twierdzeń i zagadnień, oraz do ich odkrywców. — Podać bardziej szczegółowo z [illegible] się składa[illegible] kurs historyczny (porów. Böckler, [illegible], Treutlein)

# Dopełnienia i sprostowania.

Do str. 1-éj.

— Dzieło Chasles'a: „Aperçu historique etc.“, wyszło obecnie w wydaniu trzeciém niezmienioném (1889).

Do str. 2-éj.

— Rozprawa Riemanna znajduje się w dziele: Bernhard Rieman's: „Gesammelte Werke“, Lipsk 1876, str. 254—269. Rozprawa Helmholtza w „Wissenschaftliche Abhandlungen“ von Herman Helmholtz, Lipsk, 1883. Tom II-gi, str. 618—638. Tamże znajdują się jeszcze dwie rozprawy treści analogicznéj. Tenże sam przedmiot poruszał Helmholtz i w odczytach popularnych (Populäre Vorträge, 1876).

Do str. 4-éj.

— Dziełko F. Kleina wydane zostało w roku 1872 (Erlangen).

— W najnowszych czasach powstała nowa gałąź nauki matematycznéj, oparta na pojęciu grupy przekształceń, t. j. takiego szeregu skończonego lub nieskończonego przekształceń funkcyi, że każde dwa przekształcenia po sobie wykonane, dają przekształcenie należące do uważanego szeregu. Umiejętność ta, stworzona dzięki odkryciom Lie'go, Kleina, Poincare'go i Picarda, obiecuje stać się jedną z najogólniejszych umiejętności matematycznych, która obejmie w sobie ogólne pytania, należące do dziedziny analizy, gieometryi i mechaniki.

Do str. 6-éj.

— Interesującém jest dwunastotomowe dzieło Marie'go: „Histoire des sciences mathématiques et physiques“ (Paryż 1883—1888), które wszakże jest niejednostajnie opracowane i ma wiele braków.

Do str. 19-éj.

— Szczegóły o działalności rzymian na polu gieometryi znaleźć można w cytowaném przez nas wielokrotnie dziele Cantora (str. 440—499) Marcus Terentius Varro, przyjaciel Cezara, Vitruvius, autor 10 ksiąg o architekturze, Fabius Quintilianus (około 35—95 po Chr.), Sextus Julius Frontinus (40—163), oto nazwiska ważniejszych pisarzy w rzeczach gieometryi. Do późniejszego okresu literatury matematycznèj rzymskiéj należą: Martianus Capella (urodzony w połowie V-go wieku) (patrz str. 28), Boetius (ur. około 482), autor podręcznika gieometryi, który prawie do 12-go wieku był jedyném źródłem mądrości gieometrycznéj.

Do str. 20-éj.

— Huygens jest téż autorem dzieła „De circuli magnitudine.“ (Lugd. 1654).

Do str. 26-éj.

— Z pisarzy, którzy zajmowali się badaniami nad zasadami gieometryi (i ogólną teoryją rozmaitości), należy jeszcze wymienić: de Tilly'ego: („Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique“ Bruksella 1879): J. Houëla („Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire“ Paryż, 1867).

Do str. 28-éj.

— O Martianusie Capelli patrz wyżéj w dopeł. do str. 19.

Do str. 32-éj.

— W Anglii powstało przed kilkunastu laty stowarzyszenie „Association for the Improvement of Geometrical Teaching“ (A. J. G. T.), mające za zadanie podniesienie i kierownictwo metod nauczania gieometryi elementarnéj, a w szczególności prowadzenie agitacyi przeciw wyłącznemu używaniu w szkołach elementów Euklidesa. W tym celu stowarzyszenie to między innemi wydaje odpowiednie dziełka, traktujące już to oddzielne części gieometryi, już to całość téj nauki. Porówn. str. 72—73.

Do rtr. 46.

— Należy tu wspomnieć o rękopisie polskim gieometryi, noszącym datę 1659 roku, którego autorem jest Józef Naronowicz Naroński. O rękopisie tym podaje szczegóły Żebrawski w swojéj Biblijografii (str. 301—306). Dzieło to, gdyby było w swoim czasie wydane, stanowiłoby drugą gieometryją polską. Na uwagę zasługuje terminologija autora, wogóle bardzo trafna. Tenże autor napisał podręcznik arytmetyki (1655), pozostający dotąd w rękopisie.

Do str. 47.

— Zam. „Clausiusa (?Claviusa)“ winno być wprost „Claviusa.“

— „Geometra polski“ Solskiego, mimo rozbioru, jaki dał Krzyżanowski we wspomnianéj w tekście rozprawie, zasługiwałby dziś jeszcze na obszerniejszy rozbiór. Nie możemy uczynić tego w niniejszéj rozprawie, ale uważamy za właściwe dopełnić wiadomości podane w tekście niektóremi szczegółami, odnoszącemi się do tych części „Geometry,“ które razem wzięte stanowią niejako teoretyczny wykład gieometryi elementarnéj. Są to zabawy I-éj część 2-ga, obejmująca definicyje téjże zabawy część 3, traktująca o pewnikach, wreszcie zabawa VI, obejmująca wykład „własności“ czyli twierdzeń.

Definicyje (str. 9—25) opiera Solski przeważnie na Euklidesie, którego w odpowiednich miejscach cytuje, jakkolwiek nie zawsze szczęśliwie tłómaczy; przyczém podaje określenia wszystkich pojęć, jakie w książce swojéj traktować zamierza, nie wyłączając i określeń linij trygonometrycznych (synus prosty, synus odwrócony, synus komplementu albo dopełniony, tangens albo przystawiony, sekans). Sferojdy są określone w ten sposób: „Sferoides jest to sztuka pełna wyrobiona na elipsie.“

„Sentencyj“ czyli pewników podaje Solski 24, z tych pierwsze dziewięć są zupełnie zgodne z κοιναὶ ἔννοιαι Euklidesa. Dziesiątemu pewnikowi Euklidesowemu odpowiada 12-y u Solskiego, a sławnemu pewnikowi 11-mu czyli postulatowi o linijach równoległych odpowiada sentencyja 13, która brzmi w ten sposób: „Dwie linije proste ku sobie nachylone, gdy ich wbród pociągniesz, kiedykolwiek zejść się muszą:“ Dodaje przy tém Solski uwagę, że „miasto téj sentencyi ma Euklides w tém miejscu trudniejszą sentencyją, którą geometrowie demonstrują jako własność; y ja położyłem ją w zabawie 6-éj własności 10-éj. Otóż w téj zabawie (na str. 231) czytamy twierdzenie następujące:

„Jeżeli zaś linia przez dwie linie pociągnona wewnętrzne y w jedne stronę dwa anguły mniejsze niż dwa krzyżowe (co znaczy: proste) zawrze, takie dwie linie wbród pociągnione zeydą się w kupę w te stronę, w którą są anguły dwa mniejsze od dwóch krzyżowych."

Dowodu téj „własności" atoli nie podaje. Widzimy stąd, że Solski odczuwał trudność w teoryi linij równoległych i pragnął jéj zaradzić przez swoją „sentencyą," która mu, jako praktycznemu gieometrze, wydawała się wystarczającą. Przypuszczam, że szedł w tym razie za swoim mistrzem Taquetem, którego nazywa „Archimedesem czasów naszych."

Zabawa VI podzielona jest na dwanaście części następujących: 1) własności linij, 2) własności angułów, 3) tryangułów, 4) kwadratów płaskich, 5) wielościennych figur, 6) cyrkułów, 7) cyrklistych figur, 8) sfer, 9) kwadratów pełnych albo kostek, 10) walców y konusów, 11) słupów graniastych, 12) piramidów. W każdéj z części jest zbiór twierdzeń, bez dowodów najczęściéj podawanych, z niektóremi wyjątkami, kiedy dowody są bardzo proste. Porządkiem i systematycznością zbiór ten nie odznacza się, przytém rozmaite części są bardzo niejednostajnych rozmiarów.

W części o liniach, po kilku uwagach natury metafizycznéj (o nieskończonym podziale linij, asymptotach i t. d.) mówi o niewspółmierności boku i przekątnéj kwadratu, boku trójkąta równobocznego wpisanego w koło z średnicą koła, poczém odrazu przechodni do twierdzenia o kątach przyległych i wierzchołkowych, do linij równoległych i prostopadłych, poprowadzonych w trójkącie równolegle do jednego z boków, do proporcyjonalności, do podziału linij w stosunku skrajnym i średnim, wreszcie zajmuje się własnościami proporcyj. W części drugiéj zajmuje się znowu kątami przyległemi,—mówi o sumie kątów w trójkącie i wielokącie, o mierze kątów wpisanych w koło i opisanych na kole.

W części trzeciéj zajmuje się własnościami trójkątów, równoważnością figur, podaje twierdzenie Pytagorasa (dowód w następnéj części) i sposób wymierzania powierzchni trójkąta.

W części czwartéj mówi o równoważności prostokątów i równoległoboków, podaje Euklidesowy dowód twierdzenia Pytagorasa, porównywa powierzchnią koła z powierzchnią kwadratu wpisanego i opisanego i daje sposób obliczania powierzchni kuli.

Część piąta, bardzo krótka, zawiera bez dowodu kilkanaście twierdzeń o podobieństwie i równoważności wielokątów.

Część szósta zawiera własności niektórych linij w kole i zajmuje się obliczaniem długości okręgu. Podane są tu stosunki $\frac{22}{7}, \frac{223}{71}, \frac{355}{133}, \frac{31415929}{10000000}$. W końcu znajdujemy niektóre z twierdzeń Guldina o środku ciężkości półokręgu i półkola materyjalnego.

W części siódméj podane są bardzo krótko niektóre własności elipsy, hiperboli i paraboli.

Część ósma podaje sposoby obliczania powierzchni i objętości kuli oraz części kuli.

Część dziewiąta zawiera kilka twierdzeń o stosunku objętości kuli do objętości sześcianu wpisanego i opisanego.

Część dziesiąta traktuje o powierzchni i objętości walców i ostrokręgów, (konojdów i sferojdów), dwunasta wreszcie o graniastosłupach i ostrosłupach.

Widzimy przeto, że zabawa VI zawiera materyjał istotnie obfity, jakkolwiek ułożony bez względu na wymagania dydaktyki. Naukową w właściwém znaczeniu tego wyrazu podobna książka nazwać się nie mogła, ale była bezwątpienia pożyteczną jako zbiór wskazówek, zagadnień praktycznych i na tém polegała jéj wysoka wartość. Autor występuje w niéj jako niepospolity znawca przedmiotu, obznajmiony ze współczesną literaturą, pomysłowy i praktyczny. Pod względem zasobu materyjału i bogactwa treści „Geometra polski" nie ustępuje wielu ówczesnym i późniejszym dziełom zagranicznym, poświęconym praktyce gieometrycznéj i gieometryi stosowanéj.

Te same zalety wykazuje wspomniane w tekście dziełko Solskiego: „Praxis nova" etc., traktujące część zagadnień znajdujących się w drugiéj części „Geometry." Solski téż jest autorem dzieła p. t. „Architekt polski" (Kraków, 1690), stanowiącego pierwszą, rzec można, mechanikę (praktyczną) polską. Krzyżanowski w rozprawie swojéj wyżéj cytowanéj podał obszerniejszą wiadomość o Architekcie. Pan Feliks Kucharzewski w niedawno wydanéj broszurze: „O początkach piśmiennictwa technicznego w Polsce" (Warszawa 1889) mówi o „Geometrze polskim" i szczegółowo rozpatruje „Architekta."

Do str. 57-éj.

— Wiersz 17 od góry zam. *Andryan*, ma być *Adryan*.

Do str. 59-éj.

Tablicę genetyczną gieometryi podał Wroński najprzód w „Introduction à la philosophie des mathématiques" w roku 1811, a następnie nieco zmienioną w „Prolégomènes du Messianisme“ w roku 1842. Oto jéj zarys: Gieometryja dzieli się na dwie części; na teoryą i techniją gieometryczną. Tak teoryja, jak i technija składa się z dwóch działów, z których pierwszy odnosi się do treści, genezy i tworzenia gieometrycznego, drugi do formy i porównania. Każdy z działów składa się znowu z części elementarnéj i systematycznéj.

A. T e o r y j a.

Dział pierwszy.

a) Część elementarna. 1) Badanie elementów pierwotnych: linij prostych, kątów i linij krzywych; 2) Badanie elementów pochodnych: figur prostokreślnych i ograniczonych linijami krzywemi;

b) Część systematyczna: Badanie brył.

Dział drugi.

a) Część elementarna: Podobieństwo.

b) Część systematyczna: Symetrya.

B. T e c h n i a.

Dział pierwszy.

a) Część elementarna: Miara rozciągłości. Wartość geometryczna. Metoda niepodzielnych (Cavalleri'ego). Metoda centrobaryczna (Pappusa). Miejsca geometryczne. Poryzmy geometryczne. Przecięcia stożkowe i inne.

b) Część systematyczna: Trygonometryja. Oznaczenie rozciągłości za pomocą współrzędnych jéj punktów w przestrzeni („prawo najwyższe“ geometryi).

Dział drugi.

a) Część elementarna: Gieometryja wykreślna.

b) Część systematyczna. Gieometryja algorytmiczna czyli analityczna („Zagadnienie powszechne“ geometryi).

Do str. 62-éj.

— Żmurko (1824—1889) wychodził z zasady, że w przestrzeni tkwi źródło wszystkich prawd matematycznych, że więc na nauce o przestrzeni oprzéć się winna cała matematyka. Gieometryją i analizę łączył on w jednę umiejętność, za któréj narzędzie uważał liczby tak zwane kierunkowe, t. j. wielkości matematyczne, obejmujące w jedném pojęciu i w jednym symbolu długość i kierunek. Pomysł Żmurki, rozwinięty szczegółowo w „Wykładzie matematyki“ zgadza się z wcześniejszemi lub równoczesnemi pomysłami Mourey'a, Schefflera i innych; w analizie odpowiada zaś teoryi działań na liczbach urojonych. Mysl zasadnicza wykładu Żmurki, polegająca na unaocznieniu, ożywieniu procesów matematycznych, na uwzględnieniu pierwiastku genetycznego w nauce, jest pedagogicznie słuszną i płodną, szkoda przeto, że oparta na niéj praca: „Matematyka dla szkół średnich“ Dr. O. Fabiana nie została ukończoną.

— Wiersz 6-ty od góry zamiast *i* winno być I.

Do str. 79-éj.

Dzieł, poświęconych metodyce gieometryi, jest dotąd niewiele w literaturze matematycznéj. Dzieło Duhamela: „Des méthodes dans les sciences de raisonnement“ zawiera w 2-éj i 3-éj części wykład metod geometrycznych, lecz zadanie tego dzieła jest więcéj naukowe niż dydaktyczne. Z korzyścią czytać można dzieło F. Dange'a: „Leçons de Méthodologie mathématique.“ Dydaktyce wykładu matematyki poświęcone jest dzieło F. Reidta: „Anleitung zum mathematischen Unterricht“ (Berlin, 1886), którego rozdziały 5-y, 6-y i 7-y) zawierają dydaktykę wykładu propedeutycznego geometryi oraz systematycznego wykładu planimetryi, trygonometryi płaskiéj, stereometryi i trygonometryi kulistéj.

Artykuły dydaktyczne z dziedziny gieometryi zawierają roczniki czasopism: „Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ wychodzącego w Lipsku (od roku 1870) „Mathesis“ (Gand, od 1880), „Journal des Mathématiques élémentaires“ Bourgeta i t. d.

Do str. 89-éj.

Kruse: „Elemente der Geometrie, Erste Abtheilung“ (Berlin, 1875). Rausenberger: „Die Elemensargeometrie des Punktes, der Geroden und der Ebene systematisch und kritisch behandelt“ (Lipsk, 1887); praca bardzo wartościowa pod względem naukowym i metodycznym.

Do podręczników, wyliczonych w tekście, dodajemy jeszcze następujące: Schlömilch: „Grundzüge einer wissenschaflichen Darstellung der Geometrie des Maasses.“ Dr. Hubert Müller: „Leitfaden des ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschuungsweise“ (patrz str. 73). Heinze: „Genetische Stereometrie“ (1886) (zawiera teoryą pomiaru brył geometrycznych, uważanych za różne formy specyalne jednego ciała „centralnego“); Huebner: „Ebene und raumliche Geometrie des Masses,“ (tu trygonometrya wzięta jest za podstawę całego wykładu geometryi).