Kapitel I.

Arithmetik, Mengenlehre, Grundbegriffe der Funktionenlehre.

Von *Hans Hahn* in Wien.

---

§ 1. Größensysteme. Natürliche und rationale Zahlen.

Unter einem *Größensystem* versteht man, nach der Definition von H. Grassmann (*Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin 1861, *Werke* 2, 1. Teil, 298), ein System von Dingen, von denen zwei beliebige (a und b) auf Grund irgendeiner Regel entweder als einander gleich ($a = b$ oder $b = a$) oder als ungleich ($a \neq b$ oder $b \neq a$) erklärt sind, vorausgesetzt, daß die Erklärung der Gleichheit den folgenden Bedingungen genügt: 1. Die Relationen $a = b$ und $a \neq b$ schließen sich gegenseitig aus; 2. jede Größe ist sich selbst gleich ($a = a$); 3. wenn zwei Größen derselben dritten Größe gleich sind, so sind sie untereinander gleich (neben $a = b$, $a = c$ ist auch $b = c$).

Ein Größensystem heißt geordnet, wenn von irgend zwei ungleichen Dingen desselben (a und b) auf Grund irgendeiner Regel das eine (etwa a) als das größere, das andere als das kleinere erklärt ist ($a > b$ oder $b < a$), vorausgesetzt, daß die Erklärung den folgenden Bedingungen genügt: 1. Die Relationen $a > b$ und $a < b$ schließen sich gegenseitig aus; 2. aus $a > b$ und $a = a'$, $b = b'$ folgt $a' > b'$; 3. aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$.

Unter einer *Verknüpfung* (Operation) in unserem Größensysteme verstehen wir irgendeine Regel, die zwei Dingen (a und b) des Systemes ein drittes (sowie jedes diesem dritten Dinge gleiche Ding des Systemes) zuordnet, sei es, daß a und b noch gewissen Beschränkungen unterliegen, sei es, daß sie in unserem Größensysteme beliebig gewählt werden können (im letzteren Falle sagt man, die Verknüpfung sei im betrachteten Größensysteme allgemein ausführbar). Das Resultat der Verknüpfung von a mit b werde bezeichnet durch $a \circ b$; soll dieses Verknüpfungsresultat selbst wieder mit einer Größe verknüpft werden, so setzt man es in Klammern: $(a \circ b)$. Von den Verknüpfungen ist stets vorauszusetzen, daß aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt: $a \circ b = a' \circ b'$.

Eine Verknüpfung heißt *assoziativ,* wenn

$$(1) \qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

sie heißt *kommutativ,* wenn

$$(2) \qquad a \circ b = b \circ a.$$

Ist die betrachtete Verknüpfung assoziativ, so bleibt der Ausdruck $\{[(a_1 \circ a_2) \circ a_3] \cdots \circ a_{n-1}\} \circ a_n$ *ungeändert, wenn man in ihm die einzelnen Größen statt in der angegebenen Weise in beliebiger anderer Weise durch Klammern zusammenfaßt.* Man kann diesen Ausdruck also auch mit Hinweglassung aller Klammern in der Form schreiben: $a_1 \circ a_2 \circ a_3 \cdots \circ a_n$.

Ist die betrachtete Verknüpfung assoziativ und kommutativ, so ändert der Ausdruck $a_1 \circ a_2 \circ a_3 \cdots \circ a_n$ *seinen Wert nicht, wenn man in ihm die Reihenfolge der einzelnen Glieder beliebig abändert.*

Sei in unserem Größensysteme noch eine zweite Verknüpfung definiert, die mit $\odot$ bezeichnet werde; sie heißt *distributiv* zur ersten Verknüpfung, wenn

$$(3) \quad a \odot (b \circ c) = (a \odot b) \circ (a \odot c) \text{ und } (b \circ c) \odot a = (b \odot a) \circ (c \odot a).$$

Ist die Verknüpfung $\odot$ kommutativ, so reduzieren sich diese beiden Gleichungen auf eine.

Wir setzen von nun an voraus, die durch $\circ$ bezeichnete Operation sei allgemein ausführbar, assoziativ und kommutativ. Sind a und b zwei Größen des Systemes, so wird die Aufsuchung einer der Gleichung $b \circ x = a$ genügenden Größe als die zu unserer Verknüpfung *inverse Verknüpfung* bezeichnet (oder auch als *lytische Operation;* im Gegensatz hierzu heißt die zuerst definierte Verknüpfung auch *thetische Operation*). Wir drücken die inverse Verknüpfung aus durch $a \smile b$. Gibt es eine der genannten Gleichung genügende Größe x, so heißt die lytische Operation $a \smile b$ ausführbar, sind alle dieser Gleichung genügenden Größen einander gleich, so heißt sie *eindeutig ausführbar* (ist die thetische Operation nicht kommutativ, so hat man zwei lytische Operationen zu unterscheiden, eine *vordere* und eine *hintere,* je nachdem es sich um Auflösung der Gleichung $x \circ b = a$ oder $b \circ x = a$ handelt).

Ist unser Größensystem ein geordnetes und genügt die thetische Operation der Bedingung:

$$\text{(4)} \qquad \textit{Aus } d > d' \textit{ folgt } c \circ d > c \circ d',$$

so ist die lytische Operation $a \smile b$ *immer, wenn sie ausführbar ist, auch eindeutig.*

Ist in unserem Größensysteme die zur betrachteten Operation inverse zwar nicht allgemein ausführbar, aber immer, wenn sie ausführbar ist, eindeutig, so läßt sich das Größensystem durch Hinzufügung neuer Größen so erweitern und auch die betrachtete Operation auf das neue Größensystem so erweitern, daß sie assoziativ und kommutativ bleibt, die zu ihr inverse Operation aber allgemein eindeutig ausführbar wird. War das ursprüngliche System geordnet und genügte unsere Operation der Bedingung (4), so läßt sich diese Ordnung auch auf das neue System erweitern, und zwar so, daß auch die erweiterte Operation der Bedingung (4) genügt.

Diese Erweiterung geschieht in folgender Weise. Man fügt den Größen des ursprünglichen Systemes als neue Dinge die Paare (a, b) solcher Größen hinzu und definiert die Gleichheit durch die Festsetzungen: 1. Das Paar (a, b) sei gleich dem Paare (a', b'), wenn $a \circ b' = a' \circ b$; 2. das Paar (a, b) sei gleich der Größe c des ursprünglichen Systemes, wenn $a \smile b$ im ursprünglichen Systeme ausführbar ist und c ergibt. Dann ist die beliebige Größe c des ursprünglichen Systemes gleich dem Paare $(a \circ c, a)$, so daß wir alle folgenden Beziehungen nur für Größenpaare festzusetzen brauchen.

Die Erweiterung unserer Operation wird definiert durch:

$$(a, b) \circ (a', b') = (a \circ a', b \circ b').$$

Dann wird:

$$(a, b) \smile (a', b') = (a \circ b', a' \circ b);$$

insbesondere wird:

$$a \smile a' = (a, a').$$

Die Erweiterung der Ordnung geschieht durch die Festsetzung:

$$(a, b) > (a', b') \quad \text{wenn} \quad a \circ b' > b \circ a'.$$

Im erweiterten Systeme gibt es eine und nur eine Größe, die mit einer beliebigen Größe dieses Systemes verknüpft dieselbe

1*

ungeändert läßt; sie heißt indifferente Größe (oder Modul) und ist gleich dem Paare (a, a), oder was dasselbe ist, dem Ausdruck $a \smile a$, wo a eine beliebige Größe des ursprünglichen Systemes ist. Die indifferente Größe kann auch schon im ursprünglichen Systeme enthalten sein.

Dasjenige Größensystem, auf welchem sich die Arithmetik aufbaut, ist das System der *natürlichen* (ganzen positiven) *Zahlen.* Mit einer Analyse des Begriffes der natürlichen Zahl haben sich viele Autoren beschäftigt. Wir nennen die wichtigsten dieser Schriften: E. Schröder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Leipzig 1873, H. v. Helmholtz, *Zählen und Messen, Wissensch. Abh.* **3**, 356, L. Kronecker, *Über den Zahlbegriff, Journ. f. Math.* **101**, 337 (diese beiden Abhandlungen sind zuerst erschienen in: *Philosophische Aufsätze, E. Zeller zu seinem 50jährigen Doktorjubiläum gewidmet,* Leipzig 1887). R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig 1888, G. Peano, *Arithmetices principia nova methodo exposita,* Turin 1889, *Sul concetto di numero, Rev. de math.* **1**, 87, *Formulaire de math.* **2**, § 2 (Turin 1898), **3**, 39 (1901), **4**, 53 (1903); siehe auch Genocchi-Peano, *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung* (deutsch von Bohlmann u. Schepp), 336, Leipzig 1899, G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik,* Jena 1893 u. 1903, D. Hilbert, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. 1904,* 174, B. Russell, *The principles of mathematics* **1**, Cambridge 1903, L. Couturat, *Les principes des mathématiques,* Paris 1905 und *Rev. d. metaph. et d. mor.* **12**, 19, 211 (1904), H. Weber, *Elementare Mengenlehre, Math.-Ver.* **15**, 173 (1906) (abgedr. in H. Weber und J. Wellstein, *Enzykl. d. Elem.-Math.*, Leipzig (1907), **3**, 645; vgl. auch P. Stäckel, *Math.-Ver.* **16**, 425).

Im Gebiete der natürlichen Zahlen gilt der Satz von der *vollständigen Induktion: Es sei eine Aussage, in der eine unbestimmte natürliche Zahl n vorkommt, als richtig erkannt für $n = 1$, und aus der Annahme ihrer Richtigkeit für eine bestimmte Zahl n folge ihre Richtigkeit für die nächstgrößere Zahl $n + 1$; dann ist die Aussage richtig für alle natürlichen Zahlen.*

Die *Addition* und die *Multiplikation* der natürlichen Zahlen sind unbeschränkt ausführbar, assoziativ und kommutativ, und genügen der Bedingung (4). Die Multiplikation ist in Verbindung mit der Addition distributiv. Die umgekehrten Operationen, *Subtraktion* und *Division*, sind im Gebiete der natürlichen Zahlen nicht unbeschränkt ausführbar, soweit sie aber ausführbar sind, eindeutig.

Wir machen zunächst die Division allgemein ausführbar, indem wir, nach der obigen Theorie, das System der natürlichen Zahlen erweitern durch Hinzufügung der Paare natürlicher Zahlen, die nichts anderes sind als die (positiven oder absoluten) Brüche (oder positiven rationalen Zahlen). Für ihre Multiplikation und Division ergibt diese Theorie die Regeln:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}=\frac{a\,a'}{b\,b'};\quad \frac{a}{b}:\frac{a'}{b'}=\frac{ab'}{a'b}.$$

Es läßt sich nun auch die Addition auf unser neues Zahlensystem so erweitern, daß sie assoziativ und kommutativ bleibt und in Verbindung mit ihr die Multiplikation distributiv ist. Es geschieht durch die Formel:

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}=\frac{ab'+a'b}{bb'},$$

und zwar läßt sich zeigen, daß dies die einzig mögliche Erweiterung der Addition ist, der die genannten Eigenschaften zukommen. Sie genügt auch der Bedingung (4); die Subtraktion ist nicht allgemein ausführbar, aber wenn ausführbar, eindeutig.

Um die Subtraktion allgemein ausführbar zu machen, fügen wir wieder zu den bisherigen Zahlen die aus ihnen gebildeten Paare hinzu, wodurch man zum System der allgemeinen (positiven und negativen) rationalen Zahlen gelangt. Unter ihnen befindet sich die gegenüber der Addition indifferente Größe, die Null. Addition und Subtraktion wird gleichfalls durch unsere obige Theorie geliefert. Jede der neu eingeführten Zahlen (außer der Null) läßt sich auf die Form bringen: $0 - a$, wo a positiv rational, und wird dann mit $(-a)$ bezeichnet. Nun läßt sich wieder die Multiplikation auf das Gesamtgebiet der rationalen Zahlen erweitern, so daß sie assoziativ und kommutativ bleibt und in Verbindung mit der Addition distributiv wird. Es geschieht dies durch die Regel: *Ein Produkt, von dem wenigstens ein Faktor Null ist, ist Null,* und durch die Regeln:

$$(-a)\cdot b=-(ab);\ (-a)\cdot(-b)=ab.$$

Wieder läßt sich zeigen, dass diese Erweiterung der Multiplikation die einzige ist, der die genannten Eigenschaften zukommen. Doch genügt sie nicht der Bedingung (4). Die Division ist eindeutig ausführbar, außer wenn der Divisor Null ist. In diesem Falle ist sie unausführbar (wenn der Dividend nicht Null ist) oder unendlich vieldeutig (wenn auch der Dividend Null ist).

Im Gebiete der rationalen Zahlen sind also Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division unbeschränkt und eindeutig ausführbar, mit Ausnahme der Division durch Null.

Eine nähere Ausführung der im obigen skizzierten Theorie findet man bei O. Stolz und J. A. Gmeiner, *Theoretische Arithmetik*, Leipzig 1900 (*Teubners Sammlung* 4). Ferner L. Couturat, *De l'infini mathématique* 1 ff. (Paris 1896) und die oben genannten Schriften von G. Peano.

§ 2. Irrationale Zahlen.

Es sei eine Einteilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen A und B gegeben, derart daß:

1. jede rationale Zahl entweder zu A oder zu B gehört,
2. sowohl A als B rationale Zahlen enthalten, und
3. jede in A stehende Zahl kleiner ist als jede in B stehende Zahl.

Eine solche Einteilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen heißt ein *Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen.* Wir bezeichnen ihn kurz als den Schnitt (A, B). Sei c eine rationale Zahl; gibt man eine rationale Zahl a in die Klasse A, wenn $a < c$ (oder $a \leqq c$) und eine rationale Zahl b in die Klasse B, wenn $b \geqq c$ (oder $b > c$), so erhält man einen solchen Schnitt; er heißt *erzeugt durch die rationale Zahl c.* Es gibt aber auch Schnitte im Gebiete der rationalen Zahlen, welche durch keine rationale Zahl erzeugt werden. Von einem solchen Schnitt sagt man, *er definiert eine irrationale Zahl* γ oder, *er wird erzeugt durch die irrationale Zahl* γ. Die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen bildet das Gebiet der reellen Zahlen. Ist γ definiert durch den Schnitt (A, B), so heißt γ größer als jede in A stehende rationale Zahl und kleiner als jede in B stehende rationale Zahl. Die Zahl γ heißt positiv oder negativ, je nachdem sie größer oder kleiner als Null ist.

Zwei durch die Schnitte (A, B) und (A', B') definierte irrationale Zahlen γ und γ' heißen *gleich,* wenn die Klasse rationaler Zahlen A identisch ist mit A', und ebenso B identisch mit B'. Die Zahl γ heißt *größer als* γ', wenn eine in A stehende rationale Zahl in B' vorkommt; γ heißt *kleiner als* γ', wenn eine in B stehende rationale Zahl in A' vorkommt.

Seien γ und γ' die die beiden Schnitte (A, B) und (A', B') erzeugenden reellen Zahlen und es mögen mit a, b, a', b' die bezw. in A, B, A', B' stehenden rationalen Zahlen bezeichnet werden. Fassen wir alle Zahlen $a + a'$ in eine, alle Zahlen $b + b'$ in eine andere Klasse zusammen, so bilden diese beiden Klassen einen Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen. Die ihn erzeugende reelle Zahl wird als die *Summe* $\gamma + \gamma'$ der beiden reellen Zahlen γ und γ' bezeichnet. Sind γ und γ' rational, so ist ihre so definierte Summe identisch mit ihrer Summe im gewöhnlichen Sinne.

Die eben definierte Addition der reellen Zahlen ist *assoziativ* und *kommutativ*. Sie läßt ferner eine eindeutige Umkehrung, die *Subtraktion,* zu, d. h. sind α und β reelle Zahlen, so gibt es eine und nur eine reelle Zahl ξ, so daß $\beta + \xi = \alpha$ ist; sie wird bezeichnet mit $\alpha - \beta$.

Die Zahl $0 - \alpha$ heißt die zu α entgegengesetzte reelle Zahl und wird mit $-\alpha$ bezeichnet; sie ist negativ oder positiv, je nachdem α positiv oder negativ ist. Unter dem *absoluten Betrage* (oder *Modul*) *von* α, in Zeichen $|\alpha|$, versteht man die Zahl α selbst, oder die entgegengesetzte, je nachdem α positiv oder negativ ist. Für $\alpha \neq 0$ ist daher $|\alpha| > 0$.

Um die *Multiplikation* zweier reeller Zahlen γ und γ' zu definieren, setzen wir zunächst γ und γ' als positiv voraus. Faßt man dann alle Zahlen $b \cdot b'$ in eine Klasse, alle übrigen rationalen Zahlen in eine andere Klasse zusammen, so bilden diese beiden Klassen einen Schnitt; die ihn erzeugende reelle Zahl, die sicher positiv ist, wird als das *Produkt* $\gamma \cdot \gamma'$ der beiden Zahlen γ und γ' bezeichnet. Um die Multiplikation auch für nicht positive Zahlen zu definieren, setzt man fest: Ist wenigstens einer der beiden Faktoren Null, so ist auch das Produkt Null. Sind beide Faktoren von Null verschieden, so ist der absolute Betrag des Produktes gleich dem Produkt der absoluten Beträge, das Vorzeichen aber das positive oder das negative, je nachdem die beiden Faktoren gleiches oder ungleiches Zeichen haben.

Die so definierte Multiplikation der reellen Zahlen, die, wenn γ und γ' beide rational sind, sich auf die bekannte Multiplikation der rationalen Zahlen reduziert, ist *assoziativ, kommutativ* und in Verbindung mit der Addition *distributiv*. Ist $\beta \neq 0$, so gibt es eine und nur eine reelle Zahl ξ, so daß $\beta \cdot \xi = \alpha$ wird. Sie wird bezeichnet mit $\alpha : \beta$ oder $\frac{\alpha}{\beta}$.

Die *Division* ist also stets eindeutig ausführbar, außer durch Null.

Sind irgend zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen α und β gegeben, so gibt es sowohl unendlich viele rationale, als auch unendlich viele irrationale Zahlen, die der Größe nach zwischen α und β liegen.

Man sagt von irgendwelchen reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, deren Index n alle natürlichen Zahlen durchläuft: sie bilden eine *Folge reeller Zahlen.* Wir bezeichnen eine solche Folge kurz mit (a_n).

Die Folge (a_n) heißt *konvergent,* wenn zu jeder positiven Zahl ε ein Wert N des Index n gehört, derart, daß für alle Indices n' und n'', die größer als N sind, die Ungleichung besteht:

$$|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent.*

Die Zahl a heißt *Grenze* oder *Limes der Folge* (a_n), in Zeichen

$$a = \lim_{n=\infty} a_n,$$

wenn zu jedem positiven ε ein N gehört, derart, daß für jeden Index n, der größer als N ist, die Ungleichung besteht:

$$|a - a_n| < \varepsilon.$$

Jede Folge, die eine Zahl zur Grenze hat, ist konvergent. Umgekehrt: *Jede konvergente Folge hat eine und nur eine Zahl zur Grenze.*

Weiteres über den Grenzbegriff findet sich in § 9.

Sei e eine von 1 verschiedene positive ganze Zahl. Dann heißt der Ausdruck:

$$d_n = \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}, \tag{1}$$

in dem $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ganze Zahlen bedeuten, die zwischen 0 und $e-1$ liegen (diese Grenzen eingeschlossen), *ein systematischer Bruch von der Grundzahl e.*

Sei nun $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ eine Folge ganzer Zahlen, die zwischen 0 und $e-1$ liegen (die Grenzen eingeschlossen). Wird dann die Zahl d_n durch Gleichung (1) definiert, so ist die Folge (d_n) stets konvergent. Bezeichnet d die Grenze von (d_n), so nennt man d die Summe des *unendlichen systematischen Bruches:*

$$\frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{e^n}.$$

Jede beliebige reelle Zahl zwischen 0 und 1 läßt sich in einen (endlichen oder unendlichen) *systematischen Bruch von gegebener Grundzahl e entwickeln* (dabei bedeutet e eine ganze Zahl, größer als 1). Genauer: sei d eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Ist dann d rational, so kann es auf eine und nur eine Weise in die Form gebracht werden $d = \frac{p}{q}$, wo p und q teilerfremde ganze positive Zahlen sind. Enthält dann q nur solche Primfaktoren, die auch in e aufgehen, so gibt es einen und nur einen *endlichen* systematischen Bruch von der Grundzahl e, dessen Summe gleich d ist, etwa:

$$\frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n},$$

und außerdem noch einen und nur einen *unendlichen* solchen systematischen Bruch von der Summe d, nämlich:

$$d = \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{e^{n-1}} + \frac{c_n - 1}{e^n} + \frac{e-1}{e^{n+1}} + \frac{e-1}{e^{n+2}} + \cdots.$$

Ist hingegen d irrational oder eine rationale Zahl, die nicht die genannte spezielle Form hat, so gibt es einen und nur einen *unendlichen* systematischen Bruch von der Grundzahl e, dessen Summe d ist.

Damit die Summe eines unendlichen systematischen Bruches eine rationale Zahl sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Folge der Koeffizienten c_n von einem bestimmten Index an periodisch sei (d. h. es gibt ein N und ein k, so daß für $n > N$ immer $c_{n+k} = c_n$ ist).

Näheres über systematische Brüche siehe: Stolz-Gmeiner, *Theoretische Arithmetik* 85; speziell über periodische systematische Brüche: Weber-Wellstein, *Enzykl. d. Elem.-Math.*, 2. Aufl. (1906), **1**, 254. Über andere Darstellungen reeller Zahlen s. unter „*Kettenbrüche*".

Die Einführung der irrationalen Zahlen durch Schnitte im Gebiete der rationalen Zahlen stammt von R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872. Sie wurde seither vielfach wiedergegeben. Wir nennen von neueren Büchern: C. Jordan, *Cours d'analyse*, 2. éd., Paris 1893, **1**, 1 ff.. J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*,

2. éd., Paris 1904, 1 ff., H. Weber, *Lehrbuch der Algebra,* 2. Aufl., Braunschweig 1898, **1**, 5 ff., Weber-Wellstein, *Enzykl. d. Elem.-Math.*, 2. Aufl., **1**, 76; vgl. auch M. Pasch, *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung,* Leipzig 1882, 1 ff.

Mit Hilfe von Folgen rationaler Zahlen wurden die Irrationalzahlen eingeführt von G. Cantor (*Math. Ann.* **5**, 123 (1872), zuerst publiziert von G. Heine, *Journ. f. Math.* **74**, 172 (1872)) und Ch. Méray (*Rev. des soc. sav.* (*sc. math.*) (2) **4**, 284 (1869), *Nouveau précis d'analyse infinitésimale,* Paris 1872, 1 ff.). Ausführlich findet sich diese Theorie bei Stolz-Gmeiner, *Theoretische Arithmetik* 138 ff. Siehe auch P. Bachmann, *Vorl. über die Natur der Irrationalzahlen,* Leipzig 1892, 6 ff.

Eine andere Theorie wurde von K. Weierstraß in seinen Vorlesungen vorgetragen. Zuerst publiziert von H. Kossak, *Programm des Werderschen Gymnasiums,* Berlin 1872. Später S. Pincherle, *Giorn. di mat.* **18**, 178 und O. Biermann, *Theorie der analytischen Funktionen,* Leipzig 1887, 19.

Eine vergleichende Besprechung dieser drei Theorien findet man bei G. Cantor, *Math. Ann.* **21**, 564, H. Burkhardt, *Vierteljahrschr. Zürich* **46**, 179, O. Perron, *Math.-Ver.* **16**, 142. P. du Bois-Reymond hat diese arithmetischen Theorien in seiner *Allgemeinen Funktionentheorie* (Tübingen 1882) bekämpft. Eine eingehende Darstellung der historischen Entwickelung des Begriffes der irrationalen Zahlen gibt A. Pringsheim, *Enzykl.* **I** A 2; vgl. auch die Übersetzung dieses Artikels (J. Molk) in der französischen Ausgabe.

Die reellen Zahlen lassen sich geometrisch interpretieren durch die Punkte einer geraden Linie, auf der ein Nullpunkt und eine Einheitsstrecke willkürlich angenommen werden (*Zahlenlinie*).

Diese Zuordnung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten (oder Segmenten) einer Geraden ist ein spezieller Fall der Zuordnung der reellen Zahlen zu den Größen eines sogenannten *stetigen Größensystemes.* Siehe: R. Bettazzi, *Teoria delle grandezze*, Pisa 1890, Stolz-Gmeiner, *l. c.* 99, O. Hölder, *Leipz. Ber.* **53**, 1 (1901), E. V. Huntington, *Am. Trans.* **3**, 264 (1902).

Im Vorstehenden wurde gezeigt, wie das System der reellen Zahlen durch sukzessive Erweiterung des Systemes der natürlichen Zahlen gewonnen wird. Man kann auch von vornherein das gesamte Gebiet der reellen Zahlen durch geeignete Axiome einführen: D. Hilbert, *Math.-Ver.* **8**, 180, und *Grundlagen der Geometrie,* 2. Aufl., Leipzig 1903, 24.

§ 3. Die gemeinen komplexen Zahlen.

Wir erweitern das Größensystem der reellen Zahlen durch Hinzufügung aller *Paare reeller Zahlen* (a, a'). Zwei solche Paare (a, a') und (b, b') sollen (anders als es in § 1 geschah) dann und nur dann einander gleich heißen, wenn $a = b$ und $a' = b'$. Das Paar $(a, 0)$ heiße gleich der reellen Zahl a.

Wir definieren eine *Addition* der Zahlenpaare durch:

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b');$$

diese Addition ist *assoziativ, kommutativ,* und läßt eine eindeutige Umkehrung, die *Subtraktion,* zu. Die *Multiplikation* definieren wir durch:

$$(a, a') \cdot (b, b') = (ab - a'b', ab' + a'b);$$

sie ist *assoziativ, kommutativ,* und in Verbindung mit der Addition *distributiv*; ihre Umkehrung, die *Division,* ist immer eindeutig ausführbar, außer durch das Zahlenpaar $(0, 0)$ (das nach der oben gegebenen Definition gleich der Zahl 0 ist).

Ein Produkt kann nur verschwinden, wenn mindestens einer seiner Faktoren verschwindet.

Ein Paar (a, a') wird mit einer reellen Zahl b — oder mit dem der Zahl b gleichen Paare $(b, 0)$ — *multipliziert, indem man jede seiner Zahlen mit b multipliziert.*

Führt man für das Paar $(0, 1)$ die Bezeichnung i ein, so hat man:

$$(a, a') = (a, 0) + (0, a') = a + ia'.$$

Der Ausdruck $a + ia'$ heißt eine *gemeine komplexe Zahl; a* heißt ihr *reeller, ia'* ihr *imaginärer* Teil; i heißt die *imaginäre Einheit.* Eine Zahl, deren reeller Teil Null ist, heißt *rein imaginär.*

Das Quadrat der imaginären Einheit ist -1; denn:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Die oben angeführten Sätze über Zahlenpaare nehmen nun, für komplexe Zahlen ausgesprochen, die Form an:

Zwei komplexe Zahlen sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre reellen und imaginären Teile für sich einander gleich sind.

Eine komplexe Zahl ist dann und nur dann gleich Null, wenn sowohl ihr reeller als auch ihr imaginärer Teil Null ist.

$$(a + ia') + (b + ib') = (a + b) + i(a' + b');$$
$$(a + ia') - (b + ib') = (a - b) + i(a' - b');$$
$$(a + ia') \cdot (b + ib') = (ab - a'b') + i(ab' + a'b);$$
$$(a + ia') : (b + ib') = \frac{ab + a'b'}{b^2 + b'^2} + i\,\frac{a'b - ab'}{b^2 + b'^2}.$$

In der letzten dieser Gleichungen ist vorausgesetzt, daß b und b' nicht beide Null sind.

Sei $a + ia'$ eine von Null verschiedene komplexe Zahl. Setzt man $\varrho = \underset{+}{\sqrt{a^2 + a'^2}}$ und wird φ bestimmt aus[1]):

$$\cos\varphi = \frac{a}{\underset{+}{\sqrt{a^2 + a'^2}}}; \quad \sin\varphi = \frac{a'}{\underset{+}{\sqrt{a^2 + a'^2}}},$$

so erhält man die *trigonometrische Form* der gemeinen komplexen Zahlen:

$$a + ia' = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Die reelle positive Zahl ϱ heißt der *absolute Betrag* (*Modul*) von $a + ia'$ und wird bezeichnet mit $|a + ia'|$; der Winkel φ heißt das *Argument* (Phase, Amplitude) von $a + ia'$.

Sind α und β komplexe Zahlen, so ist:

$$|\alpha| - |\beta| \leqq |\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|.$$

Der absolute Betrag des Produktes (des Quotienten) zweier komplexer Zahlen ist das Produkt (der Quotient) ihrer absoluten Beträge. Das Argument des Produktes (Quotienten) ist die Summe (Differenz) der Argumente.

Das liefert die *Moivresche Formel* für die n^{te} Potenz einer komplexen Zahl

$$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

aus der man durch Entwickelung der linken Seite und Trennung des Reellen vom Imaginären Formeln für $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ erhält.

Die Zahl $a - ib$ heißt die zu $a + ib$ *konjugierte* Zahl. Sie hat denselben absoluten Betrag. Die Summe sowie das Produkt zweier konjugiert-komplexer Zahlen ist reell, und zwar ist ihr Produkt gleich dem Quadrat ihres absoluten Betrages.

---

1) Diese Gleichungen bestimmen φ nur bis auf Vielfache von 2π. Der den Ungleichungen $-\pi < \varphi \leqq +\pi$ genügende Wert von φ wird als *Hauptwert* bezeichnet.

Sei $\alpha_n = a_n + ia'_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine *Folge komplexer Zahlen.* Sie heißt konvergent, wenn zu jeder positiven Zahl ε ein Wert N des Index n gehört, derart, daß für alle Indices n' und n'', die größer als N sind, die Ungleichung besteht:

$$|\alpha_{n'} - \alpha_{n''}| < \varepsilon.$$

Eine Folge komplexer Zahlen, die nicht konvergent ist, heißt *divergent.*

Die komplexe Zahl $\alpha = a + ia'$ heißt *Grenze* der Folge (α_n), in Zeichen:

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha,$$

wenn zu jedem positiven ε ein N gehört, derart, daß für jeden Index n, der größer als N ist, die Ungleichung besteht:

$$|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Damit die Folge komplexer Zahlen $(a_n + ia'_n)$ konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß die beiden Folgen reeller Zahlen (a_n) und (a'_n) konvergent sind.

Damit die Folge komplexer Zahlen $(a_n + ia'_n)$ die Zahl $a + ia'$ zur Grenze habe, ist notwendig und hinreichend, daß die Folge (a_n) die Zahl a, die Folge (a'_n) die Zahl a' zur Grenze hat.

Die komplexen Zahlen lassen sich geometrisch durch die Punkte einer Ebene darstellen, indem man, unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, der Zahl $a + ia'$ den Punkt A mit der Abszisse a und der Ordinate a' zuordnet. Dann ist der absolute Betrag von $a + ia'$ gleich dem Abstande des Punktes A vom Koordinatenursprung O, und das Argument φ von $a + ia'$ ist gleich dem Winkel, den die Richtung OA mit der positiven x-Achse bildet.

Den arithmetischen Grundoperationen an komplexen Zahlen entsprechen folgende geometrische Konstruktionen:

Seien A und A' die zwei komplexen Zahlen α und α' entsprechenden Punkte. *Trägt man von A aus eine der Strecke OA' gleiche und gleich gerichtete Strecke auf, so erhält man den der Summe $\alpha + \alpha'$ entsprechenden Punkt. Trägt man von A aus eine der Strecke OA' gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Strecke auf, so erhält man den der Differenz $\alpha - \alpha'$ entsprechenden Punkt.*

Um den dem *Produkte* $\alpha \cdot \alpha'$ entsprechenden Punkt zu konstruieren, nehme man auf der Achse der reellen Zahlen den Punkt der Abszisse 1 und errichte über der Strecke OA' das

Dreieck OBA' ähnlich zu $OA1$, und zwar so, daß die Winkel BOA' und $AO1$ gleichen Sinn haben. Der Punkt B ist der gesuchte.

Um den dem *Quotienten* $\frac{\alpha}{\alpha'}$ entsprechenden Punkt zu konstruieren, errichte man über OA das Dreieck OBA ähnlich zum Dreieck $O1A'$, und zwar so, daß die Winkel BOA und $A'O1$ entgegengesetzten Sinn haben. Der Punkt B ist der gesuchte.

Die komplexen Zahlen sind in der Mathematik allgemein anerkannt seit K. F. Gauss (vgl. *Demonstratio nova theorematis etc.* (1799), *Werke* **3**, 3 u. *Theoria residuorum biquadraticorum* (1831), *Werke* **2**, 171). Die hier skizzierte Einführung der komplexen Zahlen durch Paare reeller Zahlen rührt von W. R. Hamilton her (*Dublin Transact.* **17**, 393 (1837), *Lectures on Quaternions* 1853, Vorrede). Die geometrische Deutung der komplexen Zahlen durch Punkte einer Ebene geht zurück auf C. Wessel (1799), (die betreffende Arbeit wurde neu herausgegeben unter dem Titel: *Essai sur la représentation analytique de la direction,* Kopenhagen 1897) und R. Argand (*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires,* Paris 1806). Analog ist die Deutung durch die Vektoren einer Ebene in der Äquipollenzenrechnung, mit der sich G. Bellavitis (seit 1833) viel beschäftigte. Es sei auf C. A. Laisant, *Théorie et applications des équipollences*, Paris 1887, verwiesen.

§ 4. Die höheren komplexen Zahlen.

Analog wie im vorigen Paragraphen die Zahlenpaare betrachtet wurden, betrachten wir hier die „n-tupel" reeller Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Wir definieren:

Zwei n-tupel reeller Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ heißen *einander gleich,* wenn $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$.

Das n-tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißt *gleich Null,* wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ ist.

Die *Addition* der n-tupel wird definiert durch:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Multiplikation eines n-tupels mit einer reellen Zahl b wird definiert durch:

$$b\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,b = (a_1 b, a_2 b, \ldots, a_n b).$$

Führt man nun für die speziellen n-tupel:

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0) \ldots (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

die Bezeichnungen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ein, so hat man:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$

Ein solcher Ausdruck heißt *eine komplexe Zahl mit den n Einheiten* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Wir haben also die Sätze:

Zwei komplexe Zahlen mit den n Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *sind einander gleich, wenn die Koeffizienten entsprechender Einheiten einander gleich sind.*

Eine solche Zahl ist gleich Null, wenn die Koeffizienten sämtlicher Einheiten Null sind.

Zwei komplexe Zahlen mit den n Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *werden addiert, indem man die Koeffizienten entsprechender Einheiten addiert.*

Diese Addition ist *assoziativ* und *kommutativ*; sie läßt eine eindeutige Umkehrung, die *Subtraktion,* zu.

Um die *Multiplikation* unserer komplexen Zahlen zu definieren, definiert man zuerst die „Einheitsprodukte" $e_i e_k$ als Zahlen des Systemes durch die Formeln:

$$e_i e_k = \lambda_{ik}^{(1)} e_1 + \lambda_{ik}^{(2)} e_2 + \cdots + \lambda_{ik}^{(n)} e_n,$$

wo die $\lambda_{ik}^{(r)}$ reelle Zahlen bedeuten; sodann definiert man das Produkt der beiden Zahlen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} b_k e_k$$

durch:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k e_k = \sum_{i,k=1}^{n} a_i b_k e_i e_k.$$

Diese Multiplikation ist in Verbindung mit der Addition *distributiv.* Damit sie *assoziativ* sei, ist notwendig und hinreichend, daß die $\lambda_{ik}^{(r)}$ den Gleichungen genügen:

$$\sum_{v=1}^{n} \lambda_{ik}^{(v)} \lambda_{vm}^{(r)} = \sum_{v=1}^{n} \lambda_{km}^{(v)} \lambda_{iv}^{(r)} \qquad (i, k, m, r = 1, 2, \ldots, n).$$

Damit die Multiplikation kommutativ sei, ist notwendig und hinreichend, daß $e_i e_k = e_k e_i$ ist, d. h. daß $\lambda_{ik}^{(r)} = \lambda_{ki}^{(r)}$ ist.

Wählt man aus unserem System komplexer Zahlen n Zahlen

(1) $$i_k = \alpha_{1k} e_1 + \alpha_{2k} e_2 + \cdots + \alpha_{nk} e_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

so aus, daß die aus den reellen Zahlen α_{ik} gebildete Determinante nicht verschwindet, so läßt sich jede Zahl

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

unseres Systemes auch in der Form schreiben:

$$(2) \qquad b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n.$$

Man sagt: *das System komplexer Zahlen (2) mit den n Einheiten* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *geht aus unserem ursprünglichen Systeme durch die lineare Transformation (1) hervor.* Umgekehrt geht unser ursprüngliches System aus dem Systeme der Zahlen (2) durch die zur Transformation (1) reziproke Transformation hervor.

Unter allen komplexen Zahlen mit zwei oder mehr Einheiten sind die gemeinen komplexen Zahlen und die daraus durch lineare Transformation entstehenden die einzigen, die eine assoziative, kommutative und in Verbindung mit der Addition distributive Multiplikation zulassen, die so beschaffen ist, daß ein Produkt nur dann verschwindet, wenn mindestens ein Faktor verschwindet (zuerst bewiesen von K. Weierstraß in seinen Vorlesungen (1863); vgl. E. Kossak, *Progr. d. Werderschen Gymn. Berlin* 1872, 23 ff., G. Pincherle, *Giorn. di mat.* **18**, 203 ff.).

Unter *Quaternionen* versteht man nach W. R. Hamilton (*Lectures on Quaternions*, Dublin 1853) komplexe Zahlen mit vier Einheiten:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3.$$

Die erste Einheit ist hier, wie bei den gemeinen komplexen Zahlen, der reellen Einheit gleichgesetzt. Für die Produkte der übrigen Einheiten gelten die Formeln:

$$\begin{array}{ll} i_1^2 = -1 & i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1, \\ i_2^2 = -1 & i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2, \\ i_3^2 = -1 & i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3. \end{array}$$

Die hierdurch definierte Multiplikation der Quaternionen ist assoziativ und in Verbindung mit der Addition distributiv, aber nicht kommutativ. Ein Produkt kann nur verschwinden, wenn mindestens ein Faktor verschwindet. Es gibt zu dieser Multiplikation zwei Umkehrungen (*Divisionen*), eine vordere und eine hintere; d. h. bedeuten α und β zwei Quaternionen, und ist α nicht Null, so hat jede der beiden Gleichungen: $\xi \cdot \alpha = \beta$ und $\alpha \cdot \eta = \beta$ eine und nur eine Quaternion zur Lösung.

Unter allen komplexen Zahlen mit zwei oder mehr Einheiten gibt es außer den gemeinen komplexen Zahlen und den Quater-

nionen (sowie den daraus durch lineare Transformation entstehenden Systemen) keine, die eine assoziative und in Verbindung mit der Addition distributive Multiplikation zulassen, die so beschaffen ist, daß ein Produkt nur dann verschwindet, wenn wenigstens ein Faktor verschwindet (*Satz von G. Frobenius, Journ. f. Math.* **84**, 59 (1878)).

Wegen der Anwendungen der Quaternionen in der Vektorenrechnung verweisen wir auf W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, 2. ed., 2 Bde., London 1899, 1901 (deutsch von P. Glan, Leipzig 1882/84) und P. G. Tait, *An elementary treatise on Quaternions*, 3. ed., Cambridge 1890 (deutsch von G. v. Scherff, Leipzig 1880).

Die in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen skizzierten Theorien findet man ausführlich bei Stolz-Gmeiner, *Theoretische Arithmetik* 277 ff. Näheres über komplexe Zahlen sowie die darauf bezügliche Literatur bei E. Study, *Enzykl.* **I** A 4; vgl. auch Kap. II, § 7.

Man kann auch komplexe Zahlen mit unendlich vielen Einheiten betrachten. Sie kommen zur Verwendung in der Theorie der sogenannten *nichtarchimedischen Größensysteme*. Siehe G. Veronese, *Fondamenti di geometria*, Padova 1891, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894 (vgl. besonders die Anm. auf S. 139 der deutschen Ausgabe) und H. Hahn, *Über die nichtarchimedischen Größensysteme, Wien. Ber.* **116**, 601 (1907), K. Th. Vahlen, *Math.-Ver.* **16**, 409 (1907).

§ 5. Grundbegriffe der Mengenlehre. Die Mächtigkeiten der Mengen.

Unter einer *Menge* wird die Zusammenfassung wohldefinierter und unterscheidbarer Dinge (Elemente) zu einem Ganzen verstanden.[1])

Eine Menge N, deren sämtliche Elemente auch der Menge M angehören, heißt *Teilmenge* von M. Gibt es in M wenigstens ein Element, das nicht zu N gehört, so heißt N eine *echte* Teilmenge von M.

Zwei Mengen M und N heißen *von gleicher Mächtigkeit* oder *äquivalent* (in Zeichen $M \sim N$), wenn sich ihre Elemente

---

1) Gegen diese von G. Cantor herrührende Definition (*Math. Ann.* **46**, 481, vgl. auch *Math. Ann.* **20**, 114) bestehen gewisse Bedenken, vgl. J. Mollerup, *Math. Ann.* **64**, 231 und die am Schlusse von § 7 angegebene Literatur.

eineindeutig aufeinander beziehen lassen. Sind zwei Mengen zu ein und derselben dritten Menge äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent.

Die Gesamtheit aller untereinander äquivalenter Mengen definiert eine bestimmte *Mächtigkeit.* Man bezeichnet häufig die Mächtigkeit einer Menge mit dem entsprechenden deutschen Buchstaben (z. B. die Mächtigkeit von M mit $\mathfrak{m}$).

Eine Menge heißt *endlich,* wenn sie keiner ihrer echten Teilmengen äquivalent ist; eine Menge, die nicht endlich ist, heißt *unendlich* oder *transfinit.*

Jede endliche Menge ist äquivalent einem und nur einem Segmente der Reihe der natürlichen Zahlen. Dabei ist unter einem Segmente der Zahlenreihe die Menge aller jener natürlichen Zahlen verstanden, die eine gewisse natürliche Zahl n nicht übersteigen. Durch diese Zahl n ist die Mächtigkeit unserer Menge vollständig charakterisiert. *Zur Bezeichnung der Mächtigkeiten endlicher Mengen dienen daher die natürlichen Zahlen;* in diesem Sinne verwendet heißen die natürlichen Zahlen *Kardinalzahlen.*

Ist die Menge M äquivalent mit einer Teilmenge von N und die Menge N äquivalent mit einer Teilmenge von M, so sind M und N äquivalent (Cantors *Äquivalenzsatz;* Beweise u. a. von F. Bernstein in É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions,* Paris (1898), 102, J. König, *C. R.* **143**, 110 (1906), G. Peano, *Rend. Pal.* **31**, 360 (1906)).

Ist die Menge M äquivalent mit einer Teilmenge von N, gibt es aber in M keine zu N äquivalente Teilmenge, so heißt die Mächtigkeit von N *größer* als die von M; in Zeichen: $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$; im entgegengesetzten Falle hat man $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$.

Es ist bisher nicht einwandfrei bewiesen, daß, wenn die beiden Mengen M und N nicht äquivalent sind (also ihre Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ nicht gleich sind), notwendig einer der beiden Fälle $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ eintreten muß.

Sei irgendeine (endliche oder unendliche) Menge von Mengen M_a, M_b, ... gegeben, von denen keine zwei ein gemeinsames Element besitzen mögen. Die Menge, welche aus allen in diesen Mengen enthaltenen Elementen besteht, heißt die *Vereinigungsmenge* dieser Mengen. Ihre Mächtigkeit heißt die *Summe* der Mächtigkeiten der einzelnen Mengen.[1]) Diese Addition

1) Speziell erhält man also die Summe $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ zweier Mächtigkeiten, indem man die Vereinigungsmenge einer Menge M der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ und einer Menge N der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ bildet.

ist *assoziativ* und *kommutativ*. Es gilt die Ungleichung

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \geqq \mathfrak{m};$$

und aus $\mathfrak{n} > \mathfrak{n}'$ folgt

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \geqq \mathfrak{m} + \mathfrak{n}'.$$

Man greife aus jeder der Mengen M_a, M_b, ... je ein Element heraus: m_a, m_b, ... Die Menge aller so erhältlichen Elementkombinationen $(m_a, m_b, \ldots)$ heißt die *Verbindungsmenge* dieser Mengen. Ihre Mächtigkeit heißt das *Produkt* der Mächtigkeiten der einzelnen Mengen. Diese Multiplikation ist *assoziativ, kommutativ* und in Verbindung mit der Addition *distributiv*. Es ist

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} \geqq \mathfrak{m}$$

und aus $\mathfrak{n} > \mathfrak{n}'$ folgt

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} \geqq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}'.$$

Das Produkt $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ *ist gleich einer Summe von lauter einander gleichen Summanden* $\mathfrak{m}$, *wenn diese Summanden eine Menge der Mächtigkeit* $\mathfrak{n}$ *bilden.*

Man ordne jedem Element der Menge N ein beliebiges Element der Menge M zu; die Menge aller so erhältlichen Zuordnungen heißt die *Belegungsmenge von N mit M*. Ihre Mächtigkeit wird bezeichnet mit $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$. Für diese Potenzierung gelten die Gesetze:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n})^{\mathfrak{p}}; \quad \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}}; \quad (\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}}.$$

Ferner ist $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \geqq \mathfrak{m}$ und aus $\mathfrak{n} > \mathfrak{n}'$ folgt $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \geqq \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}'}$.

Die Potenz $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ *ist gleich einem Produkte lauter einander gleicher Faktoren* $\mathfrak{m}$, *wenn diese Faktoren eine Menge der Mächtigkeit* $\mathfrak{n}$ *bilden.*

Es bestehen für $\mathfrak{m} > 1$, $\mathfrak{n} > 1$ die Ungleichungen:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}.$$

Ferner ist für $\mathfrak{m} > 1$ stets $\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$; *daher kann es keine größte Mächtigkeit geben.*

Die Menge aller Teilmengen einer transfiniten Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ *hat die Mächtigkeit* $2^{\mathfrak{m}}$ *und diese Mächtigkeit ist größer als* $\mathfrak{m}$.

Eine Menge, deren Elemente sich eineindeutig den natürlichen Zahlen zuordnen lassen, heißt *abzählbar*. Ihre Mächtigkeit wird bezeichnet mit $\aleph_0$ (oft auch mit $\mathfrak{a}$).

Es ist $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ *und* $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Eine unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

2*

Jede unendliche Menge enthält eine abzählbare Teilmenge (d. h.: $\aleph_0$ ist die kleinste transfinite Mächtigkeit).

Eine unendliche Menge ändert durch Hinzufügung einer endlichen oder abzählbaren Menge ihre Mächtigkeit nicht.

Abzählbare Mengen sind: die Menge aller (positiven und negativen) ganzen Zahlen, die Menge aller rationalen Zahlen, die Menge aller algebraischen Zahlen (dabei ist als *algebraisch* jede Zahl bezeichnet, die einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügt). Jede unendliche Menge sich nicht überdeckender Intervalle einer Geraden (oder sich nicht überdeckender Gebiete einer Ebene, eines n dimensionalen Raumes) ist abzählbar.

Man sagt von einer Menge, *sie hat die Mächtigkeit des Kontinuums*, wenn sich ihre Elemente eineindeutig den reellen Zahlen zuordnen lassen. Auch die Menge aller reellen Zahlen, die zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen liegen (oder, was dasselbe ist, die Menge aller Punkte eines beliebigen Intervalles), hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

Die Mächtigkeit des Kontinuums wird mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet; *es ist* $\mathfrak{c} > \aleph_0$ *und es besteht die Gleichung:*

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{e}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0},$$

in der $\mathfrak{e}$ eine beliebige endliche Kardinalzahl ($\geqq 2$) bedeutet. Da hiernach die Menge aller reellen Zahlen größere Mächtigkeit hat als die aller algebraischen Zahlen, folgt die Existenz nicht algebraischer reeller Zahlen; es sind die sogenannten *transzendenten* Zahlen.

Es ist $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$; allgemein $\mathfrak{c}^{\mathfrak{e}} = \mathfrak{c}$, wenn $\mathfrak{e}$ eine endliche Kardinalzahl; *somit lassen sich die Punkte einer Ebene (eines Raumes von beliebig viel Dimensionen) eineindeutig den Punkten einer Geraden zuordnen.* Es besteht auch die Gleichung: $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, die man auch so aussprechen kann: die Punkte eines Raumes von abzählbar unendlich vielen Dimensionen lassen sich eineindeutig den Punkten einer Geraden zuordnen.

§ 6. **Die geordneten Mengen. Die Ordnungstypen.**

Eine Menge heißt *einfach geordnet*, wenn — zufolge irgendeiner Festsetzung — von je zweien ihrer Elemente (m und m') das eine (m) als das vorhergehende, das andere (m') als das nachfolgende definiert ist (in Zeichen: $m \prec m'$ oder $m' \succ m$). Dabei hat diese Festsetzung der Rangordnung der Forderung zu genügen: wenn $m \prec m'$ und $m' \prec m''$, so ist stets auch $m \prec m''$.

Steht ein Element m_0 der einfach geordneten Menge M zu jedem anderen Elemente m dieser Menge in der Beziehung $m_0 \prec m$ ($m_0 \succ m$), so heißt es das *erste* (*letzte*) Element von M. Ist $m \succ m'$ und $m \prec m''$, so sagt man: m liegt zwischen m' und m''.

Zwei einfach geordnete Mengen M und N heißen *ähnlich* oder vom gleichen *Ordnungstypus* (in Zeichen $M \simeq N$), wenn sich ihre Elemente so eineindeutig zuordnen lassen, daß die Rangordnung erhalten bleibt, d. h. so, daß, wenn m_1 und m_2 irgendzwei Elemente von M, n_1 und n_2 die entsprechenden Elemente von N sind, aus $m_1 \prec m_2$ immer folgt $n_1 \prec n_2$. Sind zwei Mengen derselben dritten Menge ähnlich, so sind sie auch untereinander ähnlich.

Die Gesamtheit aller untereinander ähnlichen Mengen definiert einen bestimmten *Ordnungstypus*. Man bezeichnet häufig den Ordnungstypus einer Menge mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben (z. B. den Ordnungstypus von M mit μ).

Alle Mengen vom gleichen Ordnungstypus μ haben die gleiche Mächtigkeit, die kurz die Mächtigkeit von μ genannt wird; die Umkehrung gilt nur für endliche Mengen:

Zwei einfach geordnete endliche Mengen von gleicher Mächtigkeit haben auch gleichen Ordnungstypus.

Zur Bezeichnung der Ordnungstypen endlicher Mengen können daher, wie zur Bezeichnung ihrer Mächtigkeiten, die natürlichen Zahlen verwendet werden; in diesem Sinne verwendet heißen sie *Ordinalzahlen*.

Man definiert die *Addition* der Ordnungstypen in folgender Weise: Seien zwei einfach geordnete Mengen M und N ohne gemeinsames Element gegeben; ihre Ordnungstypen seien μ und ν. Wir bilden ihre Vereinigungsmenge und machen sie zu einer einfachen geordneten Menge durch die Festsetzung: die Elemente von M untereinander, ebenso die von N, mögen ihre frühere Rangordnung beibehalten, jedes Element von M aber gehe jedem Element von N voran. Der Ordnungstypus der so geordneten Vereinigungsmenge wird mit $\mu + \nu$ bezeichnet. (Ähnlich wie für die Mächtigkeiten in § 5, kann man auch hier, statt sich auf die Definition der Summe von *zwei* Ordnungstypen zu beschränken, sofort die Summe der Ordnungstypen von Mengen definieren, die selbst eine einfach geordnete Menge bilden.)

Es ist $(\mu + \nu) + \pi = \mu + (\nu + \pi)$, aber im allgemeinen $\mu + \nu \neq \nu + \mu$.

Um die *Multiplikation* der Ordnungstypen zu definieren, bildet man die Verbindungsmenge von M und N, d. h. die Menge der Paare (m, n) und ordnet sie durch die Festsetzung: $(m, n) \prec (m', n')$, wenn $n \prec n'$, und im Falle $n = n'$, wenn $m \prec m'$. Der Ordnungstypus der so geordneten Verbindungsmenge wird mit $\mu \cdot \nu$ bezeichnet.

Es ist $(\mu \cdot \nu) \cdot \pi = \mu \cdot (\nu \cdot \pi)$ und $\mu \cdot (\nu + \pi) = \mu \cdot \nu + \mu \cdot \pi$, aber im allgemeinen $\mu \cdot \nu \neq \nu \cdot \mu$ und $(\mu + \nu) \cdot \pi \neq \mu \cdot \pi + \nu \cdot \pi$.

Eine Definition der Potenz μ^ν findet man bei F. Hausdorff, *Leipz. Ber.* **58**, 106 (1906), G. Hessenberg, *Math.-Ver.*, **16**, 130 (1907).

Eine Folge $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ von Elementen von M heißt eine *aufsteigende Fundamentalreihe,* wenn

$$m_1 \prec m_2 \prec \cdots \prec m_n \prec \cdots;$$

sie heißt eine *absteigende Fundamentalreihe,* wenn

$$m_1 \succ m_2 \succ \cdots \succ m_n \succ \cdots.$$

Ein Element m von M heißt *Grenzelement* der aufsteigenden Fundamentalreihe $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$, wenn 1. $m \succ m_n$ für jedes n und es 2. in M kein Element m' gibt, so daß ebenfalls $m' \succ m_n$ für jedes n, und außerdem $m' \prec m$ ist. Analog wird ein Grenzelement einer absteigenden Fundamentalreihe definiert.

Der Ordnungstypus μ einer Menge M heißt *abgeschlossen*, wenn jede in M enthaltene Fundamentalreihe ein Grenzelement besitzt. Er heißt *in sich dicht,* wenn jedes Element von M Grenzelement einer in M enthaltenen Fundamentalreihe ist. Er heißt *perfekt,* wenn er sowohl abgeschlossen als auch in sich dicht ist. Er heißt *überall dicht,* wenn zwischen irgend zwei Elementen von M stets noch ein Element von M liegt.

Der Ordnungstypus der Menge der natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge ($m \prec n$ wenn $m < n$) wird mit ω bezeichnet; der Ordnungstypus dieser Menge in der umgekehrten Reihenfolge ($m \prec n$ wenn $m > n$) wird mit ω^* bezeichnet. Demnach ist der Ordnungstypus der Menge aller (positiven und negativen) ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge: $\omega^* + \omega$.

Der Ordnungstypus der Menge aller echten rationalen Brüche $(0 < r < 1)$ in ihrer natürlichen Reihenfolge ($r' \prec r''$ wenn $r' < r''$) wird mit η bezeichnet.

Jede abzählbare Menge ohne erstes und letztes Element von überall dichtem Ordnungstypus hat den Ordnungstypus η.

Der Ordnungstypus der Menge aller reellen Zahlen von 0 bis 1 ($0 \leqq x \leqq 1$) in ihrer natürlichen Reihenfolge wird mit ϑ bezeichnet.

Jede Menge M von perfektem Ordnungstypus, die eine abzählbare Teilmenge A enthält, derart, daß zwischen irgendzwei Elementen von M stets ein Element von A liegt, hat den Ordnungstypus ϑ.

§ 7. Die wohlgeordneten Mengen.

Eine einfach geordnete Menge heißt *wohlgeordnet,* wenn jede ihrer Teilmengen ein erstes Element enthält.

Jede einfach geordnete endliche Menge ist wohlgeordnet. Auch die Menge der natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge ist wohlgeordnet. Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet.

In einer wohlgeordneten Menge gibt es zu jedem Element (wenn es nicht das letzte Element der Menge ist) ein unmittelbar folgendes.

Diejenige Teilmenge einer wohlgeordneten Menge M, die aus sämtlichen dem Element m vorangehenden Elementen von M besteht, heißt *der Abschnitt von m* und wird mit $A(m)$ bezeichnet. Um gewisse Sätze leichter aussprechen zu können, ordnet man auch dem ersten Element m_0 von M einen (fingierten) Abschnitt $A(m_0)$ zu, der kein einziges Element enthält.

Eine wohlgeordnete Menge ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich. Ebenso können zwei verschiedene Abschnitte derselben wohlgeordneten Menge einander nicht ähnlich sein.

Bildet man die Menge aller Abschnitte $A(m)$ der wohlgeordneten Menge M (inbegriffen den Abschnitt $A(m_0)$) und ordnet sie durch die Vorschrift: $A(m) \prec A(m')$, wenn $m \prec m'$, so erhält man eine wohlgeordnete Menge, die der Menge M ähnlich ist.

Zwei beliebige wohlgeordnete Mengen sind entweder einander ähnlich, oder es ist eine von beiden einem Abschnitte der anderen ähnlich.

Die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen heißen *Ordinalzahlen,* speziell die der transfiniten wohlgeordneten Mengen heißen *transfinite Ordinalzahlen.* Um gewisse Sätze leichter aussprechen zu können, betrachtet man auch die Null als Ordinalzahl, und zwar als die Ordinalzahl einer Menge, die kein einziges Element enthält, wie etwa der oben eingeführte Abschnitt $A(m_0)$.

Die Ordinalzahlen μ und ν zweier wohlgeordneter Mengen M und N heißen einander gleich, wenn M und N ähnlich sind. Die Ordinalzahl μ heißt kleiner als ν (in Zeichen: $\mu < \nu$), wenn M einem Abschnitt von N ähnlich ist; dementsprechend ist μ größer als ν (in Zeichen: $\mu > \nu$), wenn N einem Abschnitt von M ähnlich ist. Die Null ist kleiner als jede andere Ordinalzahl.

Die Gesamtheit aller Ordinalzahlen, die kleiner sind als eine gegebene Ordinalzahl μ, *bildet eine wohlgeordnete Menge, deren Ordinalzahl* μ *ist.*

Die *Addition* und *Multiplikation* der Ordinalzahlen ergibt sich als Spezialfall der im vorigen Paragraphen definierten Addition und Multiplikation der Ordnungstypen.

Zu jeder Ordinalzahl μ *gibt es eine nächstgrößere, es ist die Ordinalzahl* $\mu + 1$.

Zu jeder unendlichen Menge M *von Ordinalzahlen* μ, *die keine größte Zahl enthält, gibt es eine nächstgrößere Ordinalzahl* (d. h. eine Ordinalzahl, die größer ist als alle in M enthaltenen Zahlen, und kleiner als jede andere Ordinalzahl, die ebenfalls größer als alle Zahlen von M ist). Diese Zahl wird der Limes der in M enthaltenen Zahlen genannt und mit $\lim \mu$ bezeichnet; so ist, wenn mit n eine endliche Ordinalzahl bezeichnet wird: $\lim n = \omega$.

Ist die Zahl ν so beschaffen, daß es unter den Zahlen μ, die kleiner als ν sind, keine größte gibt, so heißt ν eine *Grenzzahl* oder *Limeszahl,* und zwar ist

$$\nu = \lim \mu \; (\mu < \nu).$$

Die *Potenzierung* der Ordinalzahlen wird definiert durch die drei Festsetzungen:

$$\mu^0 = 1; \quad \mu^{\nu+1} = \mu^\nu \cdot \mu; \quad \mu^{\lim \nu} = \lim \mu^\nu.$$

Jede Ordinalzahl kann (und zwar nur auf eine einzige Weise) in der Form geschrieben werden:

$$\mu = \omega^{\nu_0} n_0 + \omega^{\nu_1} n_1 + \cdots + \omega^{\nu_k} n_k,$$

wo die rechtsstehende Summe nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält, $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_k$ *irgendwelche Ordinalzahlen,* $n_0, n_1, \ldots, n_k$ *aber endliche Ordinalzahlen bedeuten (Cantors Normalform).*

Es gibt Ordinalzahlen ε, *die der Gleichung* $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ *genügen, sie heißen* ε*-Zahlen.*

Die kleinste transfinite Ordinalzahl ist ω; es folgen

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + n, \ldots$$

(wo n eine endliche Ordinalzahl). Der Limes der Zahlen $\omega + n$ ist $\omega \cdot 2$; es folgen $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, allgemein $\omega \cdot 2 + n$; auf alle diese folgt $\omega \cdot 3$ etc. Allgemein erhält man so Zahlen der Form $\omega \cdot m + n$, wo m und n endliche Zahlen. Der Limes aller dieser Zahlen ist ω^2; indem man so fortfährt, erhält man Zahlen der Form

$$\omega^{m_0} n_0 + \omega^{m_1} n_1 + \cdots + \omega^{m_k} n_k,$$

wo

$$m_0, m_1, \ldots, m_k, n_0, n_1, \ldots, n_k$$

endliche Zahlen sind; der Limes aller dieser Zahlen ist ω^ω. Analog erhält man

$$\omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}, \ldots.$$

Der Limes aller dieser Zahlen ist die erste ε Zahl usw.

Jeder transfiniten Ordinalzahl μ kommt (wie jedem Ordnungstypus, siehe § 6) eine bestimmte Mächtigkeit zu. Die Mächtigkeiten transfiniter wohlgeordneter Mengen werden mit dem Buchstaben $\aleph$ (Alef) bezeichnet, und die verschiedenen Alefs durch Indices unterschieden. Von zwei gegebenen Alefs, die nicht einander gleich sind, ist stets das eine das größere, das andere das kleinere. Das kleinste $\aleph$ ist $\aleph_0$ (die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen).

Die Gesamtheit aller Ordinalzahlen, denen dieselbe Mächtigkeit $\aleph_\nu$ zukommt, nennt man eine *Zahlklasse* und bezeichnet sie mit $Z(\aleph_\nu)$. Unter allen Ordinalzahlen von $Z(\aleph_\nu)$ gibt es eine kleinste, sie heißt *die Anfangszahl von* $Z(\aleph_\nu)$ und wird mit Ω_ν bezeichnet. Alle Anfangszahlen, mit Ausnahme von ω, sind ε-Zahlen.

Die Mächtigkeiten der wohlgeordneten Mengen bilden, wenn man sie der Größe nach ordnet, selbst eine wohlgeordnete Menge; man kann daher die Alefs der Reihe nach bezeichnen mit:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \text{etc.}$$

Die Gesamtheit aller Ordinalzahlen von $Z(\aleph_0)$ ***bildet eine Menge*** *von der Mächtigkeit* $\aleph_1$. Allgemein: *die Gesamtheit aller Ordinalzahlen, deren Mächtigkeit kleiner ist als* $\aleph_\nu$, *bildet eine Menge von der Mächtigkeit* $\aleph_\nu$.

Für die *Addition* und *Multiplikation der Alefs* gelten die Formeln:

Ist $\aleph_\mu \leqq \aleph_\nu$, so ist $\aleph_\mu + \aleph_\nu = \aleph_\nu$ und $\aleph_\mu \cdot \aleph_\nu = \aleph_\nu$.

Die hier in den §§ 5, 6, 7 skizzierte abstrakte Mengenlehre wurde begründet durch G. Cantor, auf den auch die meisten oben angeführten Theoreme zurückgehen (G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* Leipzig 1883, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Math. Ann.* **15**, 1 (1879); **17**, 355 (1880), **20**, 113 (1882); **21**, 51, 545 (1883), **23**, 453 (1884), *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann.* **46**, 481 (1895); **49**, 207 (1897), ein Teil von Cantors Abhandlungen findet sich in französischer Übersetzung in *Acta math.* **2**).

Neuere Darstellungen: A. Schoenflies, *Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (*Math.-Ver.* **8**, 1900) und G. Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre* (Abh. der Friesschen Schule, neue Folge, Heft 4, Göttingen 1906). Ferner É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions,* Paris 1900 und E. V. Huntington, *Ann. of math.* (2) **6**, 151 u. **7**, 15.

G. Cantor hat behauptet, daß jede beliebige Menge einer wohlgeordneten Menge äquivalent ist; ein von E. Zermelo veröffentlichter Beweis (*Math. Ann.* **59**, 514 (1904)) hat viele Einwendungen erfahren (hauptsächlich É. Borel, R. Baire, H. Lebesgue, *Bull. soc. math.* **33**, 261, A. Schoenflies, *Math. Ann.* **60**, 181, H. Poincaré, *Revue de métaphys. et de mor.* **14**, 294), auf die Zermelo (*Math. Ann.* **65**, 111 (1907)) eingehend geantwortet hat.

G. Cantor hat auch vermutet, daß die Mächtigkeit des Kontinuums gleich $\aleph_1$ sei, doch wurde ein bindender Beweis hierfür bisher nicht erbracht.

Aus der Betrachtung der Menge *aller* transfiniten Ordinalzahlen ergibt sich, wie zuerst C. Burali-Forti bemerkte (*Rend. Pal.* **11**, 154 (1897)), ein logischer Widerspruch. Über diesen, sowie über ähnliche Widersprüche vgl. B. Russell, *The principles of mathematics* **1**, 101 u. *Rev. de metaph. et de mor.* **14**, 627, A. Schoenflies, *Math.-Ver.* **15**, 19, G. Hessenberg, *l. c.,* 621, H. Poincaré, *l. c.,* G. Peano, *Rev. de math.* **8**, 149, Zermelo, *l. c.*

§ 8. Die Punktmengen.

Unter einer *linearen Punktmenge* versteht man eine Menge, deren Elemente Punkte einer Geraden sind; ebenso unter einer ebenen (n-dimensionalen) Punktmenge eine Menge, deren Elemente Punkte einer Ebene (eines n-dimensionalen Raumes) sind. Wir werden im folgenden nur von linearen Punktmengen sprechen. Die meisten Sätze haben ihr Analogon auch für ebene und n-dimensionale Punktmengen.

Zufolge der Möglichkeit einer eineindeutigen Zuordnung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten einer Geraden (§ 2) ist die Lehre von den linearen Punktmengen identisch mit der Lehre von den Mengen reeller Zahlen.

Unter dem *Intervall* (a, b) versteht man die Gesamtheit aller Punkte einer Geraden, die zwischen den Punkten a und b liegen. Ein Punkt des Intervalles (a, b) heißt innerer Punkt dieses Intervalles, wenn er von den Endpunkten a und b des Intervalles verschieden ist.

Ist jedem Punkte x des Intervalles (a, b), die Endpunkte inbegriffen, ein Intervall δ_x zugeordnet, in dessen Innern er liegt, so läßt sich aus der Menge der Intervalle δ_x eine endliche Anzahl von Intervallen so auswählen, daß sie das Intervall (a, b) vollständig überdecken (Satz von É. Borel, *Ann. éc. norm.* (3) **12**, 51 (1895); H. Lebesgue, *Leç. sur l'intégration,* Paris (1904), 104).

Als *Komplementärmenge* einer linearen Punktmenge P bezüglich des Intervalles (a, b) bezeichnet man die Menge aller Punkte von (a, b), die nicht zu P gehören.

Ein Punkt O heißt *Häufungspunkt* (Verdichtungspunkt) der linearen Punktmenge P, wenn in jedem Intervalle, das den Punkt O als inneren Punkt enthält, sich ein von O verschiedener Punkt befindet, der der Menge P angehört. — Ein Häufungspunkt von P ist nicht notwendig selbst Punkt von P. Betrachtet man z. B. die Menge, die aus den Punkten mit den Abszissen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

besteht, so ist der Nullpunkt Häufungspunkt dieser Menge, ohne ihr anzugehören.

Jede ganz in einem endlichen Intervall liegende unendliche Punktmenge besitzt in diesem Intervalle mindestens einen Häufungspunkt (Satz von B. Bolzano. Wegen dieser Bezeichnung vgl. G. Cantor, *Math. Ann.* **23**, 455 und O. Stolz, *Math. Ann.* **18**, 252).

Eine Punktmenge heißt *abgeschlossen,* wenn sie ihre sämtlichen Häufungspunkte enthält; sie heißt *isoliert,* wenn keiner ihrer Punkte ein Häufungspunkt ist; sie heißt *in sich dicht,* wenn jeder ihrer Punkte ein Häufungspunkt ist; sie heißt *perfekt*, wenn sie abgeschlossen und in sich dicht ist. (Man beachte, daß diese Bezeichnungsweisen mit den in § 6 für Ordnungstypen eingeführten sich nicht decken.)

Eine perfekte Menge wird z. B. gebildet von jenen Punkten des Intervalles (0, 1), deren Abszissen sich als systematische Brüche von der Basis 3 (vgl. § 2) schreiben lassen, ohne Verwendung des Zählers 1. (Man beachte, daß zu diesen Abszissen etwa auch die Zahl $\frac{1}{3}$ gehört, da sie in der Form geschrieben werden kann: $\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots$)

Jede (unendliche) isolierte Menge ist abzählbar, eine abgeschlossene Menge ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums, jede perfekte Menge hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

Jede abgeschlossene Menge läßt sich zerlegen in eine abzählbare und eine perfekte Menge (wobei auch einer dieser Bestandteile fehlen kann). (Cantor-Bendixsonsches Theorem; J. Bendixson, *Acta math.* 2, 415 (1883); der einfachste Beweis stammt von E. Lindelöf, *Acta math.* **29**, 183.)

Die Komplementärmenge einer in (a, b) gelegenen abgeschlossenen Menge bezüglich dieses Intervalles besteht aus den inneren Punkten einer (endlichen oder abzählbaren) Menge sich nicht überdeckender Intervalle.

Eine Punktmenge heißt *überall dicht* im Intervalle (a, b), wenn sich in jedem beliebigen Teilintervalle von (a, b) Punkte der Menge finden. Sie heißt *nirgends dicht* in (a, b), wenn sie in keinem Teilintervall von (a, b) überall dicht ist.

Die Menge der Punkte mit rationalen Abszissen ist überall dicht, die oben angegebene perfekte Menge ist nirgends dicht im Intervalle (0, 1).

Die Punktmenge, die aus allen Häufungspunkten von P besteht, heißt die *erste Ableitung von P* und wird mit P' bezeichnet. *Sie ist stets abgeschlossen.*

Die Ableitung einer abgeschlossenen Menge ist in der Menge selbst enthalten; eine in sich dichte Menge ist in ihrer Ableitung enthalten; eine perfekte Menge ist mit ihrer Ableitung identisch.

Die Ableitung einer im Intervall (a, b) überall dichten Menge enthält sämtliche Punkte von (a, b).

Die erste Ableitung von P' wird zweite Ableitung von P genannt und mit P'' bezeichnet. Allgemein läßt sich, durch vollständige Induktion, die n^{te} Ableitung $P^{(n)}$ von P definieren als die erste Ableitung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung $P^{(n-1)}$. Alle Ableitungen $P^{(n)}$ von P sind, sofern sie überhaupt Punkte enthalten, abgeschlossene Mengen und $P^{(n)}$ ist in $P^{(n-1)}$ enthalten.

Enthalten alle Ableitungen $P^{(n)}$ von P Punkte, so gibt es Punkte, die allen $P^{(n)}$ gemeinsam sind, und zwar bilden diese Punkte eine abgeschlossene Menge, die mit $P^{(\omega)}$ bezeichnet und ω^{te} Ableitung von P genannt wird.

Ist α irgendeine Ordinalzahl und für jede kleinere Ordinalzahl β die β^{te} Ableitung $P^{(\beta)}$ von P definiert, so läßt sich auch eine α^{te} Ableitung $P^{(\alpha)}$ definieren, und zwar in folgender Weise: Ist α eine Grenzzahl, so ist $P^{(\alpha)}$ die Menge derjenigen Punkte, die allen $P^{(\beta)}$ gemeinsam sind; ist α keine Grenzzahl und β_0 die unmittelbar vorhergehende Zahl $(\alpha = \beta_0 + 1)$, so ist $P^{(\alpha)}$ die erste Ableitung von $P^{(\beta_0)}$. Da $P^{(\beta)}$ für $\beta \leqq \omega$ bereits definiert ist, so ist durch diese Festsetzungen $P^{(\alpha)}$ für alle Ordinalzahlen α definiert. *Jede so definierte Ableitung ist, wenn sie überhaupt Punkte enthält, eine abgeschlossene Menge, und wenn* $\beta < \alpha$ *ist, so ist* $P^{(\alpha)}$ *ganz in* $P^{(\beta)}$ *enthalten.*

Ist P *eine beliebige Punktmenge, so gibt es stets eine endliche oder der Zahlklasse* $Z\,(\aleph_0)$ *angehörende Zahl* α, *so daß* $P^{(\alpha)}$ *entweder gar keinen Punkt enthält oder perfekt ist. Alle folgenden Ableitungen sind dann gleich* $P^{(\alpha)}$. *Enthält* $P^{(\alpha)}$ *gar keinen Punkt, so heißt* P *reduzibel.*

Jede reduzible Menge ist abzählbar.

Der *Inhalt* einer Punktmenge wird in der folgenden Weise definiert. Sei P eine im Intervalle (a, b) liegende Punktmenge. Man betrachte eine endliche oder abzählbare Menge von Teilintervallen von (a, b), die die sämtlichen Punkte von P enthalten, und bilde die Summe S der Längen aller dieser Intervalle (die auch unendlich groß ausfallen kann). Macht man dies für alle möglichen endlichen und abzählbaren Intervallmengen der angegebenen Art, so hat die Menge der so gebildeten Zahlen S eine bestimmte Zahl zur unteren Grenze (vgl. § 10). Diese Zahl, die sicher nicht negativ und nicht größer als die Länge $b - a$ von (a, b) ist, wird der *äußere Inhalt* unserer Punktmenge P genannt. Nun bilde man den äußeren Inhalt der Komplementärmenge von P in bezug auf das Intervall (a, b) und subtrahiere ihn von der Länge $b - a$ dieses Intervalls. Die so erhaltene Zahl heißt der *innere Inhalt* von P. Er ist gewiß nicht größer als der äußere Inhalt. Sind äußerer und innerer Inhalt von P einander gleich, so heißt die Menge P *meßbar,* und der gemeinsame Wert von äußerem und innerem Inhalt wird kurz *der*

Inhalt von P genannt. (Bezüglich der Existenz nicht meßbarer Punktmengen vgl. H. Lebesgue, *Bull. soc. math.* **35**, 202.)

Ist die in (a, b) gelegene Punktmenge P meßbar, so ist auch ihre Komplementärmenge in bezug auf (a, b) meßbar, und die Summe der Inhalte dieser beiden Mengen ist $b - a$.

Daher: *Jede abgeschlossene in (a, b) gelegene Punktmenge P ist meßbar. Ihr Inhalt ist gleich der Länge von (a, b) vermindert um die Summe der Längen derjenigen Intervalle, welche von den nicht zu P gehörenden Punkten von (a, b) gebildet werden.*

Jede abzählbare Punktmenge ist meßbar und hat den Inhalt Null.

Sei eine endliche oder abzählbare Menge von meßbaren Punktmengen $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ gegeben; *dann ist auch die Menge P, die aus sämtlichen Punkten von $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ besteht, meßbar. Haben von den Mengen P_i keine zwei einen Punkt gemein, so ist der Inhalt von P gleich der Summe der Inhalte der P_i. Ebenfalls ist die Menge Q derjenigen Punkte, die allen P_i gemeinsam sind, meßbar, und ist für alle i die Menge P_i in P_{i-1} enthalten, so ist der Inhalt von Q gleich der Limite der Inhalte der P_i.*

Die Theorie der Punktmengen rührt in ihren Grundzügen ebenfalls von G. Cantor her. Außer der in § 7 erwähnten Literatur sei hier noch das Buch von N. H. und G. C. Young, *Theory of sets of points* (Cambridge 1906) genannt, wo man ein vollständiges Literaturverzeichnis findet. Die oben mitgeteilte Definition des Inhaltes einer Punktmenge rührt von H. Lebesgue her (*Ann. di mat.* (3) **7**, 231 (1902)); näheres darüber in dessen *Leçons sur l'intégration* (Paris 1904), 102 ff. Eine ähnliche Definition gibt W. H. Young, *Proc. Lond.* (2) **2**, 16 (1905) und *l. c.*, Chap. V. Weniger weittragende Definitionen des Inhaltes einer Punktmenge hatten vorher u. a. gegeben: G. Cantor, *Math. Ann.* **23**, 473 (1884); C. Jordan, *Journ. de math.* (4) **8**, 76 (1892); É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions,* 46.

§ 9. Der Funktionsbegriff. Der Begriff des Grenzwertes.

Eine Größe y heißt eine (eindeutige) *Funktion* der reellen Veränderlichen x im Intervalle (a, b), wenn jedem in dieses Intervall fallenden Werte von x in eindeutiger Weise ein Wert von y zugeordnet ist.[1] Allgemeiner heißt y eine Funktion von x

1) In diesem allgemeinen Sinne, der von der Möglichkeit einer analytischen Darstellung gänzlich absieht, erscheint der Funktions-

auf einer gegebenen linearen Punktmenge, wenn jedem einen Punkt dieser Menge darstellenden Werte von x ein Wert von y zugeordnet ist. Analog heißt y eine Funktion der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in einem Gebiete (oder auf einer Punktmenge) des n dimensionalen Raumes unserer n Veränderlichen, wenn jedem Wertsysteme der $x_1, x_2, \ldots, x_n$, das einen Punkt dieses Gebietes (bezw. dieser Punktmenge) darstellt, ein Wert von y zugeordnet ist.

Unter einem *Polynom in x* versteht man einen Ausdruck der Form:

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k,$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_k$ Konstante bedeuten. Ist $a_0 \neq 0$, so heißt das Polynom *vom k^{ten} Grade.* Analog heißt die Summe einer endlichen Anzahl von Ausdrücken der Form:

$$a_{k_1, k_2, \ldots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

ein *Polynom* in $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dabei bedeuten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nicht negative ganze Zahlen, $a_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ irgendwelche Konstante, und x_i^0 ist durch 1 zu ersetzen. Bildet man für alle Glieder, deren Koeffizient $a_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ nicht Null ist, den Ausdruck $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, so wird die größte der so erhaltenen Zahlen als der *Grad* unseres Polynomes bezeichnet.

Eine Funktion, die sich als Quotient zweier Polynome darstellen läßt, heißt eine *rationale Funktion.* Die Polynome heißen auch *ganze rationale* Funktionen.

Eine Funktion y von x heißt eine *algebraische Funktion* von x, wenn sie einer Gleichung der Form:

$$P_0(x) y^k + P_1(x) y^{k-1} + \cdots + P_{k-1}(x) y + P_k(x) = 0$$

genügt, wo die $P_i(x)$ Polynome in x bedeuten. Analog werden die algebraischen Funktionen von mehreren Veränderlichen definiert.

Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt *homogen vom Grade* (der Ordnung) r, wenn für alle Werte von t die Relation besteht:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

---

begriff zum erstenmal bei G. Lejeune Dirichlet (*Über die Entwicklung ganz willkürlicher Funktionen etc.* (1837), *Werke* **1**, 135). Frühere Mathematiker hatten das Wort *Funktion* in viel beschränkterem Sinne gebraucht. Vgl. *Differentialrechnung* § 2.

Eine Funktion $f(x)$ einer Veränderlichen heißt *monoton wachsend* im Intervall (a, b), wenn für irgend zwei Werte x' und x'' dieses Intervalles aus $x' > x''$ folgt: $f(x') \geqq f(x'')$. Sie heißt *monoton abnehmend*, wenn aus $x' > x''$ folgt: $f(x') \leqq f(x'')$. Die monoton wachsenden und monoton abnehmenden Funktionen werden zusammengefaßt unter dem Namen *monotone Funktionen.*

Man definiert: Die Funktion $f(x)$ hat für $x = a$ den *rechtsseitigen Grenzwert* A, in Zeichen: $\lim\limits_{x=a+0} f(x) = A$, wenn zu jeder beliebigen positiven Zahl ε eine positive Zahl η gehört, derart daß für alle der Ungleichung $0 < x - a < \eta$ genügenden x die Ungleichung besteht: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Die Definition des *linksseitigen Grenzwertes* $\lim\limits_{x=a-0} f(x)$ erhält man, indem man die obige Ungleichung ersetzt durch: $0 > x - a > -\eta$.

Hat $f(x)$ für $x = a$ sowohl den rechtsseitigen als den linksseitigen Grenzwert A, so schreibt man: $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ und sagt: *$f(x)$ hat für $x = a$ den Grenzwert A.*

Man definiert weiter: $\lim\limits_{x=a+0} f(x) = +\infty$ (bezw. $= -\infty$), wenn zu jeder beliebigen Zahl B eine positive Zahl η gehört, derart daß für alle der Ungleichung $0 < x - a < \eta$ genügenden x die Ungleichung besteht: $f(x) > B$ (bezw. $< B$). In ganz analoger Weise wird definiert: $\lim\limits_{x=a-0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x=a-0} f(x) = -\infty$. Ist gleichzeitig $\lim\limits_{x=a+0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x=a-0} f(x) = +\infty$, so schreibt man wieder $\lim\limits_{x=a} f(x) = +\infty$. Analoge Bedeutung hat: $\lim\limits_{x=a} f(x) = -\infty$.

Ferner: $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = A$ (bezw. $\lim\limits_{x=-\infty} f(x) = A$), wenn zu jeder beliebigen positiven Zahl ε eine Zahl b gehört, derart daß für alle der Ungleichung $x > b$ (bezw. $x < b$) genügenden x die Ungleichung besteht: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Analog: $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = +\infty$ (bezw. $= -\infty$), wenn zu jeder beliebigen Zahl B eine Zahl b gehört, derart daß für alle der Ungleichung $x > b$ genügenden x die Ungleichung $f(x) > B$ (bezw. $f(x) < B$) besteht. Und in ähnlicher Weise werden die Zeichen $\lim\limits_{x=-\infty} f(x) = +\infty$ (bezw. $= -\infty$) definiert.

Eine Beziehung zwischen dem hier eingeführten Grenzbegriff und dem in § 2 eingeführten Zeichen $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ wird hergestellt durch die Sätze:

Aus $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = A$ folgt $\lim\limits_{n=\infty} f(n) = A$; aus $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$

und $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ folgt: $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = A$, vorausgesetzt, daß (wenigstens von einem bestimmten Wert N des Index n an) alle x_n von a verschieden sind. Die Umkehrung dieser beiden Sätze gilt nicht.

Ist $\lim\limits_{x=a+0} f_1(x) = A$ *und* $\lim\limits_{x=a+0} f_2(x) = A$ *und ist eine dritte Funktion* $f(x)$ *so beschaffen, daß für alle der Ungleichung* $0 < x - a < \eta$ *genügenden* x (oder kurz gesprochen: in einer rechtsseitigen Umgebung von a) *die Funktion* $f(x)$ *der Größe nach zwischen* $f_1(x)$ *und* $f_2(x)$ *liegt, so ist auch* $\lim\limits_{x=a+0} f(x) = A$. *Ist* $\lim\limits_{x=a+0} f_1(x) = +\infty$ (bezw. $= -\infty$) *und besteht in einer rechtsseitigen Umgebung von a die Ungleichung:* $f(x) \geqq f_1(x)$ (bezw. $f(x) \leqq f_1(x)$), *so ist auch* $\lim\limits_{x=a+0} f(x) = +\infty$ (bezw. $= -\infty$). Analoges gilt für $\lim\limits_{x=a-0}$ und $\lim\limits_{x=a}$.

Ist $f(x)$ *in einer rechtsseitigen Umgebung von a monoton wachsend (monoton abnehmend), so existiert stets* $\lim\limits_{x=a+0} f(x)$; *bleibt außerdem* $f(x)$ *in dieser Umgebung von a größer (bezw. kleiner) als eine feste Zahl B, so ist* $\lim\limits_{x=a+0} f(x)$ *eine endliche Zahl.*

Analoges gilt für $\lim\limits_{x=a-0}$, $\lim\limits_{x=+\infty}$ und $\lim\limits_{x=-\infty}$. Speziell: *Ist eine Folge reeller Zahlen* a_n *gegeben, die sämtlich unter einer Zahl A liegen, und folgt* (wenigstens von einem bestimmten Werte des Index n an) *aus* $n' > n''$ *die Ungleichung:* $a_{n'} > a_{n''}$, *so existiert eine endliche Zahl a, derart daß* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$.

Ist $\lim f_1(x) = A_1$ und $\lim f_2(x) = A_2$, so ist

$$\lim\,(f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2;\ \lim\,(f_1(x) - f_2(x)) = A_1 - A_2;$$
$$\lim f_1(x) \cdot f_2(x) = A_1 \cdot A_2$$

und, vorausgesetzt daß A_2 nicht Null ist:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Man sagt: Die Funktion $f(x, y)$ hat für $x = a$, $y = b$ den Grenzwert A, in Zeichen: $\lim\limits_{x=a,\, y=b} f(x, y) = A$, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl η gehört, derart daß für jedes von a, b verschiedene Wertepaar x, y, das den Ungleichungen genügt: $|x - a| < \eta$, $|y - b| < \eta$, die Ungleichung besteht: $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Aus $\lim\limits_{x=a,\, y=b} f(x, y) = A$ folgt $\lim\limits_{x=a} (\lim\limits_{y=b} f(x, y)) = A$ und $\lim\limits_{y=b} (\lim\limits_{x=a} f(x, y)) = A$ (vorausgesetzt, daß die auftretenden Limiten existieren), aber nicht umgekehrt.

Grenzwerte von *Doppelfolgen* $a_{m,n}$ (wo m und n jedes für sich die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen) werden definiert durch: $\lim\limits_{m,n=\infty} a_{m,n} = A$, wenn zu jeder positiven Zahl ε ein Wert M von m und ein Wert N von n gehört, so daß aus den beiden Ungleichungen $m > M$, $n > N$ folgt: $|a_{m,n} - A| < \varepsilon$. Näheres über Doppelfolgen bei A. Pringsheim, *Münch. Ber.* **27**, 103, *Math. Ann.* **53**, 289, F. London, *Math. Ann.* **53**, 322.

§ 10. Obere und untere Grenze. Stetigkeit und Unstetigkeit.

Sei irgendeine Menge von Zahlen Z gegben. Wir teilen die rationalen Zahlen in zwei Klassen (vgl. § 2) nach der folgenden Vorschrift: in die erste dieser Klassen geben wir eine rationale Zahl r, wenn sämtliche Zahlen von Z kleiner als r sind; in die zweite dieser Klassen alle übrigen rationalen Zahlen. Enthält die erste dieser Klassen keine Zahl, so sagt man, *die Menge Z hat die obere Grenze* $+\infty$; enthalten beide Klassen Zahlen, so ist dadurch ein Schnitt im Gebiet der rationalen Zahlen definiert, und die diesen Schnitt erzeugende reelle Zahl M heißt die *obere Grenze der Menge Z*. Analog wird die untere Grenze m der Menge Z definiert, die, wenn sie nicht eine endliche Zahl ist, den Wert $-\infty$ hat. Der erste, der die Begriffe der oberen und unteren Grenze verwendete, war B. Bolzano (*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes etc.*, Prag 1817, herausg. in *Ostwalds Klassikern* No. 153 von Ph. E. B. Jourdain). Eine größere Verbreitung erhielten sie erst unter dem Einflusse von K. Weierstraß.

Sei eine Funktion $f(x)$ gegeben, die für alle Punkte des Intervalls (a, b) definiert ist, und Z sei die Menge der Werte, die $f(x)$ in diesem Intervalle annimmt. Die obere und untere Grenze von Z werden dann als *obere (untere) Grenze von $f(x)$ im Intervalle* (a, b) bezeichnet. Die Differenz zwischen oberer und unterer Grenze heißt *die Schwankung von $f(x)$ im Intervalle* (a, b).

Sei eine Folge von Intervallen δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ gegeben, die alle den Punkt x_0 als inneren Punkt enthalten, und deren Länge mit wachsendem i gegen Null konvergiert, und sei M_{δ_i} die obere Grenze von $f(x)$ in δ_i. Haben dann alle M_{δ_i} den Wert $+\infty$, so sagt man: *die Funktion $f(x)$ hat im Punkte x_0 die obere Grenze $+\infty$.* Im entgegengesetzten Falle existiert stets $\lim\limits_{i=\infty} M_{\delta_i}$ und ist eine endliche Zahl; *sie heißt die obere Grenze von $f(x)$ im Punkte x_0.* Die so definierte obere Grenze ist unabhängig von der Wahl der Intervalle δ_i. Analog wird die untere Grenze von $f(x)$ im Punkte x_0 definiert. Die Differenz zwischen oberer und unterer Grenze im Punkte x_0 heißt *die Schwankung von $f(x)$ im Punkte x_0.*

Ist M die obere Grenze von $f(x)$ im Intervalle (a, b), so gibt es in diesem Intervalle mindestens einen Punkt x_0, in dem die obere Grenze von $f(x)$ gleich M ist. (Analog für die untere Grenze.)

Analoges gilt für Funktionen von n Veränderlichen, wenn man statt der Intervalle abgeschlossene n dimensionale Gebiete betrachtet.

Die Funktion $f(x)$ heißt *stetig im Punkte x_0*, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl η gehört, so daß aus $|x - x_0| < \eta$ die Ungleichung folgt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ist $\lim\limits_{x=x_0+0} f(x) = f(x_0)$ und $\lim\limits_{x=x_0-0} f(x) = f(x_0)$, so ist $f(x)$ stetig im Punkte x_0 und umgekehrt.

Ist nur $\lim\limits_{x=x_0+0} f(x) = f(x_0)$ (bezw. $\lim\limits_{x=x_0-0} f(x) = f(x_0)$), so heißt $f(x)$ *rechtsseitig* (bezw. *linksseitig*) *stetig* im Punkte x_0.

Damit $f(x)$ stetig sei im Punkte x_0 ist notwendig und hinreichend, daß die Schwankung von $f(x)$ im Punkte x_0 gleich Null sei.

Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ stetig im Punkte x_0, so ist auch $f(x) + \varphi(x)$, $f(x) - \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, und, vorausgesetzt daß $\varphi(x_0) \neq 0$ ist, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ stetig im Punkte x_0.

Setzt man $\varphi(x_0) = y_0$ und ist die Funktion $\varphi(x)$ stetig im Punkte x_0, $f(y)$ stetig im Punkte y_0, so ist die Funktion $f(\varphi(x))$ stetig im Punkte x_0.

Die Funktion $f(x)$ heißt *stetig im Intervalle* (a, b), wenn sie stetig ist in jedem inneren Punkte dieses Intervalles, rechtsseitig stetig im Punkte a und linksseitig stetig im Punkte b.

Ist die Funktion $f(x)$ stetig in (a, b), so ist sie für alle Punkte dieses Intervalles gegeben, wenn ihre Werte an einer im Intervalle (a, b) überall dicht liegenden Punktmenge, z. B. der Menge der rationalen Punkte von (a, b) gegeben sind.

Hieraus folgt, daß die Menge aller in (a, b) stetigen Funktionen die Mächtigkeit des Kontinuums hat, während die Mächtigkeit aller Funktionen gleich $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$ (und mithin größer als $\mathfrak{c}$) ist.

Ist die Funktion $f(x)$ stetig in (a, b), so ist ihre obere (untere) Grenze in diesem Intervalle eine endliche Zahl, und es gibt in diesem Intervalle mindestens einen Punkt, in dem der Wert von $f(x)$ gleich ist dieser oberen (unteren) Grenze.

Ist die Funktion $f(x)$ stetig in (a, b) und ist E ein Wert, der zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, so gibt es in (a, b) einen Punkt, in dem $f(x)$ den Wert E annimmt. Kürzer gesprochen: Eine stetige Funktion kann nicht von einem Werte zu einem anderen übergehen, ohne alle dazwischen liegenden Werte anzunehmen. Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht (vgl. G. Darboux, *Ann. éc. norm.* (2) **4**, 109 (1875) und H. Lebesgue, *Leç. sur l'intégration*, 89).

Ist die Funktion $f(x)$ stetig in (a, b), so gehört zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl η, derart, daß für irgend zwei Punkte x' und x'' von (a, b), für die $|x' - x''| < \eta$ ist, die Ungleichung besteht: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (Satz von der *gleichmäßigen* Stetigkeit; der erste Beweis wurde publiziert von E. Heine, *Journ. f. Math.* **74**, 188 (1872)).

Jede im Intervalle (a, b) stetige Funktion läßt sich in eine in diesem Intervalle gleichmäßig konvergente (vgl. den Abschnitt über *Funktionentheorie*) *Reihe von Polynomen entwickeln* (Satz von K. Weierstraß, *Berl. Sitzungsber.* (1885), 633, 789; Näheres über die Entwicklung stetiger Funktionen in Reihen von Polynomen bei É. Borel, *Leçons sur les fonct. de variables réelles,* Paris 1905, Chap. IV).

Sei die Funktion $f(x)$ stetig im Intervall (a, b) und aus $x' > x''$ folge $f(x') > f(x'')$ (oder $f(x') < f(x'')$). Setzt man $f(a) = A$ und $f(b) = B$ und ist y eine beliebige Zahl des Intervalles (A, B), so gibt es in (a, b) eine und nur eine Zahl x, für die $f(x) = y$ wird. Ordnet man der Zahl y diese Zahl x zu, so ist dadurch im Intervalle (A, B) der Veränderlichen y eine Funktion $\varphi(y)$ definiert, welche *die zur Funktion $f(x)$ inverse Funktion heißt.* Sie ist stetig in (A, B) und aus $y' > y''$ folgt $\varphi(y') > \varphi(y'')$ (bezw. $\varphi(y') < \varphi(y'')$). Sie genügt der Relation: $\varphi(y) = \varphi(f(x)) = x$, woraus $f(\varphi(y)) = y$, d. h. die zur inversen Funktion inverse ist die ursprüngliche Funktion.

Jede Stelle x_0, an der $f(x)$ nicht stetig ist, heißt eine *Unstetigkeitsstelle* von $f(x)$, der Wert der Schwankung von $f(x)$

an der Stelle x_0 ist dann nicht Null; er wird auch als der *Unstetigkeitsgrad* von $f(x)$ an der Stelle x_0 bezeichnet.

Ist in jedem Punkte des Intervalles (a, b), die Endpunkte inbegriffen, der Unstetigkeitsgrad von $f(x)$ kleiner als A, so gehört zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl η, derart daß für irgend zwei Punkte x' und x'' von (a, b), für die $|x' - x''| < \eta$ ist, die Ungleichung besteht: $|f(x') - f(x'')| < A + \varepsilon$.

Eine Unstetigkeitsstelle x_0 von $f(x)$ heißt *von erster Art*, wenn sowohl $\lim\limits_{x = x_0 + 0} f(x)$ als $\lim\limits_{x = x_0 - 0} f(x)$ existiert, sonst *von zweiter Art.* Sind speziell $\lim\limits_{x = x_0 + 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x = x_0 - 0} f(x)$ gleich derselben endlichen Zahl, aber nicht gleich $f(x_0)$, so heißt die Unstetigkeit *hebbar*, weil sich dann $f(x)$ durch bloße Abänderung des Funktionswertes an der Stelle x_0 in eine im Punkte x_0 stetige Funktion verwandeln läßt.

Eine Funktion heißt *punktweise unstetig* im Intervalle (a, b), wenn ihre Stetigkeitsstellen in diesem Intervalle überall dicht liegen, sie heißt *total unstetig* im Intervalle (a, b), wenn sie in jedem Punkte von (a, b) unstetig ist. (Über die allgemeinste Verteilung der Stetigkeitsstellen einer Funktion $f(x)$ vgl. W. H. Young, *Wien. Ber.* **112**, Abt. 2[a] (1903), 1307.)

Eine unstetige Funktion $f(x)$ heißt *von erster Klasse* im Intervalle (a, b), wenn sie in diesem Intervalle Limite stetiger Funktionen ist, d. h. wenn eine Gleichung $f(x) = \lim\limits_{n = \infty} f_n(x)$ für jeden Punkt von (a, b) besteht, wobei mit $f_n(x)$ Funktionen bezeichnet sind, die in (a, b) stetig sind. Eine unstetige Funktion heißt *von zweiter Klasse,* wenn sie Limite von Funktionen erster Klasse ist, ohne selbst von erster Klasse zu sein. Allgemein heißt eine unstetige Funktion *von n^{ter} Klasse,* wenn sie Limite von Funktionen $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse ist, ohne selbst von $(n-1)^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Klasse zu sein. Eine unstetige Funktion heißt *von ω^{ter} Klasse,* wenn sie Limite von Funktionen aus Klassen von endlicher Ordnung ist, ohne selbst einer dieser Klassen anzugehören. Ist π irgendeine transfinite Ordinalzahl der Zahlklasse $Z(\aleph_0)$, so heißt eine unstetige Funktion *von π^{ter} Klasse,* wenn sie Limite von Funktionen von niedrigerer als der π^{ten} Klasse ist, ohne selbst einer dieser Klassen anzugehören.

Es lassen sich Funktionen definieren, die einer beliebig gegebenen Klasse (deren Ordnung eine endliche Zahl oder eine Zahl der Zahlklasse $Z(\aleph_0)$ ist) *angehören; es lassen sich aber auch Funktionen definieren, die keiner dieser Klassen angehören.*

Die genannte Klassifizierung der Funktionen rührt her von R. Baire, *Ann. di mat.* (3) **3**, 68 (1899). Näheres hierüber: R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues,* Paris 1905, wo man die notwendige und hinreichende Bedingung dafür findet, daß eine Funktion der ersten Klasse angehöre, und *Acta math.* **30**, 1. Ferner H. Lebesgue, *Journ. de math.* (6) **1**, 139.

Ähnliche Definitionen und Sätze, wie die hier für Funktionen einer Veränderlichen angeführten, gelten für Funktionen von mehreren Veränderlichen, z. B. heißt eine Funktion von zwei Veränderlichen x, y stetig an der Stelle x_0, y_0, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl η gehört, so daß aus dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Ungleichungen $|x - x_0| < \eta$ und $|y - y_0| < \eta$ folgt: $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$; oder, was dasselbe ist, wenn $\lim\limits_{x = x_0, y = y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ist.

Aus der Stetigkeit von $f(x, y_0)$ als Funktion von x an der Stelle x_0 und der Stetigkeit von $f(x_0, y)$ als Funktion von y an der Stelle y_0 folgt nicht die Stetigkeit von $f(x, y)$ an der Stelle x_0, y_0, wie man z. B. am Verhalten der Funktion $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ im Punkte $x = 0$, $y = 0$ erkennen kann.

Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in allen Punkten eines Gebietes der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stetig nach jeder einzelnen dieser Veränderlichen, so ist sie in diesem Gebiete höchstens von $(n - 1)^{ter}$ Klasse (H. Lebesgue, *Bull. sciences math.* (2) **22**$_1$, 284 (1898) und *Journ. de math.* (6) **1**, 201; siehe auch R. Baire, *Ann. di mat.* (3) **3**, 87).

Näheres über Stetigkeit und Unstetigkeit findet man, außer in den bereits genannten Werken, bei A. Schoenflies, *Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (*Math.-Ver.* **8**) und A. Pringsheim, *Enzykl.* **II** A 1, wo sich auch viele Literaturnachweise finden. Ferner: U. Dini, *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe,* deutsch von J. Lüroth u. A. Schepp, Leipzig 1892; O. Stolz u. J. A. Gmeiner, *Einleitung in die Funktionentheorie,* Leipzig 1904 (*Teubners Sammlung* **14**), J. Pierpont, *The theory of functions of real variables,* Boston 1905. Zahlreiche Beispiele bei E. Pascal, *Esercizi e note critiche etc.,* Mailand 1895.

Sei die Funktion $f(x)$ definiert in (a, b), und sei eine endliche Anzahl beliebiger Punkte von (a, b) gegeben:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b.$$

Wir bilden:

$$V = |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(b) - f(x_n)|.$$

Die obere Grenze aller so erhältlichen Zahlen V wird bezeichnet als *totale Schwankung von* $f(x)$ *im Intervalle* (a, b). Ist diese obere Grenze endlich, so heißt $f(x)$ *von beschränkter Schwankung* (*à variation bornée*) *im Intervall* (a, b).

Jede in (a, b) *monotone Funktion ist daselbst von beschränkter Schwankung; und zwar ist ihre totale Schwankung* $|f(b) - f(a)|$. *Eine Funktion, die in* (a, b) *von beschränkter Schwankung ist, läßt sich darstellen als Summe zweier in* (a, b) *monotoner Funktionen. Ist eine Funktion in* (a, b) *von beschränkter Schwankung, und besitzt sie in diesem Intervall Unstetigkeitsstellen, so sind dieselben alle von erster Art und bilden eine endliche oder abzählbare Menge.*

Die Funktionen von beschränkter Schwankung wurden eingeführt von C. Jordan (*Cours d'analyse*, 2. éd., **1**, 54). Siehe auch E. Study, *Math. Ann.* **47**, 298 und H. Lebesgue, *Leç. sur l'intégration*, Chap. IV.

§ 11. Potenzen. Logarithmen. Wichtige Grenzwerte.

Bedeutet n eine natürliche Zahl, a eine beliebige, von Null verschiedene reelle Zahl, so versteht man unter a^n (der n^{ten} Potenz von a) das Produkt von n einander gleichen Faktoren a, unter a^{-n} die Zahl $\frac{1}{a^n}$, unter a^0 die Zahl 1. Ist ferner a positiv, so gibt es eine und nur eine positive Zahl, die zur n^{ten} Potenz erhoben a ergibt; sie heißt die positive n^{te} Wurzel aus a und wird mit $a^{\frac{1}{n}}$ oder $\underset{+}{\sqrt[n]{a}}$ bezeichnet; ist dann $r = \frac{m}{n}$ eine positive rationale Zahl, so versteht man unter a^r die positive n^{te} Wurzel aus a^m, und unter a^{-r} die Zahl $\frac{1}{a^r}$. Sind r und r' irgendwelche rationale Zahlen, so ist:

$$(1) \qquad a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}; \quad (a^r)^{r'} = a^{r \cdot r'}$$

und wenn $r > r'$ ist:

$$(2) \qquad \begin{aligned} a^r &> a^{r'} \quad \text{für} \quad a > 1; \\ a^r &< a^{r'} \quad \text{für} \quad a < 1. \end{aligned}$$

Sei a positiv und > 1 (bezw. < 1) und ϱ eine beliebige irrationale Zahl. Um a^ϱ zu definieren, teilen wir die rationalen

Zahlen in zwei Klassen; in die eine Klasse geben wir alle rationalen Zahlen, die kleiner sind als irgendeine Zahl a^r, wo r eine rationale Zahl bedeutet, die kleiner (bezw. größer) als ϱ ist; in die andere Klasse geben wir alle übrigen rationalen Zahlen. Dadurch ist ein Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen definiert; die ihn erzeugende reelle Zahl wird mit a^ϱ bezeichnet. Die Gleichungen (1) und die Ungleichungen (2) gelten dann für beliebige reelle r und r'.

Hierdurch ist die Funktion a^x $(a > 0)$ für alle reellen x definiert; sie wird *Exponentialfunktion* genannt; sie ist stetig und wächst von 0 bis $+\infty$ oder nimmt ab von $+\infty$ bis 0, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, je nachdem a größer oder kleiner als 1 ist. Die inverse Funktion (vgl. § 10) ist daher definiert von 0 bis $+\infty$; sie wird bezeichnet mit $\overset{a}{\log}\, x$ *(Logarithmus von x für die Basis a)*; sie ist stetig und wächst von $-\infty$ bis $+\infty$ oder nimmt ab von $+\infty$ bis $-\infty$, wenn x von 0 nach $+\infty$ wächst, je nachdem die Basis a größer oder kleiner als 1 ist.[1])

Es gelten die Formeln:

$$\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2; \quad \log x^\varrho = \varrho \log x.$$

Der Übergang von einer Basis a zu einer anderen Basis a' wird vermittelt durch die Formel:

$$\overset{a'}{\log}\, x = \frac{\overset{a}{\log}\, x}{\overset{a}{\log}\, a'}.$$

Als *natürliche Logarithmen* bezeichnet man die Logarithmen von der Basis e, wobei e definiert ist durch:

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Näheres über Exponentialfunktion und Logarithmen im Abschnitte über *Funktionentheorie.*

Es gelten die Formeln:

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x; \qquad \lim_{n=\infty} \left\{ n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) \right\} = \overset{e}{\log}\, x$$

$$\lim_{x=+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1; \qquad \lim_{x=0} \frac{\lg(1 + a x)}{x} = a.$$

---

1) Im Falle $a = 1$ setzt man $1^x = 1$ für alle reellen x. Eine inverse Funktion kann in diesem Falle nicht gebildet werden.

Für jedes reelle k ist:

$$\lim_{x=+\infty} e^x \cdot x^k = +\infty; \qquad \lim_{x=+\infty} e^{-x} \cdot x^k = 0.$$

Für jedes positive k ist:

$$\lim_{x=+\infty} x^{-k} \cdot \log x = 0.$$

Die allgemeinste stetige Funktion, die der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

genügt, ist $f(x) = a \cdot x$, *wo* a *eine Konstante bedeutet* (über unstetige Lösungen dieser Funktionalgleichung siehe R. Volpi, *Giorn. mat.* **35**, 104 (1894), G. Hamel, *Math. Ann.* **60**, 459 (1905); vgl. auch H. Lebesgue, *Atti Torino* **42**, 532 und F. Bernstein, *Math. Ann.* **64**, 417).

Die allgemeinste stetige Funktion, die der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

genügt, ist $f(x) = A^{ax}$, *wo* A *und* a *Konstante bedeuten.*

Die allgemeinste stetige Funktion, die der Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

genügt, ist $f(x) = A \overset{a}{\log} x$.

Die allgemeinste stetige Funktion, die der Funktionalgleichung:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

genügt, ist $f(x) = x^a$.

Die vier zuletzt angeführten Sätze stammen von A. Cauchy (*Analyse algébrique* (1823), *Œuvres* (2) **3**, 98).

Es seien noch einige häufig vorkommende Grenzwertformeln zusammengestellt:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x=0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{x=0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad \text{(Stirlingsche Formel)}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1}, \text{ wenn } r+1 > 0;$$

für nichtpositives $r+1$ ist dieser Grenzwert unendlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0.$$

Seien a und b reelle positive Zahlen. Bildet man der Reihe nach

$$\begin{array}{ll} a_1=\frac{1}{2}(a+b) & b_1=\underset{+}{\sqrt{ab}} \\ a_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1) & b_2=\underset{+}{\sqrt{a_1 b_1}} \\ a_3=\frac{1}{2}(a_2+b_2) & b_2=\underset{+}{\sqrt{a_2 b_2}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

so ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\lim\limits_{n=\infty} b_n$, *und dieser Grenzwert heißt das arithmetisch-geometrische Mittel aus a und b* (*K. F.* G a u s s, *Werke* **3**, 361).

Ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n=a$ *und setzt man* $s_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, *so ist auch* $\lim\limits_{n=\infty} s_n=a$. Näheres über diesen und ähnliche Sätze: E. C e s à r o, *Lehrbuch der algebraischen Analysis* (Leipzig 1904), 96, und É. B o r e l, *Leçons sur les séries divergentes* (Paris 1901), 87.

Aus $\lim\limits_{x=+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$ *folgt* $\lim\limits_{x=+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$, *vorausgesetzt, daß obere und untere Grenze von* $f(x)$ *in jedem endlichen Intervalle endliche Zahlen sind* (A. C a u c h y, *Analyse algébrique* (1823), *Œuvres* (2) **3**, 54; vgl. S t o l z - G m e i n e r, *Einleitung in die Funktionentheorie*, 31).

Aus $\lim\limits_{x=+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=A$ *folgt* $\lim\limits_{x=+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=A$, *vorausgesetzt, daß obere und untere Grenze von* $f(x)$ *in jedem endlichen Intervalle endliche* *p o s i t i v e* *Zahlen sind* (C a u c h y, *l. c.*, 58).