Kapitel II.

Kombinatorik, Determinanten und Matrices.

Von *Alfred Loewy* in Freiburg i. Br.

§ 1. Die Lehre von den Kombinationen. Die Binomialkoeffizienten. Die Polygonal- und Pyramidalzahlen. Die figurierten Zahlen. Die Polynomialkoeffizienten.

Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf die man n verschiedene Gegenstände in alle möglichen Reihenfolgen bringen kann, heißt *die Anzahl der Permutationen der n Gegenstände* (das Wort ist eingeführt von Jacob Bernoulli in der *Ars conjectandi* (1713), deutsche Ausgabe von Haußner in *Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften* No. 107, S. 78). Sie beträgt:

$$\Pi(n) = 1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, n.$$

Das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n bezeichnet man auch (Kramp, *Éléments d'arithmétique universelle,* Cologne 1808) mit

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

und liest *n-Fakultät.*

Über das Wachsen von $n!$ gibt folgender Satz Aufschluß:

Ist c irgendeine ganze positive Zahl > 1, so kann man stets eine derartige positive ganze Zahl n finden, daß für alle ganzzahligen $N > n$ der Ausdruck $N! > c^N$ ist.

Hat man für die n Gegenstände eine gewisse Reihenfolge festgesetzt und ordnet sie anders an, so spricht man jedesmal, wenn in dieser Anordnung zwei Gegenstände in der umgekehrten Reihenfolge wie bei der ursprünglichen Anordnung aufeinander folgen, von einer *Inversion* oder einem *Dérangement* (Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes,* 1750, Append., S. 658). Sind die Gegenstände mit 1, 2, 3, ..., n bezeichnet, so hat man in einer Anordnung jedesmal dann eine Inversion, wenn eine höhere Zahl einer niedrigeren voraufgeht.

Vertauscht man in einer gegebenen Anordnung irgend zwei Elemente miteinander, so spricht man von einer *Transposition* (Cauchy, *J. éc. polyt.*, Cah. **17**, 18 (1815), *Œuvres* (2) **1**, 81).

Eine Anordnung heißt *gerade* oder *von der ersten Klasse*, wenn sie eine gerade Anzahl von Inversionen enthält; im anderen Fall heißt sie *ungerade* oder *von der zweiten Klasse*. Eine Anordnung der ersten (zweiten) Klasse läßt sich stets aus der ursprünglichen oder natürlichen Anordnung durch eine gerade (ungerade) Anzahl von Transpositionen gewinnen. Jede Transposition ändert die Klasse einer Anordnung. Zwei beliebige Anordnungen können stets nur durch eine gerade oder nur durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen ineinander übergeführt werden. Jede Anordnung kann durch Transpositionen in jede andere übergeführt werden. Irgend zwei Anordnungen gleicher (ungleicher) Klasse gehen durch eine gerade (ungerade) Anzahl Transpositionen ineinander über.

Über die *Klasse einer Anordnung* gibt auch das aus den n Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gebildete *Differenzenprodukt* (vgl. § 4 dieses Kapitels bei der Vandermondeschen oder Cauchyschen Determinante, S. 68)

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i,j} (a_j - a_i) \qquad (j > i)$$

aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Faktoren Aufschluß. Ist $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgendeine Anordnung der ersten n Zahlen 1, 2, ..., n, so gehört die Anordnung $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in die erste (zweite) Klasse, falls der Quotient

$$\frac{\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta(1, 2, \ldots, n)}$$

den Wert $+1$ (-1) hat. Die durch die Anordnung auf obige Weise bestimmte Zahl ± 1 heißt der *Modul der Anordnung;* sie ist für die Determinantentheorie von größter Wichtigkeit. Der Modul der Anordnung $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kann auch auf folgende Weise bestimmt werden: er hat den Wert $(-1)^{n-r}$, wenn die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

als Produkt r zyklischer Faktoren, von denen keine zwei ein Element gemeinsam haben, dargestellt werden kann; hierbei sind auch die eingliedrigen Zykeln mitzurechnen (vgl. Kap. III). Alle angeführten Sätze finden sich bereits bei Cauchy, *J. éc. polyt.*, Cah. **17**, 29 (1815), *Œuvres* (2) **1**, 91ff. Von neueren Darstellungen vgl. man etwa Kronecker, *Vorl. üb. d. Theorie d. Determinanten,* herausg. von Hensel, Leipzig 1903, S. 299.

Es gibt $\frac{n!}{2}$ *Anordnungen der ersten Klasse und ebensoviele der zweiten Klasse.*

Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von n Elementen, unter denen a gleiche einer Art, b gleiche einer zweiten Art usw. vorkommen, ist $\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,\ldots}$.

Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf die man unter n gegebenen Gegenständen k auswählen kann, ohne die Reihenfolge zu berücksichtigen, in der die k Dinge gewählt werden, heißt die Anzahl *der einfachen Kombinationen der n Gegenstände zur k^{ten} Klasse.* Die Bezeichnung geht auf Blaise Pascal zurück, der von multitude des combinaisons de k dans n spricht (*Usage du triangle arithmétique,* Paris 1665, *Œuvres* **5**, 25 (1779), Cantor, *Vorl. über Geschichte der Mathematik*, 2. Aufl., Leipzig 1900, **2**, 752).

Die fragliche Anzahl beträgt

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \binom{n}{k}.$$
$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)}.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Satz:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k}.$$

Die Zahl $\binom{n}{k}$ läßt sich auch als die Anzahl der verschiedenen Mengen definieren, die man erhält, wenn man aus n verschiedenen Dingen Mengen von je k Dingen bildet. Da in keiner der $\binom{n}{k}$ Mengen ein Gegenstand mehrfach auftritt, so spricht man von *Kombinationen von n Dingen zu je k ohne Wiederholung.*

Wenn in den Kombinationen jedes Element wiederholt werden kann, so erhält man *die Kombinationen mit Wiederholung.* Die Anzahl der Mengen von je k Zahlen, die nur die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, die gleiche Zahl aber auch wiederholt, enthalten, oder, wie man auch sagt, die *Anzahl der Kombinationen von n Dingen zu je k mit Wiederholung, ist:*

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)n}{1\cdot 2\cdot \cdots (k-1)k} =$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Vertauscht man die Elemente der einzelnen Kombinationen auf alle möglichen Weisen, so erhält man die *Variationen*. Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf die man k Gegenstände, die man beliebig unter n gegebenen Gegenständen auswählt $(k \leqq n)$, auf k feste Plätze verteilen kann, heißt die Anzahl *der einfachen Variationen der n Gegenstände zur k^{ten} Klasse.* Ihre Anzahl beträgt

$$D_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!.$$

Für $k = n$ werden die *Variationen zu Permutationen.* Wenn in den Variationen jedes Element wiederholt werden darf, so erhält man *die Variationen mit Wiederholung.* Ihre Anzahl ist

$$D'_{n,k} = n^k.$$

Die Zahlen $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ nennt man auch die *Binomialkoeffizienten,* weil sie die numerischen Koeffizienten der verschiedenen Glieder in der Entwicklung der Potenz eines Binoms sind:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 +$$

$$\cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \cdots + b^n.$$

Sämtliche Binomialkoeffizienten lassen sich mittels des sogenannten *Blaise Pascalschen arithmetischen Dreiecks* (*Traité du triangle arithmétique,* Paris 1665, *Œuvres* **5**, 1 (1779))

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

bilden. Man erhält die Zahlen einer Zeile durch Addition der beiden in der vorhergehenden Zeile unmittelbar über ihnen stehenden. Die Zahlen der $n+1^{ten}$ Horizontalreihe geben die Binomialkoeffizienten der Entwicklung von $(a+b)^n$. Das Pascalsche Dreieck findet sich übrigens schon in einer chinesischen Schrift des 14. Jahrhunderts (Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik* **2**, 326, Leipzig 1903).

Bei dem Symbol $\binom{n}{k}$ nennen wir n die *Basis* und k den *Index*. Das Symbol $\binom{n}{k}$, das bis jetzt nur für ganzzahlige positive n und k verwandt wurde, behält auch für *beliebige reelle und komplexe* n einen Sinn; $\binom{n}{0}$ sei als 1 definiert. Es ist

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k}$$

und im besonderen

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k.$$

Die Binomialkoeffizienten mit ganzen negativen Zahlen als Basis sind, abgesehen vom Vorzeichen, die in einer Diagonale stehenden Zahlen des Pascalschen arithmetischen Dreiecks.

Für beliebige m und n gilt das *Additionstheorem der Binomialkoeffizienten:*

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{k}\binom{m}{0} + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k-2}\binom{m}{2} + \cdots + \binom{n}{0}\binom{m}{k}.$$

(Euler, *Acta Acad. Petrop.* V (1781), S. 74.) Für $m = 1$ erhält man die grundlegende Eigenschaft des Pascalschen Dreiecks:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(Michael Stifel, *Arithmetica integra,* Nürnberg 1544, zu vgl. M. Cantor, *Vorl. über Geschichte d. Math.* **2**, 433). Für $m = -1$ wird:

$$(-1)^k \cdot \binom{n-1}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \cdots + (-1)^k \cdot \binom{n}{k}.$$

Für ganzzahlige positive $r < k$ ist $\binom{r}{k} = 0$; daher ergibt sich für ganzzahlige positive $n = k$ aus der letzten Formel:

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \cdots (-1)^n \cdot \binom{n}{n}.$$

Für ganzzahlige positive n sei noch angeführt

$$\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ferner die aus dem Additionstheorem der Binomialkoeffizienten für ganzzahlige positive $n = m = k$ sich ergebende Formel:

$$\binom{2n}{n} = 1 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Aus

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

folgt durch Spezialisierung für $a = b = 1$:

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Für ganzzahlige n gelten ferner die Formeln:

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k} + \binom{n}{k+2}\binom{k+2}{k} \cdots (-1)^{n-k}\binom{n}{n}\binom{n}{k} = 0,$$

$$1 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \binom{n}{3}^2 \cdots (-1)^n \binom{n}{n}^2$$

ist gleich $(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ für gerade n und 0 für ungerade n.

Eine Sammlung von Summenformeln für die Binomialkoeffizienten gibt J. G. Hagen in seiner *Synopsis der höheren Mathematik* **1**, 64, Berlin 1891. Man vgl. hierzu auch das letzte Kapitel in dem *Lehrbuch der Kombinatorik* von E. Netto (*Teubners Sammlung* **7**, Leipzig 1901), das eine sehr vollständige Behandlung aller Fragen der Kombinatorik liefert. Als ältere ausführliche Darstellung der Kombinationslehre sei der zweite Teil der schon oben zitierten *Ars conjectandi* von J. Bernoulli genannt. Vorgänger von J. Bernoulli, die sich mit Kombinatorik beschäftigt haben, sind Bl. Pascal (*Traité du triangle arithmétique*, 1665), Leibniz (*Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, zu vgl. Cantor, *Vorles. über Geschichte d. Math.*, 2. Aufl., 1901, **3**, 43 u. folg.), Wallis (*Treatise of algebra*, 1685).

Für die Binomialkoeffizienten mit der Basis $-\frac{1}{2}$ gelten die bemerkenswerten Ausdrücke:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}, \qquad \binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \text{ usw.}$$

Über aus Binomialkoeffizienten gebildete Determinanten vgl. dieses Kapitel, § 4, ferner Pascal, *die Determinanten*

(*Teubners Sammlung* **3**, Leipzig 1900, S. 132), Netto, *Lehrb. der Kombinatorik,* S. 256.

Eine ganze positive Zahl N läßt sich immer und nur auf eine einzige Art als Summe von n Binomialkoeffizienten ausdrücken, deren Indices gegeben sind und aus den natürlichen Zahlen von 1 bis n bestehen, während von ihren Basen diejenige die kleinere ist, die zu einem kleineren Index gehört, d. h. die Formel:

$$N = \binom{x_1}{1} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_n}{n} \quad (x_k < x_{k+1})$$

hat immer eine und nur eine Auflösung in ganzen positiven Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Bezeichnet man mit dem Symbol

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

die Zahl $\binom{n+k-1}{k}$, so erhält man den weiteren Satz:

Wenn eine ganze positive Zahl N gegeben ist, so hat die Formel:

$$N = \begin{bmatrix} 2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} n+1 \\ x_n \end{bmatrix},$$

in der

$$x_k < x_{k+1}$$

ist, immer nur eine Auflösung in ganzen positiven Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Vgl. Pascal, *Giorn. di mat.* **25**, 48 (1887).)

Verallgemeinert man die Konstruktion des Pascalschen arithmetischen Dreiecks, so gelangt man zu den *Polygonal-* und *Pyramidalzahlen.*

Man bilde das Dreieck:

$$\begin{array}{c}
\delta \;\; 1 \\
\delta \;\; 1 + \delta \;\; 1 \\
\delta \;\; 1 + 2\,\delta \;\; 2 + \delta \;\; 1 \\
\delta \;\; 1 + 3\,\delta \;\; 3 + 3\,\delta \;\; 3 + \delta \;\; 1 \\
\delta \;\; 1 + 4\,\delta \;\; 4 + 6\,\delta \;\; 6 + 4\,\delta \;\; 4 + \delta \;\; 1 \\
\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;,
\end{array}$$

in dem jedes Element einer Zeile durch Addition der beiden in der vorhergehenden Zeile über ihm stehenden Elemente erhalten wird. Für $\delta = 1$ wird dieses Dreieck zum *Pascalschen*.

Wenn man als erste Diagonale die der Elemente δ ansieht, so sind die in der dritten Diagonale stehenden Elemente für $\delta = 1$ die *Dreiecks-* oder *Trigonalzahlen*, für $\delta = 2$ die *Vierecks-* oder *Quadratzahlen* usw., für $\delta = k - 2$ die *k-Eckszahlen*. Diese Zahlen heißen auch *Polygonalzahlen*. Der Name stammt daher, daß man ihre Einheiten in der Form eines regulären Polygons anordnen kann. Die m^{te} der k-Eckszahlen wird durch die Formel

$$\tfrac{1}{2} m \left[(k-2)\, m - (k-4)\right] = \binom{m}{1} + (k-2) \cdot \binom{m}{2}$$

(k Anzahl der Polygonseiten, m Seitenlänge, ausgedrückt in der Anzahl von Punkten, die auf der Seite liegen)

gegeben; die Summe der ersten m der k-Eckszahlen beträgt:

$$\tfrac{1}{6} m\,(m+1) \cdot [(m-1) \cdot (k-2) + 3].$$

Die Polygonalzahlen sollen altpythagoräischen Ursprungs sein; mit ihnen beschäftigt haben sich jedenfalls schon Hypsikles (200—100 v. Chr.) und der Neupythagoräer Nikomachus (etwa 100 n. Chr.); von Diophant, dem Vater der Arithmetik, existiert eine kleine Abhandlung über die Polygonalzahlen (deutsche Ausgabe von G. Wertheim, *die Arithmetik u. die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria*, Leipzig 1890).

Jede ganze positive Zahl läßt sich als Summe von k k-Eckszahlen darstellen. Diesen von P. Fermat (*Observations sur Diophante*, Œuvres de Fermat, publ. par Tannery (1891) **1**, 305, vgl. die oben zitierte Schrift von Wertheim, S. 162) in seinem Exemplar der Diophantausgabe (1621) von Bachet de Méziriac mit der Bemerkung „propositionem pulcherrimam et maxime generalem" ohne Beweis angegebenen Satz hat für $k = 3$ (die Dreieckszahlen) zum ersten Male Gauß in den *Disquisitiones arithmeticae*, Art. 293 (Leipzig 1801), *Ges. Werke* **1**, 348, streng bewiesen. Daß jede ganze Zahl als Summe von 4 Quadratzahlen darstellbar ist — ein wohl zuerst von Bachet de Méziriac erwähntes Theorem —, wurde von Lagrange (*Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin* 1770, S. 123, *Œuvres* **3**, 189), dann von Euler (*Acta Acad. Petrop.*, 1777, pars II, S. 48), sowie von Gauß, a. a. O., bewiesen. Den *allgemeinen Fermatschen Satz* hat zuerst Cauchy (*Mém. de l'institut de Paris*

14, année 1813—15, S. 177, *Œuvres* (2) **6**, 320) bewiesen und ihn dabei auf folgende Weise präzisiert:

Jede ganze positive Zahl kann als Summe von k k-Eckszahlen dargestellt werden, von denen nur vier von 0 oder 1 verschiedene Werte zu haben brauchen. (Modifizierter Beweis bei Legendre, *Théorie des nombres* (1830) **2**, 340—356. Zu vgl. Bachmann, *die Arithmetik der quadratischen Formen*, Leipzig 1898, S. 154 ff.)

Die k-Eckszahlen, durch die Null ergänzt:

$$0,\ 1,\ 2+(k-2),\ 3+3(k-2),\ 4+6(k-2),\ \ldots$$

bilden eine *arithmetische Reihe zweiter Ordnung,* d. h. die Reihe ihrer Differenzen:

$$1,\ 1+(k-2),\ 1+2(k-2),\ 1+3(k-2),\ \ldots$$

ist eine arithmetische Reihe erster Ordnung, die mit 1 beginnt und die Zahl $k-2$ zur Differenz zweier Nachbarglieder hat.

Die in der *vierten* Diagonale stehenden Zahlen des oben stehenden Dreiecks sind für $\delta = 1$ die *dreiseitigen Pyramidal- oder Tetraedralzahlen,* für $\delta = 2$ die *vierseitigen Pyramidalzahlen* usw., für $\delta = k-2$ die *k-seitigen Pyramidalzahlen.* Wie die Polygonalzahlen als Summen von Punkten bei regulären Vielecken, so sind die Pyramidalzahlen geometrisch durch die Lagerung von Kugeln in Pyramiden zu finden.

Die k-seitigen Pyramidalzahlen bilden eine arithmetische Reihe dritter Ordnung, die Reihe ihrer Differenzen liefert die k-Eckszahlen.

Die m^{te} der k-seitigen Pyramidalzahlen lautet:

$$\tfrac{1}{6}\, m(m+1)\,[3+(m-1)(k-2)] = \binom{m+1}{2} + (k-2)\cdot\binom{m+1}{3}.$$

Die Summe der ersten m der k-seitigen Pyramidalzahlen beträgt:

$$\tfrac{1}{24}(m+2)(m+1)m\cdot[(m-1)(k-2)+4] = \binom{m+2}{3} + (k-2)\cdot\binom{m+2}{4}.$$

An die eingeführten Pyramidalzahlen, die von der ersten Ordnung heißen, schließen sich solche höherer Ordnung, wenn man weitergehend arithmetische Reihen vierter, fünfter usw. Ordnung einführt oder, anders ausgedrückt, die in der fünften, sechsten usw. Diagonale stehenden Zahlen des obigen Dreiecks betrachtet.

Die Binomialkoeffizienten $\binom{m+k-1}{k}$ heißen *figurierte*

Zahlen. Die für $k = 2$ sich ergebende Zahlenreihe $\binom{m+1}{2}$ liefert die Dreieckszahlen: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Die Zahlenreihe $\binom{m+2}{3}$ stellt die dreiseitigen Pyramidalzahlen dar.

Über figurierte Zahlen vgl. Jacob Bernoullis *Ars conjectandi,* Teil II, Kap. III.

Eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind auch die *Polynomialkoeffizienten.* Auf sie führt die Betrachtung der positiven ganzzahligen n^{ten} Potenz eines Polynoms. Es ist:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu)^n = \sum \binom{n}{k_1\, k_2\, \ldots\, k_{\nu-1}} a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \ldots a_\nu^{k_\nu}.$$

In der Summe haben $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ alle ganzzahligen positiven oder verschwindenden Werte zu durchlaufen, die der Bedingung $k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu = n$ genügen. Die numerischen Koeffizienten $\binom{n}{k_1\, k_2\, \ldots\, k_{\nu-1}}$ heißen *Polynomialkoeffizienten.* Es ist

$$\binom{n}{k_1\, k_2\, \ldots\, k_{\nu-1}} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_\nu!}.$$

Die Polynomialkoeffizienten lassen sich durch Binomialkoeffizienten ausdrücken mittels der Formel:

$$\binom{n}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu-1}} = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdots \binom{n-k_1-k_2 \ldots -k_{\nu-2}}{k_{\nu-1}}.$$

§ 2. Historisches und Allgemeines über Determinanten.

Die erste Idee zu jenen Bildungen, die man heute Determinanten nennt, stammt von Leibniz (zu vgl. Cantor, *Vorl. über Gesch. der Math.*, 2. Aufl., 1901, **3**, 110). Eigentlicher Begründer der Determinantentheorie ist Gabriel Cramer, der bei dem Problem der Auflösung eines Systems linearer homogener Gleichungen in seiner *Introduction à l'analyse des lignes courbes* (Genf 1750) auf die Determinanten geführt wurde (zu vgl. Cantor **3**, 607). An Cramer knüpften Bézout, Vandermonde und Laplace an. Lagrange verwandte bei geometrischen Problemen (*Sur les pyramides* (1773), *Œuvres* **3**, 661) weitgehend Determinanten. Das Wort „determinans" ist von Gauß (*Disquisitiones arithmeticae* (1801), Sectio 5, Artikel 154 u. 267) geprägt, aber dort nur speziell für die Determinante einer quadratischen Form von 2 und 3 Variablen verwandt worden. Eine vollständige Darstellung der Determinantensätze um ihrer selbst willen gab Cauchy in einer grundlegenden Abhandlung, *J. éc. polyt.*, Cah. **17**, 29 (1815), *Œuvres* (2) **1**, 91; er bezeichnete die von uns sogenannten Determinanten mit déterminant, später aber auch mit résultant oder fonction alternée. Allgemein üblich wurde die Bezeichnung „Determinante" durch Jacobis fundamentale Arbeit „*De formatione et proprietatibus determinantium*" (*Journ. f. Math.* **22**, 285 (1841), *Ges. Werke* **3**, 355, deutsche Ausgabe mit Anm. von Stäckel in *Ostwalds Klassikern der exakten Wiss.* No. 77).

Abgesehen von der 1851 erstmalig erschienenen Monographie von Spottiswoode, *Journ. f. Math.* **51**, 209 (1856) ist Brioschis *Teorica dei determinanti* das erste Werk über Determinanten (Pavia 1854). Wir zitieren weiter das Handbuch von Rich. Baltzer, *Theorie u. Anwendung d. Determinanten* (Leipzig 1857—1881, 1.—5. Aufl.), Trudi, *Teoria dei determinanti e loro applicazioni*, Napoli 1862, P. Gordan, *Vorl. über Invariantentheorie*, Bd. **1**: *Determinanten*, Leipzig 1885, S. Günther, *Determinanten*, 1875—77, 1.—2. Aufl., Kronecker, *Vorl. üb. d. Theorie d. Determinanten*, herausg. von Hensel, Leipzig 1903, E. Pascal, *I determinanti*, Mailand 1896, deutsche Ausg. von Leitzmann in *Teubners Sammlung* **3** (1900), R. F. Scott, *The theory of determinants and their applications*. Second ed. by Mathews 1904. Eine sehr genaue Aufstellung aller über Determinanten bis 1900 erschienenen Schriften findet man bei Th. Muir, *Quarterly Journ.* **18**, **21**, **36**, eine eingehende historische Behandlung bis zum Jahre 1841 in dem Werke desselben Verf., *The theory of determinants in the historical order of development*. London 1906. Schließlich sei noch auf den Artikel „*Determinanten*" von Netto in der *Enzyklopädie der math. Wiss.*, Bd. **1**, sowie dessen französische Bearbeitung von Vogt in der *Encyclopédie des sciences math.* verwiesen.

Irgend ein System von n^2 Größen, die in einem quadratischen Schema angeordnet sind und in ihrer Gesamtheit aufgefaßt werden sollen, nennt man eine *quadratische Matrix*. (Der Name bei A. Cayley, *Journ. f. Math.* **50**, 282 (1855), *Coll. math. papers*, Cambridge 1889, **2**, 185; der Idee nach bereits bei Euler, *Nov. Comm. Petrop.* **15**, 75 (1771).) Wir betrachten die quadratische Matrix:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

Man bilde alle $n!$ Produkte vom Typus:

$$a_{1r_1}\, a_{2r_2} \dots a_{nr_n},$$

bei denen $r_1, r_2, \dots, r_n$ jede Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n$ darstellt, und lege jedem solchen Produkt das Vorzeichen $+$ oder $-$ bei, je nachdem die Anordnung der Indices $r_1, r_2, \dots, r_n$ zur ersten oder zweiten Klasse (zu vgl. S. 44) gehört. Die algebraische Summe der $n!$ auf diese Weise erhaltenen Produkte heißt die *Determinante der* n^2 *Größen* a_{ik} und wird durch das Symbol:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right|$$

(Cayley (1841), *Coll. math. papers* **1**, 1),

oder

$$\sum \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn} \text{ (Cauchy, Jacobi)}$$

oder

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

(Henry J. St. Smith (1862), *Coll. math. papers*, Oxford 1894, **1**, 229, Kronecker)

bezeichnet.

Alle Größen a der quadratischen Matrix mit dem gleichen ersten Index stehen in der nämlichen *Zeile* (*Horizontalreihe*), alle a mit dem gleichen zweiten Index in der nämlichen *Kolonne* (*Spalte, Vertikalreihe*). Der gemeinsame Name für Zeile oder Kolonne ist *Reihe*.

Die Zahl n heißt der *Grad* oder die *Ordnung der Determinante*; die Größen a_{ik} heißen ihre *Elemente*. Im besonderen nennt man $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ die n *Hauptelemente*, ihr Produkt $a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$ das *Hauptglied* der Determinante; die aus den Hauptelementen bestehende Diagonale der quadratischen Matrix heißt die *Hauptdiagonale*. Zwei Elemente a_{ik} und a_{ki} der Determinante, die sich nur durch die Reihenfolge ihrer Indices unterscheiden, heißen *konjugierte Elemente*.

Die Determinante $|a_{ik}|$ *kann als Funktion der* n^2 *quadratisch geordneten Elemente* a_{ik} *durch folgende drei charakteristische Eigenschaften eindeutig definiert werden:*

1. sie ist eine ganze, lineare, homogene Funktion der Elemente jeder Zeile,

2. sie ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man irgend zwei Zeilen miteinander vertauscht,

3. wenn $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ *und alle anderen Elemente 0 gesetzt werden, nimmt sie den Wert 1 an.* Statt der zweiten Eigenschaft genügt die Voraussetzung, daß die Funktion verschwinden soll, wenn irgend zwei Zeilen übereinstimmen. (Weierstraß, *Ges. Werke* **3**, 271: *Zur Determinantentheorie.* Kronecker, 17. Vorlesung. Frobenius, *Journ. f. Math.* **129**, 179 (1905).)

Die Determinanten lassen sich auch mit Hilfe der Graßmannschen Ausdehnungslehre definieren (vgl. H. Graßmann, *Ges. math. Werke* $\mathbf{I}_2$, herausg. von F. Engel, Leipzig 1896, S. 43 und 400, ferner Scott, *The theory of determinants*).

Wenn in einer Determinante alle Elemente einer Reihe Null sind, so ist die Determinante Null.

Der Wert einer Determinante bleibt ungeändert, wenn man sie umstürzt, d. h. Zeilen und Kolonnen miteinander vertauscht.

Vertauscht man in einer Determinante zwei parallele Reihen miteinander, so ändert die Determinante nur ihr Vorzeichen. Eine Determinante mit zwei identischen Parallelreihen ist Null.

Eine Determinante wird mit einer Zahl k multipliziert, indem man die Elemente einer Reihe mit k multipliziert.

Ändert man das Vorzeichen aller Elemente, für welche die Summe der Indices eine ungerade Zahl ist, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Multipliziert man jedes Element a_{ik} *der Determinante mit* p^{i-k}, *wobei p eine beliebige Zahl bedeutet, so behält die Determinante ihren Wert.*

Eine Determinante ist Null, wenn die Elemente einer Reihe die nämlichen Vielfachen der Elemente einer zu ihr parallelen Reihe sind.

Eine Determinante verschwindet, wenn die Elemente einer Reihe die nämlichen linearen Kombinationen der Elemente von Parallelreihen sind, und umgekehrt.

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe ein und dasselbe Vielfache der entsprechenden Elemente einer Parallelreihe hinzufügt.

Eine Determinante, in der die Elemente einer Reihe Aggregate von m Gliedern sind, ist der Summe von m Determinanten gleich; diese stimmen mit der ursprünglichen Determinante völlig überein, nur in der Reihe mit den Aggregaten stehen die einzelnen Summanden.

Wenn man in einer quadratischen Matrix vom n^{ten} Grade m Zeilen und m Kolonnen wegläßt, so bleibt eine quadratische Matrix vom Grade $n - m$ übrig; die durch eine solche Matrix dargestellte Determinante heißt ein *Minor* oder eine *Subdeterminante* oder eine *Unterdeterminante* oder eine *Partialdeterminante $n - m^{ten}$ Grades*. Wenn ihre in der Hauptdiagonale stehenden Elemente nur Elemente aus der Hauptdiagonale der ganzen Determinante sind, so bezeichnet man sie als eine *Hauptunterdeterminante*.

Es gibt $\binom{n}{m}^2$ *Unterdeterminanten $(n - m)^{ten}$ Grades und ebensoviele m^{ten} Grades, hiervon sind* $\binom{n}{m}$ *Hauptunterdeterminanten.*

Bildet man bei einer Unterdeterminante m^{ten} Grades

$$\sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \dots a_{g_m h_m},$$

bei der die Ordnungszahlen der Zeilen und Kolonnen in ihrer arithmetischen Reihe aufeinanderfolgen:

$$(g_1 < g_2 < g_3 \cdots < g_m, \ h_1 < h_2 < h_3 \cdots < h_m),$$

die Summe der Indices

$$J = g_1 + g_2 + \cdots + g_m + h_1 + h_2 + \cdots + h_m,$$

so heißt diese Zahl der *Index der betreffenden Unterdeterminante* (Kroneckers *Vorl.*, S. 326); bei Trudi (*Teoria dei determinanti*, S. 17) führt sie den Namen Charakteristik.

Eine Unterdeterminante ist *gerader* oder *ungerader* Klasse, je nachdem ihr *Index* eine gerade oder ungerade Zahl ist. Zu jeder m reihigen Unterdeterminante

$$\sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \dots a_{g_m h_m}$$

gehört eine $n - m$ reihige

$$\sum \pm a_{g_{m+1} h_{m+1}} a_{g_{m+2} h_{m+2}} \cdots a_{g_n h_n};$$

sie wird durch Unterdrücken der Zeilen und Kolonnen, aus denen die erste Determinante besteht, gebildet. Die Zahlen

$$g_1, g_2, \ldots, g_m, g_{m+1}, \ldots, g_n$$

und

$$h_1, h_2, \ldots, h_m, h_{m+1}, \ldots, h_n$$

$$(g_1 < g_2 < g_3 \cdots < g_m; \quad g_{m+1} < g_{m+2} \cdots < g_n;$$
$$h_1 < h_2 < h_3 \cdots < h_m; \quad h_{m+1} < h_{m+2} \cdots < h_n)$$

sind, von der Reihenfolge abgesehen, die Zahlen 1, 2, ..., n. Diese beiden Unterdeterminanten heißen *adjungiert* oder *komplementär* zueinander. Die Indices komplementärer Determinanten sind entweder beide gerade oder beide ungerade Zahlen.

Die algebraische Adjungierte oder *das algebraische Komplement* (viele Autoren verwenden auch die Bezeichnung *adjungiert* oder *komplementär im Sinne von algebraischer Adjungierten oder algebraischem Komplement*) *einer Unterdeterminante ist die zu der gegebenen Unterdeterminante komplementäre oder adjungierte mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem ihr Index eine gerade oder ungerade Zahl ist.*

Die algebraische Adjungierte oder das algebraische Komplement der Determinante

$$\sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \ldots a_{g_m h_m}$$

ist demnach

$$(-1)^J \sum \pm a_{g_{m+1} h_{m+1}} a_{g_{m+2} h_{m+2}} \cdots a_{g_n h_n},$$

das heißt der Faktor von

$$a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \ldots a_{g_m h_m}$$

in der Entwicklung der ursprünglichen Determinante A.

Sieht man die n^2 Größen a_{ik} als unabhängige Variablen an, so kann die algebraische Adjungierte von

$$\sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \ldots a_{g_m h_m}$$

in der Form eines partiellen Differentialquotienten, nämlich

$$\frac{\partial^m A}{\partial a_{g_1 h_1} \partial a_{g_2 h_2} \ldots \partial a_{g_m h_m}},$$

geschrieben werden.

Jede Determinante ist gleich der Summe der Produkte sämtlicher in m Zeilen oder Kolonnen enthaltener $\binom{n}{m}$ *m-reihiger Unterdeterminanten und ihrer algebraischen Adjungierten* (sogenannter

Zerlegungssatz von Laplace, *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, Hist. de l'acad. des sciences* 1772, *Œuvres* **8**, 401, Paris 1894. Er findet sich in speziellerer Form bei Vandermonde in einer Laplaces Aufsatz unmittelbar voraufgehenden Abhandlung, *Sur l'élimination*, deutsche Ausg., Berlin 1888, S. 96). Betreffs des Laplaceschen Zerlegungssatzes vgl. auch § 11 dieses Kapitels.

Die Summe der Produkte der in m Reihen enthaltenen Unterdeterminanten und der algebraischen Adjungierten der entsprechenden Unterdeterminanten, die aus anderen m Parallelreihen entnommen sind, ist Null.

Aus diesen Sätzen folgt für $m = 1$: *Ist A_{ik} die algebraische Adjungierte des Elementes a_{ik} der Determinante A, so gelten die Relationen*:

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = \delta_{ik}A; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$
$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \delta_{ik}A; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

δ_{ik} ist das *Kroneckersche Symbol, das für $i = k$ den Wert 1, für $i \gtrless k$ den Wert 0 hat* (Kronecker, *Journ. f. Math.* **68**, 276 (1868), *Ges. Werke* **1**, 150).

Aus dem Laplaceschen Satz ergibt sich:

Eine Determinante n^{ten} Grades, bei der alle Elemente, die m Zeilen (Kolonnen) mit $n - m$ Kolonnen (Zeilen) gemeinsam haben, verschwinden, ist das Produkt einer Determinante $n - m^{ten}$ Grades und einer m^{ten} Grades.

Eine Determinante n^{ten} Grades, bei der alle Elemente, die m Zeilen (Kolonnen) mit mehr als $n - m$ Kolonnen (Zeilen) gemeinsam haben, verschwinden, ist Null.

Das Produkt zweier Determinanten gleichen Grades, von denen die eine a_{ik}, die andere b_{ik} zu Elementen hat, läßt sich in Form einer Determinante gleichen Grades mit den Elementen c_{ik} schreiben, wobei c_{ik} einem der vier Ausdrücke:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$
(Komposition der Zeilen von A mit den Kolonnen von B)

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \cdots + a_{in}b_{kn}$$
(Komposition der Zeilen von A mit den Zeilen von B)

$$c_{ik} = a_{1i}b_{k1} + a_{2i}b_{k2} + \cdots + a_{ni}b_{kn}$$
(Komposition der Kolonnen von A mit den Zeilen von B)

$$c_{ik} = a_{1i}b_{1k} + a_{2i}b_{2k} + \cdots + a_{ni}b_{nk}$$
(Komposition der Kolonnen von A mit den Kolonnen von B)

gleich sein kann. (*Multiplikationssatz von Cauchy und Binet*, *J. éc. polyt.*, Cah. **17**, 81 u. 111 (1815), Cah. **16**, 287 (1813). Vgl. den auf die charakteristischen Eigenschaften der Determinante gegründeten Beweis in Weierstraß' Werken **3**, 283, ferner den Beweis in H. Graßmanns Werken $\mathbf{I}_2$, 400.)

Durch Hinzufügen von Zeilen und Kolonnen läßt sich der *Grad einer Determinante erhöhen.* In der Hauptdiagonale sind lauter Einser und an den noch freien Plätzen auf der einen Seite der Diagonale lauter Nullen, auf der anderen Seite beliebige Größen beizufügen.

Hat man zwei Determinanten ungleichen Grades miteinander zu multiplizieren, so bringe man die von niedrigerem Grade auf denselben Grad wie die andere.

Ein nach Zeilen und Kolonnen rechteckig geordnetes System von Elementen:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

abgekürzt geschrieben:

$$\| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\; k = 1, 2, \ldots, n),$$

heißt eine *rechteckige Matrix* von m Zeilen und n Kolonnen. Der erste Index der Elemente a_{ik} charakterisiert die Zeile, der zweite die Kolonne.

Die Definition einer Determinante durch charakteristische Eigenschaften läßt sich auf rechteckige Matrices erweitern. Hat man eine rechteckige Matrix von m Zeilen und n Kolonnen mit den Elementen

$$a_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\; k = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist jede Funktion der nm Elemente a_{ik}, die

1. in bezug auf die Elemente jeder Zeile der nm rechteckig geordneten Größen a_{ik} eine ganze, lineare, homogene Funktion ist, und

2. nur ihr Vorzeichen wechselt, wenn man irgend zwei Zeilen miteinander vertauscht,

eine lineare homogene Verbindung mit konstanten Koeffizienten der Determinanten m^{ten} Grades, die man aus der gegebenen Matrix bilden kann. Für $m > n$ liefert die Matrix keine Determinante m^{ten} Grades; die gesuchte Funktion ist Null. Für $m = n$ erhält man die mit einem von den Größen a unabhängigen Faktor multiplizierte Determinante der n^2 Größen; die Festlegung der Konstanten geschieht in diesem Fall durch die auf S. 55 erwähnte dritte Bedingung (vgl. Frobenius, *Journ. f. Math.* **129**, 179 (1905), Hensel, ebenda **126**, 73 (1903), Kronecker, 18. *Vorles.*).

Die angegebene Definition kann zum Beweis des oben erwähnten Laplaceschen Zerlegungssatzes und des erweiterten Multiplikationstheorems (siehe unten) dienen.

Hat man zwei rechteckige Matrices mit m Zeilen und n Kolonnen und stellt die Summe der Produkte der Elemente einer Zeile der einen Matrix und der entsprechenden Elemente einer Zeile der anderen Matrix her, so ergeben sich m^2 Größen. Diese bilden, wenn man sie in eine quadratische Matrix ordnet, eine Determinante m^{ten} Grades; sie heißt *das Zeilenprodukt der beiden rechteckigen Matrices.*

Erweiterter Multiplikationssatz:

Das Zeilenprodukt zweier rechteckiger Matrices von m Zeilen und n Kolonnen ist für $m < n$ gleich der Summe der Produkte der Determinanten m^{ten} Grades, die in der einen Matrix enthalten sind, in die entsprechenden Determinanten m^{ten} Grades der anderen Matrix (Cauchy u. Binet), *hingegen für $m > n$ gleich Null* (Jacobi, *de formatione et proprietatibus determinantium,* Art. 13 u. 14).

Jede Unterdeterminante einer Determinante, die das Produkt zweier Determinanten ist, kann als Zeilenprodukt zweier rechteckiger Matrices angesehen werden. Ist also

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{sk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist die Determinante:

$$\sum \pm c_{g_1 h_1} c_{g_2 h_2} \ldots c_{g_m h_m}$$

das Zeilenprodukt der zwei rechteckigen Matrices:

$$\left\| \begin{matrix} a_{g_1 1} & a_{g_1 2} & \ldots & a_{g_1 n} \\ a_{g_2 1} & a_{g_2 2} & \ldots & a_{g_2 n} \\ \vdots & & & \\ a_{g_m 1} & a_{g_m 2} & \ldots & a_{g_m n} \end{matrix} \right\| \quad \text{und} \quad \left\| \begin{matrix} b_{1 h_1} & b_{2 h_1} & \ldots & b_{n h_1} \\ b_{1 h_2} & b_{2 h_2} & \ldots & b_{n h_2} \\ \vdots & & & \\ b_{1 h_m} & b_{2 h_m} & \ldots & b_{n h_m} \end{matrix} \right\|.$$

Die Determinante D, deren Elemente A_{ik} die algebraischen Adjungierten der Elemente a_{ik} einer gegebenen Determinante A

sind, heißt nach Cauchy (*J. éc. polyt.*, Cah. **17**, 64 (1815), *Œuvres* (2) **1**, 125) im Anschluß an Gauß' *Disquisitiones arithmeticae*, Art. 267 u. 268, die zur gegebenen *adjungierte Determinante.*

Die adjungierte Determinante einer Determinante n^{ten} Grades ist die $n-1^{te}$ Potenz der ursprünglichen (Cauchy, a. a. O., S. 82, im speziellen Fall $n = 3$ bereits bei Lagrange (1773), *Œuvres* **3**, 665, sowie bei Gauß, *Disquisitiones arithmeticae*, Art. 267).

Nennt man zwei Unterdeterminanten der Determinante A und ihrer adjungierten D, die aus den gleichen Zeilen und Kolonnen von A und D gebildet sind, einander entsprechend, so läßt sich sagen:

Eine beliebige in D enthaltene Unterdeterminante D_1 vom m^{ten} Grade ist gleich der $m-1^{ten}$ Potenz der ursprünglichen Determinante, multipliziert mit derjenigen Unterdeterminante von A, die der algebraischen Adjungierten von D_1 entspricht; also:

$$\sum \pm A_{g_1 h_1} A_{g_2 h_2} \ldots A_{g_m h_m} = A^{m-1} \cdot \frac{\partial^m A}{\partial a_{g_1 h_1} \partial a_{g_2 h_2} \ldots \partial a_{g_m h_m}}.$$

(Vgl. § 11 dieses Kapitels. Jacobi, Formel 12 des Art. 11 *de formatione et proprietatibus determinantium*, vorher (1834) im *Journ. f. Math.* **12**, 9, *Ges. Werke* **3**, 201.)

Für $m = n - 1$ folgt:

Die algebraische Adjungierte eines Elementes A_{ik} von D ist gleich a_{ik}, multipliziert mit der $n-2^{ten}$ Potenz von A.

$$\frac{\partial D}{\partial A_{ik}} = A^{n-2} \cdot a_{ik}.$$

Für $m = 2$ ergibt die Jacobische Formel die häufig verwandte Relation:

$$\begin{vmatrix} A_{g_1 h_1} & A_{g_1 h_2} \\ A_{g_2 h_1} & A_{g_2 h_2} \end{vmatrix} = A \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial a_{g_1 h_1} \partial a_{g_2 h_2}}.$$

Aus den Cauchy-Jacobischen Resultaten folgt:

Wenn eine Determinante den Wert Null hat, so werden auch ihre adjungierte Determinante sowie deren sämtliche Unterdeterminanten zweiten und höheren Grades Null.

Multipliziert man zwei Determinanten und ihre adjungierten Determinanten auf analoge Weise, so ist das zweite Produkt die adjungierte Determinante des ersten Produktes.

Sylvesterscher Determinantensatz (Sylvester, *Philos. Magazine* (1851), *Coll. math. papers* **1**, 243, Frobenius, *Journ. f. Math.* **86**, 53 (1879) u. **114**, 189 (1895)): Sei

$$B_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1\beta} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2\beta} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{m\beta} \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \cdots & a_{\alpha m} & a_{\alpha\beta} \end{vmatrix},$$

so ist

$$\sum \pm B_{m+1, m+1} B_{m+2, m+2} \cdots B_{nn} = A_m^{\,n-m-1} \cdot A,$$

wobei

$$A_m = \sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{mm}$$

und

$$A = \sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Die Determinante $B_{\alpha\beta}$ kann man als *geränderte* Determinante ansehen. Es ist

$$B_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} A_m - \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=m} A_{ik} a_{i\beta} a_{\alpha k},$$

wobei

$$A_{ik} = \frac{\partial A_m}{\partial a_{ik}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Hieraus folgt die häufig verwandte Formel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & u_1 \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2m} & u_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & u_m \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=m} A_{ik} u_i v_k,$$

(vgl. von Lehrbüchern etwa H. Weber, *Algebra* **1**, 95 u. 115).

Verschwinden bei einer Determinante alle Unterdeterminanten $l+1^{\text{ten}}$ Grades, hingegen nicht sämtliche l^{ten} Grades, so heißt nach Frobenius (*Journ. f. Math.* **86**, 148 (1879)) l der *Rang der Determinante*.

Man kann auch vom *Range einer Matrix*

$$\| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

sprechen. *Eine Matrix* $\|a_{ik}\|$ *ist vom Range* l, *wenn alle Determinanten* $l+1^{ten}$ *Grades, die sie enthält, und daher auch alle Determinanten höheren Grades Null sind, hingegen nicht alle Determinanten* l^{ten} *Grades verschwinden.* Damit eine Matrix $\|a_{ik}\|$ den Rang l hat, ist notwendig und hinreichend, daß sie wenigstens eine Determinante l^{ten} Grades, etwa

$$\sum \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{ll},$$

enthält, die nicht verschwindet, und daß alle diejenigen Determinanten verschwinden, die sich aus

$$\sum \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{ll}$$

durch Hinzufügen einer neuen Zeile und einer neuen Kolonne bilden lassen, also alle Determinanten

$$\sum \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{ll}\, a_{\varrho\sigma},$$

wobei ϱ und σ nur alle Zahlen, die größer als l sind, durchlaufen (*Satz von Kronecker, Journ. f. Math.* **72**, 152 (1870), *Ges. Werke* **1**, 238).

§ 3. Symmetrische und schiefe Determinanten. Jacobische Symbole. Hermitesche Determinanten.

Wenn $a_{ik} = a_{ki}$, so heißt die Determinante *symmetrisch*; ist $a_{ik} = -a_{ki}$ $(i \gtrless k)$, so wird sie *schief* genannt (Cayley, *Journ. f. Math.* **32**, 119 (1846), *Coll. math. papers* **1**, 332) und ist schließlich $a_{ik} = -a_{ki}$ $(i \gtreqless k)$, also $a_{ii} = 0$, so heißt sie *schiefsymmetrisch* (Cayley, *Journ. f. Math.* **38**, 93 (1849), *Coll. math. papers* **1**, 410), *halbsymmetrisch* oder *alternierend.*

Das Quadrat einer jeden Determinante kann als symmetrische Determinante dargestellt werden.

In einer symmetrischen Determinante sind die algebraischen Adjungierten zweier konjugierter Elemente a_{ik} *und* a_{ki} *einander gleich; mithin ist die adjungierte Determinante einer symmetrischen Determinante ebenfalls symmetrisch.*

Wenn in einer symmetrischen Determinante alle Hauptunterdeterminanten r^{ten} *und* $r+1^{ten}$ *Grades verschwinden, so verschwinden alle Unterdeterminanten* r^{ten} *und höheren Grades* (G. Frobenius, *Journ. f. Math.* **82**, 242 (1877), S. Gundelfinger, ebenda **91**, 229 (1881), G. Frobenius **114**, 192 (1895)).

Eine schiefsymmetrische Determinante von ungeradem Grade ist Null; ihre adjungierte Determinante ist symmetrisch.

Eine schiefsymmetrische Determinante geraden Grades ist das vollständige Quadrat einer ganzen rationalen Funktion ihrer Elemente a_{ik} (Cayley, *Journ. f. Math.* **38**, 93 (1849), *Coll. math. papers* **1**, 410), vgl. auch Mertens, *Journ. f. Math.* **82**, 207 (1877); *die adjungierte Determinante einer schiefsymmetrischen Determinante geraden Grades ist ebenfalls schiefsymmetrisch.*

Der Ausdruck, dessen Quadrat die schiefsymmetrische Determinante geraden Grades ist und der bereits von Jacobi, *Journ. f. Math.* **2**, 356 (1827) u. ebenda **29**, 237 (1845), *Ges. Werke* **4**, 26 u. 420 behandelt wurde, heißt nach Cayley die *Jacobische* (*Journ. f. Math.* **38**, 94 (1849)) oder *Pfaffsche* (*Journ. f. Math.* **50**, 300 (1855)) *Funktion* oder nach Scheibner (*Leipz. Ber.* (1859), 151) *Halbdeterminante.*

Die Anzahl der Glieder einer Jacobischen Funktion, deren Quadrat eine schiefsymmetrische Determinante n^{ten} Grades ist, beträgt $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-3)(n-1)$. Jedes Glied ist ein Produkt aus $\frac{n}{2}$ Faktoren, deren Indices zusammen sämtliche Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind. Unter den Gliedern befindet sich auch das Glied $a_{12}\, a_{34}\, a_{56} \cdots a_{n-1,n}$; wählt man dieses Glied mit dem positiven Vorzeichen, so ist die Quadratwurzel aus der schiefsymmetrischen Determinante eindeutig bestimmt. Den auf diese Weise festgelegten Jacobischen oder Pfaffschen Ausdruck bezeichnet man nach Jacobi durch *das Symbol* $(1\,2\,3 \ldots n)$. *Das Symbol* $(1\,2\,3 \ldots n)$ *berechnet sich rekurrent mittels der Formel:*

$$(1\,2 \ldots n) = (1\,2)(3\,4 \ldots n) + (1\,3)(4\,5 \ldots n\,2) + \cdots$$
$$+ (1\,k)(k+1\;k+2 \ldots n\,2 \ldots k-1) + \cdots (1\,n)(2\,3 \ldots n-1);$$

hierbei bedeuten $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)$ die Elemente $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$.

Das Vorzeichen eines Jacobischen Symbols ändert sich, wenn man zwei Elemente miteinander vertauscht.

Ist in einer schiefsymmetrischen Determinante m der höchste Grad nichtverschwindender Unterdeterminanten (d. h. die Determinante ist vom Range m), *so ist m notwendig eine gerade Zahl und unter den nichtverschwindenden Unterdeterminanten* m^{ten} *Grades befinden sich auch Hauptunterdeterminanten.*

Wenn in einer schiefsymmetrischen Determinante alle Hauptunterdeterminanten $2r^{\text{ten}}$ *Grades Null sind, so verschwinden auch alle Unterdeterminanten* $2r-1^{\text{ten}}$ *Grades* (Frobenius, *Journ. f. Math.* **82**, 242 (1877)). Vgl. hierzu auch die Anmerkungen von

F. Engel in H. Graßmanns *Ges. math. Werken* **1_2**, 490 sowie E. v. Weber, *Vorl. üb. das Pfaffsche Problem, Teubners Samml.* **2**, 19 ff.

Jede schiefe Determinante, deren Hauptelemente gleich 1 sind, ist eine Summe von Quadraten (Cayley, *Journ. f. Math.* **38**, 96 (1849), *Coll. math. papers* **1**, 413).

Eine Determinante, bei der die Elemente a_{ik} und a_{ki} konjugiert imaginär, die Elemente a_{ii} im besonderen reell sind, heißt eine *Hermitesche Determinante* (Hermite, *Journ. f. Math.* **47**, 345 (1854), **52**, 39 (1856) u. **53**, 183 (1857), *C. R.* **41** (1855), 181). Sie hat stets einen reellen Wert.

Bei einer Hermiteschen Determinante sind die algebraischen Adjungierten zweier konjugierter Elemente a_{ik} und a_{ki} konjugiert imaginär; mithin ist die adjungierte Determinante einer Hermiteschen Determinante wieder eine Hermitesche Determinante.

Die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

hat, wenn die Determinante der a_{ik} eine Hermitesche ist, nur reelle Wurzeln (Hermite, *C. R.* **41**, 181—183); für jede m fache Wurzel der Gleichung verschwinden auch alle Unterdeterminanten $n-1^{\text{ter}}$, $n-2^{\text{ter}}$, ..., $n-m+1^{\text{ter}}$ Ordnung der linksstehenden Determinante (Clebsch, *Journ. f. Math.* **57**, 327 (1860), ebenda **62**, 232 (1863), Christoffel, ebenda **63**, 255 (1864)).

Nimmt man die Elemente einer Hermiteschen Determinante reell an, so entsteht eine *reelle symmetrische Determinante.* Dieser besondere Fall ergibt den für allgemeines n zuerst von Cauchy (*Exerc. de math.* **4**, 140, *Œuvres* (2) **9**, 174), für $n = 3$ schon 1773 von Lagrange (*Œuvres* **3**, 605) aufgestellten Satz:

Die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

hat, wenn die Determinante der a symmetrisch ist und die a reelle Größen sind, nur reelle Wurzeln; man nennt diese Gleichung die Säkulargleichung. Von den mehrfachen Wurzeln hat

Weierstraß (*Monatsb. d. Berl. Akad.* (1858) 213, (1868) 336, (1879) 430, *Ges. Werke* **1**, 238, **2**, 42, **3**, 139) zuerst bewiesen: *Für jede $m$fache Wurzel der Gleichung verschwinden alle Unterdeterminanten $n-1^{ter}$, $n-2^{ter}$, bis $n-m+1^{ter}$ Ordnung der linksstehenden Determinante.*

Die Säkulargleichung ist für $n=3$ bei der Bestimmung der Hauptachsen der Flächen 2^{ter} Ordnung wichtig. Literatur über diese Gleichung findet man bei Clebsch-Lindemann, *Vorl. über Geometrie* **2**, 168, Leipzig 1897. Vgl. ferner die im § 9 dieses Kapitels über Scharen reeller quadratischer und Hermitescher Formen angegebenen Resultate.

Nimmt man die Elemente einer Hermiteschen Determinante rein imaginär an und unterdrückt den Faktor i, so entsteht eine *reelle schiefsymmetrische Determinante.* Der für eine Hermitesche Determinante ausgesprochene Satz drückt sich in diesem besonderen Fall folgendermaßen aus:

Die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -x & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -x & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & -x \end{vmatrix} = 0$$

hat, wenn die Determinante der a schiefsymmetrisch ist und die a reelle Größen sind, nur rein imaginäre Wurzeln; für jede $m$fache Wurzel der Gleichung verschwinden auch alle Unterdeterminanten $n-1^{ter}$, $n-2^{ter}$, ..., $n-m+1^{ter}$ Ordnung der linksstehenden Determinante.

§ 4. Spezielle Determinanten.

Eine von Hankel näher untersuchte Determinante (Hankel, *Diss.*, Göttingen 1861), auf die Jacobi schon 1835 im *Journ. f. Math.* **15**, kam (zu vgl. Kronecker, *Ges. Werke* **2**, 105), wird auf folgende Art gebildet:

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix};$$

das Element a_{ik} ist gleich a_{i+k-2}, also nur von der Summe der Indices abhängig. Man nennt diese Determinante *orthosymmetrisch* (Hankel), *persymmetrisch* (Sylvester, *Philos.*

Trans. (1853), *Coll. math. papers,* Cambridge 1904, **1**, 448 u. 584) und in neuerer Bezeichnung *rekurrierend* (Frobenius, *Journ. f. Math.* **114**, 200 (1894)).

Bildet man die Differenzen:

$$\Delta_0^{(0)} = a_0,$$

$$\Delta_1^{(1)} = a_1 - a_0,$$

$$\Delta_2^{(1)} = a_2 - a_1,\ \Delta_2^{(2)} = \Delta_2^{(1)} - \Delta_1^{(1)},$$

$$\Delta_k^{(1)} = a_k - a_{k-1},\ \Delta_k^{(2)} = \Delta_k^{(1)} - \Delta_{k-1}^{(1)},\ \Delta_k^{(3)} = \Delta_k^{(2)} - \Delta_{k-1}^{(2)}, \ldots,$$

so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} \Delta_0^{(0)} & \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(3)} & \ldots & \Delta_{n-1}^{(n-1)} \\ \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(3)} & & \ldots & \Delta_n^{(n)} \\ \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(3)} & & & \ldots & \Delta_{n+1}^{(n+1)} \\ \vdots & & & & & \\ \Delta_{n-1}^{(n-1)} & \Delta_n^{(n)} & \Delta_{n+1}^{(n+1)} & & \ldots & \Delta_{2n-2}^{(2n-2)} \end{vmatrix};$$

die rekurrierende Determinante der Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}$ *ist also gleich der rekurrierenden Determinante der Differenzen*

$$\Delta_0^{(0)},\ \Delta_1^{(1)},\ \Delta_2^{(2)}, \ldots, \Delta_{2n-2}^{(2n-2)}.$$

Sind die Differenzen n^{ter} *Ordnung Null, so wird*

$$P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[\Delta_{n-1}^{(n-1)}\right]^n;$$

sind schon die Differenzen niedrigerer als n^{ter} *Ordnung Null, so wird* $P = 0$.

Rekurrierende Determinanten spielen in der Invariantentheorie (vgl. Pascal, *die Determinanten,* S. 70), beim Sturmschen Theorem und der Diskriminantenbildung (vgl. das Kapitel über *Algebra*) eine wichtige Rolle.

Eine spezielle Form der rekurrierenden Determinante ist die *zyklische Determinante.* Sie hat die Gestalt:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_2 \\ \vdots & & & \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Jede zyklische Determinante vom n^{ten} Grade läßt sich in ein Produkt von n Faktoren, die von den *n Elementen a rational abhängen, zerlegen, nämlich*

$$A = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n);$$

hierbei ist:

$$\varphi(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots + a_n z^{n-1}$$

und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln von $z^n = 1$.

Anstatt der zyklischen Determinante betrachtet man häufig die aus ihr durch Zeilenvertauschung hervorgehende, bei der in der ersten Kolonne die Elemente

$$a_1, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2$$

stehen; sie ist in bezug auf die Nebendiagonale symmetrisch. Man nennt diese von der obigen nur durch das Vorzeichen

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

verschiedene Determinante eine *Zirkulante.* Literatur in Pascals Determinanten, § 20.

Die Vandermondesche oder Cauchysche Determinante wird durch:

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

dargestellt. Für $n = 3$ ist sie von Vandermonde (1770), *Résolution des équations,* deutsche Ausg., Berlin 1888, S. 8 eingeführt und dann für allgemeines n von Cauchy, *J. éc. polyt.,* Cah. **17**, S. 48, *Œuvres* (2) **1**, 109, untersucht worden. Vgl. auch Jacobi, *de functionibus alternantibus, Journ. f. Math.* **22**, 360 (1841), *Ges. Werke* **3**, 439, deutsche Ausgabe von Staeckel in *Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften* No. 77, S. 50.

Δ ist gleich dem *Differenzenprodukt von* $\frac{n(n-1)}{2}$ *Faktoren:*

$$\Delta = \prod_{i,j} (a_j - a_i) \quad (j > i).$$

Δ ist eine *alternierende* Funktion der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Eine Funktion von n Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißt alternierend (Cauchy, a. a. O., S. 30), wenn sie bei allen Vertauschungen der n Größen höchstens ihr Vorzeichen ändert. Die Cauchysche Determinante ist für die *Diskriminante* einer algebraischen Gleichung (vgl. Algebra) von größter Wichtigkeit.

Das *Quadrat einer Cauchyschen Determinante* ist gleich

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

also eine *rekurrierende* Determinante, wobei

$$s_i = a_1{}^i + a_2{}^i + \cdots + a_n{}^i.$$

Die *Näherungsbrüche des Kettenbruches*

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdot_{\,\cdot}}}$$

führen auf die *sogenannte Kettenbruchdeterminante*

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & a_2 & b_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & b_4 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & b_5 & \ldots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Der Kettenbruch

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdot_{\,\cdot_{\,\cdot}} \cfrac{b_n}{a_n}}$$

ist gleich A_n dividiert durch das algebraische Komplement des Elementes a_1 in der Determinante A_n; sein Wert ist also $\dfrac{A_n}{\frac{\partial A_n}{\partial a_1}}$.

Definiert man $A_0 = +1$ und $A_1 = a_1$, so bestehen die

Rekursionsformeln

$$A_\nu = A_{\nu-1}a_\nu + b_\nu A_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots).$$

Betreffs Literatur sei verwiesen auf Pascal, *Determinanten,* S. 156 und Günther, *Determinanten,* 2. Aufl., S. 123, sowie vorzüglich auf Th. Muirs bis 1880 gehende historische Behandlung der Kontinuanten (*Edinburgh R. S. Proc.* **25**, 129, 648). Die Kettenbruchdeterminanten heißen auch *Kontinuanten* (Muir, a. a. O., S. 668); für $b_2 = b_3 = \cdots b_n = 1$ erhält man die sogenannten *einfachen Kontinuanten,* mit denen die Theorie bei Sylvester (*Philos. Magazine* (1853), *Coll. math. papers* **1**, 616) anfängt. Mit einfachen Kontinuanten und ihrer Verwendung für Zahlentheorie beschäftigt sich die *Straßburger Dissertation* von R. E. Moritz (1902).

Wir geben noch die Werte einiger *arithmetischer* Determinanten, d. h. solcher, die aus besonderen Zahlen gebildet sind und besondere Zahlenwerte haben.

Die aus Binomialkoeffizienten gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{1} & \ldots & \binom{c+2m}{1} \\ \binom{c+m+1}{2} & \binom{c+m+2}{2} & \ldots & \binom{c+2m+1}{2} \\ \vdots & & & \\ \binom{c+2m-1}{m} & \binom{c+2m}{m} & \ldots & \binom{c+3m-1}{m} \end{vmatrix}$$

hat, unabhängig von c und m, den Wert 1 (zu vgl. Baltzer, *Determinanten,* 5. Aufl., S. 24).

Die Zeipelsche Determinante

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \ldots & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \ldots & \binom{m+1}{p+r} \\ \vdots & & & \\ \binom{m+r}{p} & \binom{m+r}{p+1} & \ldots & \binom{m+r}{p+r} \end{vmatrix}$$

ist gleich

$$\frac{\binom{m+r}{r+1}\binom{m+r-1}{r+1}\cdots\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}\binom{p+r-1}{r+1}\cdots\binom{r+1}{r+1}},$$

(zu vgl. Günther, *Determinanten*, S. 80 und Pascal, *Determinanten*, S. 133, sowie Netto, *Lehrb. der Kombinatorik*, S. 256).

Die Sternsche Determinante (*Journ. f. Math.* **66**, 285 (1866))

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \vdots & & & \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

ist gleich

$$\frac{\Delta}{2^{n-2}\,3^{n-3}\,4^{n-4}\dots(n-1)},$$

wobei Δ die Vandermondesche oder Cauchysche Determinante der Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ bedeutet.

Die Smithsche Determinante (Henry J. St. Smith, *Coll. math. papers* **2**, 161, Oxford)

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \\ \vdots & & & \\ (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n) \end{vmatrix},$$

in der unter (i, j) der größte gemeinsame Teiler der beiden ganzen positiven Zahlen i, j verstanden wird, ist gleich

$$\varphi(1)\,\varphi(2)\dots\varphi(n),$$

worin $\varphi(k)$ die Anzahl der Zahlen bedeutet, die kleiner als k und zu k relativ prim sind.

Determinanten der Form:

$$R_n = \begin{vmatrix} a_{10} & -t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & -t & 0 & \dots & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & -t & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

sind von E. Pascal (*Rend. Ist. Lomb.* (2) **40**, 293 (1907)) studiert worden. Die *Eulerschen*, die *Bernoullischen* (vgl. Kap. XX) und andere von E. Pascal (*Rend. Ist. Lomb.* (2) **40**, 461) eingeführte Zahlen lassen sich als spezielle Determinanten R_n, die aus Binomialkoeffizienten gebildet sind, darstellen.

Für derartige Determinanten gelten die Relationen:

$$R_n = a_{n0} t^{n-1} + a_{n1} R_1 t^{n-2} + \cdots + a_{n,n-1} R_{n-1},$$
$$R_n = A_1^{(n)} t^{n-1} + A_2^{(n)} t^{n-2} + \cdots + A_n^{(n)},$$

wobei

$$A_r^{(s)} = \sum_i a_{s i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{r-1} 0}$$

ist und die Summe über alle möglichen Werte der Zahlen i, die den Ungleichungen:

$$s > i_1 > i_2 > i_3 \cdots > 0$$

genügen, zu erstrecken ist.

Bedeuten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ willkürliche Größen und multipliziert man jedes Element a_{ik} einer Determinante R_n mit $t_{k+1} t_{k+2} \ldots t_i$, so wird hierdurch R_n selbst mit $t_1 t_2 \ldots t_n$ multipliziert.

§ 5. Systeme linearer Gleichungen.

Gegeben sei das System von m linearen Gleichungen mit den n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= y_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= y_2, \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= y_m. \end{aligned}$$

Die Matrix

$$\| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

soll *die Matrix der Koeffizienten* heißen und *den Rang l besitzen* (vgl. S. 62). Eine der nicht verschwindenden Determinanten l^{ten} Grades, die in der Matrix $\| a_{ik} \|$ enthalten sind, sei die *Determinante*[1]:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix}.$$

1) Durch geeignete Bezeichnung der Variablen und entsprechende Anordnung der vorgelegten Gleichungen ist es stets zu erzielen, daß eine der nicht verschwindenden Determinanten l^{ten} Grades die Determinante A wird.

Seiner Natur nach ist l *jedenfalls nicht größer als die kleinere der Zahlen* m *und* n.

Damit die gegebenen Gleichungen endliche Lösungen besitzen, also sich nicht widersprechen, ist im Falle $l < m$ *das Verschwinden aller Determinanten:*

$$\Gamma_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & y_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} & y_l \\ a_{\varrho 1} & a_{\varrho 2} & \cdots & a_{\varrho l} & y_\varrho \end{vmatrix}$$

notwendig und hinreichend; hierbei hat ϱ *alle Zahlen, die größer als* l *sind, zu durchlaufen. Für* $l = m$ *haben die gegebenen Gleichungen stets endliche Lösungen.*

Diesem Theorem kann man nach dem Kroneckerschen Satz (S. 63) folgende gleichwertige Fassung geben:

Damit die gegebenen Gleichungen miteinander vereinbar sind, d. h. endliche Lösungen zulassen, ist notwendig und hinreichend, daß die Matrix:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{Vmatrix}$$

denselben Rang l *hat, wie die Matrix der Koeffizienten:*

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

(Frobenius, *Journ. f. Math.* **86**, 171 (1879), Satz IV).

Ist l *der gemeinsame Rang der zwei angegebenen Matrices, so reduziert sich das System der* m *gegebenen Gleichungen auf das der ersten* l *von ihnen. Die Lösungen des Systems bilden eine* $n - l$*-fache Mannigfaltigkeit;* l *der Unbekannten lassen sich nämlich als lineare Funktionen der übrigen* $n - l$, *die völlig willkürliche Werte erhalten können, ausdrücken.*

Die Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_l$ *werden durch die Formel:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{A} \qquad (i = 1, 2, \ldots\ l)$$

gegeben; dabei bedeutet Δ_i die aus A hervorgehende Determinante, wenn man die Größen der i^{ten} Kolonne von A durch:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_1 - a_{1,l+1}x_{l+1} - a_{1,l+2}x_{l+2} \cdots - a_{1n}x_n,\\
y_2' &= y_2 - a_{2,l+1}x_{l+1} - a_{2,l+2}x_{l+2} \cdots - a_{2n}x_n,\\
&\vdots\\
y_l' &= y_l - a_{l,l+1}x_{l+1} - a_{l,l+2}x_{l+2} \cdots - a_{ln}x_n,
\end{aligned}$$

ersetzt. Es ist also:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{A} = \frac{A_{1i}y_1' + A_{2i}y_2' + \cdots + A_{li}y_l'}{A} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l);$$

hierbei bedeutet A_{ik} die algebraische Adjungierte des Elementes a_{ik} in der Determinante A, d. h.

$$A = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{li}A_{li}.$$

Den Größen $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$ können beliebige Werte beigelegt werden.

Ist im besonderen der gemeinsame Rang l gleich der Anzahl n der Unbekannten, so reduzieren sich die gegebenen Gleichungen auf ein System von n Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und nicht verschwindender Determinante A:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - y_1 &= 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - y_2 &= 0,\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n - y_n &= 0.
\end{aligned}$$

Die y' werden die y selbst, und es gibt nur ein einziges aus den Gleichungskoeffizienten und den bekannten Termen rational gebildetes Wertsystem für $x_1, x_2, \ldots, x_n$, das den Gleichungen genügt:

$$x_i = \frac{A_{1i}y_1 + A_{2i}y_2 + \cdots + A_{ni}y_n}{A} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(Formel von Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* 1750, Append., S. 657). In diesem Falle kann man sich die Lösung durch folgende Regel merken: Man schreibe die Matrix

$$\left\Vert\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -y_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & -y_2\\
\vdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & -y_n
\end{matrix}\right\Vert$$

hin; $x_1 : x_2 : \cdots : x_n : 1$ verhalten sich alsdann wie die mit abwechselnden Vorzeichen versehenen Determinanten, die man aus der angegebenen Matrix durch sukzessives Streichen der ersten, zweiten, usw. schließlich letzten Kolonne erhält.

Lineare homogene Gleichungen. Sind $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$, so hat man ein System von *m linearen homogenen Gleichungen:*

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

mit n Unbekannten. Soll ein solches System eine von der selbstverständlichen Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *verschiedene Lösung zulassen, so ist hierzu nur notwendig, daß die Matrix der Koeffizienten:*

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

den Rang $l < n$ *hat.*

Sind

$$\begin{matrix} b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)}, \\ b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \ldots, b_n^{(2)}, \\ \vdots \\ b_1^{(\varrho)}, b_2^{(\varrho)}, \ldots, b_n^{(\varrho)}, \end{matrix}$$

irgend ϱ *Systeme von partikulären Lösungen der homogenen Gleichungen, d. h. wird das Gleichungssystem erfüllt, wenn man* $b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}, \ldots, b_n^{(\alpha)}$ *für* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *setzt, so stellen auch:*

$$k_1 b_1^{(1)} + k_2 b_1^{(2)} + \cdots + k_\varrho b_1^{(\varrho)}, \quad k_1 b_2^{(1)} + k_2 b_2^{(2)} + \cdots + k_\varrho b_2^{(\varrho)},$$
$$\cdots, k_1 b_n^{(1)} + k_2 b_n^{(2)} + \cdots k_\varrho b_n^{(\varrho)},$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_\varrho$ *willkürliche Konstanten bedeuten, ein Lösungssystem dar.*

Irgend $\varrho \leqq n$ *Systeme partikulärer Lösungen heißen unabhängig, wenn es keine Konstanten* $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ *gibt, welche den n Gleichungen:*

$$c_1 b_\lambda^{(1)} + c_2 b_\lambda^{(2)} + c_\varrho b_\lambda^{(\varrho)} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, ohne daß alle ϱ *Größen* $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ *gleichzeitig ver-*

schwinden. ϱ Lösungssysteme sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn der Rang der Matrix:

$$\left\|\begin{matrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \dots & b_n^{(1)} \\ b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & \dots & b_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{(\varrho)} & b_2^{(\varrho)} & \dots & b_n^{(\varrho)} \end{matrix}\right\|$$

genau gleich ϱ ist.

Sind die ϱ Lösungssysteme unabhängig, so sind die ϱ linearen homogenen Funktionen:

$$b_1^{(\alpha)}x_1 + b_2^{(\alpha)}x_2 + \cdots + b_n^{(\alpha)}x_n \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, \varrho)$$

nicht in linearer Dependenz und umgekehrt (vgl. S. 83).

Hat die Matrix

$$\| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n)$$

des homogenen Gleichungssystemes den Rang $l < n$, so besitzt das Gleichungssystem genau $n - l$ unabhängige Systeme partikulärer Lösungen

$$b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)},\ \dots,\ b_n^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, n - l).$$

Diese kann man aus l geeigneten Gleichungen des Systemes finden; die übrigen $m - l$ Gleichungen kann man einfach fortlassen.

Die allgemeinste Lösung lautet:

$$k_1 b_\tau^{(1)} + k_2 b_\tau^{(2)} + \cdots + k_{n-l} b_\tau^{(n-l)} \qquad (\tau = 1, 2, \dots, n),$$

wobei $k_1, k_2, \dots, k_{n-l}$ willkürliche Konstanten bedeuten. Aus der allgemeinen Lösung erhält man jede Lösung, indem man $k_1, k_2, \dots, k_{n-l}$ bestimmte Werte erteilt.

Ist l der Rang der Matrix

$$\| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n)$$

und verschwindet die Determinante

$$\sum \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{ll}$$

nicht, so *findet man $n - l$ Systeme unabhängiger Lösungen auf* folgende Weise: Man wähle willkürlich $n(n - l)$ Größen

$$U_\alpha^{(\beta)} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, n;\ \beta = 1, 2, \dots, n - l),$$

die nur der Bedingung zu genügen haben, daß die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ U_1^{(1)} & U_2^{(1)} & \dots & U_n^{(1)} \\ U_1^{(2)} & U_2^{(2)} & \dots & U_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_1^{(n-l)} & U_2^{(n-l)} & \dots & U_n^{(n-l)} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Wert hat. $n(n-l)$ derartige Größen $U_\alpha^{(\beta)}$ lassen sich auf unendlich viele Weisen finden, z. B. indem man

$$U_{l+\beta}^{(\beta)} = 1 \qquad (\beta = 1, 2, \dots, n-l)$$

und alle anderen Größen $U_\alpha^{(\beta)} = 0$ wählt. Sind α_{ik} die algebraischen Adjungierten der Elemente der Determinante D, ist also

$$\sum \pm \alpha_{11}\, \alpha_{22} \dots \alpha_{nn}$$

die adjungierte Determinante von D, so bilden die $n(n-l)$ Elemente der $n-l$ letzten Horizontalreihen der adjungierten Determinante von D $n-l$ Systeme unabhängiger Lösungen des homogenen Gleichungssystems. Man hat:

$$\alpha_{k1} a_{i1} + \alpha_{k2} a_{i2} + \dots + \alpha_{kn} a_{in} = 0 \qquad (k = l+1, l+2, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots, m)$$

und die Matrix

$$\| \alpha_{ki} \| \qquad (k = l+1, l+2, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots, n)$$

besitzt den Rang $n-l$.

Aus den voraufgehenden Theoremen ergeben sich folgende, besonders häufig benützte Sätze:

Damit ein System von n linearen homogenen Gleichungen mit der gleichen Anzahl von Unbekannten Lösungen besitzt, die nicht sämtlich Null sind, ist das Verschwinden der aus den Koeffizienten des Gleichungssystemes gebildeten Determinante notwendig und hinreichend. Ein System linearer homogener Gleichungen mit weniger Gleichungen als Unbekannten kann stets durch Werte befriedigt werden, die nicht sämtlich Null sind.

Hat man $n-1$ lineare homogene Gleichungen:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

mit n Unbekannten und hat die zugehörige Matrix der Koeffizienten

$$\| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

den Rang $n - 1$, so ergibt sich:

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = A_1 : A_2 : \cdots : A_n;$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sind die mit abwechselnden Vorzeichen genommenen Determinanten, die aus der Matrix durch sukzessives Streichen der ersten, zweiten, usw. letzten Kolonne hervorgehen.*

Bei der Behandlung eines Systemes linearer Gleichungen gelangte Leibniz (*Brief an l'Hospital,* 1693) zu den Determinanten. Die Auflösung linearer Gleichungen mittels Determinanten in dem sogenannten allgemeinen Fall, d. h. dem, der nicht alle Besonderheiten umfaßt, ist von Cramer gegeben worden. Für ein System von n linearen Gleichungen mit der nämlichen Anzahl von Unbekannten sagt noch Jacobi (*de formatione et proprietatibus determinantium,* Art. 7 (1841), deutsche Ausg. von Stäckel in *Ostwalds Klass. der exakten Wiss.*): „Man hat also, wenn die Determinante verschwindet, noch eine Mannigfaltigkeit von Fällen sehr verschiedener Natur zu unterscheiden, und man müßte algebraische Kriterien für die einzelnen Fälle angeben. Das scheint jedoch für eine beliebige Anzahl linearer Gleichungen recht weitläufig zu sein." Die allgemeine Behandlung linearer homogener Gleichungen mit Hülfe von Unterdeterminanten hat zuerst Kronecker gegeben (Baltzer, *Determinanten,* 2. Aufl. (1864), S. 62); man vgl. ferner Frobenius, *Journ. f. Math.* **82**, 236 (1877). Die Bedingungen für die Auflösbarkeit eines Systemes linearer unhomogener Gleichungen geben in allgemeiner Form Fontené, *Nouv. ann.* (2) **14** (1875), sowie Rouché, *C. R.* **81** (1875). Der Begriff „Rang" stammt von Frobenius, *Journ. f. Math.* **82**, 239 (1877) u. **86**, 148 (1879), vgl. auch ebenda **129**, 175 (1905).

Von Lehrbüchern verweisen wir auf die Darstellungen bei H. Weber, *Algebra* **1**, 96, Kronecker, *19. Vorl. über Determ.,* Gordan, *Vorl. über Invariantentheorie* **1**, 101, E. v. Weber, *Vorl. über das Pfaffsche Problem, Teubners Sammlung* **2**, 1900, S. 6.

§ 6. Das Rechnen mit Matrices. Zusammenhang zwischen Matrices, linearen Substitutionen und bilinearen Formen.

Die Gesamtheit der n^2 in einem quadratischen Schema

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

angeordneten Elemente a_{ik}, bei denen der erste Index die Zeile, der zweite die Kolonne charakterisiert, heißt eine *quadratische Matrix vom Grade oder der Ordnung n* und *soll nach Cayley zusammengefaßt mit einem einzigen Buchstaben A bezeichnet werden. „Matrices gleichen Grades verhalten sich, wie man sehen wird, wie einzelne Größen“* (Cayley, *Phil. Trans.* (1858), *Coll. math. papers* 2, 475). Die im folgenden betrachteten Matrices sollen *stets von gleichem Grade* vorausgesetzt werden. Sollte dies von Anfang an nicht der Fall sein, so füge man den Matrices niedrigeren Grades, um den Defekt zu beseitigen, Zeilen und Kolonnen bei, deren Elemente lauter Nullen sind. *Auf die nämliche Weise sollen rechteckige Matrices in quadratische umgestaltet werden, so daß die Voraussetzung, die Matrices sollen quadratisch sein, keine Beschränkung involviert.*

Für quadratische Matrices gleichen Grades kann man ein *symbolisches Rechnen* definieren.

Eine Gleichung $A = B$ zwischen zwei Matrices n^{ten} Grades soll besagen, daß jedes der n^2 Elemente von A gleich dem entsprechenden von B ist. Sind die Elemente von B mit b_{ik} bezeichnet, so ist die Gleichung $A = B$ mit den n^2 Gleichungen

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

gleichbedeutend.

Die *Addition* zweier beliebiger Matrices A und B gleichen Grades n mit den Elementen a_{ik} und b_{ik} wird auf folgende Weise definiert: Man bilde die neue Matrix S vom n^{ten} Grad mit den n^2 Elementen $s_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$. *Die Matrix S heißt die Summe von A und B; man schreibt $S = A + B$.* Diese Summenbildung ist *kommutativ,* d. h. es besteht die Gleichung

$$A + B = B + A.$$

Für drei Matrices A, B, C gilt das *assoziative* Gesetz, d. h. es ist

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Aus zwei Matrices A mit den Elementen a_{ik} und B mit den Elementen b_{ik} von gleichem Grade n kann eine neue Matrix Q mit den Elementen q_{ik} von dem nämlichen Grade gebildet werden, deren Elemente q_{ik} gleich

$$a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert sind. *Diese Matrix Q heißt aus A und B komponiert; man sagt Q ist das Produkt von A und B und schreibt symbolisch $Q = AB$.*

Die symbolische Gleichung $Q = AB$ ist gleichbedeutend mit den n^2 Gleichungen

$$q_{ik} = \sum_{t=1}^{t=n} a_{it} b_{tk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

die Elemente von Q entstehen aus denjenigen der Matrices A und B, indem man die Zeilen von A mit den Kolonnen von B komponiert. In den Anwendungen ist nur diese Art der Verknüpfung von Wichtigkeit. *Bedeutet $|Q|$ die Determinante von Q, so ist nach dem Multiplikationssatz für Determinanten:*

$$|Q| = |AB| = |A| \cdot |B|.$$

Ferner ist als Zeilenprodukt zweier rechteckiger Matrices (zu vgl. S. 60) die Determinante

$$\sum \pm q_{g_1 h_1} q_{g_2 h_2} \cdots q_{g_m h_m} = \sum_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m} A^{g_1 g_2 \cdots g_m}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m} \cdot B^{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m}_{h_1 h_2 \ldots h_m};$$

in der Summe auf der rechten Seite ist jede Kombination der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu m zu setzen.

$A^{g_1 g_2 \cdots g_m}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m}$ bedeutet die Determinante $\sum \pm a_{g_1 \sigma_1} a_{g_2 \sigma_2} \cdots a_{g_m \sigma_m}$,

$B^{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m}_{h_1 h_2 \ldots h_m}$ bedeutet die Determinante $\sum \pm b_{\sigma_1 h_1} b_{\sigma_2 h_2} \cdots b_{\sigma_m h_m}$.

Jede Unterdeterminante m^{ten} Grades von $|AB|$ ist demnach eine ganze lineare homogene Funktion sowohl der Unterdeterminanten m^{ten} Grades von $|A|$ als auch der von $|B|$.

Die definierte symbolische Multiplikation erfüllt das *assoziative Gesetz*, d. h. sind A, B, C drei Matrices gleichen Grades, so ist $A(BC) = (AB)C$.

Die definierte Multiplikation genügt auch dem *distributiven* Gesetz, d. h. für irgend drei Matrices A, B, C gleichen Grades gelten die Relationen:

$$(A+B)\,C = AC + BC\,,$$
$$C\,(A+B) = CA + CB\,.$$

Hingegen ist die erklärte symbolische Multiplikation im allgemeinen *nicht kommutativ*, d. h. AB ist im allgemeinen von BA verschieden. Findet im besonderen für zwei Matrices A und B die Gleichung $AB = BA$ statt, so heißen A und B *vertauschbar* oder *kommutativ*.

Eine Matrix, bei der alle Elemente mit Ausnahme der Diagonalelemente Null sind, diese aber sämtlich den nämlichen Wert ϱ haben, heißt eine *Diagonalmatrix* und soll durch die in der Diagonale enthaltene Zahl ϱ bezeichnet werden. Diejenige Diagonalmatrix, bei der alle Diagonalelemente gleich 1 sind, heißt die *Einheitsmatrix* und soll nach Frobenius' grundlegender Arbeit (*Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journ. f. Math.* **84**, 1 (1878)) durchgehend mit E bezeichnet werden. Ist A eine beliebige Matrix und ϱ eine Diagonalmatrix, so ist $\varrho A = A\varrho$, d. h. *eine Diagonalmatrix ist mit jeder Matrix vertauschbar;* $A\varrho$ hat die Elemente $\varrho \cdot a_{ik}$. Im besonderen ist für die Einheitsmatrix: $AE = EA = A$.

Nur wenn die Determinante einer Matrix A nicht verschwindet, kann eine Matrix Z der Gleichung $AZ = E$ genügen. *Für jede Matrix A von nicht verschwindender Determinante existiert eine eindeutig bestimmte Matrix Z, für die $AZ = E$ wird; sie ist mit A vertauschbar und soll mit A^{-1} bezeichnet werden. Diese Matrix A^{-1}, deren Elemente*

$$\alpha_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}$$

lauten, heißt die zur Matrix A reziproke oder inverse Matrix. A_{ik} ist hierbei die algebraische Adjungierte des Elementes a_{ik} der Determinante $|A|$, also

$$A_{ik} = \frac{\partial |A|}{\partial a_{ik}}\,.$$

Die reziproke Matrix zu A^{-1} ist A, d. h. $(A^{-1})^{-1} = A$, die reziproke Matrix des Produktes AB lautet $B^{-1}A^{-1}$.

Unter A^r versteht man die Matrix, die man durch r malige Zusammensetzung von A mit sich selbst erhält; *sie wird die*

r^{te} Potenz von A genannt. Ist die Determinante von A nicht Null, so entsteht durch r malige Zusammensetzung von A^{-1} eine Matrix, die mit A^{-r} bezeichnet wird. A^r und A^{-r} sind reziprok. Sowohl für positive als auch für negative Werte der Exponenten r_1 und r_2 gilt die Relation:

$$A^{r_1} \cdot A^{r_2} = A^{r_2} \cdot A^{r_1} = A^{r_1 + r_2}.$$

Zu jeder quadratischen Matrix A gehört eine *lineare homogene Substitution. Eine lineare homogene Substitution n^{ten} Grades ist diejenige Operation, die n Variable durch n lineare homogene Funktionen von n neuen Variablen ersetzt.* Bezeichnet man die n ursprünglichen Variablen mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die n neuen mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so lautet die lineare homogene Substitution, deren Koeffizienten man sich durch die Matrix A gegeben denkt:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Bei einer Substitution ist die Variablenbezeichnung unwesentlich; die Eigenschaften werden ausschließlich durch das System der Koeffizienten a_{ik} bedingt. Daher bezeichnet man die Substitution einfach mit demselben Buchstaben A wie die zugehörige Matrix. Sollen bei abgekürzter Bezeichnung der Substitution auch die Variablen hervorgehoben werden, so schreibt man:

$$(y) = A(x) \quad \textit{oder} \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Die Gleichung $(y) = A(x)$ ist im Sinne der Gleichheit von Matrices erfüllt, wenn man unter (x) die Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

und unter (y) die analoge Matrix versteht und $A(x)$ als Produkt der zwei Matrices A und (x) auffaßt (vgl. Molien, *Math. Ann.* **41**, 149 (1893) oder Wellstein, *Arch. f. Math.* (3) **5**, 230 (1903)).

Die Anzahl der linear unabhängigen unter den Größen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ist gleich dem Range l der Matrix A (zu vgl. S. 63). Hierzu ist zu bemerken, daß man von $l + 1$ $(l < n)$

linearen homogenen Funktionen $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_{l+1}}$ der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sagt, sie sind *in linearer Dependenz,* falls es Konstante $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \ldots, c_{\alpha_{l+1}}$ gibt, die nicht sämtlich Null sind, so daß identisch, d. h. für jeden Wert von $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$c_{\alpha_1} y_{\alpha_1} + c_{\alpha_2} y_{\alpha_2} + c_{\alpha_3} y_{\alpha_3} + \cdots + c_{\alpha_{l+1}} y_{\alpha_{l+1}} = 0$$

wird; die lineare Abhängigkeit von $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_{l+1}}$ erfordert also, daß die n linearen homogenen Gleichungen:

$$c_{\alpha_1} a_{\alpha_1 i} + c_{\alpha_2} a_{\alpha_2 i} + \cdots + c_{\alpha_{l+1}} a_{\alpha_{l+1}, i} = 0 \quad [(i = 1, 2, \ldots, n)$$

ein Lösungssystem $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \ldots, c_{\alpha_{l+1}}$ haben, dessen Elemente c nicht sämtlich Null sind. Ist im besonderen die Determinante

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{ll}$$

nicht Null und die Determinante von A:

$$|A| = \sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

vom Range l, so sind die ersten l Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_l$ linear unabhängig und $y_{l+1}, y_{l+2}, \ldots, y_n$ lassen sich durch $y_1, y_2, \ldots, y_l$ linear und homogen mit konstanten Koeffizienten ausdrücken.

Die Determinante

$$|A| = \sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

der Matrix A heißt die *Substitutionsdeterminante* oder der *Modul der Substitution. Ist die Substitutionsdeterminante* $|A| \neq 0$, *so kann man die Substitution* $(y) = A(x)$ *nach den Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *auflösen und findet:* $(x) = A^{-1}(y)$; *hierbei ist* A^{-1} *die zu A reziproke Matrix.* Die zwei Substitutionen $(y) = A(x)$ und $(x) = A^{-1}(y)$ heißen *reziprok* oder *invers.*

Hat man eine zu der Matrix A zugehörige Substitution $(x) = A(x')$ und führt für die Variablen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ vermöge einer zur Matrix B gehörigen Substitution $(x') = B(x'')$ neue Variablen $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ ein, so erhält man eine neue Substitution $(x) = Q(x'')$, deren Koeffizienten

$$q_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}$$

lauten. *Die resultierende Substitution Q besitzt mithin die Matrix AB und wird daher auch als Produkt der zwei Substitutionen A und B bezeichnet.*

Hat man eine lineare homogene Substitution $(x) = A(x')$, so ist es oft zweckmäßig, für die Variablen x und x' neue Variablen y und y' durch zwei lineare *kogrediente*[1]) Substitutionen, d. h. solche mit gleichen Matrices, einzuführen:

$$y_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \cdots + p_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$y_i' = p_{i1}x_1' + p_{i2}x_2' + \cdots + p_{in}x_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

oder abgekürzt:

$$(y) = P(x),$$

$$(y') = P(x'),$$

und die resultierende Substitution $(y) = C(y')$ zu betrachten. *Von der Matrix P wird hierbei nur vorausgesetzt, daß die Determinante von P nicht verschwindet.* Infolge der Voraussetzung $|P| \neq 0$ existiert $(x) = P^{-1}(y)$, und man findet: $C = PAP^{-1}$.

Hat man irgend zwei Matrices oder Substitutionen A und C und kann man eine Matrix oder Substitution P von nicht verschwindender Determinante finden, daß $C = PAP^{-1}$ wird, so heißt C mit A ähnlich, konjugiert oder gleichberechtigt. Ähnliche Substitutionen werden bisweilen auch als *äquivalent* bezeichnet; jedoch wird der Begriff „äquivalent" auch im weiteren Sinne (vgl. S. 89) verwandt und soll daher im folgenden *nicht* als mit ähnlich gleichbedeutend benützt werden.

Aus $C = PAP^{-1}$ folgt $A = P^{-1}CP$ und, da $(P^{-1})^{-1} = P$ ist, so ergibt sich, daß *die Ähnlichkeit von A und C eine gegenseitige ist.*

Alle mit einer Substitution ähnlichen Substitutionen bilden eine Klasse ähnlicher Substitutionen, so daß zwei Substitutionen derselben Klasse stets untereinander ähnlich sind.

Bezeichnet ϱ eine Diagonalmatrix n^{ten} Grades und sind A und C zwei ähnliche Systeme n^{ten} Grades, so sind auch $\varrho E - A$ und $\varrho E - C$ ähnliche Matrices, wie aus

$$\varrho E - C = \varrho E - PAP^{-1} = P(\varrho E - A)P^{-1}$$

folgt. Die nähere Untersuchung der zu einer Substitution A ähnlichen Substitutionen verlangt daher die Betrachtung der Determinante der Matrix $\varrho E - A$, d. h. der Determinante mit den Elementen

$$\varrho\,\delta_{ik} - a_{ik} \qquad (\delta_{ii} = 1,\ \delta_{ik} = 0 \text{ für } i \gtrless k).$$

1) Anstatt kogredient verwendet man auch die Bezeichnung „*kongruent*" (Kronecker, *Berl. Monatsb.* 1874, *Ges. Werke* **1**, 424).

Für irgendeine Substitution A heißt *die Determinante* $|\varrho E - A|$, *die eine ganze rationale Funktion* n^{ten} *Grades von* ϱ *ist*, in Anlehnung an Cauchy *die charakteristische Funktion der Substitution oder Matrix* A (Frobenius, *Journ. f. Math.* **84**, 10); entsprechend heißt die Gleichung $|\varrho E - A| = 0$ die *charakteristische Gleichung* oder nach L. Fuchs (ebenda **66**, 133 (1866), *Ges. Werke* **1**, 172) die *Fundamentalgleichung der Substitution* A. *Grenzen für die reellen und imaginären Teile der Wurzeln der Fundamentalgleichung* bei J. Bendixson u. A. Hirsch, *Acta math.* **25**, 359 u. 367 (1902) u. Bromwich, ebenda, **30**, 297 (1906).

Ist $\varphi(\varrho) = |\varrho E - A|$ die charakteristische Funktion der Matrix A, die vom n^{ten} Grade sei, und $\vartheta(\varrho)$ der größte gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten $n - 1^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $|\varrho E - A|$, so ist

$$\lambda(\varrho) = \frac{\varphi(\varrho)}{\vartheta(\varrho)}$$

eine ganze rationale Funktion von ϱ; sie heißt der n^{te} Elementarteiler der charakteristischen Funktion von A (vgl. S. 103). Sei $\lambda(\varrho) = \lambda_0 \varrho^q + \lambda_1 \varrho^{q-1} + \cdots + \lambda_q$, so besteht die Gleichung:

$$\lambda_0 A^q + \lambda_1 A^{q-1} + \cdots + \lambda_q = 0.$$

Diese Gleichung ist *die Gleichung niedrigsten Grades, der die Matrix* A *genügt;* sie heißt die *reduzierte charakteristische Gleichung der Matrix* A oder auch *die Grundgleichung*. Ist $\chi(A) = 0$ irgendeine Gleichung, der die Matrix A genügt, so ist $\chi(\varrho)$ durch $\lambda(\varrho)$ teilbar. Dieser grundlegende Satz der Theorie der Matrices stammt von Frobenius, *Journ. f. Math.* **84**, 11, vgl. besonders *Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1896), 606, ferner Ed. Weyr, *Monatsh. f. Math.* **1**, 187 (1890), sowie O. Perron, *Math. Ann.* **64**, 249 (1907). Da $\varphi(\varrho) = \lambda(\varrho) \cdot \vartheta(\varrho)$ und $\lambda(A) = 0$ ist, so ist natürlich $\varphi(A) = 0$. Die Eigenschaft jeder Matrix A, ihrer charakteristischen Gleichung

$$\varphi(\varrho) = \varrho^n + \varphi_1 \varrho^{n-1} + \cdots + \varphi_n = 0 \quad (\varphi_n = (-1)^n |A|)$$

zu genügen, ist zuerst von Cayley in der auf S. 79 genannten Arbeit (*Coll. math. papers* **2**, 482) ausgesprochen worden.

In innigstem Zusammenhang mit der charakteristischen Gleichung steht der Begriff eines *linear unabhängigen Systemes von Matrices.* Ein System von Matrices $A_1, A_2, \ldots, A_m$ heißt linear abhängig, wenn m numerische Konstanten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$

existieren, die nicht gleichzeitig verschwinden, so daß

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \cdots + \mu_m A_m = 0$$

wird. Ist allgemein:

$$A_\alpha = \| a_{ik}^{(\alpha)} \| \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m; \; i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist die obige symbolische Gleichung gleichbedeutend mit den n^2 gewöhnlichen Gleichungen:

$$\mu_1 a_{ik}^{(1)} + \mu_2 a_{ik}^{(2)} + \cdots + \mu_m a_{ik}^{(m)} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Jedes nicht linear abhängige System von Matrices oder bilinearen Formen heißt *linear unabhängig.* Mehr als n^2 Matrices n^{ten} Grades sind stets linear abhängig. Unter den Matrices n^{ten} Grades lassen sich auf unendlich viele Weisen n^2 linear unabhängige angeben; ein solches System $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2}$ hat die Eigenschaft, daß jede Matrix C in der Form

$$C = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_{n^2} A_{n^2}$$

erscheint, wobei $c_1, c_2, \ldots, c_{n^2}$ numerische Konstanten bedeuten. Die Existenz der charakteristischen Gleichung besagt, daß unter den Potenzen $A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{n-1}, A^n$ einer Matrix n^{ten} Grades höchstens n linear unabhängig sind.

Verschwindet die charakteristische Gleichung einer Matrix A für die s verschiedenen Werte $a_1, a_2, \ldots, a_s$, so kann man s Matrices, die „*Frobeniusschen Kovarianten*“, konstruieren. Diese Matrices besitzen die Eigenschaft, daß keine von ihnen verschwindet, sie ferner linear unabhängig sind,

$$E = K_1 + K_2 + \cdots + K_s, \;\; K_i^2 = K_i, \;\; K_i K_k = 0 \quad (i \gtrless k)$$

und

$$A = a_1 K_1 + a_2 K_2 + \cdots + a_s K_s + A_0$$

wird. Hat die reduzierte charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln, so ist $A_0 = 0$, sonst wird wenigstens eine Potenz von A_0 identisch Null. Vgl. Frobenius, *Über die schiefe Invariante einer bilin. od. quadr. Form, Journ. f. Math.* **86**, 44 (1879), *Über vertauschbare Matrices, Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1896), 609, Study, *Rekurrierende Reihen und bilin. Form., Monatsh. f. Math.* **2**, 23 (1891), Wellstein, *Über die Frobeniusschen Kovarianten, Arch. f. Math.* (3) **5**, 229 (1903).

Über die Elementarteiler der charakteristischen Funktion und die Normalform linearer homogener Substitutionen vgl. § 8.

Vertauscht man die Zeilen und Kolonnen der Matrix A, so erhält man die zu A *transponierte* oder *konjugierte Matrix oder Substitution.* Sie wird mit A' bezeichnet; ihre Koeffizienten a'_{ik} sind gleich a_{ki}. *Die zu A' transponierte Substitution ist die ursprüngliche Substitution A. Sind A' und B' die zu A und B transponierten Substitutionen, so ist $B'A'$ die transponierte Substitution von AB. Der Zusammenhang zwischen reziproker und transponierter Substitution drückt sich durch die Gleichung $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ aus.*

Sind

$$\alpha_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}$$

die Koeffizienten der zu A reziproken Substitution A^{-1}, so hat A'^{-1} in der i^{ten} Zeile und k^{ten} Kolonne die Koeffizienten

$$\frac{A_{ik}}{|A|}.$$

Die Substitution A'^{-1} heißt zu A *kontragredient.*

Notwendig und hinreichend, damit zwei Substitutionen

$$(y) = A(x) \quad \text{und} \quad (Y) = B(X)$$

kontragredient sind, ist das Bestehen der Identität

$$y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + \cdots + y_n Y_n = x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots x_n X_n.$$

Sind A'^{-1} und B'^{-1} die zu A und B kontragredienten Substitutionen, so lautet die zu AB kontragrediente $A'^{-1}B'^{-1}$.

Unter $\bar{A}$ versteht man diejenige Substitution, die aus A hervorgeht, indem man alle Koeffizienten von A durch die zu ihnen konjugiert imaginären ersetzt. $\bar{A}$ heißt die zu A konjugiert imaginäre Substitution.

Hat A im besonderen reelle Koeffizienten, so ist $\bar{A}$ mit A identisch.

Jeder Matrix A vom n^{ten} Grade mit den Elementen a_{ik} läßt sich eine *bilineare Form*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i y_k$$

zuordnen (das Studium solcher Formen beginnt mit Jacobis Aufsatz im *Journ. f. Math.* **53**, 265 (1857), *Ges. Werke* **3**, 583). *Eine solche Form hängt von zwei Reihen von Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ab.* Ebenso wie die aus den Elementen a_{ik}

gebildete quadratische Matrix oder eine dem Koeffizientensystem a_{ik} zugeordnete lineare Substitution soll auch die bilineare Form

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i y_k$$

mit dem Buchstaben A bezeichnet werden. (Die Verknüpfung von Matrices und bilinearen Formen verdankt man Frobenius, *Journ. f. Math.* **84**, 1.)

Hat man irgendeine bilineare Form

$$A=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i y_k,$$

so heißt

$$A'=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ki}x_i y_k$$

die zu A *transponierte* oder *konjugierte* bilineare Form. Wird unter $\bar{a}_{ik}$ stets die zu a_{ik} konjugiert imaginäre Größe verstanden, so heißt

$$\bar{A}=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \bar{a}_{ik}x_i y_k$$

die zu A *konjugiert imaginäre bilineare Form.* Ist die Determinante $|A|$ von A von Null verschieden, so existiert die zu A *reziproke* oder *inverse* Form

$$A^{-1}=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{A_{ki}}{|A|}x_i y_k$$

sowie die zu A *kontragrediente bilineare Form*

$$A'^{-1}=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{A_{ik}}{|A|}x_i y_k.$$

Eine bilineare Form

$$A=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i y_k$$

heißt *symmetrisch*, falls $a_{ik}=a_{ki}$, und *alternierend*, falls $a_{ik}=-a_{ki}$ $(i \gtreqless k)$, also im besonderen $a_{ii}=0$. Die Form A wird durch die symbolische Gleichung $A=A'$ als symmetrisch, durch $A = -A'$ als alternierend charakterisiert. Die symbolische Gleichung $A' = \bar{A}$ definiert eine *Hermitesche Form.*

Transformiert man eine bilineare Form

$$D = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} d_{ik} x_i y_k$$

(die Bezeichnung ist mit Rücksicht auf § 8 gewählt, zu vgl. S. 106) durch die zwei linearen homogenen Substitutionen:

$$P : x_i = p_{i1} x_1' + p_{i2} x_2' + \cdots + p_{in} x_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$Q : y_i = q_{i1} y_1' + q_{i2} y_2' + \cdots + q_{in} y_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in die bilineare Form

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f_{ik} x_i' y_k',$$

so sagt man, *die Form D geht durch die Substitutionen P und Q in F über. Dann bestehen die n^2 Gleichungen:*

$$f_{ik} = \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{t=1}^{t=n} p_{si} d_{st} q_{tk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

oder

$$f_{ik} = \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{t=1}^{t=n} p'_{is} d_{st} q_{tk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn man $p'_{ik} = p_{ki}$ setzt. Ist P' das zu P transponierte System, so kann man die n^2 Gleichungen in die eine symbolische Gleichung $F = P'DQ$ zusammenfassen.

Besteht zwischen zwei Matrices F und D eine Gleichung $F = RDQ$, d. h. kann man F dadurch aus D herleiten, daß man D vorn und hinten mit zwei beliebigen Matrices R und Q komponiert, so heißt F ein *Vielfaches* von D und D *ein Teiler von F. Zwei Systeme D und F heißen äquivalent, wenn sowohl F ein Vielfaches von D, als auch D ein Vielfaches von F ist.*

Bei den Begriffen des Vielfachen und der Äquivalenz führt man für die Koeffizienten von R und Q auch noch Beschränkungen ein, die von der Natur der Koeffizienten von D und F abhängen, wie z. B. die Koeffizienten von R und Q sollen reell oder ganzzahlig sein. In diesem Paragraphen sollen die Koeffizienten von R und Q keiner Beschränkung unterworfen werden.

sondern beliebige Größen sein können. Der § 8 wird von *besonderen Arten der Äquivalenz* handeln.

Der Rang des Vielfachen F ist stets gleich oder kleiner als der Rang des Teilers D.

Zwei Matrices F und D sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie gleichen Rang haben; in diesem Fall gibt es zwei Matrices R und Q von nichtverschwindenden Determinanten, so daß einerseits $F = RDQ$ und andererseits wegen des Nichtverschwindens der Determinanten $|R|$ und $|Q|$ auch $D = R^{-1}FQ^{-1}$ wird. Im besonderen ist eine Matrix A vom Range l der Einheitsmatrix l^{ten} Grades mit den Elementen

$$\delta_{ii} = 1, \ \delta_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, l)$$

äquivalent.

Setzt man $P' = R$, so hat man die Ausgangsgleichung $F = P'DQ$. Überträgt man die letzten Sätze in die Sprache der bilinearen Formen, so erhält man folgende Theoreme:

Hat man eine bilineare Form

$$D = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=m} d_{ik} x_i y_k$$

(durch Hinzunahme von Elementen 0 kann man zum Zweck der symbolischen Produktbildung die bilineare Form mit zwei Reihen von gleichvielen Variablen geschrieben denken) *vom Range l und transformiert sie durch die zwei linearen homogenen Substitutionen:*

$$P: x_i = p_{i1} x_1' + p_{i2} x_2' + \cdots + p_{in} x_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$Q: y_i = q_{i1} y_1' + q_{i2} y_2' + \cdots + q_{im} y_m' \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

in die neue bilineare Form

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=m} f_{ik} x_i' y_k',$$

so hat diese den gleichen oder niedrigeren Rang wie D. Verschwinden die Determinanten von P und Q nicht, so haben, da man dann auch F durch P^{-1} und Q^{-1} in D zurücktransformieren kann, D und F den gleichen Rang. Man kann im besonderen stets zwei derartige Substitutionen P und Q von nicht verschwindenden Determinanten auswählen, daß D in die Einheitsform $x_1' y_1' + x_2' y_2' + \cdots + x_l' y_l'$ übergeht.

Zwei bilineare Formen gleichen Ranges lassen sich stets durch zwei lineare homogene Transformationen von nicht verschwindenden Determinanten ineinander überführen.

Damit zwei bilineare Formen, die von gleichvielen Variablenpaaren abhängen, durch *kogrediente* Transformationen, d. h. durch die nämlichen Substitutionen für die zwei Variablenreihen, ineinander überführbar sind (also $P = Q$), müssen die Formen D und F, außer im Range übereinzustimmen, noch *weiteren* Bedingungen genügen (zu vgl. S. 116). *Für zwei symmetrische oder alternierende bilineare Formen ist die bloße Übereinstimmung des Ranges ihrer Determinanten für die kogrediente Transformation ausreichend.*

Hat man eine rechteckige oder quadratische Matrix

$$A = \| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m),$$

so ist es bisweilen vorteilhaft, sie in der Form:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qp} \end{Vmatrix}$$

zu schreiben. Die A mit zwei unteren Indices stellen selbst *rechteckige Matrices* dar, alle A mit dem gleichen ersten Index haben dieselbe Anzahl Horizontalreihen, alle A mit dem nämlichen zweiten Index besitzen die gleiche Anzahl Vertikalreihen. In den Anwendungen ist der Fall am wichtigsten, daß $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{qp}$ lauter quadratische Matrices sind. Sind alle Elemente einer Matrix A_{ik} Null, so setzt man für A_{ik} einfach 0.

Ist A eine Matrix, die sich auf Diagonalsysteme reduziert und deren andere Elemente ausschließlich Nullen sind:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & A_{pp} \end{Vmatrix},$$

so verwendet man die von A. Hurwitz (H. Kreis, *Contribution à la théorie des systèmes linéaires, Thèse,* Zürich 1906) angegebene Bezeichnung

$$A_{11} \dotplus A_{22} \dotplus \cdots \dotplus A_{pp},$$

oder schreibt auch

$$\{A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}\}.$$

Analog wie bilineare Formen mit zwei Reihen von verschieden vielen Variablen (S. 90) kann man auch eine lineare homogene Substitution mit zwei Reihen von verschieden vielen Variablen einführen:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m, \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m; \end{aligned}$$

man kann ihr die rechteckige Matrix

$$A_{11} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{Vmatrix}$$

oder zum Zweck der symbolischen Rechnung für $n > m$ die quadratische Matrix

$$\| A_{11} 0 \|,$$

für $n < m$ die quadratische Matrix

$$\begin{Vmatrix} A_{11} \\ 0 \end{Vmatrix}$$

zuordnen.

Das symbolische Rechnen mit Matrices ist eine Schöpfung Cayleys (vgl. den Anfang dieses Paragraphen); inwieweit W. R. Hamilton durch seine *Lectures on quaternions* (1853) als Cayleys Vorgänger anzusehen ist, entnehme man den historischen Bemerkungen von Taber (*Am. J. math.* **12**, 337 (1890)) und von Bromwich (*Bull. Am. math. Soc.* **7**, 311 (1901)), sowie dem Schluß des § 7. Laguerres *„Calcul des systèmes linéaires“* (*J. éc. polyt.*, Cah. **42**, 215 (1867), *Œuvres* **1**, 221) ist Cayleys Untersuchungen analog. Die tiefgehendste Behandlung des in diesem Paragraphen besprochenen Gegenstandes stammt von Frobenius (vgl. das Zitat auf S. 81 u. 88).

Von Lehrbüchern verweisen wir auf: Muth, *Theorie und Anwendung der Elementarteiler*, Leipzig 1899, S. 20, Kronecker, 20. u. 21. Vorlesung üb. *Determinanten*, Weber, *Algebra* **2**, 163.

§ 7. Bilineare Formen und höhere komplexe Zahlen.

Die Lehre von den höheren komplexen Zahlen, die bereits im ersten Kapitel vom allgemeinen arithmetischen Standpunkt aus behandelt wurde, ist mit der Theorie der bilinearen Formen auf das engste verknüpft.

Die n^2 Matrices

$$F_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

vom n^{ten} Grade, von denen jede nur in der i^{ten} Zeile an k^{ter} Stelle die 1, sonst lauter Nullen enthält oder die ihnen entsprechenden bilinearen Formen $x_i y_k$, sind offenbar linear unabhängig (vgl. S. 85). Für ihre Komposition gelten die Relationen:

$$(1) \quad F_{ik} F_{jl} = \delta_{kj} F_{il} \left(\delta_{kk} = 1, \delta_{kj} = 0, \text{ falls } k \gtrless j\right) \qquad (i, k, j, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Mittels der n^2 Formen F_{ik} kann jede bilineare Form

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i y_k$$

in der Form

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} F_{ik}$$

dargestellt werden.

Die n^2 Größen F_{ik} lassen sich als die n^2 unabhängigen Einheiten eines komplexen Zahlensystems (vgl. Kap. I, § 4) ansehen. Hierbei werden die „Einheitsprodukte“ durch die Relationen (1) bestimmt; diese sind so beschaffen, daß die Multiplikation assoziativ ist.

Jede bilineare Form

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} F_{ik}$$

kann demnach als komplexe aus n^2 unabhängigen Einheiten gebildete Zahl aufgefaßt werden.

Wird die bilineare Form

$$B = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik} F_{ik}$$

ebenfalls als komplexe Zahl interpretiert und multipliziert man A

und B nach den Multiplikationsgesetzen für komplexe Zahlen, so erhält man mit Benutzung von (1):

$$AB = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{l=1}^{l=n} a_{ik} b_{jl} F_{ik} F_{jl}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{l=1}^{l=n} a_{ik} b_{jl} \delta_{kj} F_{il}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{l=1}^{l=n}\sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{sl} F_{il} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{l=1}^{l=n} c_{il} F_{il},$$

falls
$$c_{il} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{sl} \qquad (i, l = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt wird. Deutet man die komplexe Zahl

$$C = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{l=1}^{l=n} c_{il} F_{il}$$

als bilineare Form, so ist C nichts anderes als das Produkt AB der zwei bilinearen Formen A und B. *Die Komposition bilinearer Formen n^{ten} Grades erscheint demnach als identisch mit der Multiplikation besonderer komplexer Zahlen mit n^2 Einheiten.*

$G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ seien ϱ linear unabhängige bilineare Formen oder Matrices gleichen Grades n. Von ihnen wird vorausgesetzt, sie sollen die Eigenschaft haben, daß sich ihre Produkte

$$G_i G_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

linear und homogen durch die ϱ Grundformen selbst darstellen lassen. Es sei also:

$$(2) \qquad G_i G_k = \lambda_{ik}^{(1)} G_1 + \lambda_{ik}^{(2)} G_2 + \cdots + \lambda_{ik}^{(\varrho)} G_\varrho \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

wobei die Größen $\lambda_{ik}^{(r)}$ numerische Konstanten bedeuten. Infolge des assoziativen Gesetzes bei der Multiplikation bilinearer Formen besteht die Gleichung:

$$(G_i G_k) G_m = G_i (G_k G_m).$$

Aus ihr folgt, wenn man für die Produkte ihre Werte nach (2) setzt und die vorausgesetzte lineare Unabhängigkeit der Grundformen beachtet, daß:

$$(3)\qquad \sum_{s=1}^{s=\varrho} \lambda_{ik}^{(s)} \lambda_{sm}^{(r)} = \sum_{s=1}^{s=\varrho} \lambda_{is}^{(r)} \lambda_{km}^{(s)} \qquad (i, k, r, m = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

wird. Aus diesen Gleichungen erhellt (vgl. Kap. I, § 4):

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ irgendwelche numerische Konstante[1]), *so kann jede aus den Grundformen $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ gebildete bilineare Form $a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$ als eine aus den „Einheiten" $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ gebildete komplexe Zahl angesehen werden.*

Umgekehrt wollen wir zeigen, wie jeder höheren komplexen Zahl eine bilineare Form zugeordnet werden kann. Sei eine aus den ϱ unabhängigen Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$ gebildete komplexe Zahl $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_\varrho e_\varrho$ gegeben. Für die „Einheitsprodukte" mögen die Formeln

$$e_i e_k = \lambda_{ik}^{(1)} e_1 + \lambda_{ik}^{(2)} e_2 + \cdots + \lambda_{ik}^{(\varrho)} e_\varrho \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

gelten, wobei die Größen $\lambda_{ik}^{(r)}$ den Gleichungen (3) genügen.

Man konstruiere die ϱ bilinearen Formen oder Matrices ϱ^{ten} Grades:

$$G_\alpha = \sum_{r=1}^{r=\varrho} \sum_{m=1}^{m=\varrho} \lambda_{\alpha m}^{(r)} x_r y_m \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

Betrachtet man die Produkte $G_i G_k$ für $i, k = 1, 2, \ldots, \varrho$, so wird:

$$\begin{aligned} G_i G_k &= \sum_{r=1}^{r=\varrho} \sum_{m=1}^{m=\varrho} \sum_{s=1}^{s=\varrho} \lambda_{is}^{(r)} \lambda_{km}^{(s)} x_r y_m \\ &= \sum_{r=1}^{r=\varrho} \sum_{m=1}^{m=\varrho} \sum_{s=1}^{s=\varrho} \lambda_{ik}^{(s)} \lambda_{sm}^{(r)} x_r y_m \\ &= \sum_{s=1}^{s=\varrho} \lambda_{ik}^{(s)} G_s . \end{aligned}$$

Setzt man

$$e_i = G_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

so läßt sich jede aus den ϱ Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$ gebildete komplexe Zahl $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_\varrho e_\varrho$ als eine aus den bi-

---

1) Die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ brauchen nicht, wie im Kap. I, § 4 vorausgesetzt wurde, reell zu sein, sie können auch komplexe Werte besitzen.

linearen Grundformen $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ *gebildete bilineare Form oder Matrix* ϱ^{ten} *Grades* $a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$ *auffassen.*

Die so gewonnenen Matrices $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ *werden nicht notwendig linear unabhängig sein.* Dies lehrt beispielsweise das aus zwei Einheiten e_1 und e_2 gebildete Zahlensystem mit der Multiplikationsregel:

$$e_1 e_1 = e_1,\ e_2 e_1 = -e_1,\ e_1 e_2 = e_2,\ e_2 e_2 = -e_2.$$

Für dieses Zahlensystem wird G_1 die Einheitsform

$$E = x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad G_2 = -E.$$

Damit die ϱ Matrices $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ linear abhängig sind, ist notwendig und hinreichend, daß die ϱ^2 Gleichungen:

$$c_1 \lambda_{1m}^{(r)} + c_2 \lambda_{2m}^{(r)} + \cdots + c_\varrho \lambda_{\varrho m}^{(r)} = 0 \qquad (r, m = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

nicht nur die Lösungen $c_1 = c_2 = \cdots = c_\varrho = 0$ besitzen. Bedeuten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ willkürliche numerische Konstanten, so erhält man hieraus die ϱ Gleichungen:

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{1\alpha}^{(r)} + c_2 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{2\alpha}^{(r)} + \cdots + c_\varrho \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{\varrho\alpha}^{(r)} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

Aus diesen ϱ Gleichungen schließt man: Sind die ϱ bilinearen Formen $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ in linearer Dependenz, so muß die Determinante:

$$|\Delta| = \left| \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{i\alpha}^{(r)} \right| \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

für jede Wahl der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ verschwinden.

Verschwindet diese Determinante nicht identisch, so ist dies eine ausreichende Bedingung für die lineare Unabhängigkeit der bilinearen Formen $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$.

An Stelle der bilinearen Formen $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ kann man auch die Formen:

$$H_\alpha = \sum_{r=1}^{r=\varrho} \sum_{m=1}^{m=\varrho} \lambda_{m\alpha}^{(r)} x_m y_r \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

einführen. Bildet man die Produkte $H_i H_k$ für $i, k = 1, 2, \ldots, \varrho$, so wird:

$$H_i H_k = \sum_{s=1}^{s=\varrho} \lambda_{ik}^{(s)} H_s.$$

Setzt man $e_i = H_i$, *so läßt sich jede aus den* ϱ *Einheiten* $e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$ *gebildete komplexe Zahl* $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_\varrho e_\varrho$ *als eine bilineare Form* $a_1 H_1 + a_2 H_2 + \cdots + a_\varrho H_\varrho$ *interpretieren. Setzt man voraus, daß die Determinante:*

$$|\Gamma| = \left| \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{\alpha i}^{(r)} \right| \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

nicht für jede Wahl der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ *verschwindet, so sind die bilinearen Formen* $H_1, H_2, \ldots, H_\varrho$ *linear unabhängig.*

Die Determinante $|\Gamma|$ ist offenbar die Determinante der bilinearen Form

$$a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho .$$

Das Nichtverschwinden der Determinante $|\Gamma|$ ist also damit gleichbedeutend, daß das Formensystem

$$a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$$

bilineare Formen mit nichtverschwindenden Determinanten enthält. Das Nichtverschwinden der früher aufgetretenen Determinante $|\Delta|$ besagt, daß das Formensystem

$$a_1 H_1 + a_2 H_2 + \cdots a_\varrho H_\varrho$$

auch Formen mit nichtverschwindenden Determinanten besitzt.

Mit Hilfe der bilinearen Formen G_α und H_α kann man die ϱ^4 gewöhnlichen Gleichungen (3) in ϱ^2 symbolische zusammenfassen, nämlich:

$$G_i H'_m = H'_m G_i \qquad (i, m = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

wobei

$$H'_m = \sum_{r=1}^{r=\varrho} \sum_{k=1}^{k=\varrho} \lambda_{km}^{(r)} x_r y_k$$

die zu H_m transponierte Form ist. Hieraus folgt:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ *und* $b_1, b_2, \ldots, b_\varrho$ *beliebige Zahlen, so sind die zwei Matrices* $a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$ *und* $b_1 H_1' + b_2 H_2' + \cdots + b_\varrho H_\varrho'$ *stets vertauschbar.*

Wir machen die für das Folgende wesentliche Voraussetzung, daß sowohl das Formensystem $a_1 H_1 + a_2 H_2 + \cdots + a_\varrho H_\varrho$ als auch das Formensystem $a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$ bilineare Formen mit nichtverschwindenden Determinanten enthalten. Von diesen zwei Bedingungen ist keine eine Folge der anderen, wie das oben angegebene Beispiel lehrt. Für dieses ist

$$H_1 = x_1 y_1 - x_2 y_1,\ H_2 = x_1 y_2 - x_2 y_2;$$
$$G_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2,\ G_2 = - x_1 y_1 - x_2 y_2,$$

die Determinante $|a_1 H_1 + a_2 H_2|$ hat den Wert Null, während die Determinante $|a_1 G_1 + a_2 G_2|$ nicht identisch verschwindet. Die Voraussetzung, daß die zwei Determinanten:

$$|a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho| = |\Gamma|$$

und

$$|a_1 H_1 + a_2 H_2 + \cdots + a_\varrho H_\varrho| = |\Delta|$$

nicht identisch verschwinden, involviert, daß sowohl die Formen $H_1, H_2, \ldots, H_\varrho$ als auch $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ linear unabhängig sein sollen.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Betrachtung jener bilinearen Formen der Schar $a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$, bei denen die numerischen Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ so gewählt sind, daß die Determinante $|a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho|$ nicht verschwindet. Sei $A = a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$ eine solche Form. Wir suchen eine bilineare Form

$$U = u_1 G_1 + u_2 G_2 + \cdots + u_\varrho G_\varrho,$$

wobei $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ numerische Konstanten sein sollen, zu bestimmen, daß das Produkt $AU = A$ wird. Die symbolische Gleichung $AU = A$ besagt:

$$(a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho) \cdot (u_1 G_1 + u_2 G_2 + \cdots u_\varrho G_\varrho) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} \sum_{k=1}^{k=\varrho} a_\alpha u_k G_\alpha G_k = a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho.$$

Beachtet man die Gleichungen (2) und die auf Grund unserer Voraussetzungen stattfindende lineare Unabhängigkeit von $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$, so ergibt sich, daß

$$u_1 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{\alpha 1}^{(s)} + u_2 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{\alpha 2}^{(s)} + \cdots + u_\varrho \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{\alpha \varrho}^{(s)} = a_s \quad (s = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

wird. Da die Determinante:

$$|A| = |a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho| = \left| \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{\alpha i}^{(r)} \right| \quad (i, r = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

von Null verschieden ist, haben die zuletzt angegebenen ϱ Gleichungen endliche, eindeutig bestimmte Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$. U ist offenbar die Einheitsform. Wir haben also bewiesen: *das Formensystem $a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$ enthält stets die Einheitsform E.*

Sei $A = a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots a_\varrho G_\varrho$ wiederum eine bilineare Form von nichtverschwindender Determinante, so kann man innerhalb des aus $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ gebildeten Formensystemes eine Form $V = v_1 G_1 + v_2 G_2 + \cdots + v_\varrho G_\varrho$ zu bestimmen suchen, so daß $v_1, v_2, \ldots, v_\varrho$ numerische Konstanten bedeuten und $AV = E$ wird. Aus dieser symbolischen Gleichung gehen die ϱ gewöhnlichen Gleichungen:

$$v_1 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda^{(s)}_{\alpha 1} + v_2 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda^{(s)}_{\alpha 2} + \cdots + v_\varrho \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda^{(s)}_{\alpha \varrho} = u_s \quad (s = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

hervor. Hierbei sind $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ die durch

$$E = u_1 G_1 + u_2 G_2 + \cdots u_\varrho G_\varrho$$

festgelegten numerischen Konstanten. Da die Determinante

$$|A| = \left| \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda^{(r)}_{\alpha i} \right| \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

von Null verschieden ist, sind die ϱ Gleichungen lösbar und bestimmen eindeutige, endliche Werte $v_1, v_2, \ldots, v_\varrho$. V ist offenbar die reziproke Matrix von A.

Wir haben das Resultat:

Verschwinden die zwei Determinanten

$$|a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho| \text{ und } |a_1 H_1 + a_2 H_2 + \cdots + a_\varrho H_\varrho|$$

nicht für alle Werte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$, so ist die Gesamtheit $\mathfrak{G}$ aller Matrices $a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$ von nichtverschwindenden Determinanten bei der Produktbildung nicht nur in sich abgeschlossen, sondern $\mathfrak{G}$ enthält auch das Einheitselement und zu jeder Matrix die reziproke. *Die Gesamtheit aller in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Matrices bildet also (Kap. III, § 1) eine Gruppe.*

Verschwinden die zwei erwähnten Determinanten nicht identisch, so bildet auch die Gesamtheit $\mathfrak{H}$ aller Matrices

$$a_1 H_1 + a_2 H_2 + \cdots + a_\varrho H_\varrho$$

von nichtverschwindenden Determinanten eine Gruppe $\mathfrak{H}$.

Jede Matrix der Gruppe $\mathfrak{H}$ ist mit jeder Matrix der Gruppe $\mathfrak{G}'$, die von den transponierten Matrices der Gruppe $\mathfrak{G}$ gebildet wird, vertauschbar. ($\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$ sind in Lies Terminologie reziproke Gruppen. Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, Leipzig 1893, **3**, 751 u. 779.)

In der Sprache der höheren komplexen Zahlen besagt das Nichtverschwinden der zwei Determinanten, daß im Gebiet der behandelten höheren komplexen Zahlen die Umkehrung der Multiplikation als vordere und als hintere Division im allgemeinen eindeutig möglich ist.

Verschwinden eine oder beide der Determinanten $|\Gamma|$ und $|\Delta|$, so führe man noch zu den ϱ Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$ eine weitere Einheit e_0 ein. Für die Multiplikation mit dieser Einheit mögen die Regeln

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \varrho)$$

gelten. Betrachtet man die $\varrho + 1$ Einheiten $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$, so sind die Konstanten $\lambda_{ik}^{(s)}$ für sie auf folgende Weise bestimmt:

$$\lambda_{i0}^{(i)} = \lambda_{0i}^{(i)} = 1 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \varrho),$$

alle weiteren $\lambda_{ik}^{(s)} = 0$, bei denen ein Index 0 ist, und, falls keine der Zahlen i, k, s gleich Null ist, sind $\lambda_{ik}^{(s)}$ die durch die Gleichungen (2) bestimmten Größen.

Definiert man:

$$G_\alpha = \sum_{r=0}^{r=\varrho} \sum_{m=0}^{m=\varrho} \lambda_{\alpha m}^{(r)} x_r y_m, \quad H_\alpha = \sum_{r=0}^{r=\varrho} \sum_{m=0}^{m=\varrho} \lambda_{m\alpha}^{(r)} x_m y_r \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \varrho),$$

so ist

$$G_0 = H_0 = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_\varrho y_\varrho.$$

Mithin verschwindet keine der zwei Determinanten

$$|a_0 G_0 + a_1 G_1 + \cdots + a_\varrho G_\varrho| \text{ und } |a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_\varrho H_\varrho|$$

für alle Werte $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$; denn für

$$a_0 = 1, \; a_1 = a_2 = \cdots = a_\varrho = 0$$

nehmen diese Determinanten den Wert 1 an.

Wenden wir die obigen Sätze an, so erhalten wir das Resultat:

Ist eine der zwei Determinanten

$$|\Delta| = \left| \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{i\alpha}^{(r)} \right| \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

und

$$|\Gamma| = \left| \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varrho} a_\alpha \lambda_{\alpha i}^{(r)} \right| \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

oder beide Null, so bildet die Gesamtheit $\mathfrak{G}_0$ *aller Matrices*

$$a_0 G_0 + a_1 G_1 + \cdots + a_\varrho G_\varrho$$

vom $\varrho + 1^{ten}$ *Grade mit nichtverschwindenden Determinanten eine Gruppe. Eben dieses trifft für die Gesamtheit* $\mathfrak{H}_0$ *aller Matrices*

$$a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_\varrho H_\varrho$$

vom $\varrho + 1^{ten}$ *Grade mit nichtverschwindenden Determinanten zu.*

Auf die Deutung höherer komplexer Zahlen durch Matrices hat bereits (1858) Cayley (*Coll. math. papers* **2**, 491) in seiner grundlegenden Arbeit über Matrices (vgl. den voraufgegangenen § 6) für den Fall der Quaternionen hingewiesen. Die vier Matrices zweiten Grades:

$$i_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad i_1 = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad i_2 = \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}, \quad i_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

verhalten sich bei ihrer Komposition wie die Quaternioneneinheiten (vgl. S. 16). Die weitere Deutung komplexer Zahlen durch Matrices verdankt man C. S. Peirce (*Am. J. math.* **4**, 221 (1881)) und Ed. Weyr (*Prager Ber.* (1887)). Die Verknüpfung höherer komplexer Zahlen mit Gruppen geht auf Poincaré (*C. R.* **99** (1884), 740) und Study (*Monatsh. f. Math.* **1**, 283 (1890)) zurück. Wir nennen ferner: Scheffers, *Math. Ann.* **39**, 293 (1891), ebenda, **41**, 601 (1893), Molien, ebenda, **41**, 83 (1893), **42**, 308 (1893). Wegen weiterer Litteratur über den Zusammenhang höherer komplexer Zahlen und bilinearer Formen sei auf Studys Artikel in der *Enzyklopädie der math. Wiss.* **1**, 147 „*Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen*“ verwiesen. Zur Ergänzung führen wir noch die rein algebraischen Arbeiten von Frobenius, *Theorie der hyperkomplexen Größen* (*Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1903), 504 u. 634) an. Von Lehrbüchern vgl. man: Lie-Scheffers, *Vorl. über kontinuierliche Gruppen*, Leipzig 1893, S. 610.

§ 8. Die Theorie der Elementarteiler und die bilinearen Formen.

Sind A und B zwei quadratische Matrices n^{ten} Grades mit den Elementen a_{ik} und b_{ik}, so ist unter $A + \varrho B$ (vgl. S. 81) die Matrix mit den Elementen $a_{ik} + \varrho b_{ik}$ zu verstehen. Die Behandlung einer solchen Matrix $A + \varrho B$, deren Elemente ganze Funktionen ersten Grades eines Parameters ϱ sind, führte Weierstraß (*Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen, Monatsb. d. Berl. Akad.* (1868), mit Veränderungen abgedruckt in *Ges. Werken* **2**, 19) auf seine berühmte Theorie der *Elementarteiler.*

Unser Ausgangspunkt soll im folgenden ein rein *zahlentheoretischer* sein; hierdurch erhält man die Begriffe der Theorie wohl am klarsten und durchsichtigsten. Alsdann legen wir die Allgemeinheit dar, die diesen Ideenbildungen zukommt, und gelangen erst am Schlusse durch Spezialisierung zu dem Standpunkt, den Weierstraß eingenommen hat.

Wir betrachten die quadratische Matrix:

$$D = \| d_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

vom Grad n. Ihre Elemente d_{ik} sollen ausnahmslos ganze Zahlen, sowohl positiv als negativ, einschließlich der Null sein. Die Matrix D habe den Rang l, d. h. alle ihre Unterdeterminanten vom $l + 1^{\text{ten}}$, jedoch nicht sämtliche vom l^{ten} Grad seien Null.

σ bedeute im folgenden eine ganze positive Zahl, die $\leqq l$ ist, mit T_σ bezeichnen wir (den positiv gewählten) größten gemeinsamen Teiler sämtlicher Unterdeterminanten σ^{ten} Grades D_σ von D. Ist $l = n$, so ist $T_l = T_n$ und, vom Vorzeichen abgesehen, die Determinante der Matrix D. Ist $l < n$, so setze man $T_{l+1} = T_{l+2} = \cdots = T_n = 0$.

Definition I: Die Größen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ heißen der erste, zweite, ..., n^{te} Determinantenteiler des Systems der d_{ik} oder der Determinante D.

Jede σreihige Unterdeterminante D_σ ist eine lineare homogene Funktion von Unterdeterminanten $D_{\sigma-1}$ des $\sigma - 1^{\text{ten}}$ Grades. Mithin ist der größte gemeinsame Teiler T_σ aller D_σ durch den größten gemeinsamen Teiler $T_{\sigma-1}$ aller $D_{\sigma-1}$ teilbar.

Lehrsatz I: Der Quotient

$$\frac{T_\sigma}{T_{\sigma-1}} \qquad (\sigma = 2, 3, \ldots, l)$$

des σ^{ten} Determinantenteilers durch den $\sigma - 1^{ten}$ ist eine ganze Zahl.

Definition II: Die Größen

$$E_1 = T_1,\ E_\sigma = \frac{T_\sigma}{T_{\sigma-1}} \quad (\sigma = 2, 3, \ldots, l), \qquad E_{l+\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n-l)$$

heißen die zusammengesetzten Elementarteiler des Systems der d_{ik} *oder der Determinante* D. E_1 *heißt der erste,* E_2 *der zweite,* ..., E_l *der* l^{te}, E_{l+1} *der* $l+1^{te}$, ..., E_n *der* n^{te} *Elementarteiler. Die Anzahl der nichtverschwindenden Elementarteiler gibt ebenso wie die der nichtverschwindenden Determinantenteiler den Rang von* D *an.*

Die Bezeichnung der Größen $E_1, E_2, \ldots, E_n$ als zusammengesetzte Elementarteiler ist Muths Werk „*Theorie und Anwendung der Elementarteiler*", Leipzig 1899, S. 13, entlehnt. Der Name „σ^{ter} Elementarteiler" ist von Frobenius (*Journ. f. Math.* **86**, 148 (1879)) eingeführt worden; die Bezeichnung zusammengesetzter Elementarteiler wird jedoch in seiner grundlegenden Arbeit (vgl. a. a. O. S. 163) in anderer Bedeutung als hier verwandt. Die Größen $E_1, E_2, \ldots, E_n$ finden sich bereits (1861), ehe Weierstraß seine klassische Arbeit, aus welcher der Name Elementarteiler stammt, publiziert hatte, in Henry J. St. Smiths zahlentheoretischen Untersuchungen über lineare Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten (Smith, *Coll. math. papers* **1**, 391).

Von Smith stammen auch schon folgende Sätze:

Lehrsatz II: In der Reihe der zusammengesetzten Elementarteiler $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *ist jeder Elementarteiler* E_σ *durch den ihm voraufgehenden* $E_{\sigma-1}$ $(\sigma = l, l-1, \ldots, 2)$ *ohne Rest teilbar (Smith, a. a. O., S. 396).*

Lehrsatz III: Die zusammengesetzten Elementarteiler lassen sich nicht nur als Quotienten

$$E_\sigma = \frac{T_\sigma}{T_{\sigma-1}}$$

größter gemeinsamer Teiler definieren, sondern sie selbst sind auch größte gemeinsame Teiler: Dividiert man jede Unterdeterminante σ^{ten} *Grades* D_σ *von* D *durch den größten gemeinsamen Teiler der in* D_σ *enthaltenen Unterdeterminanten* $\sigma - 1^{ten}$ *Grades, so ist der größte gemeinsame Teiler aller dieser Quotienten gleich dem* σ^{ten} *Elementarteiler* E_σ *(Smith, a. a. O., S. 396).*

Aus dem Lehrsatz II folgt: $E_l \geqq E_{l-1} \geqq E_{l-2} \cdots \geqq E_1$. Mithin ergibt sich: Sind die Werte der l zusammengesetzten, nichtverschwindenden Elementarteiler $E_l, E_{l-1}, \ldots, E_1$ in irgend welcher Reihenfolge gegeben, so braucht man sie nur ihrer Größe nach zu ordnen, um zu entscheiden, welcher der σ^{te} ist.

Lehrsatz IV: Komponiert man zwei oder mehrere ganzzahlige Matrices, so ist der σ^{te} Elementarteiler des Produktes durch den σ^{ten} Elementarteiler eines jeden Faktors des Produktes teilbar.

Aus dem Satz II folgt: Jeder zusammengesetzte Elementarteiler $E_{\sigma-1}$ $(\sigma = l, l-1, \ldots, 2)$ ist nur durch solche Primzahlen teilbar, die auch E_σ ohne Rest teilen. Hieraus ergibt sich:

Lehrsatz V: Ist p^{e_σ} die höchste Potenz einer Primzahl p, die in E_σ $(\sigma = l, l-1, \ldots, 1)$ ohne Rest aufgeht, so genügen die Zahlen e_σ den Ungleichungen

$$e_l \geqq e_{l-1} \geqq e_{l-2} \cdots \geqq e_1.$$

Diese Fundamentaleigenschaft ist von Cayley (1855) (*Journ. f. Math.* **50**, 314, *Coll. math. papers* **2**, 217) angegeben worden.

Definition III: Ist p^{e_σ} die höchste in E_σ $(\sigma = l, l-1, \ldots, 1)$ enthaltene Potenz einer Primzahl p, so heißt, falls e_σ von Null verschieden ist, jeder Faktor p^{e_σ} nach Weierstraß ein Elementarteiler oder eine elementare Invariante des Systemes d_{ik} oder der Determinante D. Die Primzahl p wird die Grundzahl oder Basis, e_σ der Exponent oder Grad des Elementarteilers p^{e_σ} genannt.

Es empfiehlt sich oft, die Elementarteiler p^{e_σ} mit Frobenius (*Journ. f. Math.* **86**, 162) zum Unterschied von den zusammengesetzten Elementarteilern als *einfache* Elementarteiler zu bezeichnen. Spricht man von Elementarteilern ohne Zusatz, so meint man die eben definierten einfachen Weierstraßschen (Kronecker verwendet in den *Monatsb. d. Berl. Akad.* (1874), *Ges. Werke* **1**, 405 die Bezeichnung „einfacher Elementarteiler" in ganz anderem Sinn; nach ihm hätte man Elementarteiler mit dem Exponenten 1 so zu nennen).

Die drei durch die Definitionen I, II, III eingeführten Größensysteme, nämlich die Determinantenteiler T_σ, die zusammengesetzten Elementarteiler E_σ und die einfachen Elementarteiler bestimmen sich gegenseitig eindeutig.

Die zusammengesetzten Elementarteiler E_σ sind durch die Definition II aus den Determinantenteilern abgeleitet worden. Sämtliche einfache oder Weierstraßsche Elementarteiler erhält man durch die Zerlegung des ersten, zweiten usw. bis l^{ten} Elementarteilers in die (von Null verschiedenen) Potenzen verschiedener Primfaktoren. Ist $E_\sigma = p^{e_\sigma} \cdot q^{e'_\sigma} \cdot r^{e''_\sigma} \cdots$, wobei $p, q, r, \ldots$ lauter verschiedene Primzahlen bedeuten, so sind die Größen

$$p^{e_\sigma},\ q^{e'_\sigma},\ r^{e''_\sigma},\ \ldots \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, l)$$

die sämtlichen einfachen oder Weierstraßschen Elementarteiler.

Aus den zusammengesetzten Elementarteilern ergeben sich die Determinantenteiler T auf Grund der Relationen:

$$T_\sigma = E_\sigma \cdot E_{\sigma-1} \cdot E_{\sigma-2} \cdots E_1 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, l),$$

$$T_{l+\mu} = E_{l+\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n-l).$$

Sind

$$p^{e_l}, p^{e_{l-1}}, p^{e_{l-2}}, \ldots, q^{e'_l}, q^{e'_{l-1}}, q^{e'_{l-2}}, \ldots$$

sämtliche einfache Elementarteiler von D — ihr Produkt muß T_l sein —, die nach fallenden Potenzen von $p, q, \ldots$ geordnet sind:

$$(e_l \geqq e_{l-1} \geqq e_{l-2} \geqq \cdots, e'_l \geqq e'_{l-1} \geqq e'_{l-2} \geqq \cdots, \cdots),$$

so ist $E_n = E_{n-1} = \cdots = E_{l+1}$ durch den Rang von D bestimmt. E_l ist das Produkt der höchsten Potenzen sämtlicher einfacher Elementarteiler von D, also gleich $p^{e_l} \cdot q^{e'_l} \cdots$, E_{l-1} das Produkt der zweithöchsten Potenzen sämtlicher einfacher Elementarteiler, also gleich $p^{e_{l-1}} \cdot q^{e'_{l-1}} \cdots$, usw.

Alle diese Sätze sind *weitgehender Verallgemeinerung* fähig. Sie beruhen auf der eindeutigen Zerlegbarkeit der ganzen positiven Zahlen in Primfaktoren und der Existenz des größten gemeinsamen Teilers von zwei oder mehreren ganzen Zahlen. Ω sei ein *Rationalitätsbereich* oder *Zahlkörper* (vgl. Algebra). $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ seien k Variable. Sind die Größen α Zahlen aus Ω, so heißen Summen von Gliedern der Form:

$$\alpha \varrho_1^{r_1} \varrho_2^{r_2} \cdots \varrho_k^{r_k},$$

wobei $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ganze positive Zahlen, einschließlich der Null, bedeuten, ganze Funktionen in Ω. Diese lassen sich in *reduzible* (zerlegbare) und *irreduzible* (unzerlegbare) unterscheiden. Die ersteren sind als Produkte aus mehreren ganzen Funktionen in Ω darstellbar, die anderen nicht. Die reduziblen Funktionen lassen sich in eine endliche Anzahl irreduzibler Faktoren zerlegen, die selbst ganze Funktionen in Ω sind; jede reduzible Funktion bestimmt ihre irreduziblen Faktoren bis auf multiplikative Konstanten eindeutig. Hierauf gründet sich der Begriff des *größten gemeinschaftlichen Teilers* von zwei oder mehreren ganzen Funktionen in Ω; er ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt (vgl. beispielsweise H. Weber, *Algebra* **2**, 563).

Die n^2 Elemente der Matrix

$$D = \| d_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

seien ganze Funktionen in Ω von k Variablen. Auch hierfür läßt sich nach den obigen Angaben der größte gemeinsame Teiler T_σ sämtlicher Unterdeterminanten σ^{ten} Grades von D definieren. Die Determinantenteiler $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sind, abgesehen von konstanten Faktoren, die hier die Rolle der Einheit spielen und für das Folgende als unwesentlich anzusehen sind, eindeutig bestimmt. Ebendasselbe gilt für die durch die Definition II eingeführten zusammengesetzten Elementarteiler. Anstatt der Primzahlen p treten im Falle der ganzen Funktionen in Ω die irreduziblen ganzen Funktionen von k Variablen mit Koeffizienten aus Ω. Sämtliche einfache oder Weierstraßsche Elementarteiler erhält man durch die Zerlegung jedes zusammengesetzten Elementarteilers E_σ in die (von Null verschiedenen) Potenzen verschiedener irreduzibler Faktoren. Ist

$$E_\sigma = p^{e_\sigma} \cdot q^{e'_\sigma} \cdot r^{e''_\sigma} \cdot \cdots,$$

wobei die Basen $p, q, r, \ldots$ lauter voneinander verschiedene irreduzible ganze Funktionen mit Koeffizienten aus Ω sind, d. h. solche, die sich nicht nur um multiplikative Konstanten unterscheiden, so sind

$$p^{e_\sigma}, \; q^{e'_\sigma}, \; r^{e''_\sigma}, \ldots \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, l)$$

die sämtlichen einfachen oder Weierstraßschen Elementarteiler. *Alle früher angegebenen Lehrsätze behalten ihre unveränderte Gültigkeit, wenn man Matrices betrachtet, deren Elemente ganze Funktionen von k Variablen mit Koeffizienten aus einem Rationalitätsbereich Ω sind.*

D und F seien zwei Matrices mit je n^2 gleichartigen Elementen d_{ik} und f_{ik}, d. h. entweder seien beide Größensysteme d_{ik} und f_{ik} ganzzahlig oder beide ganze Funktionen von k Variablen mit Koeffizienten aus dem gleichen Rationalitätsbereich Ω. Besteht zwischen F und D eine symbolische Gleichung $F = RDQ$, wobei R und Q Matrices mit *gleichartigen Elementen* wie denjenigen von F und D sein sollen, so soll auch bei dieser Beschränkung der Elemente von R und Q für F der Ausdruck *Vielfaches*, für D *Teiler* verwandt werden (zu vgl. S. 89). Waren die Elemente von R und Q willkürlich, so galt nur der Satz, daß der Rang des Vielfachen F stets gleich oder kleiner als der des Teilers D ist. Bei der Beschränkung der Elemente von R und Q ergibt sich nach Satz IV:

Lehrsatz VI: Eine Matrix F ist nur dann ein Vielfaches einer Matrix D, wenn ihre zusammengesetzten Elementarteiler E_i' Vielfache der entsprechenden Elementarteiler E_i von D sind, *also $E_i' = \gamma_i E_i$, wobei die γ_i ganze Größen* (also ganze Zahlen oder ganze Funktionen) *einschließlich der Null sind.*

Dem Obigen entsprechend mögen zwei Matrices D und F mit gleichartigen Elementen *äquivalent* heißen, wenn sowohl F ein Vielfaches von D als auch D ein Vielfaches von F in dem engeren Sinne ist. Aus Satz VI folgt

Lehrsatz VII: Zwei Matrices D und F mit gleichartigen Elementen können nur dann äquivalent sein, wenn die entsprechenden zusammengesetzten Elementarteiler E_i und E_i' gleich sind.

Die in dem letzten Satz ausgesprochene Bedingung für die Aquivalenz zweier gleichartiger Matrices ist zwar *notwendig,* aber nicht *hinreichend.* Gegenüber zuweit gehenden Behauptungen in dieser Hinsicht scheint es angebracht, an einem Beispiel zu zeigen, daß *trotz der Gleichheit der Elementarteiler eine Matrix nicht Vielfaches einer anderen zu sein braucht.*

Sei D die Matrix

$$\begin{Vmatrix} \varrho_1\varrho_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

und F die Matrix

$$\begin{Vmatrix} \varrho_1 & 0 \\ 0 & \varrho_2 \end{Vmatrix};$$

für F und D sind, falls ϱ_1 und ϱ_2 unabhängige Variable bedeuten und Ω der Bereich aller Zahlen ist, die zusammengesetzten Elementarteiler $E_1 = 1$, $E_2 = \varrho_1\varrho_2$ gleich. Angenommen F sei Vielfaches von D, nämlich $F = RDQ$, wobei die Elemente r_{ik} und q_{ik} der zwei Matrices R und Q ganze Funktionen der zwei Variablen ϱ_1, ϱ_2 sind. Aus $|D| = |F|$ folgt $|R| \cdot |Q| = 1$. Da das Produkt zweier ganzer Funktionen nur dann gleich 1 ist, falls sie Konstante sind, muß $|R| = \text{Konst.}$, $|Q| = \frac{1}{\text{Konst.}}$ sein. Mithin existiert $P = Q^{-1}$, und die Elemente p_{ik} von P sind wegen $|Q|^{-1} = \text{Konst.}$ ganze Funktionen von ϱ_1 und ϱ_2. Die symbolische Gleichung $FP = RD$ ergibt die vier gewöhnlichen Gleichungen:

$$\varrho_1 p_{11} = r_{11}\varrho_1\varrho_2, \quad \varrho_1 p_{12} = r_{12}, \quad \varrho_2 p_{21} = r_{21}\varrho_1\varrho_2, \quad \varrho_2 p_{22} = r_{22}.$$

Folglich wird die Determinante:

$$|R| = \begin{vmatrix} r_{11} r_{12} \\ r_{21} r_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & \varrho_1 p_{12} \\ r_{21} & \varrho_2 p_{22} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet für $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$. Sie soll aber unabhängig von ϱ_1, ϱ_2 einen von Null verschiedenen konstanten Wert besitzen. Mithin ist die Annahme, daß F Vielfaches von D ist, widerlegt.[1])

Beschränkt man aber die Elemente d_{ik} und f_{ik} der zwei Matrices D und F darauf, *ganze Zahlen oder ganze Funktionen einer einzigen Variablen* ϱ *mit Koeffizienten aus* Ω zu sein, so sind die in den Sätzen VI und VII ausgesprochenen Bedingungen auch *ausreichend*. Im folgenden wird *stets ausnahmslos* vorausgesetzt, daß wir es mit Matrices, deren Elemente *ganzzahlig oder ganze Funktionen einer einzigen Variablen* ϱ *mit Koeffizienten aus* Ω sind, zu tun haben. Wir formulieren

Lehrsatz VI': Eine Matrix F, deren Elemente ganze Zahlen oder ganze Funktionen einer einzigen Variablen ϱ *mit Koeffizienten aus* Ω *sind, ist dann und nur dann Vielfaches einer gleichartigen Matrix D, wenn ihre zusammengesetzten Elementarteiler* E_i' *Vielfache der entsprechenden Elementarteiler* E_i *von D sind, also* $E'_i = \gamma_i E_i$, *wobei* γ_i *ganze Größen* (also ganze Zahlen oder ganze Funktionen einer einzigen Variablen) *einschließlich Null sind.*

---

1) Das obige Beispiel läßt sich auch auf folgende Weise behandeln: Würde D Vielfaches von F sein, so müßte dies auch noch statthaben, wenn man die zwei unabhängigen Variablen ϱ_1 und ϱ_2 gleichsetzt. Sind F_0 und D_0 die sich aus F und D für $\varrho_1 = \varrho_2$ ergebenden Matrices, so hat

$$F_0 = \left\| \begin{matrix} \varrho_1 & 0 \\ 0 & \varrho_1 \end{matrix} \right\|$$

die Elementarteiler $E_1 = \varrho_1$, $E_2 = \varrho_1^2$, hingegen besitzt

$$D_0 = \left\| \begin{matrix} \varrho_1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

die Elementarteiler $E_1 = 1$, $E_2 = \varrho_1^2$. Da der Elementarteiler $E_1 = 1$ von D_0 nicht Vielfaches des Elementarteilers $E_1 = \varrho_1$ von F_0 ist, kann nach Satz VI D_0 nicht Vielfaches von F_0, also D nicht Vielfaches von F sein. Daß bei Funktionen von zwei oder mehr Variablen die in den Sätzen VI und VII ausgesprochenen Bedingungen nicht ausreichen, hat seinen Grund darin, daß bei Funktionen von zwei und mehr Variablen der größte gemeinsame Teiler nicht alles den Funktionen „Gemeinsame“ erschöpft.

Lehrsatz VII': Die notwendige und zugleich hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier gleichartiger Matrices mit Elementen, die ganze Zahlen oder ganze Funktionen einer einzigen Variablen mit Koeffizienten aus Ω sind, läßt sich in folgende drei gleichwertige Formen einkleiden: Übereinstimmung in den Determinantenteilern oder in den zusammengesetzten Elementarteilern oder im Rang und den einfachen Elementarteilern.

Hat die Determinante einer Matrix oder linearen homogenen Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten den Wert ± 1, so heißt die Matrix oder Substitution *unimodular*. Hat man Matrices oder Substitutionen, deren Koeffizienten ganze Funktionen einer Variablen ϱ sind, so bezeichnet man diejenigen von ihnen, deren Determinanten von ϱ unabhängig und von Null verschieden sind, als *unimodular*. Man beweist, *daß für zwei nach Satz VII' äquivalente Matrices D und F mit gleichartigen Koeffizienten in der symbolischen Gleichung $F = RDQ$, wobei R und Q Koeffizienten derselben Art wie F und D haben, die Matrices R und Q stets unimodular wählbar sind; für unimodulare Systeme R und Q existieren R^{-1} und Q^{-1} und sind ebenfalls unimodular. Es wird $D = R^{-1}FQ^{-1}$.*

Überträgt man (zu vgl. § 6) im Falle von Matrices mit ganzzahligen Elementen diese Sätze in die Sprache der Theorie der bilinearen Formen, so erhält man die Theoreme:

Lehrsatz VIII: Zwei bilineare Formen mit ganzzahligen Koeffizienten sind dann und nur dann äquivalent in dem Sinn, daß sie gegenseitig durch ganzzahlige (im allgemeinen nicht kogrediente) Substitutionen ineinander transformierbar sind, wenn die entsprechenden zusammengesetzten Elementarteiler der Matrices der Koeffizienten der beiden Formen gleich sind. Für die zusammengesetzten Elementarteiler kann man auch die Determinantenteiler oder den Rang und die einfachen Elementarteiler treten lassen. Im Falle der Äquivalenz können die zwei bilinearen Formen stets auch ganzzahlig unimodular ineinander übergeführt werden. Die Äquivalenz läßt sich auf rationalem Wege (durch Aufsuchung größter gemeinsamer Teiler) entscheiden, und die überführenden unimodularen Substitutionen lassen sich rational ermitteln.

Hieraus folgt *Lehrsatz IX: Eine gegebene bilineare Form mit ganzzahligen Koeffizienten, bei der die aus den Koeffizienten gebildete Matrix die zusammengesetzten, nichtverschwindenden Elementarteiler*

$$E_1, E_2, \ldots, E_l$$

hat, läßt sich durch ganzzahlige, unimodulare (im allgemeinen nicht kogrediente) Substitutionen für die zwei Variablenreihen in

$$E_1 x_1' y_1' + E_2 x_2' y_2' + \cdots + E_l x_l' y_l'$$

transformieren.

Die Sätze VIII und IX bleiben *unverändert gültig,* wenn man überall anstatt der ganzzahligen Koeffizienten *ganze Funktionen in einem beliebigen Rationalitätsbereich Ω einer einzigen Variablen* ϱ voraussetzt.

Also:

$$D = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} d_{ik} x_i y_k$$

und

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f_{ik} x_i y_k$$

seien zwei bilineare Formen, deren Koeffizienten ganze Funktionen beliebigen Grades einer einzigen Variablen ϱ sind. Die Faktoren der einzelnen Potenzen von ϱ in den ganzen Funktionen d_{ik} und f_{ik} sollen einem Rationalitätsbereich Ω angehören. Die zwei bilinearen Formen heißen *äquivalent,* wenn sie durch Substitutionen ineinander überführbar sind, deren Koeffizienten ganze Funktionen von ϱ sind. Zwei bilineare Formen der eben beschriebenen Art sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie die gleichen zusammengesetzten Elementarteiler haben. Zwei solche äquivalente bilineare Formen lassen sich auch stets durch Substitutionen ineinander überführen, deren Koeffizienten ganze Funktionen in Ω der einen Variablen ϱ sind und deren Determinanten einen von ϱ unabhängigen konstanten Wert haben.

Setzt man die Elemente von D und F nicht als beliebige, sondern als *lineare Funktionen des Parameters* ϱ voraus, so kann man die Resultate noch verschärfen und ist bei dem Weierstraßschen Standpunkt, von dem wir zu Beginn des Paragraphen sprachen, angelangt. Die Elemente d_{ik} von D seien von der Form

$$d_{ik} = a_{ik} + \varrho b_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und die Elemente f_{ik} der äquivalenten Matrix F von der Form

$$f_{ik} = g_{ik} + \varrho h_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Größen a_{ik}, b_{ik}, g_{ik} und h_{ik} bedeuten beliebige Konstanten aus dem Rationalitätsbereich Ω. Man beweist, daß, wenn die zwei Determinanten $|b_{ik}|$ und $|h_{ik}|$ nicht verschwinden, in der Gleichung $F = RDQ$ die Systeme R und Q so gewählt werden können, daß *nicht nur ihre Determinanten, sondern auch ihre einzelnen Elemente von dem Parameter* ϱ *unabhängig sind.*

Lehrsatz X: Stimmen die zwei bilinearen Formen $A + \varrho B$ *und* $G + \varrho H$, *bei denen die Determinanten* $|B|$ *und* $|H|$ *nicht verschwinden, in den zusammengesetzten Elementarteilern (oder den Determinantenteilern oder den einfachen Elementarteilern) überein, so kann man sie durch Substitutionen ineinander transformieren, deren Koeffizienten vom Parameter* ϱ *unabhängig sind.*

Um Satz X von der Voraussetzung des Nichtverschwindens der zwei Determinanten $|b_{ik}|$ und $|h_{ik}|$ zu befreien, empfiehlt es sich, zur homogenen Betrachtung überzugehen.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 unbestimmte Größen, so heißt

$$\varrho_1 A + \varrho_2 B = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} (\varrho_1 a_{ik} + \varrho_2 b_{ik}) x_i y_k$$

eine *Schar bilinearer Formen* (Kronecker (1868), *Ges. Werke* **1**, 166). A und B heißen die *Grundformen der Schar* ($\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = \varrho$ liefert den früher behandelten unhomogenen Fall $A + \varrho B$). Wir setzen wieder $D = \varrho_1 A + \varrho_2 B$. Verschwindet die Determinante der Schar identisch, d. h. ist sie für jedes Wertepaar ϱ_1 und ϱ_2 Null, so heißt die Schar *singulär,* im anderen Fall *ordinär.* Eine singuläre Schar ist dadurch charakterisiert, daß der Rang l von D kleiner als n ist; bei einer ordinären Schar ist $l = n$.

Um noch engeren Anschluß an Weierstraß zu gewinnen, lassen wir Ω mit dem größten aller möglichen Rationalitätsbereiche zusammenfallen, d. h. Ω *bedeutet die Gesamtheit aller Zahlen.* Die Elemente a_{ik}, b_{ik}, f_{ik} und g_{ik} der Matrices A, B, F und G sollen also jetzt beliebige Konstanten sein.

Da in Weierstraß' klassischen Untersuchungen die einfachen Elementarteiler, mit denen er allein operiert, direkt eingeführt werden, soll dies auch noch geschehen: Ist l der Rang der Matrix $D = \varrho_1 A + \varrho_2 B$, so sei σ eine ganze Zahl, die $\leqq l$ ist. Weierstraß selbst behandelt nur den Fall $l = n$, d. h. die Determinante $|D|$ verschwindet nicht für alle Werte ϱ_1, ϱ_2. Da Ω der Bereich aller Zahlen ist, werden die irreduziblen Funktionen p lineare Funktionen von ϱ_1 und ϱ_2. Wir setzen $p = a\varrho_1 + b\varrho_2$ und verstehen unter h_σ den Exponenten der *höchsten* Potenz, mit dem die lineare, homogene ganze Funktion p

in allen Unterdeterminanten D_σ σ^{ten} Grades von D enthalten ist. Ist T_σ der größte gemeinsame Teiler sämtlicher Unterdeterminanten σ^{ten} Grades D_σ, so hat der Determinantenteiler T_σ die Funktion p genau in der h_σ^{ten} Potenz zum Faktor. Sämtliche Unterdeterminanten D_σ sind durch p^{h_σ} teilbar, einige von ihnen können auch eine höhere Potenz von p zum Faktor haben, wenigstens eine Unterdeterminante D_σ muß entsprechend der Definition der Zahl h_σ die Funktion p genau in der Potenz h_σ enthalten. Eine solche D_σ, die genau durch die h_σ^{te} Potenz von p teilbar ist, heißt nach Frobenius (*Über die Elementarteiler der Determinanten, Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1894), 32) eine *in bezug auf p reguläre* D_σ.

Die Zahlen h_σ sind ganze positive Zahlen oder Null. Für sie beweist man die Ungleichung $h_{\sigma+1} \geqq h_\sigma$, und, wenn $h_\sigma = 0$ ist, so ist $h_{\sigma-1} = h_{\sigma-2} = \cdots = 0$.

Wir setzen:

$$\begin{aligned}
e_l &= h_l - h_{l-1},\\
e_{l-1} &= h_{l-1} - h_{l-2},\\
&\vdots\\
e_\sigma &= h_\sigma - h_{\sigma-1},\\
&\vdots\\
e_1 &= h_1.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$h_\sigma = e_\sigma + e_{\sigma-1} + \cdots + e_1.$$

In T_σ tritt folglich $p^{h_\sigma} = p^{e_\sigma} \cdot p^{e_{\sigma-1}} \cdot p^{e_{\sigma-2}} \cdots p^{e_1}$

$(e_\sigma \geqq e_{\sigma-1} \geqq e_{\sigma-2} \cdots \geqq e_1)$ (Cayleysche Ungleichung, siehe S. 104)

als Faktor auf. Jeder einzelne der mit einem von Null verschiedenen Exponenten versehenen Faktoren

$$p^{e_\sigma},\ p^{e_{\sigma-1}},\ p^{e_{\sigma-2}},\ \ldots,\ p^{e_1},$$

in die p^{h_σ} zerlegt wurde, ist ein *Weierstraßscher oder einfacher Elementarteiler*. Hiermit sind die einfachen Elementarteiler unter Umgehung der zusammengesetzten definiert. Die Basen der Weierstraßschen Elementarteiler findet man, indem man T_l als Produkt von linearen homogenen Funktionen der Variablen ϱ_1 und ϱ_2 und eines von diesen Veränderlichen unabhängigen konstanten Faktors darstellt.

Der Weierstraßsche Fundamentalsatz lautet:

Lehrsatz XI: Zwei Scharen bilinearer Formen, deren Determinanten nicht verschwinden, sind dann und nur dann äquivalent (d. h. durch von den Parametern unabhängige, lineare homogene Substitutionen mit nichtverschwindenden Determinanten gegenseitig ineinander transformierbar), wenn die Determinanten der beiden Scharen in ihren Elementarteilern übereinstimmen (Weierstraß (1868), *Ges. Werke* **2**, 21).

Statt die einfachen Elementarteiler zu verwenden, wie es Weierstraß tut, kann man sich auch im Satze XI als Kriterium für die Äquivalenz gleichwertig der Übereinstimmung in den zusammengesetzten Elementarteilern E oder in den Determinantenteilern T bedienen. Die letzten beiden sind als größte gemeinsame Teiler rational zu finden, während die Bestimmung der einfachen Elementarteiler der Schar $\varrho_1 A + \varrho_2 B$ die Zerfällung einer Gleichung in lineare Faktoren, also irrationale Operationen, erfordert. *Über die Äquivalenz zweier ordinärer Scharen bilinearer Formen kann also auf rationalem Wege entschieden werden; auch die Substitutionen, die eine Schar in die andere überführen, sind rational bestimmbar.*

Weierstraß geht bei seinem Beweisverfahren durch das Irrationale hindurch. Er transformiert die Formenschar auf eine Normalform, die von den einfachen Elementarteilern abhängt. *Man kann stets eine ordinäre Schar bilinearer Form mit vorgegebenen Elementarteilern konstruieren.* Dies ergibt sich auch aus der weiter unten angegebenen Normalform einer linearen homogenen Substitution. Frobenius (*Journ. f. Math.* **86**, 146 (1879)) hat zuerst den Weierstraßschen Fundamentalsatz XI nur mit Hülfe durchaus rationaler Operationen bewiesen (vgl. auch Landsberg, *Journ. f. Math.* **116**, 331 (1896)). Über die an den Weierstraßschen Fundamentalsatz anknüpfende Literatur vgl. man Muth, *Theorie und Anwendung der Elementarteiler*, S. 60. Wir heben hier nur die Arbeit von Stickelberger, *Journ. f. Math.* **86**, 20 (1879), hervor.

Aus dem Weierstraßschen Fundamentalsatz XI folgt:

Damit es möglich sei, die Formenschar:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} (\varrho_1 a_{ik} + \varrho_2 b_{ik})\, x_i y_k$$

von nichtverschwindender Determinante durch eine lineare homogene Substitution für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *von nichtverschwindender Determinante und eine andere für* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *von ebenfalls nichtverschwindender Determinante in die Normalform:*

$$\varrho_1(a_1 x_1' y_1' + a_2 x_2' y_2' + \cdots + a_n x_n' y_n') +$$
$$\varrho_2(b_1 x_1' y_1' + b_2 x_2' y_2' + \cdots + b_n x_n' y_n')$$

zu transformieren, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante $|\varrho_1 a_{ik} + \varrho_2 b_{ik}|$ *nur Elementarteiler mit den Exponenten 1 besitzt, d. h. jeder Teiler* $a\varrho_1 + b\varrho_2$ *der Determinante* $|\varrho_1 a_{ik} + \varrho_2 b_{ik}|$, *der in ihr* $s > 1$ *mal enthalten ist, auch Teiler aller ihrer* $n - 1^{ten}$, $n - 2^{ten}$, *bis* $n - s + 1^{ten}$ *Unterdeterminanten ist* (Weierstraß, a. a. O., S. 37).

Die Äquivalenz zweier *singulärer* Scharen bilinearer Formen hat Kronecker (*Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen, Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1890), 1225) erledigt. Wir geben das Resultat ohne Benützung alles Voraufgegangenen, indem wir hierbei auch noch die Äquivalenz ordinärer Scharen mittels der Determinantenteiler besonders hervorheben:

Sei

$$D = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} (\varrho_1 a_{ik} + \varrho_2 b_{ik}) x_i y_k$$

eine Schar bilinearer Formen (bei der auch infolge verschwindender Koeffizienten die Anzahl beider Reihen von Veränderlichen verschieden sein kann). T_σ *bedeutet den größten gemeinsamen Teiler aller Unterdeterminanten* σ^{ten} *Grades* ($\sigma = 1, 2, \ldots$). *Verschwindet die Determinante der Schar nicht, so sind alle diejenigen Scharen und auch nur diejenigen mit* D *äquivalent, die mit* D *in den so ermittelten* T_σ *übereinstimmen* (andere Formulierung des Weierstraßschen Satzes XI). *Verschwindet die Determinante von* D *für alle Werte von* ϱ_1 *und* ϱ_2, *so ist die obige Bedingung nicht ausreichend. Sei* l *der Rang der Determinante von* D, *so bestehen zwischen den partiellen Ableitungen von* $\varrho_1 A + \varrho_2 B$ *nach den* n *Variablen* x_i *und den* n *Variablen* y_i *genau zweimal* $n - l$ *linear unabhängige Relationen, deren Koeffizienten homogene Funktionen von* ϱ_1 *und* ϱ_2 *sind. Denkt man sich ein vollständiges System von* $2n - 2l$ *solchen Relationen von möglichst niedrigem Grade in* ϱ_1, ϱ_2 *gewählt, so sind alle außer in den Größen* T_σ *noch in diesen Minimalgradzahlen*[1]) *mit* D *übereinstimmenden Scharen und auch nur diese mit unserer Schar* D *äquivalent* (Kronecker).

Charakteristische Kriterien für die Äquivalenz zweier singulärer Scharen sind natürlich auch die Übereinstimmung in den

[1]) Die Bezeichnung stammt von Muth, *Theorie der Elementarteiler,* S. 108.

Minimalgradzahlen und den einfachen Elementarteilern oder in den Minimalgradzahlen und den zusammengesetzten Elementarteilern. Sowohl das oben ausführlich gegebene Theorem als auch die letzte Bedingung gestatten über die Äquivalenz zweier singulärer Scharen *rational,* nämlich durch Aufsuchen größter gemeinsamer Teiler, eine Entscheidung zu fällen. Auch die *überführenden Substitutionen* sind *rational* zu finden. — Für gegebenes n kann man stets eine singuläre Formenschar von n Variablenpaaren konstruieren, welche die vorgeschriebenen Minimalgradzahlen und Elementarteiler besitzt.

Gehören die Koeffizienten der Grundformen A und B der Schar $\varrho_1 A + \varrho_2 B$ einem Rationalitätsbereiche Ω an und sind die Koeffizienten der Grundformen der äquivalenten Schar ebenfalls nur Zahlen aus dem nämlichen Bereich Ω, so kann man auch die Koeffizienten der die zwei Scharen ineinander überführenden Substitutionen aus dem Rationalitätsbereich Ω wählen. Will man nur im Rationalitätsbereich Ω operieren, so hat man als Basen einfacher Elementarteiler der Matrix

$$\left\| \varrho_1 a_{ik} + \varrho_2 b_{ik} \right\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

anstatt der linearen homogenen Funktionen $a\varrho_1 + b\varrho_2$ solche homogene Funktionen der zwei Variablen ϱ_1, ϱ_2 mit Koeffizienten aus Ω zu verwenden, die bezüglich des Rationalitätsbereiches Ω irreduzibel sind.

Die Untersuchung einer ganzzahligen Matrix, also die rein zahlentheoretische Behandlung unseres Gegenstandes, mit der unsere Darstellung anhebt, verdankt man Henry J. St. Smith (1861). Weierstraß' Ausgangspunkt und ausschließlicher Gegenstand der Untersuchung ist eine ordinäre Schar bilinearer Formen, für die er als charakteristisches Kennzeichen der Äquivalenz die einfachen Elementarteiler ersonnen hat. Inwieweit die Priorität der Entdeckung der Elementarteiler für Sylvester (1851) (*Coll. math. papers* **1**, 219) in Anspruch genommen werden kann, vgl. man bei Noether, *Math. Ann.* **50**, 137. Durch Sylvester angeregt, fand Cayley die oben erwähnte Ungleichung. Die Brücke zwischen den Untersuchungen von Smith und Weierstraß hat Frobenius geschlagen (*Journ. f. Math.* **86**, 146 (1879), **88**, 96 (1880), *Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1894), 31). Er hat die große Allgemeinheit des Begriffes „Elementarteiler" gezeigt; ihm verdankt man auch den für die ganze Theorie fundamentalen Satz IV, der für Matrices mit Elementen, die ganze Zahlen oder ganze Funktionen einer oder mehrerer Variablen mit beliebigen konstanten Koeffizienten oder Größen aus einem Rationalitätsbereich Ω sind, gilt. Die Untersuchung der singulären Scharen bilinearer Formen hat Kronecker während mehr als zwanzig Jahren beschäftigt, bis er zu dem oben angegebenen abschließenden Resultate gelangte.

Der Begriff „Elementarteiler" ist im voraufgehenden immer nur bei ganzen Zahlen oder bei ganzen Funktionen verwendet worden. Er läßt sich auch auf gebrochene Größen ausdehnen. Vgl. Hensel, *Journ. f. Math.* **115**, 259 (1895), sowie seine Bearbeitung der *Kroneckerschen Vorlesungen über Determinanten,* Vorl. 21.

Von Lehrbüchern sind vor allem Muth, *Theorie der Elementarteiler,* dann die eben zitierte *Vorlesung* von Kronecker und für die zahlentheoretischen Fragen Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen*, Leipzig 1898, S. 288, zu nennen.

Am Schlusse des § 6 wiesen wir darauf hin, daß zwei beliebige bilineare Formen gleichen Ranges nicht stets kogredient ineinander transformierbar sind. Für die kogrediente Transformation zweier bilinearer Formen gilt der Satz von Kronecker (*Monatsb. d. Berl. Akad.* (1874), *Ges. Werke* **1**, 423):

Damit zwei einzelne bilineare Formen A und B durch kogrediente Substitutionen ineinander transformiert werden können, ist notwendig und hinreichend, daß die zwei Scharen $\varrho_1 A + \varrho_2 A'$ und $\varrho_1 B + \varrho_2 B'$ äquivalent sind; A' und B' sind die zu A und B transponierten Formen (vgl. den einfachen Beweis von Frobenius, *Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1896), 14).

Zwei beliebige bilineare Formen, lineare homogene Substitutionen oder Matrices *sind nicht ähnlich* (vgl. S. 84). *Über die Ähnlichkeit zweier Systeme* geben wir noch folgendes:

Zwei Substitutionen sind dann und nur dann ähnlich, wenn ihre charakteristischen Funktionen die nämlichen Elementarteiler haben (Weierstraß, *Ges. Werke* **2**, 21 u. 22).

Die charakteristische Funktion $|\varrho E_i - C_i|$, wobei E_i die Einheitsmatrix e_i^{ten} Grades und C_i die Matrix

$$\begin{Vmatrix} c_i & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & c_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & c_i & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 1 & c_i \end{Vmatrix} \qquad \begin{matrix}(e_i \text{ Zeilen und} \\ e_i \text{ Kolonnen})\end{matrix}$$

oder die lineare homogene Substitution

$$y_{i1} = c_i x_{i1},\ y_{i2} = x_{i1} + c_i x_{i2},\ y_{i3} = x_{i2} + c_i x_{i3},\ \ldots,$$
$$y_{i\,e_i} = x_{i\,e_{i-1}} + c_i x_{i\,e_i}$$

ist, hat den *einzigen Elementarteiler* $(\varrho - c_i)^{e_i}$; die Determinante $|C_i|$ kann hierbei von Null verschieden sein oder auch verschwinden.

Jede lineare homogene Substitution oder Matrix C, deren charakteristische Funktion $|\varrho E - C|$ die Elementarteiler $(\varrho - c_1)^{e_1}$, $(\varrho - c_2)^{e_2}, \ldots, (\varrho - c_i)^{e_i}$ besitzt, ist der zerlegbaren Substitution oder Matrix $C_1 \dot{+} C_2 \dot{+} C_3 \dot{+} \cdots \dot{+} C_\tau$ (vgl. S. 92) *ähnlich; C_i* $(i = 1, 2, \ldots, \tau)$ *hat die obige Bedeutung.* Diese *Normalform* wird nur durch die Elementarteiler von $|\varrho E - C|$ bestimmt. Über die Verwertung dieser Normalform in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen vgl. etwa C. Jordan, *Cours d'analyse,* Paris 1896, **3**, 173, J. Horn, *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Samml. Schubert* **50**, Leipzig 1905, S. 68, L. Schlesinger, *Vorl. über die Theorie der linearen Differentialgleichungen,* Leipzig 1908, 8. Vorl.

Auch wenn die Substitution C Koeffizienten aus einem endlichen Körper mit p^s Größen, dem sogenannten $GF[p^s]$, hat (vgl. Kap. III, § 1), kann man für C Normalformen von der Art der obigen aufstellen. Vgl. C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques,* Paris 1870, S. 114—126, Frobenius, *Journ. f. Math.* **86**, 207 (1879), L. E. Dickson, *Linear groups, Teubners Samml.* **6**, Leipzig 1901, S. 221. Auch hier hängen die Normalformen mit dem Begriff „Elementarteiler“ zusammen; denn dieser ist auch noch anwendbar, wenn der Rationalitätsbereich Ω nicht mehr unendlich viele, sondern nur eine endliche Anzahl von Konstanten enthält, nämlich das $GF[p^s]$ ist.

Ist die Determinante $|C|$ einer linearen homogenen Substitution nicht gleich Null, so sind für $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$$(\varrho - c_1{}^k)^{e_1},\ (\varrho - c_2{}^k)^{e_2},\ \ldots,\ (\varrho - c_\tau{}^k)^{e_\tau}$$

die Elementarteiler der charakteristischen Funktion der Potenz C^k. Da die Elementarteilerexponenten $e_1, e_2, \ldots, e_\tau$ für alle Potenzen von C die nämlichen sind, lassen sich diese Exponenten auch durch das Studium der *von C und seinen positiven wie negativen Potenzen erzeugten zyklischen Gruppe* gewinnen. J. Wirth, *Freiburger Diss.* (1906).

§ 9. Die quadratischen und Hermiteschen Formen. Die alternierenden bilinearen Formen.

Eine *symmetrische bilineare Form*

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i y_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

wird zur *quadratischen Form:*

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

wenn man die zwei Variablenreihen x_i und y_i gleichsetzt.

Die zu der quadratischen Form

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

zugehörige symmetrische bilineare Form:

$$A = \frac{1}{2}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

heißt die *Polarform von f.* Zu der quadratischen Form f gehört die symmetrische Matrix

$$A = \| a_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Elementen $a_{ik} = a_{ki}$.

Die Determinante von A:

$$|A| = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

heißt die *Determinante* oder die *Diskriminante* der quadratischen Form; $2|A|$ ist die *Hessesche Determinante von f* (vgl. § 15).

Ist $A \neq 0$, so ist f eine *ordinäre,* sonst eine *singuläre quadratische Form.*

Die quadratische Form:

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} u_i u_k = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix},$$

bei der A_{ik} die algebraischen Adjungierten der Elemente a_{ik} in der Determinante $|A|$ sind, heißt die zu f *adjungierte quadratische Form* (Gauß, *Disquisitiones arithmeticae*, Artikel 267, *Ges. Werke* **1**, 301, hat für $-F$ die Bezeichnung „forma adjuncta").

Ist $|A| = 0$, so ist die adjungierte Form F das volle Quadrat einer linearen Form. Ist der Rang der Determinante $|A|$ kleiner als $n-1$, so verschwindet F identisch.

Für jede quadratische Form f besteht die Relation:

$$-|A|^{n-2} \cdot f = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Führt die lineare homogene Substitution P:

$$x_i = p_{i1}x_1' + p_{i2}x_2' + \cdots + p_{in}x_n' \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

die quadratische Form $\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i x_k$ *in die quadratische Form* $\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}x_i' x_k'$ *über, so gehen die Polarformen der zwei quadratischen Formen durch P und eine zu P kogrediente Substitution ineinander über. Es besteht die symbolische Gleichung $B = P'AP$, wobei P' die zu P transponierte Matrix ist.*

Hieraus folgt: *Die Determinante $|B|$ ist gleich $|P|^2 \cdot |A|$.*

Ferner ergibt sich:

Zwei quadratische Formen können dann und nur dann durch eine lineare homogene Substitution von nichtverschwindender Determinante ineinander übergeführt werden, wenn sie gleichen Rang l besitzen. Insbesondere kann jede quadratische Form vom Range l in die Normalform

$$a_1 x_1'^2 + a_2 x_2'^2 + \cdots + a_l x_l'^2,$$

wobei $a_1, a_2, \dots, a_l$ lauter nichtverschwindende, sonst beliebige Größen sind, transformiert werden.

Das Problem der Reduktion einer quadratischen Form auf eine *lineare Kombination von Quadraten* ist überall in Geometrie und Mechanik, wo quadratische Formen auftreten, von größter Bedeutung. Ein allgemein gültiges, besonders einfaches Verfahren, *jede* beliebige quadratische Form in eine Summe von

Quadraten umzuwandeln, besteht in einer sukzessiven Abtrennung von 1 oder 2 Quadraten (Baltzer, *Determinanten*, 5. Aufl., S. 175, J. A. Serret, *Algebra*, deutsche Ausg. von Wertheim, Leipzig 1878, S. 350). Diese Methode knüpft an Lagrange (*Œuvres* **1**, 7, *Recherches sur la méthode de maximis et minimis* (1759)) an und wird daher auch als „*Lagrangesche Transformation*" (Gundelfinger, *Journ. f. Math.* **91**, 221 (1881), ebenda **127**, 86 (1904)) bezeichnet.

Man kann die Variablen einer beliebigen quadratischen Form

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i x_k$$

vom Range l stets in einer solchen Reihenfolge mit

$$x_{\sigma_1},\ x_{\sigma_2},\ \ldots,\ x_{\sigma_l}$$

bezeichnen, daß

$$\Gamma_l = \sum \pm\, a_{\sigma_1\sigma_1}\, a_{\sigma_2\sigma_2} \ldots a_{\sigma_l\sigma_l}$$

von Null verschieden ist und in der Kette der Hauptunterdeterminanten:

$$\Gamma_l,\ \Gamma_{l-1} = \frac{\partial \Gamma_l}{\partial a_{\sigma_l}a_{\sigma_l}},\ \Gamma_{l-2} = \frac{\partial^2 \Gamma_l}{\partial a_{\sigma_l\sigma_l}\partial a_{\sigma_{l-1}\sigma_{l-1}}},$$

$$\ldots,\ \Gamma_2 = a_{\sigma_1\sigma_1}a_{\sigma_2\sigma_2} - a^2_{\sigma_1\sigma_2},\ \Gamma_1 = a_{\sigma_1\sigma_1},\ \Gamma_0 = 1$$

nie zwei unmittelbar aufeinanderfolgende gleichzeitig verschwinden (vgl. die beim letzten Satz über symmetrische Determinanten auf S. 63 angeführte Literatur).

Jede quadratische Form

$$f = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i x_k$$

vom Range l kann, falls ihre Variablen solcher Anordnung fähig sind, daß keine der Größen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$ verschwindet, in der Form:

$$\frac{X_1^2}{\Gamma_1} + \frac{X_2^2}{\Gamma_1\Gamma_2} + \frac{X_3^2}{\Gamma_2\Gamma_3} + \cdots + \frac{X_l^2}{\Gamma_{l-1}\Gamma_l}$$

dargestellt werden. Hierbei ist

$$X_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_1}},$$

$$X_\alpha = \begin{vmatrix} a_{\sigma_1 \sigma_1} & \ldots & a_{\sigma_1 \sigma_{\alpha-1}} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_1}} \\ a_{\sigma_2 \sigma_1} & \ldots & a_{\sigma_2 \sigma_{\alpha-1}} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_2}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{\sigma_\alpha \sigma_1} & \ldots & a_{\sigma_\alpha \sigma_{\alpha-1}} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_\alpha}} \end{vmatrix} \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots, l).$$

Die Funktion X_α enthält keine der $\alpha - 1$ Variablen $x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_{\alpha-1}}$. Diese Transformation bezeichnet man als Jacobische Transformation der quadratischen Form (Jacobi, *Journ. f. Math.* **53**, 265 (1857), *Ges. Werke* **3**, 583, hat diese Transformation allgemein für bilineare Formen aufgestellt).

Im Gegensatz zu der an Lagranges Namen anknüpfenden Methode, die ausnahmslos bei jeder quadratischen Form angewendet werden kann, involviert die Jacobische Transformation eine Annahme. Sie setzt voraus, die Variablen der quadratischen Form f lassen sich wenigstens auf eine Weise so anordnen, daß jede der Determinanten $\Gamma_l, \Gamma_{l-1}, \ldots, \Gamma_1, \Gamma_0$ von Null verschieden ist. Die Jacobische Transformation versagt z. B. schon bei quadratischen Formen f, deren Hauptelemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sämtlich verschwinden. Ist bei einer quadratischen Form die Jacobische Transformation anwendbar, so ist sie im Effekt mit Lagranges Reduktionsmethode identisch. Auch Gauß (*Ges. Werke* **4**, 37, **6**, 20, **7**a, 248) hat sich bei seinen astronomischen Untersuchungen der Jacobischen Transformation für quadratische Formen bedient. Ihre Ausdehnung auf bilineare Formen wie die explizite Darstellung der X_α durch die x_i ist Jacobis bleibendes Verdienst.

Eine quadratische Form kann auf unendlich viele Arten in eine Summe von Quadraten transformiert werden. Hat die gegebene Form *reelle* Koeffizienten und soll die auf die Variablen auszuführende Substitution *gleichfalls reell* sein, so gilt das von Sylvester (*Phil. Mag.* (1852), 142, *Phil. Trans.* (1853), 481, *Coll. math. papers* **1**, 380 u. 511) gefundene und von ihm sogenannte *Trägheitsgesetz der reellen quadratischen Formen: Auf welche Weise auch immer eine beliebige quadratische Form mit reellen Koeffizienten durch eine reelle lineare homogene Substitution von nichtverschwindender Determinante in die Normalform*

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_h'^2 - x_{h+1}'^2 - x_{h+2}'^2 \cdots - x_l'^2$$

transformiert wird, stets haben außer dem Range l die Anzahl h der Quadrate mit positiven Vorzeichen und folglich auch die Anzahl $l-h$ der Quadrate mit negativen Vorzeichen dieselben unveränderlichen Werte.

Das Trägheitsgesetz war bereits Riemann aus Gauß' Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate, die Riemann wahrscheinlich 1846/47 hörte, bekannt (Riemanns *Ges. Werke,* Nachträge, herausg. von M. Noether u. W. Wirtinger, Leipzig 1902, S. 59). Auch Jacobi war seit 1847, also vor Sylvesters Publikation, auf das Trägheitsgesetz gekommen, vgl. den posthumen Aufsatz von Jacobi, *Journ. f. Math.* **53**, 275 (1857), *Ges. Werke* **3**, 591, sowie den unmittelbar voraufgehend abgedruckten Aufsatz von Hermite (*Œuvres* **1**, 429) und die an diese Aufsätze anknüpfenden Bemerkungen von Borchardt (*Ges. Werke*, S. 469).

Die Zahl h kann durch irgendeine reelle Transformation der reellen quadratischen Form in eine Summe von Quadraten gefunden werden. Eine Bestimmung der Zahl h kann auf folgende Weise geschehen: Man ordne die Indices der reellen quadratischen Form

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i x_k$$

derartig, daß nie zwei aufeinanderfolgende der Determinanten

$$\Gamma_l, \Gamma_{l-1}, \Gamma_{l-2}, \ldots, \Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_0$$

gleichzeitig verschwinden (vgl. oben). Ist $\Gamma_k = 0$, so haben Γ_{k-1} und Γ_{k+1} entgegengesetzte Vorzeichen. Die reelle quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i x_k$$

enthält dann bei einer reellen Transformation in eine Summe von Quadraten genau ebensoviele negative Quadrate $(l-h)$, wie die Reihe der angegebenen Determinanten Vorzeichenwechsel aufweist; etwa vereinzelt auftretende Nullen sind fortzulassen (Gundelfinger, Zusätze zur dritten Auflage von Hesses *Vorl. üb. analyt. Geometrie d. Raumes,* Leipzig 1876, S. 460, *Journ. f. Math.* **91**, 225 (1881)).

An Stelle der Größen Γ kann man eine allgemeinere, von Darboux (*Journ. de math.* (2) **19**, 352 (1874), Gundelfinger, *Hesses Vorl.*, S. 459) stammende Kette von Determinanten zur

Bestimmung der Zahl h verwenden; in dieser Kette sind die Γ als Spezialfall enthalten. Auf S. 126 findet man noch ein Kriterium von Sylvester zur Bestimmung von h.

Die Zahl $2h-l$ heißt nach Frobenius, *Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, Journ. f. Math.* **114**, 187 (1895) die *Signatur* der reellen quadratischen Form. Frobenius gibt ein Verfahren zur Bestimmung der Signatur einer quadratischen Form, falls mehrere aufeinanderfolgende Determinanten Γ verschwinden. Diese Methode schränkt die vorherige Umordnung der Indices möglichst ein.

Die kleinere der zwei Zahlen h und $l-h$ heißt die *Charakteristik* der reellen quadratischen Form (A. Loewy, *Journ. f. Math.* **122**, 53 (1900)). Über Untersuchungen, die mit der Charakteristik der reellen quadratischen Formen zusammenhängen, vgl. S. 127 u. 136.

Ist die Charakteristik einer reellen quadratischen Form Null, so heißt eine Form von nichtverschwindender Determinante definit, von verschwindender Determinante semidefinit. Alle anderen reellen quadratischen Formen heißen *indefinit* (Gauß, *Disquisitiones arithmeticae,* Art. 271).

Eine definite quadratische Form nimmt nur Werte eines und desselben Vorzeichens an, welche reellen Werte man auch den Variablen beilegen mag; sie verschwindet nur, wenn man alle Variablen Null setzt. Eine semidefinite Form nimmt ebenfalls nur Werte eines und desselben Vorzeichens an; sie verschwindet aber auch, ohne daß man alle Variablen Null zu setzen braucht.

Ein wichtiges Problem ist es, zu entscheiden, *ob eine Schar quadratischer Formen mit beliebigen Koeffizienten*:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}(\varrho_1 a_{ik}+\varrho_2 b_{ik})x_i x_k$$

durch eine lineare homogene Substitution P:

$$x_i = p_{i1}x_1' + p_{i2}x_2' + \cdots + p_{in}x_n'$$

von nichtverschwindender Determinante in eine andere Schar

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}(\varrho_1 g_{ik}+\varrho_2 h_{ik})x_i' x_k'$$

transformiert werden kann. Ist dies der Fall, so führt die Substitution P die Scharen symmetrischer bilinearer Formen:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}(\varrho_1 a_{ik}+\varrho_2 b_{ik})\,x_i y_k$$

und

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}(\varrho_1 g_{ik}+\varrho_2 h_{ik})\,x_i' y_k'$$

als Polarformen kogredient ineinander über. Es gilt die symbolische Gleichung:

$$P'(\varrho_1 A+\varrho_2 B)\,P=\varrho_1 G+\varrho_2 H.$$

Mithin ergibt sich:

Alle für die Transformation der Scharen bilinearer Formen (vgl. S. 113 u. 114) *gefundenen Bedingungen sind auch für die Transformation der quadratischen Formen notwendig. Daß sie auch ausreichend sind, ist ein bemerkenswertes Resultat, das für Scharen von nichtverschwindender Determinante Weierstraß in seiner oben* (§ 8) *mehrfach zitierten Abhandlung aus dem Jahre 1868, für solche von verschwindender Determinante Kronecker* (abschließende Resultate, *Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1890), 1375, (1891), 9 u. 33) *gewonnen hat.* Man vgl. vor allem Frobenius' fundamentale Arbeit *„Über die kogredienten Transformationen der bilinearen Formen", Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1896), 7, dort wird der eigentliche Grund dieser merkwürdigen Erscheinung aufgedeckt.

Es gilt also der Satz:

Zwei Scharen quadratischer Formen, deren Determinanten nicht verschwinden, lassen sich dann und nur dann ineinander transformieren, wenn ihre Determinanten in den Elementarteilern übereinstimmen, bei solchen mit verschwindenden Determinanten ist außerdem noch die Gleichheit der Minimalgradzahlen erforderlich (vgl. hierzu die Darstellung bei Muth, *Theorie der Elementarteiler,* S. 125).

Damit sich die Schar quadratischer Formen

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}(\varrho_1 a_{ik}+\varrho_2 b_{ik})\,x_i x_k$$

von nichtverschwindender Determinante durch eine lineare homogene Substitution von nichtverschwindender Determinante in die Gestalt:

$$\varrho_1(g_1 x_1'^2+g_2 x_2'^2+\cdots+g_n x_n'^2)+$$
$$+\varrho_2(h_1 x_1'^2+h_2 x_2'^2+\cdots+h_n x_n'^2)$$

bringen läßt, wobei g_i *und* h_i *nie gleichzeitig verschwinden* $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante* $|\varrho_1 a_{ik} + \varrho_2 b_{ik}|$ *nur Elementarteiler mit den Exponenten 1 besitzt* (Weierstraß, *Ges. Werke* **2**, 41—42).

Ist in dem eben besprochenen Fall die Determinante von B ungleich Null, so braucht man nur

$$z_1 = \sqrt{h_1}\, x_1', \; z_2 = \sqrt{h_2}\, x_2', \; \ldots, \; z_n = \sqrt{h_n}\, x_n'$$

zu setzen, dann erhält man die quadratische Form:

$$W = \frac{g_1}{h_1} z_1^2 + \frac{g_2}{h_2} z_2^2 + \cdots + \frac{g_n}{h_n} z_n^2 = w_1 z_1^2 + w_2 z_2^2 + \cdots + w_n z_n^2$$

und die Einheitsform:

$$E = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2.$$

Die Größen

$$w_i = \frac{g_i}{h_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$|\varrho b_{ik} - a_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

wie aus der symbolischen Gleichung $P'(\varrho B - A) P = \varrho E - W$ folgt.

Ist die gegebene quadratische Form B die Einheitsform E, so folgt:

Man kann die Schar quadratischer Formen $\varrho_1 A + \varrho_2 E$ dann und nur dann in $\varrho_1 W + \varrho_2 E$ transformieren, falls alle Elementarteiler der charakteristischen Funktion $|\varrho E - A|$ die Exponenten 1 haben. Die sich ergebende symbolische Gleichung $P'P = E$ besagt (vgl. S. 130), daß die überführende Transformation P orthogonal ist. Mithin hat man das Resultat:

Eine beliebige quadratische Form kann dann und nur dann orthogonal in eine Summe von Quadraten transformiert werden, falls alle Elementarteiler der charakteristischen Funktion den Exponenten 1 besitzen.

Die orthogonale Transformation einer quadratischen Form A in eine Quadratsumme haben für den sogenannten allgemeinen Fall, in dem die charakteristische Gleichung von A nur verschiedene Wurzeln besitzt, bereits Cauchy (*Exercices de math.* **4**, (1829), *Œuvres* (2) **9**, 194) und Jacobi (*Journ. f. Math.* **12**, 1 (1834), *Ges. Werke* **3**, 191) zum Gegenstand eingehender Untersuchungen gemacht.

Die charakteristische Funktion einer *reellen* quadratischen Form (vgl. die Angaben über die Säkulargleichung auf S. 65) besitzt ausschließlich reelle Wurzeln und Elementarteiler mit den Exponenten 1. Hieraus folgt:

Jede reelle quadratische Form A kann reell orthogonal in die reelle quadratische Form $w_1 z_1^2 + w_2 z_2^2 + \cdots + w_n z_n^2$ transformiert werden; hierbei sind $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die reellen Wurzeln der Säkulargleichung $|A - \varrho E| = 0$.

Hat die charakteristische Funktion einer reellen quadratischen Form A von n Variablen die $l_1$fache Wurzel Null, so ist der Rang l von A gleich $n - l_1$. Nach dem Trägheitsgesetz ist die für A charakteristische Zahl h der positiven Quadrate gleich der Anzahl der positiven Wurzeln der Säkulargleichung, die Anzahl der negativen Quadrate gleich der Anzahl der negativen Wurzeln.

Eine Gleichung mit reellen Koeffizienten und lauter reellen Wurzeln besitzt genau soviel positive Wurzeln wie die Gleichung Zeichenwechsel hat (vgl. Kap. Algebra). Nun ist

$$|A - \varrho E| = (-1)^n \cdot (\varrho^n - T_1 \varrho^{n-1} + T_2 \varrho^{n-2} \cdots (-1)^n T_n).$$

Hierbei ist T_{n-s} die Summe der Hauptunterdeterminanten

$$\frac{\partial^s |A|}{\partial a_{i_1 i_1} \partial a_{i_2 i_2} \cdots \partial a_{i_s i_s}},$$

wobei $i_1, i_2, \ldots, i_s$ jede Kombination der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu s bedeutet. Es ist also $T_n = |A|$, $T_{n-1} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial |A|}{\partial a_{ii}}, \ldots,$ $T_1 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Die Zahl h der positiven Quadrate ist gleich der Anzahl der Vorzeichenfolgen der Determinantensummen $T_0 = 1, T_1, T_2, \ldots, T_n$[1]) (Satz von Sylvester, *Philos. Magazine* (1852), *Coll. math. papers* **1**, 380, vgl. Netto, *Vorl. über Algebra*, Leipzig 1896, S. 222, H. Weber, *Algebra* **1**, 311, Heffter, *Journ. f. Math.* **126**, 83 (1903), Gundelfinger, ebenda **127**, 85 (1904)).

Für beliebige Scharen quadratischer Formen von nichtverschwindender oder von verschwindender Determinante läßt sich stets eine Reduktion auf *kanonische* oder *Normalformen*

---

[1]) Abgesehen von den letzten Größen können in der angegebenen Kette nur isolierte T den Wert Null annehmen; die am Ende verschwindenden Glieder sind fortzulassen, die intermediär verschwindenden Größen sind nach Belieben positiv oder negativ zu zählen.

ausführen, deren Natur durch die Elementarteiler bestimmt wird. Zu vgl. Muth, *Theorie der Elementarteiler,* S. 124 u. 133.

Bei einer Schar reeller quadratischer Formen kann man aus den Charakteristiken (vgl. S. 123) der in der Schar enthaltenen Formen auf die Elementarteiler schließen:

Ist B eine reelle quadratische Form von nichtverschwindender Determinante, so genügen die Elementarteilerexponenten der Determinante der Form $A + \varrho B$, falls A eine reelle quadratische Form von verschwindender oder nichtverschwindender Determinante mit der Zahl q' als Wert der Charakteristik bedeutet und ϱ ein reeller variabler Parameter ist, der Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right) + \sum E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Hierbei ist $2\,s$ die Summe der Exponenten aller Elementarteiler, deren Basen für einen imaginären Wert des ϱ verschwinden; h durchläuft in der obigen Summe die Exponenten aller Elementarteiler, deren Basen von einem reellen, von Null verschiedenen Wert des ϱ annulliert werden, und h' nimmt die Werte der Exponenten aller Elementarteiler, die für $\varrho = 0$ verschwinden, an. $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die größte in $\frac{h}{2}$, $E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ die größte in $\frac{h'-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementarteiler ist gleich $n - l$, wenn B vom Range n, A vom Range l ist (A. Loewy, *Journ. f. Math.* **122**, 53 (1900)).

Hat A den Rang n, d. h. $|A| \neq 0$, so fällt in der Ungleichheit rechter Hand das Glied

$$\sum E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$$

fort (vgl. F. Klein, *Bonner Diss.* (1868), *Math. Ann.* **23**, 561 (1884), A. Loewy, ebenda **52**, 588 (1899), *Gött. Nachr.* (1900), 298).

Für $q' = 0$ und $|A| \neq 0$ (*definite Form*) ergibt die Ungleichheit $s = 0$, $h = 1$ (*Satz von Weierstraß*); für $q' = 0$ und $|A| = 0$ (*semidefinite Form*) erhält man $s = 0$, $h = 1$, $h' = 1$ oder 2 (Gundelfinger, Suppl. zu Hesses *analyt. Geometrie d. Raumes,* S. 515, Gundelfinger-Dingeldey, *Vorles. a. d. analyt. Geom. d. Kegelschnitte,* Leipzig 1895, S. 67, vgl. auch den bei Muth, *Theorie der Elementarteiler,* S. 184 behandelten Fall, daß die Determinante $|A + \varrho B|$ identisch verschwindet und A eine semidefinite Form ist). Wir formulieren noch den *Satz von Weierstraß* (*Ges. Werke* **1**, 233, **2**, 42, **3**, 139), der die im § 3 besprochenen Resultate über die Säkulargleichung als Spezialfall umfaßt:

Enthält eine Schar reeller quadratischer Formen eine definite Form, so besitzt die Determinante der Schar ausschließlich reelle Elementarteiler mit den Exponenten 1.

Mit der *reellen Transformation zweier Scharen reeller quadratischer Formen ineinander* beschäftigt sich Muth, *Journ. f. Math.* **128**, 302 (1904).

Außer der bereits erwähnten Literatur sei noch die Monographie von Bromwich, *Quadratic forms and their classification by means of invariant factors,* Cambridge tracts (1906) genannt.

Die voraufgehenden Untersuchungen sind auch auf *Hermitesche Formen* ausdehnbar. Die Hermitesche Form

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i \bar{x}_k,$$

bei der a_{ik} und a_{ki} konjugiert imaginär, a_{ii} reelle Größen sind, nimmt für konjugiert imaginäre Werte x_i und $\bar{x}_i$ nur reelle Werte an. Sie kann auf unendlich viele Arten durch zwei Substitutionen:

$$x_i = p_{i1} x_1' + p_{i2} x_2' + \cdots + p_{in} x_n'$$

und

$$\bar{x}_i = \bar{p}_{i1} \bar{x}_1' + \bar{p}_{i2} \bar{x}_2' + \cdots + \bar{p}_{in} \bar{x}_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei p_{ik} und $\bar{p}_{ik}$ konjugiert imaginäre Größen sind und die Determinante $|p_{ik}| \neq 0$ ist, in die *Normalform:*

$$x_1' \bar{x}_1' + x_2' \bar{x}_2' + \cdots + x_h' \bar{x}_h' - x_{h+1}' \bar{x}_{h+1}' - x_{h+2}' \bar{x}_{h+2}' - \cdots - x_l' \bar{x}_l'$$

transformiert werden.

Ebenso wie für reelle quadratische Formen gilt auch für Hermitesche Formen das *Trägheitsgesetz: Wie auch immer eine Hermitesche Form durch konjugiert imaginäre Substitutionen in die Normalform übergeführt wird, stets haben die zwei Zahlen h (Trägheitsindex) und l (Rang) dieselben unveränderlichen Werte* (Hermite, *Journ. f. Math.* **52**, 40 (1856), *Œuvres* **1**, 397, Frobenius, *Journ. f. Math.* **95**, 265 (1883)).

Die auf S. 127 besprochene Ungleichung

$$q' \geqq s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right) + \sum E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$$

bleibt auch unverändert gültig, wenn A und B anstatt reeller quadratischer Formen Hermitesche Formen sind (A. Loewy, *Journ. f. Math.* **122**, 67 (1900)). Wegen dieser Ungleichung vgl. auch Loewy, *Journ. f. Math.* **123**, 258 (1901), Bromwich, *Proc. Lond. M. S.* **32**, 349 (1900).

Auch die *alternierenden* bilinearen Formen sind eingehend untersucht worden. Die Determinante einer alternierenden bilinearen Form ist stets von geradem Rang (vgl. S. 64). Jede alternierende bilineare Form, deren Determinante den Rang $2r$ hat, kann durch kogrediente Substitutionen der zwei Variablenreihen in die Normalform

$$x_1' y_2' - x_2' y_1' + x_3' y_4' - x_4' y_3' + \cdots + x_{2r-1}' y_{2r}' - x_{2r}' y_{2r-1}'$$

übergeführt werden.

Der $2\lambda^{\text{te}}$ Elementarteiler einer alternierenden bilinearen Form

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} d_{ik} x_i y_k \qquad (d_{ik} = -d_{ki},\ d_{ii} = 0),$$

deren Koeffizienten d_{ik} ganze Zahlen oder ganze Funktionen eines Parameters ϱ sind, ist gleich dem $(2\lambda - 1)^{\text{ten}}$. Der $2\lambda^{\text{te}}$ Determinantenteiler $T_{2\lambda}$ (vgl. S. 105, Zeile 5) ist daher ein Quadrat (Verallgemeinerung des Cayleyschen Satzes auf S. 64).

Sind zwei alternierende bilineare Formen, deren Koeffizienten ganzzahlig oder ganze Funktionen eines Parameters ϱ sind, im Sinne der Festsetzungen auf S. 109 u. 110 äquivalent, so kann man die Formen stets kogredient ineinander transformieren.

Sind bei zwei Scharen bilinearer Formen $\varrho_1 A + \varrho_2 B$ und $\varrho_1 F + \varrho_2 G$ die Weierstraß-Kroneckerschen Bedingungen der Äquivalenz erfüllt und sind A und F symmetrisch, B und G alternierend, so sind die Scharen ebenso, wie wenn sie ausschließlich symmetrische oder ausschließlich alternierende Formen enthalten, kogredient ineinander transformierbar.

Die über alternierende Formen angegebenen Sätze stammen von Kronecker, *Monatsb. d. Berl. Akad.* (1874) 397, *Ges. Werke* **1**, 423 und Frobenius, *Journ. f. Math.* **86**, 165 u. 202, *Sitzungsb.*

d. Berl. Akad. (1896), 7. Vgl. ferner: E. v. Weber, *Sitzungsb. d. Bayer. Akad.* (1898), 369, Muth, *Theorie der Elementarteiler*, S. 134, *Journ. f. Math.* **122**, 89 (1900), Bromwich, *Am. J. math.* **23**, 235 (1901).

§ 10. Orthogonale Substitutionen und automorphe Transformationen quadratischer, Hermitescher und bilinearer Formen.

Bedeuten p_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ n^2 Größen, zwischen denen die $\frac{n(n+1)}{2}$ Relationen:

$$p_{i1}^2 + p_{i2}^2 + \cdots + p_{in}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$p_{i1}p_{j1} + p_{i2}p_{j2} + \cdots + p_{in}p_{jn} = 0 \quad (i \gtrless j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen, so heißt die lineare homogene Substitution:

$$x_i = p_{i1}x_1' + p_{i2}x_2' + \cdots + p_{in}x_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

orthogonal. Der Name stammt daher, weil die obigen Formeln für $n = 2$, $n = 3$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem in ein ebensolches transformieren. Die Betrachtung orthogonaler Substitutionen ist von Euler (*Nov. Comm. Petrop.* **15**, 75 (1771) u. **20**, 189 u. 208 (1776), vgl. auch Jacobi, *Bemerkungen zu einer Abh. Eulers über die orthogonale Substitution* (Nachlaß), *Ges. Werke* **3**, 601) begonnen worden.

Die obigen $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen können gleichwertig durch die $\frac{n(n+1)}{2}$ Relationen (Euler, *Nov. Comm. Petrop.* **15**, 93)

$$p_{1i}^2 + p_{2i}^2 + \cdots + p_{ni}^2 = 1,$$

$$p_{1i}p_{1j} + p_{2i}p_{2j} + \cdots + p_{ni}p_{nj} = 0 \ (i \gtrless j)$$

ersetzt werden.

Ist P die Matrix der Koeffizienten, so wird eine orthogonale Substitution durch *jede der symbolischen Gleichungen* $P'P = E$ oder $PP' = E$ oder $P' = P^{-1}$ definiert; E ist die Einheitsmatrix und P' die zu P transponierte Matrix.

Die symbolische Gleichung $P'P = E$ besagt:

Jede orthogonale Substitution führt die spezielle quadratische Form:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

in sich selbst über.

Aus $P^{-1} = P'$ folgt, daß die *zu P reziproke Substitution:*

$$x_i' = p_{1i} x_1 + p_{2i} x_2 + \cdots + p_{ni} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

lautet (Lagrange, *Mécanique analytique, Œuvres* **12**, 205, vgl. Jacobi, *Ges. Werke* **3**, 603, ferner Cauchy, *Exercices de math.* **4** (1829), *Œuvres* (2) **9**, 193 u. 194).

Daher ist die *algebraische Adjungierte eines Elementes einer orthogonalen Substitution gleich dem Element selbst, wenn man es mit der Substitutionsdeterminante multipliziert* (Lagrange, *Œuvres* **12**, 206, Jacobi, *Journ. f. Math.* **12**, 9 (1834), *Ges. Werke* **3**, 201).

Die Determinante einer orthogonalen Substitution hat den Wert $+1$ *oder* -1 (Lagrange u. Jacobi, a. a. O.).

Eine orthogonale Substitution der Determinante $+1$ heißt *eigentlich orthogonal,* eine solche der Determinante -1 *uneigentlich orthogonal.*

Das Produkt zweier orthogonaler Substitutionen gleicher (ungleicher) Art ist eine eigentliche (uneigentliche) orthogonale Substitution.

Die charakteristische Gleichung

$$f(\varrho) = |\varrho \delta_{ik} - p_{ik}| = 0$$

einer orthogonalen Substitution mit den Koeffizienten p_{ik} *ist eine reziproke Gleichung* (Brioschi, *Journ. de math.* **19**, 253 (1854), *Faà di Bruno,* ebenda 304). Weiteren Aufschluß über die Natur von $f(\varrho)$ gibt der Satz von Frobenius (*Journ. f. Math.* **84**, 48 (1878)): *Die Elementarteiler der charakteristischen Funktion* $f(\varrho)$ *irgendeiner orthogonalen Substitution sind paarweise von gleichem Grade und für reziproke Werte Null, mit Ausnahme derjenigen, die für den Wert* $+1$ *und* -1 *verschwinden und einen ungeraden Exponenten haben. Ist umgekehrt* $f(\varrho)$ *ein Produkt von Elementarteilern der angegebenen Beschaffenheit, so gibt es eine orthogonale Substitution, deren charakteristische Funktion in die nämlichen Elementarteiler wie* $f(\varrho)$ *zerfällt.*

Aus dem allgemeinen Frobeniusschen Satz folgt das von einigen Autoren sogenannte *Stieltjessche Theorem* (*Acta math.* **6**, 319 (1885)) als Spezialfall (zu vgl. Voss, *Abh. d. Bayer. Akad.* (1890), 261): *Sind* a_{ik} *und* b_{ik} *die Elemente zweier orthogonaler Substitutionen gleichen Grades n, die beide* *zugleich eigentlich (uneigentlich) sind, und ist die Determinante mit dem allgemeinen Element $a_{ik} + b_{ik}$ Null, so sind auch alle ihre Unterdeterminanten vom $n - 1^{ten}$ Grade Null.*

Ist die Determinante einer orthogonalen Substitution $|p_{ik}| = \varepsilon$ und ist -1 eine $q$fache und $+1$ eine $p$fache Wurzel von $f(\varrho) = 0$, so ist, wie sich aus dem Brioschischen Satz ergibt:

$$(-1)^q = \varepsilon, \quad (-1)^p = \varepsilon\,(-1)^n.$$

Eine unmittelbare Folge des Satzes von Frobenius ist das in der *Encycl. des sc. math.* **1**, 121 besonders hervorgehobene Resultat: Die ersten nichtverschwindenden Unterdeterminanten der Matrix

$$f(-1) = (-1)^n \,\|\,\delta_{ik} + p_{ik}\,\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind bei einer eigentlichen orthogonalen Substitution vom Grad $n - 2\lambda$, bei einer uneigentlichen vom Grad $n - 2\lambda - 1$, wobei λ eine ganze positive Zahl oder Null ist.

Ist T irgendeine alternierende Matrix, d. h. eine solche mit den Elementen $t_{ik} = -t_{ki}$ $(t_{ii} = 0)$ und verschwindet die Determinante $|\,\delta_{ik} + t_{ik}\,|$ $(\delta_{ii} = 1,\ \delta_{ik} = 0)$ nicht, so ist die *zu der Matrix:*

$$(E + T)^{-1} \cdot (E - T) = -E + 2\,(E + T)^{-1}$$

zugehörige Substitution eigentlich orthogonal. Ihre Koeffizienten lauten:

$$p_{ik} = \frac{2\beta_{ki}}{D}, \quad p_{ii} = \frac{2\beta_{ii} - D}{D};$$

hierbei ist

$$\beta_{ik} = \frac{\partial D}{\partial d_{ik}}$$

und D die Determinante $|\,d_{ik}\,| = |\,\delta_{ik} + t_{ik}\,|$. Die Determinante $|\,p_{ik} + \delta_{ik}\,|$ verschwindet nicht (*Cayleysche Formeln,* Cayley, *Journ. f. Math.* **32**, 120 (1846), *Coll. math. papers* **1**, 333, Frobenius, *Journ. f. Math.* **84**, 37 u. 50 (1878), sowie die Darstellung bei Baltzer, *Determinanten*, 5. Aufl., S. 190).

Umgekehrt: *Jede eigentliche orthogonale Substitution mit Koeffizienten p_{ik} und nichtverschwindender Determinante $|\,p_{ik} + \delta_{ik}\,|$ läßt sich in die obige Gestalt bringen, so daß die Koeffizienten p_{ik} als rationale Funktionen von $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Parametern t_{ik} erscheinen.*

Die Cayleyschen Formeln versagen für alle uneigentlichen orthogonalen Substitutionen und für alle eigentlichen orthogonalen

Substitutionen, deren charakteristische Funktion -1 *zur Wurzel hat.* Jede orthogonale Substitution, die sich der Cayleyschen Darstellung entzieht, läßt sich in die Form eines Produktes einer durch die Cayleyschen Formeln gegebenen orthogonalen Substitution und einer Substitution der Form $x_i = \varepsilon_i x_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bringen, wobei die n Größen ε_i die positive oder negative Einheit bedeuten. Alle eigentlichen orthogonalen Substitutionen lassen sich auch aus den Cayleyschen Formeln durch Grenzübergang ableiten. Eine Behandlung der Ausnahmefälle bei Frobenius, *Journ. f. Math.* **84**, 42, Lipschitz, *Über Summen von Quadraten,* Bonn 1886, Kronecker, *Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1890), *Ges. Werke* **3**, 369, Prym, *Abh. d. Gött. Akad.* **38**, 1 (1892); vgl. auch die älteren Untersuchungen von Voss, *Math. Ann.* **13**, 320 (1878).

Sind sämtliche Elemente einer orthogonalen Substitution reell, *so ist die Gleichung:*

$$f(\varrho) = \begin{vmatrix} \varrho - p_{11} & -p_{12} & \cdots & -p_{1n} \\ -p_{21} & \varrho - p_{22} & \cdots & -p_{2n} \\ \vdots & & & \\ -p_{n1} & -p_{n2} & \cdots & \varrho - p_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

nicht nur eine reziproke Gleichung, sondern sie hat die zwei weiteren Eigenschaften, nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1 *zu besitzen und in lauter Elementarteiler mit den Exponenten* 1 *zu zerfallen, d. h. für jede m fache Wurzel verschwinden auch alle Unterdeterminanten* $n - 1^{ter}$, $n - 2^{ter}$, *bis* $n - m + 1^{ter}$ *Ordnung der linksstehenden Determinante* (Stickelberger, *Über reelle orthogonale Substitutionen,* Programm d. Züricher Polytechnikums, 1877, vgl. auch Frobenius, *Journ. f. Math.* **84**, 52, sowie die Darstellung bei Muth, *Theorie der Elementarteiler,* S. 173).

Die für reelle orthogonale Substitutionen angegebenen Resultate bleiben auch noch unverändert weiter bestehen, wenn man verlangt, die Substitution:

$$x_i = p_{i1} x_1' + p_{i2} x_2' + \cdots + p_{in} x_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

soll mit ihrer konjugiert imaginären:

$$\bar{x}_i = \bar{p}_{i1} \bar{x}_1' + \bar{p}_{i2} \bar{x}_2' + \cdots + \bar{p}_{in} \bar{x}_n'$$

die Form

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

mit konjugiert imaginären Variablen x_i und $\bar{x}_i$ in sich transformieren (Frobenius, *Journ. f. Math.* **95**, 265 (1883), A. Loewy, *C. R.* **123** (1896), *Nova Acta Leop.* **71**, 387 (1898), *Math. Ann.* **50**, 560 (1898)).

Sei T eine Matrix mit den Elementen t_{ik}, welche die Bedingung erfüllt, daß erstens die Determinante $|t_{ik} + \delta_{ik}| \neq 0$ ist und zweitens die mit der imaginären Einheit multiplizierte Matrix T eine Hermitesche Form definiert, d. h.

$$t_{ik} = c_{ik} + \sqrt{-1}\, d_{ik},\ c_{ik} = -c_{ki},\ d_{ik} = d_{ki} \text{ für } i \gtrless k,\ t_{ii} = \sqrt{-1}\, d_{ii},$$

wobei c_{ik}, d_{ik}, d_{ii} beliebige reelle Größen sind, so führt die zu der Matrix:

$$e^{\varphi\sqrt{-1}}(E+T)^{-1}(E-T) = e^{\varphi\sqrt{-1}}(-E + 2(E+T)^{-1})\,^{1)}$$

zugehörige lineare homogene Substitution in Verbindung mit ihrer konjugiert imaginären die Form

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

in sich über. Die Substitutionskoeffizienten lauten:

$$p_{ik} = \frac{2\beta_{ki}e^{\varphi\sqrt{-1}}}{D},\quad p_{ii} = \frac{2\beta_{ii} - D}{D}\cdot e^{\varphi\sqrt{-1}},$$

$$\beta_{ik} = \frac{\partial D}{\partial d_{ik}},\quad D = |d_{ik}| = |t_{ik} + \delta_{ik}|;$$

φ ist eine beliebige reelle Größe, δ_{ik} das Kroneckersche Symbol. *Diese Formeln — ein Analogon zu den Cayleyschen — stellen ohne Ausnahme* jede *Substitution dar, die mit ihrer konjugiert imaginären die Form*

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

in sich transformiert (A. Loewy, *C. R.* **123** (1896), *Nova Acta Leop.* **71**, 393).

Die linearen homogenen Substitutionen P, die gemeinsam mit ihren konjugiert imaginären die Form $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$ in sich transformieren, sind durch jede der Relationen $\bar{P}'P = E$ oder $P\bar{P}' = E$ oder $\bar{P}' = P^{-1}$ definiert. Die symbolische Glei-

1) e ist die Exponentielle.

chung $P\bar{P}' = E$ ist mit den $\frac{n(n+1)}{2}$ gewöhnlichen Gleichungen:

$$p_{i1}\bar{p}_{i1} + p_{i2}\bar{p}_{i2} + \cdots + p_{in}\bar{p}_{in} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$p_{i1}\bar{p}_{j1} + p_{i2}\bar{p}_{j2} + \cdots + p_{in}\bar{p}_{jn} = 0 \qquad \binom{i \gtrless j,\, i = 1, 2, \ldots, n}{j = 1, 2, \ldots, n}$$

gleichbedeutend. Mit diesen Formeln hängt die auch für die Theorie der Integralgleichungen (Fredholm, *Acta math.* **27**, 367 (1903)) wichtige Frage nach dem *Maximalwert des absoluten Betrages irgendeiner Determinante* innig zusammen. Bezeichnet man den Ausdruck $p_{i1}\bar{p}_{j1} + p_{i2}\bar{p}_{j2} + \cdots + p_{in}\bar{p}_{jn}$ mit P_{ij} $(i \gtreqless j, i, j = 1, 2, \ldots, n)$, so ist der absolute Betrag *irgendeiner* Determinante $|P|$ gleich oder kleiner als die Quadratwurzel aus dem Produkt der n positiven Größen $P_{11}, P_{22}, \ldots, P_{nn}$, also $|P| \cdot |\bar{P}| \leqq P_{11} \cdot P_{22} \cdots P_{nn}$. Sind die Größen $P_{11} = P_{22} = \cdots = P_{nn} = 1$, so erreicht der absolute Betrag der Determinante $|P|$ dann und nur dann seinen Maximalwert 1, falls die $\frac{n(n-1)}{2}$ Größen P_{ij} $(i \gtrless j)$ verschwinden, d. h. P gemeinsam mit der konjugiert imaginären Substitution die Form $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$ in sich transformiert (Hadamard, *Bull. sc. math.* (2) **17**, 240 (1893), Wirtinger, ebenda (2) **31**, 175 (1907), Davis, *Bull. Am. M. S.* **14**, 17 (1907), E. Fischer, Arch. f. Math. (3) **13**, 32 (1908), Pascal, *Determinanten,* S. 180).

Als Verallgemeinerung der orthogonalen Substitutionen hat zuerst Hermite (*Journ. f. Math.* **47**, 309 (1854), *Œuvres* **1**, 195) für $n = 3$ diejenigen linearen homogenen Transformationen

$$x_i = p_{i1}x_1' + p_{i2}x_2' + \cdots + p_{in}x_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

betrachtet, die eine gegebene quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_i x_k$$

in sich, oder wie man mit Cayley (*Phil. Trans.* **148** (1858), *Coll. math. papers* **2**, 497) sagt, *automorph transformieren.*

Ist die Determinante der quadratischen Form ungleich Null, so hat die Determinante

$$|p_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

den Wert ± 1, ferner existiert, wie bereits Cayley (*Journ. f.*

Math. **50**, 288 (1855), *Coll. math. papers* **2**, 192; vgl. auch ebenda **2**, 497) zeigte, eine seinen für orthogonale Substitutionen gefundenen Formeln ähnliche Darstellung, schließlich bleibt der Satz von Frobenius über die Elementarteiler der charakteristischen Funktion $f(\varrho)$ gültig (Frobenius, *Journ. f. Math.* **84**, 41).

Als neueste Literatur über die Transformation einer quadratischen Form in sich sei angeführt: Percey F. Smith, *Trans. Am. M. S.* **6**, 1 (1905). Von Lehrbüchern sei verwiesen auf Muth, *Theorie der Elementarteiler,* S. 160, Bachmann, *Arithmetik der quadratischen Formen,* S. 395; schließlich vgl. man Franz Meyer, *Invariantentheorie in der Enzyklopädie der math. Wiss.* **1**, 333.

Soll eine *reelle quadratische Form reell* in sich transformiert werden, so gilt der Satz (A. Loewy, *Nova Acta Leop.* **71**, 396, 427, *Math. Ann.* **50**, 562, 569, *Gött. Nachr.* (1900), Bromwich, *Proc. Lond. M. S.* **32**, 350 (1900)):

Für jede lineare homogene Substitution P mit reellen Koeffizienten p_{ik}, die eine reelle quadratische Form von nichtverschwindender Determinante mit der Charakteristik q' (vgl. S. 123) in sich überführt, gilt die Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right).$$

$2s$ ist die Summe der Exponenten aller derjenigen Elementarteiler der charakteristischen Funktion $|\varrho\delta_{ik} - p_{ik}|$ der linearen homogenen Substitution P, welche für Größen, die nicht vom absoluten Betrage 1 sind, verschwinden. h durchläuft die Exponenten sämtlicher Elementarteiler der charakteristischen Funktion der Substitution P, welche für Größen vom absoluten Betrage 1 verschwinden. $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die größte in $\frac{h}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

Ist $q' = 0$, d. h. die reelle quadratische Form ist definit, so wird $s = 0$, $h = 1$; in diesem Spezialfall ist *der Stickelbergersche Satz für reelle orthogonale Substitutionen* (vgl. S. 133) enthalten.

Die *automorphe Transformation einer bilinearen Form*

$$B = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik} x_i y_k$$

mit kogredienten Variablen x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch zwei kogrediente Substitutionen:

$$x_i = p_{i1} x_1' + p_{i2} x_2' + \cdots + p_{in} x_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$y_i = p_{i1} y_1' + p_{i2} y_2' + \cdots + p_{in} y_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ist eingehend von A. Voss, *Abh. d. Bayer. Akad.* (1890), behandelt worden. Es handelt sich um die Gleichung $P'BP = B$. Als Lösungen führt bereits Cayley (*Coll. math. papers* **2**, 503, Abs. 14) an: $P = B^{-1}(B - T)(B + T)^{-1}B$, wobei T der Gleichung $B^{-1}T + (B')^{-1}T' = 0$ genügt (vgl. Voss, a. a. O., S. 305).

Die automorphe Transformation einer beliebigen bilinearen Form

$$B = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik} \bar{x}_i x_k$$

mit konjugiert imaginären Variablen durch zwei Substitutionen:

$$x_i = p_{i1} x_1' + p_{i2} x_2' + \cdots + p_{in} x_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\bar{x}_i = \bar{p}_{i1} \bar{x}_1' + \bar{p}_{i2} \bar{x}_2' + \cdots + \bar{p}_{in} \bar{x}_n' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei stets g und $\bar{g}$ konjugiert imaginäre Größen bedeuten, behandelt A. Loewy, vgl. Zitat S. 136. Es handelt sich um die symbolische Gleichung $\bar{P}'BP = B$. Sind im besonderen b_{ik} und b_{ki} konjugiert imaginäre Größen, d. h. ist

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik} \bar{x}_i x_k$$

eine Hermitesche Form, so gilt für den Zusammenhang zwischen den Elementarteilern der Substitution P und der Charakteristik q' der Hermiteschen Form B die nämliche Ungleichheit wie bei der reellen automorphen Transformation einer reellen quadratischen Form, ferner finden ähnliche ausnahmslos gültige Formeln wie bei der automorphen Transformation der Hermiteschen Einheitsform $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$ statt. Geometrische Anwendungen der automorphen Transformation Hermitescher Formen bei Study, *Math. Ann.* **60**, 321 (1905).

§ 11. Abgeleitete Matrices. Frankesche und Sylvestersche Sätze. Laplacescher und Jacobischer Satz. Potenztransformation. Produkttransformation. Lineare homogene Substitutionen, die eine Determinante in sich überführen.

Zu jeder quadratischen Matrix $A = \| a_{ik} \| \; {\scriptstyle (i, k = 1, 2, \ldots, n)}$ gehören $\binom{n}{m}^2$ Determinanten

$$\sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \ldots a_{g_m h_m} \qquad (g_1 < g_2 < \cdots < g_m;\; h_1 < h_2 < \cdots < h_m)$$

(vgl. S. 56). Um diese Unterdeterminanten der Determinante $|A| = |a_{ik}| \; {\scriptstyle (i, k = 1, 2, \ldots, n)}$ passend bezeichnen zu können, denken wir uns die $\lambda = \binom{n}{m}$ Kombinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu m in eine beliebige, aber fest gewählte Reihenfolge gebracht. Ist in der eingeführten Anordnung $g_1, g_2, \ldots, g_m$ die G^{te} und $h_1, h_2, \ldots, h_m$ die H^{te} Kombination, so sei die Determinante

$$\sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \ldots a_{g_m h_m}$$

mit $C_{GH}^{(m)}$ bezeichnet. Aus den $\lambda^2 = \binom{n}{m}^2$ Determinanten $C_{GH}^{(m)}$ sei die Matrix

$$\begin{Vmatrix} C_{11}^{(m)} & C_{12}^{(m)} & \ldots & C_{1\lambda}^{(m)} \\ C_{21}^{(m)} & C_{22}^{(m)} & \ldots & C_{2\lambda}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\lambda 1}^{(m)} & C_{\lambda 2}^{(m)} & \ldots & C_{\lambda\lambda}^{(m)} \end{Vmatrix}$$

gebildet, die wir mit $C_m(A)$ bezeichnen.

$C_m(A)$ heißt *das m^{te} abgeleitete System der Matrix A* (Kronecker, *Vorl. üb. Determinanten,* S. 320). Bei natürlicher Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist das erste abgeleitete System $C_1(A)$ mit A identisch, das letzte abgeleitete System $C_n(A)$ ist die Determinante $|A|$. Nach Henry J. St. Smith (*Proc. Royal Soc.* **12** (1864), *Coll. math. papers* **1**, 412), der sich zuerst mit den abgeleiteten Systemen beschäftigt hat, heißt $C_m(A)$ die *m^{te} Concomitante von A;* später bezeichnete er (*Coll. math. papers* **2**, 625) $C_m(A)$ als die *$m-1^{te}$ adjungierte Matrix* von $C_1(A)$. Nach Bachmann, *Die Arithmetik* *der quadratischen Formen,* Leipzig 1898, S. 389, würde man die Systeme $C_m(A)$ *begleitende Matrices* nennen. Dickson, *Linear groups, Teubners Samml.* **6**, Leipzig 1901, S. 146, verwendet englischem Sprachgebrauch gemäß (vgl. etwa Spottiswoode, *Journ. f. Math.* **51**, 350) die Bezeichnung *„the* m^{th} *compound"*. C. Stephanos, *Journ. de math.* (5) **6**, 73 (1900) nennt $C_m(A)$ *le produit bialterné de m formes A*. In der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen begegnet man $C_m(A)$ unter dem Namen *„$n - m^{tes}$ assoziiertes System"* (vgl. L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen,* Leipzig 1897, $\mathbf{2}_1$, 128, A. Loewy, *Sitzungsb. d. Bayer. Akad.* **32**, 3 (1902)). Für die abgeleiteten Systeme gelten folgende Lehrsätze:

I. Sind A_1 und A_2 zwei beliebige Matrices gleichen Grades n, so ist das Produkt von $C_m(A_1)$ und $C_m(A_2)$ gleich der m^{ten} abgeleiteten Matrix des Produktes $A_1 A_2$, also

$$C_m(A_1)\, C_m(A_2) = C_m(A_1 A_2).$$

II. Ist A die Einheitsmatrix, so ist auch $C_m(A)$ die Einheitsmatrix.

Aus Lehrsatz I und II folgt:

III. Die m^{te} abgeleitete Matrix der reziproken Matrix von A ist gleich der reziproken Matrix der m^{ten} Abgeleiteten von A, also

$$C_m(A^{-1}) = (C_m(A))^{-1}.$$

IV. Die m^{te} abgeleitete Matrix der transponierten Matrix von A ist gleich der transponierten Matrix der m^{ten} abgeleiteten Matrix von A, also

$$C_m(A') = (C_m(A))'.$$

V. Man erhält die $\binom{n}{m}$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $C_m(A)$, d. h. der Gleichung $|\varrho E - C_m(A)| = 0$, indem man die n Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A zu je m kombiniert und miteinander multipliziert (W. H. Metzler, *Am. J. math.* **16**, 145 (1894), G. Rados, *Math. Ann.* **48**, 417 (1897), W. Burnside, *Quart. J.* **32**, 84 (1901)).

Aus Lehrsatz V folgt der sogenannte Satz von Franke (*Journ. f. Math.* **61**, 353 (1863)): Die Determinante von $C_m(A)$ ist die $\binom{n-1}{m-1}^{te}$ Potenz der Determinante von A, also

$$|C_m(A)| = |A|^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

Dieser Satz ist aber bereits vor Franke von Spottiswoode (*Journ. f. Math.* **51**, 360 (1856)) ausgesprochen worden. Das von Spottiswoode a. a. O. gegebene Zitat (*Phil. Mag.* (1851)) bezieht sich auf eine Arbeit von Sylvester (*Coll. math. papers* **1**, 249), vgl. auch die Note von Baker, ebenda S. 650, ferner die Anmerkung von Borchardt zur Arbeit von Franke, *Journ. f. Math.* **61**, 355. Der fälschlich nach Franke genannte Satz ist nämlich nur ein Spezialfall eines *allgemeinen von Sylvester* a. a. O. *gegebenen Theorems,* das folgendermaßen lautet:

Aus der Matrix $C_{k+m}(A)$ sei eine Determinante gebildet, deren Elemente nur alle $\sigma^2 = \binom{n-k}{m}^2$ Determinanten

$$C_{GH}^{(k+m)} = \sum \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}\, a_{g_1 h_1}\, a_{g_2 h_2} \ldots a_{g_m h_m}$$

sind, bei denen $g_1, g_2, \ldots, g_m$ und $h_1, h_2, \ldots, h_m$ jede Kombination der Zahlen $k+1, k+2, \ldots, n$ zu m bedeuten. Die fragliche Determinante $\left| C_{GH}^{(k+m)} \right|$ $(G, H = 1, 2, \ldots, \sigma)$ hat den Wert

$$A_k^{\binom{n-k-1}{m}} \cdot |A|^{\binom{n-k-1}{m-1}},$$

wobei

$$A_k = \sum \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}$$

und

$$|A| = \sum \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \quad (k + m \leqq n).$$

Für $k = 0$, $A_0 = 1$ hat man den sogenannten Frankeschen Satz; $m = 1$, $\binom{n-k-1}{0} = 1$ liefert den spezielleren Sylvesterschen Satz auf S. 62. Betreffs des obigen allgemeinen Sylvesterschen Satzes vgl. man: Picquet, *J. éc. polyt.*, Cah. **45**, 216 (1878), Sylvester, *Journ. f. Math.* **88**, 52 (1880), Netto, ebenda **114**, 351 (1895)[1]), Nanson, ebenda **122**, 183 (1900), E. Müller, *Ztschr. f. Math. u. Physik* **44**, 39 (1899), Pascal, *Determinanten,* S. 93, Scott, *The theory of determinants,* S. 67, 68.

Zu einer neuen Definition der Systeme $C_m(A)$ führt folgende Betrachtung: Wir ordnen der Matrix A die m kogredienten linearen homogenen Substitutionen

---

1) Aus der Formel auf S. 352 und der Ende S. 351 folgt die Formel des Textes.

$$\begin{aligned}
y_1^{(i)} &= a_{11}x_1^{(i)} + a_{12}x_2^{(i)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(i)},\\
y_2^{(i)} &= a_{21}x_1^{(i)} + a_{22}x_2^{(i)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(i)},\\
&\vdots\\
y_n^{(i)} &= a_{n1}x_1^{(i)} + a_{n2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(i)}
\end{aligned}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

zu. Versteht man unter X die quadratische Matrix

$$\left\|\begin{array}{cccccccc}
x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(m)} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0}^{n-m \text{ Kolonnen}}}\\
x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(m)} & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(m)} & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}\right\|$$

und unter Y die analog gebaute, so lassen sich die obigen Gleichungen für die m kogredienten Substitutionen in die eine symbolische Gleichung

$$(1) \qquad Y = AX$$

zusammenfassen (Verallgemeinerung des auf S. 82 angegebenen Resultates).

Aus der Gleichung (1) folgt auf Grund des Lehrsatzes I

$$(2) \qquad C_m(Y) = C_m(A)\, C_m(X).$$

Sind $l_1, l_2, \ldots, l_m$ irgend m untereinander verschiedene der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$, die in der Aufeinanderfolge $l_1 < l_2 < \cdots < l_m$ angeordnet sein sollen, so bilde man für jede mögliche Wahl der Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_m$ die Determinante

$$\begin{vmatrix}
x_{l_1}^{(1)} & x_{l_1}^{(2)} & \ldots & x_{l_1}^{(m)}\\
x_{l_2}^{(1)} & x_{l_2}^{(2)} & \ldots & x_{l_2}^{(m)}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
x_{l_m}^{(1)} & x_{l_m}^{(2)} & \ldots & x_{l_m}^{(m)}
\end{vmatrix}.$$

Ist in der zu Beginn des Paragraphen für die λ Kombinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu m eingeführten Reihenfolge $l_1, l_2, \ldots, l_m$

die L^{te}, so sei die zuletzt hingeschriebene Determinante mit X_L bezeichnet. Analog seien die λ Determinanten

$$Y_L = \begin{vmatrix} y_{l_1}^{(1)} & y_{l_1}^{(2)} & \dots & y_{l_1}^{(m)} \\ y_{l_2}^{(1)} & y_{l_2}^{(2)} & \dots & y_{l_2}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{l_m}^{(1)} & y_{l_m}^{(2)} & \dots & y_{l_m}^{(m)} \end{vmatrix} \qquad (L = 1, 2, \dots, \lambda)$$

definiert. Die symbolische Gleichung (2) kann dann in die λ gewöhnlichen Gleichungen

$$(3) \qquad Y_L = \sum_{J=1}^{J=\lambda} C_{LJ}^{(m)} X_J \qquad (L = 1, 2, \dots, \lambda)$$

umgesetzt werden.

Die Gleichung (3) besagt:

Transformiert man die m Variablensysteme

$$y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \dots, y_i^{(m)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

kogredient durch m lineare homogene Substitutionen der nämlichen Matrix A, so erfahren die λ Determinanten Y_J $(J = 1, 2, \dots, \lambda)$ eine lineare homogene Substitution, die durch die Matrix $C_m(A)$ gegeben ist. A. Hurwitz, *Math. Ann.* **45**, 392 (1894) nennt daher die durch die Formeln (3) bestimmte lineare homogene Substitution die m^{te} *Determinantentransformation.* Die Determinanten X_J sind von A. Clebsch (*Math. Ann.* **5**, 427 (1872)) als selbständige Variablen eingeführt worden. Die fraglichen Determinanten lassen sich auch geometrisch deuten. Erklärt man

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

als homogene Koordinaten von m Punkten, so stellen $X_1, X_2, \dots, X_\lambda$ die Koordinaten der durch die m Punkte bestimmten ebenen Mannigfaltigkeit dar.

Wird die bilineare Form

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i y_k$$

durch die zwei linearen homogenen Substitutionen

$$P: \qquad x_i = p_{i1} x_1' + p_{i2} x_2' + \dots + p_{in} x_n' \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$Q: \qquad y_i = q_{i1} y_1' + q_{i2} y_2' + \dots + q_{in} y_n' \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

in die bilineare Form

$$B = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik} x_i' y_k'$$

übergeführt, besteht also die symbolische Gleichung $P'AQ = B$, so folgt aus ihr:

$$(C_m(P))' C_m(A)\, C_m(Q) = C_m(B).$$

Diese Gleichung besagt: die m^{ten} Determinantentransformationen von P und Q führen die m^{ten} abgeleiteten bilinearen Formen von A und B ineinander über. Hieraus folgt im besonderen, daß, wenn P orthogonal ist, dies auch für $C_m(P)$ zutrifft.

Ist A eine quadratische bzw. Hermitesche Form, so ist auch die m^{te} abgeleitete Form $C_m(A)$ von der nämlichen Beschaffenheit. Mit den Abgeleiteten einer quadratischen Form beschäftigt sich Rados, *Verh. des ersten internationalen Math.-Kongr.* (1897), 163.

Wir ordnen der Unterdeterminante

$$C_{GH}^{(m)} = \sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \ldots a_{g_m h_m}$$

von $|A|$ ihre algebraische Adjungierte

$$\frac{\partial^m |A|}{\partial a_{g_1 h_1} \partial a_{g_2 h_2} \ldots \partial a_{g_m h_m}}$$

zu und bezeichnen sie mit $\Gamma_{GH}^{(m)}$. Aus den λ^2 Größen $\Gamma_{GH}^{(m)}$ bilden wir die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \Gamma_{11}^{(m)} & \Gamma_{12}^{(m)} & \ldots & \Gamma_{1\lambda}^{(m)} \\ \Gamma_{21}^{(m)} & \Gamma_{22}^{(m)} & \ldots & \Gamma_{2\lambda}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{\lambda 1}^{(m)} & \Gamma_{\lambda 2}^{(m)} & \ldots & \Gamma_{\lambda\lambda}^{(m)} \end{matrix} \right\|;$$

sie sei mit $\Gamma_m(A)$ bezeichnet.

Die Lehrsätze I—IV bleiben unverändert gültig, wenn man überall C_m durch Γ_m ersetzt. Dem Satz V stellt sich der Lehrsatz V′ zur Seite: Man erhält die $\binom{n}{n-m}$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\Gamma_m(A)$, d. h. der Gleichung

$$|\varrho E - \Gamma_m(A)| = 0,$$

indem man die n Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A zu je $n-m$ kombiniert und miteinander multipliziert. Hieraus folgt

$$|\Gamma_m(A)| = |A|^{\binom{n-1}{m}}.$$

Mittels der Elemente der Matrices $C_m(A)$ und $\Gamma_m(A)$ kann man *den Laplaceschen Zerlegungssatz* und das sich ihm anschließende Theorem auf S. 58 durch die Gleichungen

$$\sum_{J=1}^{J=\lambda} C_{GJ}^{(m)}\Gamma_{HJ}^{(m)} = |A|\,\delta_{GH} \qquad (G, H = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

ausdrücken; δ_{GH} ist hierbei das Kroneckersche Symbol, das für $G = H$ den Wert 1 hat, sonst verschwindet. Die angegebenen λ^2 Gleichungen lassen sich in eine einzige symbolische Gleichung, nämlich

$$(1) \qquad C_m(A)\,\Gamma_m(A') = |A|,$$

zusammenfassen; $|A|$ ist als Diagonalmatrix aufzufassen, deren in der Diagonale stehende Elemente sämtlich den Wert $|A|$ haben.

Da nach Lehrsatz III

$$(2) \qquad C_m(A)\,C_m(A^{-1}) = E$$

ist, folgt aus (1) und (2) die Kroneckersche Gleichung (Kronecker, *Monatsb. d. Berl. Akad.* 1882, *Ges. Werke* **2**, 392, *Vorl. über Determinanten,* S. 334):

$$\Gamma_m(A) = |A|\,C_m(A'^{-1}).$$

Bezeichnet man die nach gewöhnlichem Sprachgebrauch *adjungierte Matrix* $\|A_{ik}\|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ mit adj. (A) (vgl. S. 60, 61), so ist (vgl. S. 87):

$$A'^{-1} = \frac{\text{adj.}\,(A)}{|A|};$$

mithin wird:

$$C_m(A'^{-1}) = C_m\left(\frac{\text{adj.}\,(A)}{|A|}\right) = \frac{1}{|A|^m}\,C_m(\text{adj.}\,(A)).$$

Setzt man den für $C_m(A'^{-1})$ gefundenen Wert in die Kroneckersche Gleichung ein, so ergibt sich:

$$C_m(\text{adj.}\,(A)) = |A|^{m-1}\,\Gamma_m(A).$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als der Ausdruck der auf S. 61 gegebenen *Jacobischen Formel.* Sie gilt auch noch, falls die Determinante $|A|$ verschwindet; bei der Ableitung ist dies zunächst infolge der Verwendung von A^{-1} ausgeschlossen worden.

Wir ersetzen in der Kroneckerschen Gleichung die Matrix A durch $\Gamma_h(B)$, wobei B eine beliebige Matrix n^{ten} Grades ist. Verwendet man die Kroneckersche Gleichung noch ein zweites Mal, so erhält man:

$$\begin{aligned}\Gamma_m(\Gamma_h(B)) &= |\Gamma_h(B)|\, C_m(\Gamma_h(B'^{-1})) \\ &= |B|^{\binom{n-1}{h}} C_m(|B'^{-1}|\, C_h(B)) \\ &= \frac{|B|^{\binom{n-1}{h}}}{|B|^m} C_m(C_h(B)).\end{aligned}$$

Neben die Gleichung:

$$\Gamma_m(\Gamma_h(B)) = |B|^{\binom{n-1}{h}-m} C_m(C_h(B)) \tag{3}$$

stellt sich die Gleichung:

$$\Gamma_m(C_h(B)) = |B|^{\binom{n-1}{h-1}-m} C_m(\Gamma_h(B)). \tag{4}$$

Die Gleichung (4) folgt ähnlich wie (3) aus der Kroneckerschen Relation, wenn man in ihr für A die Matrix $C_h(B)$ einführt. Die Relation (3) wird ebenfalls (vgl. S. 139) als *Frankescher Satz* bezeichnet (Franke, *Journ. f. Math.* **61**, 355 (1863), Baltzer, *Determinanten,* S. 68 u. 69). Die Gleichungen (3) und (4) gelten auch noch, falls die Matrix B eine verschwindende Determinante hat; bei der Herleitung ist dies infolge der Benützung der Kroneckerschen Relation zunächst auszuschließen.

Sind A und B zwei beliebige Matrices gleichen Grades, so ergibt sich auf Grund der Gleichung (1):

$$C_h(A)\,\Gamma_h(B')\,C_h(B)\,\Gamma_h(A') = |A|\,|B|. \tag{5}$$

Führt man zur Abkürzung die Matrices $T = C_h(A)\,\Gamma_h(B')$ und $U = C_h(B)\,\Gamma_h(A')$ ein, so hat man die symbolische Gleichung:

$$TU = |A|\,|B|. \tag{6}$$

Für die Determinanten erhält man:

$$(7)\qquad |T| = |C_h(A)|\,|\Gamma_h(B')| = |A|^{\binom{n-1}{h-1}}|B|^{\binom{n-1}{h}},$$

$$(8)\qquad |U| = |C_h(B)|\,|\Gamma_h(A')| = |B|^{\binom{n-1}{h-1}}|A|^{\binom{n-1}{h}},$$

$$(9)\qquad |TU| = |A|^{\binom{n}{h}}|B|^{\binom{n}{h}}$$

(Sylvester, *Phil. Mag.* (1851), *Coll. math. papers* **1**, 253, vgl. ebenda die Note von Baker, S. 649, Baltzer, *Determinanten,* S. 36, Pascal, *Determinanten,* S. 111, wegen einer Verallgemeinerung vgl. E. Müller, *Ztschr. f. Math. u. Phys.* **44**, 31 (1899)).

Aus der Gleichung (6) folgt:

$$C_m(TU) = C_m(|A|\,|B|) \text{ und daher}$$
$$C_m(T) = |A|^m |B|^m C_m(U^{-1}).$$

Mit Hilfe der Kroneckerschen Relation ergibt sich weiter:

$$C_m(T) = |A|^m |B|^m |U^{-1}|\,\Gamma_m(U') \text{ und schließlich}$$

$$(10)\qquad C_m(T) = |A|^{m-\binom{n-1}{h}}|B|^{m-\binom{n-1}{h-1}}\Gamma_m(U').$$

Die Formel (10) wird als *Satz von Picquet* (*C. R.* **86**, 1119 (1878), *J. éc. polyt.,* Cah. **45**, 238 (1878), Pascal, *Determinanten,* S. 112) bezeichnet. Wählt man für die Matrix A bezw. B die Einheitsmatrix E, so ergibt Formel (10) die Formeln (4) bezw. (3).

Als Literatur über die abgeleiteten Systeme sei noch angeführt: Vahlen, *Enzykl. der math. Wiss.* **1**, 594, J. Schur, *Berl. Diss.* (1901), A. Loewy, *Trans. Am. M. S.* **5**, 64 (1904), sowie die ergänzenden Bemerkungen, ebenda **6**, 507 (1905).

Die Gleichung (5) geht, falls für B die Einheitsmatrix E gesetzt wird, in die Laplacesche Gleichung (1) über. Eine andersartige Erweiterung der Laplaceschen Entwicklung stammt von E. Netto, *Journ. f. Math.* **114**, 348 (1895). Vgl. Nanson, ebenda **122**, 182 (1900), E. Müller, *Ztschr. f. Math. u. Phys.* **44**, 33 (1899), Pascal, *Determinanten,* S. 97, Scott, *The theory of determinants,* S. 70.

Zu jeder Matrix A läßt sich auf folgende Weise eine neue Matrix bilden. Sei

$$x_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine zu A zugehörige lineare homogene Substitution. Man bilde sich sämtliche verschiedene Produkte:

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n);$$

ihre Anzahl ist gleich $\binom{n+r-1}{r}$, nämlich gleich der Zahl, die angibt, auf wieviel Arten man n Zahlen zu r mit Wiederholung kombinieren kann. Diese $\binom{n+r-1}{r}$ Produkte transformieren sich linear und homogen in die $\binom{n+r-1}{r}$ Produkte $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_r}$. Denkt man sich die Produkte $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ willkürlich, aber, wenn gewählt, fest in eine bestimmte Reihenfolge gebracht und die Produkte $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_r}$ in der nämlichen Reihenfolge angeordnet, so heißt die sich ergebende eindeutig bestimmte lineare homogene Substitution nach A. Hurwitz (*Math Ann.* **45**, 390 (1894)) die *r^{te} Potenztransformation von A* oder anknüpfend an Sylvester die *induzierte Substitution r^{ten} Grades* (Franklin, *Am. J. math.* **16**, 205 (1894), G. Rados, *Math. u. naturw. Ber. aus Ungarn* **16**, 241 (1898)). Die Matrix der r^{ten} Potenztransformation von A wird nach A. Hurwitz mit $P_r(A)$ bezeichnet.

Für die Operation $P_r(A)$ gelten folgende Sätze:

I. Sind A_1 und A_2 zwei beliebige Matrices gleichen Grades, so ist das Produkt von $P_r(A_1)$ und $P_r(A_2)$ gleich der r^{ten} Potenztransformation des Produktes von A_1 und A_2, also:

$$P_r(A_1)\,P_r(A_2) = P_r(A_1 A_2).$$

II. Ist A die Einheitsmatrix, so ist auch $P_r(A)$ die Einheitsmatrix.

III. Die r^{te} Potenztransformation der reziproken Matrix von A ist gleich der reziproken Matrix der r^{ten} Potenztransformation von A, also:

$$P_r(A^{-1}) = (P_r(A))^{-1}.$$

IV. Die r^{te} Potenztransformation der transponierten Matrix von A ist gleich der transponierten Matrix der r^{ten} Potenztransformation von A, also:

$$P_r(A') = (P_r(A))'.$$

V. Man erhält die $\binom{n+r-1}{r}$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $P_r(A)$, d. h. der Gleichung $|\varrho E - P_r(A)| = 0$, indem man die sämtlichen $\binom{n+r-1}{r}$ Produkte der n Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A zu je r bildet (Franklin, *Am. J. math.* **16**, 205 (1894), G. Rados, *Math. u. naturw. Ber. aus Ungarn* **16**, 244 (1898), W. Burnside, *Quart. J.* **32**, 83 (1901), J. Schur, *Berl. Diss.* (1901), 17).

Aus Lehrsatz V folgt: Die Determinante von $P_r(A)$ ist die $\binom{n+r-1}{r-1}^{\text{te}}$ Potenz der Determinante von A, also

$$|P_r(A)| = |A|^{\binom{n+r-1}{r-1}}.$$

(G. v. Escherich, *Monatsh. f. Math.* **3**, 80 (1892), A. Hurwitz, *Math. Ann.* **45**, 391 (1894), W. Anissimoff, ebenda **51**, 388 (1899); für $r = 2$ wird dieser Determinantensatz von Pascal, *Determinanten,* S. 104 als Scholtzscher Satz bezeichnet.) Weiteres über die Potenztransformation folgt unten bei der Produkttransformation.

Sind eine Reihe beliebiger quadratischer Matrices $A_1, A_2, \ldots, A_r$ der Grade $n_1, n_2, \ldots, n_r$ gegeben, so läßt sich aus ihnen eine neue Matrix vom Grade $n_1 n_2 \ldots n_r$ konstruieren, die mit $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ bezeichnet wird. Sie wird am einfachsten auf folgende Weise definiert: Man führe die zu den r Matrices

$$A_\nu = \| a_{ik}^{(\nu)} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n_\nu;\ \nu = 1, 2, \ldots, r)$$

zugehörigen linearen homogenen Substitutionen:

$$A_1: \qquad x_{i_1}^{(1)} = \sum_{s_1=1}^{s_1=n_1} a_{i_1 s_1}^{(1)} \xi_{s_1}^{(1)} \qquad (i_1 = 1, 2, \ldots, n_1),$$

$$A_2: \qquad x_{i_2}^{(2)} = \sum_{s_2=1}^{s_2=n_2} a_{i_2 s_2}^{(2)} \xi_{s_2}^{(2)} \qquad (i_2 = 1, 2, \ldots, n_2),$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$A_r: \qquad x_{i_r}^{(r)} = \sum_{s_r=1}^{s_r=n_r} a_{i_r s_r}^{(r)} \xi_{s_r}^{(r)} \qquad (i_r = 1, 2, \ldots, n_r)$$

ein. Durch Multiplikation erhält man:

$$(1) \qquad x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_r}^{(r)} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_r} a_{i_1 k_1}^{(1)} a_{i_2 k_2}^{(2)} \ldots a_{i_r k_r}^{(r)} \xi_{k_1}^{(1)} \xi_{k_2}^{(2)} \ldots \xi_{k_r}^{(r)};$$

hierbei ist dem Index i_1 jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n_1$, dem Index i_2 jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n_2$ usw., dem Index i_r jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n_r$ beizulegen. Ebenso ist in der Summe rechts für k_1 jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n_1$, für k_2 jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n_2$ usw., für k_r jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n_r$ zu setzen. Die $n_1 n_2 \ldots n_r$ Produkte $x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_r}^{(r)}$ sind offenbar lineare homogene Funktionen der $n_1 n_2 \ldots n_r$ Produkte $\xi_{i_1}^{(1)} \xi_{i_2}^{(2)} \ldots \xi_{i_r}^{(r)}$.

Hat man für die $n_1 n_2 \ldots n_r$ Produkte $x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_r}^{(r)}$ eine beliebige, aber fest gewählte Reihenfolge und für die $n_1 n_2 \ldots n_r$ Produkte $\xi_{i_1}^{(1)} \xi_{i_2}^{(2)} \ldots \xi_{i_r}^{(r)}$ die nämliche Anordnung eingeführt, so definiert das Gleichungssystem (1) eindeutig eine bestimmte lineare homogene Substitution in $n_1 n_2 \ldots n_r$ Variablen; sie heißt nach A. Hurwitz (*Math. Ann.* **45**, 388 (1894)) die *Produkttransformation* von $A_1, A_2, \ldots, A_r$ und wird nach ihm mit $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ bezeichnet. C. Stephanos (*Journ. de math.* (5) **6**, 73 (1900)), der die Produkttransformation sehr eingehend untersucht hat, bezeichnet die fragliche Operation als *conjonction*. Dem Prozeß begegnet man schon bei C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris 1870, S. 221. Die Determinante von $A_1 \times A_2$ hat Kronecker in seinen Universitätsvorlesungen behandelt. Von der Operation $A \times A \times \cdots \times A$ (m mal die nämliche Matrix A) kann man zu $P_m(A)$ und $C_m(A)$ gelangen (vgl. J. Schur und A. Loewy an den S. 146 angeführten Orten).

Für die Produkttransformation gelten folgende Sätze:

I. Sind $B_1, B_2, \ldots, B_r$ r weitere Matrices der Grade $n_1, n_2, \ldots, n_r$, aus denen $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_r$ gebildet ist, so ist das Produkt $W_1 W_2$ von $W_1 = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ und $W_2 = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_r$ gleich $A_1 B_1 \times A_2 B_2 \times \cdots \times A_r B_r$.

II. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_r$ Einheitsmatrices, so ist auch $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ die Einheitsmatrix.

III. Die Matrix der Produkttransformation der reziproken Matrices von $A_1, A_2, \ldots, A_r$ ist die reziproke Matrix von $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$, also

$$A_1^{-1} \times A_2^{-1} \times \cdots \times A_r^{-1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r)^{-1}.$$

IV. Die transponierte Matrix von $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ ist die Matrix der Produkttransformation der transponierten

Matrices $A_1', A_2', \ldots, A_r'$, also:

$$(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r)' = (A_1' \times A_2' \times \cdots \times A_r').$$

V. Sind $\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, \alpha_{n_\nu}^{(\nu)}$ die n_ν Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Matrix $A^{(\nu)}$, d. h. der Gleichung $|\varrho E - A^{(\nu)}| = 0$, so sind die $n_1 n_2 \ldots n_r$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ die $n_1 n_2 \ldots n_r$ Produkte

$$\alpha_{i_1}^{(1)} \alpha_{i_2}^{(2)} \ldots \alpha_{i_r}^{(r)} \quad (i_1 = 1, 2, \ldots, n_1;\ i_2 = 1, 2, \ldots, n_2;\ \ldots,\ i_r = 1, 2, \ldots, n_r)$$

(Franklin, *Am. J. math.* **16**, 206 (1894), Frobenius, *Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1899), 333, C. Stephanos, *Journ. de math.* (5) **6**, 89 (1900)).

Aus dem Lehrsatz V folgt: Die Determinante von

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$$

ist ein Produkt, dessen Faktoren die $\frac{\pi}{n_1}$te Potenz der Determinante von A_1, die $\frac{\pi}{n_2}$te Potenz der Determinante von A_2 usw., schließlich die $\frac{\pi}{n_r}$te Potenz der Determinante von A_r sind, also:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r| = |A_1|^{\frac{\pi}{n_1}} |A_2|^{\frac{\pi}{n_2}} \ldots |A_r|^{\frac{\pi}{n_r}}, \text{ wobei } \pi = n_1 n_2 \ldots n_r$$

(Lehrsatz von Kronecker, vgl. Hensel, *Acta math.* **14**, 317 (1890), Rados, *Math. naturw. Ber. aus Ungarn* **8**, 60 (1889), ebenda **18**, 231 (1900), G. v. Escherich, *Monatsh. f. Math.* **3**, 68 (1892), A. Hurwitz, *Math. Ann.* **45**, 389 (1894)).

Zur Produkttransformation kann man auch auf folgende Weise gelangen:

$$H = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} \eta_{i_1 i_2 \ldots i_r} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_r}^{(r)}$$

sei eine Form, die in den r Variablenreihen

$$x_{i_1}^{(1)} \ (i_1 = 1, 2, \ldots, n_1), \quad x_{i_2}^{(2)} \ (i_2 = 1, 2, \ldots, n_2), \quad \ldots, \quad x_{i_r}^{(r)} \ (i_r = 1, 2, \ldots, n_r)$$

linear und homogen ist. Transformiert man die angegebene Form durch die linearen homogenen Substitutionen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ in die neue r-fach lineare homogene Form:

$$Z = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} \zeta_{i_1 i_2 \ldots i_r} \xi_{i_1}^{(1)} \xi_{i_2}^{(2)} \ldots \xi_{i_r}^{(r)},$$

so wird:

$$(2) \qquad \zeta_{k_1 k_2 \ldots k_r} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} a_{i_1 k_1}^{(1)} a_{i_2 k_2}^{(2)} \ldots a_{i_r k_r}^{(r)} \eta_{i_1 i_2 \ldots i_r},$$

d. h. die $n_1 n_2 \ldots n_r$ Koeffizienten $\eta_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ erleiden die Produkt transformation $A_1' \times A_2' \times \cdots \times A_r'$; hierbei bedeuten $A_1', A_2', \ldots, A_r'$ die transponierten Matrices von $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

Nimmt man in den r Variablenreihen $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(r)}$ gleichviele Variablen n an und beschränkt in der Form H die n^r Größen

$$\eta_{i_1 i_2 \ldots i_r} \quad (i_1 = 1, 2, \ldots, n;\ i_2 = 1, 2, \ldots, n;\ \ldots,\ i_r = 1, 2, \ldots, n),$$

symmetrische Funktionen der Indices zu sein, d. h. ihre Werte nicht zu ändern, wenn man die Reihenfolge der Indices vertauscht, so reduzieren sich die n^r Größen $\eta_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ auf $\binom{n+r-1}{r}$ verschiedene. Unterwirft man die r Variablenreihen von H alsdann r kogredienten linearen homogenen Substitutionen mit der nämlichen Matrix A:

$$x_i^{(\nu)} = a_{i1} \xi_1^{(\nu)} + a_{i2} \xi_2^{(\nu)} + \cdots + a_{in} \xi_n^{(\nu)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, r),$$

so bezieht sich bei den eingeführten Beschränkungen die durch die Formel (2) definierte lineare homogene Substitution auf $\binom{n+r-1}{r}$ Variablen und wird die r^{te} Potenztransformation von A', wobei A' die transponierte Matrix von A ist.

Wir wenden die obigen Resultate auf die bilineare Form:

$$H = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \eta_{ik} x_i^{(1)} x_k^{(2)}$$

an, deren Koeffizienten η_{ik} zunächst n^2 willkürliche Größen seien. Unterwirft man die zwei Variablenreihen den zwei linearen homogenen Substitutionen:

$$A': \qquad x_i^{(1)} = a_{1i} \xi_1^{(1)} + a_{2i} \xi_2^{(1)} + \cdots + a_{ni} \xi_n^{(1)}$$

und

$$B: \qquad x_i^{(2)} = b_{i1} \xi_1^{(2)} + b_{i2} \xi_2^{(2)} + \cdots + b_{in} \xi_n^{(2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so geht H in eine neue bilineare Form

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \zeta_{ik} \xi_i^{(1)} \xi_k^{(2)}$$

über. Es gilt die symbolische Gleichung $Z = AHB$; die Determinante $|Z|$ ist gleich $|A|\,|B|\,|H|$. Die Koeffizienten ζ_{ik} ergeben sich gleich

$$\sum_{s=1}^{s=n} \sum_{t=1}^{t=n} a_{is} \eta_{st} b_{tk},$$

d. h. sie werden aus den η_{ik} durch Anwendung der Produkttransformation $A \times B'$ gefunden. Wird H so spezialisiert, daß es eine symmetrische bilineare Form wird, deren $\frac{n(n+1)}{2}$ Koeffizienten η_{ik} $(k \geqq i)$ beliebige Größen sind, und unterwirft man die zwei Variablenreihen $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ kogredienten Transformationen, d. h. wählt man $B = A'$, so ist $Z = AHA'$, und die Koeffizienten ζ_{ik} werden aus den η_{ik} durch Anwendung der zweiten Potenztransformation $P_2(A)$ von A gewonnen.

Mit diesen Resultaten stehen folgende zwei Fundamentalsätze in innigstem Zusammenhang:

I. Sind die Elemente der Matrix $H = \| \eta_{ik} \|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ *unabhängige Variable und die der Matrix* $Z = \| \zeta_{ik} \|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ *lineare homogene Funktionen dieser Variablen und unterscheidet sich die Determinante der Matrix Z von der der Matrix H nur um einen konstanten, von Null verschiedenen Faktor, so ist entweder* $Z = AHB$ *oder* $Z = AH'B$, *wobei A und B konstante Matrices sind* (Frobenius, *Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1897), 1011, S. Kantor, *Sitzungsb. d. Bayer. Akad.* (1897), 370, C. Stephanos, *Journ. d. math.* (5) **6**, 119ff. (1900), E. Steinitz, *Sitzungsb. d. Berl. Math. Gesellsch., Archiv f. Math.* (3) **5**, 47 (1903)).

II. Sind in einer symmetrischen Matrix $H = \| \eta_{ik} \|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ *die Elemente* η_{ik} $(k \geqq i)$ *unabhängige Variable, und sind die Elemente der symmetrischen Matrix* $Z = \| \zeta_{ik} \|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ *lineare homogene Funktionen dieser Variablen und unterscheidet sich die Determinante der Matrix Z von der der Matrix H nur um einen konstanten, von Null verschiedenen Faktor, so ist* $Z = AHA'$, *wobei A eine konstante Matrix bedeutet* (Frobenius, *Sitzungsb. d. Berl. Akad.* (1897), 1014).

Für $n = 2$ werden durch das Theorem I alle linearen homogenen Substitutionen bestimmt, die

$$|H| = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{vmatrix},$$

abgesehen von einem konstanten Faktor, automorph in $\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}\zeta_{21}$ transformieren. Mit diesem Formelsystem hat sich Cayley bereits 1854 beschäftigt, *Phil. Mag., Coll. math. papers* **2**, 135 „On the homographic transformation of a surface of the second order into itself". Vgl. Fricke und Klein, *Vorl. über die Theorie der automorphen Funktionen,* Leipzig 1897, S. 47.

Der Satz II bestimmt für $n = 2$ alle Transformationen, die

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix},$$

abgesehen von einem konstanten Faktor, in $\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2$ transformieren. Dieses Formelsystem, das den Kegelschnitt

$$\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 = 0$$

in sich überführt, hat bereits Gauß, *Disquisitiones arithmeticae,* Artikel 157, *Ges. Werke* **1**, 124; vgl. Fricke und Klein, a. a. O., S. 14 und 19.

§ 12. Differentiation einer Determinante und Matrix.

Sind y_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ n^2 Funktionen einer Variablen x, so gilt der Satz:

Der Differentialquotient der Determinante $|y_{ik}|$ *ist gleich der Summe aller* n *Determinanten, die man erhält, wenn man in der gegebenen Determinante immer die Elemente einer Reihe durch ihre Differentialquotienten ersetzt.*

Versteht man unter Y die Matrix $\|y_{ik}\|$, so wird unter $\frac{dY}{dx}$ die Matrix $\left\|\frac{dy_{ik}}{dx}\right\|$ verstanden. Sind Y und Z zwei Matrices gleichen Grades, deren Koeffizienten von einer Variablen x abhängen, so wird, wenn YZ das Produkt der zwei Matrices Y und Z ist,

$$\frac{d}{dx}(YZ) = \frac{dY}{dx}Z + Y\frac{dZ}{dx}, \quad \frac{d}{dx}Y^{-1} = -Y^{-1}\frac{dY}{dx}Y$$

(vgl. Frobenius, *Journ. f. Math.* **84**, 16 (1878)).

Das Produkt der zwei Matrices Y^{-1} und $\frac{dY}{dx}$, also $Y^{-1}\frac{dY}{dx}$, bezeichnet man mit $D_x(y_{ik})$ und liest es *derivierte Matrix in* *bezug auf* x. Das eingeführte Symbol ist für die Systeme linearer homogener Differentialgleichungen von größter Wichtigkeit (Volterra, *Memorie della società Italiana delle scienze* (1887), (1899), L. Schlesinger, *Vorl. über die Theorie der linearen Differentialgleichungen,* Leipzig 1908, S. 26).

§ 13. Die Wronskische Determinante.

Hat man n Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ einer Variablen x, so entsteht ihre *Wronskische Determinante* (Wronski, *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange,* 1812, Dickstein, *Bibliotheca math.* (2) **6**, 50 (1892), E. Pascal, *Acc. di Torino* (1906), 1081) auf folgende Art:

In die erste Zeile kommen die n Funktionen, in die folgenden die ersten, zweiten, usw. Abgeleiteten dieser Funktionen; also:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_n}{dx} \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} & \frac{d^2y_2}{dx^2} & \ldots & \frac{d^2y_n}{dx^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Die Abgeleitete einer Wronskischen Determinante wird gebildet, indem man in die letzte Zeile von W die n^{ten} Abgeleiteten setzt und die anderen Zeilen ungeändert läßt (Malmsten, *Journ. f. Math.* **39**, 93 (1850)).

Multipliziert man die n Funktionen y mit einer beliebigen Funktion $v(x)$, so wird hierdurch die ganze Determinante mit der n^{ten} Potenz von v multipliziert.

Die notwendige und auch im allgemeinen hinreichende Bedingung dafür, daß zwischen n Funktionen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ wenigstens eine lineare homogene Beziehung mit konstanten Koeffizienten besteht, ist das Verschwinden ihrer Wronskischen Determinante (vgl. besonders Frobenius, *Journ. f. Math.* **77**, 245 (1874)).

Peano (*Mathesis*, **9**, 75 u. 110 (1889), sowie *Rend. Acc. Lincei* $\mathbf{6}_1$, 413 (1897)) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß das Verschwinden der Wronskischen Determinante von n Funktionen einer Variablen nicht unter allen Umständen für ihre lineare Dependenz ausreicht; für analytische Funktionen ist die Bedingung hinreichend. Vgl. auch die Angaben von Bôcher, *Trans. Am. M. S.* **2**, 139 (1901), über gewisse Fälle nicht analytischer Funktionen, bei denen das Verschwinden der Wronskischen Determinante für die lineare Abhängigkeit ausreicht, ferner D. R. Curtiss, *Math. Ann.* **65**, 282 (1908).

Die Wronskische Determinante spielt in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen eine sehr wichtige Rolle (vgl. Baltzer, *Determinanten,* S. 77, L. Heffter, *Einl. in die Theorie der linearen Differentialgleichungen,* Leipzig 1894, S. 47 u. 233, L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen,* Leipzig 1895, **1**, S. IX u. 37).

Eine ähnliche Bedeutung wie die Wronskische Determinante für die linearen homogenen Differentialgleichungen hat für die Theorie der *linearen homogenen Differenzengleichungen* die Determinante:

$$W_1 = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \ldots & y_n(x) \\ \Delta y_1(x) & \Delta y_2(x) \ldots & \Delta y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^{n-1} y_1(x) & \Delta^{n-1} y_2(x) \ldots & \Delta^{n-1} y_n(x) \end{vmatrix};$$

hierbei ist Δ das Symbol für die Differenzen:

$$\begin{aligned} \Delta y(x) &= \quad y(x+1) - \quad y(x), \\ \Delta^2 y(x) &= \Delta y(x+1) - \Delta y(x), \\ &\vdots \end{aligned}$$

W_1 ist gleich der Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots y_n(x) \\ y_1(x+1) & y_2(x+1) & \ldots y_n(x+1) \\ y_1(x+2) & y_2(x+2) & \ldots y_n(x+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1(x+n-1) & y_2(x+n-1) & \ldots y_n(x+n-1) \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden der Determinante W_1 ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwischen den n Funktionen y eine lineare homogene Beziehung mit Koeffizienten besteht, die periodische Funktionen von x sind, d. h. solche Funktionen $F(x)$, bei denen für jedes beliebige x:

$$F(x+1) = F(x)$$

ist (Casorati, *Ann. mat.* (2) **10**, 19 (1880)).

In der Determinante W_1 kann statt Δ irgendeine Funktionaloperation und ihre Wiederholungen eingeführt werden, derartige Determinanten bei Pincherle u. Amaldi, *Le operazioni distributive,* Bologna 1901, 419 u. 429.

§ 14. Die Jacobische oder Funktionaldeterminante.

Sind n Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, so heißt die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

die *Funktionaldeterminante* oder *Jacobische Determinante* der y in bezug auf die x. Man bezeichnet sie auch nach Donkin (*Phil. Trans.* (1854)) mit dem Symbol:

$$\frac{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)}.$$

Der Name „Funktionaldeterminante" stammt von Jacobi; er ist von ihm eingeführt in der grundlegenden Arbeit *„de determinantibus functionalibus"*, *Journ. f. Math.* **22**, 319 (1841), *Ges. Werke* **3**, 393, deutsche Ausg. mit Anm. von Stäckel in Ostwalds *Klassikern der exakten Wiss.* No. 78. Die Bezeichnung „Jacobische Determinante" geht auf Sylvester (*Phil. Trans.* (1853), *Coll. math. papers* **1**, 506 u. 583) zurück.

Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Funktionen von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und diese wieder Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so gilt die Formel:

$$\frac{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)} = \frac{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}{\partial(z_1 z_2 \ldots z_n)} \cdot \frac{\partial(z_1 z_2 \ldots z_n)}{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)}.$$

Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und kann man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Funktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ansehen, so hat man:

$$\frac{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}}.$$

Sind die Größen y implizit als Funktionen der Veränderlichen x mittels der Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben, so ist:

$$\frac{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial(F_1 F_2 \ldots F_n)}{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)}}{\dfrac{\partial(F_1 F_2 \ldots F_n)}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}}.$$

Das Nichtverschwinden der im Nenner stehenden Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F_1 F_2 \ldots F_n)}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}$$

ist die Bedingung dafür, daß durch die Gleichungen

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ein System von n Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der m Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ definiert wird. Existenzsatz für die impliziten Funktionen (vgl. etwa C. Jordan, *Cours d'analyse,* Paris 1893, **1**, 82, Genocchi-Peano, *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung,* deutsche Ausg., Leipzig 1899, S. 147).

Soll zwischen n Funktionen y_i der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine von den x freie Beziehung: $F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ bestehen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür die, daß die Funktionaldeterminante der y verschwindet.

Schärfer und weitgehender ist folgendes Theorem:

Sind m Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *von n Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *gegeben und verschwindet die Determinante* l^{ten} *Grades*[1])

$$\frac{\partial(y_1\, y_2 \cdots y_l)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_l)}$$

für ein besonderes Wertsystem der Variablen

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2,\ \ldots,\ x_n = \xi_n$$

nicht, sind hingegen alle Determinanten $l + 1^{ten}$ *Grades, die man aus der Matrix*

$$\left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right\| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

bilden kann, in der Umgebung der Stelle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *identisch Null, so sind die Größen* $y_1, y_2, \ldots, y_l$ *unabhängig, d. h. keine von ihnen läßt sich als Funktion der* $l - 1$ *übrigen darstellen, hingegen können* $y_{l+1}, y_{l+2}, \ldots, y_m$ *als Funktionen von* $y_1, y_2, \ldots, y_l$ *ausgedrückt werden.*

Ist

$$y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so hat man:

$$\frac{\partial(y_1\, y_2 \cdots y_n)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_n)} = \frac{1}{u_0^{\,n+1}} \begin{vmatrix} u_0 & \frac{\partial u_0}{\partial x_1} & \frac{\partial u_0}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ u_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Diese Theoreme sind sämtlich von Jacobi in „*de determinantibus functionalibus*" gegeben worden.

Es seien $n + 1$ *homogene ganze Funktionen von n Variablen gegeben. Man kombiniere sie zu je n und bilde so die* $n + 1$ *Funktionaldeterminanten. Aus diesen bilde man wieder* $n + 1$ *Funktionaldeterminanten, indem man sie zu n kombiniert. Die letzteren sind dann bis auf einen allen gemeinsamen Faktor die-*

---

[1]) Durch geeignete Numerierung der y_i und x_k kann man es erzielen, daß gerade die Determinante

$$\frac{\partial(y_1\, y_2 \cdots y_l)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_l)}$$

nicht verschwindet.

selben Funktionen wie diejenigen, von denen man ausgegangen ist (Theorem von Clebsch, *Journ. f. Math.* **69**, 355 (1868), **70**, 175 (1869)).

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ *seien n Funktionen von* $n+1$ *Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. *Man betrachte die y als Funktionen von je n der Variablen x und bilde die Funktionaldeterminanten. Mit Vorzeichen versehen, seien sie mit* A_i $(i=1,2,\ldots,n+1)$ *bezeichnet, so daß*

$$A_i = (-1)^i \frac{\partial(y_1\, y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots y_n)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_{n+1})}$$

ist, dann besteht die Jacobische Formel:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial A_{n+1}}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

(*Journ. f. Math.* **27**, 203 (1844), *Ges. Werke* **4**, 323). Vgl. auch Jacobis *Vorlesungen über Dynamik,* herausgeg. von Clebsch, 1866, 13. Vorl. Die Jacobische Formel spielt in der Theorie des Jacobischen Multiplikators bei einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen eine fundamentale Rolle.

Die Funktionaldeterminanten sind auch für die Transformation der vielfachen Integrale sehr wichtig. Zum Zweck der Transformation der $n$fachen Integrale hat Jacobi die Funktionaldeterminanten bereits 1833 im *Journ. f. Math.* **12**, 38, *Ges. Werke* **3**, 233 verwandt und ist dann im letzten Paragraphen der Abhandlung *de determin. funct.* auf diesen Gegenstand zurückgekommen. Von Lehrbüchern vgl. man hierzu: Kronecker, *Vorl. über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale,* herausg. von Netto, Leipzig 1894, 14. Vorl., C. Jordan, *Cours d'analyse,* Paris 1893, **1**, 138 ff.

Eine von Bertrand (*Journ. de math.* **16**, 212 (1851)) gegebene Definition der Funktionaldeterminante (vgl. *Encycl. des sc. math.* **1**, 123) ist *unrichtig* (Genocchi-Peano, *Differentialrechnung usw.*, deutsche Ausg., Leipzig 1899, S. 329).

Grassmann (*Ges. Werke* $\mathbf{1}_2$, 298, vgl. auch Scott, *The theory of determinants,* S. 171) hat die Funktionaldeterminanten mit Hilfe der Methoden der Ausdehnungslehre behandelt.

Von Lehrbüchern vgl. man über Funktionaldeterminanten noch Pascal, *Determinanten,* S. 222, Baltzer, *Determinanten,* S. 139 u. Gordan, *Vorl. über Invariantentheorie* **1**, 120.

§ 15. Die Hessesche Determinante.

Die Hessesche Determinante einer Funktion f von n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ist die Jacobische Determinante der n partiellen Abgeleiteten*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

von f. Die Hessesche Determinante wird demnach durch die zweiten Abgeleiteten von f gebildet.

$$H = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

(Hesse, *Journ. f. Math.* **28**, 89 (1844), *Ges. Werke,* München 1897, 113 u. 692). Die heute allgemein übliche Bezeichnung „Hessesche Determinante" stammt von Sylvester ((1851) u. (1853), *Coll. math. papers* **1**, 191 u. 583).

Die Hessesche Determinante einer beliebigen quadratischen Form ist das Doppelte ihrer Diskriminante (vgl. S. 118).

Die notwendige Bedingung dafür, daß eine homogene ganze Funktion (Form) von n Veränderlichen sich linear homogen in eine solche von weniger als n Veränderlichen transformieren läßt, ist das Verschwinden ihrer Hesseschen Determinante.

Daß umgekehrt das Verschwinden der Hesseschen Determinante, wie Hesse annahm (*Journ. f. Math.* **42**, 117 (1851), ebenda **56**, 263 (1859), *Ges. Werke*, 289 u. 481), auch dafür ausreichend ist, daß sich die gegebene homogene Form linear in eine solche von weniger Variablen transformieren läßt, *trifft nur für homogene Formen beliebigen Grades in 2, 3 und 4 Variablen (binäre, ternäre, quaternäre Formen) und quadratische Formen von beliebig vielen Variablen zu. Für die höheren Fälle lassen sich ganze Klassen von Funktionen aufstellen, bei denen die Hessesche Determinante verschwindet, ohne daß sie sich in Funktionen von weniger Variablen linear transformieren lassen* (Gordan u. Noether, *Math. Ann.* **10**, 547 (1876)).

Von der Hesseschen Determinante einer homogenen ganzen Funktion dritten Grades mit beliebig vielen Variablen gilt folgender Satz:

Die Hessesche Determinante der Hesseschen Determinante einer kubischen Form von n Variablen ist eine lineare Kombination der gegebenen Form und ihrer Hesseschen Determinante.

Dieser Satz wurde für beliebiges n von Voss, *Math. Ann.* **27**, 515 (1886), vorher für $n = 4$ von G. Bauer, *Abh. d. Bayer.*

Akad. d. Wiss. **14** (1883), bewiesen. Für binäre Formen gilt der Satz für jeden Grad > 3 (Salmon-Fiedler, *Algebra d. linearen Transformationen,* Leipzig 1877, S. 273).

Die Hessesche Determinante spielt ebenso wie die Funktionaldeterminante in der Invariantentheorie sowie in der Geometrie der Kurven und Flächen eine wichtige Rolle.

§ 16. Unendliche Determinanten. Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen. Bilineare Formen mit unendlich vielen Variablen.

Unendliche Determinanten wurden von Hill, *Acta math.* **8**, 26 (1886), Poincaré, *Bull. de la soc. math.* **14**, 77 (1886) und Helge von Koch, *Acta math.* **15**, 56 (1891) u. **16**, 219 (1892) in die Analysis eingeführt. Eine zusammenfassende Darstellung gibt Cazzaniga (*Ann. di mat.* (2) **26**, 143 (1897), Ergänzungen (3) **1**, 83 (1898) und (3) **2**, 229 (1899)). Wie die gewöhnlichen Determinanten zur Auflösung eines Systems von endlich vielen linearen Gleichungen, so dienen die unendlichen Determinanten zur Auflösung eines Systems mit unendlich vielen Unbekannten.

Die unendlichen Determinanten werden nach Cazzaniga auf folgende Weise definiert: Die Größen a_{ik} $(i, k = -\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)$ mögen ein zweifach unendliches System bilden, das quadratisch nach vier Seiten hin unbegrenzt angeordnet sei. $D_{m,n}$ bedeute die Determinante $m + n + 1^{\text{ten}}$ Grades:

$$D_{m,n} = \begin{vmatrix} a_{-n,-n} & a_{-n,-n+1} & \cdots a_{-n,0} & \cdots a_{-n,m} \\ a_{-n+1,-n} & a_{-n+1,-n+1} & \cdots a_{-n+1,0} & \cdots a_{-n+1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,-n} & a_{m,-n+1} & \cdots a_{m,0} & \cdots a_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Nähert sich für unendlich wachsende Werte von m und n die Determinante $D_{m,n}$ einer bestimmten endlichen Größe, so schreibt man

$$D = [a_{ik}] \qquad (i, k = -\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)$$

und sagt: *die unendliche Determinante ist konvergent und hat den Wert D.*

Damit $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} D_{m,n} = D$ existiert, also das Größensystem a_{ik} eine konvergente Determinante erzeugt, ist notwendig und hinreichend, daß zu jeder noch so kleinen positiven Zahl δ eine ganze positive Zahl N existiert, daß für jedes Zahlenpaar $m, n > N$ und alle ganzzahligen positiven Werte p, q:

$$|D_{m+p,n+q} - D_{m,n}| < \delta$$

wird.

Die Elemente a_{ii} $(i = -\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)$ heißen die *Diagonalelemente,* die Elemente a_{ik} $(i \gtrless k)$ die *Nichtdiagonalelemente* der unendlichen Determinante.

Eine auf die obige Weise definierte unendliche Determinante hat ähnliche Eigenschaften wie die endlichen Determinanten. Der Wert der Determinante bleibt ungeändert, wenn man sie umstürzt, d. h. die Zeilen und die Kolonnen miteinander vertauscht und hierbei die Hauptdiagonale beibehält. Bei Vertauschung zweier paralleler Reihen ändert die Determinante ihr Vorzeichen; sind also zwei Parallelreihen identisch, so verschwindet die Determinante.

Jede unendliche konvergente Determinante $[a_{ik}]$ $(i, k = -\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)$ *kann in eine gleichwertige transformiert werden, deren quadratisch geordnete Elemente nur nach rechts und nach unten unbegrenzt fortschreiten, d. h. in eine Determinante* $[a_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$.

Dies erzielt man, indem man die Zeilen und die Kolonnen der ursprünglichen Determinante etwa derartig vertauscht, daß $a_{00}\, a_{11}\, a_{-1,-1}\, a_{22}\, a_{-2,-2}\, a_{33}\, a_{-3,-3} \ldots$ zum Diagonalglied wird und hierauf die Zahlenreihe $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet.

Geht man umgekehrt von einer konvergenten Determinante[1]) $[a_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$ aus und ändert diese außerdem bei jeder Vertauschung ihrer Zeilen und Kolonnen, bei der die Diagonalglieder in der Hauptdiagonale stehen bleiben, nach Voraussetzung ihren Wert nicht, so kann man sie in eine gleichwertige Determinante $[a_{ik}]$ $(i, k = -\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)$ verwandeln, deren

---

1) Eine unendliche Determinante $[a_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$, deren Elemente nur nach zwei Seiten hin unbegrenzt ausgedehnt sind, heißt konvergent, wenn sich die Determinante $D_n = |a_{\lambda\mu}|$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$ für unendliche n einer bestimmten endlichen Grenze nähert.

quadratisches Schema die ganze Ebene bedeckt. Man setze $i = -\frac{\lambda - 1}{2}$ für ungerade λ und $i = \frac{\lambda}{2}$ für gerade λ, ebenso $k = -\frac{\mu - 1}{2}$ für ungerade μ und $k = \frac{\mu}{2}$ für gerade μ und führe die notwendigen Zeilen- und Kolonnenvertauschungen aus, so daß $\ldots a_{-2,-2}\, a_{-1,-1}\, a_{00}\, a_{11}\, a_{22} \ldots$ Diagonalglied wird.

Man kann sich daher auf die Betrachtung einer in dem obigen Sinn konvergenten Determinante $[a_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$ beschränken. Im folgenden wird dies geschehen.

Sind die unendlichen Produkte $\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} p_\lambda = p$ *und* $\prod_{\mu=1}^{\mu=\infty} q_\mu = q$ *unbedingt konvergent und nicht Null, so hat die aus der Determinante* $D = [a_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$ *dadurch hervorgehende Determinante, daß man alle Elemente der* λ^{ten} *Zeile mit* p_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \infty)$ *und alle Elemente der* μ^{ten} *Kolonne mit* q_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$ *multipliziert, den Wert* pqD.

Eine besondere Gattung im obigen Sinn konvergenter Determinanten sind diejenigen, bei denen die unendliche Doppelreihe der Nichtdiagonalglieder $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} a_{\lambda\mu}\ (\lambda \gtrless \mu)$ *und das unendliche Produkt der Diagonalglieder* $\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} a_{\lambda\lambda}$ *unbedingt konvergieren.* Unendliche Determinanten, die diesen Bedingungen genügen, heißen nach von Koch *Normaldeterminanten* (*Acta math.* **16**, 221).

Streicht man in einer Normaldeterminante r Zeilen und r Kolonnen, so erhält man wiederum eine *Normaldeterminante.* Ebenso wie bei endlichen Determinanten kann man bei Normaldeterminanten den Begriff der *Unterdeterminante* einführen. Versteht man unter $A_{\varrho\sigma}$ die mit $(-1)^{\varrho+\sigma}$ multiplizierte Determinante, die aus einer Normaldeterminante durch Streichen der ϱ^{ten} Zeile und σ^{ten} Kolonne hervorgeht, so gilt in Erweiterung der bei endlichen Determinanten stattfindenden Relationen (S. 58):

$$a_{\varrho 1} A_{\sigma 1} + a_{\varrho 2} A_{\sigma 2} + a_{\varrho 3} A_{\sigma 3} + \cdots = \delta_{\varrho\sigma} D \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots),$$

$$a_{1\varrho} A_{1\sigma} + a_{2\varrho} A_{2\sigma} + a_{3\varrho} A_{3\sigma} + \cdots = \delta_{\varrho\sigma} D \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots).$$

Auch der Laplacesche Zerlegungssatz (S. 58) ist erweiterungsfähig.

Sind $A = [a_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$ und $B = [b_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$

zwei unendliche Normaldeterminanten und bezeichnet man mit $c_{\lambda\mu}$ eine der vier unendlichen Reihen

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} a_{\lambda s} b_{s\mu}, \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} a_{\lambda s} b_{\mu s}, \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} a_{s\lambda} b_{\mu s}, \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} a_{s\lambda} b_{s\mu},$$

so ist jede der vier Determinanten $C = [c_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$ ebenfalls eine Normaldeterminante und das Produkt von A und B (*Erweiterung des Cauchy-Binetschen Multiplikationssatzes* (S. 58)).

Sei das System unendlich vieler linearer Gleichungen

$$a_{\lambda 1} x_1 + a_{\lambda 2} x_2 + \cdots = y_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \infty)$$

mit normaler Determinante $D = [a_{\lambda\mu}]$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \infty)$ *gegeben.* Für $D \neq 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem, bei dem die absoluten Beträge der Elemente x_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ sämtlich kleiner als eine angebbare positive endliche Zahl G sind. Es wird entsprechend den Cramerschen Formeln, S. 74:

$$x_\lambda = \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=\infty} A_{\mu\lambda} y_\mu}{D}.$$

Das homogene System

$$y_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \infty)$$

hat, falls die Determinante D nicht verschwindet, nur die triviale Lösung $x_\lambda = 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \infty)$.

Außer den Normaldeterminanten sind noch weitere unendliche konvergente Determinanten untersucht worden (vgl. außer der bereits zitierten Literatur noch H. v. Koch, *Acta math.* **24**, 89 (1901)).

Über die Lösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten sind noch neuere Untersuchungen von Hilbert (*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen,* 4. und 5. Mitteilung, *Gött. Nachr.* (1906), 157 u. 439, *Rend. Circolo di Palermo* **27** (1909) und E. Schmidt, *Rend. Circolo di Palermo* **25**, 53 (1908)) zu nennen.

In ihnen werden unendlich viele lineare Gleichungen

$$a_{\lambda 1} x_1 + a_{\lambda 2} x_2 + \cdots = y_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \infty)$$

untersucht; hierbei wird vorausgesetzt, daß in jeder einzelnen

Gleichung die Quadratsumme der absoluten Beträge der Koeffizienten, also

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} |a_{\lambda\mu}|^2 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \infty)$$

konvergiert. Betrachtet werden nur *reguläre Lösungen*, d. h. solche, bei denen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} |x_\lambda|^2$$

konvergiert. Unter den für die Gleichungskoeffizienten gemachten Annahmen werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz regulärer Lösungen abgeleitet und alle solche Lösungen durch immer konvergente Reihen dargestellt. Ein durch diese Methoden lösbares unendliches Gleichungssystem braucht durchaus nicht eine konvergente unendliche Determinante zu haben, wie z. B. das einfache Beispiel:

$$\lambda x_\lambda = y_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

lehrt. Ein Gleichungssystem

$$a_{\lambda 1} x_1 + a_{\lambda 2} x_2 + \cdots \qquad = y_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

mit Normaldeterminante $[a_{\lambda\mu}]$ erfüllt die Hilbert-Schmidtsche Bedingung für die Gleichungskoeffizienten; denn aus der unbedingten Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} a_{\lambda\lambda}$ und der unendlichen Doppelreihe der Nichtdiagonalglieder folgt die Konvergenz von $\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} |a_{\lambda\mu}|^2$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \infty)$.

Die Behandlung eines Gleichungssystems mit Normaldeterminante beschränkt sich jedoch nicht, wie dies die Hilbert-Schmidtsche Methode tut, auf die regulären Lösungen; so hat das triviale System $x_\lambda = 1$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ eine Normaldeterminante, seine Lösungen lassen sich mittelst der erweiterten Cramerschen Formeln (S. 164) finden, sind aber nicht regulär.

Hilbert betrachtet auch quadratische und bilineare Formen und orthogonale Substitutionen in unendlich vielen Veränderlichen. Wir heben den Begriff der *beschränkten Bilinearform von unendlich vielen Variablen* hervor. *Eine bi-*

lineare Form von unendlich vielen Variablen und mit beliebigen Koeffizienten

$$A = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} a_{ik} x_i y_k$$

heißt beschränkt, wenn eine positive Größe M existiert, so daß für jedes n der absolute Betrag des n^{ten} Abschnittes, d. h. die Größe

$$|A_n| = |\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i y_k|$$

kleiner als M bleibt für alle x_i, y_k, *für die* $\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2 = 1$, $\sum_{k=1}^{k=n} |y_k|^2 = 1$.

Hat man zwei beschränkte Bilinearformen A und B von unendlich vielen Variablen, so existiert ihr Produkt AB genau wie bei Bilinearformen von endlich vielen Variablen (vgl. § 6); das Produkt AB ist wiederum eine beschränkte Bilinearform. Für das Produkt dreier beschränkter bilinearer Formen gilt das assoziative Gesetz. Hingegen gibt es bei beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Variablen nicht mehr notwendig eine einzige *reziproke* oder *inverse* beschränkte bilineare Form. Ist z. B. $A = \sum_{i=1}^{i=\infty} x_i y_{i+1}$, so ist $AX = E$ lösbar durch $\sum_{i=1}^{i=\infty} a_i x_1 y_i + x_{i+1} y_i$, wobei $a_1, a_2, \ldots$ willkürlich bleiben. Besitzt eine unendliche Bilinearform sowohl eine vordere als eine hintere Reziproke, so sind beide einander gleich und daher die einzigen (vgl. Hellinger u. Toeplitz, *Gött. Nachr.* (1906), Toeplitz, ebenda (1907), 101 u. 110).

Über die Verwendung unendlicher Determinanten in der Theorie der linearen Differentialgleichungen vgl. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* **1**, 274, $\mathbf{2}_1$, 529, Horn, *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Samml. Schubert* **50**, Leipzig 1905, S. 206.

Wegen unendlicher Determinanten vgl. auch die Darstellung von A. Pringsheim in der *Encykl. d. math. Wiss.* **1**, 141.

§ 17. Kubische Determinanten und solche höheren Ranges.

Sind a_{fgh} n^3 Elemente mit drei Indices, so heißt die Summe von $(n!)^2$ Gliedern $\varepsilon a_{1g_1h_1} a_{2g_2h_2} \ldots a_{ng_nh_n}$ eine *kubische Determinante* $D^{(1)}$, falls $g_1, g_2, \ldots, g_n$ und $h_1, h_2, \ldots, h_n$ jede Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeuten und ε die positive oder negative Einheit ist, je nachdem die Summe der Inversionen in den zwei Anordnungen $g_1, g_2, \ldots, g_n$ und $h_1, h_2, \ldots, h_n$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. In einer kubischen Determinante sind $n!$ gewöhnliche Determinanten enthalten.

Anstatt die ersten Indices in der Reihenfolge $1, 2, \ldots, n$ geordnet anzunehmen und die zweiten und dritten Indices zu permutieren, kann man auch die zweiten Indices natürlich geordnet denken, die ersten und dritten permutieren und nach ihnen die Vorzeichenbestimmung vornehmen. Dann erhält man eine *kubische Determinante* $D^{(2)}$. Durch Festbleiben der dritten Indices kann schließlich eine *kubische Determinante* $D^{(3)}$ definiert werden. Die drei kubischen Determinanten $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ und $D^{(3)}$ sind im allgemeinen verschieden.

Kubische Determinanten wurden zuerst (1861) von de Gasparis behandelt. Wegen ihrer Eigenschaften und Literatur sei auf Pascal, *Determinanten,* S. 184, Günther, *Determinanten,* sowie Scott, *The theory of determinants,* S. 110, verwiesen; wir begnügen uns hier mit Hervorhebung von Hedrick, *Annals of math.* (2) **1**, 49 (1900), wegen der zahlreichen Literaturangaben.

Unendliche kubische Determinanten behandelt Cazzaniga, *Math. Ann.* **53**, 272 (1900).

Noch allgemeiner lassen sich *Determinanten höheren Ranges* als Summen von $(n!)^{\nu-1}$ Gliedern einführen; jedes Glied ist, abgesehen von der positiven oder negativen Einheit, ein Produkt von n Faktoren; jeder dieser weist ν Indices auf. Die Determinante $D^{(1)}$ wird aus dem Glied $a_{111\ldots1} a_{222\ldots2} \ldots a_{nnn\ldots n}$ gewonnen, indem man bei den n Faktoren die ersten Indices festhält und die $\nu - 1$ folgenden auf jede Art anordnet; jedes Glied erhält das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Summe der Inversionen, welche die $\nu - 1$ variablen Indices liefern, eine gerade oder ungerade Zahl ist. Wegen Determinanten höheren Ranges vgl. Gegenbauer, *Wiener Akad. Denkschriften* **43**, zweiter Teil, 17 (1882), **46**, 291 ff. (1883), G. v. Escherich, ebenda **43**, 1 (1882).