Kapitel VI.

Reihen, Produkte, Kettenbrüche.

Von *Paul Epstein* in Straßburg.

---

§ 1. Endliche Reihen.

Eine nach irgendeiner Vorschrift gebildete Folge von Zahlen

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

heißt eine *Reihe*. Die Reihe heißt *endlich*, wenn ein letztes Glied u_n existiert, im andern Fall hat man eine *unendliche* Reihe.

Unter den endlichen Reihen sind die *arithmetischen* und *geometrischen* Reihen besonders hervorzuheben.

I. Eine *arithmetische Reihen* k^{ter} *Ordnung* liegt vor, wenn die *Glieder der* k^{ten} *Differenzenreihe konstant* und nicht null sind (vgl. Differenzenrechnung § 1).

Das *allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe 1. Ordnung* ist also

$$u_\nu = a + \nu d. \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Die Summe einer arithmetischen Reihe 1. Ordnung von n Gliedern ist gleich dem Produkt der Gliederzahl mit dem arithmetischen Mittel des Anfangs- und Endglieds (Diophant).

Das allgemeine Glied u_ν *einer arithmetischen Reihe* k^{ter} *Ordnung ist eine ganze rationale Funktion* k^{ten} *Grades von* ν *und jede Reihe mit dem allgemeinen Glied*

$$u_\nu = c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + \cdots + c_k\nu^k \qquad \nu = 0, 1, 2 \ldots$$

ist eine arithmetische Reihe k^{ter} *Ordnung (de Lagny, Hist. de l'acad. d. sc.* (1722) 281).

Anstatt der Potenzen von ν führt man zweckmäßig die *Binomialkoeffizienten* ein und hat

$$(1) \qquad u_\nu = a_0 + a_1\binom{\nu}{1} + a_2\binom{\nu}{2} + \cdots + a_k\binom{\nu}{k}.$$

Darin sind $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die *Anfangsglieder der* 0^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten} ... *Differenzenreihe* ($a_0 = u_0$).

Die Summe der n ersten Glieder der arithmetischen Reihe k^{ter} *Ordnung ist*

$$(2) \qquad n a_0 + \binom{n}{2} a_1 + \binom{n}{3} a_2 + \cdots + \binom{n}{k+1} a_k .$$

Die Formeln (1) und (2) sind von Jac. Bernoulli (1654 bis 1705) in der *Ars conjectandi* (1713) 98, (Ostwalds *Klassiker* Nr. 107) gegeben. Ihrem Inhalt nach waren sie schon Newton (*Principia* III[b], *Lemma* V) bekannt, vgl. auch Leibniz, *Math. Schriften* **1**, 27, herausg. von Gerhardt (Brief an Oldenburg vom 3. 2. 1673).

Zu den wichtigsten arithmetischen Reihen höherer Ordnung gehören die *Potenzsummen der n ersten natürlichen Zahlen.* Ist

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_0(n) = n,$$

so bestehen die Rekursionsformeln:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S_k(n) + \binom{k+1}{2} S_{k-1}(n) + \cdots$$
$$+ \binom{k+1}{k} S_1(n) + S_0(n).$$

$$0 = n^{k+1} - \binom{k+1}{1} S_k(n) + \binom{k+1}{2} S_{k-1}(n) + \cdots$$
$$+ (-1)^{k+1} S_0(n).$$

Allgemein stellt sich $S_k(n)$ mit Hilfe der *Bernoullischen Zahlen*

$$B_1 = \frac{1}{2}; \; B_2 = \frac{1}{6}, \; B_4 = -\frac{1}{30}, \; B_6 = \frac{1}{42}, \; B_8 = -\frac{1}{30}, \cdots$$
$$B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$$

dar (vgl. Differenzenrechnung § 3), nämlich

$$S_k(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + B_1 n^k + \frac{B_2}{2}\binom{k}{1} n^{k-1} + \frac{B_4}{4}\binom{k}{3} n^{k-3}$$
$$+ \frac{B_6}{6}\binom{k}{5} n^{k-5} + \cdots$$

oder symbolisch

$$S_k(n) = \frac{(n+B)^{k+1} - B^{k+1}}{k+1}.$$

www.rcin.org.pl

Bis $S_{11}(n)$ sind die Potenzsummen bereits von Faulhaber (um 1612) berechnet worden. Die ersten von ihnen sind

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S_4(n) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$S_5(n) = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$$S_6(n) = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$S_7(n) = \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2).$$

Zwischen diesen Summen bestehen mannigfache Relationen, von denen außer der schon im 11. Jahrhundert den Arabern bekannten $S_3(n) = S_1(n)^2$ nur die Jacobische

$$S_7(n) + S_5(n) = 2 S_1(n)^4$$

erwähnt sei. Lampe (*Journ. f. Math.* **84**, 270 (1878)), vgl. Lucas, *Théorie des nombres,* p. 224, Bachmann, *Niedere Zahlentheorie* **2**, 17 (1910).

Andere arithmetische Reihen sind:

Die Reihen der Potenzen der ungraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots (2n-1) = n^2$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \binom{2n+1}{3}$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Allgemein:

$$1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k = S_k(2n) - 2^k S_k(n).$$

Die *Polygonalzahlen* bilden arithmetische Reihen 2. Ordnung, die *Pyramidalzahlen* solche 3. Ordnung (vgl. *Kombinatorik* S. 49). Die Summe der *Dreieckszahlen* ist

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

die n^{te} *Tetraederzahl.*

www.rcin.org.pl

II. Bei einer *geometrischen Reihe* haben je zwei aufeinanderfolgende Glieder ein *konstantes Verhältnis*. Eine solche Reihe von n Gliedern ist allgemein

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}\cdot$$

§ 2. Unendliche Reihen.

Bei einer unendlichen Reihe

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots$$

bilde man die *Summe der n ersten Glieder*

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

und untersuche den Grenzwert von s_n für $n = \infty$. Wenn ein solcher existiert und *endlich* ist, so heißt die Reihe *konvergent* und $\lim s_n = s$ heißt die *Summe* der Reihe; man schreibt

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots.$$

Ist aber $\lim s_n = \pm\infty$, so ist die Reihe *divergent*, und wenn kein Grenzwert existiert, also obere und untere Grenze von s_n verschieden sind, so sagt man, die Reihe ist *unbestimmt* oder *oszilliert*.

Eine Reihe mit *komplexen* Gliedern ist konvergent, wenn die aus den reellen und die aus den imaginären Bestandteilen gebildete Reihe konvergiert.

Eine Reihe $\sum u_n$ ist immer konvergent, wenn die Reihe $\sum |u_n|$ der absoluten Werte ihrer Glieder konvergiert. In diesem Fall heißt die Reihe *absolut* konvergent; *sie konvergiert bei jeder beliebigen Anordnung ihrer Glieder und zwar stets gegen dieselbe Summe.* Deshalb nennt man eine derartige Reihe auch *unbedingt konvergent.*

Eine Reihe mit komplexen Gliedern ist *absolut konvergent*, wenn die beiden aus den reellen und aus den imaginären Teilen gebildeten Reihen absolut konvergieren.

Es kann aber auch eine Reihe $\sum u_n$ konvergieren, während die Reihe der absoluten Werte $\sum |u_n|$ *divergiert;* in diesem Falle heißt die ursprüngliche Reihe *einfach* konvergent, und ihre Summe hängt wesentlich von der Anordnung der Glieder ab. Bei einer solchen Reihe mit *reellen* Gliedern kann man durch geeignete Umstellung jeden beliebigen Wert erreichen. Deshalb nennt man eine derartige Reihe auch *bedingt konvergent.* Cauchy,

www.rcin.org.pl

Résumé anal. (1833), 57; Dirichlet, *Berl. Abh.* (1837), 48, *Werke* **1**, 318; Riemann, *Werke*, S. 235; Schlömilch, *Z. f. Math.* **18**, 520 (1873), Pringsheim, *Math. Ann.* **23**, 455 (1883).

Eines der bekanntesten Beispiele einer bedingt konvergenten Reihe ist die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$. Bei dieser Anordnung der Glieder ist ihre Summe $\ln 2$; läßt man aber auf je m positive Glieder n negative folgen, so ist die Summe $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m}{n}\right)$. Es ist also z. B. $(m = 1,\ n = 4)$:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots = 0.$$

Das *notwendige und hinreichende Kriterium für die Konvergenz einer Reihe* ist von Bolzano (*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes usw.* 1817; Ostwalds *Klassiker* Nr. 153) gegeben worden, nämlich:

Die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ ist konvergent, wenn für hinreichend große Werte von n der absolute Wert der Differenz

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}|$$

für jede natürliche Zahl p beliebig klein wird (vgl. S. 13).

Dieses Kriterium ist aber nur in wenigen Fällen wirklich anwendbar; man hat deshalb bequemer zu handhabende Kriterien aufgestellt, mit denen man in den meisten Fällen auskommt.

Wir erwähnen zunächst den einfachen Satz:

Wenn die Glieder einer Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, ihrem absoluten Wert nach abnehmen und der Null zustreben, so konvergiert die Reihe (Leibniz *um* 1674, *Schriften* **5**, 112, *Brief an* Joh. Bernoulli *vom* 10. 1. 1714).

Im folgenden ist, wo nichts anderes bemerkt, von Reihen mit *reellen positiven* Gliedern die Rede.

Die Grundlage der meisten Kriterien bildet das Prinzip der *Reihenvergleichung*, indem man nämlich die vorgelegte Reihe Glied für Glied mit einer bereits als konvergent oder divergent erkannten Reihe mit reellen positiven Gliedern (*Majorante*) vergleicht.

Am häufigsten werden als Vergleichsreihen benutzt:

Die unendliche *geometrische* Reihe $1 + q + q^2 + \cdots$. Sie *konvergiert*, wenn $|q| < 1$, und ihre Summe ist dann $\frac{1}{1-q}$; sie *divergiert*, wenn $|q| \geqq 1$.

www.rcin.org.pl

Die Reihen $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$. Sie *konvergieren*, wenn $p > 1$, *divergieren*, wenn $p \leqq 1$ ist (Waring, *Meditat. analyt.* 1781).

Die gebräuchlichsten Kriterien enthalten Ausdrücke, in denen entweder nur das allgemeine Glied u_n (*Kriterien erster Art*) oder das Verhältnis $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern (*Kriterien zweiter Art*) vorkommt (Du Bois-Reymond, *J. f. Math.* **76**, 61 (1873)).

Es sei $\frac{1}{d_n}$ bzw. $\frac{1}{c_n}$ das allgemeine Glied einer divergenten bzw. konvergenten Reihe, ferner (a_n) eine ganz beliebige positive Zahlenfolge, so sind die *Hauptformen der Kriterien 1. und 2. Art* für die Divergenz und Konvergenz der Reihe $\sum u_n$ nach Pringsheim, *Math. Ann.* **35**, 297 (1890), *Enzykl.* **1**, 84:

Kriterien 1. Art:[1]

$$\underline{\lim}\, d_n u_n > 0 \qquad \text{Divergenz.}$$

$$\overline{\lim}\, c_n u_n < \infty \qquad \text{Konvergenz.}$$

Kriterien 2. Art:

$$\overline{\lim}\left(d_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - d_{n+1}\right) < 0 \quad \text{Divergenz.}$$

$$\lim\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) > 0 \quad \text{Konvergenz.}$$

Das letzte Kriterium wurde bereits von Kummer, *J. f. Math.* **13**, 171 (1835), für den speziellen Fall $a_n = n$ von Raabe, *J. f. Math* **11**, 309 (1834), angegeben und zur Transformation einer Reihe in eine stärker konvergierende benutzt (Kummer, *J. f. Math.* **16**, 206 (1837)); vgl. Catalan, *Mém. Belg. cour.* **33**, (1865). Durch geeignete Wahl der a_n, c_n, d_n kann man Skalen von immer wirksameren Kriterien bilden, unter denen die bekanntesten anderweitig aufgestellten Kriterien enthalten sind. Von diesen nennen wir:

Cauchys *Kriterium 1. Art* (*Anal. algebr.* (1821) 133):

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{u_n} > 1 \ \textit{Divergenz.} \qquad \overline{\lim}\, \sqrt[n]{u_n} < 1 \ \textit{Konvergenz.}$$

Cauchys *Kriterium 2. Art* (ebda., jedoch bereits bei Waring, *Meditat. analyt.* (1781)):

---

1) $\overline{\lim}$ bedeutet den *oberen*, $\underline{\lim}$ den *unteren* Grenzwert.

www.rcin.org.pl

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ Divergenz}, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ Konvergenz}.$$

Zu den Kriterien 1. Art gehört auch das *Integralkriterium von* Cauchy, *Anc. Exerc.* **2**, 221, (1827): *Ist $f(x)$ eine von einem bestimmten Wert $x = a$ ab positive, monoton bis zu null (für $x = \infty$) abnehmende Funktion, so konvergiert oder divergiert die Reihe $\sum f(n)$, je nachdem das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ einen Sinn hat oder nicht* (vgl. Hurwitz, *Math. Ann.* **44**, 83 (1894), Pringsheim, *Chicago Math. Congr. Papers* (1893) 328).

Die den oben angeführten Hauptformen entsprechenden Kriterien für Reihen mit *komplexen* Gliedern hat Pringsheim, *Arch. d. Math. u. Phys.* (3) **4**, 1 (1903) gegeben. Es sei darüber der Satz mitgeteilt:

Läßt sich bei einer Reihe $\sum u_n$ eine Entwicklung

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{r(n)}{n^2}$$

ansetzen, wobei $a = \alpha + i\beta$ eine bestimmte, von n unabhängige Zahl, $r(n)$ eine mit wachsendem n endlich bleibende Größe bedeutet, so ist die Reihe unbedingt konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leqq 1$ (Gauß, *Werke* **3**, 139; Weierstraß, *Werke* **1**, 185). Die Reihe $\sum(-1)^n u_n$ ist für $\alpha > 1$ *unbedingt*, für $0 < \alpha \leqq 1$ *bedingt konvergent* und für $\alpha \leqq 0$ *divergent*.

Die folgenden Sätze gestatten, aus dem Verhalten einer oder mehrerer Reihen auf das Verhalten einer neu zu bildenden Reihe zu schließen:

1. *Ist $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, so konvergieren oder divergieren zu gleicher Zeit die Reihen $\sum u_n$ und $\sum \frac{u_n}{s_n}$.*

Ist $\sum u_n$ divergent, so konvergiert für jedes $\alpha > 0$ die Reihe $\sum \frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}}$. Vgl. Abel, *J. f. Math.* **3**, 81 (1828), *Œuvres* **2**, 198; Dini, *Ann. Univ. Tosc.* **9**, 49 (1867).

2. *Sind $a_1, a_2, a_3 \ldots$ positive, mit wachsendem n nicht zunehmende Größen und $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ und bleibt $\sum\limits_1^t b_n$ für jedes t unter einer endlichen Schranke, so konvergiert die Reihe $\sum a_n b_n$.*

3. *Ist $\sum a_n$ absolut konvergent und bleibt $\left|\sum\limits_1^t b_n\right|$ für jedes*

www.rcin.org.pl

t unter einer endlichen Schranke, so ist die Reihe $\sum a_n b_n$ absolut konvergent.

4. *Ist $\sum b_n$ konvergent und $\sum (a_{n+1} - a_n)$ absolut konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum a_n b_n$* (Dedekind *in* Dirichlets *Vorl. üb. Zahlenth.*, 4. Aufl., 376, Hadamard, *Acta math.* **27**, 178 (1903)).

Die Beweise der letzten Sätze beruhen auf der von Abel, *J. f. Math.* **1**, 314 (1826) angegebenen *partiellen Summation*:

$$\sum_1^t a_n b_n = \sum_1^{t-1} (a_n - a_{n+1}) s_n + s_t a_t. \quad (s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

Über das *Rechnen mit Reihen* gelten folgende Sätze:

1. Sind die Reihen $\sum u_n$ und $\sum v_n$ gegeben, so heißt $\sum (u_n + v_n)$ die *Summe* und $\sum (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1)$ das *Produkt* der beiden Reihen.

2. *Die Summe von zwei konvergenten Reihen ist eine konvergente Reihe, deren Wert gleich der Summe der Werte der gegebenen Reihen ist.*

3. *Das Produkt von zwei konvergenten Reihen konvergiert, sobald eine der Reihen absolut konvergiert, und sein Wert ist gleich dem Produkt der Werte der beiden gegebenen Reihen* (Mertens, *J. f. Math.* **79**, 182 (1875), Jensen, *Nouv. Corr. math.* (1879) 430).

4. *Die Summe und das Produkt von zwei unbedingt konvergenten Reihen ist unbedingt konvergent* (Cauchy, *Cours d'analyse*).

Sind beide Reihen *bedingt* konvergent, so kann die Produktreihe divergieren, stets aber existiert ein Grenzwert für das Verhältnis $\frac{s_1 + s_2 + \cdots s_n}{n}$, und er ist gleich dem Produkt der Werte der beiden gegebenen Reihen (Cesàro, *Bull. d. sc. math.* **14**, 114 (1890), Borel, *Leç. s. l. sér. diverg.* 88. Weitere Literaturangaben bei Landau, *Rend. Circ. mat. Palermo* **24**, 81 (1907)).

Eine Reihe heißt *semikonvergent,* wenn die Summen

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

bis zu einem bestimmten Wert N von n einer gewissen anderweitig definierten Zahl A immer näher kommen, für größere n sich aber immer weiter von A entfernen und schließlich unendlich groß werden. Diese Reihen sind also divergent, aber

www.rcin.org.pl

sie verhalten sich bis zum N^{ten} Glied wie konvergente Reihen und sind in vielen Fällen zur numerischen Berechnung der Größe A sehr geeignet. Man wird auf sie geführt bei Anwendung der *Euler-Maclaurinschen Summenformel* (vgl. Differenzenrechnung), bei Ermittlung von *bestimmten Integralen* (vgl. Riemann-Weber, *Part. Differentialgl.*, Braunschweig 1900, S. 58), bei Auflösung von *linearen Differentialgleichungen* (vgl. Horn, *Gewöhnliche Differentialgl.*, Leipzig 1905, S. 188). In allen diesen Fällen ist A Funktion einer Veränderlichen x; dann sind die Glieder der Reihe ebenfalls Funktionen von x, und die Anwendbarkeit nimmt mit wachsendem x zu, d. h. die Zahl N der zu summierenden Reihenglieder ist von x abhängig, und die Differenz $A - s_n$ kann um so kleiner gemacht werden, je größer x ist. Deshalb dienen die semikonvergenten Reihen vor allem dazu, um die Werte einer Funktion für sehr große x zu berechnen. Die Reihe hat dann gewöhnlich die Form einer nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitenden Potenzreihe, und nach Poincaré (*Acta math.* **8**, 285 (1886)) bezeichnet man eine divergente Entwicklung $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$ als *asymptotische Darstellung* einer Funktion $f(x)$, wenn für jedes n

$$\lim_{x=\infty} x^n \left[f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} \right) \right] = 0$$

ist. Vgl. Borel, *Leç. s. l. séries divergentes* 1901, p. 26.

Divergente Reihen wurden von fast allen Mathematikern des 18. Jahrhunderts unbedenklich benutzt; vor allem hat Euler von ihnen ausgedehnten Gebrauch in folgendem Sinn gemacht: Wenn sich eine Funktion $F(x)$ auf irgendeine Weise formal in eine Reihe von Funktionen

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

entwickeln läßt, und die Reihe für $x = a$ divergiert, so wird der Funktionswert $F(a)$ als Summe der divergenten Reihe angesehen. So ist z. B.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \lim_{x=1} (1 - x + x^2 - \cdots) = \lim_{x=1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

Diese schon von Nik. Bernoulli, d'Alembert u. a. bekämpfte Auffassung (vgl. Pringsheim, *Enzykl.* **1**, 105) wurde

www.rcin.org.pl

seit Abel und Cauchy vollständig verlassen, und man arbeitete bis Ende des 19. Jahrhunderts nicht mehr mit divergenten Reihen. Erst in neuerer Zeit hat man mit Erfolg versucht, sie strenger Behandlung zugänglich zu machen. Den verschiedenen dabei vorgeschlagenen Methoden ist als leitender Gesichtspunkt gemeinsam, daß man einer divergenten Reihe einen bestimmten *konvergenten* Prozeß zuordnet. So ersetzen Laguerre (*Bull. Soc. math. France* **7**, 72 (1878/79) und Stieltjes (*Ann. fac. sc. Toulouse* **8**, (1894) und **9** (1895)) die divergenten Reihen durch Kettenbrüche und bestimmte Integrale, Padé (*Ann. éc. norm.* (3) **9**, (1892) supplém., *Acta math.* **18**, 97 (1894), *Ann. éc. norm.* (3) **19**, 187 (1902)) ebenfalls nach dem Vorgang von Laguerre durch konvergente Folgen von rationalen Funktionen, die als Näherungsbrüche von Kettenbrüchen aufgefaßt werden können. Von größerer Tragweite sind die *Methoden der Bildung von Mitteln*, die auf einen Satz von Frobenius, *J. f. Math.* **89**, 262 (1880) zurückgehen: *Ist* $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_n$, *so ist*

$$\lim_{x=1} \sum_0^\infty a_n x^n = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots s_n}{n+1},$$

sobald der Grenzwert auf der rechten Seite existiert und x wachsend den Grenzwert 1 *erreicht.*[1]) Es haben dann Cesàro, *Bull. sc. math.* **14**, 114 (1890) und Hölder, *Math. Ann.* **20**, 535 (1882) Mittel höherer Ordnung gebildet. Cesàro definiert

$$s_n^{(1)} = s_0 + s_1 + \cdots + s_n, \ldots s_n^{(k)} = s_0^{(k-1)} + \cdots + s_n^{(k-1)}$$

und bezeichnet die divergente Reihe $\sum a_n$ als γ-fach unbestimmt mit der Summe S, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \frac{k!\, s_n^{(k)}}{n^k} = S$ für $k = \gamma$ existiert, für $k < \gamma$ aber nicht. Hölder bildet die Mittel

$$s_n^{(1)} = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}, \ldots s_n^{(k)} = \frac{s_0^{(k-1)} + \cdots + s_n^{(k-1)}}{n+1}$$

und der divergenten Reihe $\sum a_n$ wird als Summe der Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(k)} = S$ für das kleinste $k = \gamma$ zugeordnet. Für die Grenzwerte von Cesàro und Hölder gilt der Satz (Knopp, *Diss. Berlin* (1907), Schnee, *Math. Ann.* **67**, 110 (1909)), daß

1) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des *Stetigkeitssatzes* von Abel (s. u. S. 434).

www.rcin.org.pl

die Existenz des einen zugleich die des anderen mit demselben $k = \gamma$ nach sich zieht und dann beide denselben Wert S haben. Wichtige Anwendungen dieser Mittelwerte (bis zur 2. Ordnung) auf die Theorie der Fourierschen und Laplaceschen *Reihen* hat Fejér, *Math. Ann.* **58**, 51 (1904) und ebda. **67**, 76 (1909) gemacht.

Auch die Theorie von Borel (zusammenfassende Darstellung in *Leçons s. l. séries divergentes*, Paris 1901) beruht auf der Methode der Mittelwerte. Borel nennt eine Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *summierbar* und S ihre Summe, wenn der Grenzwert $S = \lim\limits_{t=\infty} e^{-t} \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!}$ existiert. Er läßt sich dann durch das bestimmte Integral $S = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} u(t)\, dt$ ausdrücken, wobei $u(t) = \sum\limits_0^{\infty} u_n \frac{t^n}{n!}$ die zur Reihe $\sum u_n$ *assoziierte ganze Funktion* ist. Notwendige Voraussetzung zur Summierbarkeit dieser Reihe ist also die Konvergenz von $u(t)$ für jedes endliche t. Borel definiert weiter den Begriff der *absolut* summierbaren Reihen und zeigt, daß sie in bezug auf Vertauschbarkeit der Glieder, Addition, Multiplikation genau die Eigenschaften der absolut konvergenten Reihen besitzen. Vgl. jedoch hierzu Hardy, *Quart. Journ.* **35**, 22 (1903).

§ 3. Reihen von Funktionen.

Sind die Glieder einer unendlichen Reihe Funktionen einer reellen Veränderlichen:

$$(1) \qquad f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

und ist

$$(2) \qquad s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_n(x),$$

so heißt die Reihe *konvergent in einem Bereich* $a \leqq x \leqq b$, wenn für jedes x dieses Bereiches eine Zahl N gefunden werden kann, so daß zu jedem beliebigen positiven ε für jedes $n > N$ und jede natürliche Zahl p:

$$| s_{n+p}(x) - s_n(x) | < \varepsilon.$$

Der Wert von N hängt von der Größe ε ab und wird im allgemeinen in verschiedenen Punkten x des Bereiches verschie-

www.rcin.org.pl

den sein. Wenn aber ein endlicher *von x unabhängiger Wert* der Zahl N gefunden werden kann, so heißt die Reihe *gleichmäßig konvergent* in dem Bereich $a \leqq x \leqq b$. Stokes, *Cambr. Trans.* **8**, 533 (18 7), Seidel, *Münch. Abh.* II. Kl. **7**, 381 (1848). (Ostwalds *Klassiker* Nr. 116.)

Gleichmäßige und *absolute* Konvergenz sind nicht immer miteinander verbunden, man kann aber durch geeignete Zusammenfassung der Glieder eine gleichmäßig konvergierende Reihe auch absolut konvergent machen (Borel, *Acta math.* **24**, 355). Es gilt ferner der Satz:

Eine Reihe von Funktionen konvergiert absolut und gleichmäßig, wenn die aus den oberen Grenzen der absoluten Beträge der Glieder gebildete Reihe konvergiert (Weierstraß, *Werke*, **2**, 202).

An allen Stellen x, wo die Reihe (1) konvergiert, definiert sie eine Funktion $F(x) = \lim\limits_{n=\infty} s_n(x)$. Zur Stetigkeit von $F(x)$ genügt es nicht, daß die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... stetig sind. Es besteht jedoch der Satz:

Wenn eine Reihe von stetigen Funktionen in einem Bereich $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig konvergiert, so ist die Summe der Reihe in diesem Bereich eine stetige Funktion.

Es ist aber die gleichmäßige Konvergenz nicht *notwendige* Bedingung für die Stetigkeit der Reihensumme. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür wurde von Arzelà gegeben (*Mem. Acc. Bologna* (5) **8**, 131 (1900); *Rend. Acc. Bologna* **7**, (1903)). Vgl. Borel, *Leçons s. l. fonctions de var. réelles* (1905), 41.

Ihre wichtigste Anwendung finden die hier vorliegenden Reihen in der sogenannten *Darstellung willkürlicher Funktionen*, d. h. in dem Problem, eine gegebene Funktion durch eine Reihe darzustellen, die nach Funktionen von vorgeschriebener Natur fortschreiten. Dabei kommen hauptsächlich in Betracht: 1 *Entwicklungen nach ganzen rationalen Funktionen* (Polynomen), insbesondere *Potenzreihen*, 2. *Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen*, insbesondere *Fouriersche (trigonometrische) Reihen*. Diese letzteren werden in Kap. XXII behandelt.

Die Entwicklungen nach Polynomen beruhen auf dem Satz von Weierstraß (*Berl. Sitzungsber* (1885), 633, 789; *Werke* **3**, 1):

Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall (a, b) mit Einschluß der Grenzen stetig und ε eine beliebige positive Zahl, so kann man eine ganze rationale Funktion $P(x)$ derart be-

www.rcin.org.pl

stimmen, daß in dem ganzen Intervall

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

ist.

Vgl. hierzu Borel, *Leç. s. l. fonctions de variables réelles,* Paris 1905, 50, woselbst zahlreiche Literaturangaben, Landau, *Rend. Circ. mat. Palermo* **25**, 337 (1908), Lebesgue, ebenda **26**, 325 (1908); Fejér, *Math. Ann.* **67**, 97 (1909).

Wählt man für ε der Reihe nach die Glieder $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ einer konvergenten Reihe und ist $P_n(x)$ ein dem Wert ε_n entsprechendes Polynom, so ist

$$P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \cdots + (P_n - P_{n-1}) + \cdots$$

eine Darstellung von $f(x)$ durch eine Reihe von Polynomen. Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in dem ganzen Intervall (a, b).

In enger Beziehung mit dieser Darstellung steht das Problem der *Interpolation* durch ganze rationale Funktionen; dabei ist aber bemerkenswert, daß die Interpolationsformel von Lagrange (vgl. *Algebra* § 4, *Differenzenrechnung* § 2) bei Vermehrung der Argumente nicht unter allen Umständen eine immer stärkere Annäherung an die darzustellende Funktion liefert (vgl. Runge, *Ztschr. f. Math. u. Phys.* **46**, 229 (1901), Borel, *Leçons s. l. fonctions de var. réelles,* p. 74).

Tschebyscheff stellte sich die Aufgabe, eine beliebig gegebene Funktion $f(x)$ durch ein Polynom n^{ten} Grades $P_n(x)$ in einem Intervall so darzustellen, daß das Maximum von $|f(x) - P_n(x)|$ in dem Intervall möglichst klein wird. Über seine Arbeiten und die anschließende Literatur vgl. den Bericht von Burkhardt, *Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen*, Leipzig 1908, S. 823—865; Liebmann, *Math. Ver.* **18**, 433 (1909).

Die wichtigsten polynomischen Entwicklungen sind die *Potenzreihen*, d. h. die Reihen von der Form

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots.$$

Eine erschöpfende Behandlung erfordert die Heranziehung *komplexer* Werte für die Veränderliche x und ist Sache der Funktionentheorie. Hier sollen nur die folgenden Sätze erwähnt werden:

Eine Potenzreihe konvergiert absolut für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als eine bestimmte positive

www.rcin.org.pl

Zahl r, sie divergiert für alle x, deren absoluter Betrag größer ist als r.

Bei geometrischer Darstellung der komplexen Zahlen liegen alle Punkte x, für die die Reihe absolut konvergiert, innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius r. Dieser Kreis heißt *Konvergenzkreis*, r der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Die Größe des Konvergenzradius wird durch den Satz von Cauchy (*Analyse algébr.* 1821, S. 286) bestimmt:

Der reziproke Wert von r ist gleich dem oberen Grenzwert der Zahlen $\sqrt[n]{|c_n|}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Ist dieser Grenzwert 0, so ist $r = \infty$, die Reihe konvergiert für *jeden* endlichen Wert von x; ist der Grenzwert ∞, so ist $r = 0$, die Reihe divergiert für jeden von Null verschiedenen Wert von x.

In jedem Bereich, welcher vollständig innerhalb des Konvergenzkreises liegt, also für $|x| \leqq \varrho < r$ *konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig und stellt daher dort eine stetige Funktion von x dar.*

Konvergiert die Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ *für* $|x| < 1$ *und ist* $\sum\limits_0^\infty a_n$ *konvergent, so ist* $\lim\limits_{x=1} \sum a_n x^n = \sum a_n$. *Abelscher Stetigkeitssatz, J. f. Math.* **1**, 329 (1826).

Wenn zwei Potenzreihen für alle Werte von x in der Nachbarschaft von $x = 0$ *dieselbe Summe haben, so sind die Reihen identisch, d. h. es müssen die Koeffizienten gleicher Potenzen in beiden Reihen übereinstimmen.* Dieser Satz (Descartes 1637) spielt als *Methode der unbestimmten Koeffizienten* in älteren Arbeiten eine große Rolle. Er beruht auf der Stetigkeit einer konvergenten Potenzreihe.

Die Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine Potenzreihe findet man, falls sie möglich ist, mit Hilfe des *Taylorschen Satzes*, vgl. *Differentialrechnung* § 6.

Als wichtigste Beispiele von Potenzreihen seien hervorgehoben:

1. *Binomische Reihe.*

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \cdots.$$

www.rcin.org.pl

Wenn n eine *ganze positive* Zahl ist, bricht die Reihe ab (Michael Stifel 1544); für jedes andere n ist die Reihe unendlich (Newton 1676) und *konvergiert absolut, sobald* $|x| < 1$ *ist. Wenn* $|x| = 1$ *ist*, konvergiert die Reihe nur für *positive* n absolut, für *negative* $n \leqq -1$ *divergiert* sie und für $-1 < n \leqq 0$ ist sie *bedingt konvergent*, mit Ausnahme von $x = -1$.

Den ersten strengen Beweis des binomischen Satzes hat für *reelle* x und n erst Euler, *Petrop. Comment.* **19**, 103 (1775), für *komplexe* Werte von x Cauchy, *Analyse algébr.* 1821, gegeben, die abschließende, auch für die allgemeine Theorie der Reihen grundlegende Untersuchung aber, in der auch komplexe Werte von n herangezogen werden und der Grenzfall $|x| = 1$ vollständig erledigt wird, bildet den Gegenstand der klassischen Abhandlung von Abel, *J. f. Math.* **1**, 311 (1826) (*Ostwalds Klassiker* Nr. 71).

Wichtige Spezialfälle der binomischen Reihe:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots.$$

2. Die *Exponentialreihen:*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \cdots.$$

Darin bedeutet

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

$$= 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353\ldots$$

die *Basis der natürlichen Logarithmen.* Die Reihen konvergieren für jedes endliche x. Die Reihe für e^x wurde von Newton (*Opuscula* **1**, 20) durch Umkehrung der logarithmischen Reihe gefunden.

www.rcin.org.pl

3. Die *logarithmischen Reihen.*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

konvergiert für $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme von $x = -1$. Diese Reihe wurde als erstes Beispiel einer Potenzreihe (gleichzeitig mit der geometrischen Reihe für $\frac{1}{1+x}$) von Mercator 1668 gefunden. Bei $x = 1$ hat man die bedingt konvergente Reihe für $\ln 2$.

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

konvergiert für $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme von $x = \pm 1$. Daraus für $x = \frac{1}{2z+1}$

$$\ln(z+1) = \ln z + 2\left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \cdots\right]$$

4. Die *goniometrischen Reihen.*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

konvergieren für jedes endliche x. Sie sind bereits von Newton (*Opuscula* **1**, 24) aufgestellt worden. Euler (*Introd. in anal. infinit.* (1748) 104) benutzt zu ihrer Ableitung den Satz von Moivre (*Misc. analyt.* 1730):

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

und findet zugleich den Zusammenhang der goniometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

5. Die folgenden Reihen sind mit den *Bernoullischen* und *Eulerschen Zahlen* gebildet. Näheres über diese siehe Kapitel XXII.

Die *Bernoullischen Zahlen*:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730},$$

$$B_{14} = \frac{7}{6}, B_{16} = -\frac{3617}{510}, B_{18} = \frac{43867}{798}, B_{20} = -\frac{174611}{330}, \ldots$$

www.rcin.org.pl

sind durch die symbolische Gleichung

$$(B+1)^n - B^n = n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definiert. Ihre erzeugende Funktion ist

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{k!} x^k$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2!} x^2 + \frac{B_4}{4!} x^4 + \cdots,$$

konvergent für $|x| < 2\pi$.

$$x \operatorname{ctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \qquad \text{konvergiert für } |x| < \pi$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} \qquad ,, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{\sin x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}-1}{(2k)!} B_{2k} x^{2k} \qquad ,, \qquad |x| < \pi$$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{k \cdot (2k)!} x^{2k} \qquad ,, \qquad |x| < \pi$$

$$\ln \cos x = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}{k \cdot (2k)!} B_{2k} x^{2k} \qquad ,, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\ln \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}(2^{2k-1}-1)}{k \cdot (2k)!} B_{2k} x^{2k} \qquad ,, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

Die *Eulerschen Zahlen:*

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385,$$
$$E_{10} = -50521, \quad E_{12} = 2702765, \ldots$$
$$E_1 = E_3 = E_5 = \cdots = 0$$

sind durch die symbolische Gleichung

$$(E+1)^n + (E-1)^n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definiert. Ihre erzeugende Funktion ist

www.rcin.org.pl

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k},$$

oder, wenn xi an Stelle von x gesetzt wird:

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

6. Die *zyklometrischen Reihen.*

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$

konvergiert für $|x| \leqq 1$ und gibt für reelle x den zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegenden *Hauptwert* der arcsin-Funktion.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

konvergiert für $|x| \leqq 1$, ausgenommen $x = \pm i$, und gibt für reelle x den zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegenden *Hauptwert* der arctg-Funktion. Die Reihe wurde 1671 von Gregory gefunden. Für $x = 1$ gibt sie die bedingt konvergente, zur numerischen Berechnung von π nicht geeignete Entwicklung

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Dagegen liefern die aus dem Additionstheorem

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv}$$

folgenden Relationen

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$$

$$= 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

sehr schnell konvergierende Entwicklungen für π. Die erste ist von Vega, die zweite von Machin 1706 angegeben worden; mit ihr hat Shanks, *Proc. Roy. Soc.* **22**, 45 (1873) (vgl. *Ztschr. f. math. Unt.* **26**, 263 (1895)) die Zahl π bis auf 707 Stellen berechnet. Es ist

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50\ldots.$$

www.rcin.org.pl

§ 4. Mehrfache Reihen.

Eine *Doppelreihe* entsteht durch Summation einer nach irgendeiner Vorschrift zu bildenden Folge von doppelt unendlich vielen Zahlen $u_{\mu\nu}\binom{\mu=1,2,3,\ldots}{\nu=1,2,3,\ldots}$. Ist

$$s_{m,n}=\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}u_{\mu\nu},$$

so heißt die Doppelreihe *konvergent* und die endliche Zahl S ihre *Summe*, wenn stets

$$\lim_{\substack{m=\infty\\ n=\infty}} s_{m,n}=S$$

ist, wie auch immer m und n unabhängig voneinander ins Unendliche wachsen (vgl. S. 34). Man schreibt dann[1])

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}{}' \sum_{\nu=1}^{\infty}u_{\mu\nu}=S.$$

Existiert aber kein bestimmter Grenzwert der $s_{m,n}$ oder ist $\lim s_{m,n}=\pm\infty$, so heißt die Doppelreihe *divergent*.

Aus den Gliedern der Doppelreihe kann man durch Heraushebung von einfach unendlichen Folgen beliebig viele einfache Reihen (Partialreihen) bilden. Zu diesen gehören die *Zeilenreihen* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_{\mu\nu}$ (mit festem μ) und die *Spaltenreihen* $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}u_{\mu\nu}$ (mit festem ν). Mit der Konvergenz der Doppelreihe ist nicht durchaus diejenige aller Zeilen- oder Spaltenreihen verbunden (Stolz, *Math. Ann.* **24**, 157 (1884)), nur für Doppelreihen mit *positiven* Gliedern muß das der Fall sein, und wenn eine Doppelreihe sowie ihre sämtlichen Zeilen- und Spaltenreihen konvergieren, so ist

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu}u_{\mu\nu}=\sum_{\mu}\Bigl(\sum_{\nu}u_{\mu\nu}\Bigr)=\sum_{\nu}\Bigl(\sum_{\mu}u_{\mu\nu}\Bigr).$$

---

1) Diese Schreibweise soll nicht bedeuten, daß zuerst nach ν und dann nach μ zu summieren ist. Soll dies der Fall sein, so schreibt man $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\Bigl(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_{\mu\nu}\Bigr)$. Dies ist in Wirklichkeit keine Doppelreihe, sondern eine einfache Reihe, gebildet mit den Summen der (als konvergent vorauszusetzenden) Reihen $\sum\limits_{\nu}u_{\mu\nu}$.

www.rcin.org.pl

Man kann auf beliebig viele Arten die Glieder einer Doppelreihe so anordnen oder in Gruppen zusammenfassen, daß eine einfache Reihe entsteht. Diese einfachen Reihen brauchen bei Konvergenz der Doppelreihe nicht sämtlich zu konvergieren. Besonders übersichtlich sind die mittels „*Rechteckanordnung*“ hervorgehenden einfachen Reihen gebildet. Vgl. London, *Math. Ann.* **53**, 360 (1900), wo der Satz bewiesen wird: *Zur Konvergenz einer Doppelreihe ist notwendig und hinreichend, daß sämtliche aus ihr mittels Rechteckanordnung hervorgehenden einfachen Reihen konvergieren.*

Ist eine Doppelreihe mit positiven Gliedern konvergent, so konvergiert zur gleichen Summe die nach *Diagonalen* geordnete einfache Reihe $\sum\limits_{\lambda}(u_{1,\lambda} + u_{2,\lambda-1} + \cdots u_{\lambda,1})$.

Eine Doppelreihe heißt *absolut konvergent*, wenn die aus den absoluten Werten ihrer Glieder gebildete Doppelreihe konvergiert. Eine absolut konvergente Doppelreihe ist immer auch *unbedingt* konvergent, d. h. sie besitzt bei jeder Anordnung der Glieder dieselbe Summe. Es gilt hiervon auch die Umkehrung (Pringsheim, *Münch. Ber*, **27**, 135 (1897)).

Wenn die Doppelreihe *absolut* konvergiert, so sind *sämtliche* einfachen Reihen, in die man sie überführen kann, konvergent und umgekehrt (London, *Math. Ann.* **53**, 360 (1900)).

Wie bei den einfach unendlichen Reihen kann man durch das Prinzip der *Reihenvergleichung Konvergenzkriterien* für Doppelreihen aufstellen. Sehr allgemeiner Natur sind die von Pringsheim, *Münch. Ber.* **27**, 144 (1897), ebda. **38**, 41 (1908), gegebenen Kriterien für Doppelreihen mit positiven Gliedern.

Es seien $\frac{1}{c_{\mu\nu}} > 0$ bezw. $\frac{1}{d_{\mu\nu}} > 0$ die allgemeinen Glieder einer konvergenten bezw. divergenten Doppelreihe. Es ist dann die Doppelreihe $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu} u_{\mu\nu}$

$$\textit{konvergent}, \text{ wenn } \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}}\, c_{\mu\nu} u_{\mu\nu} < \infty,$$

$$\textit{divergent}, \text{ wenn } \underline{\lim_{\mu+\nu=\infty}}\, d_{\mu\nu} u_{\mu\nu} > 0$$

ist. Man kann die $c_{\mu\nu}$ und $d_{\mu\nu}$ aus den Gliedern von *einfach* unendlichen Reihen gewinnen. Sei z. B. $\frac{1}{c_\mu}$ das allgemeine Glied einer konvergenten einfach unendlichen Reihe, so kann $c_{\mu\nu} = c_\mu \cdot c_\nu$ genommen werden. Für $c_\mu = a^\mu$ $(0 < a < 1)$ folgt:

www.rcin.org.pl

Die Doppelreihe $\sum\sum u_{\mu\nu}$ *ist konvergent oder divergent, je nachdem* $\overline{\lim\limits_{\mu+\nu=\infty}} u_{\mu\nu}^{\frac{1}{\mu+\nu}} \lesseqgtr 1$ *ist.*

Die Definition der Doppelreihen, die Begriffe der einfachen und absoluten Konvergenz und die Konvergenzkriterien lassen sich unmittelbar auf *mehrfache Reihen* ausdehnen. Eine *p-fach unendliche Reihe* hat allgemein die Form

$$\sum_{\mu_1=1}^{\infty} \sum_{\mu_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{\mu_p=1}^{\infty} f(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p)$$

und ist *konvergent* mit der Summe S, wenn die Summen

$$s(m_1, m_2, \ldots m_p) = \sum_{\mu_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{\mu_p=1}^{m_p} f(\mu_1, \ldots \mu_p)$$

sämtlich denselben endlichen Grenzwert S besitzen, wie auch immer die $m_1, \ldots m_p$ unabhängig voneinander ins Unendliche wachsen.

Diese Definition wird nicht wesentlich modifiziert, wenn die Summationsbuchstaben $\mu_1, \ldots \mu_p$ alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen.

Von den Konvergenzkriterien sei nur die Verallgemeinerung des Cauchyschen *Integralkriteriums* (vgl. S. 427) erwähnt:

Sei $f(x_1, x_2, \ldots x_p)$ eine immer positive Funktion von p Veränderlichen, die außerhalb einer geschlossenen Fläche S des p-dimensionalen Raumes mit wachsenden absoluten Werten der x beständig bis zu Null abnimmt, so konvergiert oder divergiert die p-fach unendliche Reihe $\sum\limits_{\mu_1} \cdots \sum\limits_{\mu_p} f(\mu_1, \ldots \mu_p)$, je nachdem das p-fache Integral $\int\int \cdots \int f(x_1, \ldots x_p) dx_1 \ldots dx_p$, erstreckt über den ganzen Raum außerhalb der Fläche S, einen Sinn hat oder nicht (vgl. Picard, *Traité d'analyse* **1**, 267; Riemann, *Werke*, 2. Aufl., 483).

Führt man an Stelle der Summationsbuchstaben $\mu_1, \ldots \mu_p$ neue Summationsbuchstaben mit Hilfe von linearen Substitutionen ein, so erhält man sehr allgemeine Umformungssätze für absolut konvergente mehrfache Reihen, die besonders für die Theorie der höheren Thetareihen von Wichtigkeit sind (vgl. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* 1903, Kap. II).

www.rcin.org.pl

§ 5. Unendliche Produkte.

Mit einer einfachen Folge von unendlich vielen Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ bildet man der Reihe nach die Produkte

$$P_n = a_1 a_2 \ldots a_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wenn diese bei wachsendem n einem endlichen *von Null verschiedenen* Grenzwert P zustreben, so nennt man das unendliche Produkt $a_1 a_2 a_3 \ldots$ *konvergent* und P seinen *Wert.*

In allen anderen Fällen, also wenn $\lim P_n$ null oder unendlich ist oder wenn kein bestimmter Grenzwert existiert, heißt das unendliche Produkt *divergent.*

Produkte mit $\lim P_n = 0$ als divergent zu bezeichnen, ist deswegen nötig, weil sonst ein Produkt verschwinden könnte, ohne daß ein Faktor Null ist.

Für die Konvergenz eines unendlichen Produktes ist notwendig und hinreichend, daß für genügend großes n und jedes $p = 1, 2, 3 \ldots$ das Produkt $a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+p}$ der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann.

Da bei einem konvergenten Produkt notwendig $\lim a_n = 1$ sein muß, schreibt man zweckmäßig $a_n = 1 + u_n$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

Das unendliche Produkt $\prod\limits_1^\infty (1 + u_n)$ heißt *unbedingt* konvergent, wenn es bei jeder Anordnung seiner Faktoren denselben Wert besitzt. *Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe* $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ *unbedingt konvergiert.*

Ein konvergentes Produkt, bei dem von einem bestimmten endlichen n ab alle u_n dasselbe Vorzeichen haben, konvergiert *unbedingt.*

Ein unbedingt konvergentes Produkt konvergiert auch *absolut*, d. h. bei unbedingt konvergentem $\prod\limits_1^\infty (1 + u_n)$ ist auch das Produkt $\prod\limits_1^\infty (1 + |u_n|)$ konvergent. Umgekehrt zieht die absolute Konvergenz die unbedingte nach sich.

Wenn die Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$ nur *bedingt* konvergiert, so kann das Produkt $\prod\limits_1^\infty (1 + u_n)$ entweder bedingt konvergieren oder gegen Null divergieren, je nachdem die Reihe $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots$ konvergiert oder divergiert.

Ein konvergentes Produkt läßt sich in eine Reihe:

$$\prod_1^\infty (1 + u_n) = 1 + u_1 + P_1 u_2 + P_2 u_3 + \cdots$$

www.rcin.org.pl

verwandeln, worin $P_k = \prod_{n=1}^{k}(1 + u_n)$. Hieraus entspringt bei unbedingter Konvergenz des unendlichen Produktes die ebenfalls unbedingt konvergente Reihe

$$\prod_1^\infty (1 + u_n) = 1 + \sum u_h + \sum u_h u_i + \sum u_h u_i u_k + \cdots,$$

wobei die Summen über sämtliche Kombinationen der u_n zu je 1, 2, 3 ... zu erstrecken sind (Euler, *Introductio Cap.* 15 u. 16).

Sind die Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ *Funktionen einer Veränderlichen* x, so wird durch das Produkt $\prod_1^\infty (1 + u_n(x))$ für jeden Wert von x, bei dem es konvergiert, eine Funktion $f(x)$ definiert.

Das Produkt $\prod (1 + u_n(x))$ heißt *gleichmäßig konvergent* in einem gewissen Bereich der Veränderlichen, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine bestimmte *von x unabhängige* Zahl N gefunden werden kann, so daß für jedes $n > N$ und für $p = 1, 2, 3 \ldots$

$$\left| \frac{P_{n+p}}{P_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

wird.

Sind die Funktionen $u_n(x)$ in einem Bereich stetig und konvergiert daselbst das unendliche Produkt $\prod (1 + u_n(x))$ gleichmäßig, so stellt es eine für alle Werte x des Bereichs *stetige* Funktion von x dar.

Das Produkt $\prod (1 + u_n(x))$ konvergiert gleichmäßig, sobald die unendliche Reihe $\sum |u_n(x)|$ gleichmäßig konvergiert. Alsdann konvergiert das Produkt auch *absolut*.

Die unendlichen Produkte wurden nach vereinzeltem Auftreten bei Vieta, Wallis, Dan. Bernoulli zuerst von Euler in ausgedehntem Maße benutzt. Er fand die Produktentwicklungen der trigonometrischen Funktionen, der Gammafunktion u. a. In diesem Abschnitt seien nur die ersten erwähnt:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \qquad \cos \pi x = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{(n - \frac{1}{2})^2}\right),$$

die für jeden Wert von x unbedingt konvergieren. Das erste Produkt liefert für $x = \frac{1}{2}$:

www.rcin.org.pl

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\cdots$$

und

$$\frac{\pi}{2} = \left(1 + \frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1 + \frac{1}{3\cdot 5}\right)\left(1 + \frac{1}{5\cdot 7}\right)\cdots,$$

was mit dem (bedingt konvergenten) Produkt von Wallis, *Arithm. infin.* 1656:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

übereinstimmt. Aus diesem folgt

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\cdots,$$

welches wieder unbedingt konvergiert, so daß sich auch

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots = \frac{1}{2}$$

ergibt.

Allgemeine Sätze über unendliche Produkte hat erst Cauchy, *Analyse algébr.* 1821 mit Hilfe des Übergangs zu Logarithmen aufgestellt. Die direkte Behandlung geht auf die Abhandlung von Weierstraß über die Theorie der analytischen Fakultäten *J. f. Math* **51**, 1 (1856) zurück. Vgl. Pringsheim, *Math. Ann.* **33**, 119 (1889) und die ausführliche Darstellung bei Stolz-Gmeiner, *Einl. in die Funktionentheorie* 1905, S. 400.

§ 6. Allgemeine Kettenbrüche.

Ein Ausdruck von der Form

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

heißt ein *Kettenbruch*. Es sind verschiedene einfachere Schreibweisen gebräuchlich; wir schreiben

$$\begin{pmatrix} & a_1, & a_2, & \ldots & a_n \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

Die Größen a_i, b_i werden die *Teilzähler* und *Teilnenner*, gemeinsam auch die *Elemente*, $\frac{a_i}{b_i}$ die *Partialbrüche* des Kettenbruchs genannt.

www.rcin.org.pl

Schließt man mit dem Teilnenner b_{k-1} ab, so heißt der so erhaltene endliche Bruch der k^{te} *Näherungsbruch* und wird mit $\frac{A_k}{B_k}$ bezeichnet.

Zähler und Nenner der Näherungsbrüche genügen den folgenden rekurrenten Beziehungen (Wallis, *Arith. infin.* 1656):

$$A_{k+1} = b_k A_k + a_k A_{k-1}$$
$$B_{k+1} = b_k B_k + a_k B_{k-1}$$

mit den Anfangswerten

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 0$$
$$A_1 = b_0, \quad B_1 = 1.$$

A_{k+1} und B_{k+1} lassen sich durch Determinanten (*Kontinuanten*) ausdrücken (vgl. S. 69).

Die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen ist

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{B_{n-1} B_n},$$

und es läßt sich danach jeder Näherungsbruch durch eine *Reihe*

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{B_1 B_2} - \frac{a_1 a_2}{B_2 B_3} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_3 B_4} - \cdots + (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{B_{n-1} B_n}$$

ausdrücken.

Wenn alle a und b positiv sind, so sind die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen abwechselnd positiv und negativ und nehmen ihrem absoluten Wert nach ab; die Näherungsbrüche mit geradem Index bilden eine abnehmende, die mit ungeradem Index eine zunehmende Reihe, und ein Näherungsbruch liegt immer zwischen den zwei vorhergehenden.

Wenn die Reihe der Teilzähler nnd Teilnenner nicht abbricht, so hat man einen *unendlichen* Kettenbruch, und wenn für $n = \infty$ ein Grenzwert für $\frac{A_n}{B_n}$ existiert, so nennt man den Kettenbruch *konvergent.* Es besteht dann ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen von der Form

$$x = b_0 + \frac{a_1}{x_1}, \quad x_1 = b_1 + \frac{a_2}{x_2}, \ldots.$$

Es folgt aber nicht umgekehrt aus der Existenz eines solchen Systems von Gleichungen, daß sich x durch den Ketten-

www.rcin.org.pl

bruch $\begin{pmatrix} & a_1, & a_2, & \dots \\ b_0, & b_1, & b_2, & \dots \end{pmatrix}$ darstellen lasse, vielmehr müssen dazu die Zahlen a_k, b_k, x_k noch gewisse Bedingungen erfüllen, z. B. daß die $|a_k|$ unter einer von k unabhängigen Schranke bleiben und $\lim\limits_{k=\infty} \frac{1}{x_k} = 0$ ist. Perron, *Münch. Ber.* **37**, 495 (1907).
Ein unendlicher Kettenbruch läßt sich in die unendliche Reihe

$$x = b_0 + \frac{a_1}{B_1 B_2} - \frac{a_1 a_2}{B_2 B_3} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_3 B_4} \cdots$$

verwandeln (Euler, *Introductio* Cap. 18) und konvergiert oder divergiert gleichzeitig mit dieser Reihe.

Es gibt konvergente Kettenbrüche, die durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Anfangselementen divergent werden; sie heißen nach Pringsheim, *Münch. Ber.* **28**, 299 (1898) *bedingt konvergent.* Bleibt die Konvergenz bei solchen Weglassungen erhalten, so heißt der Kettenbruch *unbedingt konvergent.* Pringsheim hat für Kettenbrüche mit ganz beliebigen (auch *komplexen*) Elementen das folgende hinreichende *Konvergenzkriterium* aufgestellt:

Der Kettenbruch $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \dots \\ b_1, & b_2, & b_3 \dots \end{pmatrix}$ *ist unbedingt konvergent, wenn* $|b_1| \geqq 1$ *und* $|b_k| \geqq |a_k| + 1$ *für* $k > 1$.

Nur wenn für *jedes* $k > 1$ $|b_k| = |a_k| + 1$ ist, wird dieses Kriterium etwas modifiziert (vgl. Pringsheim, *Münch. Ber.* **35**, 364 (1905)).

Sind alle Elemente *positiv*, so ist zur *Konvergenz* des Kettenbruchs *notwendig und hinreichend*, daß wenigstens eine der Reihen

$$\sum_1^\infty \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}} b_{2k} \quad \text{und} \quad \sum_1^\infty \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k}}{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}} \frac{b_{2k+1}}{a_{2k+1}}$$

divergiert. Sind aber beide Reihen konvergent, so oszilliert der Kettenbruch zwischen zwei endlichen Grenzen. Seidel, *Unters. über die Konvergenz und Divergenz der K.*, München 1846; Stern, *J. f. Math.* **37**, 269 (1848).

Einfacher anzuwenden sind folgende Kriterien, die aber nur hinreichende, nicht notwendige Bedingungen für die Konvergenz geben:

Ein Kettenbruch mit nur positiven Elementen *konvergiert*, wenn die Reihe $\sum \frac{b_k b_{k+1}}{a_{k+1}}$ oder auch schon $\sum \sqrt{\frac{b_k b_{k+1}}{a_{k+1}}}$ *di-*

www.rcin.org.pl

vergiert. Ebenso *konvergiert* ein derartiger Kettenbruch, wenn von einem bestimmten n ab $b_n \geqq a_n$ ist und die Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

divergiert.

Direkte Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit positiven Elementen ohne Vermittlung von Reihen hat Perron, *Münch. Ber.* **35**, 315 (1905) gegeben.

Jeder Kettenbruch mit ganzzahligen Elementen, bei dem $0 < a_k \leqq b_k$ *ist, konvergiert.* Sein Wert ist immer *irrational* und liegt zwischen b_0 und $b_0 + 1$ (Legendre, *Éléments de Géométrie*; Stern, *J. f. Math.* **11**, 38 (1834).

Der Kettenbruch

$$b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cdots}}$$

konvergiert, wenn von einem bestimmten n *ab stets* $b_n \geqq 2$ *ist.*

Die Hauptformel zur *Verwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch* ist von Euler, *Introd.* Cap. 18, § 368 aufgestellt worden:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} c_\nu = \begin{pmatrix} c_1, & c_2, & c_1 c_3, & c_2 c_4, \ldots \\ 1, & c_1 - c_2, & c_2 - c_3, & c_3 - c_4, \ldots \end{pmatrix},$$

wobei Reihe und Kettenbruch gleichzeitig konvergieren. Sie führt zu Kettenbruchentwicklungen für die wichtigsten transzendenten Zahlen und Potenzreihen, von denen die folgenden mitgeteilt seien:

$$\frac{4}{\pi} = \begin{pmatrix} & 1, & 9, & 25, & 49, \ldots \\ 1, & 2, & 2, & 2, & 2, \ldots \end{pmatrix} \qquad \text{(Brouncker 1659).}$$

$$\frac{1}{ln 2} = \begin{pmatrix} & 1, & 4, & 9, & 16, \ldots \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ldots \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{e-1} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1, \ldots \\ 2, & 3, & 2, & 5, & 2, & 7, \ldots \end{pmatrix}$$

(Minkowski, *Math. Ann.* **54**, 118 (1901))

www.rcin.org.pl

$$x\,\frac{e^x-1}{e^x+1}=\begin{pmatrix}x^2, & x^2, & x^2, & x^2,\ldots\\ 2, & 6, & 10, & 14,\ldots\end{pmatrix}$$

$$-x\operatorname{tg}x=\begin{pmatrix}-x^2, & -x^2, & -x^2, & -x^2,\ldots\\ 1, & 3, & 5, & 7,\ldots\end{pmatrix}.$$

Die beiden letzten Entwicklungen, die bereits Euler gefunden aber nicht streng bewiesen hatte, sind in völlig einwandfreier Weise unter Nachweis der Konvergenz von Lambert, *Berl. Akad.* 1761, S. 268 durch ein dem Euklidischen Algorithmus nachgebildetes Divisionsverfahren abgeleitet worden (vgl. Pringsheim, *Münch. Ber.* **28**, 331 (1898)). Er hat mit ihnen die *Irrationalität* von e^x und $\log x$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{arctg} x$ für jedes rationale x, *also auch von der Zahl* π bewiesen.

Über Kettenbruchentwicklungen von Funktionen vgl. Padé, *Ann. éc. Norm.* (3) **9**, 7 (1892), ebda (3) **16**, 395 (1899), Stieltjes, *Toulouse Ann.* **8** (1894), **9** (1895). Über die Entwicklung des *Quotienten von zwei Potenzreihen,* wofür die von Gauß für den Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen gefundene Entwicklung ein wichtiges Beispiel ist, vgl. Muir, *Edinb. Trans.* **27**, 467 (1876).

Ein Kettenbruch heißt *periodisch,* wenn sich seine Partialbrüche von einer bestimmten Stelle an in derselben Ordnung wiederholen, *rein periodisch*, wenn die Periode beim ersten Element beginnt, *gemischt periodisch*, wenn ihr Elemente vorangehen.

Sobald ein periodischer Kettenbruch konvergiert, ist sein Grenzwert Lösung einer quadratischen Gleichung, die aus den beiden letzten Näherungsbrüchen bis zum Schluß der ersten Periode zu bilden ist (näheres § 7).

Sind alle Elemente a_k, b_k *reell* und *positiv*, so konvergiert der periodische Kettenbruch.

Als einfachste Beispiele von periodischen Kettenbrüchen seien erwähnt:

$$\sqrt{a^2+b}=\begin{pmatrix} & b, & b,\ldots\\ a, & 2a, & 2a,\ldots\end{pmatrix}$$ Bombelli, *Algebra* 1572.

Die beiden Lösungen der Gleichung $x^2-bx-a=0$ sind (Cataldi, 1613).

$$x_1=\begin{pmatrix} & a, & a,\ldots\\ b, & b, & b,\ldots\end{pmatrix},\quad x_2=-\begin{pmatrix}a, & a, & a,\ldots\\ b, & b, & b,\ldots\end{pmatrix}.$$

www.rcin.org.pl

§ 7. Regelmäßige Kettenbrüche.

Der Kettenbruch $\begin{pmatrix} & a_1, & a_2, & a_3, \ldots \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, \ldots \end{pmatrix}$ läßt sich durch den völlig gleichwertigen $\begin{pmatrix} & c_1 a_1, & c_1 c_2 a_2, & c_2 c_3 a_3, \ldots \\ b_0, & c_1 b_1, & c_2 b_2, & c_3 b_3, \ldots \end{pmatrix}$ ersetzen mit beliebigen Zahlen $c_1, c_2, c_3 \ldots$ Durch geeignete Wahl der c_ν kann man sämtlichen Teilzählern oder Teilnennern bestimmte Werte vorschreiben, insbesondere kann man erreichen, daß *alle Teilzähler gleich* 1 werden. Man erhält dann die *Hauptform*:

$$q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots$$

in abgekürzter Schreibweise $(q_0, q_1, q_2, \ldots)$. Sind hierin noch die $q_0, q_1, q_2, \ldots$ *ganze positive Zahlen*, so hat man einen *regelmäßigen Kettenbruch*. Die regelmäßigen Kettenbrüche bilden die wichtigste Gattung der Kettenbrüche. Von ihnen ist im folgenden ausschließlich die Rede.

Jede positive und — wenn man negative Werte für q_0 zuläßt — *negative reelle Zahl läßt sich durch einen regelmäßigen Kettenbruch darstellen.*

Die Kettenbruchentwicklung einer *rationalen* Zahl wird mit Hilfe des *Euklidischen Algorithmus* zur Aufsuchung des *größten gemeinsamen Teilers* gefunden. Man erhält stets einen *endlichen* Kettenbruch.

Für eine *irrationale* Zahl x findet man einen *unendlichen*, stets konvergenten Kettenbruch $(q_0, q_1, q_2, \ldots)$ mit Hilfe der Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= q_0 + \frac{1}{x_1} \\ x_1 &= q_1 + \frac{1}{x_2} \\ x_2 &= q_2 + \frac{1}{x_3} \\ &\vdots \end{aligned},$$

wobei die $q_0, q_1, q_2, \ldots$ die größten[1]) in $x, x_1, x_2, \ldots$ enthaltenen ganzen Zahlen bedeuten. *Umgekehrt hat ein unendlicher Kettenbruch stets einen irrationalen Wert.*

1) Über Kettenbrüche nach *nächsten* ganzen Zahlen vgl. Hurwitz *Acta math.* **12**, 367, (1889).

www.rcin.org.pl

Die *Näherungsbrüche* des Kettenbruchs sind

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = (q_0, q_1, q_2, \dots q_{\nu-1}) \qquad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

oder durch *Gaußsche Klammern* ausgedrückt (Gauß, *Disqu. arithm.* Art. 27, jedoch schon bei Euler, *Comm. Acad. Petrop.* **7**, (1734/35), 46):

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{[q_0, q_1, q_2, \dots q_{\nu-1}]}{[q_1, q_2, \dots q_{\nu-1}]}.$$

Zur Berechnung der Näherungsbrüche dienen die Rekursionsformeln:

$$P_{\nu+1} = q_\nu P_\nu + P_{\nu-1}, \quad Q_{\nu+1} = q_\nu Q_\nu + Q_{\nu-1}.$$
$$P_0 = 1, \qquad Q_0 = 0.$$
$$P_1 = q_0, \qquad Q_1 = 1.$$
$$P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1} = (-1)^\nu.$$

Alle Näherungsbrüche sind irreduzibel; sie sind abwechselnd größer und kleiner als der Wert x des Kettenbruchs und nähern sich ihm immer mehr in der Weise, daß

$$\left| x - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| < \frac{1}{Q_\nu^2}.$$

Jeder Bruch $\frac{P}{Q}$, *für den* $\left| x - \frac{P}{Q} \right| < \frac{1}{2Q^2}$ *ist, ist notwendig einer der Näherungsbrüche in der Kettenbruchentwicklung von x,* aber nicht jeder Näherungsbruch hat diese Eigenschaft, jedoch von zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen immer mindestens einer (Vahlen, *J. f. Math.* **115**, 223 (1895)). *Es läßt sich aber eine besondere Art der Kettenbruchentwicklung angeben, bei der nur diese Näherungsbrüche auftreten* (Minkowski, *Math. Ann.* **54**, 91 (1901)). Dabei sind alle Teilzähler ± 1, alle Teilnenner positive ganze Zahlen.

Über *Nebennäherungsbrüche* eines regelmäßigen Kettenbruchs vgl. Serret, *Algebra* übers. von Wertheim, 2. Aufl. **1**, 18.

Es ist

$$\frac{P_\nu}{P_{\nu-1}} = (q_{\nu-1}, q_{\nu-2}, \dots q_2, q_1, q_0)$$
$$\frac{Q_\nu}{Q_{\nu-1}} = (q_{\nu-1}, q_{\nu-2}, \dots q_2, q_1).$$

Ein endlicher Kettenbruch, bei dem die von den Enden gleich weit abstehenden Teilnenner einander gleich sind, heißt

www.rcin.org.pl

symmetrisch. Er kann eine gerade oder ungerade Anzahl von Teilnennern besitzen.

Wenn $Q^2 \pm 1$ durch P teilbar und $P > Q$ ist, so liefert die Entwicklung von $\frac{P}{Q}$ einen symmetrischen Kettenbruch, und zwar mit einer *geraden* oder *ungeraden* Anzahl von Teilnennern, je nachdem das *obere* oder *untere* Zeichen gilt.

Bei einem symmetrischen Kettenbruch mit einer geraden Anzahl von Teilnennern

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = (q_0, q_1, \ldots q_{n-1}, q_{n-1}, \ldots q_1, q_0)$$

bestehen die Relationen

$$P_{2n} = P_n^2 + P_{n-1}^2; \quad Q_{2n-1} = Q_n^2 + Q_{n-1}^2$$
$$P_{2n-1} = Q_{2n} = P_n Q_n + P_{n-1} Q_{n-1}$$
$$P_{2n} \cdot Q_{2n-1} = Q_{2n}^2 + 1.$$

Bei einem symmetrischen Kettenbruch mit einer ungeraden Anzahl von Teilnennern

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = (q_0, q_1, \ldots q_{n-1}, q_n, q_{n-1}, \ldots q_1, q_0)$$

ist

$$P_{2n+1} = (P_{n+1} + P_{n-1})P_n, \quad Q_{2n} = (Q_{n+1} + Q_{n-1})Q_n$$
$$P_{2n} = Q_{2n+1} = P_n Q_{n+1} + Q_n P_{n-1} = Q_n P_{n+1} + P_n Q_{n-1}$$
$$P_{2n+1} \cdot Q_{2n} = Q_{2n+1}^2 - 1.$$

Zwei irrationale Zahlen x, y heißen *äquivalent*, wenn sich vier ganze Zahlen α, β, γ, δ mit der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

bestimmen lassen, so daß

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

ist.

Die Kettenbruchentwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen von einem gewissen Teilnenner an überein.

Umgekehrt ist *die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von zwei irrationalen Zahlen, daß ihre Kettenbruchentwicklungen von einem gewissen Teilnenner an übereinstimmen.*

www.rcin.org.pl

Jede reelle quadratische Irrationalzahl $\frac{A + B\sqrt{D}}{C}$ *mit ganzzahligen* A, B, C *und positivem ganzem* D *oder — anders ausgedrückt — jede Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Diskriminante positiv und kein Quadrat ist, läßt sich durch einen periodischen Kettenbruch darstellen.* Umgekehrt ist *jeder periodische Kettenbruch Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten.* Insbesondere ist der *rein periodische* Kettenbruch

$$x = (\overline{q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}}, \ldots)$$

die positive Lösung der Gleichung

$$Q_n x^2 + (Q_{n-1} - P_n)x - P_{n-1} = 0.$$

Die Kettenbruchentwicklung für die zweite Lösung dieser Gleichung hat die *umgekehrte Periode.* Ebenso bei gemischt periodischen Kettenbrüchen (Galois, *Ann. math.* **19**, 294 (1828)).

Bei der *Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzel einer rationalen Zahl* geht der Periode *ein* Glied voraus; die Periode schließt mit dem *Doppelten dieses Anfangsgliedes*, und *die übrigen Teilnenner der Periode bilden eine symmetrische Reihe.* Umgekehrt stellt ein derartiger Kettenbruch stets die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl dar. Damit diese ganz ist, müssen die Teilnenner q_i noch weitere Bedingungen erfüllen. Vgl. Muir, *Edinb. Proceed.* 8, 229 (1874).

Besitzt in der Entwicklung von $\sqrt{D}$ *die Periode* n *Glieder, so besteht zwischen Zähler und Nenner der jeweils bis zum vorletzten Glied einer jeden Periode genommenen Näherungsbrüche die Beziehung*

$$P_{\mu n}^2 - D Q_{\mu n}^2 = (-1)^{\mu n} \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Eine Tabelle der Kettenbruchentwicklungen für die Quadratwurzeln der unter 120 liegenden ganzen Zahlen findet sich bei Euler, *Comment. arith. coll.* I, p. 322, abgedruckt in Wertheim, *Zahlenlehre*, 1902, S. 223. Eine Tabelle bis zu $\sqrt{1000}$ enthält Degen, *Canon Pellianus, Hafniae 1817.*

Als Begründer der Lehre von den Kettenbrüchen ist Bombelli (1572) anzusehen, der sie zur Berechnung von Quadratwurzeln benutzte (vgl. Wertheim, *Abh. zur Gesch. der Math.* 8, 149 (1898)). Die gleiche Methode, jedoch mit einer der heutigen Schreibweise verwandten Bezeichnung und Untersuchung der Eigenschaften der Näherungsbrüche bei Cataldi 1613. In

www.rcin.org.pl

systematischer Weise wurden die Kettenbrüche jedoch erst von Euler behandelt (*Petrop. Comment.* **9** (1737), **11** (1739); *Introd.*; ferner *Nov. Comment. Petrop.* **9** (1764), **11** (1765)); Lagrange, Zusätze zu Eulers *Algebra* (Regelmäßige periodische K.); Legendre, *Théorie des nombres.* — *Geometrische Betrachtungen* hat in systematischer Weise F. Klein (*Vorl. üb. Zahlentheorie*) herangezogen. Eine zusammenfassende Darstellung der gesamten Kettenbruchlehre von Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen,* erscheint demnächst bei B. G. Teubner, Leipzig.

Über die Beziehungen zwischen *Kettenbrüchen* und *divergenten Reihen* vgl. Padé, *Ann. de l'éc. Norm.* (3) **9**, (1892), Supplément; *Acta math.* **18**, 97 (1894); Stieltjes, *Ann. de la Fac. d. sc. de Toulouse* **8** u. **9** (1894/5); Borel, *Leç. s. l. sér. div.* 1901.

Eine auf Jacobi, *J. f. Math.* **69**, 29 (1868) zurückgehende Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus ist am eingehendsten von Perron, *Math. Ann.* **64**, 1 (1907), *Münch. Ber.* **37**, 401 (1907) untersucht worden.

www.rcin.org.pl