Kapitel VIII.

Integralrechnung.

Von *Paul Epstein* in Straßburg i. E.

§ 1. Das unbestimmte Integral. Definition und allgemeine Sätze.

Die Integralrechnung geht davon aus, daß eine gegebene Funktion aufgefaßt wird als *Differentialquotient einer zu bestimmenden Funktion.* Ist $f(x)$ gegeben, so ist eine Funktion $F(x)$ so zu bestimmen, daß $F'(x) = f(x)$ oder $f(x)\,dx$ *das Differential von* $F(x)$ ist. Man nennt dann $F(x)$ *das Integral von* $f(x)$ oder auch nach Lagrange (*Théor. d. fonct. anal.*) *primitive Funktion von* $f(x)$ und schreibt

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Die Funktion $f(x)$ heißt *Integrand*; dieser ist also der Differentialquotient des Integrals. Besitzt $f(x)$ ein Integral $F(x)$, so besitzt es unendlich viele, die man durch Hinzufügen von *willkürlichen Konstanten* zu $F(x)$ erhält. Man kann daher dem Integral, um es völlig festzulegen, in einem Punkt a einen bestimmten Wert A vorschreiben; es ist dann

$$\int f(x)\,dx = F(x) - F(a) + A.$$

Eine in einem Intervall stetige Funktion besitzt dort ein Integral, welches für einen Punkt a des Intervalls einen willkürlich vorgeschriebenen Wert A annimmt.

Weitergehende Bedingungen für die Existenz eines Integrals kommen in der Lehre von den bestimmten Integralen zur Sprache.

Es bestehen die allgemeinen Sätze:

1. *Einen konstanten Faktor des Integranden kann man vor das Integralzeichen nehmen.*

2. *Das Integral aus einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Integrale aus den einzelnen Funktionen.*

3. Eine *unendliche Reihe* von stetigen Funktionen läßt sich in einem Intervall, in dem sie *gleichmäßig konvergiert*, *gliedweise integrieren,* und die Reihe der Integrale konvergiert in demselben

Intervall ebenfalls gleichmäßig. Aber auch bei nicht gleichmäßiger Konvergenz kann gliedweise Integration zulässig sein. Vgl. Osgood, *Am. Journ.* **19**, 155 (1894), Arzelà, *Rend. Acc. Linc.* (4) **1**, 321 (1885), Schoenflies, *Bericht üb. die Mengenlehre, Math.-Ver.* **8** (1900) Kap. VII, Borel, *Leç. s. l. fonct. de var. réelles* (1905), 45, Vitali, *Rend. circ. Palermo* **23**, 137 (1907).

Insbesondere läßt sich eine *Potenzreihe,* sobald sie konvergiert, gliedweise integrieren.

4. Sei $f(u, v)$ eine aus zwei Funktionen u, v von x zusammengesetzte Funktion und es sei das Integral $\int f(u, v)\,dx$ auszuführen. Läßt sich nun die Integration ausführen, *wenn man v als konstant ansieht*, so möge dieses *„partielle Integral"* mit

$$\int_u f(u, v)\,dx = y$$

bezeichnet werden. Dann ist

$$\int f(u, v)\,dx = \int_u f(u, v)\,dx - \int \frac{\partial y}{\partial v}\,dv$$
$$= \int_u f(u, v)\,dx - \int \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}\,dx.$$

Vgl. hierzu Worpitzky, *Lehrb. d. Diff.- u. Int.-Rech.*, Berlin 1880, 73, Brendel, *Math. Ann.* **55**, 248 u. 599 (1902), Hatzidakis, ebenda **57**, 134 (1903).

Gewöhnlich versteht man unter *partieller Integration* einen speziellen Fall dieses Satzes, wenn nämlich $f(u, v) = u \cdot v$ ist. Dann ist

$$\int uv\,dx = v\int u\,dx - \int\left(\frac{dv}{dx}\int u\,dx\right)dx,$$

oder wenn $u = \dfrac{dw}{dx} = w'$ ist:

$$\int vw'\,dx = vw - \int wv'\,dx.$$

Dies Verfahren ist anzuwenden, wenn man einen Faktor des Integranden als Differentialquotienten einer Funktion w erkennt.

5. Durch *Einführung einer neuen Variablen (Substitution)* vermöge der Gleichung $x = \psi(z)$ verwandelt sich das Integral $\int f(x)\,dx$ in $\int f[\psi(z)]\,\psi'(z)\,dz$.

Ein Integral heißt *ausführbar*, wenn man es durch einen geschlossenen Ausdruck mit einer endlichen Anzahl von *elementaren* Funktionen darstellen kann. Man versucht es dabei mit Hilfe von partieller Integration und Substitution neuer Variabler auf eins der folgenden *Grundintegrale* (bei denen die willkürliche Konstante weggelassen ist) zurückzuführen:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1), \qquad \int \frac{dx}{x} = \log x, \qquad \int e^x dx = e^x,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x, \quad \int \cos x\, dx = \sin x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

§ 2. Integration wichtiger Klassen von Funktionen.

I. *Integration rationaler Funktionen.* Um eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$, bei der man $P(x)$ von niedrigerem Grad als $Q(x)$ voraussetzen darf, zu integrieren, zerlegt man sie in *Partialbrüche* (s. Algebra S. 262). Es treten dann für jede Wurzel a der Gleichung $Q(x) = 0$ Integrale von folgendem Typus auf:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log (x-a)$$

und

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{\varkappa}} = -\frac{1}{\varkappa - 1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{\varkappa - 1}} \qquad (\varkappa > 1).$$

Unter diesen Wurzeln können auch komplexe sein; wenn aber $Q(x)$ nur reelle Koeffizienten hat, sind die komplexen Wurzeln *paarweise konjugiert*, und die zwei derartigen Wurzeln $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$ entsprechenden Integrale lassen sich zu solchen vom Typus

$$\int \frac{A(x-\alpha) + B}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\, dx = A \log \sqrt{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B}{\beta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-\alpha}{\beta}$$

und

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + 2px + q)^{\varkappa}}\, dx \quad (\varkappa > 1)$$

zusammenfassen, wobei $(x-\alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + 2px + q$ ist. Die letzteren Integrale werden durch partielle Integration auf solche von niedrigerem Exponenten $\varkappa$ zurückgeführt. Setzt man nämlich $\int \frac{dx}{(x^2 + 2px + q)^{\varkappa}} = J_{\varkappa}$ und $p^2 - q = \Delta$, so ist

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^\varkappa}dx = -\frac{A}{2(\varkappa-1)(x^2+2px+q)^{\varkappa-1}} + (B-Ap)J_\varkappa$$

und

$$J_\varkappa = -\frac{1}{2\Delta(\varkappa-1)}\left\{\frac{x+p}{(x^2+2px+q)^{\varkappa-1}} + (2\varkappa-3)J_{\varkappa-1}\right\}.$$

Man hat demnach den Satz: *Das Integral einer rationalen Funktion besteht im allgemeinen aus einem rationalen und einem transzendenten Teil. Der rationale Bestandteil rührt von den mehrfachen Wurzeln von $Q(x)=0$ her. In dem transzendenten Teil treten folgende Funktionen auf:*

1) *für jede reelle Wurzel a von $Q(x)=0$ die Funktion $\log(x-a)$,*

2) *für jedes Paar konjugiert komplexer Wurzeln $\alpha \pm i\beta$ die Funktionen $\log((x-\alpha)^2+\beta^2)$ und $\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}$.*

Die Berechnung des rationalen Teils kann auf *rationalem Wege* ohne Kenntnis der Wurzeln erfolgen, wenn man die Zerlegung

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right) + \sum_h \frac{C_h}{x-a_h} + \sum_i \frac{A_i(x-\alpha_i)+B_i}{(x-\alpha_i)+\beta_i^2}$$

zugrunde legt. Darin ist

$$Q_1(x) = (x-\xi_1)^{e_1-1}(x-\xi_2)^{e_2-1}\dots(x-\xi_m)^{e_m-1},$$

wenn $\xi_1 \dots \xi_m$ die *mehrfachen* Wurzeln von $Q(x)=0$ und $e_1 \dots e_m$ ihre Multiplizitäten bedeuten, und daher auch $Q_1(x)$ *der größte gemeinsame Teiler von $Q(x)$ und seiner Derivierten.* (Vgl. Baltzer, *Leipz. Ber.* (1873), 535, Hermite, *Cours d'anal.* (1873), 265, Stolz, *Grundzüge* **1**, 285.)

II. *Integrale algebraischer Funktionen.* Durch eine Gleichung

$$f_0(x)y^m + f_1(x)y^{m-1} + \cdots + f_m(x) = 0,$$

deren Koeffizienten *ganze rationale* Funktionen von x sind, wird y als *algebraische Funktion* von x definiert. Jede in x und y *rationale* Funktion $R(x,y)$ ist ebenfalls algebraische Funktion von x und die Gesamtheit dieser Funktionen bildet eine *Klasse* oder einen *Körper* algebraischer Funktionen. (Weber, *Algebra* **1**, 491.) Die Integrale solcher Funktionen $\int R(x,y)\,dx$ heißen *Abelsche Integrale.* Zur Klassifikation der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale dient der Begriff des *Geschlechts.* Es wird am anschaulichsten geometrisch definiert. Jeder Funktion der Klasse entspricht eine *algebraische Kurve* und ist n ihre

Ordnung, d die Anzahl ihrer *Doppel-* und *Rückkehrpunkte*, so ist das *Geschlecht* $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$ eine für alle Kurven der Klasse konstante Zahl. Ist das Geschlecht *Null*, so lassen sich die Koordinaten eines jeden Kurvenpunktes als *rationale* Funktionen eines Parameters t darstellen (rationalisieren), und die Kurve ist eine *rationale* oder *unikursale* Kurve. (Clebsch, *J. f. Math.* **64**, 43 (1864), Cayley, *Lond. Math. Soc.* 1865 Okt.) Folglich kann *jedes Abelsche Integral vom Geschlecht* $p = 0$ *auf das Integral einer rationalen Funktion zurückgeführt und mithin durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.* Dagegen sind die Integrale von algebraischen Funktionen, deren Geschlecht $p > 0$ ist, nicht ausführbar und führen zu neuen Transzendenten; ihre Theorie wird eingehend in den Kapiteln 18, 19 und 20 behandelt.

Die einfachsten algebraischen Funktionen vom *Geschlecht Null* werden durch eine *quadratische Gleichung* erzeugt, *deren Diskriminante eine lineare oder quadratische Funktion von x ist.* Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine *reine* quadratische Gleichung, also die Funktion $y = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ zugrunde legen.[1]) Die hieraus entspringende Klasse algebraischer Funktionen $R(x, y)$ kann auf unendlich viele Arten rationalisiert werden. Ist nämlich $ax^2 + 2bx + c = f(x)$ und *sei für irgendein* $x = \xi$ *der Wert von* $y = \eta$, *also* $\eta^2 = f(\xi)$, *so ist*

$$(1) \qquad x = \xi + \frac{f'(\xi) + 2t\eta}{t^2 - a}, \quad y = -\eta + t\frac{f'(\xi) + 2t\eta}{t^2 - a}$$

eine rationale Parameterdarstellung von x und y. Es wird also durch eine Substitution (1) jedes Integral der Klasse $\int R(x, y)\,dx$ in das Integral einer *rationalen* Funktion übergeführt. Dabei wird $dx = -\frac{2y}{t^2 - a}dt$, und nach Ausführung der Integration ist $t = \frac{y + \eta}{x - \xi} = \frac{a(x + \xi) + 2b}{y - \eta}$ zu setzen. Sind alle im Integranden vorkommenden Größen reell, so läßt sich ξ immer so wählen, daß auch die Substitution (1) reell ist.

Sind α, β die Nullpunkte der Funktion $f(x)$, also $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ und nimmt man $\xi = \alpha$, so liefert (1) die einfachste Parameterdarstellung

---

1) Ist $y = \sqrt{ax + b}$ $\left(\text{oder allgemein } y = \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + \partial}}\right)$, so nimmt man in den Integralen $\int R(x, y)\,dx$ einfach y als Integrationsvariable.

$$x = \frac{\alpha t^2 - \beta}{t^2 - 1}, \quad y = t\,\frac{\alpha - \beta}{t^2 - 1},$$

und es ist

$$t = \sqrt{\frac{x - \beta}{x - \alpha}}.$$

Als wichtige Beispiele dieser Integrale seien die folgenden angeführt, wobei $f(x) = ax^2 + 2bx + c$, $\Delta = b^2 - ac$, $\varphi(x, \xi) = ax\xi + b(x + \xi) + c$ ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(ax + b + \sqrt{af(x)}\right), \qquad a>0$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{\Delta}}, \qquad a<0$$

$$\int \sqrt{f(x)}\,dx = \frac{ax+b}{2a}\sqrt{f(x)} - \frac{\Delta}{2a\sqrt{a}} \log\left(ax+b+\sqrt{af(x)}\right), \quad a>0$$

$$= \frac{ax+b}{2a}\sqrt{f(x)} + \frac{\Delta}{2a\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{\Delta}}, \qquad a<0$$

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)\sqrt{f(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{f(\xi)}} \log \frac{\varphi(x, \xi) + \sqrt{f(x)\,f(\xi)}}{x - \xi}, \qquad f(\xi)>0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-f(\xi)}} \arcsin \frac{\varphi(x, \xi)}{(x-\xi)\sqrt{\Delta}}, \qquad f(\xi)<0.$$

Dagegen

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)\sqrt{f(x)}} = -\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-\xi)\sqrt{\Delta}},$$

wenn $f(\xi) = 0$ ist.

Auf das erste und die beiden letzten Integrale lassen sich alle Integrale der Klasse durch Partialbruchzerlegung zurückführen. Vgl. die auf Weierstraß zurückgehende Darstellung bei Stolz, *Grundzüge* **1**, 312; **2**, 126, sowie die für die allgemeine Theorie der Abelschen Integrale grundlegende Abhandlung von Aronhold, *J. f. Math.* **61**, 95 (1863).

Das zuletzt angeführte Integral ist eine *algebraische* Funktion und zwar von derselben Klasse wie der Integrand. Das entspricht einem allgemeinen Satz von Abel, *J. f. Math.* **4**, 264. Vgl. Laplace, *Théor. anal. d. probabilités* 3. éd. (1820) S. 7, Liouville, *J. éc. polyt.* **14**, 149.

Ein Integral von der Form $\int x^p (ax^q + b)^r dx = J(p, q, r)$, in dem p, q, r *rationale* Zahlen sind, heißt ein *binomisches Integral*. Es können dabei p und q als *ganze* Zahlen vorausgesetzt werden, was nötigenfalls durch eine Substitution $x = y^n$ erreicht wird, und überdies darf q als *positiv* angenommen werden.

Ein binomisches Integral ist in den folgenden Fällen ausführbar: 1. *wenn* r, 2. *wenn* $\frac{p+1}{q}$, 3. *wenn* $\frac{p+1}{q}+r$ *eine ganze Zahl ist.*

In den beiden letzten Fällen wird das Integral durch die Substitution $ax^q+b=y$ bezw. $a+bx^{-q}=y$ in das Integral einer *rationalen* Funktion übergeführt. (Newton 1676. *Opuscula* **1**, 335.) Tschebyscheff (*J. d. math.* **18**, 87 (1853)) hat bewiesen, daß diese Fälle die einzigen sind, in denen sich das binomische Integral auf algebraische und logarithmische Funktionen zurückführen läßt.

Jedes binomische Integral kann auf ein solches reduziert werden, bei dem $0 \leqq r < 1$ ist und p *und* q *ganze Zahlen* sind, so daß $0 \leqq p < q$. Dazu dienen die durch partielle Integration gewonnenen Formeln:

$$\left(\frac{p+1}{q}+r\right)J(p,q,r)=\frac{x^{p+1}}{q}(ax^q+b)^r+br\,J(p,q,r-1),$$

$$\left(\frac{p+1}{q}+r\right)a\,J(p,q,r)=\frac{x^{p-q+1}}{q}(ax^q+b)^{r+1}$$
$$-\left(\frac{p+1}{q}-1\right)b\,J(p-q,q,r).$$

III. *Die Integration transzendenter Funktionen* sucht man durch geeignete Substitutionen auf diejenige von *rationalen* Funktionen zurückzuführen. Das gelingt in folgenden Fällen, wobei R das Zeichen für eine *rationale* Funktion bedeutet.

1. $\int R(e^{ax})dx$ durch die Substitution $e^{ax}=y$, also $dx=\frac{dy}{ay}$.

Hierher gehören Integrale, wie:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2},$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}.$$

2. $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ durch die Substitution $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y$, also

$$\sin x=\frac{2y}{1+y^2},\quad \cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2},\quad dx=\frac{2dy}{1+y^2}.$$

So ist z. B.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x - \lambda}{2}\right),$$

$$\text{worin } \lambda = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \operatorname{tg} x\right),$$

$$\int \frac{dx}{a \cos^2 x - b \sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} \operatorname{tg} x}{\sqrt{a} - \sqrt{b} \operatorname{tg} x}.$$

Auf die letzten Integrale werden

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{(a + b) \cos^2 \frac{x}{2} + (a - b) \sin^2 \frac{x}{2}}$$

und

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}$$

$$= \int \frac{d(x - \lambda)}{a + r \cos (x - \lambda)} \qquad \left(r = \sqrt{b^2 + c^2},\ \lambda = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b}\right)$$

zurückgeführt.

Die Integrale von der Form $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ werden durch Substitutionen, wie $\sin x = y$ oder $\operatorname{tg} x = z$, in *binomische* Integrale verwandelt. Auch kann man, wenn $m + n$ nicht Null ist, durch die Formeln

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m + n} + \frac{n - 1}{m + n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m + n} + \frac{m - 1}{m + n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx$$

die Exponenten im Integranden auf Werte zwischen -1 und $+1$ reduzieren.

3. Bedeutet P ein *Polynom* und sind $\alpha, \beta, \ldots \mu$ irgendwelche Zahlen, so ist das Integral $\int P(x, e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \ldots e^{\mu x})\, dx$ *stets ausführbar,* denn es besteht aus einer endlichen Anzahl von Integralen der Form

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{d^n}{da^n}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} n!}{a^{n+1}} e^{ax}\left[1 - ax + \frac{(ax)^2}{2!} - \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots \pm \frac{(ax)^n}{n!}\right].$$

Ein Integral $\int e^x R(x)\,dx$ wird durch Partialbrüche in eine Anzahl Integrale von der Form $A^m \int \frac{e^x\,dx}{(x-a)^{m+1}}$ zerlegt, und diese werden vermöge der Formel

$$\int \frac{e^x\,dx}{(x-a)^{m+1}} = -\frac{e^x}{m(x-a)^m} + \frac{1}{m}\int \frac{e^x\,dx}{(x-a)^m}$$

schließlich auf *eine mit* e^x *multiplizierte rationale Funktion* und ein *Aggregat von Integralen der Form* $A\int \frac{e^x\,dx}{x-a}$ reduziert. Die letzteren lassen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken; sie werden aber sämtlich auf eine *einzige neue transzendente* Funktion $\int \frac{e^z}{z}\,dz$, den *Integrallogarithmus* $li(e^z)$ zurückgeführt. Ebenso führen die Integrale von der Form $\int \sin x\, R(x)\,dx$ und $\int \cos x\, R(x)\,dx$ zu den Transzendenten $\int \frac{\sin z}{z}dx$ und $\int \frac{\cos z}{z}\,dz$.

Vgl. zu diesem Paragraphen: Hermite, *Cours d'analyse* 1873, S. 261—356, Hardy, *The integration of functions of a single variable, Cambridge tracts in Mathematics* 1905.

§ 3. **Das bestimmte Integral. Definitionen.**

I. Der Übergang vom unbestimmten zum bestimmten Integral wird am einfachsten durch die geometrische Anschauung vermittelt. Nimmt man auf der Kurve $y = f(x)$ einen festen Punkt mit der Abszisse $x = a$, so ist der *Inhalt der Fläche* von der zugehörigen Ordinate bis zu der Ordinate irgendeines Kurvenpunktes mit der Abszisse x eine gewisse Funktion von x, und man zeigt, daß der *Differentialquotient dieser Funktion gleich der Endordinate*, *also gleich* $f(x)$ ist. Daraus folgt, daß der gesamte Flächeninhalt durch das Integral $\int f(x)\,dx$ angegeben wird, aber darin ist die Konstante so zu bestimmen, daß das Integral für $x = a$ den Wert Null hat. Man bezeichnet alsdann das Integral durch $\int\limits_a^x f(x)\,dx$, und wenn $F(x)$ einen Wert des *unbestimmten* Integrals bedeutet $\left(\text{also } \frac{dF}{dx} = f(x)\right)$, so ist *das bestimmte Integral zwischen den Grenzen a und x* definiert durch

$$(1) \qquad \int\limits_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

II. Zu einer anderen Definition des bestimmten Integrals gelangt man, wenn man den Begriff des *Flächeninhalts*, der zunächst nur für geradlinig begrenzte Flächenstücke Bedeutung hat, genauer zu präzisieren sucht. Hierauf beruhen die Definitionen von Cauchy (*J. éc. pol.* **19**, 571 (1823)) und die umfassendere von Riemann (*Hab.-Schr.* Gött. 1854 = *Werke*, 239), nämlich:

Es sei $f(x)$ in dem endlichen Intervall (a, b) eine *begrenzte* Funktion[1]). Man zerlegt das Intervall in irgendeiner Weise in *Teilintervalle* $d_1, d_2, \ldots d_n$ und es sei x_i der Wert von x an einer *beliebigen* Stelle des Teilintervalls d_i. Man bildet dann die Summe

$$J = d_1 f(x_1) + d_2 f(x_2) + \cdots + d_n f(x_n)$$

und betrachtet ihr Verhalten, während man die Anzahl der Teilintervalle beständig so vermehrt, daß alle gegen Null konvergieren. *Wenn dann diese Summe einen bestimmten Grenzwert besitzt, der unabhängig ist von der Art der Teilung des Intervalls (a, b) und von der Wahl der Punkte x_i, so nennt man $f(x)$ integrierbar, und der Grenzwert heißt das bestimmte Integral von $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b.* Man schreibt

$$(2) \qquad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\left[d_1 f(x_1) + d_2 f(x_2) + \cdots + d_n f(x_n)\right].$$

Diese Auffassung des Integrals als *Grenzwert einer Summe* ist älter als die auf der Umkehrung der Differentialrechnung beruhende; sie geht allgemein auf Leibniz (*Mscr.* vom 29. X. 1675) zurück, findet sich aber in einzelnen Beispielen — entsprechend dem aufs Konkrete gerichteten Charakter der griechischen Mathematik, die den Begriff der Funktion nicht kannte —

1) *Fonction bornée,* d. h. die Funktion bleibt immer zwischen zwei endlichen Zahlen A und B.

bereits bei Archimedes (287—212 v. Chr.) in der Schrift über die *Quadratur der Parabel* und namentlich in der erst 1906 gefundenen *Abhandlung von den mechanischen Lehrsätzen* (vgl. Heiberg und Zeuthen, *Bibl. Math.* (3) **7**, 321 (1907))

Die folgenden Sätze lassen die Tragweite und den Geltungsbereich der Riemannschen Definition erkennen:

1. Sei D_i die *Schwankung* der Funktion $f(x)$ innerhalb des Teilintervalls d_i (vgl. S. 34), so ist *notwendige und hinreichende Bedingung, damit $f(x)$ integrabel ist*, daß die Summe $\sum d_i D_i$ den *Grenzwert Null* besitzt.

2. Damit $f(x)$ *integrierbar* ist, ist *notwendig* und *hinreichend*, daß die *Summe derjenigen Teilintervalle*, in denen die Schwankung von $f(x)$ größer als eine positive Zahl ε ist, *bei wachsendem n beliebig klein wird.*

3. Damit $f(x)$ *integrierbar* ist, ist *notwendig* und *hinreichend,* daß die *Menge* ihrer *Unstetigkeitspunkte* innerhalb (a, b) den *Inhalt Null* (vgl. S. 29) besitzt.

Insbesondere sind folgende Funktionen integrierbar:

a) Alle innerhalb (a, b) *endlichen* und *stetigen* Funktionen.

b) Alle innerhalb (a, b) endlichen und *abteilungsweise monotonen* Funktionen (vgl. Differentialrechnung § 2).

c) Die innerhalb (a, b) endlichen Funktionen mit einer *endlichen* Anzahl von *Unstetigkeiten* und diejenigen *punktiert unstetigen* Funktionen (vgl. S. 37), deren Unstetigkeitspunkte eine *endliche Anzahl von Häufungsstellen* besitzen (allgemeiner eine *abzählbare Menge* bilden).

d) Diejenigen innerhalb (a, b) endlichen und *punktiert unstetigen* Funktionen, bei denen die *Anzahl der Sprünge*, die größer sind als eine beliebig kleine positive Zahl ε, stets *endlich* ist und nur bei unbeschränkter Abnahme von ε über jedes Maß hinaus wachsen kann.

Der Satz von Hankel (*Math. Ann.* **20**, 92 (1870)), daß *jede* innerhalb (a, b) *punktiert unstetige* Funktion dort integrierbar sei, ist *nicht* richtig (Smith, *Lond. Math. Soc.* **6**, 148 (1875), Volterra, *Giorn. di Math.* **19**, 76 (1881)), während umgekehrt jede integrierbare Funktion innerhalb des Integrationsintervalls nur punktiert unstetig werden kann.

4. Eine integrierbare Funktion darf man innerhalb des Integrationsintervalls in den Punkten einer Punktmenge erster Gattung[1]) *beliebig abändern, ohne daß sich der Wert des Integrals ändert.*

1) d. h. eine Punktmenge mit einer *endlichen* Anzahl von Ableitungen (vgl. S. 28).

5. *Stetige Funktionen von integrierbaren Funktionen sind wieder integrierbar.*

Eine unmittelbare Folge der Definition ist der Satz: *Der Quotient* $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *kann als der Grenzwert des arithmetischen Mittels* $\frac{1}{n}\sum\limits_1^n f(x_i)$ *der* n *Werte der Funktion in beliebigen Teilpunkten des Intervalls* (a, b) *angesehen werden.* Über die hieran anknüpfenden Näherungsmethoden zur Berechnung bestimmter Integrale *(mechanische Quadratur)* vgl. *Differenzenrechnung* § 4.

Von den an Riemann anknüpfenden und seine Ideen weiterführenden Arbeiten seien genannt: Darboux, *Ann. éc. norm.* (2) **4**, (1875), Thomae, *Einl. in d. Theor. d. best. I.* (1875), Ascoli, *Acc. Linc. Atti* (1876), 863. Vgl. die Darstellungen in Dini, *Grundlagen* und Jordan, *Cours d'analyse.*

III. Neuerdings ist der Integralbegriff durch Lebesgue bedeutend erweitert worden, und zwar auf Grund des Begriffs des *Inhalts* einer Punktmenge (S. 29). Während bei Riemann ein Intervall (a, b) der *unabhängigen Variablen* in Teilintervalle zerlegt wird, zerlegt Lebesgue die *Gesamtschwankung* der *Funktion* innerhalb (a, b). Sei also $y = f(x)$ eine *begrenzte* Funktion, m ihre *untere*, M ihre *obere* Grenze innerhalb (a, b); wählt man zwischen m und M eine Reihe von wachsenden Funktionswerten, so daß

$$m = y_0 < y_1 < y_2 \cdots < y_{n-1} < y_n = M$$

ist, so bilden die Werte von x, für die $y_{i-1} < f(x) < y_i$ und ebenso diejenigen, für die $y_i = f(x)$ ist, jedesmal eine *Punktmenge.* Wenn nun jede dieser Punktmengen *meßbar* ist, und zwar *bei jeder beliebigen Wahl der Zwischenwerte* $y_1, \ldots y_{n-1}$, so heißt die Funktion $f(x)$ *meßbar innerhalb* (a, b). Sei nun e_i der *Inhalt* der zu $y_{i-1} < f(x) < y_i$ gehörigen, e_i' der *Inhalt* der zu $y_i = f(x)$ gehörigen *Punktmenge*; wenn dann die Summen

$$(3)\qquad S = \sum_1^n e_i y_i + \sum_1^n e_i' y_i \quad \text{und} \quad s = \sum_1^n e_i y_{i-1} + \sum_1^n e_i' y_i$$

bei unbegrenzter Vermehrung von n unabhängig von der Wahl der Zwischenwerte y_i *zu derselben Grenze* J konvergieren, so heißt $f(x)$ *summierbar*, und J ist das *Integral* von $f(x)$ im Intervall (a, b). Es gilt der Satz:

Damit eine begrenzte Funktion *summierbar* ist, ist *notwendig* und *hinreichend*, daß sie *meßbar ist.*

Der Lebesguesche Integralbegriff ist umfassender als der Riemannsche und enthält ihn als besonderen Fall, denn der Begriff der *meßbaren* Funktionen ist weiter als der der *integrierbaren.* Man kennt *keine begrenzte* Funktion, die *nicht summierbar* ist; insbesondere sind *alle unstetigen Funktionen irgendeiner Baireschen Klasse* (vgl. S. 37) *summierbar.*

Lebesgue hat seinen Integralbegriff auch auf *nicht begrenzte* Funktionen ausgedehnt; dabei zeigt sich aber der merkwürdige Umstand, daß es unter diesen Funktionen solche gibt, die im gewöhnlichen Sinn *integrierbar*, aber *nicht summierbar* sind.

Über die Theorie von Lebesgue vgl. Lebesgue, *Ann. di mat.* (3) **7**, 231 (1902) und dess. Verf. *Leç. s. l'intégration*, Paris 1904; Borel, *Leç. s. l. fonct. de var. réelles*, Paris 1905. Schönflies, *Entwickl. d. Lehre v. d. Punktmannigf.* **2**, 318 (1908).

Stellt man das bestimmte Integral in der Definition von Riemann oder Lebesgue an die Spitze der Integralrechnung, so wird das *unbestimmte Integral* als $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ mit einer willkürlichen unteren Grenze a definiert, d. h. es wird das bestimmte Integral als *Funktion der oberen Grenze* betrachtet. Es bestehen die folgenden Sätze, durch die der Zusammenhang zwischen der *ersten* und der Riemannschen Definition hergestellt wird:

1. *Die Integralfunktion* $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ *ist eine endliche und stetige Funktion von* x.

2. *Ist auch* $f(x)$ *eine stetige Funktion, so besitzt die Integralfunktion in jedem Punkt* x *eine bestimmte Derivierte, deren Wert gleich* $f(x)$ *ist.*

3. *Fundamentalsatz der Integralrechnung. Falls die stetige Funktion* $F(x)$ *in jedem Punkt eine bestimmte endliche Derivierte* $f(x)$ *besitzt, so ist*

$$\int\limits_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Es ist aber die erste Definition des bestimmten Integrals *nicht völlig äquivalent* mit der Riemannschen, denn einerseits gibt es Funktionen, die im Riemannschen Sinn *integrabel* sind, aber keine *primitive* Funktionen besitzen, andererseits gibt es *primitive* Funktionen, deren Derivierte *nicht* im Riemannschen Sinn integrabel sind. Vgl. Du Bois-Reymond, *Math. Ann.* **16**, 115 (1880), Pasch, ebenda **30**, 153 (1887), Volterra, *Giorn. di Mat.* **19**, 76 (1881), Scheeffer, *Acta Mat.* **5**, 183 u. 279 (1884), Hahn, *Monatsh. f. Math.* **16**. 161 (1905).

Uneigentliche bestimmte Integrale. Die Riemannsche Definition versagt in folgenden Fällen:

1. wenn $f(x)$ im Integrationsintervall *Unendlichkeitsstellen* besitzt,

2. wenn das Integrationsintervall *unendlich groß* ist.

Wenn es nun gelingt, durch geeignete Festsetzungen das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ auch in diesen Fällen zu definieren, so nennt man ein solches Integral ein *uneigentliches Integral.* Cauchy, *J. éc. polyt.* **19**, 572 (1823).

Im folgenden sei $a < b$ vorausgesetzt, was nach dem ersten Satz im folgenden Paragraphen stets erreichbar ist.

Es möge also die Funktion $f(x)$ in einem Punkt c des Intervalls (a, b) *unendlich* werden, aber in den Teilintervallen $(a, c-\delta)$ und $(c+\varepsilon, b)$ integrierbar sein, *wie klein man auch die positiven Zahlen δ und ε annehmen mag;* man definiert dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, daß diese Grenzwerte existieren, endlich und *unabhängig sind von der Art, wie δ und ε gegen Null konvergieren.* Wenn $f(x)$ in einer endlichen Anzahl von Punkten $c_1 c_2 \ldots c_n$ unendlich, im übrigen aber integrierbar ist, so wird ebenso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_1=0} \int_a^{c_1-\delta_1} + \lim_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \delta_2=0}} \int_{c_1+\varepsilon_1}^{c_2-\delta_2} + \lim_{\substack{\varepsilon_2=0\\ \delta_3=0}} \int_{c_2+\varepsilon_2}^{c_3-\delta_3} + \cdots + \lim_{\varepsilon_n=0} \int_{c_n+\varepsilon_n}^{b}$$

definiert. Wird $f(x)$ in unendlich vielen Punkten von (a, b) mit einer *endlichen Anzahl von Häufungsstellen* unendlich und schneidet man die Umgebungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ aller Häufungsstellen heraus, so zerfällt (a, b) in $\varkappa + 1$ Teilintervalle, deren jedes nur eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen enthält. Wenn nun auf Grund der letzten Definition das Integral über jedes Teilintervall existiert, wie klein man auch $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ wählen mag, so wird die Summe dieser Integrale für $\lim \omega_1 = 0$, $\ldots \lim \omega_\varkappa = 0$ als $\int_a^b f(x)\,dx$ definiert. Entsprechend kann man zu Definitionen des Integrals kommen, wenn $f(x)$ in den Punkten einer *Punktmenge erster Gattung* unendlich wird. (Vgl. Dini, *Grundlagen* S. 406.)

Es kann vorkommen, daß im allgemeinen keine bestimmten Grenzwerte existieren und dennoch sich für $\int_a^b f(x)\,dx$ ein bestimmter Wert ergibt, *wenn man eine Beziehung zwischen den gegen Null konvergierenden Größen δ und ε annimmt;* (Beispiel $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \ln a$, wenn $\delta = a \cdot \varepsilon$). Für den Fall eines einzigen Unendlichkeitspunktes c im Intervall (a, b) nennt Cauchy den aus der Annahme $\delta = \varepsilon$ sich ergebenden Grenzwert, falls er existiert, den *Hauptwert* des Integrals. Auch Dirichlet hat hiervon Gebrauch gemacht (*Vorl. üb. bestimmte I.* herausgeg. von Arendt 1904), jedoch ist die Notwendigkeit der Einführung dieses Begriffes bestritten worden. (Riemann, *Werke,* S. 225, Kronecker, *Vorl. üb. die Theor. d. Integrale* S. 210.)

Wird das *Integrationsintervall unendlich,* indem entweder die *obere* oder die *untere Grenze* oder *beide unendlich groß* werden, so definiert man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a=-\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a=-\infty \\ b=+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dabei muß im letzten Fall der Grenzwert unabhängig sein von der *Reihenfolge* und der *Art des Unendlichwerdens* von a und b. Auch hier kann es vorkommen, daß er nur unter Annahme einer bestimmten Beziehung zwischen a und b existiert; insbesondere ist der Grenzwert $\lim\limits_{a=\infty} \int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx$, falls er vorhanden ist, der *Hauptwert* des Integrals.

Wenn die angegebenen Grenzwerte für ein uneigentliches Integral existieren und endlich sind, so heißt das Integral *konvergent*; es heißt *absolut konvergent*, wenn auch das mit dem *absoluten Wert der Funktion* gebildete Integral konvergiert, *bedingt konvergent*, wenn dies nicht der Fall ist.

Es bestehen die Sätze: 1. Ist $f(x)$ im Endpunkt b des endlichen Intervalls (a, b) unendlich, sonst aber im ganzen Intervall integrierbar, so ist zur absoluten Konvergenz von $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *hinreichend* die Existenz einer positiven Zahl $\mu < 1$, so daß $\lim\limits_{x=b-0} (x-b)^\mu f(x)$ existiert und endlich ist.

2. Wenn unter den gleichen Voraussetzungen überdies $f(x)$ in (a, b) sein Zeichen nicht wechselt, so ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ sicher *divergent, sobald* $|(x-b)f(x)|$ *im ganzen Intervall und auch für* $x = b$ *größer als eine bestimmte positive Zahl bleibt.*

3. Zur absoluten Konvergenz von $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ ist *hinreichend* die Existenz einer Zahl $\mu > 1$, so daß $\lim\limits_{x=\infty} x^\mu f(x)$ existiert und endlich ist.

4. Wenn $f(x)$ im Intervall (a, ∞) sein Zeichen nicht wechselt, so ist $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ sicher *divergent, sobald* $|x\,f(x)|$ *im ganzen Intervall und auch für* $x = \infty$ *größer als eine bestimmte positive Zahl bleibt.*

Vgl. hierzu Riemann, *Werke*, 229, Du Bois-Reymond, *J. f. Math.* **76**, 88 (1872), Pringsheim, *Math. Ann.* **37**, 591 (1890), Dini, *Grundlagen*, Kap. 17 u. 18, Stolz, *Grundzüge* **1**, 401. Weitere Literatur bei Pascal, *Esercizi e note critiche* 272.

Durch den folgenden Satz wird für eine wichtige Klasse von Integralen die Konvergenz (nicht aber die *absolute* Konvergenz) gesichert:

Ist $\varphi(x)$ eine Funktion von der Art, daß das Integral $\int\limits_a^x \varphi(x)\,dx$ mit unendlich wachsendem x in endlichen Grenzen bleibt (z. B. $\varphi(x) = \sin \alpha x$ oder $\cos \alpha x$), so ist zur Konvergenz des Integrals $\int\limits_a^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx$ hinreichend, daß die Funktion $f(x)$ im Integrationsintervall endlich bleibt und daß ihr absoluter Wert bei wachsendem x beständig zu Null abnimmt.

Schließlich sei der Satz erwähnt: Ist das Integral $\int\limits_0^a f(x)\,dx$ konvergent und ist

1. $f(x)$ *gerade* Funktion, so ist $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$,

2. $f(x)$ *ungerade* Funktion, so ist $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$.

§ 4. Haupteigenschaften der bestimmten Integrale.

Die allgemeinen Sätze über unbestimmte Integrale (§ 1) sind sinngemäß auf die bestimmten Integrale zu übertragen. Dazu kommen noch folgende Sätze:

1. *Bei Vertauschung der Grenzen ändert ein bestimmtes Integral nur das Vorzeichen:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

2. *Gehören a, b, c oder allgemeiner a, b, c_1, c_2, ... c_n einem Intervall an, in dem $f(x)$ integrierbar ist, so ist*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

und

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots \int\limits_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int\limits_{c_n}^b f(x)\,dx.$$

3. Ist m die *untere*, M die *obere* Grenze von $f(x)$ im Intervall (a, b), so ist stets

$$m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M.$$

4. *Erster Mittelwertsatz.* Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ im Intervall (a, b) integrierbar *und behält dort* $\varphi(x)$ *sein Zeichen,* so ist

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \gtreqqless \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \gtreqqless M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Ist $f(x)$ *stetige* Funktion, so gibt es einen Funktionswert $f(\xi)$ in einem bestimmten Punkt ξ des Intervalls (a, b), so daß

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Cauchy-Moigno, *Calc. intégr.* **2**, 48 (1844), Dirichlet, *Werke* **1**, 137. Übertragungen auf *komplexes Gebiet* von Darboux, *J. de math.* (2) **3**, 294 (1876) und Weierstraß (vgl. Hermite, *Cours d'analyse* 4. éd. 1891, S. 62).

5. *Zweiter Mittelwertsatz.* Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ im Intervall (a, b) integrierbar *und ist* $f(x)$ *dort monoton*, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

Bonnet, *J. de math.* **14**, 249 (1849), Du Bois-Reymond, *J. f. Math.* **69**, 81 (1869), Hölder, *Gött. Anz.* (1894), 519, Pringsheim, *Münch. Ber.* (1900), 209, G. Kowalewski, *Math. Ann.* **60**, 151 (1905). Eine eingehende Untersuchung über diesen Satz mit Heranziehung *komplexer Größe* enthält Brunn, *Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie* 1905.

Einen Mittelwertsatz, der — allerdings unter spezielleren Voraussetzungen für die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ — engere Grenzen liefert als der erste, hat Fejér, *Math. Ann.* **64**, 287 (1907) gegeben.

6. Ist $f(x)$ eine Funktion, für die $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergiert, $\varphi(x, s)$ eine innerhalb (a, b) stetige Funktionen von x,

die dort überall unter einer endlichen positiven Zahl bleibt und für $s=\alpha$ gleichmäßig gegen einen endlichen Grenzwert $\varphi(x)$ konvergiert, so konvergieren auch die Integrale $\int_a^b f(x)\,\varphi(x,s)\,dx$ und $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ absolut, und es ist

$$\lim_{s=\alpha}\int_a^b f(x)\,\varphi(x,s)\,dx=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

7. Eine Funktion $f(x,s)$ von zwei Veränderlichen sei in einem Bereiche $(a\leqq x\leqq b,\ p\leqq s\leqq q)$ als Funktion von x *integrierbar*, als Funktion von s *stetig; alsdann stellt das bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x,s)\,dx$$

eine im Intervall (p,q) — welches auch unendlich groß sein kann — *stetige Funktion von s dar.* Diese Funktion kann in einem zum Bereich gehörigen Intervall (α,β) von s *unter dem Integralzeichen integriert* und, sobald auch $\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}$ in dem angegebenen Bereiche *stetig* ist, *unter dem Integralzeichen nach s differentiiert werden*, d. h. es ist

$$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,s)\,dx\right]ds=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,s)\,ds\right]dx,$$

$$\frac{d}{ds}\int_a^b f(x,s)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\,dx.$$

Sind aber die Grenzen a und b ebenfalls von s abhängig, so tritt an Stelle des letzten Satzes die Gleichung

$$\frac{d}{ds}\int_a^b f(x,s)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\,dx+f(b,s)\frac{db}{ds}-f(a,s)\frac{da}{ds}.$$

Zu diesen Sätzen vgl. Stolz, *Grundzüge* **1**, 425, Pascal, *Esercizi e note critiche* 299, Arzelà, *Acc. Linc. Rend.* (4) **1** (1885) u. (5) **6**, 290 (1897), Osgood, *Ann. of Math.* (2) **3**, 129 (1902) u. (2) **9**, 119 (1908).

Sämtliche Sätze dieses Paragraphen lassen sich auf *uneigentliche Integrale* übertragen, wenn man nur beachtet, daß alle vorkommenden Integrale *konvergent* sein müssen.

§ 5. Zusammenstellung einiger bestimmter Integrale.

Eine auch nur einigermaßen vollständige Übersicht der wichtigeren bestimmten Integrale kann hier nicht gegeben werden. Es sei außer auf die bekannten Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung besonders auf die Vorlesungen von Dirichlet (herausgeg. von G. F. Meyer, Leipzig 1871 und Arndt, Braunschweig 1904), Kronecker (herausgeg. von Netto, Leipzig 1894) und Thomae (Leipzig 1908) verwiesen. Die vollständigste Darstellung der Methoden zur Ermittlung bestimmter Integrale findet man bei Bierens de Haan, *Exposé de la théorie ... des intégr. déf.*, Amsterdam 1862, und die reichhaltigste Sammlung von solchen Integralen in desselben Verfassers *Tables d'intégr. déf.*, ebd. 1858, 2. éd. 1867. Vgl. dazu Lindman, *Examen des nouv. tables ... de B. de H.* Stockholm 1891.

I. Als die einfachsten bestimmten Integrale sind diejenigen anzusehen, bei denen die *unbestimmte* Integration ausführbar ist; man findet dann den Wert des bestimmten Integrals auf Grund der ersten Definition § 3. So ist

$$(1)\qquad \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1},\ a > -1. \qquad \int_1^\infty x^a dx = -\frac{1}{a+1},\ a < -1.$$

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},\quad a > 0.$$

Durch n-malige *Differentiation* dieses Integrals nach a folgt

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = (-1)^n \int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

und durch *Integration* desselben Integrals nach a im Intervall $(1, a)$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x} dx = \log a.$$

$$(3)\qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}.$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(5) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}, \quad a,\ b \text{ positiv.}$$

Durch Differentiation dieses Integrals nach a und b:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

(6) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos\frac{b}{a}, \qquad a^2 > b^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}, \qquad a^2 < b^2$$

$$= \frac{1}{a}, \qquad a = b.$$

(7) $$\int_0^\pi \frac{\cos nx\,dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\pi a^n}{1 - a^2}, \quad |a| < 1,$$

n ganze positive Zahl,

$$= \frac{\pi a^{-n}}{a^2 - 1}, \quad |a| > 1.$$

(8) $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$a > 0.$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Durch Integration des ersten Integrals nach b von 0 bis b (Euler 1781):

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

Hieraus

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \text{je nachdem } b \gtrless 0$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax \sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn } |a| < 1,$$
$$= \frac{\pi}{4}, \quad \text{wenn } |a| = 1,$$
$$= 0, \quad \text{wenn } |a| > 1.$$

Dirichlets *diskontinuierlicher Faktor* (*Berl. Ber.* 1839, 18 u. *Abhandl.* 1841, 61). Bereits 1811 neben anderen diskontinuierlichen Funktionen von Fourier aus seinem Doppelintegral abgeleitet. (*Théor. anal. de la chaleur* No. 348.)

Ein weiteres Beispiel einer diskontinuierlichen Funktion bietet das Integral, das man aus den Integralen (7) ableiten kann:

$$(9) \quad \int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx = 0, \qquad \text{wenn } |a| \leqq 1,$$
$$= 2\pi \log |a|, \text{ wenn } |a| \geqq 1.$$

Für $a = \pm 1$ ist dies gleichbedeutend mit:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

$$(10) \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx = \int_1^\infty \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{-\frac{1}{2}}}{1-x} dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{-a}}{1+x} dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \qquad = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^a + x^{-a}}{1 + 2x\cos\theta + x^2} dx = \int_1^\infty \frac{x^a + x^{-a}}{1 + 2x\cos\theta + x^2} dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1 + 2x\cos\theta + x^2} dx = \frac{\pi \sin a\theta}{\sin a\pi \sin\theta}, \qquad -\pi < \theta < \pi.$$

II. Durch *partielle Integration* werden z. B. die Integrale gefunden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^m (\cos x)^{2n+1} dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{(m+1)(m+3)\cdots(m+2n+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m+1} (\cos x)^{2n} dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+2n+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m} (\cos x)^{2n} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2(m+n)}.$$

III. Die letzten Integrale gehören, ebenso wie die folgenden, der Theorie der *Gammafunktion* an, die in einem besonderen Kapitel behandelt wird.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Dieses wichtige Integral (Euler 1730) wird gewöhnlich nach Laplace (*Paris. Mém. de l'acad.* 1778) mit Hilfe von Doppelintegralen gefunden. Eine ganz direkte Ableitung auf Grund der Cauchy-Riemannschen Integraldefinition bei Cesàro, *Algebr. Analysis* 699. Eine andere nach Stieltjes, ebd. 719. Vgl. Hermite, *Cours*, 4. éd. 116.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-2\sqrt{ab}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Die letzten Integrale (Euler 1781) sind spezielle Werte der *Fresnelschen Integrale,* die in der Beugungstheorie des Lichts von Wichtigkeit sind. (Fresnel, *Œuvres* **1**, 319, Verdet, *Leç. d'optique physique* **1**, 328, Loria, *Spezielle ebene Kurven,* 457.)

$$a\int_0^\infty \frac{\cos bx\,dx}{a^2+x^2} = \varepsilon_a \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}, \qquad \varepsilon_a \text{ Vorzeichen von } a.$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{a^2+x^2}\,dx = \varepsilon_b \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}, \qquad \varepsilon_b \text{ Vorzeichen von } b.$$

IV. Durch *Reihenentwicklung* findet man z. B.

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \int_0^\infty x(e^{-x}+e^{-2x}+\cdots)\,dx =$$
$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ebenso

$$-\int_0^1 \frac{\log x}{x+1}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Diese Integrale gehören der Theorie der *Riemannschen ζ-Funktion* an. (Vgl. Kap. XXII.)

Bei trigonometrischen Funktionen wird häufig ein unendlich großes Integrationsintervall in Teilintervalle von der Länge $\frac{\pi}{2}$ oder π zerlegt, die dann mit Hilfe der Periodizitätseigenschaften sämtlich auf das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oder $(0, \pi)$ reduziert werden. So ist z. B.

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x+2\pi} + \cdots\right)dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\,\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^\pi \frac{\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2\pi}+\frac{1}{x+2\pi}+\frac{1}{x-4\pi}+\frac{1}{x+4\pi}+\cdots\right)d$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\left(\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2(1-a)},\quad |a|<1$$

$$=\frac{\pi}{2a(a-1)},\quad |a|>1.$$

Fast alle hier genannten Integrale sind von Euler gefunden worden. Vgl. *Miscell. Berol.* **7**, 129 (1743), *Petersb. Akad.* 1777, Pars I, 3, *Opusc. anal.* **2**, 42 (1785) und namentlich *Inst. calc. int.* **4** (1794). Die wichtigsten Fortschritte über das von ihm Erreichte hinaus wurden durch den *Integralsatz von Cauchy* erzielt, der in der Theorie der analytischen Funktionen zu besprechen ist. Er bietet ein hervorragendes Hilfsmittel zur Ermittlung von bestimmten Integralen.

Wenn ein Integral sich nicht durch einen geschlossenen Ausdruck aus einer endlichen Anzahl von bekannten Funktionen darstellen läßt, so definiert es eine neue transzendente Funktion, zu deren Berechnung man sich gewöhnlich der *Reihenentwicklung* des Integrals bedient. Wichtige Beispiele von solchen Funktionen werden in besonderen Kapiteln behandelt werden (elliptische, hyperelliptische und Abelsche Integrale, Gammafunktion, Besselsche Funktionen).

§ 6. **Kurvenintegrale.**

Durch zwei reelle begrenzte Funktionen der reellen Variablen t:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

wird eine *Kurve* in der xy-Ebene definiert (die natürlich nicht notwendig *regulär* (Differentialrechnung § 2) zu sein braucht). Einem Intervall (a, b) der Veränderlichen t entspricht ein Kurvenstück C. Dieses Intervall wird in irgendeiner Weise in n Teilintervalle zerlegt mit den Endpunkten $a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, b$, denen die Funktionswerte $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ und $y_0, y_1,$

$y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ entsprechen mögen. Zwischen diesen wählt man Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ und $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ aus, so daß $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$, $y_{i-1} \leqq \eta_i \leqq y_i$ ist, und bildet für irgendeine begrenzte Funktion $P(x, y)$ von zwei Veränderlichen die Summe $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1})$. Wenn diese Summe bei unendlich wachsendem n, während die Teilintervalle $(t_{i-1} t_i)$ sämtlich gegen Null konvergieren, einen bestimmten endlichen Grenzwert besitzt, so heißt die Funktion $P(x, y)$ *längs C integrierbar*, und der Grenzwert heißt *das in bezug auf x längs C erstreckte Kurvenintegral von* $P(x, y)$. Man schreibt es

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Entsprechend wird das in bezug auf y längs C erstreckte Kurvenintegral einer Funktion $Q(x, y)$ definiert durch

$$\int\limits_C Q(x, y)\,dy = \lim_{n=\infty} \sum Q(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1}),$$

und man schreibt

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + \int\limits_C Q(x, y)\,dy = \int\limits_C (P\,dx + Q\,dy).$$

Die Existenz des Kurvenintegrals hängt von der Beschaffenheit der Kurve, also von den Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, sowie von der zu integrierenden Funktion ab. Es gilt darüber folgendes:

Sind $\varphi(t)$ *und* $\psi(t)$ *im Intervall* (a, b) *eindeutige, stetige Funktionen von beschränkter Schwankung* (S. 39) *und bedeutet* γ_i *die Maximalschwankung von* $P(x, y)$ *in der Umgebung*[1]) *des Punktes* (ξ_i, η_i), *so ist zur Integrierbarkeit von* $P(x, y)$ *längs C in bezug auf x notwendig und hinreichend, daß* $\lim \sum \gamma_i |x_i - x_{i-1}| = 0$ *ist.*

Die hier gegebene, durch große Allgemeinheit ausgezeichnete Definition der Kurvenintegrale rührt von Heffter, *Gött. Nachr.* (1902), 115, her. Vgl. Picard, *Traité d'analyse* 1. éd. **1**, 70, Jordan, *Cours d'analyse* 2. éd. **1**, 181, Pringsheim, *Münch. Ber.* **25**, 39 u. 295 (1895).

Infolge der Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ist der *Integrationsweg C* eine *stetige rektifizierbare Kurve*

1) Über die genauere Begrenzung dieser Umgebung vgl. Heffter, *Gött. Nachr.* (1902), 120.

im Sinne von C. Jordan (vgl. auch Study, *Math. Ann.* **47**, 313 (1896), u. Schoenflies, *Entwickl. d. Lehre v. d. Punktmannigf.* **2**, 246 (1908).

Unter engeren, aber immer noch sehr allgemeinen Annahmen über die Beschaffenheit des Integrationsweges kann man *jedes Kurvenintegral auf ein gewöhnliches bestimmtes Integral zurückführen,* nämlich:

a) Sind $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ im Intervall (a, b) *monotone* Funktionen und ergeben sich durch Elimination von t die Gleichungen $y = f(x)$, $x = g(y)$, so ist

$$\int_{C} P(x, y)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} P(x, f(x))\,dx; \quad \int_{C} Q(x, y)\,dy = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} Q(g(y), y)\,dy.$$

Sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ *abteilungsweise monoton,* so lassen sich die Kurvenintegrale aus einer endlichen Anzahl solcher gewöhnlichen Integrale zusammensetzen.

b) Besitzen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ im Intervall (a, b) *stetige Ableitungen,* so ist

$$\int_{C} P(x, y)\,dx = \int_{a}^{b} P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt;$$

$$\int_{C} Q(x, y)\,dy = \int_{a}^{b} Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\,dt.$$

1. *Fundamentalsatz der Integralrechnung für Kurvenintegrale.* Ist eine Funktion $F(x, y)$ *nebst ihren ersten Ableitungen* $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ längs der Kurve C und in ihrer Umgebung *eindeutig* und *stetig* und sind $F(\!(a)\!)$ und $F(\!(b)\!)$ die Funktionswerte in den Endpunkten des Intervalls (a, b), so ist

$$\int_{C} dF = \int_{C} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy\right) = F(\!(b)\!) - F(\!(a)\!).$$

Insbesondere ist längs einer *geschlossenen* Kurve $\int_{C} dF = 0$, und wenn die Funktion F und ihre ersten Ableitungen in einem zusammenhängenden *Bereich* eindeutig und stetig sind, so ist ein zwischen zwei festen Punkten des Bereichs genommenes Kurvenintegral $\int dF$ *unabhängig vom Integrationsweg*, solange dieser den Bereich nirgends verläßt.

2. *Sind $P(x, y)$ in einem zusammenhängenden Bereich eindeutig und stetig und ist das von einem festen Punkt (x_0, y_0) bis zum Punkt (x, y) erstreckte Integral $\int\limits_C (P\,dx + Q\,dy) = F(x, y)$ in diesem Bereich unabhängig vom Weg, so ist F dort eine stetige Funktion von x, y, und es ist $P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$, also $P\,dx + Q\,dy$ das vollständige Differential von F.*

Von größter Bedeutung ist die Umkehrung dieses Satzes:

3a. *Es seien die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$, sowie die Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial x}$ in einem Bereiche eindeutig und stetig; damit dann das zwischen zwei Punkten des Bereichs genommene Kurvenintegral $\int\limits_C (P\,dx + Q\,dy)$ vom Integrationsweg unabhängig ist, solange dieser den Bereich nirgends verläßt, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ist.

Dieser Satz, der sich schon bei Clairaut, *Théorie de la figure de la terre* (1743) findet (vgl. Stäckel, *Bibl. math.* (8) **2**, 111 (1901)), bildet die Grundlage des Cauchyschen Satzes in der Lehre von den analytischen Funktionen und ist unter den angegebenen Voraussetzungen von Cauchy, *C. R.* **23**, 251 (1846), bewiesen worden. Es hat aber Goursat, *Amer. Trans.* **1**, 14 (1900), gezeigt, daß es nicht notwendig ist, die *Stetigkeit* der Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial x}$, sondern nur ihre *Existenz* vorauszusetzen. Hieran knüpfen die neueren Untersuchungen über diesen Satz an, von denen Heffter, *Gött. Nachr.* (1903), 312 und Pringsheim, *Münch. Ber.* **33** (1903), 674 als abschließend bezeichnet werden können.

Gewöhnlich wird der Satz in folgender Form ausgesprochen:

3b. *Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ notwendig und hinreichend, damit das über irgendeine geschlossene Kurve des Bereichs genommene Integral $\int\limits_C (P\,dx + Q\,dy) = 0$ ist.*

§ 7. Mehrfache Integrale.

Ein durch eine reguläre geschlossene Kurve begrenztes Gebiet T der xy-Ebene werde irgendwie in n Teilgebiete $d_1, d_2 \ldots d_n$ zerlegt und in jedem Teilgebiet d_i werde ein Punkt (x_i, y_i) angenommen. Bildet man dann für eine im ganzen Gebiet stetige Funktion $f(x, y)$ die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i f(x_i, y_i)$ und vermehrt die Anzahl n der Teilgebiete unbegrenzt, während diese gleichzeitig nach allen Seiten hin unendlich klein werden, so besitzt die Summe einen bestimmten, von der Art der Einteilung und der Wahl der Punkte (x_i, y_i) unabhängigen Grenzwert, den man als *das über das Gebiet T erstreckte Doppelintegral*

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$$

bezeichnet. Die Schreibweise rührt her von einer Einteilung des Gebiets in *rechteckige* Elemente durch zwei Systeme von Parallelen zu den Koordinatenachsen. Vgl. hierzu die sehr anschauliche Darstellung von Weber, *Arch. Math. u. Phys.* (3) **15**, 289 (1909).

Man kann die Definition des Doppelintegrals auch auf den Fall ausdehnen, daß die Funktion $f(x, y)$ innerhalb T linienweise unstetig oder in einzelnen Punkten unendlich wird oder daß der Bereich T sich ins Unendliche erstreckt. Über die strenge Begründung der Lehre von den Doppelintegralen vgl. Arzelà, *Bologna Mem.* (5) **2**, 133 (1892), de la Vallée-Poussin, *J. d. math.* (4) **8**, 400 (1892), ebd. (5) **5**, 202 (1899), Jordan, *Cours d'anal.* **1**, (1893), Pringsheim, *Münch. Ber.* **28**, 69 (1898), ebd. **29**, 47 (1899), Stolz, *Grundzüge* **3** (1899), Freud, *Monatsh. f. Math.* **18**, 29 (1907).

Geometrisch bedeutet $z = f(x, y)$ eine *Fläche*, und das Doppelintegral gibt das *Volumen* des geraden Zylinders, der durch diese Fläche und durch das Gebiet T in der xy-Ebene begrenzt ist. Denkt man sich T so mit *Masse* belegt, daß $f(x, y)$ die *Dichtigkeit* an der Stelle (x, y) angibt, so bedeutet das Doppelintegral die *Gesamtmasse* der Belegung von T.

Das Integrationsgebiet T kann durch eine Ungleichung von der Form $\varphi(x, y) \leqq 0$ charakterisiert werden, und wir können annehmen, daß die Begrenzungslinie $\varphi(x, y) = 0$ durch jede Parallele zu den Achsen höchstens in zwei Punkten getroffen wird (andernfalls wird man T in eine endliche Anzahl von derartigen Bereichen zerlegen können); dann wird die Kurve von einer Parallelen mit der Abszisse x in zwei Punkten mit den Ordinaten $y_1 = \varphi_1(x)$ und $y_2 = \varphi_2(x)$ und von einer Parallelen mit der Ordinate y in zwei Punkten mit den Abszissen $x_1 = \psi_1(y)$ und $x_2 = \psi_2(y)$ geschnitten, und wenn x zwischen a und b, y zwischen c und d variieren kann, *so kann man das Doppelintegral auf zweifache Weise durch zwei aufeinanderfolgende einfache Integrationen ausdrücken*, nämlich

$$\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\Big]dx$$

$$= \int\limits_c^d \Big[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx\Big]dy.$$

Als besonderer Fall ist hierin der Satz von der *Vertauschbarkeit der Integrationen* enthalten, wenn nämlich T ein *Rechteck* ist, dessen Seiten zu den Achsen parallel sind, also überall $\varphi_1(x) = c$, $\varphi_2(x) = d$, $\psi_1(y) = a$, $\psi_2(y) = b$. Nimmt man als Bereich T ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten $y = 0$, $x = a$, $y = x$, so erhält man eine Formel von Dirichlet

$$\int\limits_0^a \Big[\int\limits_0^x f(x, y)\,dy\Big]dx = \int\limits_0^a \Big[\int\limits_y^a f(x, y)\,dx\Big]dy.$$

Ebenso wie über einen *ebenen* Bereich kann man auch Integrale definieren, die über ein Gebiet T einer *krummen Oberfläche* erstreckt sind. Ist f eine Funktion des Ortes auf der Fläche, do das Oberflächenelement, so kann ein solches *Oberflächenintegral* durch $\int\limits_T f\,do$ bezeichnet werden. Die Oberfläche kann durch drei Gleichungen mit zwei Parametern

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

dargestellt werden und der Bereich T ist dann durch eine Ungleichung von der Form $\varphi(u, v) \leqq 0$ gegeben. Nach den Grundformeln der Flächentheorie ist das Oberflächenelement $do = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$, worin E, F, G die *Fundamentalgröße erster Ordnung*

$$E = \sum_{x, y, z} \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2, \quad F = \sum_{x, y, z} \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \sum_{x, y, z} \Big(\frac{\partial x}{\partial v}\Big)^2$$

bedeuten, und es wird damit das Oberflächenintegral auf ein Doppelintegral:

$$\int_T f\,do = \iint f(u, v)\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

zurückgeführt.

Entsprechend wie bei den Doppelintegralen verfährt man, um *vielfache Integrale* zu definieren. So stellt sich das *dreifache Integral*

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_V f\,dv$$

dar als Grenzwert einer Summe, erstreckt über die Elemente dv eines allseitig begrenzten Raumteils V, jedes Element multipliziert mit dem Wert der Funktion $f(x, y, z)$ in einem zum Element gehörigen Punkt. Die Auswertung eines solchen Integrals kann durch drei aufeinanderfolgende einfache Integrationen geschehen. Für ein *n-faches Integral*

$$\iint \cdots \int_V f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

wird ein endlicher Bereich V einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit durch eine Ungleichung $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) \leqq 0$ abgegrenzt und in entsprechender Weise über sämtliche Elemente des Bereichs summiert.

Einführung von neuen Variablen in mehrfache Integrale. Treten an Stelle der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in einem n-fachen Integral neue durch die Gleichungen $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, so daß jedem Wertesystem $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein bestimmtes Wertesystem $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ eindeutig zugeordnet ist und umgekehrt, so ist

$$\iint \cdots \int f(x_1 \ldots x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \iint \cdots \int f(\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,|D|\,dy_1 \ldots dy_n,$$

und darin bedeutet D die *Funktionaldeterminante* (vgl. S. 156):

$$D = \frac{\partial(x_1\,x_2 \ldots x_n)}{\partial(y_1\,y_2 \cdots y_n)}.$$

Sie muß, damit die Variablen $y_1 \ldots y_n$ voneinander unabhängig sind, von Null verschieden sein. Für Doppelintegrale bereits bei Euler, *Novi Comm. Petrop.* **14**, 72 (1769), für dreifache Integrale Lagrange, *Nouv. Mém.* Berlin (1773), 125, allgemein Jacobi, *J. f. Math.* **12**, 38 (1833).

Von größter Bedeutung, namentlich für Funktionentheorie und mathematische Physik sind die Sätze, durch welche es möglich wird, an Stelle von Integrationen über einen ganzen Bereich nur solche über die *Begrenzung* auszuführen. (Gauß, *Theoria attract. corp. sphaeroid.* (1813), § 9.)

1. *Satz von Gauß.* (Allgem. Lehrs. über ... Anziehungskr. (1840), § 24. *Ostwalds Klassiker* No. 2.)

Es seien A, B, C innerhalb eines endlichen Raumes V eindeutige stetige Funktionen von x, y, z; der Raum V sei begrenzt von der Oberfläche T mit dem Flächenelement do und $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ seien die Richtungskosinus der ins Innere von V gerichteten Flächennormale; dann ist

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dv = -\int\limits_T (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\, do. \tag{1}$$

Auf die Ebene übertragen gibt dieser Satz die Transformation eines Integrals über eine *ebene Fläche* F in ein Integral über die *Randkurve* C, nämlich für zwei Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$:

$$\iint\limits_F \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = -\int\limits_C (P\,dx + Q\,dy).$$

Auf diesem Satz beruhen die älteren Beweise für die Sätze 1, 2 und 3 in § 6.

Es ist nach (1) das über die *geschlossene* Oberfläche T genommene Integral auf der rechten Seite *stets gleich Null, sobald im ganzen Innern von* V

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

ist, und diese Bedingung ist notwendig und hinreichend, damit das über *irgendein Flächenstück* F *im Innern von* V erstreckte Integral nur abhängig ist von der *Randkurve* C des Stückes. (Übertragung von Satz 3 in § 6 auf den Raum. Picard, *Traité d'analyse* **1**, 114.) Dies kommt zum Ausdruck durch den

2. *Satz von Stokes.* (*Cambridge Univ. calend.* 1854.)

Wird

$$A = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad C = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

gesetzt, so ist die Bedingung (2) erfüllt, und umgekehrt lassen sich bei Bestehen der Gleichung (2) immer drei derartige Funktionen P, Q, R finden. Es ist dann

$$(3)\quad \int\limits_F \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cos\gamma\right]do$$
$$=-\int\limits_C (P\,dx+Q\,dy+R\,dz).$$

3. *Satz von Green* (*J. f. Math.* **44**, 360 (1828)).
Setzt man in (1)

$$A=\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad B=\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad C=\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

so erhält man

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dv+\int\limits_V \varphi\varDelta\psi\,dv$$
$$(4)\qquad =-\int\limits_T \varphi\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cos\gamma\right]do$$
$$=-\int\limits_T \varphi\frac{d\psi}{dn}\,do,$$

wobei $\varDelta\psi$ den *Differentialparameter* $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ und $\frac{d\psi}{dn}$ den Differentialquotienten längs der ins Innere von V gerichteten Flächennormale bedeutet. Durch Vertauschung von φ und ψ und Subtraktion folgt daraus der Satz:

$$(5)\qquad \int\limits_V (\varphi\varDelta\psi-\psi\varDelta\varphi)\,dv=-\int\limits_T\left(\varphi\frac{d\psi}{dn}-\psi\frac{d\varphi}{dn}\right)do.$$

Im weiteren Sinne bezeichnet man als Greensche Sätze Formeln vom gleichen Charakter, wie (4) und (5), in denen an Stelle des Differentialparameters allgemeinere Differentialausdrücke 2. Ordnung auftreten. Vgl. die Ausführungen über *Randwertaufgaben* in Kap. XIV.