Kapitel IX.

Differenzenrechnung.

Von *H. E. Timerding* in Braunschweig.

§ 1. Differenzen.

Die Differenzenrechnung ist die Zwillingsschwester der Differentialrechnung. Die Entdecker der letzteren, Leibniz und Newton, haben gleichzeitig auch zuerst das Wesen und den methodischen Charakter der ersteren erkannt. (Vgl. Cantor, *Gesch. d. Math.* **3** (1898) S. 37, 358 und Zeuthen, *Gesch. d. Math. im XVI. u. XVII. Jahrh.*) Als eigentlicher Begründer der Differenzenrechnung hat Newton zu gelten, der zu ihrer Entwicklung in einer kleinen, 1711 erschienenen Schrift *Methodus differentialis* den Grund legte. (Diese Schrift ist wiederabgedruckt in den *Opuscula math.* von Newton 1744 und steht in der Ausgabe von Horsley (1779) in Bd. 1, S. 519.) Als das erste Lehrbuch ist anzusehen Brook Taylor's *Methodus incrementorum directa et inversa,* London 1715, dem 1730 Stirlings *Methodus differentialis* folgte. Eine weitere methodische Ausgestaltung hat die Differenzenrechnung in Eulers *Institutiones calculi differentialis,* Petersburg 1755, erfahren.

Die Differenzenrechnung setzt eine tabellarisch gegebene Funktion voraus, d. h. man nimmt an, die Werte der Funktion $f(x)$ seien für eine Reihe von Werten des Argumentes x, die in den gleichen Abständen h aufeinander folgen, bekannt. Dann schreibt man:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

und bezeichnet dies als die erste Differenz der Funktion $f(x)$. Verfährt man mit der ersten Differenz ebenso wie vorher mit der Funktion selbst, so erhält man die zweite Differenz $\Delta^2 f(x)$ usw. Allgemein ist:

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x),$$

und man findet:

$$\Delta^{m+n} f(x) = \Delta^m \Delta^n f(x).$$

Bezeichnet man der Kürze halber die Werte

$$x_0 \quad x_0 + h \quad x_0 + 2h \ldots x_0 + nh$$

mit

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n,$$

so wird:

$$\Delta^n f(x_0) = f(x_n) - \binom{n}{1} f(x_{n-1}) + \binom{n}{2} f(x_{n-2}) - \cdots \pm f(x_0).$$

Mit Hilfe der sukzessiven Differenzen für den Wert des Argumentes x_0 kann man den Funktionswert für x_n folgendermaßen ausdrücken:

$$f(x_n) = f(x_0) + \binom{n}{1} \Delta f(x_0) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(x_0) + \cdots + \Delta^n f(x_0)$$

oder symbolisch:

$$f(x_n) = (1 + \Delta)^n f(x_0).$$

Die Differenz einer ganzen Funktion von x ist eine ganze Funktion, deren Grad um 1 niedriger ist. Die n^{te} Differenz einer ganzen Funktion n^{ten} Grades ist somit eine Konstante, und zwar wird, wenn

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots$$

angenommen wird:

$$\Delta^n f(x) = n!\, a_0 \cdot h^n.$$

Insbesondere ergibt sich:

$$\Delta x(x-h)(x-2h)\ldots(x-nh) = (n+1)h \cdot x(x-h)\ldots(x-(n-1)h),$$

außerdem die von Nicole (*Hist. de l'Acad. des Sciences de Paris*, Année 1717, p. 7) gefundene Formel:

$$\Delta \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(n-1)h)} = -nh \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+nh)}.$$

Die Differenzen der Exponentialfunktion sind dem Funktionswerte proportional. Es wird:

$$\Delta^n a^x = (a^h - 1)^n \cdot a^x.$$

Für die Kreisfunktionen findet man:

$$\Delta^n \sin u = \left(2 \sin \frac{1}{2} h\right)^n \cdot \sin\left(u + \frac{n}{2}(\pi + h)\right),$$

$$\Delta^n \cos u = \left(2 \sin \frac{1}{2} h\right)^n \cdot \cos\left(u + \frac{n}{2}(\pi + h)\right).$$

www.rcin.org.pl

Es gelten die allgemeinen Regeln:

$$\Delta c f(x) = c \Delta f(x) \quad (c = \text{const.}),$$

$$\Delta[\varphi(x) + \psi(x)] = \Delta\varphi(x) + \Delta\psi(x),$$

$$\Delta[\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \varphi(x) \cdot \Delta\psi(x) + \psi(x+h) \cdot \Delta\varphi(x).$$

Allgemein wird für $x + nh = x_n$:

$$\Delta^n[\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \varphi(x_n) \cdot \Delta^n\psi(x) + \binom{n}{1}\Delta\varphi(x_n - h) \cdot \Delta^{n-1}\psi(x) + \binom{n}{2}\Delta^2\varphi(x_n - 2h) \cdot \Delta^{n-2}\psi(x) + \cdots + \Delta^n\varphi(x) \cdot \psi(x).$$

Die Differenzen werden zu den Differentialquotienten in Beziehung gesetzt durch folgende Formel:

$$\Delta^m f(x) = A_m^m h^m f^{(m)}(x) + \cdots + A_m^n h^n f^{(n)}(x) + A_m^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

wo ξ einen Wert zwischen x und $x + nh$ bedeutet, ferner

$$f^{(\mu)} x = \frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}$$

und (für $\mu \geqq m$)

$$A_m^\mu = \frac{1}{\mu!} \cdot \left\{\frac{\Delta^m (x-a)^\mu}{h^\mu}\right\}_{x=a}^{h=1} = \frac{1}{\mu!}\left\{\Delta^m t^\mu\right\}_{t=0}$$

$$= \frac{1}{\mu!}\left[m^\mu - \binom{m}{1}(m-1)^\mu + \binom{m}{2}(m-2)^\mu \cdots \pm m\right]$$

gesetzt ist. Umgekehrt wird:

$$h^m f^{(m)}(x) = B_m^m \Delta^m f(x) + \cdots + B_m^n \Delta^n f(x) + B_m^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Hierin ist ξ wieder ein Wert zwischen x und $x + nh$, und es ist:

$$B_m^\mu = \left\{\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{t(t-1)\ldots(t-\mu+1)}{1 \cdot 2 \ldots \mu}\right)\right\}_{t=0}.$$

Die Koeffizienten A_m^μ und B_m^μ kann man auch durch die Reihenentwicklungen festlegen:

$$(e^h - 1)^m = A_m^m h^m + A_m^{m+1} h^{m+1} + \cdots,$$

$$[\log(1+t)]^m = B_m^m t^m + B_m^{m+1} t^{m+1} + \cdots.$$

Daraus folgt die nachstehende symbolische Schreibweise der obigen Gleichungen:

$$\Delta^m f(x) = \{e^{hD} - 1\}^m f(x), \quad \frac{d^m f(x)}{dx^m} = \left\{\frac{\log(1+\Delta)}{h}\right\}^m f(x).$$

www.rcin.org.pl

Die Gleichungen sind so zu verstehen, daß der symbolische Faktor von $f(x)$ auf der rechten Seite nach Potenzen von D, resp. Δ entwickelt und hierauf

$$D^\mu \cdot f(x) = \frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}, \quad \Delta^\mu \cdot f(x) = \Delta^\mu f(x)$$

gesetzt werden muß.

Mit Hilfe dieser symbolischen Schreibweise kann man leicht eine Formel geben, die es gestattet, von den für ein Intervall h gebildeten Differenzen $\Delta^\mu f(x)$ zu den für ein anderes Intervall h_1 gebildeten Differenzen $\Delta_1^m f(x)$ überzugehen. Diese Formel lautet:

$$\Delta_1^m f(x) = [(1+\Delta)^{\frac{h_1}{h}} - 1]^m f(x).$$

§ 2. Interpolation.

Die Aufgabe der rationalen Interpolation verlangt zunächst, eine rationale, insbesondere eine ganze Funktion $f(x)$ so zu bestimmen, daß sie für gewisse Werte des Argumentes

$$x_0\, x_1\, x_2\, \ldots\, x_n$$

vorgegebene Werte

$$y_0\, y_1\, y_2\, \cdots\, y_n$$

annimmt. Es sind zwei verschiedene Lösungsformen dieser Aufgabe zu unterscheiden, die Lagrangesche und die Newtonsche

Die Lagrangesche Formel erhält man, wenn man

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

$$\varphi'(x_\mu) = \left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_{x=x_\mu} = (x_\mu - x_0)\ldots(x_\mu - x_{\mu-1})\cdot(x_\mu - x_{\mu+1})\ldots(x_\mu - x_n)$$

setzt, in der Gestalt:

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{y_\mu}{\varphi'(x_\mu)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x - x_\mu}.$$

Die Newtonsche Formel lautet in der Fassung, die ihr Gauß gegeben hat:

$$f(x) = y_0 + (x-x_0)[x_0\,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0\,x_1\,x_2]$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0\,x_1\,x_2\,x_3] + \cdots$$

Hierbei ist:

www.rcin.org.pl

$$[x_0 x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad [x_1 x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad [x_2 x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \cdots$$

$$[x_0 x_1 x_2] = \frac{[x_1 x_2] - [x_0 x_1]}{x_2 - x_0}, \quad [x_1 x_2 x_3] = \frac{[x_2 x_3] - [x_1 x_2]}{x_3 - x_1} \cdots$$

$$[x_0 x_1 x_2 x_3] = \frac{[x_1 x_2 x_3] - [x_0 x_1 x_2]}{x_3 - x_0} \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Newtonsche Formel hat den Vorzug, daß man bei Hinzunahme neuer gegebener Größen nur neue Glieder hinzuzufügen braucht, ohne die vorhergehenden ändern zu müssen.

Die weitere Aufgabe ist nun die, von einer bestimmten Funktion $F(x)$, deren Werte für eine Reihe von Argumentenwerten gegeben sind, die Werte für alle Argumentenwerte eines gewissen Bereiches näherungsweise zu ermitteln. Die vorstehend angegebenen ganzen Funktionen $f(x)$ sind dann als Näherungsformeln für die Funktion $F(x)$ anzusehen, und es wird somit:

$$F(x) = f(x) + R,$$

wo R ein Korrektionsglied bedeutet. Nach Cauchy, *C. R.* **11** (1840) 787, *Œuvres* (1) **5**, 422, hat man zu setzen:

$$R = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

wenn ξ einen Wert zwischen x_0 und x_n bedeutet.

Für den besonders wichtigen Fall, daß die Werte der Argumente, für welche die Funktionswerte gegeben sind, in gleichen Intervallen h aufeinander folgen, also von der Form sind:

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h \ldots x_0 + nh,$$

geht die Newtonsche Formel über in:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} \cdot \frac{\Delta f(x_0)}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2} + \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h) \ldots (x - x_0 - (n-1)h)}{n!} \cdot \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n}$$

Substituiert man:

$$x = x_0 + ht$$

und setzt:

$$f(x) = f(x_0 + ht) = \varphi(t), \quad f(x_0) = \varphi(0) = y_0,$$

so wird einfacher:

$$\varphi(t) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots.$$

www.rcin.org.pl

Diese Funktion nimmt für

$$t = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

die verlangten Werte an, und so wird die Newtonsche Formel gewöhnlich gegeben.

Durch größere Symmetrie ausgezeichnet ist die Formel, die dazu dient, die Werte der Funktion in der Umgebung einer bestimmten Stelle zu bestimmen und die Stirlingsche Formel genannt wird, obwohl sie in einem von Newton gegebenen Satze (*Methodus differentialis*, Prop. III) bereits enthalten ist. Wir nehmen auch die Werte des Argumentes $t = -1, -2 \ldots$ hinzu und stellen die folgende Tabelle auf:

Arg. t	Fkt. y	Differenzen I	II	III	IV	V	VI
-3	$\bar{y}_3$						
		$\Delta\bar{y}_3$					
-2	$\bar{y}_2$		$\Delta^2\bar{y}_3$				
		$\Delta\bar{y}_2$		$\Delta^3\bar{y}_3$			
-1	$\bar{y}_1$		$\Delta^2\bar{y}_2$		$\Delta^4\bar{y}_3$		
		$\Delta\bar{y}_1$		$\Delta^3\bar{y}_2$		$\Delta^5\bar{y}_3$	
0	y_0		$\Delta^2\bar{y}_1$		$\Delta^4\bar{y}_2$		$\Delta^6\bar{y}_3$
		Δy_0		$\Delta^3\bar{y}_1$		$\Delta^5\bar{y}_2$	
1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4\bar{y}_1$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$			
2	y_2		$\Delta^2 y_1$				
		Δy_2					
3	y_3						

Setzen wir dann noch in leicht verständlicher Symbolik:

$$\tfrac{1}{2}(\Delta\bar{y}_1 + \Delta y_0) = \Delta\bar{y}_{\frac{1}{2}}, \quad \tfrac{1}{2}(\Delta^3\bar{y}_2 + \Delta^3\bar{y}_1) = \Delta^3\bar{y}_{\frac{3}{2}} \ldots,$$

so wird die Stirlingsche Formel, indem τ einen Wert zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ bedeutet:

$$\varphi(\tau) = y_0 + \tau\Delta\bar{y}_{\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{2!}\Delta^2\bar{y}_1 + \frac{(\tau+1)\tau(\tau-1)}{3!}\Delta^3\bar{y}_{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{(\tau+1)\tau\cdot\tau(\tau-1)}{4!}\Delta^4\bar{y}_2 + \frac{(\tau+2)(\tau+1)\tau(\tau-1)(\tau-2)}{5!}\Delta^5\bar{y}_{\frac{5}{2}} \cdots$$

Die wichtigste Literatur über Interpolation sei im folgenden zusammengestellt: Lagrange, *Sur les interpolations, Œuvres* **7**, 535; *Sur une méthode partic. d'approximation, Œuvres* **5**, 517; *Mém. sur la méthode d'interpolation, Œuvres* **5**, 663; *Sur une nouvelle espèce de calcul, Œuvres* **3**, 441. Gauß, *Theoria interpolationis, Werke* **3**, 265. Encke, *Über Interpolation, Berl. astron. Jahrbuch* 1830; *Über mechanische Quadratur,* ebenda 1837, 1862; *Ges. Abh.* **1**, 1, 21, 61. Cauchy, *Mém. sur l'interpolation, J. de math.* **2** (1837) 193. F. Neumann, *Astr. Nachr.* **15** (1838) 313. Villarceau, *Add. à la Connaiss. des Temps*

www.rcin.org.pl

1852, p. 129. Genocchi, *Ann. di mat.* (1) **6** (1864). Tschebyscheff, *Petersburg. Mém.* (7) **1** (1859); *Œuvres* **1**, p. 387, und ebenda p. 539. Hermite, *C. R.* **48** (1859) 62; *J. f. Math.* **84** (1878) 70. Merrifield, *Report Brit. Assoc.* 1880. Gram, *J. f. Math.* **94** (1883) 41. Méray, *Ann. Éc. norm.* (3) **1** (1884) 165. Harzer, *Astr. Nachr.* **115** (1886) 337. Radau, *Études sur les formules d'interpolation*, Paris 1891. Netto, *Math. Ann.* **42** (1893) 453. Pincherle, *Bologna Mem.* (5) **3** (1893) 293. Tisserand, *Mécanique céleste* (1896), Vol. 4, p. 15 (Leverriers Interpolation durch periodische Reihen). Bruns, *Astr. Nachr.* **146** (1898) 161. Runge, *Ztschr. f. Math.* **48** (1903) 443. De la Vallée Poussin, *Brux. Acad. roy. Bull.* (1908) 319. Schließlich sei das kürzlich erschienene Lehrbuch von Thiele, *Interpolationsrechnung* (1910) genannt.

§ 3. Summen.

Zu der Differenz invers ist die *Summe*. Wenn die Funktion $f(x)$ gegeben ist, so sucht man die Funktion $\varphi(x)$, welche der Funktionalgleichung genügt:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = f(x),$$

deren Differenz also die gegebene Funktion ist. Durch die vorstehende Gleichung wird die Funktion:

$$\varphi(x) = \sum f(x)$$

für eine Reihe von Werten x, die in dem Intervall h aufeinanderfolgen, bis auf eine willkürliche Konstante, die *Summationskonstante*, bestimmt. Für die Summen gelten analoge Gleichungen wie für die Differenzen. Es ist:

$$\sum C f(x) = C \sum f(x) \qquad (C = \text{const.}),$$

$$\sum [\varphi(x) + \psi(x)] = \sum \varphi(x) + \sum \psi(x),$$

außerdem gilt die Formel der *partiellen Summation*:

$$\sum \varphi(x) \cdot \Delta\psi(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) - \sum \psi(x+h) \cdot \Delta\varphi(x).$$

Ferner wird, bis auf die noch hinzutretende Summationskonstante:

$$\sum x(x-h)\ldots(x-(n-1)h) = \frac{1}{(n+1)h} x(x-h)\ldots(x-nh).$$

Allgemein ist die Summe einer ganzen Funktion n^{ten} Grades

www.rcin.org.pl

$f_n(x)$ eine ganze Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades $f_{n+1}(x)$. Ist $A_0 x^n$ das höchste Glied in $f_n(x)$, so beginnt $f_{n+1}(x)$ mit $A_0 \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Endlich gelten die Formeln:

$$\sum \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+nh)} = -\frac{1}{nh}\,\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+(n-1)h)},$$

$$\sum a^x = \frac{1}{a^h-1}\,a^x,$$

$$\sum \sin u = -\frac{\cos\left(u-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}, \qquad \sum \cos u = \frac{\sin\left(u-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

Von den unbestimmten Summen, die noch eine willkürliche Konstante enthalten, geht man zu den bestimmten Summen über, indem man die Konstante dadurch festlegt, daß für einen bestimmten Wert des Argumentes die Summe verschwinden soll. Dieser Wert x_0 heißt die untere Grenze der bestimmten Summe, und man schreibt diese in der Form:

$$\sum_{x_0}^{x} f(x).$$

Aus der vorangestellten Definition des Begriffes der Summen ergibt sich dann sofort, daß:

$$\sum_{x_0}^{x_0+nh} f(x) = f(x_0) + f(x_0+h) + \cdots + f(x_0+(n-1)h)$$

ist. Nimmt man z. B.:

$$f(x) = x,$$

so erhält man:

$$\sum_0^x x = \frac{x(x-h)}{2h} \text{ (Summenformel der arithmetischen Reihe);}$$

nimmt man:

$$f(x) = a^x,$$

so wird:

$$\sum_0^x a^x = \frac{a^x-1}{a^h-1} \text{ (Summenformel der geometrischen Reihe).}$$

Für $f(x) = x^3$ ergibt sich die Summe:

$$\sum_0^x x^3 = \frac{1}{h}\left[\frac{x(x-h)}{2}\right]^2 = \frac{1}{h}\left[\sum_0^x x\right]^2.$$

Der wesentliche Inhalt dieser Formel war nach M. Cantor

www.rcin.org.pl

(*Gesch. d. Math.* **1**, 724) schon im 11. Jahrhundert den Arabern bekannt.

Man findet ferner:

$$\sum_h^u \cos u = \frac{\sin\left(u - \frac{h}{2}\right) - \sin\frac{h}{2}}{2\sin\frac{h}{2}},$$

$$\sum_h^u \sin u = \frac{\cos\frac{h}{2} - \cos\left(u - \frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

Wir wollen nun die Summen

$$\varphi_{n+1}(x) = \sum_0^x \frac{x^n}{n!}$$

betrachten, die nach J. L. Raabe als *Bernoullische Funktionen* bezeichnet werden (*Die Jacob-Bernoullische Funktion.* Zürich 1848). Nach dem, was wir oben über die Summe einer ganzen Funktion n^{ten} Grades gesagt haben, können wir schreiben:

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + A_1 h \frac{x^n}{n!} + A_2 h^2 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + A_n h^n x.$$

Da:

$$\varphi_{n+2}(x) = \int_0^x \varphi_{n+1}(x)\,dx,$$

ändern sich, wenn man von $\varphi_{n+1}(x)$ zu $\varphi_{n+2}(x)$ übergeht, die Konstanten $A_1 \ldots A_n$ nicht, es tritt nur eine neue Konstante A_{n+1} hinzu. Für $x = h$ wird $\varphi_{n+1}(x) = 0$; somit ergeben sich zur Bestimmung der Koeffizienten die Gleichungen:

$$\frac{1}{2!} + A_1 = 0,$$

$$\frac{1}{3!} + \frac{A_1}{2!} + A_2 = 0,$$

$$\frac{1}{4!} + \frac{A_1}{3!} + \frac{A_2}{2!} + A_3 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

So findet man: $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{12}$, $A_3 = 0$, $A_4 = -\frac{1}{720}$, $A_5 = 0$, $A_6 = \frac{1}{30240}$ usw. *Jedes A mit ungeradem Index, ausgenommen A_1, verschwindet.* Die Funktionen $\varphi_{2k}(x)$ mit

www.rcin.org.pl

geradem Index enden also mit dem Glied, das x^2 enthält. Ferner wird:

$$\varphi_{2k}(h-x) = \varphi_{2k}(x);$$

dagegen:

$$\varphi_{2k+1}(h-x) = -\varphi_{2k+1}(x), \quad \text{woraus } \varphi_{2k+1}\left(\frac{h}{2}\right) = 0.$$

Die A mit geradem Index, die außer A_1 allein übrig bleiben, sind abwechselnd positiv und negativ. Es wird gesetzt:

$$A_1 = -B_1 \quad \text{und} \quad A_k = \frac{B_k}{k!} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

also

$$B_1 = \tfrac{1}{2}; \quad B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0.$$

Für B_{2k} erhält man dann die Reihe:

$$B_{2k} = (-1)^{k-1}\, 2\, \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots\right].$$

Diese Entwicklung hat Euler gegeben in den *Comment. Acad. Petropol.* **12** (1740) p. 73. Man vergleiche auch Schlömilch, *Ztschr. f. Math.* **1** (1856) 200, Sonin, *J. f. Math.* **116** (1896) 138. Die Zahlen B_{2k} heißen *Bernoullische Zahlen.* Sie können durch die symbolische Gleichung

$$(B+1)^n - B^n = n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definiert werden, in der nach der Ausrechnug B^k durch B_k zu ersetzen ist. Die ersten unter ihnen sind:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \; B_4 = -\frac{1}{30}, \; B_6 = \frac{1}{42}, \; B_8 = -\frac{1}{30}, \; B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \; B_{14} = \frac{7}{6}, \; B_{16} = -\frac{3617}{510}, \; B_{18} = \frac{43867}{798}, \; B_{20} = -\frac{174611}{330}$$

Nach von Staudt (*J. f. Math.* **21** (1840) 372) ist

$$B_{2k} = n - \sum \frac{1}{l},$$

wo n eine ganze Zahl und die Summation nach allen Primzahlen l zu nehmen ist, für die $l-1$ ein Teiler von $2k$ ist. So wird

$$B_{10} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{11}, \quad B_{16} = -6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{17}.$$

Die ersten 62 von Null verschiedenen Bernoullischen Zahlen hat Adams, *J. f. Math.* **85** (1878) 269, die ersten 90 Ssere-

www.rcin.org.pl

brennikow, *Petersb. Abh.* (8) **16**, No. 10 (1905), berechnet. Literatur über diese Zahlen bei Ely, *Amer. J. of Math.* **5** (1882) 228.

Aus der Definitionsgleichung der Summe entsteht eine *Differenzengleichung*, wenn die Differenz der gesuchten Funktion $y = \varphi(x)$ nicht unmittelbar als eine bekannte Funktion von x, sondern als Funktion von x und y zusammen gegeben ist, insbesondere als eine für y lineare Funktion:

$$\Delta y = P_x y + Q_x,$$

wo P_x, Q_x bekannte Funktionen von x bezeichnen. Schreibt man:

$$y = y_x, \qquad \Delta y = y_{x+1} - y_x,$$

indem man das Intervall der Argumente $h = 1$ annimmt, so wird die vorige Gleichung von der Form:

$$y_{x+1} - A_x y_x = Q_x.$$

Allgemein heißt jede Gleichung von der Form:

$$y_{x+m} + A_x y_{x+m-1} + A_x' y_{x+m-2} + \cdots + A_x^{(m-1)} y_x = Q_x$$

eine lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung, indem man als Differenzengleichung schlechthin jede Gleichung zwischen den Werten des Argumentes x und den Funktionswerten $y_x, y_{x+1} \cdots$ für eine von x anfangende Reihe äquidistanter Argumentenwerte bezeichnet.

Näheres über Differenzengleichungen siehe in Kap. X.

§ 4. Zusammenhang zwischen Summen und Integralen. Mechanische Quadratur.

Wie wir oben von dem Zusammenhange zwischen Differenzen und Differentialquotienten gesprochen haben, so kann man auch eine Beziehung zwischen Summen und Integralen suchen.

Auf der einen Seite kann man die Summe durch ein Integral mit Zuhilfenahme sukzessiver Differentialquotienten ausdrücken. Dieser Ausdruck wird durch die Eulersche Formel geliefert:

$$h \cdot \sum_1^{n} f(x) = \int_a^b f(x)\,dx + A_1 h [f(b) - f(a)] + A_2 h^2 [f'(b) - f'(a)] + \cdots + A_n h^n [f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)} a] + R_{n+1}.$$

$A_1, A_2 \ldots$ bedeuten hierin die früher so bezeichneten Zahlen, und es ist $h = \dfrac{b-a}{n}$. Das Restglied R_{n+1} hat Poisson, *Par.*

www.rcin.org.pl

mém. **6**, 580 (1826) hinzugefügt; es wird nach Jacobi (*J. f. Math.* **12** (1834) 263, *Werke* **6**, 64) in folgender Form dargestellt:

$$R_{n+1} = -\int_0^h \varphi_{n+1}(u)\,du \sum_x{}_a^b f^{(n+1)}(x+h-u),$$

wenn $\varphi_{n+1}(u)$ wie oben die Bernoullische Funktion bedeutet, und es wird

$$R_{n+1} = A_{n+1} h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (a < \xi < b).$$

Die Formel ohne Restglied wurde von Euler gegeben, *Comment. Acad. Petrop.* **6** (1738) 68 und ebenda **8** (1741) 147. Man sehe auch Malmstén, *Acta math.* **5** (1884) 1, Sonin, *Ann. éc. norm.* (3) **6** (1889) 257, *C. R.* **108** (1889) 725, Kronecker, *Vorl. üb. die Theorie d. Integrale* (1894), 130—156.

Als erstes Beispiel nehmen wir:

$$f(x) = x^m, \qquad b = x, \quad a = 0,$$

so wird:

$$h\sum_0^x x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2} h x^m + \tfrac{1}{12} m h^2 x^{m-1} \cdots.$$

Nimmt man zweitens:

$$f(x) = e^{ux}, \qquad b = 1, \quad a = 0, \quad h = 1,$$

so wird:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + A_1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \cdots.$$

Nimmt man:

$$f(x) = \log x, \qquad b = m, \quad a = 1, \quad h = 1,$$

und addiert zu beiden Seiten der Gleichung $\log m$, so erhält man die Stirlingsche Formel (Stirling, *Methodus differentialis*, 1730, p. 135):

$$\log(m!) = \log\sqrt{2\pi} + \left(m + \frac{1}{2}\right)\log m - m + A_2 \frac{1}{m} + \cdots$$
$$+ A_{2k} \frac{(2k-2)!}{m^{2k-1}} + \theta A_{2k+2} \frac{(2k)!}{m^{2k+1}}$$
$$(0 < \theta < 1).$$

Auf der anderen Seite kann man nun auch näherungsweise ein Integral durch Summen darzustellen suchen. Diese angenäherte Auswertung heißt *mechanische Quadratur*. Die einfachsten Formeln, die dies leisten, sind die *Trapezformel* und die *Simpsonsche Regel*.

Man denkt sich das Intervall von a bis b in n gleiche

www.rcin.org.pl

Teile h zerlegt, so daß $b - a = nh$, und bezeichnet die Funktionswerte an den Grenzstellen $x_\mu = a + \mu h$ der Teile mit:

$$y_0, y_1, y_2 \cdots y_n,$$

die Funktionswerte in der Mitte der Teile durch:

$$y_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{3}{2}} \cdots.$$

Dann wird die *Trapezformel*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) - R_n$$

mit:

$$R_n = n\frac{h^3}{12}f''(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Die *Simpsonsche Regel* lautet:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{1\frac{1}{2}} \cdots + 4y_{n-\frac{1}{2}} + y_n) - R_n$$

mit:

$$R_n = n\frac{h^5}{2880}f^{IV}(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Simpson, *Math. diss.*, London 1743, jedoch bereits bei Gregory, *Exerc. geom.*, 1668 (vgl. Heinrich, *Bibl. math.* (3) **1**, 90 (1900)) und Toricelli, *Quadrat. parabolae*, 1644 (vgl. Aubry, *J. de math. élem.* (5) **21** (1897)).

Die erste Formel, welche die angenäherte Quadratur in konsequenten Zusammenhang mit der Theorie der Interpolation brachte, war die *Cotessche Formel*. In ihr wird das zu berechnende Integral ersetzt durch das Integral einer ganzen Funktion n^{ten} Grades, welche für $x_0, x_1 \ldots x_n$ dieselben Werte $y_0, y_1 \cdots y_n$ annimmt wie die zu integrierende Funktion. Setzt man:

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

und schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)[\overset{0}{\underset{n}{H}} y_0 + \overset{1}{\underset{n}{H}} y_1 + \cdots + \overset{n}{\underset{n}{H}} y_n],$$

indem man sich $f(x)$ durch die Lagrangesche Interpolationsformel bestimmt denkt, so hat man zu setzen:

$$\overset{\mu}{\underset{n}{H}} = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_\mu} \cdot \frac{dx}{(b - a)\,\varphi'(x_\mu)}.$$

Substituiert man hierin:

www.rcin.org.pl

$$x = a + hz, \qquad x_\mu = a + h\mu,$$

so kann man das Integral von der besonderen Wahl der Grenzen unabhängig machen und schreiben:

$$\overset{\mu}{\underset{n}{H}} = \int_0^n \frac{z(z-1)\cdots(z-\mu+1)(z-\mu-1)\cdots(z-n)}{\mu(\mu-1)\cdots 1\cdot(-1)\cdots(\mu-n)}\,dz.$$

Hierbei wird:
$$\overset{\mu}{\underset{n}{H}} = \overset{n-\mu}{\underset{n}{H}}, \qquad \sum_{\mu=0}^{n} \overset{\mu}{\underset{n}{H}} = 1.$$

Wir stellen in der folgenden Tabelle die von Cotes (*Harmonia mensurarum,* 1722) berechneten Werte für $n = 1$ bis $n = 10$ zusammen:

$\overset{\mu}{\underset{n}{H}} = \overset{n-\mu}{\underset{n}{H}}$	μ					
	0	1	2	3	4	5
$n = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$n = 2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			
$n = 3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		
$n = 4$	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	
$n = 5$	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{280}$	$\frac{19}{288}$
$n = 6$	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$
$n = 7$	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$
$n = 8$	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$-\frac{928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$-\frac{4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$
$n = 9$	$\frac{2857}{89600}$	$\frac{15741}{89600}$	$\frac{1080}{89600}$	$\frac{19344}{89600}$	$\frac{5778}{89600}$	$\frac{5778}{89600}$
$n = 10$	$\frac{16067}{598752}$	$\frac{106300}{598752}$	$-\frac{48525}{598752}$	$\frac{272400}{598752}$	$-\frac{260550}{598752}$	$\frac{427368}{598752}$

www.rcin.org.pl

Gauß hat den Gedanken verfolgt, die Werte des Argumentes $x_0, x_1 \ldots x_n$, welche die Grundlage der Interpolation bilden, nicht durch Teilung des ganzen Intervalles in gleiche Teile zu gewinnen, sondern sie so zu wählen, daß die Genauigkeit der Formel eine möglichst große wird. Dies sucht er zu erreichen, indem er die Forderung aufstellt, daß die Formel nicht bloß exakt sein soll für die Funktion n^{ten} Grades, welche für $x_0, x_1 \ldots x_n$ die vorgeschriebenen Werte annimmt, sondern für jede ganze Funktion bis zum $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grade, welche dieser Bedingung genügt. Das Schwergewicht liegt somit in der Festlegung der Funktion:

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

welche, gleich Null gesetzt, die Argumentenwerte $x_0 \ldots x_n$ liefert Das Resultat ist, daß der aufgestellten Forderung genügt wird, wenn:

$$\varphi(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\right]$$

angenommen wird. In der so entstehenden Gleichung $\varphi(x) = 0$ werden die von Fall zu Fall wechselnden Grenzen a, b zu den festen Werten 0,1, wenn

$$x = a + (b - a)t$$

substituiert wird. Dann wird die Gleichung:

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[t^{n+1}(1-t)^{n+1}\right] = 0,$$

und ihre Wurzeln können ein für allemal berechnet werden. Diese Berechnung hat Gauß bis auf 16 Dezimalen durchgeführt. Die folgende Tabelle gibt die Wurzeln für die ersten 7 Grade auf 6 Dezimalen:

Grad $n+1$	Wurzeln t						
	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
1	0,5						
2	0,211325	0,788675					
3	0,112702	0,5	0,887298				
4	0,069432	0,330009	0,669991	0,930568			
5	0,046910	0,230765	0,5	0,769235	0,953090		
6	0,033765	0,169395	0,380690	0,619310	0,830605	0,966235	
7	0,025446	0,129234	0,297077	0,5	0,702923	0,870766	0,974554

www.rcin.org.pl

Es sind nun weiter zu berechnen die Integrale:

$$E_\mu = \int_0^1 \frac{(t-t_0)\cdots(t-t_{\mu-1})(t-t_{\mu+1})\cdots(t-t_n)}{(t_\mu-t_0)\cdots(t_\mu-t_{\mu-1})(t_\mu-t_{\mu+1})\cdots(t_\mu-t_n)}\,dt.$$

Die Werte derselben für die ersten 7 Grade sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Grad $n+1$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1	1						
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
3	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{5}{18}$				
4	0,173927	0,326073	0,326073	0,173927			
5	0,118463	0,239314	0,284444	0,239314	0,118463		
6	0,085662	0,180381	0,233957	0,233957	0,180381	0,085662	
7	0,064742	0,139853	0,190915	0,208980	0,190915	0,139853	0,064742

Die Gaußsche Formel schreibt sich dann in der einfachen Gestalt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)[E_0 f(a+(b-a)t_0) + \cdots + E_n f(a+(b-a)t_n)].$$

Außer der Arbeit von Gauß (*Comment. Gotting.* **3** (1814/15), Selbstanzeige *Gött. gel. Anz.* 1814, *Werke* **3**, 163, 202) vergleiche man u. a.: Jacobi, *J. f. Math.* **1** (1826) 301, *Werke* **4**, 3. Christoffel, *J. f. Math.* **55** (1858) 61. Tschebyscheff, *Journ. de Math.* (2) **19** (1874) 19. Mansion, *Mathesis* **1** (1881), Supplem., p. 1; *Bruxelles Ann. Soc. Scient.* **5** B (1881) 231; *Bruxelles Bullet.* (3) **11** (1886) 293; *Comptes rendus* **102** (1886) 412 (*Bestimmung des Restes in der Gaußschen Formel*). Stieltjes, *Ann. Éc. norm.* (3) **1** (1884) 409; *Comptes rendus* **99** (1884) 850. Markoff, *Math. Ann.* **25** (1885) 417. Man vgl. auch den Bericht von Burkhardt, Math.-Ver. **10** 2, § 88.

Lehrbücher der Differenzenrechnung:

S. F. Lacroix, *Traité des différences,* Paris 1800, 3. Bd. des *Traité du calcul differentiel etc.* J. F. W. Herschel, *Collection of examples of the applications of the calculus of finite diffe-*

www.rcin.org.pl

rences, Cambridge 1820. O. Schlömilch, *Theorie der Differenzen und Summen,* Halle 1848. G. Boole, *A Treatise on the calculus of finite differences,* Cambridge 1860, deutsch von Schnuse, Braunschweig 1867 u. d. T.: *Die Grundlehren der endlichen Differenzen- und Summenrechnung.* A. Markoff, *Differenzenrechnung,* deutsch von Friesendorff und Prümm, Leipzig 1896. E. Pascal, *Calcolo delle differenze finite,* Milano 1897. H. Bruns, *Grundlinien des wissenschaftl. Rechnens,* Leipzig 1903. O. Biermann, *Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden,* Braunschweig 1905. D. Seliwanoff, *Differenzenrechnung, Teubners Sammlung* Bd. 13, Leipzig 1904.

Verbesserungen.

S. 147, die letzten vier Zeilen sind zu streichen.

„ 213, Zeile 22 v. o. lies: $|z, \alpha + \beta z|$ statt $|z, \alpha z + \beta|$.

PAŃSTW. INSTYTUT ... BIBLIOTEKA

www.rcin.org.pl