DOWODY RÓŻNYCH PODAŃ

z TRYGONOMETRYI PŁASKIEY I GEOMETRYI ELEMENTARNEY

wraz z krótką uwagą nad pewném rozwinięciem potęgi dwumianu,

przez

AUGUSTYNA FRĄCZKIEWICZA.

w KRAKOWIE
w DRUKARNI AKADEMICKIEY.
1827.

I.

DOWODY RÓŻNYCH PODAŃ Z TRYGONOMETRYI PŁASKIEY I GEOMETRYI ELEMENTARNEY.

Niech będzie iakikolwiek tròykąt prostokréślny ABC [Fig. 1.] ; ieżeli przedłużywszy bok AB, podzielimy tak kąt BAC na dwie części równe liniią AS, iako też kąt zewnętrzny CBD na dwie części równe liniią BS, i liniie AS, BS, przedłużymy aż do przecięcia się w punkcie S, a z punktu S do boku

BC, i do dwóch innych boków przedłużonych AB, AC, spuścimy prostopadłe SE, SD, SF, te trzy prostopadłe SD, SE, SF, będą między sobą równe.

Jakoż w tróykątach SDB, SEB, kąty przy D i E są równe iako proste; kąt DBS=SBE z wykréślenia, i bok SB iest spólny; a dla tego tróykąt SDB przystanie do tróykąta SBE, w szczególności zaś bok SE=SD. Dla tey samey przyczyny tróykąt SDA przystanie do tróykąta SFA, a w szczególności bok SF=SD. Więc wszystkie trzy prostopadłe SD, SE, SF, są pomiędzy sobą równe.

Z tego dowodzenia okazuie się oraz, że BD=BE, a DA=AF. Powiadam nadto, że EC=CF, i ieśli poprowadzimy liniią CS, ta podzieli kąt zewnętrzny BCF na dwie części równe. W dwóch bowiem tróykątach SEC, SCF, kąty przy E i F są proste, bok SE=SF, i bok SC iest spólny; a dla tego tróykąt

SEC, przystanie do tróykąta SFC, w szczególności zaś EC=CF, i kąt SCE=SCF.

Ponieważ prostopadłe SD, SE, SF, są pomiędzy sobą równe; więc ieżeli z punktu S, iako ze środka, promieniem równym któreykolwiek z prostopadłych dopiero wspomnionych nakréślimy koło, okrąg iego przeydzie przez punkta D, E, F, i bok BC w punkcie E, a przedłużenia dwóch innych boków tróykąta w punktach D i F, będą stycznemi tego koła: tak wykréślone koło nazwiemy dla skrócenia kołem *przypisaném* do tróykąta ABC w kącie BAC=*A*. Zrobiwszy to samo wykréślenie w dwóch pozostałych kątach tróykąta ABC; albo co na to samo wypada: przedłużywszy liniie SC, SB, aż do przecięcia się w punktach S′, S″, z liniią prostą poprowadzoną przez punkt A, prostopadle do linii SA, punkta S′, S″, będą środkami, a prostopadłe spuszczone z tych punktów na boki tróykąta, iako to S′F′, S″D″, będą promieniami kół przypisanych do tróykąta w kątach ABC=B, ACB=C. Jakoż przedłużywszy bok BC do punktu E″, kąty SBC, S″BE″, będą równe iako w wierzchołku przeciwległe, i dla tey samey przyczyny kąt DBS=S″BA; a ponieważ kąt DBS=SBC, więc i kąt S″BE″=S″BA. Przedłużywszy bok BC do punktu E′, okażemy tym samym sposobem, że liniia SC przedłużona dzieli kąt ACE′ na dwie części równe. Poprowadźmy teraz liniią B*s* którаby dzieliła kąt ABC na dwie połowy; ponieważ kąt SBC=ABS″, iako połowy kątów w wierzchołku przeciwległych CBD, ABE″, i znowu kąt CB*s*=*s*BA; będzie summa kątów SBC, CB*s*, równa summie kątów S″BA, AB*s*; to iest: kąt SB*s*=*s*BS″, a tém samém liniia B*s* iest prostopadła do linii SS″. Dla tey samey przyczyny dwie liniie dzielące dwa kąty zewnętrzne tróykąta ABC przy punkcie A na dwie połowy, są na iedney linii prostey, i która iest prostadłą do linii AS dzielącey kąt wewnętrzny BAC na dwie części równe.

To założywszy, niech będzie tróykąt iakikolwiek ABC [Fig. 1.], i niech będą wykréślone dwa koła, iedno wpisane w tróykąt, a drugie przypisane do tegoż tróykąta. Niech *s* będzie środek koła wpisanego, a *d*, *e*, *f*, niech będą punkta, w których się toż koło dotyka boków tròykąta: koła przypisanego środek niech będzie S, a punkta w których się toż koło dotyka boku BC i przedłużonych dwòch innych boków tróykąta, niech będą E, D, F.

Powiadam 1*ód*, że liniia AD iest połową obwodu tròykąta ABC; liniie zaś BD, B*d*, A*d*, są różnicami, pierwsza między połową obwodu a bokiem AB, druga między połową obwodu a bokiem AC, trzecia między tąż samą połową obwodu a bokiem BC: czyli połowę obwodu tròykąta oznaczywszy przez p, bok zaś BC przez a, bok AC przez b, bok AB przez c będzie:

(1) $AD=p$, $BD=p-c$, $Bd=p-b$, $Ad=p-a$.

Ponieważ bowiem liniia BD=BE, a CF=CE, będzie summa liniy BD, CF, równa linii BC, a ieśli przydamy liniie AB, AC, będzie summa liniy AD, AF, równa summie liniy BC, CA, AB, to iest równa obwodowi tròykąta; ażе liniie AD, AF, są pomiędzy sobą ròwne; więc każda z liniy AF, AD, iest połową obdu tróykąta. Liniia BD równa się ròżnicy między AD i AB, to iest różnicy między połową obwodu a bokiem AB. Ponieważ znowu liniia A*d*=A*f*, B*d*=B*e*, C*e*=C*f*, będzie liniia B*d*, wraz z bokiem AC, równa połowie obwodu tróykąta, to iest linii AF; a odiąwszy spólną liniią AC, będzie pozostała liniia B*d*, równa linii pozostałey CF, to iest: liniia B*d* będzie równa różnicy między połową obwodu tròykąta a bokiem AC. Liniia nakoniec CE=CF, że zaś CF=B*d*, więc i B*d*=CE; ażе i BD=BE, zatém liniia D*d*=BC, a dla tego liniia A*d* iest ròżnicą pomiędzy liniią AD, a bokiem BC, to iest pomiędzy

2 Bd + 2 Af + 2 Cf
= obwód zatem
Bd + Af + Cf
= Bd + AC = ½ obwo

połową obwodu tróykąta a bokiem BC.

2*re* Powiadam, że

(2) $$BD \times Bd = sd \times SD;$$

czyli, że w każdym tróykącie prostokąt z różnic między połową obwodu a dwoma bokami tróykąta, równy iest prostokątowi z promienia koła przypisanego do tróykąta w kącie zawartym temi bokami, i z promienia koła wpisanego w tróykąt.

Jakoż poprowadźmy liniie proste B*s*, BS. Kąt ABC, wraz z kątem CBD, czyni dwa kąty proste; a zatém połowa kąta ABC, wraz z połową kąta CBD, czyni ieden kąt prosty, to iest: kąt *d*B*s*, wraz z kątem SBD, czyni kąt prosty; aże i kąt DSB wraz z kątem SBD czyni także kąt prosty; więc kąt DSB iest równy kątowi *d*B*s*, a dla tego tróykąty B*sd*, SBD, które maią kąty przy *d* i D proste, są równokątne. Będzie zatém $sd : BD = Bd : SD$, a następnie $BD \times Bd = sd \times SD$.

3*ie* Powiadam, że

(3) $As \times AS = AB \times AC$;

to iest: że w każdym tróykącie prostokąt z dwóch którychkolwiek boków, równy iest prostokątowi z odległości wierzchołka kąta temi bokami zawartego, od środka koła wpisanego w tróykąt, i od środka koła przypisanego do tróykąta w tymże samym kącie.

Poprowadźmy bowiem liniie SC, C*s*. Czworokąt BSC*s*, którego dwa kąty przeciwne SB*s*, SC*s*, są proste, może bydź wpisany w koło z średnicy S*s*; kąty więc CS*s*, CB*s*, są równe, iako będące w tym samym odcinku koła; że zaś kąt CB*s*, równy iest kątowi AB*s*, przeto i kąt AB*s*, iest równy kątowi ASC; a ponieważ i kąt SAC iest równy kątowi *s*AB; zatém tróykąty SCA, B*s*A, są równokątne, a dla tego będzie $AS:AB = AC:As$, skąd wypada $AS \times As = AB \times AC$.

4*te*. Oznaczywszy promień tablic przez *R*, będzie

$$\mathrm{A}s : \mathrm{A}d = R : \mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A,$$

$$\mathrm{AS} : \mathrm{AD} = R : \mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A,$$

z czego wypada

$$\mathrm{A}s \times \mathrm{AS} : \mathrm{AD} \times \mathrm{A}d = R^2 : \mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}A;$$

okazało się zaś, że

$$\mathrm{A}s \times \mathrm{AS} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC};$$

więc

$$\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} : \mathrm{AD} \times \mathrm{A}d = R^2 : \mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}A,$$

albo, co na to samo wypada,

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}A}{R^2} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

To iest: w każdym tróykącie ma się kwadrat z dostawy połowy któregokolwiek kąta do kwadratu z promienia, iak prostokąt z połowy obwodu tróykąta i z różnicy teyże połowy obwodu od boku kątowi przeciwległego, do prostokąta z dwóch boków tenże kąt zawieraiących.

5*te*. $\mathrm{A}s : sd = R : \mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A,$

$$\mathrm{AS} : \mathrm{SD} = R : \mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A;$$

zaczém $\mathrm{A}s \times \mathrm{AS} : sd \times \mathrm{SD} = R^2 : \mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A,$

a następnie maiąc wzgląd na równania (2) i (3) będzie

$$AB \times AC : Bd \times BD = R^2 : \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} A,$$

czyli

$$(5) \qquad \frac{\text{wst}^2 \frac{1}{2} A}{R^2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

To iest: w każdym tróykącie kwadrat ze wstawy połowy któregokolwiek kąta tak się ma do kwadratu z promienia, iak prostokąt z różnic między połową obwodu a dwoma bokami tenże kąt zawieraiącemi, do prostokąta z tychże samych dwóch boków tróykąta.

6*te*. $$Ad : sd = R : \text{sty} \tfrac{1}{2} A,$$

$$AD : SD = R : \text{sty} \tfrac{1}{2} A;$$

skąd wypada

$$Ad \times AD : sd \times SD = R^2 : \text{sty}^2 \tfrac{1}{2} A,$$

albo maiąc wzgląd na równanie (2)

$$Ad \times AD : BD \times Bd = R^2 : \text{sty}^2 \tfrac{1}{2} A$$

czyli

$$(6) \qquad \frac{\text{sty}^2 \frac{1}{2} A}{R^2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

Więc w każdym tróykącie kwadrat z styczney połowy któregokolwiek kąta tak się ma do kwadratu z promienia, iak prostokąt z różnic pomiędzy połową obwodu a dwoma bokami tróykąta ten kąt zawieraiącemi, do prostokąta z połowy obwodu, i z różnicy teyże połowy obwodu od boku temuż kątowi przeciwległego.

7me. $AD : DS = R : \mathrm{sty}\frac{1}{2}A$,

$DS : BD = R : \mathrm{sty}\frac{1}{2}B$;

więc

$$AD : BD = R^2 : \mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}B,$$

$$(7) \qquad p : p - c = R^2 : \mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}B.$$

To iest: w każdym tróykącie połowa obwodu tak się ma do różnicy między tąż połową obwodu a którymkolwiek bokiem tróykąta, iak kwadrat z promienia do prostokąta ze stycznych połówek dwóch kątów temuż bokowi przyległych.

Z tego twierdzenia wypada

$$(8) \quad \mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}B + \mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}C + \mathrm{sty}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}C = R^2,$$

a dzieląc obie strony przez $\mathrm{sty}\frac{1}{2}A\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}B\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}C$, i uważaiąc że $\frac{R^2}{\text{sty}\frac{1}{2}A} = \text{dot}\frac{1}{2}A$, będzie

(9) $R^2(\text{dot}\frac{1}{2}A + \text{dot}\frac{1}{2}B + \text{dot}\frac{1}{2}C) = \text{dot}\frac{1}{2}A\,\text{dot}\frac{1}{2}B\,\text{dot}\frac{1}{2}C.$

Wzory (8) i (9) mogą się także wyprowadzić z równań wiadomych

$$\text{dot}A\,\text{dot}B + \text{dot}A\,\text{dot}C + \text{dot}B\,\text{dot}C = R^2,$$

$$R^2(\text{sty}A + \text{sty}B + \text{sty}C) = \text{sty}A\,\text{sty}B\,\text{sty}C,$$

kładąc zamiast kątów A, B, C, następuiące:

$$90^\circ - \tfrac{1}{2}A,\ 90^\circ - \tfrac{1}{2}B,\ 90^\circ - \tfrac{1}{2}C.$$

8*me*. $\text{A}d : sd = \text{dot}\frac{1}{2}A : R$,

$\text{B}d : sd = \text{dot}\frac{1}{2}B . R$,

$\text{C}e : se = \text{dot}\frac{1}{2}C : R$;

że zaś $\text{C}e = \text{BD}$, $se = sd$; więc

$$\frac{\text{A}d}{\text{dot}\frac{1}{2}A} = \frac{\text{B}d}{\text{dot}\frac{1}{2}B} = \frac{\text{BD}}{\text{dot}\frac{1}{2}C} = \frac{\text{A}d + \text{B}d + \text{C}e}{\text{dot}\frac{1}{2}A + \text{dot}\frac{1}{2}B + \text{dot}\frac{1}{2}C}$$

$= \frac{sd}{R}$. To iest: oznaczywszy promień koła wpisanego przez r, będzie

(10) $$\frac{p-a}{\text{dot}\frac{1}{2}A} = \frac{p-b}{\text{dot}\frac{1}{2}B} = \frac{p-c}{\text{dot}\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{p}{\text{dot}\tfrac{1}{2}A+\text{dot}\tfrac{1}{2}B+\text{dot}\tfrac{1}{2}C}=\frac{p}{R^4}\,\text{sty}\tfrac{1}{2}A\,\text{sty}\tfrac{1}{2}B\,\text{sty}\tfrac{1}{2}C$$

$$=\frac{r}{R}$$

Z ròwnań (10) okazuie się, że w każdym tróykącie dostyczne połówek kątów są proporcyonalne różnicom między połową obwodu a bokami przeciwnemi tróykąta. Twierdzenie to, pod inną tylko postacią, wypada także z proporcyi (7) i iey podobnych; a tak twierdzenie o którém teraz mówimy, iako i proporcya (7), mogą się wyciągnąć z równania (6) i iemu podobnych.

Mnożąc równania (10) przez p, i uważaiąc że $pr=$ powierzchni tróykąta ABC, ktòrą oznaczymy dla skrócenia przez Δ, wypadnie

(11) $$\Delta=p(p-a)\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}A}{R}=p(p-b)\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}B}{R}$$

$$=p(p-c)\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}C}{R}=\frac{p^2}{R^3}\text{sty}\tfrac{1}{2}A\,\text{sty}\tfrac{1}{2}B\,\text{sty}\tfrac{1}{2}C$$

$$=\frac{p^2 \mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A \mathrm{sty}^1 B}{R \mathrm{sty}\tfrac{1}{2}(A+B)}.$$

Wyrażenie $\Delta = p(p-a)\frac{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A}{R}$ otrzymuie się także, uważaiąc, że

$R:\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A = \mathrm{A}d:sd = \mathrm{A}d\times\mathrm{AD}:sd\times\mathrm{AD} = \mathrm{A}d\times\mathrm{AD}:\Delta$.

Można też otrzymać ieszcze inne wyrażenie powierzchni tróykąta, uważaiąc, iż

$R:\mathrm{dot}\tfrac{1}{2}A = \mathrm{SD}:\mathrm{AD} = \mathrm{SD}\times sd:\mathrm{AD}\times sd = \mathrm{BD}\times\mathrm{B}d:\Delta$,

z czego wypada

(12) $$\Delta = (p-b)(p-c)\frac{\mathrm{dot}\tfrac{1}{2}A}{R}.$$

gdyż $\mathrm{A}d:\mathrm{AD} = sd:\mathrm{SD}$,

$\mathrm{AD}:sd = \mathrm{AD}:sd$;

więc

$\mathrm{AD}\times\mathrm{A}d:\mathrm{AD}\times sd = \mathrm{AD}\times sd:sd\times\mathrm{SD}$:

lecz $\mathrm{AD}\times sd = \Delta$, $sd\times\mathrm{SD} = \mathrm{BD}\times\mathrm{B}d$;

przeto $\mathrm{AD}\times\mathrm{A}d:\Delta = \Delta:\mathrm{B}d\times\mathrm{BD}$,

to iest:

$$p(p-a):\Delta = \Delta:(p-b)(p-c),$$

skąd wypada

(13) $$\Delta = \sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}.$$

Powierzchnia zatém tróykąta iest średnia geometrycznie proporcyonalna między dwoma prostokątami, z którychby ieden zrobiony był z połowy obwodu tróykąta i z różnicy tey połowy od iednego boku, a drugi z różnic między tąż samą połową obwodu a dwoma pozostałemi bokami tróykąta. Albo: powierzchnia tróykąta równa iest pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu cztérech czynników, z których pierwszy iest połową obwodu tróykąta, trzy zaś pozostałe są różnicami między tąż samą połową obwodu, a każdym w szczególności bokiem tróykąta.

10. Ponieważ $\text{wst}A = \dfrac{2\,\text{wst}\frac{1}{2}A\,\text{dos}\frac{1}{2}A}{R}$; więc włożywszy zamiast $\text{wst}\frac{1}{2}A$ i $\text{dos}\frac{1}{2}A$ wartości wzięte z równań (4) i (5), będzie

$$\text{wst}A = \frac{2R}{bc}\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]},$$

$$(14)\quad \begin{cases} \mathrm{wst}B = \dfrac{2R}{ac} \surd[p(p-a)(p-b)(p-c)], \\ \mathrm{wst}C = \dfrac{2R}{ab} \surd[p(p-a)(p-b)(p-c)], \end{cases}$$

a następnie

$$(15)\quad \frac{\mathrm{wst}A}{a} = \frac{\mathrm{wst}B}{b} = \frac{\mathrm{wst}C}{c},$$

$$(16)\quad \Delta = \tfrac{1}{2}bc\frac{\mathrm{wst}A}{R} = \tfrac{1}{2}ac\frac{\mathrm{wst}B}{R} = \tfrac{1}{2}ab\frac{\mathrm{wst}C}{R}.$$

I nawzaiem, ieżeli się opierać będziemy na równaniach (16) iako zkąd inąd wiadomych (dowodzą się bowiem wprost bardzo łatwym sposobem), na ten czas z równań (14) i (16) wypadnie od razu równanie (13). Możnaby téż z którego kolwiek z dwóch równań (4) i (5) wyprowadzić wiadome wyrażenie dostawy kąta w tróykącie przez trzy boki tegoż tróykąta.

11. $\mathrm{AD}:\mathrm{A}d = \mathrm{SD}:sd = \mathrm{SD}\times sd:sd^2$:

aże $\mathrm{SD}\times sd = \mathrm{B}d\times\mathrm{BD}$; więc

$$\mathrm{AD}:\mathrm{A}d = \mathrm{B}d\times\mathrm{BD}:sd^2,$$

to iest:

$$p:p-a=(p-b)(p-c):sd^2.$$

Podobnież $Ad:AD=sd:SD$

$$=sd\times SD:SD^2$$

$$=Bd\times BD:SD^2,$$

to iest:

$$p-a:p=(p-b)(p-c):SD^2.$$

Jeżeli zatém promień koła wpisanego w tróykąt ABC, oznaczymy podobnie iak wyżey przez r, promień zaś koła przypisanego do tegoż tróykąta w kącie A, oznaczymy przez ϱ, w kącie B przez ϱ', w kącie C przez ϱ'', będzie:

(17)

$$r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$\varrho^2=\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}$$

$$\varrho'^2=\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}$$

$$\varrho''^2=\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}$$

Oznaczywszy ieszcze promień koła opisanego na tróykącie ABC przez z, ponieważ, iak wiadomo, $z = \frac{abc}{4\Delta}$ (co się wreszcie poniżey okaże), będzie

$$(18) \qquad z = \frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}}.$$

12. Ponieważ kąty D″S″S′, F′S′S″, są pomiędzy sobą równe, gdyż każdy z tych kątów równy iest połowie kąta BAC; i podobnież kąt SS′F′=S′SE, a kąt ESS″=D″S″S; wypada ztąd, że trzy promienie SE, S′F′, S″D″, przedłużone, przecinaią się w iednym i tymże samym punkcie O′, który iest środkiem koła opisanego na tróykącie SS′S″.

Z punktu S′ do boku BC przedłużonego spuśćmy prostopadłą S′E′. Liniia BE′ równa iest linii AD, bo każda z tych dwóch liniy równa się połowie obwodu tróykąta ABC: a że i BE=BD; więc BE′-BE=AD-BD, to iest: EE′=AB. To założywszy, opiszmy tróykąt ABC kołem, i niech środkiem tego koła będzie punkt O: z punktu O spuśćmy do boku AB prostopadłą OC', i złączmy OA. Kąt AOC' równy iest kątowi ACB, gdyż każdy z tych dwóch kątów ma za miarę połowę łuku AB: że zaś w czworokącie CE'S'F', ktòrego dwa kąty przy E' i F' są proste, kąt $F'S'E' = 180° - F'CE' = ACB$; więc kąt $F'S'E' = AOC'$. Jeżeli zatém z punktu O' spuścimy do promienia S'E' prostopadłą O'I, tróykąt O'IS' będzie podobny tróykątowi AC'O, a dla tego będzie $O'S' : AO = O'I : AC'$: ponieważ zaś $O'I = EE' = AB$, $AC' = \frac{1}{2}AB$, a następnie $O'I = 2AC'$; więc

(19) $O'S' = O'S'' = O'S = 2OA = 2OB = 2OC$.

To iest: promień koła ktòregoby okrąg przechodził przez środki trzech kół przypisanych do tróykąta, iest dwa razy większy od promienia koła opisanego na tymże tròykącie.

Przedłużmy promień *ds* ku wierzchołkowi kąta ACB gdziekolwiek do punktu *x*. Kąt

$sS'E'=90°-E'BS'$, a kąt $S'sx=Bsd=90°-dBs$, to iest: każdy z kątów $sS'E'$, $S'sx$, równa się $90°-\frac{1}{2}B$. Opisawszy na tróykącie sSS' koło, i środek n tego koła z punktami s, S', złączywszy promieniami ns, nS', będzie kąt $sS'n+$ kąt $S'sn=180°-snS'=180°-2sSS'=180°-2sBC=180°-B$; a następnie, dla równości kątów $S'sn$, $sS'n$, każdy z nich będzie równy $90°-\frac{1}{2}B$. Ztąd wypływa, że kąt $sS'E'=sS'n$, i kąt $S'sx=S'sn$; a następnie promienie $S'E'$ i $S'n$ są na iedney linii prostey, i liniia sx z promieniem sn iest także na iedney linii prostey. Jeżeli ieszcze poprowadzimy promień nS, będzie kąt $sSn=nsS$: a że kąt $nsS=Asd=ASD=sSF$; więc i kąt $sSn=sSF$, a dla tego linie Sn i SF są na iedney linii prostey. Więc trzy promienie $S'E'$, ds i SF, przedłużone, przecinaią się w punkcie n, który iest środkiem koła opisanego na tróykącie $S'Ss$. Dla tey samey przyczyny promień es przedłużony, prostopadła spuszczona z punktu S' do boku BA, i prostopadła spuszczona z punktu S'' do boku CA, przecinaią się w środku l koła opisanego na tróykącie $sS'S''$. Podobnież promienie fs, SD, i prostopadła spuszczona z punktu S'' do boku CB, gdy będą dostatecznie przedłużone, przetną się w iednym i tym samym punkcie m, który iest środkiem koła opisanego na tróykącie sSS''.

W tròykątach $SS'n$, $SS'O'$, bok SS' iest spólny, i kąty temu bokowi przyległe są równe; dla czego tròykąt $SS'n$ przystanie do tróykąta $SS'O'$, a w szczególności bok $nS=O'S$. Okazało się zaś, że $O'S=2OA$, więc $nS=2OA$, to iest: promień koła opisanego na tròykącie $S'Ss$ równa się średnicy koła opisanego na tróykącie ABC. Ta sama własność rozciąga się oczywiście do promieni kół opisanych na tróykątach $sS'S''$ i sSS''.

Więc ieżeli przez środki trzech którychkolwiek kół takich, iżby każde było styczne do wszystkich boków tróykąta, poprowadzimy okrąg koła, promień tego koła będzie zawsze dwa razy większy od promienia koła opisanego na tym samym tróykącie.

13. Powierzchnia czworokąta $O'AS''B = AB \times \frac{1}{2}O'S''$; pow: czworokąta $O'BSC = BC \times \frac{1}{2}O'S$; pow: tróykąta $AS'O' = AF' \times \frac{1}{2}O'S'$; pow: tróykąta $S'O'C = F'C \times \frac{1}{2}O'S'$: aże tróykąt $SS'S'' = O'AS''B + O'BSC + AO'S' + S'O'C$; więc powierzchnia tróykąta $SS'S'' = AB \times \frac{1}{2}O'S'' + BC \times \frac{1}{2}O'S + (AF' + F'C)\frac{1}{2}O'S' = (AB + BC + AC) \times \frac{1}{2}O'S$. Oznaczywszy dla skrócenia powierzchnią tróykąta $SS'S''$ przez Δ', i zważaiąc że $\frac{1}{2}O'S = z$, będzie

(20) $$\Delta' = (a+b+c)z.$$

To iest: powierzchnia tróykąta $SS'S''$ równa iest prostokątowi z obwodu tróykąta ABC, przez promień koła na tymże tróykącie ABC opisanego.

Ponieważ $\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)r$; więc maiąc wzgląd na równanie (20), będzie

(21) $$\Delta' : \Delta = 2z : r.$$

Uważaiąc znowu, że $abc = 4\Delta z$, i podobnież $S'S \times SS'' \times S'S'' = 4\Delta \times O'S = 4\Delta' \times 2z$, otrzymamy

$$\Delta' = \frac{abc}{2r}\,;\ 2\Delta' : \Delta = S'S'' \times S''S \times SS' : abc.$$

Nakoniec, ponieważ tróykąt $sS'S'' : \Delta' = As : AS$, a $As : AS = sd : SD$; będzie też $sS'S'' : \Delta' = r : \varrho$. Więc kładać zamiast Δ' wartość poprzedzaiącą, otrzymamy

$$sS'S'' = \frac{abc}{2\varrho},\ sS''S = \frac{abc}{2\varrho'},\ sSS' = \frac{abc}{2\varrho''}.$$

14. Ze środka O koła opisanego na tróykącie ABC spuśćmy do boku BC prostopadłą OA', którą przedłużmy aż do przecięcia się z okręgiem tegoż koła w punkcie Z. Promień OZ, prostopadły do cięciwy BC, dzieli łuk BZC na dwie połowy: aże i liniia AS, dzieląca kąt BAC na dwie części równe, dzieli także łuk BZC na dwie połowy; więc liniia AS przechodzi przez punkt Z. Jeżeli zatém poprowadzimy liniią prostą BZ, a z punktu s do promienia SD spuścimy prostopadłą sT, kąt ZBC będzie równy kątowi ZAC, gdyż każdy z tych dwóch kątów ma

za miarę połowę łuku ZC, a kąt SsT będzie równy kątowi ZAB, iako iednostronne odpowiadaiące: aże kąty ZAB, ZAC, są między sobą równe; więc i kąt $ZBC = SsT$. Ztąd wypada, że tróykąt SsT iest podobny tróykątowi ZBA', w szczególności zaś $Ss : BZ = sT : BA'$: aże $sT = dD = BC = 2BA'$; więc $Ss = 2BZ$. W tróykącie ZBs, kąty ZBs, ZsB, są równe, gdyż każdy z nich iest $= \frac{1}{2}(A+B)$; zkąd wypada $BZ = Zs$. Ponieważ zaś $Ss = 2BZ$, będzie też $Ss = 2Zs$: lecz i $SO' = 2ZO$, i nadto kąt $sSO' = sZO$; więc tróykąt sSO' iest podobny tróykątowi sZO, a w szczególności $O's = 2Os$, i kąt $SsO' = ZsO$. To iest: środek s koła wpisanego w tróykąt, i środek O' koła któregoby okrąg przechodził przez środki trzech kół przypisanych do tego tróykąta, są w równey odległości od środka O koła opisanego na tymże tróykącie; i te trzy środki s, O i O' są na iedney linii prostey.

Poprowadźmy linie proste On, OS''.

W tróykątach Ons, $OS''O'$, bok $ns=O'S''$, $sO=OO'$; nadto kąt $nsO=OO'S$, liniie bowiem ns i $O'S''$ są równo odległe, a punkta s, O i O' są w iedney linii prostey. Więc tróykąt Ons przystanie do tróykąta $OS''O'$, a w szczególności kąt $nOs=O'OS''$. Z równości kątow nOs i $O'OS''$, i z tey własności: że trzy punkta s, O i O', są na iedney linii prostey, wypada: że trzy środki n, O i S'' są także na iedney linii prostey. Z przystawania tróykątów Ons, $OS''O'$, wypada nadto, że $On=OS''$. Dla tey samey przyczyny środki S, O i l są na iedney linii prostey, i $SO=Ol$. Podobnież środki S', O i m są także na iedney linii prostey, i $S'O=Om$.

Z poprzedzaiących uwag wypada ogólnie: że 1ód środek koła któregoby okrąg przechodził przez środki trzech którychkolwiek kół takich, iżby każde było styczne do wszystkich boków iednegoż tróykąta; 2re środek koła stycznego czwartego; i 3cie środek koła opisanego na tym samym tróykącie; są zawsze na iedney linii prostey, i dwa pierwsze środki są zawsze w równey odległości od środka trzeciego.

15. Z równań (17) i (18) wypada

$$\frac{r}{z}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{\frac{1}{4}abc},$$

$$\frac{\varrho}{z}=\frac{p(p-b)(p-c)}{\frac{1}{4}abc},$$

czyli

$$\frac{r}{z}=4\sqrt{\left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc}.\frac{(p-a)(p-c)}{ac}.\frac{(p-a)(p-b)}{ab}\right]},$$

$$\frac{\varrho}{z}=4\sqrt{\left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc}.\frac{p(p-b)}{ac}.\frac{p(p-c)}{ab}\right]};$$

a zatém maiąc wzgląd na równania (4) i (5), będzie

$$(22)\qquad \frac{r}{z}=\frac{4}{R^3}\text{wst}\tfrac{1}{2}A\,\text{wst}\tfrac{1}{2}B\,\text{wst}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\frac{\varrho}{z}=\frac{4}{R^3}\text{wst}\tfrac{1}{2}A\,\text{dos}\tfrac{1}{2}B\,\text{dos}\tfrac{1}{2}C$$

$$\frac{\varrho'}{z}=\frac{4}{R^3}\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\frac{\varrho''}{z}=\frac{4}{R^3}\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C.$$

Wyrażenia po drugiey stronie równań (22) mogą się przerobić na inne. Jakoż oznaczywszy przez u, v, dwa kąty iakiekolwiek, mamy, iak wiadomo,

$$\frac{2}{R^2}\mathrm{dos}u\,\mathrm{dos}v=\mathrm{dos}(u-v)+\mathrm{dos}(u+v);$$

z czego wypływa, że ieżeli oznaczymy przez w trzeci kąt iakikolwiek, będzie

$$(23)\qquad \frac{4}{R^2}\mathrm{dos}u\,\mathrm{dos}v\,\mathrm{dos}w=$$

$$\mathrm{dos}(v+w-u)+\mathrm{dos}(u+w-v)+\mathrm{dos}(u+v-w)+\mathrm{dos}(u+v+w).$$

Jeżeli w równaniu dopiero napisaném położymy

$$u=90^\circ-\tfrac{1}{2}A,\ v=90^\circ-\tfrac{1}{2}B,\ w=90^\circ-\tfrac{1}{2}C,$$

i będziemy uważali, iż

$$A+B+C=180^\circ,$$

wypadnie

[d]

$$u+v+w=180^\circ,\ v+w-u=v+w+u-2u=A,$$

$$u+w-v=B,\ u+v-w=C,$$

a następnie

$$\frac{4}{R^2}\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C=\mathrm{dos}A+\mathrm{dos}B+\mathrm{dos}C-R.$$

Położywszy znowu w tém samém równaniu (23)

$$u=90^\circ-\tfrac{1}{2}A,\ v=\tfrac{1}{2}B,\ w=\tfrac{1}{2}C,$$

otrzymamy

$$v+w-u=\tfrac{1}{2}(B+C+A)-90^\circ=0,\ u=v+w;$$

$$u+w-v=v+w+w-v=2w=C,$$

$$u+v-w=2v=B,\ u+v+w=2u=180^\circ-A,$$

a następnie

$$\frac{4}{R^2}\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C=R-\mathrm{dos}A+\mathrm{dos}B+\mathrm{dos}C,$$

$$\frac{4}{R^2}\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C=R+\mathrm{dos}A-\mathrm{dos}B+\mathrm{dos}C,$$

$$\frac{4}{R^2}\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C=R+\mathrm{dos}A+\mathrm{dos}B-\mathrm{dos}C.$$

Wzory przeto (22) zamienią się w następuiące:

$$(24)\quad \begin{cases} \frac{r}{z}=\frac{\text{dos}A+\text{dos}B+\text{dos}C-R}{R}, \\ \frac{\varrho}{z}=\frac{R-\text{dos}A+\text{dos}B+\text{dos}C}{R}, \\ \frac{\varrho'}{z}=\frac{R+\text{dos}A-\text{dos}B+\text{dos}C}{R}, \\ \frac{\varrho''}{z}=\frac{R+\text{dos}A+\text{dos}B-\text{dos}C}{R}. \end{cases}$$

Z równań dopiero napisanych wypływa bez pośrednio

$$\frac{\varrho+\varrho'+\varrho''-r}{z}=4$$

czyli

$$(25)\qquad \varrho+\varrho'+\varrho''=r+4z.$$

To iest: summa promieni trzech kół przypisanych do tròykąta, równa iest summie z promienia koła wpisanego w tróykąt, i z cztérech promieni koła opisanego na tymże tróykącie.

16. Opiszmy teraz tròykąt ABC (Fig. 2.) kołem, ze środka O tegoż koła spuśćmy do

boków tróykąta prostopadłe OA′, OB′, OC′, i poprowadźmy promienie OA, OB, OC. W tróykącie BOA′, R:dosBOA′=BO:A′O; że zaś kąt BOA′=BAC=A, BO=z; więc położywszy ieszcze dla skrócenia

$$OA'=\alpha,\ OB'=\beta,\ OC'=\gamma,$$

będzie

$$\frac{z\,\mathrm{dos}A}{R}=\alpha,\ \frac{z\,\mathrm{dos}B}{R}=\beta,\ \frac{z\,\mathrm{dos}C}{R}=\gamma.$$

To założywszy, równania (24) zamienią się w następuiące:

$$(26)\quad \begin{aligned} r+z&=\alpha+\beta+\gamma\\ \varrho-z&=\beta+\gamma-\alpha\\ \varrho'-z&=\alpha+\gamma-\beta\\ \varrho''-z&=\alpha+\beta-\gamma. \end{aligned}$$

Z równań dopiero napisanych wypadaią inne, iako to:

$$(27)\ \begin{cases} \varrho+r=2\beta+2\gamma, \varrho'+r=2\alpha+2\gamma, \varrho''+r=2\alpha+2\beta;\\ \varrho-r=2z-2\alpha,\ \varrho'-r=2z-2\beta,\ \varrho''-r=2z-2\gamma. \end{cases}$$

Na figurze 2. przypuściliśmy, że wszystkie kąty A, B, C, są ostre. Lecz gdyby ieden kąt tróykąta ABC, naprzykład kąt B (Fig. 2. *bis*) był rozwarty, natenczas mielibyśmy kąt AOB'$=180°-B$, a dla tego byłoby

$$OB' = -\frac{z\cos(180°-B)}{R} = -\frac{-z\cos B}{R}, \text{ to iest:}$$

$$\frac{z\cos B}{R} = -\beta.$$

Więc ieżeli ieden z kątów tróykąta ABC będzie rozwarty, natenczas w równaniach (26) i (27), tę z pomiędzy prostopadłych α, β, γ, która iest spuszczona do boku przeciwnego kątowi rozwartemu, potrzeba wziąć ze znakiem przeciwnym, to iest: gdzie prostopadła dopiero wspomniona ma przed sobą znak $+$, położyć znak $-$; a gdzie ma znak $-$, położyć znak $+$.

17. Związek wyrażony przez trzy ostatnie z pomiędzy równań (26), iako też związki (25), (27), nie wiem czyli były przez kogo uważane wyraźnie; lecz pierwszego z pomiędzy równań (24), i pierwszego z pomiędzy

równań (26) dowodzi prostym sposobem *Carnot* w dziele: *Géométrie de position*, str. 167—169. Przytoczymy tu naprzód dowodzenie pierwszego z pomiędzy cztérech równań (26) podług wspomnionego dopiero autora, a potem okażemy, iak z tychże samych fundamentów i trzy ostatnie pomiędzy równaniami (26) mogą bydź wyprowadzone.

Zrobiwszy na figurze 2. to samo wykréślenie iak wprzódy, złączmy punkta A', B', C', liniiami prostemi. Czworokąt AB'OC' którego dwa kąty przeciwne przy B' i C' są proste, może być wpisany w koło; i dla tey samey przyczyny każdy z czworokątów OA'BC', OA'CB', może być także wpisany w koło: że zaś w czworokącie mogącym się wpisać w koło, prostokąt z przekątnich równy iest summie prostokątów z boków przeciwnych czworokąta; więc uważaiąc koleyno trzy dopiero wspomnione czworokąty, będzie

$$C'B'\times OA = AB'\times OC' + AC'\times OB',$$

$$A'C' \times OB = A'B \times OC' + BC' \times OA',$$
$$A'B' \times OC = A'C \times OB' + B'C \times OA'.$$

Ponieważ punkta A', B', C', są na środkach boków tróykąta ABC, i dla tego

$$B'C' = \tfrac{1}{2}BC,\ A'B' = \tfrac{1}{2}AB,\ A'C' = \tfrac{1}{2}AC,$$

przeto oznaczywszy dla skrócenia, podobnie iak wyżey, boki BC, AC, AB, przez a, b, c, a prostopadłe OA', OB', OC', przez α, β, γ, promień zaś OA=OB=OC przez z, równania poprzedzaiące zamienią się na

$$(28) \qquad \begin{aligned} az &= b\gamma + c\beta, \\ bz &= a\gamma + c\alpha, \\ cz &= a\beta + b\alpha. \end{aligned}$$

Dodawszy wszystkie trzy równania dopiero napisane, otrzymamy

$$z(a+b+c) = \alpha(b+c) + \beta(a+c) + \gamma(a+b)$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c) - (a\alpha + b\beta + c\gamma):$$

lecz $a\alpha + b\beta + c\gamma$ wyraża oczywiście dwa razy wziętą summę tróykątów BOC, AOC, AOB, to iest podwoioną powierzchnią tróykąta ABC; podwoiona zaś powierzchnia tróykąta ABC, równa się prostokątowi z iego obwodu przez promień r koła wpisanego w ten tróykąt; więc

$$z(a+b+c)=(\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c)-(a+b+c)r,$$

a tém samém

$$z+r=\alpha+\beta+\gamma.$$

Jeżeli teraz z pomiędzy równań (28) dodamy drugie i trzecie, a odeymiemy pierwsze, wypadnie

$$z(b+c-a)=\alpha(b+c)-\beta(c-a)-\gamma(b-a)$$
$$=(\alpha-\beta-\gamma)(b+c-a)+a\alpha+b\beta+c\gamma:$$

a ponieważ (Fig. 1.) $SD:sd::AD:Ad$, to iest

$$\varrho:r=p:p-a=a+b+c:b+c-a;$$

zkąd wypada

$$(a+b+c)r=(b+c-a)\varrho,$$

a następnie

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=(a+b+c)r=\varrho(b+c-a);$$

więc

$$z(b+c-a)=(\alpha-\beta-\gamma)(b+c-a)+\varrho(b+c-a),$$

a tém samém

$$z=\alpha-\beta-\gamma+\varrho,$$

$$\varrho - z = \beta + \gamma - \alpha.$$

Tym samym sposobem dowiedlibyśmy trzeciego i czwartego z pomiędzy równań (26).

Równania (28) wyprowadzone są z uwagi tróykąta którego wszystkie trzy kąty są ostre. Lecz gdy ieden kąt tróykąta ABC, daymy kąt $ABC = B$ (Fig. 2. *bis*) będzie rozwarty, natenczas zrobiwszy ieszcze to samo wykréślenie iak w przypadku poprzedzaiącym, i uważaiąc podobnie iak przedtém czworokąty OB'C'A, OA'BC', OB'A'C, wyciągniemy zamiast równań (28), następuiące:

$$b\gamma = az + c\beta,$$
$$bz = a\gamma + c\alpha,$$
$$b\alpha = a\beta + cz;$$

czyli

$$az = b\gamma - c\beta,$$
$$bz = a\gamma + c\alpha,$$
$$cz = b\alpha - a\beta.$$

Porównywaiąc te trzy ostatnie równania z równaniami (28), widzimy, że gdy tróykąta ABC kąt ieden będzie rozwarty, natenczas w równaniach (28), a tém samém i w równaniach (26) które z tamtych wypadaią, potrzeba tę z pomiędzy prostopadłych α, β, γ, która iest spuszczona do boku przeciwnego kątowi rozwartemu, wziąć ze znakiem przeciwnym.

18. Równania (27) mogą być także wyprowadzone wprost z figury 1. Jakoż w trapezie O'Ees, w którym liniia OA' iest równoodległa od dwóch boków se, O'E, i przechodzi przez środek boku eE, mamy 2OA' $=se+$O'E, a przydawszy spólną liniią S'I, będzie 2OA'+S'I$=se+$O'E+S'I$=se+$S'E' : aże z podobieństwa tróykątów OAC', S'O'I, wypada S'I=2OC'; zatém 2OA'+2OC'$=se+$S'E', to iest:

$$(27')\ \varrho'+r=2\alpha+2\gamma,\ \varrho''+r=2\alpha+2\beta,\ \varrho+r=2\beta+2\gamma.$$

Gdyby tróykąta ABC kąt C był rozwarty, natenczas kąt SO'S' który iest zawsze spełnieniem kąta *C* do dwóch kątów prostych byłby ostry; a dla tego prostopadła O'I, spuszczona z punktu O' do promienia E'S', padłaby na iego przedłużenie po drugiey stronie punktu S', i byłoby $2OA' = O'E + se = IE' + se$; $2OA' - IS' = se + IE' - IS' = se + S'E'$, to iest: $2OA' - 2OC' = se + S'E'$, czyli $2\alpha - 2\gamma = r + \varrho'$. Podobnież zamiast trzeciego z pomiędzy równań (27') otrzymalibyśmy w tym razie równanie następuiące: $\varrho + r = 2\beta - 2\gamma$. Więc ieżeli tròykąta ABC kąt ieden ieden iest rozwarty, natenczas prostopadłą spuszczoną ze środka koła opisanego do boku przeciwnego kątowi rozwartemu, potrzeba w równaniach (27') wziąć ze znakiem przeciwnym.

Ponieważ się znowu okazało wyżey, że tróykąty ZBA', SsT, są podobne, i bok $sT = 2BA'$, będzie też bok $ST = 2A'Z$: aże $ST = SD - DT = SD - sd$, $A'Z = OZ - OA'$; więc $SD - sd = 2(OZ - OA')$, to iest:

(27'') $\varrho - r = 2z - 2\alpha$, $\varrho' - r = 2z - 2\beta$, $\varrho'' - r = 2z - 2\gamma$.

Gdyby kąt A był rozwarty, natenczas środek O koła opisanego na tróykącie ABC, znaydowałby się z drugiey strony boku BC między punktami A' i Z, i byłoby A'Z $=ZO+OA'$; a dla tego zamiast pierwszego z pomiędzy równań (27") otrzymalibyśmy w tym przypadku równanie następuiące: $\varrho-r=2z+2\alpha$. Więc ieżeli ieden z kątów tróykąta ABC będzie rozwarty, natenczas prostopadłą spuszczoną ze środka koła opisanego do boku przeciwnego kątowi rozwartemu, potrzeba w równaniach (27") wziąć ze znakiem przeciwnym.

Dodaiąc i odeymuiąc równania (27') i (27"), otrzymamy równania (26), a następnie i związek (25), któryby także wprost z figury 1. wyprowadzić można. Z równań (27') i (27") lub (26) wypadaią ieszcze równania następuiące

(27''') $\varrho+\varrho'=2z+2\gamma, \varrho'+\varrho''=2z+2\alpha, \varrho''+\varrho=2z+2\beta$,

które się także wyprowadzaią wprost z figury 1, uważaiąc, iż $SE+S'E=SO'+IS' =2AO+2OC'$.

19. Okażmy teraz, że w każdym tróykącie prostokréślnym, punkt w którym się przecinaią trzy prostopadłe spuszczone z wierzchołków kątów na boki przeciwne tróykąta, iest od wierzchołka któregokolwiek kąta w odległości dwa razy większey, niż odległość środka koła opisanego na tróykącie od boku przeciwnego temuż kątowi. Na ten koniec niech będzie tróykąt ABC (Fig. 3.), a na tym tróykącie opisane koło, którego środek niech będzie punkt O. Z wierzchołka A spuśćmy do boku BC prostopadłą AP, a z wierzchołka B, do boku AC, prostopadłą BQ, którą przedłużmy aż do przecięcia się z okręgiem koła w punkcie Y; punkt zaś w którym się prostopadła AP przecina z prostopadłą BQ, niech będzie X. Z środka O spuśćmy do boku BC prostopadłą OA', a poprowadziwszy średnicę BE, złączmy punkta E i C

liniią prostą. Ponieważ kąt BCE iest prosty iako w półkolu, będzie tróykąt BCE podobny tróykątowi BA′O, a dla tego EC:OA′ =BE:BO; że zaś BE=2BO, więc też EC =2OA′. W dwóch tróykątach BCE, BAQ, kąty przy C i Q są równe iako proste, kąt BEC=BAC=BAQ; więc i trzeci kąt EBC =ABY, a dla tego łuk EC równy iest łukowi AY, a następnie i cięciwa EC równa iest cięciwie AY. Ponieważ znowu w dwóch tróykątach prostokątnych AXQ, APC, kąt ostry przy A iest spólny, będzie kąt AXQ =ACP, to iest kąt AXY=ACB; aże i kąt AYB=ACB; więc kąt AYB=AXY, a dla tego w tróykącie AXY bok AX=AY: okazało się zaś, że AY=EC; więc też AX=EC, a tém samém AX=2OA′. Dowiedlibyśmy tymże samym sposobem, że BX=2OB′, CX=2OC′. Wreszcie zamiast przedłużać promień BO aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie E, można przez punkt A poprowadzić średnicę koła, i drugi iey koniec złączyć z punktem Y liniią prostą; z czego się zrobi tróykąt prostokątny podobny tróykątowi BOA', a z proporcyonalności boków tych dwóch tróykątów wypadnie $AY=2OA'$.

Uczyniwszy zatém dla skrócenia

$$AX=d,\ BX=d',\ CX=d'',$$

równania (26), (27) i (27''') zamienią sią w następuiące:

$$(29)\quad \begin{cases} 2r+2z=d+d'+d'', \\ 2\varrho-2z=d'+d''-d, \\ 2\varrho'-2z=d+d''-d', \\ 2\varrho''-2z=d+d'-d''; \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{array}{l} \varrho+r=d'+d'',\ \varrho'+r=d+d'',\ \varrho''+r=d+d'; \\ \varrho-r=2z-d,\ \varrho'-r=2z-d',\ \varrho''-r=2z-d''; \\ \varrho'+\varrho''=2z+d,\ \varrho''+\varrho=2z+d',\ \varrho+\varrho'=2z+d''; \end{array}$$

które maią mieysce, gdy wszystkie trzy kąty tróykąta ABC są ostre; gdy zaś ieden z nich będzie rozwarty, natenczas w równaniach dopiero napisanych, tę z pomiędzy liniy d, d', d'', która łączy punkt X z wierzchołkiem kąta rozwartego, należy wziąć ze znakiem przeciwnym.

Pierwszego z pomiędzy równań (29) dowodzi *Carnot* w dziele powyżey przytoczoném.

Nie opuszczaiąc figury 3. uważmy ieszcze, że $wst BEC : R = BC : BE$; a ponieważ kąt $BEC = BAC$; więc

(31) $$wst\, BAC : R = BC : BE.$$

To iest: w każdym tróykącie wstawa któregokolwiek z kątów tak się ma do promienia tablic, iak bok przeciwny temu kątowi do średnicy koła opisanego na tymże tróykącie.

Uważmy także, iż w dwóch tróykątach podobnych BEC, BAQ, mamy $BE : AB = BC : BQ$; zkąd wypada $BQ \times BE = BC \times AB$, a następnie $AC \times BQ \times BE = BC \times AC \times AB$: lecz ieżeli powierzchnią tróykąta ABC oznaczymy podobnie iak wyżey przez Δ, a promień koła na tymże tróykącie opisanego przez z, będzie $AC \times BQ = 2\Delta$, $BE = 2z$; więc $4\Delta z = BC \times AC \times AB$.

20. Szukaymy odległości środków s, S, S', S'', iednych od drugich, tudzież odległości tychże środków od punktów A, B, C (Fig. 1).

Dla wynalezienia nasamprzod linii sS, uważmy, iż

$$sT : sS = \cos TsS : R;$$

aże $sT = Dd = BC = a$, a kąt $TsS = DAS = \frac{1}{2}A$; więc będziemy mieli proporcyą

(32) $$a : sS = \cos\tfrac{1}{2}A : R,$$

z którey się wyciągnie wartość linii sS, gdy będzie dany bok BC, i kąt przeciwny BAC.

Można też łatwo wyznaczyć liniią sS, maiąc daną w tróykącie ABC różnicę dwóch boków AC i AB, tudzież różnicę dwóch kątów ABC i ACB przeciwnych tym bokom. Jakoż spuściwszy ze środka s do linii SO' prostopadłą sK, będzie $sS : sK = R : \sin O'Ss$. Lecz ieżeli do boku CB przedłużonego spuścimy prostopadłą S''E'', liniia CE'' będzie równa linii AF, gdyż każda z tych dwóch liniy iest połową obwodu tróykąta ABC; więc ponieważ i liniie CE, CF są pomiędzy sobą równe, będzie CE″-CE=AF-CF, to iest E″E=AC. Uważaiąc teraz, że liniia E″e iest równa bokowi AB, dla tey samey przyczyny, dla którey i liniia Dd iest równa bokowi BC, będziemy mieli eE=E″E-E″e =AC-AB=b-c: lecz eE=sK; więc sK=b-c. Nadto, ponieważ kąty sSB, sCB, są równe, iako będące w tym samym odcinku koła mogącego się opisać na czworokącie BSCs, będzie kąt O′Ss = O′SB-sSB = $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$ $=\frac{1}{2}(B-C)$. Położywszy zatém w proporcyi poprzedzaiącey zamiast linii sK i kąta O′Ss, wartości dopiero wynalezione, otrzymamy

(33) $$sS : b-c = R : \mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(B-C).$$

Ażeby otrzymać wyrażenie linii sS przez trzy boki tróykąta ABC, uważmy, iż w tróykątach podobnych SsT, sAd i SAD

$$sS : sT = As : Ad,$$

$$sS : sT = AS : AD;$$

z czego wypływa

$$sS^2 : sT^2 = As \times AS : AD \times Ad:$$

że zaś $sT = a$, $As \times AS = bc$ (równ. 3); więc

$$sS^2 : a^2 = bc : p(p-a).$$

Proporcyą dopiero wyrażoną otrzymalibyśmy także, kombinuiąc proporcyą (32) z równaniem (4).

Ponieważ dla kątów prostych $S''BS'$, $S''CS'$, okrąg koła wykréślonego na linii $S'S''$ iako na średnicy, przechodzi przez punkta B i C, będzie na mocy twierdzenia (31), $\mathrm{wst} BS''C : R = BC : S'S''$: że zaś kąt $BS''C$ czyli $BS''s$ iest równy kątowi BAs, są bowiem w tym samym odcinku koła mogącego się opisać na czworokącie $AS''Bs$; więc

(34) $$\mathrm{wst} \tfrac{1}{2}A : R = a : S'S''.$$

Za pomocą tey proporcyi wynaydziemy liniią $S'S''$, maiąc dany bok BC i kąt przeciwny BAC.

Poprowadziwszy znowu przez punkt S'' liniią równoodległą od $E''E'$, i przedłużywszy ią aż do przecięcia się z promieniem $S'E'$ w punkcie H, będzie $S'S'':S''H = R:\cos S'S''H$: a ponieważ $S''H = E''E' = E''E + EE' = AC + BA = b+c$, kąt zaś $S'S''H = ASO' = \frac{1}{2}(B-C)$; więc będziemy mieli proporcyą

(35) $$S'S'' : b+c = R : \cos\tfrac{1}{2}(B-C).$$

Za pomocą proporcyi (35) wynaydziemy liniią $S'S''$, gdy będzie dana summa dwóch boków AC, AB, tudzież różnica dwóch kątów ABC, ACB, przeciwnych tym bokom.

Z proporcyi (34) wypada $\sin^2\frac{1}{2}A : R^2 = a^2 : S'S''^2$: a że $\sin^2\frac{1}{2}A : R^2 = (p-b)(p-c) : bc$ (równ. 5); więc

$$(p-b)(p-c) : bc = a^2 : S'S''^2.$$

Liniie sS, sS', sS'', i liniie $S'S''$, $S''S$, SS', wyrażaią się także dosyć prostym sposobem przez z i α, β, γ, lub przez z i r, ϱ, ϱ', ϱ''. I tak, ponieważ w kole opisaném na tróykącie ABC, cięciwa BZ iest średnią geometrycznie proporcyonalną między średnicą tegoż koła i iey odcinkiem A'Z, będzie $BZ^2 =$

$2OZ \times A'Z$: lecz okazało się powyżey, że $BZ = \frac{1}{2}sS$, a $2A'Z = 2(z-\alpha) = \varrho - r$; więc

$$sS^2 = 8z(z-\alpha) = 4z(\varrho - r),$$

(36) $$sS'^2 = 8z(z-\beta) = 4z(\varrho' - r),$$

$$sS''^2 = 8z(z-\gamma) = 4z(\varrho'' - r).$$

Niech Y będzie drugi punkt w którym liniia prosta S″S′ przecina się z okręgiem koła opisanego na tróykącie ABC. Ponieważ kąt ZAY iest prosty, liniia prosta ZY będzie średnicą koła ABC, to iest: punkt Y będzie na przedłużeniu promienia ZO. Jeżeli zatém poprowadzimy cięciwę BY, kąt ABY będzie równy kątowi AZY który się równa kątowi ASO′ to iest kątowi $\frac{1}{2}(B-C)$; a następnie kąt $S'BY = S'BA + ABY = 90^\circ - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}(B-C) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$: aże także kąt $YS''B = YAS - S''SA = YAS - BCS'' = 90^\circ - \frac{1}{2}C$; więc kąt $S''BY = YS''B$, a dla tego $BY = S''Y$. Ponieważ znowu dwie liniie proste S″S′, E″E′, przecięte są od liniy równoległych E″S″, A′Y i E′S′, będzie $S''Y : YS' = E''A' : AE'$; a iako $E''A' = A'E'$, tak też

$S''Y = YS'$. Będzie zatém $BY = \frac{1}{2}S'S''$. Uważaiąc teraz, że $BY^2 = YZ \times YA' = YZ(YO + OA') = 2z(z+\alpha)$, i biorąc prócz tego na uwagę równania (27'''), otrzymamy

$$
\begin{aligned}
& S'S''^2 = 8z(z+\alpha) = 4z(\varrho' + \varrho''),\\
(37) \qquad & S''S^2 = 8z(z+\beta) = 4z(\varrho'' + \varrho),\\
& SS'^2 = 8z(z+\gamma) = 4z(\varrho + \varrho').
\end{aligned}
$$

Gdy ieden z kątów tròykąta ABC będzie rozwarty, natenczas tę z pomiędzy prostopadłych α, β, γ, która iest spuszczona do boku przeciwnego kątowi rozwartemu, należy w ròwnaniach (36) i (37) wziąć ze znakiem przeciwnym.

Z ròwnań (36) i (37) wypada

$$sS^2 + S'S''^2 = sS'^2 + S''S^2 = sS''^2 + SS'^2 = 16z^2,$$

co też można było wnieść prosto z figury, uważaiąc, iż w tróykącie prostokątnym ZBY, $BZ^2 + BY^2 = YZ^2$.

Będzie także

$$R : \mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A = 4z : sS, \quad R : \mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A = 4z : S'S''.$$

Obaczmy ieszcże iak się wyrażaią odległości środków s, S, S′ i S″ od wierzchołków tróykąta ABC, za pomocą boków tegoż tróykąta.

$$AD : Ad = AS : As,$$

$$AD : Ad = As \times AS : As^2,$$

$$AD : Ad = AC \times AB : As^2;$$

będzie więc

$$As^2 = \frac{p-a}{p} bc, \quad Bs^2 = \frac{p-b}{p} ac, \quad Cs^2 = \frac{p-c}{p} ab.$$

Znaydziemy podobnież

$$AS^2 = \frac{p}{p-a} bc, \quad BS'^2 = \frac{p}{p-b} ac, \quad CS''^2 = \frac{p}{p-c} ab.$$

Ponieważ znowu kąt BS″s iest równy kątowi BAs, iako kąty będące w tym samym odcinku koła mogącego się opisać na czworokącie AS″Bs, i podobnież kąt BCs=BSs, będzie tróykąt ABS podobny tróykątowi S″BC, a dla tego BS : BC=AB : BS″. Z tey proporcyi wypada

$$BS \times BS'' = BC \times AB:$$

aże w dwóch tróykątach podobnych S″BE″ i SBE

$$BE'' : BE = BS'' : BS,$$

$$BE'' : BE = BS \times BS'' : BS^2;$$

więc $$BE'' : BE = BC \times AB : BS^2,$$

$$BS^2 = \frac{p-c}{p-a} ac, \quad CS^2 = \frac{p-b}{p-a} ab.$$

Wyprowadzone dopiero wyrażenie kwadratu linii BS otrzymalibyśmy także, podnosząc do kwadratu wszystkie wyrazy proporcyi wstBSD$:R=$BD$:$BS, to iest

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}B : R = p-c : BS,$$

i uważaiąc, iż na mocy twierdzenia (5)

$$\text{wst}^2\tfrac{1}{2}B : R^2 = (p-a)(p-c) : ac.$$

Z wyrażeń poprzedzaiących wypada

$$\frac{As^2}{bc} + \frac{Bs^2}{ac} + \frac{Cs^2}{ab} = 1,$$

$$\frac{bc}{AS^2} + \frac{ac}{BS'^2} + \frac{ab}{CS''^2} = 1,$$

$$\frac{AS^2}{bc} - \frac{BS^2}{ac} - \frac{CS^2}{ab} = 1.$$

21. Będziemy teraz szukali wyrażeń na linie Os, OS, OS' i OS''.

W tróykącie OsZ spuściwszy z wierzchołka s do boku OZ prostopadłą sP, będzie

$$Os^2 = OZ^2 + Zs^2 - 2OZ \times ZP$$
$$= OZ^2 + Zs^2 - 2\,OZ(A'Z + se),$$

a ponieważ

$$Zs^2 = BZ^2 = 2OZ \times A'Z,$$

więc

$$Os^2 = OZ^2 - 2OZ \times se,$$

czyli

(38) $$Os^2 = z(z - 2r).$$

To iest: odległość środka koła wpisanego w tróykąt, od środka koła opisanego na tymże tróykącie, iest średnią geometrycznie proporcyonalną między promieniem koła opisanego, i między różnicą tegoż promienia od średnicy koła wpisanego w tróykąt.

Jeżeli podobnież z punktu S do boku OZ przedłużonego spuścimy prostopadłą SG, będzie

$$OS^2 = OZ^2 + ZS^2 + 2OZ \times GZ:$$

aże $ZS^2 = BZ^2 = 2OZ \times A'Z$, $GZ = SE - A'Z$;

więc

$$OS^2 = OZ^2 + 2OZ \times A'Z + 2OZ(SE - A'Z)$$
$$= OZ^2 + 2OZ \times SE,$$

czyli

(39) $$OS^2 = z(z+2\varrho),\ OS'^2 = z(z+2\varrho'),$$
$$OS''^2 = z(z+2\varrho'').$$

To iest: odległość środka koła opisanego na tróykącie, od środka koła przypisanego do tegoż tróykąta, iest średnią geometrycznie proporcyonalną między promieniem koła opisanego, i między summą złożoną z tegoż promienia i z średnicy koła przypisanego.

Położywszy w równaniach (38) i (39) zamiast promieni r, ϱ, ϱ', ϱ'' i z, wartości tych liniy wzięte z równań (17) i (18), czyli

$$z = \frac{abc}{4\Delta},\ r = \frac{\Delta}{p},\ \varrho = \frac{\Delta}{p-a},\varrho' = \frac{\Delta}{p-b},\ \varrho'' = \frac{\Delta}{p-c},$$

otrzymamy

$$Os^2 = \frac{(abc)^2}{16\Delta^2} - \frac{abc}{2p},$$

(40) $$OS^2 = \frac{(abc)^2}{16\Delta^2} + \frac{abc}{2(p-a)},$$

$$OS'^2 = \frac{(abc)^2}{16\Delta^2} + \frac{abc}{2(p-b)},$$

$$OS''^2 = \frac{(abc)^2}{16\Delta^2} + \frac{abc}{2(p-c)},$$

gdzie $\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Dodaiąc zaś też same równania (38) i (39), i maiąc na uwadze równanie (25), wypada

$$Os^2 + OS^2 + OS'^2 + OS''^2 = 12z^2$$

22. Można także łatwo, iak to uważa *Lhuilier*, wyznaczyć tróykąt ABC, maiąc dane promienie trzech kół przypisanych do tegoż tróykąta. Jakoż w tróykątach podobnych SBD, BS'E'(Fig. 1.), SD : BE' = BD : S'E'; zkąd wypada SD×S'E' = BE'×BD, to iest

$$\varrho\varrho' = p(p-c).$$

Dla tey samey przyczyny będzie

$$\varrho\varrho'' = p(p-b),\ \varrho'\varrho'' = p(p-a).$$

Wyciągaiąc z tych równań wartość na $\frac{1}{p}$, i uważaiąc, że gdy iest ilekolwiek stosunków równych, summa poprzedników tak się ma do summy następników, iak którykolwiek poprzednik do swoiego następnika, otrzymamy

$$\frac{p-c}{\varrho\varrho'}=\frac{p-b}{\varrho\varrho''}=\frac{p-a}{\varrho'\varrho''}$$

$$=\frac{a}{\varrho\varrho'+\varrho\varrho''}=\frac{b}{\varrho\varrho'+\varrho'\varrho''}=\frac{c}{\varrho\varrho''+\varrho'\varrho''}$$

$$=\frac{p}{\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho''}=\frac{1}{p},$$

a następnie

$$p=\sqrt{(\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho'')},$$

$$a=\frac{\varrho(\varrho'+\varrho'')}{\sqrt{(\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho'')}},$$

$$b=\frac{\varrho'(\varrho+\varrho'')}{\sqrt{(\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho'')}},$$

$$c=\frac{\varrho''(\varrho+\varrho')}{\sqrt{(\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho'')}}.$$

Jeżeli teraz obie strony równania $\varrho'\varrho''=p(p-a)$ rozmnożymy przez ϱ, i będziemy uważali, iż na mocy proporcyi $sd:SD=Ad:AD$, iloczyn $\varrho(p-a)=pr$; wypadnie

$$p^2r=\varrho\varrho'\varrho''.$$

Kładąc w tém równaniu zamiast p wartość powyżey znalezioną, otrzymamy między promieniami r, ϱ, ϱ' i ϱ'' związek następuiący:

$$r\varrho\varrho'+r\varrho\varrho''+r\varrho'\varrho''-\varrho\varrho'\varrho''=0,$$

czyli

$$r=\frac{\varrho\varrho'\varrho''}{\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho''}.$$

Dzieląc zaś obie strony tego samego równania przez p, i uważaiąc, że $pr=\Delta$, znaydziemy

$$\Delta=\frac{\varrho\varrho'\varrho''}{\sqrt{(\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho'')}}.$$

Gdybyśmy obie strony równania $p^2r=\varrho\varrho'\varrho''$ rozmnożyli przez r, a potém wyciągnęli pierwiastek, znaleźlibyśmy

(41) $$\Delta=\sqrt{(r\varrho\varrho'\varrho'')}.$$

To iest: powierzchnia tróykąta równa się pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu cztérech czynników, z których ieden iest promieniem koła w tróykąt wpisanego, a trzy pozostałe są promieniami kół przypisanych do tegoż tróykąta.

Ponieważ znowu $\operatorname{sty}\frac{1}{2}A : R = \varrho : p$, będzie

$$\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}A}{\varrho}=\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}B}{\varrho'}=\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}C}{\varrho''}=\frac{R}{\sqrt{(\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho'')}}.$$

Znaydziemy także łatwo wstawy kątów, uważaiąc, iż $\frac{\text{wst}A}{R}=\frac{2\Delta}{bc}$; z czego wypływa

$$\frac{\text{wst}A}{R}=\frac{2\varrho\sqrt{(\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho'')}}{(\varrho+\varrho')(\varrho+\varrho'')}$$

Szukaiąc nakoniec promienia koła na tróykącie opisanego, otrzymamy równanie

$$z=\frac{(\varrho+\varrho')(\varrho+\varrho'')(\varrho'+\varrho'')}{4(\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho'')}.$$

Za pomocą wyrażeń poprzedzaiących, i tych które się w powyższych artykułach podały, znaydziemy bez trudności liniie $S'S''$, Ss, i t. d., maiąc dane ϱ, ϱ' i ϱ''; mianowicie zaś

$$S'S''=(\varrho'+\varrho'')\sqrt{\frac{(\varrho+\varrho')(\varrho+\varrho'')}{\varrho\varrho'+\varrho\varrho''+\varrho'\varrho''}}.$$

23. Składaiąc proporcyą

(33) $sS : b-c=R : \text{wst}\tfrac{1}{2}(B-C)$

z proporcyą (32), albo, co na to samo wypada, z następuiącą:

$$a : sS = \text{wst}\tfrac{1}{2}(B+C) : R,$$

otrzymuiemy proporcyą

(42) $a : b-c = \text{wst}\tfrac{1}{2}(B+C) : \text{wst}\tfrac{1}{2}(B-C).$

To iest: w każdym tròykącie bok którykolwiek tak się ma do różnicy dwóch innych boków, iak wstawa połowy summy kątów tym dwom bokom przeciwnych, do wstawy połowy ich różnicy.

Składaiąc znowu proporcyą

(35) $S'S'' : b+c = R : \text{dos}\tfrac{1}{2}(B-C)$

z proporcyą

(34) $a : S'S'' = \text{dos}\tfrac{1}{2}(B+C) : R,$

wypada

(43) $a : b+c = \text{dos}\tfrac{1}{2}(B+C) : \text{dos}\tfrac{1}{2}(B-C).$

To iest: w każdym tróykącie bok ktòrykolwiek tak się ma do summy dwóch boków pozostałych, iak dostawa połowy summy kątów tym dwom bokom przeciwnych, do dostawy połowy różnicy tychże samych dwóch kątòw.

Jeżeli teraz wyrazy odpowiadaiące proporcyy (42) i (43) raz podzielimy, drugi raz rozmnożymy przez siebie, otrzymamy proporcye

(44) $b+c : b-c = \text{sty}\frac{1}{2}(B+C) : \text{sty}\frac{1}{2}(B-C)$,

(45) $a^2 : b^2-c^2 = \text{wst}A : \text{wst}(B-C)$.

Wreszcie proporcyą (44) możnaby ieszcze z figury 1. wyprowadzić takim sposobem. Spuśćmy z punktu Z do linii AD prostopadłą ZV. W tròykątach prostokątnych AZV, sSK, będzie

$$2\text{AV} : 2\text{VZ} = \text{sty}\,\text{AZV} : R,$$

$$\text{SK} : \text{K}s = R : \text{sty}\, s\text{SK}:$$

aże $\text{SK} = \text{SE} + es = \text{SD} + sd = 2\text{VZ}$, gdyż $\text{S}s = 2\text{Z}s$; więc $2\text{AV} : \text{K}s = \text{sty}\,\text{AZV} : \text{sty}\, s\text{SK}$.

Ponieważ znowu $\text{AV} = \text{A}d + d\text{V} = \text{A}d + \frac{1}{2}\text{D}d = \text{E}''\text{B} + \text{BA}' = \text{E}''\text{A}' = \frac{1}{2}\text{E}''\text{E}' = \frac{1}{2}(b+c)$, $\text{K}s = b-c$, $\text{AZV} = 90^\circ - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(B+C)$, $s\text{SK} = \frac{1}{2}(B-C)$; przeto proporcya powyższa zamieni się na proporcyą (44).

Wszystkie trzy proporcye (42), (43) i (44) dowodzą się prościey przez wykréślenie następuiące. Niech będzie (Fig. 4.) tróykąt ABC, w którym AC>AB. Z punktu A na boku AC i na iego przedłużeniu odetniey-my dwie liniie AH, AK, z którychby każda była równa bokowi AB, i poprowadźmy liniie BH, KB, a do linii KB przedłużoney spuśćmy prostopadłą CL. Kąt zewnętrzny BAK=ABC + ACB=ABH+AHB=2ABH; więc kąt ABH=$\frac{1}{2}$(ABC+ACB)=$\frac{1}{2}(B+C)$, a tém samém pozostały kąt HBC=$\frac{1}{2}(B-C)$. Ponieważ znowu kąt HBK iest prosty iako w półkolu, będzie liniia prosta CL równoodległa od linii HB, a dla tego kąt LCK=BHK=ABH =$\frac{1}{2}(B+C)$, kąt zaś LCB=HBC=$\frac{1}{2}(B-C)$, nadto CK : CH=KL : BL, to iest

AC+AB : AC-AB=KL : BL,

gdyż CK=AC+AK=AC+AB, a CH =AC-AH=AC-AB. W tróykątach prostokątnych KLC, BLC,

KL : CL=styLCK : R,

CL : BL=R : styLCB;

zkąd wypada

$$KL : BL = \mathrm{sty} LCK : \mathrm{sty} LCB,$$

to iest $KL : BL = \mathrm{sty} \tfrac{1}{2}(B+C) : \mathrm{sty} \tfrac{1}{2}(B-C)$.

Proporcya zatém powyższa zamieni się w następuiącą:

(44) $AC+AB : AC-AB = \mathrm{sty} \tfrac{1}{2}(B+C) : \mathrm{sty} \tfrac{1}{2}(B-C)$.

2re. $BC : CK = \mathrm{wst} K : \mathrm{wst} CBK$,

aże $CK = AC+AB$, $\mathrm{wst} K = \mathrm{dos} KHB = \mathrm{dos} \tfrac{1}{2}(B+C)$,

a $\mathrm{wst} CBK = \mathrm{wst} CBL = \mathrm{dos} LCB = \mathrm{dos} \tfrac{1}{2}(B-C)$,

więc $BC : AC+AB = \mathrm{dos} \tfrac{1}{2}(B+C) : \mathrm{dos} \tfrac{1}{2}(B-C)$.

3cie. $BC : CH = \mathrm{wst} BHC : \mathrm{wst} HBC$,

że zaś $CH = AC-AB$, $BHC = 180° - \tfrac{1}{2}(B+C)$,

$HBC = \tfrac{1}{2}(B-C)$, więc

$$BC : AC-AB = \mathrm{wst} \tfrac{1}{2}(B+C) : \mathrm{wst} \tfrac{1}{2}(B-C).$$

Podobnymże sposobem można dowieśdź proporcyi (45). Jakoż niech będzie tróykąt ABC (Fig. 5.), w którym $AB < AC$. Z punktu A iako ze środka promieniem AB nakréślmy koło, którego okrąg przetnie się z bokiem BC lub iego przedłużeniem w punkcie b, z bokiem AC w punkcie H, z przedłużeniem zaś boku AC w punkcie K. Z punktów B i b spuśćmy do boku AC prostopadłe BQ, bq, i poprowadźmy Ab. Ponieważ liniie BQ, bq, są wstawami kątów BAC, bAC, w kole z promienia AB, będzie $BQ : bq = \text{wst}\, BAC : \text{wst}\, bAC$; że zaś $BQ : bq = BC : bC = BC^2 : BC \times bC$, więc $BC^2 : BC \times bC = \text{wst} BAC : \text{wst}\, bAC$. Uważaiąc teraz, że $BC \times bC = CK \times CH = (AC + AB)(AC - AB)$, a kąt bAC, iako będący różnicą między kątem zewnętrznym przy punkcie b, a kątem ACb, iest $= ABC - ACb$; proporcya poprzedzaiąca zamieni się na

$$BC^2 : AC^2 - AB^2 = \text{wst} A : \text{wst}(B - C).$$

Stosuiąc twierdzenie wyrażone przez proporcyą (44) do tróykąta BCK (Fig. 4.), będzie

$$CK + BC : CK - BC = \text{dot}\tfrac{1}{2} BCK : \text{sty}\tfrac{1}{2}(CBK - BKC);$$

a ponieważ

$$CK = AC + AB,\ CBK - BKC = CBK - ABK = ABC;$$

więc

$AC+AB+BC:AC+AB-BC=\text{dot}\frac{1}{2}BCA:\text{sty}\frac{1}{2}ABC$.
Jestto tenże sam związek, który wyraża proporcya (7). Wzaiemnie także, skoro się pierwey dowiodło związku (7) bez pomocy twierdzenia (44), można łatwo od tegoż związku przeyść do twierdzenia (44). Jakoż w tróykącie ABC, na boku BC i przy punkcie B zróbmy kąt równy kątowi ACB, i drugie ramię tak zrobionego kąta przedłużmy aż do przecięcia się z bokiem AC w punkcie G. Stosuiąc proporcyą poprzedzaiącą do tróykąta ABG, będzie
$AG+GB+AB:AG+GB-AB=\text{dot}\frac{1}{2}A:\text{sty}\frac{1}{2}ABG$,
aże $AG+GB=AG+GC=AC$, a kąt $ABG=ABC-CBG=ABC-ACB$, przeto proporcya dopiero wyrażona zamieni się na proporcyą (44).

Gdybyśmy znowu twierdzenie wyrażone przez proporcyą (44) przystosowali do tróykąta BCH, otrzymalibyśmy proporcyą $a+b-c:a-(b-c)=\text{dot}\frac{1}{2}C:\text{dot}\frac{1}{2}B$, która wyraża ten sam związek co równania (10).

Tu się może ieszcze przytoczyć uwaga zrobiona przez *Wallace*, że gdy będzie dany do rozwiązania tróykąt prostokréślny ABC, w którym będą wiadome dwa boki b, c, i kąt między niemi zawarty A, natenczas wynalazłszy naprzód kąty B i C przez proporcyą (44), zamiast potém szukać boku trzeciego a przez pierwszą lub drugą z dwóch proporcyy

(15) $\text{wst}B:\text{wst}A=b:a$, $\text{wst}C:\text{wst}A=c:a$,

można tenże bok wynaleźć przez proporcyą (42) lub (43). Dla sprawdzenia zaś szukaney wartości, należy raczey użyć obu proporcyy (42) i (43) iedney po drugiey, niż powtarzać działania na iedney. Używaiąc proporcyy (15), potrzeba tablice logarytmów roztwierać cztéry razy; roztwieramy ie zaś tylko trzy razy, używaiąc proporcyi (42) lub (43).

24. Proporcye poprzedzaiące wraz z ró-

wnaniami (4), (5) i (6), mogą się także wyciągnąć z proporcyy (15), za pomocą wzorów, przez które się summy i różnice wstaw i dostaw przerabiaią na iloczyny tych liniy. Przerobienia przez które się tym sposobem wyprowadza proporcya (44), są powszechnie wiadome; podamy więc tutay wyprowadzenie reszty tylko proporcyy, iako mniey znane. A naprzód rozumie się, że proporcye (15) należy w tym razie wyprowadzić sposobem różnym od podanego wyżey (art. 10.). Na ten koniec dosyć będzie naprzykład uważać, iż według proporcyi (51), $\text{wst}A : R = a : 2z$; $\text{wst}B : R = b : 2z$, i $\text{wst}C : R = c : 2z$; zkąd wypada

$$(15) \qquad \frac{a}{\text{wst}A} = \frac{b}{\text{wst}B} = \frac{c}{\text{wst}C}.$$

Z równań (15) wypływa bezpośrednio

$$16d \qquad \frac{a}{b-c} = \frac{\text{wst}A}{\text{wst}B - \text{wst}C} = \frac{\text{wst}(B+C)}{\text{wst}B - \text{wst}C}$$

$$= \frac{2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{dos}\tfrac{1}{2}(B+C)}{2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(B-C)\,\text{dos}\tfrac{1}{2}(B+C)},$$

to iest:

$$\frac{a}{b-c}=\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(B+C)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}(B-C)}.$$

2re

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\text{wst}A}{\text{wst}B+\text{wst}C}=\frac{\text{wst}(B+C)}{\text{wst}B+\text{wst}C}$$

$$=\frac{2\text{wst}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{dos}\tfrac{1}{2}(B+C)}{2\text{wst}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{dos}\tfrac{1}{2}(B-C)},$$

to iest:

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\text{dos}\tfrac{1}{2}(B+C)}{\text{dos}\tfrac{1}{2}(B-C)}.$$

Podobneż przerobienia prowadzą do równań (4) i (5): albo, postępuiąc tak iak robi *Cauchy* (Analyse algébr. p. 436.), zamieńmy w równaniu (23), u, v i w na $\tfrac{1}{2}u$, $\tfrac{1}{2}v$ i $\tfrac{1}{2}w$, a potém położmy

$$(\alpha)\qquad u+v+w=180°;$$

wypadnie ztąd od razu

$$(\beta)\quad \frac{4}{R^2}\text{dos}\tfrac{1}{2}u\,\text{dos}\tfrac{1}{2}v\,\text{dos}\tfrac{1}{2}w=\text{wst}\,u+\text{wst}\,v+\text{wst}\,w.$$

Ponieważ zaś równanie (α) nie psuie się, gdy w niém zamiast dwóch którychkolwiek kątów weźmiemy ich spełnienia do 180°, a odmienimy znak kąta trzeciego; więc zrobiwszy to samo w równaniu (β), wypadną ztąd trzy inne równania, w których, tak iako i w równaniu (β) zamieniwszy u, v i w na A, B i C, otrzymamy

$$(\gamma)\quad\begin{cases}
\frac{4}{R^2}\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C=\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C,\\
\frac{4}{R^2}\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B=\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C-\mathrm{wst}A,\\
\frac{4}{R^2}\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C=\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}C-\mathrm{wst}B,\\
\frac{4}{R^2}\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C=\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B-\mathrm{wst}C.
\end{cases}$$

Mnożąc teraz równania (γ), pierwsze przez drugie, a trzecie przez czwarte, wypadaią wzory

$$\frac{\mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}A}{R^2}=\frac{(\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C)(\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C-\mathrm{wst}A)}{4\,\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}$$

$$\frac{\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A}{R^2}=\frac{(\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}C-\mathrm{wst}B)(\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B-\mathrm{wst}C)}{4\,\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}$$

które na mocy proporcyy (15) zamieniaią się od razu na

$$\frac{\text{dos}^2\frac{1}{2}A}{R^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc},$$

$$\frac{\text{wst}^2\frac{1}{2}A}{R^2} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc};$$

zkąd wypływa

$$\frac{\text{sty}^2\frac{1}{2}A}{R^2} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}.$$

Dzieląc znowu równania (γ), pierwsze naprzykład przez czwarte, a trzecie przez drugie, i maiąc wzgląd na proporcye (15), otrzymamy

$$\frac{\text{dot}\frac{1}{2}A}{\text{sty}\frac{1}{2}B} = \frac{a+b+c}{a+b-c}, \quad \frac{\text{sty}\frac{1}{2}A}{\text{sty}\frac{1}{2}B} = \frac{a+c-b}{b+c-a}.$$

25. Podzielmy kąt BAC (Fig. 4.) na dwie części równe liniią prostą, którą przedłużmy aż do przecięcia się z bokiem przeciwnym tróykąta BAC w punkcie M. Liniia AM iest równoodległa od linii BK, a dla tego będzie CK : CA=KB : AM; zkąd wypada KB×CA =CK×AM.

Lecz ieżeli w tróykącie równoramiennym BAK spuścimy z wierzchołka A liniią prostopadłą do podstawy BK, będzie R: dos ABK $=$ AB : $\frac{1}{2}$KB, a tém samém

$$R : 2\text{dos}\,ABK = AB\times CA : KB\times CA;$$

więc

$$R : 2\text{dos}\,ABK = AB\times CA : CK\times AM,$$

to iest:

(46) $\quad R : 2\text{dos}\tfrac{1}{2}A = bc : (b+c)x$,

kładąc dla skrócenia AM $= x$.

Z proporcyi (46) wypływa

$$x = \frac{2bc\,\text{dos}\frac{1}{2}A}{R(b+c)} = \frac{2bc}{b+c} - \frac{4bc\,\text{wst}^2\frac{1}{4}A}{R^2(b+c)},$$

gdyż $\dfrac{\text{dos}\frac{1}{2}A}{R} = 1 - \dfrac{2\,\text{wst}^2\frac{1}{4}A}{R^2}$: a ponieważ $bc = \frac{1}{4}(b+c)^2 - \frac{1}{4}(b-c)^2$, więc będzie ieszcze

$$x = \tfrac{1}{2}(b+c) - \frac{R(b-c)^2 + 8bc\,\text{wst}^2\frac{1}{4}A}{2R^2(b+c)}.$$

Ztąd się okazuie, że $x < \frac{1}{2}(b+c)$, to iest: liniia dzieląca kąt tróykąta na dwie części równe, a zakończona z iedney strony na wierzchołku kąta, z drugiey zaś na boku przeciwnym temuż kątowi, iest zawsze mnieysza od połowy summy dwóch boków tróykąta kąt podzielony zawieraiących. Równanie poprzedzaiące daie nadto wartość różnicy $\frac{1}{2}(b+c)-x$, gdy będą dane dwa boki b i c i kąt między niemi zawarty. Jnne wyrażenie różnicy $\frac{1}{2}(b+c)-x$, do którego prócz boków b, c i kąta A, wchodzi ieszcze bok a i kąt AMB, podaie *Delambre* w dziele: *Histoire de l'Astronomie du moyen âge*, str. 461.

Ze $x<\frac{1}{2}(b+c)$, można łatwo i na figurze okazać. Jakoż niech będzie tróykąt ABC (Fig. 5.), w którym bok AC>AB, i niech liniia AM dzieli kąt BAC na dwie połowy. Przez punkt M poprowadźmy do linii AM prostopadłą, którą przedłużmy aż do przecięcia się z bokami AB, AC, w punktach E i F, a przez punkt F poprowadźmy liniią równoodległą od boku AB, i przedłużmy ią aż do przecięcia się z bokiem BC w punkcie

G. W dwóch tróykątach BEM, GFM, bok EM=MF, kąty przy punkcie M są równe i kąt BEM=MFG; dla czego tróykąt BEM przystanie do tróykąta GFM, a w szczególności bok BE=FG. Ponieważ znowu FC:FG=AC:AB, i założyło się że AC>AB, będzie téż FC>FG, a tém samém FC>BE: lecz AM<AE i AM<AF, a następnie 2AM<AE+AF; więc tym bardziey 2AM<AE-BE+AF+FC, to iest: 2AM<AB+AC, AM<$\frac{1}{2}$(AB+AC), co było do dowodzenia.

Na figurze 5. przypuściło się, że boki AB, AC, są nie równe. Gdyby boki AB, AC, były równe, natenczas liniia AM byłaby prostopadła do podstawy BC, a dla tego liniia AM byłaby mnieysza od każdego w szczególności z dwóch boków AB, AC, a następnie byłaby także mnieysza od połowy ich summy.

Liniia spuszczona z punktu A (Fig. 4.) prostopadle do BK dzieli kąt zewnętrzny BAK na dwie połowy. Przedłużywszy wspomnioną dopiero liniią aż do przecięcia się z bokiem CB przedłużonym w punkcie N, tróykąty CAN, CHB, będą podobne, a dla tego będzie CH : CA = BH : AN; zkąd wypada BH×CA = CH×AN. Ponieważ zaś $R : \text{wst}\tfrac{1}{2}A = \text{AB} : \tfrac{1}{2}\text{BH}$, a tém samém $R : 2\text{wst}\tfrac{1}{2}A = \text{AB}\times\text{CA} : \text{BH}\times\text{CA}$; więc $R : 2\text{wst}\tfrac{1}{2}A = \text{AB}\times\text{CA} : \text{CH}\times\text{AN}$, to iest

$$R : 2\text{wst}\tfrac{1}{2}A = bc : (b-c)y,$$

gdzie $y = \text{AN}$. Złożywszy proporcyą dopiero wyrażoną z proporcyą $4\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A : R^2 = a^2-(b-c)^2 : bc$ (równ. 5.), wypadnie

$$2\text{wst}\tfrac{1}{2}A : R = a^2-(b-c)^2 : (b-c)y.$$

Jeżeli podobnież złożymy proporcyą (46) z proporcyą $4\text{dos}^2\tfrac{1}{2}A : R^2 = (b+c)^2-a^2 : bc$ (równ. 4.), otrzymamy

$$2\text{dos}\tfrac{1}{2}A : R = (b+c)^2-a^2 : (b+c)x.$$

Można ieszcze uważać, że BM : CM = BN : CN; $x : y = \text{sty}\tfrac{1}{2}(B-C) : R$; a ieżeli oznaczymy przez M, M′, M″, te punkta, w których liniie As,

Bs, Cs (Fig. 1.) przedłużone, przecinaią się z bokami BC, CA, AB, będzie $Ms : As = a : b+c$; zkąd wypada $As : AM = b+c : 2p = AZ : AS$,

$$\frac{As}{AM} + \frac{Bs}{BM'} + \frac{Cs}{CM''} = 2.$$

26. Prawdy i uwagi dotąd wyłożone mogłyby się przystósować do rozwiązania różnych zagadnień, nad któremi atoli granice nineyszemu pismu zakréślone nie pozwalaią nam się teraz zastanawiać. Zakończymy przeto osnowę rzeczy krótką wiadomością historyczną o niektòrych prawdach wyżey podanych. A naprzòd wspomnieć należy, że prawdy i dowodzenia poprzedzaiące były po większey części przedmiotem rozprawy czytaney na posiedzeniu Towarzystwa Naukowego dnia 15. Maia 1823. r., którąm teraz na nowo przeyrzał i kilku uwagami pomnożył. Dowodzenie twierdzenia (6), wyprowadzone z takiego iak na figurze 1. rysunku znayduie się w Trygonometryi płaskiey Ro-

berta Simsona, którey przekład z języka angielskiego na polski iest umieszczony przy Początkach Geometryi Euklidesa przez *Czecha*, wydania drugiego. Czytaiąc wspomnioną dopiero Trygonometryą, uważałem, że z tego samego rysunku, z którego Robert Simson twierdzenie (6) wyciąga, wyprowadzaią się oraz i dwa twierdzenia (4) i (5). Postrzeżenie to, dla znaiących zkąd inąd wzory (4) i (5) iest tak łatwe, iż mi ztąd wnosić wypadało, że już od dawna było zrobione. Jakoż w dziele: Élémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique, appliquées à la recherche des lieux géométriques, par Simon Lhuilier, à Paris et à Genève, 4°, 1809., znalazłem dowodzenie syntetyczne wszystkich trzech twierdzeń (4), (5) i (6). To samo dowodzenie umieścił roku następnego w dziele swoiém J.-G. Garnier, przytaczaiąc dzieło Lhuiliera dopiero wspomnione. Pomimo tego, dowody syntetyczne twierdzeń (4) i (5) są zapewne mało znane, kiedy nawet ieden z uczonych Autorów naszych, w dziele swoiém 1821. r. napisał, że obie proporcye (4) i (5) przez algiebrę tylko mogą bydź wyprowadzone. Sądziłem więc, że podać tutay syntetyczne dowody wszystkich trzech twierdzeń (4), (5) i (6), nie będzie od rzeczy; wyłożyłem ie zaś prawie zupełnie tak, iak są w dziele powyżey przytoczoném Lhuiliera podane. Od iak dawnego czasu twierdzenia (4) (5) i (6), albo przynaymniey ich dowody syntetyczne są znane, nie wiem. Regiomontanus (a) w dziele De Triangulis planis et sphaericis libri V. (edyc. Bazyleyska r. 1541.), które iest iakoby skarbcem podań i zagadnień trygonometrycznych, częścią iego własnych, częścią za iego czasu wiadomych, nie podaie ieszcze (ieżeli sobie dobrze przypominam) żadnego

---

(a) Jan Müller od miasta Königsberg w dawney Frankonii, w którém się urodził, Regiomontanem nazwany, żył od r. 1436. do r. 1476.

z pomiędzy trzech twierdzeń o których mówimy. Lecz Willebrord Snellius w trygonometryi swoiey twierdzenie (6) wyraźnie podaie, przykładem obiaśnia, a względem dowodzenia tak pisze: "Demonstratio derivatur ex circulo in triangulum inscripto et areae triangularis inventione; puto sufficere si tantum id digito indicem, ne nimia varietate et periergia molestus sim" (b). W tém samém dziele, pomiędzy proporcyami na rozwiązanie tróykąta prostokreślnego, gdy są dane trzy boki, podaie także Snellius następuiącą. "Ut duplum rectangulum crurum, ad excessum quadrati basis supra quadratum differentiae crurum, ita sinus totus ad sinum versum anguli ab illis comprehensi". Proporcya ta iako iest bezpośrednim wnioskiem twierdzenia $\cos A : R = b^2 + c^2 - a^2 : 2bc$, które przypisuią Franciszkowi *Viète* (c), tak znowu krok tylko zro-

[g]

(b) Willebrordi Snellii Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor etc., Lugduni Batavorum 1627. str. 77-78.

(c) Ob. Dzieło Delambra powyżey przytoczone. Snellius biwszy, przychodzimy z teyże proporcyi do twierdzenia (5). Twierdzenie (6) iest także łatwym wnioskiem dwóch twierdzeń (7) i (10). Z resztą należy uważać, że wzory (4), (5) i (6) mało zapewne obchodziły tych autorów, którzy przed wynalezieniem logarytmów o trygonometryi pisali.

Dowodzenie syntetyczne twierdzenia (13), wyprowadzone z takiego iak na figurze 1. rysunku, winniśmy matematykom Jordanowi i Tartalei (d), iak o tém świadczy Piotr Ramus w dziele: Scholarum Mathematicarum libri unus et triginta, a Lazaro Schonero recogniti et aucti; Francofurti ad Moenum 1627 na stron. 313, gdzie oraz cały dowód Jordana i Tartalei przytacza. *Montucla* też w Historyi Matematyki (Tom II. edyc. pierwszey na stron. 462.) podaiąc wiadomość o

także, wykładaiąc twierdzenie o którém mówimy, tak pisze: proposuit Vieta, nos ita demonstramus.

(d) Jordanus Nemorarius żył na początku wieku 13 a według innych około r. 1032. Mikołay Tartalea (Tartaglia) umarł r. 1557 a według innych r. 1560.