NOUVEAU GENRE

D'ANALYSE

DANS LES

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

OU

DISCUSSION DE LA FORMULE:

$$F(a, \varphi, \psi) = x + y\sqrt{-1} + z \times \underline{-1}\Lambda$$

RADOM.

Typographie de J. Trzebiński.

1870.

NOUVEAU GENRE
D'ANALYSE
DANS LES
MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

par

A. Jean Walicki.

PROPRIÉTÉ DE L'AUTEUR.

VARSOVIE:
Michel Glücksberg, Libraire
Faubourg de Cracovie, 7.

PARIS:
Gauthier-Villars, Libraire
Quai des Augustins, 55.

LEIPZIG:
Ernest Keil, Libraire.

1870.

Дозволено Цензурою
Варшава 18 Февраля 1870 г.

Печатано въ Радомской Типографіи.

☞ Ceux des Messieurs les Lecteurs, qui auraient l'extrême bonté de commenter mon *Analyse*, sont instamment sollicités de vouloir bien me communiquer leur critique sous l'adresse que voici: A. Jean Walicki, à Radom, par Varsovie.

Quelque désagréable d'ailleurs que, le cas échéant, pourra être pour moi la teneur de ces avis et quelle que soit la forme sous laquelle *Messieurs les Commentateurs* daigneraient me faire respectivement parvenir leur opinion à ce sujet, — simple relation de lecture, extraits de rapports, articles insérés dans des Revues ou Journaux Scientifiques, — je leur en garderai, en toute occasion, une gratitude non simulée et je prends la liberté de leur en exprimer d'avance mes remercîments.

Tout exemplaire de la présente brochure qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur, sera réputé contrefait.

Errata.

Page:	Ligne:	Au lieu de:	Lisez:
5	15	[6.]	[4.]
14	13	$a \times \sqrt{-1}$	$a \times -\sqrt{-1}$
27	16	$, \alpha) + f\,(\frac{r}{s},$	$, \alpha) \times f\,(\frac{r}{s},$
27	25	$\frac{ab}{b}$	$\frac{ab}{a}$
27	28	$\frac{ab}{b}$	$\frac{ab}{a}$
27	31	$\frac{ab}{b}$	$\frac{ab}{a}$
31	26	avant, dernier	avant—dernier
33	10	a^n	a_n
49	33	$\alpha + b$	$\alpha + \beta$
52	31	d'un	du
54	21	$q \times \underline{-1}\,/\!\!1$	$t \times \underline{-1}\,/\!\!1$

PRÉFACE.

Le Nouveau de mon *Analyse* consiste dans les *équations des figures rectilignes*. Ces équations, j'ai cru devoir les appeler *Polaires*. Elles sont *implicites*, quant à leur forme: rien de plus simple cependant, que leur transformation en égalités numériques, lesquelles, à leur tour, étant convenablement transformées et discutées, répondent directement à toutes les questions posées.

Il en découle une méthode générale et uniforme pour *ramener* au calcul algébrique des théories que les Géomètres ne démontrent jusqu'à ce jour que par la voie des considérations essentiellement synthétiques. Considérez, par exemple, ma déduction du sinus $(\alpha \pm \beta)$ et cosinus $(\alpha \pm \beta)$: les formules cherchées étant obtenues moyennant une simple multiplication et sans le secours du tracé géométrique, vous conviendrez que je n'y ai aucun recours à la *Synthèse*. Il en est de même de maintes autres théories qui se rattachent aux figures rectilignes.

Le Propre de mes procédés est de faire un cours complet de Trigonométrie, sans qu'il y ait à cet effet quelque nécessité de recourir soit aux constructions graphiques, soit à des propositions de la Géométrie. Mon Chapitre III en fait foi: le peu que j'y ai dit sur cette matière suffira à M. M. les professeurs, qui voudraient bien adopter mon livre dans leur enseignement, d'exposer intégralement la Trigonométrie, moyennant un calcul particulier, où ne sont d'aucune utilité, ni les propositions relatives à la *similitude de triangles*, ni le théorème de *Pythagore*, ni tant d'autres principes qu'on invoque jusqu'ici subsidiairement.

Ma théorie est d' ailleurs tout élémentaire; les seules connaissances préalables qui la font asseoir sur des bases solides n'impliquent que *les deux premiers livres de la Géométrie* par Legendre, les *Eléments de l'Arithmétique et de l'Algèbre*, — y compris cependant la discussion complète des équations du second degré, — enfin la définition de la

Géométrie Analytique et l' idée générale des coordonnées rectangulaires et polaires. Vous voyez donc que, ni l' équation de la ligne droite, ni même la Trigonométrie Rectiligne n' entrent point dans le rang des notions qui servent de base à mon *Analyse*.

En offrant mon travail au public, j'ose lui promettre, que c'est en effet une *nouveauté* et qui n'a rien de commun avec les Traités: il ne s' y trouve de recueilli que mes propres méditations. Lisez Carnot, Scheffler, Żmurko, ou bien tout autre mathématicien qui ait écrit sur la même matière: vous verrez bien que je n'ai absolument rien emprunté à personne. Je tiens à insister là-dessus, car,—rien que pour présenter les parties des figures sous l' aspect de fonctions et pour établir l'addition de ces fonctions, — il m' a fallu plus de six mois de peines et des méditations suivies.

Je crois devoir consigner encore, que la brochure présente n' est que l 'avant-propos d 'un ouvrage beaucoup plus étendu, que je compléterai et publierai aussitôt que les circonstances me permettront de le faire, ouvrage intitulé „*Analyse de Position*" et dans lequel, pour établir mes théories, j' abrège les recherches en invoquant l' assistance du *Calcul différentiel et intégral*. J'en dis un mot dans l'Appendice à la brochure présente.

Radom (Royaume de Pologne), Janvier 1870.

A. Jean Walicki,

ancien élève du *Lycée Bonaparte*, à Paris, et de l'*Académie Technique* à Lemberg (Gallicie Autrichienne).

PROGRAMME.

PRÉLIMINAIRES.

APPENDICE.

§§ 76—80. Rayons vecteurs considérés dans l'espace — coamplitude—coracine de moins un— Quantités imaginaires du premier et du second ordre— leurs différentielles.

Note.

§ 81. Note relative à la quadrature du cercle.

PRÉLIMINAIRES.

§ 1. L'objet spécial de notre *Analyse* étant d'appliquer aux recherches géométriques les quantités appelées en Algèbre *imaginaires*, consignons tout d'abord les principes qui à cet effet nous seront d'une utilité constante:

Il est acquis de l'Algèbre qu'il n'y a pas de nombre qui, multiplié par lui—même, puisse donner un résultat négatif $-q^2$; $\sqrt{-q^2} = q\sqrt{-1}$ représente donc une opération impossible: c'est ce qui lui a fait donner le nom d'*Imaginaire.* Cependant en assujétissant les quantités, telles que $q\sqrt{-1}$, aux mêmes calculs que si elles étaient réelles, il vient

$$(\sqrt{-q})^2 = (\sqrt{-q})(\sqrt{-q}) = -q \qquad [1.]$$

$$(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1 \qquad [2.]$$

$$-(q\sqrt{-1})^2 = (q\sqrt{-1})(-q\sqrt{-1}) = +q^2 \qquad [3.]$$

et si l'équation suivante a lieu

$$x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1} \qquad [6.] \quad [4]$$

il s'en suit nécessairement que

$$\left.\begin{array}{l} x = p \\ y = q \end{array}\right\} \qquad [5.]$$

Comme nous ferons un usage très fréquent de ce dernier principe, il y a lieu d'en faire la démonstration; soit donc donnée l'équation

$$x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1}$$

la transposition faite, il y vient

$$(x-p) = (q-y)\sqrt{-1} \qquad [6.]$$

et en élevant cette dernière équation au carré, il viendra

$$(x-p)^2 = (q-y)^2 \times -1$$

donc

$$(x-p)^2 = -(q-y)^2$$

ici une quantité sûrement positive est égalée à un nombre négatif; cela ne peut avoir lieu, à moins que

$$x - p = 0$$
$$q - y = 0$$

c'est — à — dire, à moins que

$$x = p$$
$$y = q$$

conditions indispensables pour que deux quantités imaginaires, telles que

$$x + y\sqrt{-1} \; \ldots \text{ et } \ldots \; p + q\sqrt{-1}$$

soient à même d'être égalées; ce que précisement nous nous sommes proposés d'indiquer.

Remarque. Si dans [6.] nous faisons passer le second membre dans le premier, il vient

$$(x-p) + (y-q)\sqrt{-1} = 0 \; \ldots\ldots \quad [7.]$$

Remarque. Dans le § 53, nous ferons voir que ce n'est pas seulement à la suite d'une simple convention que doivent avoir lieu les équations consignées ci-dessus sous les notations [1]—[7]. Ces équations, c'est par la voie d'un raisonnement irrécusable que nous les y établirons pour la seconde fois: il sera par là clair que les quantitées telles que $q\sqrt{-1}$ doivent nécessairement être assujeties aux mêmes règles de calcul que si elles étaient réelles.

§ 2. Consolidons maintenant par une démonstration directe un principe dont nous ferons une application non moins fréquente et lequel, au dire des auteurs, n'est pas du nombre de ceux qu'on puisse démontrer à priori; ce principe comporte sur l'usage des signes + et — pour indiquer des situations opposées dans la Géométrie Analytique:

Soit à cet effet donnée la relation

$$a = b - c$$

où a, b, c, sont les valeurs absolues des quantités considérées: dans la relation $a = b - c$, le nombre a sera évidemment positif si $c < b$; mais si $c > b$, alors a sera non moins évidemment négatif. L'idée du positif et du négatif dans les nombres se trouve donc ramenée à la considération des différences en fonction desquelles toute grandeur a est susceptible d'être exprimée.

Il en est de même en Géometrie; et effectivement, soit *(fig. 1.)* un arc $BA = \alpha$. S'agit — il de l'augmenter d'un arc $AC = \varphi$, où $\varphi < \alpha$, il viendra nécessairement arc $BAC = \alpha + \varphi$. S'agit — il, au contraire, de diminuer α de l'arc φ, il est palpable qu'alors certain arc $BD = \psi = \alpha - \varphi$; mais si dans cette soustraction nous supposons $\varphi > \alpha$, alors la différence $\alpha - \varphi$ sera nécessairement négative, égale conséquemment à un arc négatif, soit par exemple à $-\beta$, et l'extrémité M de l'arc soustrait tombera au—dessous de la droite OB; il y aura donc évidemment

$$\text{arc } BA - \text{arc } AM = \text{arc } BA - \text{arc } AB - \text{arc } BM =$$
$$= - \text{arc } BM = \alpha - \varphi = -\beta.$$

formule faisant clairement voir que *si pour positifs sont regardés les arcs et les angles comptés dans la direction BA, — la droite OB étant considérée comme fixe, — il faut nécessairement que soient négatifs les arcs et les angles comptés en sens inverse, c'est* — à — *dire dans la direction BM.*

Ainsi se trouve directement déduite une proposition assimilée communement à un principe ne dépendant que d'une simple convention. Il est facile d'ailleurs de saisir que, par la voie d'un raisonnement tout— à — fait analogue, on parviendrait fort aisement à démontrer la même proposition pour un système d'axes quelconques.

§ 3. Point de calcul algébrique possible, si les quantités considérées ne sont données et cherchées en nombres. Aussi, dans *les Figures Rectilignes*, — à l'analyse desquelles nous consacrons particulièrement notre brochure,— par les lettres de l'alphabet grec seront sousentendus les nombres de grades contenus dans les arcs qui respectivement servent de mesure aux angles, et par les *minuscules latines* nous comprendrons les rapports de droites à l'unité linéaire, *unité*, constante et déterminée, quant à sa longueur absolue, *mais unité*, dûment dans notre Analyse considéreé pour variable, quant à sa qualité générique,— direction,— direction comparée à celle d'une droite donnée comme fixe et appelée *base* au *axe polaire*. Ainsi pour faire entrer dans notre calcul une ligne quelconque BC, *(fig. 2.)* nous indiquerons préalablement par un signe de convention,— par la parenthèse,— qu'elle est conçue dans une direction autre que celle de la basse OX: si donc la ligne en question est égale, quant à sa longueur, à

$$BC = a \times 1 = a$$

nous prendrons l'unité en parenthèse et nous écrirons

$$(BC) = a\,(1), \quad \text{ou bien}$$

$$(BC) = (a)$$

pour faire voir par là que la longueur proposée a doit être considérée aussi sous le rapport de sa direction et que c'est précisement son coefficient tacite,— l'unité,— qui tout en n'altérant point sa grandeur, lui concède la qualité d'être conçue dans la direction qui lui est respectivement propre.

Etablissons bien ce principe— ci.

Prolongeons à cet effet BC en sorte que cette ligne vienne déterminer avec la base certain angle $BLO = \alpha$; au pôle O de la base OX, faisons l'angle $XOA = \alpha$ et prenons $OA = BC = a$: il en résultera un rayon vecteur (OA) lequel, par construction, sera égal à la droite (BC), égal sous le rapport et de la longueur et de la direction; par conséquent

$$(BC) = (OA) = a\,(1) = (a)$$

donc, *afin d'exprimer analytiquement une longueur définie $(a) = (BC)$, conçue dans certaine direction α, par rapport* à *une base donnée, il y a lieu:*

1° de considérer la base pour un axe polaire et d'y prendre à volonté un pôle fixe;

2° d'assimiler la droite proposée à un rayon vecteur, égal, quant à sa longueur absolue à $BC = a$, et faisant avec l'axe polaire l'angle α; enfin

3° de multiplier le nombre a par (1), où par (1) est évidemment à entendre certaine expression en fonction de α, expression susceptible de ne point altérer en dernière analyse la grandeur de la ligne proposée, bien que tous ses termes soient multipliés par a.

Cette expression en fonction du nombre de grades,— nombre α,— ou plutôt ce facteur, nous l'appellerons dorénavant *coefficient de direction*, ou, *coefficient vecteur*.

§ 4. Comme le principe que nous venons de poser est très important dans notre Analyse, nous croyons devoir l'établir d'une seconde manière:

A cet effet *(fig. 2)* à partir du pôle et dans la direction primitive de la base, portons l'unité linéaire

$$ON = \lambda = 1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, [1.]$$

et du pôle, comme centre, décrivons— en l'arc α. Supposons maintenant qu'il y ait une expression susceptible d'indiquer analytiquement que l'unité linéaire se trouve dans la direction OM. Cette expression,— qui est bien certainement une fonction de α,— désignons la pour le moment par le symbole (1), et convenons de prendre en parenthèse les expressions des longueurs *conçues* dans des directions *autres* que celle de la base: il viendra alors pour (OM):

$$(OM) = (1) \ldots\ldots [2.]$$

en multipliant cette dernière égalité par a, il vient visiblement

$$a\,(OM) = a\,(1) = (a) = (OA) = (BC)$$

égalité qui d'une seconde manière établit le principe en question et, en outre, fait voir que pour mettre en évidence la nature du coefficient vecteur, il faut diviser par a l'expression a (1) = (a), prise dans sa forme explicite, car il est manifeste qu'alors

$$\frac{a\,(1)}{a} = \frac{(a)}{a} = (1) \qquad [3]$$

§ 5. Soit *(fig. 2.)* DE parallèle à la base et égale, quant à sa longueur, à b unités linéaires. En multipliant par b la formule [1.] du § précédent, il vient

$$b.\,ON = b.\,1 = b. = OH = DE$$

égalité qui fait voir que pour exprimer analytiquement une ligne DE, parallèle à la base, il n'y a pas lieu de prendre en parenthése sa longueur b: le rayon vecteur, correspondant a DE, se trouve alors couché sur la base, conséquemment, son coefficient de direction est visiblement égal à l'unité, et pour indiquer la multiplication d'une quantité b par un facteur égal à l'unité, il est reçu de n'écrire que b pour $b \times 1$.

§ 6. Pour deux lignes *(fig. 2.)* telles que (BC), (FG), qui sont égales, quant à leurs longueurs, et parallèles, quant à leur position respective, il vient

$$(BC) = (FG) = (a)$$

car alors ces deux lignes font avec la base un même angle α, et sont toutes les deux assimilées au même rayon vecteur (OA) = (a).

§ 7. *Remarque.* Dans les expressions telles que OX, OA, BC, CB, ou bien, (OA), (BC), (CB), par les lettres, placées en premier lieu, nous marquerons toujours l'extrémité envisagée pour l'origine de la droite, et par les lettres, placées en second lieu, nous entendrons respectivement le point final des lignes considérées.

§ 8. Jusqu'ici ne nous est guère connue la nature des coefficients tels qui concèdent aux nombres multipliés par eux la propriété d'être conçus dans certaines directions: il se peut donc bien que ce coefficient ait $\sqrt{-1}$ pour facteur constant; mais ce que nous pouvons affirmer dès à présent, et pour cause, c'est que les expressions analytiques des rayons vecteurs couchés sur la base ne sauraient être de forme *imaginaire*, ces expressions, comme nous l'avons vu dans le § 5, ayant l'unité pour coefficient de direction.

CHAPITRE I.

Des Fonctions Polaires.

Formules Générales, Définitions.

§ 9. Proposons-nous la question de mettre en évidence la nature du coefficient vecteur.

A cet effet, comme nous l'avons vu dans le § 4, il suffit d'avoir la forme explicite de (OA) = (a) et de diviser cette expression par a. Cherchons donc cette expression, c'est — à — dire cherchons à résoudre le problème suivant:

Problème. *Soit donné un système de coordonnées polaires dont le pôle est pris dans l'origine et la base sur le côté positif des abscisses d'un système rectangle, également regardé comme donné: quelles sont les relations qui lient un rayon vecteur quelconque (OA) = (a) et les quantités* a, α, x, y, où a, α *et* x, y *sont, respectivement, les coordonnées polaires et rectangulaires du point A, qui, comme l'indique suffisamment l'expression (OA), est le point final du rayon vecteur proposé.*

Comme la valeur numérique de chacune des quantités a, α, x, y, dépend évidemment de la position de (OA), et que, réciproquement, (OA) varie avec a, α, aussi bien qu'avec x, y, en sorte, que l'on doit affirmer que la formule destinée à faire connaître (OA) = (a) devra nécessairement contenir des termes en fonction de a, α ou bien de x, y,— nous concluons que (OA) = (a) est fonction de a, α et de x, y; ce qui consigné conformément à la notation en usage, donne

$$(OA) = (a) = f(a, \alpha) \qquad [1.]$$
$$(OA) = (a) = \varphi(x, y) \qquad [2.]$$

relations générales, dont la transformation en égalités à forme explicite constitue *le fil d'Ariane* de notre Analyse.

§ 10. L'esprit de l'analyse, lequel est indépendant des valeurs particulières qu'on peut assigner aux quantités, nous autorise à égaler [1.] à [2.]; il vient donc

$$(OA) = (a) = f(a, \alpha) = \varphi(x, y) \qquad [3.]$$
$$f(a, \alpha) = \varphi(x, y) \qquad [4.]$$

relations qui montrent, que l'expression en fonction des coordonnées polaires doit être réduite à $\varphi(x, y)$, c'est— à—dire aux nombres indiquant certaines longueurs linéaires, ce qui revient nécessairement à faire rapporter la quantité angulaire α à la même unité que les lignes a, x, y. Cela présente une difficulté d'autant plus embarrassante que les relations implicites [1] — [4] ne peuvent à cet égard nous servir à rien: mettons—nous donc à rechercher la forme explicite des formules précitées.

§ 11. Prenons, à cet effet, les équations du point A, rapportées à notre système rectangulaire; soit donc

$$\left.\begin{array}{l} p = x \\ q = y \end{array}\right\} \quad [5]$$

où p et q peuvent désigner tout nombre réel dans les limites $\pm \infty$ Supposons maintenant que les membres correspondants des équations [5.] soient à tour de rôle combinés entre eux moyennant toutes les règles du calcul algébrique; il en sortirait évidemment pour résultats des équations à *deux variables*, équations, dont aucune d'elles ne serait capable de préciser la position du point proposé A. Il semblerait donc, à juste titre, qu'une équation à deux variables ne saurait être l'équation d'un point considéré isolemment.

Il n'en est pas ainsi cependant.

Et, en effet, si,— après avoir préalablement multiplié l'une quelconque des équations [5] par le facteur $\sqrt{-1}$,— nous additionnons leurs membres correspondants ou bien les soustrayons l'un de l'autre, il en résultera l'une de deux formules suivantes, à savoir:

$$\left.\begin{array}{l} p\sqrt{-1} + q = x\sqrt{-1} + y \\ p + q\sqrt{-1} = x + y\sqrt{-1} \end{array}\right\} \quad [6.]$$

où p, x et q, y peuvent désigner tout nombre réel dans les limites $\pm \infty$, et où chacune des équations [6],— conformement à notre § 1,— se partage nécessairement en deux autres, l'une entre les *réelles*, et l'autre entre les *imaginaires*, donnant fixement: $p = x$ et $q = y$; or $p = x$ et $q = y$, ce sont les équations du point proposé A; il semblerait donc, que chacune des équations [6], considérée séparement, soit l'équation du point A. Mais ce n'est guère possible, puisque dans ce cas il viendrait que

$$x\sqrt{-1} + y = x + y\sqrt{-1}$$

c'est— à— dire que pour un point quelconque A, nous aurions constamment $x = y$, ce qui ne peut avoir lieu. Nous en concluons donc, que l'une des équations [6] doit seulement être considérée comme l'équation du point A et que, quant à la seconde, on doit la rejetter sans restrictions.

Voilà donc acquis, que la position d'un point, considéré isolemment, est à même d'être précisée par une équation à deux variables, mais bien, sous la condition expresse, que l'une des deux variables, ainsi que sa valeur respective, soit présentée comme imaginaire.

§ 12. Quelle est, parmi les équations [6], celle qui'il convient de considérer fixement pour l'équation du point A, et quelle est, au contraire, celle qu'il faut écarter sans restriction, le raisonnement suivant nous le fera voir:

Si le point A n'était rapporté qu'à un système rectangle, la disposition symétrique des axes rectangulaires, à elle seule, prouve assez clairement qu'alors, pour l'équation du point proposé, on pourrait prendre l'une quelconque des équations [6], sous la condition expresse cependant, que la seconde équation, la restante, fût réputée pour illicitée; mais, outre le système rectangulaire, nous prenons aussi en considération un système polaire, conçu en sorte que le pôle est pris dans l'origine et la base sur le côté positif des abscisses de celui — là: si donc pour rapporter le point proposé à notre système rectangle nous choisissions l'équation $x\sqrt{-1} + y = p\sqrt{-1} + q$, en y faisant $y = q = 0$, il viendrait qu'une certaine abscisse $p\sqrt{-1}$ est *imaginaire* relativement à *l'axe des ordonnées* admis pour réel, afin de le distinguer de *l'axe des abscisses;* il y aurait donc

$$x\sqrt{-1} = p\sqrt{-1}$$

mais cela n'est guère possible, puisque $x\sqrt{-1}$ doit représenter aussi un rayon vecteur $OA = x = p$, lequel est alors couché sur la base et lequel, en vertu de notre § 8, ne saurait être *imaginaire*. Nous concluons donc que la formule $x\sqrt{-1} + y = p\sqrt{-1} + q$ est précisement celle qu'il convient d'imputer à faute et sans restrictions, et que c'est au contraire

$$x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1} \qquad [7.]$$

qu'il faut considérer dorénavant comme l'équation d'un point quelconque A.

§ 13. A l'effet de déterminer la position d'un point quelconque A, nous avons donc l'équation

$$x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1} \qquad [7.]$$

équation qui subsiste dès que sont données les coordonnées rectangulaires $x = p$ et $y = q$.

Comme, par la voie de la décomposition rélâtée dans le § 1, l'équation [7] est susceptible de passer immédiatement à l'état de deux identités, il convient,— dans le cas, où nous voudrions l'écrire sous forme implicite, — de n'en employer, pour exprimer l'idée de la dépendance, qu'une seule lettre, soit, par exemple, la lettre F, et présenter y, p comme imaginaires; ainsi donc

$$x + y\sqrt{-1} = F(x, y\sqrt{-1}) \qquad [8.]$$
$$p + q\sqrt{-1} = F(p, q\sqrt{-1}) \qquad [9.]$$
$$F(x, y\sqrt{-1}) = F(p, q\sqrt{-1}) \qquad [10.]$$

§ 14. Prenons maintenant notre rayon vecteur $(OA) = (a)$: les expressions [8], [9] et [10] en sont les fonctions, puisque chaque modification conçue dans (OA) entraîne nécessairement un changement de grandeur dans $F(x, y\sqrt{-1})$ ou dans $F(p, q\sqrt{-1})$; nous sommes donc autorisés à poser:

$$(OA) = (a) = F(x, y\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1} \qquad [11.]$$

ce qui comparé à la relation [1] du § 9, équation que voici

$$(OA) = (a) = f(a, \alpha)$$

nous fournit:

$$f(a, \alpha) = p + q\sqrt{-1} \qquad [12.]$$
$$(OA) = (a) = f(a, \alpha) = x + y\sqrt{-1} \qquad [13.]$$

relations fondamentales de notre Analyse, lesquelles font voir que la signification analytique du rayon vecteur (OA) est de déterminer la position du point précicé par l'équation $x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1}$ c'est — à — dire par les identités $x = p$ et $y = q$.

[?]

§ 15. En comparant [2] à [11], il vient

$$\varphi(x, y) = F(x, y\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1}$$

c'est à dire que, par $\varphi(x, y)$, il y a lieu, à l'avenir, d'entendre $F(x, y\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1}$.

§ 16. Si le point A se trouve au pôle, ou sur l'un des axes rectangulaires, alors, dans la formule [13], il y a lieu de faire, respectivement, $x = 0$ et $y = 0$, ou bien d'égaler à zéro l'une des coordonnées seulement: consignons cela par les cinq formules que voici

$$[14] \quad f(0, \alpha = 0) = 0$$

$$[15] \quad f(a, \alpha = 0) = a = x = a \times 1$$

$$[16] \quad f(a, \alpha = 90) = a\sqrt{-1} = y\sqrt{-1} = a \times \sqrt{-1}$$

$$[17] \quad f(a, \alpha = 180) = -a = -x = a \times -1$$

$$[18] \quad f(a, \alpha = 270) = -a\sqrt{-1} = -y\sqrt{-1} = a \times -\sqrt{-1}$$

§ 17. Dans les expressions de la forme $f(a, \alpha)$, le symbole a représente la longueur absolue du rayon vecteur proposé: on ne peut donc faire égaler a qu'aux nombres réels et positifs, dans les limites entre 0 et ∞, et par cela même, il demeure bien acquis qu'il ne saurait exister des rayons vecteurs qui soient *négatifs* ou *imaginaires*. Or, les relations [15]—[18], — relations qui sont de la même nature que $f(a, \alpha)$, — nous ont donné des résultats tels que $\pm a$ et aussi $\pm a\sqrt{-1}$, et par là ces résultats ont prouvé que $f(a, \alpha)$ est à même d'exprimer tout nombre *réel* et *imaginaire* dans les limites $\pm\infty$; il y a donc lieu de conclure que les facteurs placés au bout des égalités [15]—[18], — tels que 1, $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, — dépendent de la quantité angulaire α et sont, respectivement, les coefficients de direction pour les rayons vecteurs conçus dans les quatre directions des axes rectangulaires: s'il en était autrement, le rayon vecteur a, qui est toujours positif, de $+a$ ne saurait passer en $a\sqrt{-1}$, $-a$, $-a\sqrt{-1}$.

§ 18. Dans les expressions telles que $f(a, \alpha)$, nous appellerons dorénavant „*module*" le nombre a, indiquant la quantité des unités linéaires contenues dans le rayon vecteur. Il est visible que ce nombre n'est à même d'être ni négatif ni imaginaire. Par „*l'Amplitude*" nous entendrons l'arc servant de mesure à l'angle α, angle formé par le rayon vecteur avec l'axe polaire.

§ 19. On peut à volonté faire croître ou diminuer l'amplitude dans les limites $\pm \infty$, puisqu'il est permis de supposer que le rayon vecteur soit tourné indéfiniment dans l'un ou dans l'autre sens.

Nous convenons d'affecter du signe + les amplitudes comptées à partir de la base dans la direction de bas en haut de la figure géométrique; les amplitudes comptées dans le sens opposé seront, en vertu de notre § 2, calculées comme négatives.

§ 20. Comme les expressions telles que f (a, α), (OA), (a), sont exprimées en fonction des coordonnées polaires du point A, et qu'elles dépendent de ces quantités, nous croyons devoir leur imputer le nom générique de *Fonctions Polaires*.

§ 21. Pour un rayon vecteur quelconque (OA), la formule [13] nous donne la relation explicite

$$(OA) = x + y\sqrt{-1}$$

où x, y sont les coordonnées rectangulaires du point A. Or, pour résoudre complètement le problème de notre § 9, il y a lieu de déterminer encore la relation qui lie (OA) et les coordonnées polaires du point A; il nous reste donc à trouver la forme explicite de $(OA) = f(a, \alpha)$. Cette forme, nous la trouverons, mais ce n'est qu'au commencement du *Chapitre III* que nous serons à même de le faire: pour cet effet, il faut nous procurer d'abord des moyens, moyens dont jusqu'ici nous manquons, et à la recherche desquels, nous consacrons précisement le Chapitre qui vient,—*Chapitre II.*

CHAPITRE II.

Application des règles du calcul algébrique aux Fonctions Polaires.

§ 22. Toutes les règles du calcul sont uniquement déduites en Algèbre de la *Remarque* que les signes généraux y employés représentent des grandeurs susceptibles d'augmentation et de diminution; or, dans le Chapitre précédent, nous avons vu que f (a, α) exprime analytiquement des quantités géométriques susceptibles d'augmenter et de diminuer dans les limites $\pm \infty$; donc le génie du calcul algébrique est à même d'être appliqué à nos fonctions et, conséquemment, nous pouvons assujétir f (a, α) aux opérations de l'Algèbre: cherchons donc à représenter analytiquement et géométriquement les résultats des opérations algébriques effectuées sur nos fonctions polaires.

Addition.

§ 23. Soient données (*fig. 3*) à ajouter deux fonctions polaires formées d'après la formule [13] du Chapitre précédent; soit donc

$$(OA) = f(a, \alpha) = x_1 + y_1 \sqrt{-1}$$
$$(OB) = f(b, \beta) = x_2 + y_2 \sqrt{-1}$$

en additionnant les membres correspondants de ces équations, il vient

$$(OA) + (OB) = f(a, \alpha) + f(b, \beta) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \sqrt{-1}$$

posons y $\quad x_1 + x_2 = x_3$

$$y_1 + y_2 = y_3$$

il viendra

$$(OA) + (OB) = f(a, \alpha) + f(b, \beta) = x_3 + y_3 \sqrt{-1} \qquad [1.]$$

Examinons cette dernière formule.

Remarquons tout d'abord qu'en vertu du § 12, l'expression $x_3 + y_3\sqrt{-1}$ détermine la position d'un point C, dont les coordonnées rectangulaires sont

$$\text{l'abscisse } x_3 = x_1 + x_2$$
$$\text{l'ordonnée } y_3 = y_1 + y_2$$

Consignons cela sur la figure 3: faisons y OR $= x_3$ et l'ordonnée RC $= y_3$: le point C se trouve par cela même déterminé. Unissons ce point C avec le point A, moyennant la droite AC, et, par le point A, menons une parallèle à l'axe polaire; cette parallèle coupera nécessairement RC en N et viendra déterminer certain triangle rectangle ANC, égal au triangle OLB, puisque, par construction, OL $= x_2 =$ MR $=$ AN, et

$$LB = y_2 = NC$$

De l'égalité des deux triangles rectangles précités, il résulte que AC $=$ OB $=$ b, et angle NAC $=$ angle LOB $=$ amplitude β $=$ angle CFR. Comme les lignes AC et OB sont égales, quant à leur longueur, et que, toutes les deux, elles forment avec la base le même angle mesuré par l'amplitude β, il s'en suit, en vertu du § 6, que

$$(AC) = (OB)$$

donc, dans la formule [1] du § courant,— attendu que deux quantités égales peuvent être substituées l'une à l'autre,— nous pouvons poser (AC) à la place de (OB); il viendra alors

$$(OA) + (AC) = f(a, \alpha) + f(b, \beta) = x_3 + y_3 \sqrt{-1} \qquad [2]$$

Construisons maintenant le rayon vecteur (OC); soit c son module et γ son amplitude; comme, en outre, les coordonnées rectangulaires du point C nous sont connues, il vient pour (OC), conformément à la formule [13] du Chapitre précédent, la relation suivante, à savoir:

$$(OC) = f(c, \gamma) = x_3 + y_3 \sqrt{-1} \qquad [3]$$

Or, les relations [1], [2] et [3] ont, toutes les trois, dans leurs derniers membres, la même expression: $x_3 + y_3 \sqrt{-1}$; donc, on peut faire égaler leurs membres correspondants, attendu que deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles; il vient donc

$$(OA) + (OB) = (OA) + (AC) = (OC) \qquad [4.]$$

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) = f(c, \gamma) \qquad [5.]$$

d'où, pour l'addition de nos fonctions, l'on tire la règle suivante:

Afin de construire l'expression $f(a, \alpha) + f(b, \beta)$,— laquelle correspond à (OA) + (OB),— et en trouver la *Fonction Résultante*, il faut: *1° mener AS, parallèle à la base;— 2° sur cette parallèle, a partir du point A et dans la direction primitive de la base, porter AS=b;— 3° du point A, comme centre, et du segment AS, comme rayon, décrire un arc égal à l'amplitude β, égal, quant à la grandeur et quant au signe; enfin 4° la rotation faite, l'extrémité S du segment AS déterminera, sur le plan, la position de certain point C, point qu'il faut lier avec le pôle et avec le point A, moyennant les droites (OC) et (AC).*

Il en résultera:

1° *Une ligne brisée (OA)+(AC) qui représentera graphiquement l'addition des fonctions polaires proposées, lesquelles nous nommerons Fonctions Composantes;* enfin

2° *Le rayon vecteur (OC) et sa fonction polaire f (c, γ) qui, respectivement, représentent géométriquement et analytiquement la Fonction Résultante cherchée.*

§ 24. Tirez BC *(fig. 3)*; il est visible qu'il en résultera un parallélogramme construit sur les *Fonctions composantes*, parallélogramme dont la diagonale (OC) détermine le module et l'amplitude de la *Fonction Résultante* cherchée dans le § précédent. De plus, comme (OA) = (BC), il vient

$$(OB) + (OA) = (OB) + (BC) = (OC) \qquad [6]$$

ce qui étant comparé à [5] donne

$$(OA)+(OB)=(OA)+(AC)=(OC)=(OB)+(OA)=(OB)+(BC) \qquad [7]$$

§ 25. Consignons que les termes des relations [4] — [7] constituent autant des fonctions dont dépendent les éléments des lignes brisées (OA) + (AC) et (OB) + (BC); or, ces termes, nous les avons appelés *fonctions polaires*; donc, à l'avenir,— pour simplifier le discours et éviter la confusion d'idées,— les relations, provenant de l'addition des *fonctions polaires*, nous les nommerons *Equations Polaires*.

§ 26. Cela posé, revenons à la figure 3: considérons $f(c, \gamma)$ pour *Composante*, et, conformément à la règle de l'addition, ajoutons lui $f(d, \delta)$: il s'en suivra certaine *Fonction Résultante* $f(l, \lambda)$, laquelle déterminera la position d'un point D, et il viendra l'équation polaire suivante

$$f(c, \gamma) + f(d, \delta) = f(l, \lambda)$$

si, dans cette dernière équation, on substitue à $f(c, \gamma)$ l'expression trouvée pour ce terme par la relatiou [5], il viendra alors, à l'effet de déterminer le point D

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + f(d, \delta) = f(l, \lambda) \qquad [7.]$$

si à $f(l, \lambda)$ nous ajoutons un terme nouveau, soit, par exemple, $f(p, \pi)$, nous obtiendrons une Résultante $f(m, \mu)$, et si nous consignons cela conformément au procédé précité, il vient

$$f(l, \lambda) + f(p, \pi) = f(m, \mu)$$

où, en substiluant à $f(l, \lambda)$ l'expression trouvée pour ce terme par l'équation [7], il vient

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + f(d, \delta) + f(p, \pi) = f(m, \mu) \qquad [8]$$

§ 27. Généralisons maintenant les choses.

Supposons, à cet effet, que, d'après la méthode indiquée tout—à—l'heure, l'addition soit répétée *n-2* fois et que, dans le courant de l'opération, on n'ait point négligé de faire les substitutions nécessaires,— il est clair qu'on en obtiendra une expression telle que

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + f(c, \gamma) + \ldots\ldots\ldots + f(m, \mu) + f(n, \nu)$$

composée de *n-1* termes, laquelle déterminera sur le plan la position de certain point N, moyennant les *fonctions composantes* de la ligne brisée

$$(OA) + (AB) + (BC) + (CD) + \ldots\ldots\ldots (LM) + (MN)$$

or, *la Résultante* de cette expression est visiblement = au rayon vecteur

(ON) $=$ f (s, σ),— *(fig. 4)*,— rayon, qui,— étant lui — même construit, constituera le n^e côté d'un polygone, duquel les sommets,— à commencer par le pôle et dans l'ordre naturel,— seraient O, A, B, C, D, ... M et N. Donc, il est acquis que l'équation polaire

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + f(c, \gamma) + \ldots\ldots + f(m, \mu) + f(n, \nu) = f(s, \sigma) \qquad [9.]$$

représente analytiquement un polygone plan ayant n côtés, polygone duquel le sommet O se trouve au pôle du système des coordonnées polaires donné; et, réciproquement, étant donné un polygone à n côtés, si l'on prend l'un quelconque de ses sommets pour pôle et une ligne passant par ce sommet pour base, on est à même de le représenter analytiquement par une formule semblable à l'équation [9]. Aussi, dorénavant, l'équation [9], nous l'appellerons *équation polaire du polygone*, ou, par abréviation, *équation du polygone*.

§ 28. Si, dans l'équation [9], l'amplitude σ est zéro, alors, visiblement, la *résultante* se trouve couchée sur la base; toutes les amplitudes sont comptées à commencer du côté ON; f (s, $\sigma = 0$) $=$ s; et il y a lieu de présenter [9] sous l'aspect que voici

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta + f(c, \gamma) + \ldots\ldots + f(m, \mu) + f(n, \nu) = s \qquad [10]$$

ou bien

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta + \ldots\ldots + f(m, \mu) + f(n, \nu) - s = 0 \qquad [11]$$

mais,— en vertu du § 16 formule [17],— f (s, 180) $=$ — s, donc on peut écrire [11] de la manière suivante

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + \ldots\ldots + f(m, \mu) + f(n, \nu) + f(s, 180) = 0 \qquad [12].$$

formule la plus générale pour représenter analytiquement un polygone plan quelconque, rapporté au système des coordonnées polaires ayant le pôle sur un des sommets du polygone et la base couchée sur l'un des côtés issus du sommet pris pour pôle.

§ 29. En raison de l'importance de cette dernière proposition, déduisons la directement:

Soit donné (fig 5) le polygone OABC.....LMN; soient aussi connues les longueurs de tous les côtés et leurs amplitudes respectives comptées à partir du côté ON, côté pris pour l'axe polaire; si, par ordre et progressivement, nous ajoutons, à l'exception de ON, les fonctions de tous les côtés du polygone, il viendra

$$(OA) + (AB) + (BC) + \ldots\ldots (LM) + (MN)$$

ou bien

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots f(m, \mu) + f(n, \nu)$$

expressions qui déterminent le point N, point se trouvant, par hypothèse, sur la base. Si, à la dernière expression, nous ajoutons (NO) qui est visiblement $= - s = f(s, 180)$, il viendra

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + \ldots\ldots + f(n, \nu) + f(s, 180) = 0$$

expression qui forcement doit être égalée à zéro, puisque, en vertu de la règle de l'addition, pour ajouter $(NO) = f(s, 180) = - s$, il faut prendre $NT = s$, puis du point N, comme centre, en décrire un arc $= 180$ degrés: la rotation faite, le point T viendra nécessairement se confondre avec le pôle, et comme l'expression

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(n, \nu) + f(s, 180)$$

détermine le pôle, duquel les coordonnées sont nulles, il faut bien qu'elle soit égalée à zéro.

§ 30. Joignons maintenant le pôle avec un sommet quelconque du polygone (fig. 5), soit avec le sommet F: il en résultera un rayon vecteur (OF), qu'on peut envisager pour *Résultante* des expressions:

$$(OA) + (AB) + \ldots\ldots (EF), \text{ et}$$
$$(ON) + (NM) + \ldots\ldots (GF)$$

donc

$$(OA) + (AB) + \ldots\ldots (EF) = (OF)$$
$$(ON) + (NM + \ldots\ldots (GF) = (OF)$$

conséquemment

$$(OA) + (AB) + \ldots\ldots (EF) = ON + (NM) + \ldots\ldots\ldots (GF)$$

et en y substituant les fonctions polaires respectives, il vient

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + \ldots\ldots = s + f(n, \theta) + f(m, \xi) + \ldots\ldots$$

d'où l'on tire le *Théorème*, *qu'un rayon vecteur quelconque* (*OF*) *est susceptible d'être analytiquement représenté par les Fonctions Composantes de toute ligne brisée ayant ses extrémités aux points O et F*,— et réciproquement,— *que les Composantes de toute ligne brisée ayant ses extrémités aux points O, F, sont, quant à leur Résultante, égales à la fonction polaire du rayon vecteur (OF).*

§ 31. Nous sommes, en conséquence, à même de former, dorénavant, une infinité d'expressions égales à $(OF) = x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1}$, expressions, dont chacune d'elles aura évidemment la même signification analytique que $x + y\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1} = (OF)$, c'est — à — dire qu'elles détermineront toutes la position du point F.

§ 32. Dans le Chapitre III nous ferons voir qu'il est fort facile de transformer nos relations polaires en équations numériques du premier degré, déterminées et explicites, quant à leur forme, lesquelles, étant, à leur tour, convenablement transformées et discutées, nous permettront d'y faire maintes conclusions au sujet des rapports entre les éléments *des figures rectilignes*. C'est aussi moyennant notre addition que nous réussirons à ramener à l'algèbre des théories géométriques lesquelles jusqu'ici ne sont démontrées que par la voie des considérations essentiellement synthétiques. Il est donc manifeste que l'addition de nos fonctions joue un rôle fort important dans notre analyse: aussi, nous croyons devoir nous y arrêter démésurement et passer aux considérations moins générales, — aux figures particulières, — c'est le triangle que principalement nous avons en vue: proposons—nous donc de résoudre quelques problèmes relatifs au triangle, problèmes, qui, dans la suite, nous seront le plus nécessaires, à savoir:

§ 33. *Mettre en équation un triangle scalène quelconque ABC (fig. 6), mais en sorte que les amplitudes y soient exprimées en fonction des angles intérieurs de la figure proposée.*

Désignons constamment les angles des triangles scalènes par α, β, γ et par a, b, c, les longueurs des côtés qui sont respectivement opposés. Prenons maintenant le sommet A pour pôle, la direction du côté AC pour base, et construisons le rayon vecteur

$$(AK) = (BC)$$

Un coup d'oeil jetté sur la figure 6 suffit pour constater que

$$(AK) = (BC) = f(a, -\gamma)$$

$$AC = b$$

$$(AB) = f(c, \alpha)$$

Or, en vertu du § 30, l'on a

$$AC = (AB) + (BC)$$

donc, la substitution faite, il vient

$$b = f(c, \alpha) + f(a, -\gamma) \qquad [1.]$$

En prenant, à tour de rôle, les sommets C, B, pour pôles et les directions des côtés CB et BA pour bases des systèmes polaires, nous aboutirons, par la même voie, aux formules:

$$a = f(b, \gamma) + f(c, -\beta) \qquad [2.]$$

$$c = f(a, \beta) + f(b, -\alpha) \qquad [3.]$$

Donc, à l'effet de représenter analytiquement un triangle scalène en fonction de ses côtés et de ses angles intérieurs, nous avons trois formules: nous réunissons ces formules dans un seul groupe, marqué de l'initiale [A.]

$$\left.\begin{aligned} a &= f(b, \gamma) + f(c, -\beta) \\ b &= f(c, \alpha) + f(a, -\gamma) \\ c &= f(a, \beta) + f(b, -\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad [A]$$

§ 34. Soit OX la bissectrice de l'angle AOB; prenons à volonté les points A et B sur les côtés de l'angle donné (fig. 7); abaissons sur la bissectrice les perpendiculaires AD et BC; faisons OA = a, OD = p, DA = q, OB = b, OC = c, CB = d, l'angle AOD = α; prenons O pour pôle, OX pour base et consignons que l'angle DOE est nécessairement égal à $-\alpha$. Cela posé, *mettons en équations les triangles rectangles ODA et OCB.*

Remarquons, à cet effet, que

$$\left.\begin{aligned} (OA) &= OD + (DA) \\ (OB) &= OC + (CB) \end{aligned}\right\} \qquad [1.]$$

Or, par hypothèse et par construction:

$$(OA) = f(a, \alpha)$$

$$(OB) = f(b, -\alpha)$$

$$OD = p \text{ enfin } OC = c$$

et, en vertu du § 16, formules 16 et 18,

$$(DA) = f(q, 90) = q\sqrt{-1}$$

$$(CB) = f(d, 270) = -q\sqrt{-1} = -f(d, 90)$$

donc, si nous substituons ces valeurs dans [1], il vient

$$\left.\begin{aligned} f(a, \alpha) &= p + f(q, 90) \\ f(b, -\alpha) &= c - f(d, 90) \end{aligned}\right\} \qquad [B]$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} f(a, \alpha) &= p + q\sqrt{-1} \\ f(b, -\alpha) &= c - d\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} [C]$$

deux groupes d'équations polaires que précisement nous nous sommes proposés de trouver.

§ 35. Si (fig. 7) nous prenons $OE = OA = a$, alors, visiblement, $OC = OD = p$; $CB = DA = q$ et, par conséquent, nos deux derniers groupes représentent les triangles égaux ODA, ODE: il est d'ailleurs évident que les formules précitées doivent, dans ce cas, s'écrire ainsi:

$$\left.\begin{aligned} f(a, \alpha) &= p + f(q, 90) \\ f(a, -\alpha) &= p - f(q, 90) \end{aligned}\right\} [D]$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} f(a, \alpha) &= p + q\sqrt{-1} \\ f(a, -\alpha) &= p - q\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} [E]$$

Consignons que les seconds membres de [E] renferment des grandeurs appelées en Algèbre *quantités imaginaires conjuguées*.

§ 36. Soit donnée (fig. 8) une suite indéfinie des triangles rectangles ayant les mêmes angles aigus; l'un d'eux, α, est commun à tous les triangles. Faisons y

$$\begin{array}{ll|ll|ll} OA & = a & OP & = p & PA & = q \\ OA_1 & = a_1 & OP_1 & = p_1 & P_1A_1 & = q_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ OA_n & = a_n & OP_n & = p_n & P_nA_n & = q_n \end{array}$$

En vertu du § précédent, il viendra pour la suite des triangles rectangles précités

$$\left.\begin{aligned} f(a, \alpha) &= p + q\sqrt{-1} \\ f(a_1, \alpha) &= p_1 + q_1\sqrt{-1} \\ . \quad & \quad . \quad . \\ . \quad & \quad . \quad . \\ . \quad & \quad . \quad . \\ . \quad & \quad . \quad . \\ f(a_n, \alpha) &= p_n + q_n\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} [F]$$

N.B. Nous nommerons *homologues*, ceux, des côtés des triangles, qui sont opposés aux angles respectivement égaux.

§ 37. Etant donnée (fig. 9) la fonction

$$(OB) = f(b, \beta) = x + y\sqrt{-1} \qquad [1.]$$

il est visible qu'il vient

$$(OE) = f(b, \beta + 180) = -x - y\sqrt{-1}$$

pour un rayon vecteur (OE) dont le module est égal à b et lequel est le prolongement de (OB) de l'autre côté du pôle.

Or, en changeant de signes dans [1], il vient

$$-(OB) = -f(b, \beta) = -x - y\sqrt{-1}$$

cette dernière égalité comparée à l'avant — dernière, donne

$$(OE) = -(OB)$$

$$-f(b, \beta) = f(b, \beta + 180) \qquad [2.]$$

ou bien

$$-f(b, \beta) = f(b, \beta - 180) \qquad [3.]$$

car l'amplitude négative de (OE) est $= (\beta - 180)$.

§ 38. Prenons maintenant l'équation [9] du § 27; faisons y passer $f(s, \sigma)$ dans le premier membre; remarquons que $-f(s, \sigma) = f(s, \sigma + 180)$; posons $\sigma + 180 = \omega$; il viendra alors

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) + f(c, \gamma) + \ldots\ldots + f(m, \varphi) +$$
$$+ f(n, \psi) + f(s, \omega) = 0 \ldots\ldots \quad [1.]$$

équation générale du polygone (fig. 4)

Soustraction.

§ 39. Soient données les fonctions (fig. 10).

$$(OA) = f(a, \alpha)$$
$$(OB) = f(b, \beta)$$

Si l'on soustrait leurs membres correspondants, il viendra

$$(OA) - (OB) = f(a, \alpha) - f(b, \beta) \qquad [1.]$$

Or, en vertu du § 37, $(OE) = -(OB)$ et

$$f(b, \beta + 180) = -f(b, \beta); \text{ donc il vient}$$

$$(OA) - (OB) = (OA) + (OE) = (OC) \qquad [2.]$$

$$f(a. \alpha) - f(b, \beta) = f(a, \alpha) + f(b, \beta + 180) = f(c, \gamma) \qquad [3.]$$

par conséquent, pour la soustraction de nos fonctions, on en tire la règle suivante:

Pour soustraire (OB) de (OA), il faut prendre sur le prolongement de (OB), de l'autre côté du pôle, un rayon vecteur (OE),—égal, quant à *sa longueur*, à *(OB),—et additionner (OE)* à *(OA): moyennant l'expression (OA) + (OE) on déterminera la position de certain point C, qui, étant lié avec le pôle, donnera la différence cherchée (OC)* = f (c, γ).

§ 40. La soustraction des fonctions polaires se trouve ainsi ramenée à leur addition. Il en résulte, que tout rayon vecteur est susceptible d'être exprimé par la différence des fonctions de deux droites issues de ses extrémités et formant triangle.

§ 41. Le Corollaire du § précédent nous met à même de représenter analytiquement le triangle par la différence de ses fonctions polaires.

Prenons à cet effet le triangle scalène pour lequel nous avons deduit les formules du groupe [A] (fig. 6): soit le sommet A pris pour pôle; AC pour base; par le point A menons AK parallèle à BC; prolongeons cette parallèle de l'autre côté du pôle; coupons y AK = AM = CB = a; enfin consignons que (AK) = f $(a, -\gamma)$. Or,

$$(AB) = AC + (CB)$$

c'est — à — dire

$$f\,(c, \alpha) = b + (CB) \qquad [1.]$$

et, en vertu du § 37,

$$(CB) = (AM) = -(AK) = -f\,(a, -\gamma),$$

donc, si, dans [1], nous substituons à (CB) cette dernière valeur il viendra

$$f\,(c, \alpha) = b - f\,(a, -\gamma) \qquad [2.]$$

Si, à tour de rôle, nous prenons les sommets C, B, pour pôles, et, respectivement, CB et BA pour bases, nous obtiendrons, par la voie d'une déduction tout — à — fait analogue, les équations polaires que voici:

$$f\,(b, \gamma) = a - f\,(c, -\beta) \qquad [3.]$$

$$f\,(a, \beta) = c - f\,(b, -\alpha) \qquad [4.]$$

et en groupant ces formules, il vient

$$\left.\begin{array}{l} a - f(c, -\beta) = f(b, \gamma) \\ b - f(a, -\gamma) = f(c, \alpha) \\ c - f(b, -\alpha) = f(a, \beta) \end{array}\right\} \quad [G]$$

§ 42. Remarquons que les formules [G] peuvent être immédiatement déduites des formules [A]: à cet effet il suffit, dans les seconds membres des [A], de changer le signe de derniers termes et de faire ensuite passer ces termes dans les premiers membres des équations respectivement correspondantes. Il se trouve donc constaté que les formules du triangle, obtenues moyennant la soustraction, ne sont autres que celles du groupe [A] déduites antérieurement par la voie de l'addition. Voilà ce que nous tenions à démontrer de la manière que nous venons de le faire, bien que cela fût d'ailleurs antérieurement à prévoir, puisque les règles relatives à la résolution des équations algébriques sont générales et que, par conséquent, dès le § 33, nous étions en mesure d'affirmer que

$$a - f(c, -\beta) = f(b, \gamma) \text{ et}$$
$$a = f(b, \gamma) + f(c, -\beta)$$

ne sont que la même équation.

Multiplication.

§ 43. Soient donnés le multiplicande f (a, α) et le multiplicateur f (b, β). Proposons — nous de représenter géométriquement et analytiquement le produit qui résulte de la multiplication de ces fonctions.

A cet effet, il y a lieu de recourir à la définition du genre, à savoir :

Multiplier f (a, α) *par* f (b, β), — conformément au génie du calcul algébrique,— *c'est chercher une fonction, appelée produit, laquelle soit engendrée du multiplicande* f (a, α), *comme le multiplicateur* f (b, β) *est engendré de l'unité positive.*

Or, pour engendrer de l'unité positive la grandeur représentée par le multiplicateur f (b, β), on porte, à partir du pôle et dans la direction primitive de la base, b fois l'unité linéaire, puis, du segment qui en provient, comme rayon, et du pôle, comme centre, l'on décrit l'amplitude de β;

donc, *pour déterminer le produit cherché, il faut,*— à *partir du pôle et dans la direction primitive du multiplicande, porter,* à *la file,* *b fois la longueur représentée par le module a, puis, du segment qui en résultera, comme rayon, et du pôle, comme centre, décrire l'amplitude β. Il en résultera, évidemment, pour produit un rayon vecteur (OC), dont le module est, par construction, égal au nombre* ab, *et l'amplitude* $= \alpha + \beta$; donc

$$f\,(a, \alpha) \times f\,(b, \beta) = f\,(ab, \alpha + \beta) \qquad [1.]$$

formule faisant voir 1⁰ *que le produit des fonctions polaires est de la même forme que les facteurs qui concourent à l'engendrer;*— 2⁰ *que le module du produit est égal au produit des modules des facteurs; et enfin* 3⁰ *que l'amplitude du produit est égale à la somme des amplitudes des facteurs.*

§ 44. Dans le cas, où les modules des facteurs soient fractionnaires, on n'aurait qu'à substituer, dans le raisonnement du § précédent, le verbe „*prendre*" au verbe „*porter*" qui y est employé; et c'est avec la même exactitude que l'on déduirait

$$f\,(\tfrac{m}{n}, \alpha) + f\,(\tfrac{r}{s}, \beta) = f\,(\tfrac{mr}{ns}, \alpha + \beta)$$

donc la formule [1] du § 43 est générale, et il n'y a pas à se méprendre sur la position du point déterminé par le produit, pourvu que les facteurs soient pris comme fonctions polaires, car c'est rigoureusement dans cette acception que furent envisagés le multiplicande f (a, α) et le multiplicateur f (b, β).

Division.

§ 45. Si l'on divise la formule [1] du § 43 par f (a, α), il viendra nécessairement

$$\frac{f\,(ab, \alpha + \beta)}{f\,(a, \alpha)} = f\,(b, \beta) = f\,(\tfrac{ab}{b}, \alpha + \beta - \alpha)$$

Ici, l'on peut envisager f (ab, $\alpha + \beta$) pour le dividende, f (a, α) pour le diviseur: le quotient cherché est évidemment f (b, β) ou bien f ($\frac{ab}{b}, \alpha + \beta - \alpha$), puisque, conformement à la formule [1] du § 43, le dividende f (ab, $\alpha + \beta$) est égal au produit du diviseur f (a, α) par le quotient f (b, β).

Comme le module du quotient est $\frac{ab}{b}$ et que son amplitude $= \alpha + \beta - \alpha$, donc on est en mesure de poser en principe que:

Le quotient de deux fonctions polaires est lui — même une fonction de la même forme que le dividende et le diviseur, fonction, dont le module est égal au quotient des modules donnés, et où l'amplitude est égale à l'amplitude du dividende diminuée de celle du diviseur.

Si donc, dans notre dernière formule, on pose $ab = m$ et $\alpha + \beta = \varphi$, il viendra

$$f(m, \varphi) : f(b, \beta) = f\left(\tfrac{m}{b}, \varphi - \beta\right)$$

Formation des Puissances.

§ 46. Dans la formule [1] du § 43, faisons le multiplicateur égal au multiplicande, il viendra

$$f(a, \alpha) \times f(a, \alpha) = f(a^2, 2\alpha)$$

ou bien, d'après la notation conforme à l'usage

$$[f(a, \alpha)]^2 = f(a,^2 2\alpha)$$

multiplions cette dernière équation par f (a, α), il viendra

$$[f(a, \alpha)]^2 \times f(a, \alpha) = f(a,^2 2\alpha) \times f(a, \alpha)$$

ce qui, visiblement, équivaut à

$$[f(a, \alpha)]^3 = f(a,^3 3\alpha)$$

et cette manière d'opérer étant supposée répétée *n—1* fois, il vient visiblement

$$[f(a, \alpha)]^n = f(a^n, n.\alpha) \qquad [1.]$$

formule générale qui fait voir que *la puissance* n^e *de* f (a, α) *est elle-même une fonction polaire ayant* a^n *pour module et* $n.\alpha$ *pour amplitude.*

Extraction des Racines.

§ 47. Prenons la dernière formule du § précédent, et remarquons qu'en en extrayant, de part et d'autre, la racine n^e, il faut bien, qu'il y vienne, conformément au génie de l'extraction des racines

$$f(a, \alpha) = \sqrt[n]{f(a^n, n.\alpha)}$$

ce qui, visiblement, équivaut à

$$\sqrt[n]{f(a^n, n\alpha)} = f\left(\sqrt[n]{a^n}, \tfrac{n}{n}\alpha\right)$$

si donc, dans cette dernière formule, on fait $a^n = b$ et $n.\alpha = \varphi$, il vient

$$\sqrt[n]{f(b, \varphi)} = f\left(\sqrt[n]{b}, \frac{\varphi}{n}\right) \qquad [1.]$$

formule faisant voir que *la racine n^e de $f(b,\varphi)$ est une fonction polaire, dont le module est égal au nombre* $\sqrt[n]{b}$ *et l'amplitude égale* à $\frac{\varphi}{n}$. Si n est pair, la racine n^e de $\sqrt[n]{b} = \pm q$: dans ce cas, il faut écarter — q, puisque, dans le § 18, nous avons fait sentir qu'il ne saurait exister des modules qui soient négatifs.

§ 48. Quelque rigoureuse que soit la déduction de la formule [1] du § précédent, le second membre de la relation précitée ne laisse pas d'être empreint de toute la généralité qu'il doit avoir. En effet, il est évident que

$$f(b, \varphi) = f(b, \varphi + k.C) \qquad [1.]$$

C désignant la circonférence entière ou 360 grades, et k un nombre entier quelconque positif ou négatif. Or

$$\sqrt[n]{f(b,\varphi)} = f\left(\sqrt[n]{b}, \frac{\varphi + k.C}{n}\right) \qquad [2.]$$

et si, dans cette dernière formule, on fait successivement

$$k = 0,\ k = 1,\ k = 2,\ \ldots\ldots.,\ k = (n - 1),$$

on obtient n fonctions polaires différentes ayant toutes le même module $\sqrt[n]{b} = q$ et les amplitudes que voici:

$$\frac{\varphi}{n},\quad \frac{\varphi + C}{n},\quad \frac{\varphi + 2\,C}{n},\ \ldots\ldots..\ \frac{\varphi + (n - 1)\,C}{n}$$

Dans cet état, il est clair, en vertu du § 46, formule [1], qu'en élevant ces fonctions à la puissance n, on retombe sur f (b, φ); et si l'on prend pour k d'autres nombres que 0, 1, 2, ... (n — 1) il est facile de saisir que les valeurs qu'on en tirerait seraient comprises parmi celles qu'on a obtenues en posant k = 0, 1, 2, ... (n—1).

Ainsi, le *second membre* de la formule [1] du paragraphe précédent acquerra toute la généralité qu'il doit avoir, si on a soin d'y prendre, pour φ, non seulement cette amplitude φ elle—même, mais encore les amplitudes φ + C, φ + 2C, ... φ + [n — 1] C. C'est donc un sens multiple qu'on y doit remarquer et, conformément aux principes de l'algèbre, le radical $\sqrt[n]{f(b,\varphi)}$ possède n valeurs différentes, lesquelles déterminent autant des points sur la circonférence dont le rayon = $\sqrt[n]{b}$ et dont le centre se trouve au pôle des coordonnées proposées.

§ 49. Dans la formule [2] du § précédent, faisons n = 2, φ = 180 et k = 0; il viendra alors

$$\sqrt{f(b, 180)} = f(\sqrt{b}, 90)$$

ce qui équivaut à

$$\sqrt{-b} = f(\sqrt{b}, 90) \qquad [1.]$$

puisque, en vertu du § 16 formule [17],

$$f(b, 180) = -b$$

or, l'équation [1] peut s'écrire aussi de la manière que voici

$$\sqrt{b}\,\sqrt{-1} = f(\sqrt{b}, 90)$$

donc, si, dans cette dernière équation, après avoir extrait la racine carrée de la quantité *b*, nous trouvons que $\sqrt{b} = q$, il viendra nécessairement

$$f(q, 90^\circ) = q\sqrt{-1} \qquad [2.]$$

formule que nous avons déjà trouvée dans les §§ 14 et 16 par la voie de *l'induction*, induction, à laquelle nous devions forcement recourir alors, puisque, sans cela, nous n'aurions aucunement été en mesure de faire asseoir sur des bases solides *l'essentiel* de notre théorie,— l'addition des fonctions appelées par nous polaires. Dans le § courant, la relation $f(q, 90) = q\sqrt{-1}$ est déduite d'une manière tout — à — fait différente, car, pour y arriver, nous avons trouvé l'embryon de notre raisonnement dans la multiplication. Nous voilà donc bien édifiés qu'à l'avenir, dans nos calculs, il y a lieu de traiter le symbole $q\sqrt{-1}$ à l'égal de $f(q, 90)$, et comme c'est par une *Analyse directe* que présentement nous aboutissons à la formule en question, consignons, que se trouvent indubitablement confirmées celles de nos propositions antérieures dont la déduction reposait sur ce que $f(q, 90) = q\sqrt{-1} = y\sqrt{-1}$.

§ 50. En divisant par $f(q, \alpha = 0) = q$ l'équation [2] du § précédent, il vient

$$f(1, 90) = \sqrt{-1}, \qquad [3.]$$

c'est — à — dire *le coefficient vecteur* des rayons vecteurs couchés sur le coté positif de l'axe des ordonnées; et, en vertu du § 37, il vient

$$f(1, -90) = f(1, 270) = -\sqrt{-1} \qquad [4.]$$

coefficient vecteur des rayons couchés sur le coté négatif de l'axe précité: nous avons déjà rélâté cela dans le § 17.

§ 51. Si l'on multiplie [4] par $\sqrt{b} = q$, il vient

$$f\,(q, -90) = f\,(q, 270) = -q\sqrt{-1} \qquad [5.]$$

équation déterminant la seconde valeur du radical $\sqrt{f\,(b, 180)}$: on peut s'en assurer en posant dans la formule [2] du § 48: $n = 2$, $\varphi = 180$ et $k = 1$.

§ 52. Les propositions déduites jusqu'ici nous font conclure que le symbole $q\sqrt{-1}$ représente analytiquement des quantités géométriques, lesquelles, loin d'être fictives, existent dans l'ordre de choses. Au surplus, dans le § suivant, nous donnerons une démonstration rigoureuse que le produit $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}$ est, non seulement par suite de la convention, égal à -1, mais bien qu'il y a effectivement et nécessairement lieu d'assujétir toutes les quantités, telles que $q\sqrt{-1}$, aux mêmes calculs que si elles étaient réelles; donc, comme la quantité $q\sqrt{-1}$ embrasse deux idées (longueur et direction), et qu'elle n'est imaginaire que de forme, nous ne croyons point devoir l'appeler *imaginaire* dans les cas où nous aurons à considérer $q\sqrt{-1}$ sous le rapport de sa nature: alors, les quantités de ce genre, nous les nommerons *quantités complexes*.

Les quantités se nomment complexes ~~[illegible]~~ parceque leur forme générale $a + b\sqrt{-1}$

CHAPITRE III.

Analyse des Fonctions Polaires.

§ 53. Si l'on divise (f a, α) par f (a, $\varphi = 0$), il en résultera évidemment f (1, α), c'est — à — dire le coefficient vecteur de (OA) = (a) = f (a, α); et si l'on multiplie f (b, β) par f (1, α), il vient

$$f\,(b, \beta) \times f\,(1, \alpha) = f\,(b, \beta + \alpha) \qquad [1.]$$

égalité faisant voir que si, au rayon vecteur représenté par f (b, β), on fait prendre la position de f (b, $\beta + \alpha$), alors, pour représenter cela analytiquement, il faut multiplier f (b, β) par f (1, α).

Or, dans l'avant, dernier § il a été trouvé que $f\,(1, 90) = \sqrt{-1}$; donc, *si (fig. 11)*, l'on fait prendre à

$$(OB) = f\,(b, 90) = b\sqrt{-1} \qquad [2.]$$

la position de

$$(OC) = f\,(b, 180) = -b \qquad [3.]$$

pour représenter cela analytiquement, il faut multiplier [2] par $f\,(1, 90) = \sqrt{-1}$; il viendra donc

$$f(b, 90) \times f(1, 90) = b\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

et après avoir effectué la multiplication dans le premier membre, il vient

$$f(b, 180) = b\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

équation qui, étant comparéé à [3], donne

$$f(b, 180) = -b = b\sqrt{-1}\sqrt{-1} \qquad [4.]$$

résultat conforme à la figure, résultat nous autorisant aussi d'affirmer à l'avenir, en toute sécurité, que $b\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -b$ et qu'en conséquence $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$.

Faisons prendre à (OC) la position de (OD).

En vertu de ce que nous venons de dire, pour exprimer analytiquement (OD) en fonctfon de $(OC) = -b$, il faut multiplier $-b$ par $f(1, 90)$, ou bien par $\sqrt{-1}$; il viendra donc

$$(OD) = -b\sqrt{-1} = f(b, 270) \qquad [5.]$$

formule déjà trouvée dans § 16.

Enfln, en faisant subir à (OD) une rotation de $\pm$ 90 degrés, il viendra visiblement

$$OA = -b\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = b$$

ou bien

$$(OC) = -b\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -b$$

suivant que l'on multiplie $-b\sqrt{-1}$ par $f(1, 90)$ ou par $f(1, -90)$, c'est — à — dire par $\sqrt{-1}$ ou par $-\sqrt{-1}$, expressions, qui, respectivement, sont les coefficients vecteurs des rayons ayant l'amplitude $+90$ ou -90.

§ 54. Proposons — nous maintenaut de mettre en évidence la forme explicite du coefficient vecteur $f(1, \alpha)$.

Prenons à cet effet le groupe des formules [F],— § 36 (fig. 8),— divisons, respectivement, les équations précitées par $f(a, 0) = a$; $f(a_1, 0) = a_1$; $f(a_2, 0) = a_2$; ...... $f(a_n, 0) = a_n$; il en résultera:

$$\left.\begin{array}{l} f(1, \alpha) = \dfrac{p}{a} + \dfrac{q}{a}\sqrt{-1} \\ f(1, \alpha) = \dfrac{p_1}{a_1} + \dfrac{q_1}{a_1}\sqrt{-1} \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ f(1, \alpha) = \dfrac{p_n}{a_n} + \dfrac{q_n}{a_n}\sqrt{-1} \end{array}\right\} \quad [\text{I}]$$

relations, dont tous les premiers membres sont les mêmes; par conséquent

$$\frac{p}{a}+\frac{q}{a}\sqrt{-1}=\frac{p_1}{a_1}+\frac{q_1}{a_1}\sqrt{-1}=\ldots\ldots=\frac{p_n}{a_n}+\frac{q_n}{a_n}\sqrt{-1}$$

Or, cette dernière formule, en vertu de la relation [6] § 1, nous conduit à deux suites des rapports réels et respectivement égaux entre eux, rapports, lesquels, visiblement, ne dépendent que de l'angle α. Ces rapports, conformément à la notation adoptée depuis bien longtemps, nous les désignons par les mots *cosinus α et sinus α*; on tire donc de notre dernière formule

$$\frac{p}{a}=\frac{p_1}{a_1}=\ldots\ldots\frac{p_n}{a^n}=\cos\alpha \qquad [1.]$$

$$\frac{q}{a}=\frac{q_1}{a_1}=\ldots\ldots\frac{q_n}{a_n}=\sin\alpha \qquad [2.]$$

désignations, qui, respectivement, étant substituées dans [H], ramènent toutes les formules du groupe précité à la même forme, forme explicite que voici:

$$f(1,\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1} \qquad [3.]$$

et c'est précisement le coefficient vecteur que nous nous sommes proposés de déterminer, coefficient concédant à la quantité a d'une droite d'être conçue dans la direction α, relativement à un axe polaire, par l'assimilation de cette droite au rayon vecteur:

$$(OA)=(a)=f(a,\alpha)=a\cos\alpha+a\sin\alpha\sqrt{-1}$$

car, en effet, si nous multiplions [3] par f (a, 0) = a, il vient

$$f(a,\alpha)=a\cos\alpha+a\sin\alpha\sqrt{-1} \qquad [4.]$$

équation polaire, laquelle,—en vertu des paragraphes 6 et 14, (fig. 2),— est aussi égale à:

$$(BC)=(FG)=(OA)=f(a,\alpha)=a\cos\alpha+a\sin\alpha\sqrt{-1}=$$
$$=p+q\sqrt{-1}=x+y\sqrt{-1}=(a)=F(x,y\sqrt{-1}) \qquad [5.]$$

égalité où la mesure de la quantité angulaire α se trouve ramenée à l'unité linéaire, égalité qui met en évidence la nature du coefficient vecteur, enfin égalité qui donne une solution complète au problème posé dans le paragraphe 9.

§ 55. C'est par une voie incontestablement analytique que jusqu' à présent nous sommes arrivés à une série de principes. Ces principes suffisent pour ramener au calcul algébrique celles des *propositions tri-*

gonométriques que les géomètres ne démontrent jusqu'ici que moyennant la synthèse.

Faisons voir cela:

En vertu des formules [2] et [3] du paragraphe précédent, viennent les proportions

$$\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{a}} = \frac{\cos\alpha}{1} \qquad [1.]$$

$$\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{a}} = \frac{\sin\alpha}{1} \qquad [2.]$$

où en mettant les extrèmes à la place des moyens, il résulte, évidemment, pour l'angle α, deux nouvelles fonctions. Ces fonctions dénomi-nons les, respectivement, par les désignations *sécante* α et *cosécante* α; il viendra donc

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{p}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \text{séc}\ \alpha \qquad [3.]$$

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}} = \frac{1}{\sin\alpha} = \text{cosec}\ \alpha \qquad [4.]$$

Divisons [3] par les membres correspondants de [4], et soit appelée „*tangeante* α" la valeur du rapport constant qui en résulte pour l'angle α; il vient donc, réduction faite

$$\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{séc}\ \alpha}{\text{cosec}\ \alpha} = \frac{\text{tang}\ \alpha}{1} \qquad [5.]$$

Enfin, si dans cette dernière suite de rapports égaux, nous faisons *l'invertendo*, il en découlera pour l'angle α une dernière fonction „*Cotangeante* α" fonction que voici

$$\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\text{cosec}\ \alpha}{\sec\ \alpha} = \frac{1}{\text{tang}\ \alpha} = \text{cotang}\ \alpha \qquad [6.]$$

Maintenant, il ne faut plus que porter les yeux sur la figure 8; prendre, à tour de rôle, les égalites [1] — [6] du § courant; expliquer à l'élève par suite de quelles considérations on peut envisager $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{p}}, \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}, \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}, \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{a}}, \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{a}}, \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}}$, comme rapports et comme lignes; enfin établir les définitions des fonctions trigonométriques. Ces choses— ci, à moins de commettre du plagiat, nous ne pouvons les faire: aussi, bornons — nous à en donner un simple signalement, et consignons, que dans la suite de cette brochure, nous agirons de même à l'égard de celles des notions qu'on peut trouver dans les *Traités*, notre dévise étant de ne présenter que des choses nouvelles ou bien de déduire par la rigueur de notre analyse celles des propositions que les Géomètres ne démontrent jusqu'ici que synthétiquement.

§ 56. Prenons les formules [D] § 35; divisons les, toutes les deux, par f (a, $\alpha = 0) =$ a, et remplaçons y ensuite les rapports $\frac{p}{a}$, $\frac{q}{a}$, par leurs désignations trigonométriques, savoir $\frac{p}{a}$ par *cos α* et $\frac{q}{a}$ par *sin α;* il viendra

$$f\,(1, \;\; \alpha) = \cos \alpha + f\,(\sin \alpha, \, 90)$$
$$f\,(1, - \alpha) = \cos \alpha - f\,(\sin \alpha, \, 90)$$

Multiplions entre eux les membres correspondants de ces deux dernières équations; si la multiplication est faite conformément à la règle du § 43, il en résultera, réduction faite

$$1 = \cos^2 \alpha - f\,(\sin^2 \alpha, \, 180)$$

ou bien

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \qquad [7.]$$

puisque $- f\,(\sin^2 \alpha, \, 180) = - (- \sin^2 \alpha) = + \sin^2 \alpha.$

Divisons, à tour de rôle, l'équation [7] par $\sin^2 \alpha$ et par $\cos^2 \alpha$; il en résultera

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 \quad \text{ou} \quad \text{cos\'ec}^2\, \alpha = \text{cotg}\, \alpha + 1 \qquad [8.]$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ou} \quad \sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha \qquad [9]$$

puisqne, en vertu des formules [3] — [6] du § précédant: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} =$ $\text{cos\'ec}^2\, \alpha$; $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$; $\frac{\sin^2 \alpha}{\text{con}^2 \alpha} = \text{tg}^2\, \alpha$, enfin $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \text{cotg}^2\, \alpha.$

Faisons remarquer à présent qu'en établissant l'idée des fonctions trigonométriques, nous avons réussi à établir simultanément toutes les relations des lignes trigonométriques entre elles, sans que, dans cette tâche, il y ait eu quelque nécessité d'invoquer subsidiairement soit le théorème de Thalès, soit celui de Pythagore.

Groupons maintenant de la manière suivante les formules disséminéés dans les §§ 55 et 56.

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{q}{a} = \sin\alpha \\
\dfrac{p}{a} = \cos\alpha \\
\dfrac{a}{q} = \text{coséc}\,\alpha \\
\dfrac{a}{p} = \text{séc}\,\alpha \\
\dfrac{p}{q} = \text{cotg}\,\alpha \\
\dfrac{q}{p} = \text{tg}\,\alpha
\end{array}\right\}[J] \qquad
\left.\begin{array}{r}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\
1 + \text{tg}^2\,\alpha = \text{séc}^2\,\alpha \\
1 + \text{cotg}^2\,\alpha = \text{coséc}\,\alpha \\
\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\
\text{séc}\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \\
\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\
\text{coséc}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}
\end{array}\right\}[K]$$

§ 57. Il résulte de la définition— même du sinus et du cosinus, que ces fonctions peuvent être respectivement assimilées aux coordonnées rectangulaires de l'extrémité de l'arc servant de mesure à l'angle proposé; or sì c'est dans le quatrième quadrant que se trouve le point final de l'arc, *l'abscisse* de ce point est positive et l'ordonnée en est négative; donc pour un arc $360 < \alpha > 270$, ou bien pour un arc α négatif $<- 90$, il vient un cosinus positif et nu sinus négatif. Quant aux autres lignes trigonométriques de cet arc, exprimez les en fonction des valeurs, pour lesquelles nous venons de déterminer les signes, et vous trouverez sans peine si elles sont soustractives ou positives.

C'est par une voie tout — à fait analogue qu'on peut déterminer le signe de tout arc compris dans les limites $\pm\infty$.

§ 58. Si l'abscisse est nulle et l'ordonnée égale à 1, le point se trouve sur le côté positif de l'axe des Y; donc, en assimilant les coordonnées précitées aux fonctions trigonométriques respectives, il vient $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; en conséquence $\text{tg}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} = \infty$, etc, etc....

N.B. Un procédé analogue est à même d'être employé avec avantage pour exposer à l'élève la marche progressive des lignes trigonométriques, la manière de les ramener au premier quadrant, et enfin pour expliquer quels sont les arcs qui répondent à un sinus donné, à une tangeante donnée, etc. N'étant pas plagiaire, je ne fais que glisser là — dessus.

§ 59. *Soit proposé de déterminer le sinus et le cosinus de* $\alpha \pm \beta$.

En vertu du § 54 formule [3], il vient

$$f\,(1,\ \alpha+\beta) = \cos\,(\alpha+\beta) + \sin\,(\alpha+\beta)\sqrt{-1} \quad [1.]$$

$$f\,(1,\ \alpha) = \cos\ \alpha + \sin\ \alpha\ \sqrt{-1}$$

$$f\,(1,\ \beta) = \cos\ \beta + \sin\ \beta\ \sqrt{-1}$$

Si l'on multiplie entre eux les membres correspondants de nos deux dernières équations, il viendra

$$f\,(1,\ \alpha+\beta) = (\cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \sin\ \alpha\ \sin\ \beta) + (\sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\ \beta\ \cos\ \alpha)\sqrt{-1} \quad [2.]$$

Or, les premiers membres des équations [1] et [2] sont les mêmes; donc

$$\cos\,(\alpha+\beta) + \sin\,(\alpha+\beta)\sqrt{-1} = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\beta\cos\alpha)\sqrt{-1} \quad [3]$$

équation, laquelle,— en vertu du § 1,— se partage nécessairement en relations que voici

$$\cos\,(\alpha+\beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \sin\ \alpha\ \sin\ \beta \quad [4.]$$

$$\sin\,(\alpha+\beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\ \beta\ \cos\ \alpha \quad [5.]$$

et si, dans ces deux dernières formules, l'on met $-\beta$ à la place de $+\beta$, il vient

$$\cos\ (\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad [6.]$$

$$\sin\ (\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \quad [7.]$$

quatre formules fondamentales obtenues sans avoir eu recours ni au tracé ni aux théorèmes relatifs à la similitude de triangles.

§ 60. Jusqu'à présent on de déduit guère autrement la formule *Moivre* que par la voie de l'induction,— moyennant l'analogie,— nous, au contraire, sommes en mesure d'en donner une démonstration directe et générale, à savoir:

Soit donnée, à cet effet, la formule [3] § 54:

$$f\,(1,\ \alpha) = \cos\ \alpha + \sin\ \alpha\sqrt{-1}$$

Si l'on élève les deux membres de cette équation à la puissance n^e, il vient

$$[f\,(1,\ \alpha)]^n = (\cos\ \alpha + \sin\ \alpha\ \sqrt{-1})^n$$

Or, en vertu du § 46, il vient aussi

$$[f\,(1,\ \alpha)]^n = f\,(1,\ n\alpha) = \cos\ n\alpha + \sin\ n\alpha\sqrt{-1}$$

donc, en égalant nos deux dernières équations, on tire

$$(\cos\ \alpha + \sin\ \alpha\sqrt{-1})^n = \cos\ n\alpha + \sin\ n\alpha\ \sqrt{-1} \quad [1.]$$

C'est précisement la formule *Moivre*. Si n est négatif ou fractionnaire, on n'en aura pas moins, conformément à notre règle du § 47, règle pour l'extraction des racines

$$[f\,(1, \alpha)]^{\frac{1}{n}} = f\,(1, \tfrac{\alpha}{n}) = (\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{\alpha}{n}\sqrt{-1}$$

donc, pour la formule *Moivre*, nous venons de donner une démonstration directe et générale; il n'y a que le sens multiple à y remarquer lorsque n est négatif ou fractionnaire et sous ce rapport on n'a qu à appliquer le raisonnement de notre paragraphe 48.

§ 61. Comme tout ce qui se rapporte aux *tables trigonométriques*, se trouve établi ailleurs par voie d'Analyse, nous avons cru devoir mettre cette question en dehors de notre programme. Pour finir notre tâche, quant à la Trigonométrie, il ne nous reste donc qu'à déduire analytiquement les formules sur lesquelles repose la résolution des triangles rectangles et scalènes. Occupons— nous en à tour de rôle.

Pour un *triangle rectangle* quelconque, en vertu de la formule [5] du § 54, il vient

$$a\cos\alpha + a\sin\alpha\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1} \qquad [1.]$$

où a représente l'hypothénuse et p, q, les côtés de l'angle droit, — nous l'avons déjà dit en temps utile,— § 36 (fig. 8).

La formule [1] se décompose nécessairement en deux autres, a savoir:

$$a\cos\alpha = p \qquad [2.]$$

$$a\sin\alpha = q \qquad [3.]$$

et en divisant la dernière par l'avant— dernière il vient

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{p}{q}, \text{ ou bien } \; p = q\,\text{tg}\,\alpha \qquad [4.]$$

Les formules [2], [3] et [4] n'ont pas besoin de commentaires; aussi, pour ne pas ennuyer, nous ne les traduisons pas en langage ordinaire. Faisons remarquer seulement que $p = a\cos\alpha$ et $q = a\sin\alpha$ sont, respectivement, les projections de l'hypothénuse sur les axes des abscisses et des ordonnées.

Passons aux triangles scalènes.

Le paragraphe 33 (fig. 6) nous fournit les équations polaires d'un triangle scalène quelconque. Ces équations générales, groupe [A], les voici:

$$\begin{aligned} a &= f(b, \gamma) + f(c, -\beta) \\ b &= f(c, \alpha) + f(a, -\gamma) \\ c &= f(a, \beta) + f(b, -\alpha) \end{aligned}$$

or, en vertu du § 54, formule [5], nous sommes en mesure de transformer ces équations de la manière suivante

$$\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + b\sin\gamma\sqrt{-1} + c\cos\beta - c\sin\beta\sqrt{-1} \\ b &= c\cos\alpha + c\sin\alpha\sqrt{-1} + a\cos\gamma - c\sin\gamma\sqrt{-1} \\ c &= a\cos\beta + a\sin\beta\sqrt{-1} + b\cos\alpha - b\sin\alpha\sqrt{-1} \end{aligned}$$

celles — ci, à leur tour, en vertu du § 1, se décomposent en deux groupes, que voici:

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b &= c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha \end{aligned}\right\} [L]$$

et

$$\left.\begin{aligned} c\sin\beta &= b\sin\gamma \\ a\sin\gamma &= c\sin\alpha \\ b\sin\alpha &= a\sin\beta \end{aligned}\right\} [M]$$

Le groupe [M] est sujet à être présenté ainsi

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

d'où, visiblement, il résulte que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad [5]$$

Comme $a : \sin\alpha = b : \sin\beta$, donc si, dans cette proportion, on fait *l'alternando*, il viendra

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

et, en vertu d'une autre propriété des proportions, non moins connue

$$a + b : a - b = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta$$

ou bien, par suite de la substitution

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta)} \qquad [6.]$$

Multiplions, respectivement, les équations du groupe [L] par a, b, c,—puis, ajoutons deux à deux les nouvelles équations que nous aurons obtenues, et rétranchons de chaque somme l'équation restante du nouveau groupe; il viendra, réduction faite

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \end{aligned}\right\} [N]$$

Nous nous dispensons de traduire en langage ordinaire les formules [L], [N], [5] et [6] du paragraphe courant. Il suffit que ces relations soient déduites analytiquement et sans l'appui des constructions graphiques, pour que notre tâche fut complètement remplie: il ne nous appartient point de relater ici ce que l'on peut trouver dans tout Traité de Trigonométrie. Consignons enfin que l'enseignement de la Trigonométrie se trouve par nous ramené à l'analyse de la fonction f (a, α) et qu'en conséquence, nous n'abusons point des paroles en affirmant que l'équation polaire

$$f\,(a, \alpha) = p + q\sqrt{-1}$$

est la relation fondamentale de la Trigonométrie Rectiligne, relation, qui, à elle seule, étant convenablement transformée et discutée, conduit à toutes les formules de cette branche importante de Mathématiques, ce que précisement nous avons fait voir dans nos §§ 54 — 61.

§ 62. Le génie de notre Analyse est particulièrement propre pour déduire et découvrir des propositions géométriques. Exemples:

Prenons l'équation générale du polygone (fig. 4) § 38:

$$f\,(a, \alpha) + f\,(b, \beta) + f\,(c, \gamma) + \ldots\ldots + f\,(n, \psi) + f\,(s, \omega) = 0$$

en vertu du § 54, formule [5], on peut écrire cette équation de la manière que voici:

$$a\cos\alpha + a\sin\alpha\sqrt{-1} + b\cos\beta + b\sin\beta\sqrt{-1} +$$
$$c\cos\gamma + c\sin\gamma\sqrt{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + n\cos\psi + n\sin\psi\sqrt{-1} + s\cos\omega + s\sin\omega\sqrt{-1} = 0$$

d'où l'on tire

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots\ldots + n\cos\psi + s\cos\omega = 0 \qquad [1.]$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma + \ldots\ldots + n \sin \psi + s \cos \omega = 0 \qquad [2.]$$

en remarquant que les termes qui sont soustractifs ont, respectivement, pour facteurs des cosinus ou des sinus négatifs.

Chacun des termes de [1] est égal à la projection du côté respectif sur l'axe des abscisses; or, il se trouve que la somme de ces termes y est nulle; donc, aussi, *la projection de tout polygone sur l'axe des X est nulle;* et *il en est*, évidemment, *de même*, *quant* à *la projection du polygone sur l'axe des ordonnées.*

§ 63. Si dans le polygone du § précédent, (fig. 4), un côté quelconque, soit, par exemple, le côté (EF), est inconnu quant à sa longueur et quant à son amplitude, il y a lieu, pour le déterminer, de s'enquérir par le calcul ou par l'expérience des coordonnées rectangulaires (x, y) et (x_1, y_1) des sommets E et F; puis, en vertu de notre addition, il faut poser

$$x + y\sqrt{-1} + (EF) = x_1 + y_1\sqrt{-1}$$

et de faire le côté inconnu (EF) égal à f (z, ζ); il viendra alors

$$x + y\sqrt{-1} + f\,(z, \zeta) = x_1 + y_1\sqrt{-1}$$

ou bien

$$x + y\sqrt{-1} + z \cos \zeta + z \sin \zeta \sqrt{-1} = x_1 + y_1\sqrt{-1}$$

relation qui se partage nécessairement en

$$x + z \cos \zeta = x_1$$

$$x + z \sin \zeta = y_1$$

ou bien, la transposition faite

$$z \cos \zeta = x_1 - x \qquad [1.]$$

$$z \sin \zeta = y_1 - y \qquad [2.]$$

[1] et [2] étant élevées au carré, puis ajoutées, il vient, réduction faite

$$z = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \qquad [3.]$$

et enfin, en divisant [2] par [1], il viendra, réduction faite, que l'amplitude cherchée ζ est telle que sa tangeante

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \qquad [4.]$$

§ 64. *Dans le triangle BAC (fig. 12) soit AD la bissectrice de l'angle A; je dis que le côté BC en est partagé en deux segments* m *et* n *proportionnels aux côtés adjacents c et b; de sorte qu'on aura*

$$m : c = n : b$$

Pour démontrer cette proposition, qui est si féconde en corollaires importants, prenons le sommet A pour pôle; la direction de la bissectrice pour base; faisons AD = p; l'angle BDM = φ; désignons l'angle BAD par α; il viendra nécessairement — α pour l'angle DAC; enfin, en vertu de notre addition, posons:

$$f\,(c, \quad \alpha) = p + f\,(m, \varphi)$$
$$f\,(b, -\alpha) = p + f\,(n, \varphi + 180)$$

si l'on divise ces équations, la prenière par c, et la seconde par b, il viendra

$$f\,(1, \quad \alpha) = \frac{p}{c} + f\,(\frac{m}{c}, \varphi)$$

$$f\,(1, -\alpha) = \frac{p}{b} + f\,(\frac{n}{b}, \varphi + 180)$$

ou bien, par suite de la transformation connue

$$\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1} = \frac{p}{c} + \frac{m}{c}\cos\varphi + \frac{m}{c}\sin\varphi\sqrt{-1} \quad [1.]$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{-1} = \frac{p}{b} - \frac{n}{b}\cos\varphi - \frac{n}{b}\sin\varphi\sqrt{-1} \quad [2.]$$

de l'équation [1], on tire

$$\sin\alpha = \frac{m}{c}\sin\varphi$$

et de l'équation [2], il vient par la même voie

$$\sin\alpha = \frac{n}{b}\sin\varphi$$

donc $$\frac{m}{c}\sin\varphi = \frac{n}{b}\sin\varphi$$

ou bien, réduction faite

$$m : c = n : b$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 65. *Démontrons maintenant le théorème de Thalès (fig. 13).*

Faisons l'angle C′B′X = CBX = φ; AC = b; AC′ = b′; AB = c; AB′ = c′; CB = a; C′B′ = a′; prenons le sommet A pour pôle et AX pour base; enfin, en vertn de notre addition, mettons nos deux triangles en équations; il viendra

$$f\,(b, \alpha) = c + f\,(a, \varphi)$$
$$f\,(b', \alpha) = c' + f\,(a', \varphi)$$

En divisant, respectivement, ces deux équations par b et par b'; il viendra

$$f(1, \alpha) = \frac{c}{b} + f\left(\frac{a}{b}, \varphi\right)$$

$$f(1, \alpha) = \frac{c'}{b'} + f\left(\frac{a'}{b'}, \varphi\right)$$

et en égalant ces deux dernières relations

$$\frac{c}{b} + f\left(\frac{a}{b}, \varphi\right) = \frac{c'}{b'} + f\left(\frac{a'}{b'}, \varphi\right)$$

la transformations faite, il vient

$$\frac{c}{b} + \frac{a}{b}\cos\varphi + \frac{a}{b}\sin\varphi\sqrt{-1} = \frac{c'}{b'} + \frac{a'}{b'}\cos\varphi + \frac{a'}{b'}\sin\varphi\sqrt{-1}$$

d'où l'on tire par la voie de décomposition

$$\frac{c}{b} + \frac{a}{b}\cos\varphi = \frac{c'}{b'} + \frac{a'}{b'}\cos\varphi \qquad [1.], \text{ et}$$

$$\frac{a}{b}\sin\varphi = \frac{a'}{b'}\sin\varphi$$

ou bien, la réduction étant faite dans cette dernière équation

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad [2.]$$

et si, dans [1], à la place de $\frac{a'}{b'}$, on met $\frac{a}{b}$, il viendra, réduction faite

$$\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \qquad [3.]$$

enfin, si dans [2] et [3], on fait *l'alternando*, il vient

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{et} \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$$

donc $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, ce qu'il fallait démontrer.

§ 66. Soit donné l'antiparallélogramme ABCD (fig. 14) dont les angles intérieurs, — aux sommets A, B, C, D, — sont, respectivement, égaux à α, $\pi - \beta$, $\pi - \alpha$, β. Demontrons les deux théorèmes de Ptolémée relatifs à ce quadrilatère inscriptible, à savoir que:

$$1^{o} \quad ab = mn + pq$$

$$2^{o} \quad \frac{a}{b} = \frac{pm + nq}{mp + pn}$$

où les diagonales AC et BD sont respectivement représentées par a et par b,— et où les côtés $AB = p$, $BC = n$, $CD = q$ enfin $AD = m$.

Pour démontrer les propositions précitées, prenons le sommet A pour pôle, AD pour l'axe polaire; il viendra en vertu de l'addition de nos fonctions polaires

$$f(a, \varphi) = m + f(q, \pi - \beta) \qquad [1.]$$

ou bien

$$a \cos \varphi + a \sin \varphi \sqrt{-1} = m - q \cos \beta + q \sin \beta \sqrt{-1}$$

et moyennant la décomposition

$$a \cos \varphi = m - q \cos \beta$$

$$a \sin \varphi = q \sin \beta$$

élévons ces équations au carré, puis ajoutons les, il viendra, réduction faite

$$a^2 = m^2 + q^2 - 2 m q \cos \beta \qquad [2.]$$

mais de l'autre part, nous pouvons poser aussi

$$f(a, \varphi) = f(p, \alpha) + f(n, \alpha - \beta) \qquad [3.]$$

Si donc, dans le cours de la transformation, nous n'oublions pas que

$$\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) = \cos [\alpha - (\alpha - \beta)] = \cos \beta$$

et si nous faisons subir à [3] le même mode de transformation que nous avons fait à l'égard de [1], nous aboutirons à:

$$a^2 = p^2 + n^2 + 2 p n \cos \beta \qquad [4.]$$

égalons [2] à [4], il viendra

$$m^2 + q^2 - 2 mq \cos \beta = p^2 + n^2 + 2 pn \cos \beta$$

d'où l'on tire

$$\cos \beta = \frac{m^2 + q^2 - p^2 - n^2}{2 (mq + pn)}$$

mettons, pour plus de contrôle, la valeur de cosinus β dans [2] et dans [4], il viendra, de part et d'autre, les réductions et les simplifications étant faites

$$a^2 = \frac{(pm + qn)(mn + pq)}{(mq + pn)} \qquad [5.]$$

par un calcul tout — à — fait analogue, on détermine pour la seconde diagonale

$$b^2 = \frac{(mq + np)(qp + nn)}{(mp + nq)} \qquad [6.]$$

opérons, à tour de rôle, sur [5] et [6], d'abord la multiplication, puis la division, enfin des résultats obtenus extrayons la racine carrée; il viendra, successivement, les réductions et les simplifications étant faites

$$1^0 \quad ab = mn + pq$$

$$2^0 \quad \frac{a}{b} + \frac{pm + nq}{mq + np}$$

ce que précisement nous nous sommes proposés de déduire.

§ 67. C'est par une voie plus ou moins analogue que nous sommes en mesure de démontrer toutes les propositions relatives aux tangeantes, aux sécantes, à la moyenne et à la quatrième proportionnelle, au partage harmonique, enfin aux polygones réguliers; il en est de même de tous les théorèmes de la nature de celui — ci: *les trois bissectrices d'un triangle se coupent au centre du cercle inscrit dans ce triangle*, etc ... ; mais c'est surtout dans la *Mécanique Générale* que notre méthode est à même de rendre des services remarquables.

Les cadres de notre brochure sont trop restreints, pour que, présentement, nous nous fassions le plaisir de montrer ces choses—là.

En général, à l'instar de ce que nous avons fait entrevoir dans les paragraphes précédents, toute la Géométrie plane est susceptible d'être ramenée au même calcul. A cet effet, il ne faut qu'observer les préceptes suivants:

1° *Mettre la figure proposée en une ou plusieurs équations polaires* où *les inconnues doivent être traitées* à *l'égal des connues*, *et* où, *en vertu de notre addition ou de notre soustraction*, *les composantes sont égalées* à *zéro ou aux fonctions polaires qui semblent le mieux conduire* à *la réponse cherchée;*

2° *transformer les équations polaires en égalités renfermant des quantités réelles et imaginaires*, *égalités explicites. qui sont encore des fonctions polaires;*

3° *partager*, *respectivement*, *ce dernier genre d'égalités en deux relations*, *l'une entre les quantités réelles*, *la seconde*, *entre les ima-*

ginaires; ces nouvelles relations ne sont plus des fonctions polaires, mais bien des équations denonçant seulement les rapports numériques qui existent entre les différentes parties de la figure mise antérieurement en équation polaire;

4° *chasser de ces équations numériques autant des dénominations trigonométriques qu'il est possible, moyennant des procédés dépendant de la sagacité en transformation. A cet effet, il y a souvent lieu de commencr par élèver ces équations au carré et les ajouter ensuite: il en résulte des simplifications telles que voici* $a^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2$;

5° *après cette transformation, oubien le résultat final statue lui—même la réponse à ce qu'on s'était proposé de trouver ou de démontrer, — oubien il y a lieu de discuter le résultat, de le combiner ou de le comparer, tout en pratiquant sur lui toutes les ressources de la réduction et de la simplification.*

Tels sont les préceptes généraux de notre Analyse, dont la qualité essentielle est de ne faire dépendre les propositions de l'enchainement de théorèmes, puisque la transformation des expressions y fait le même office que le syllogisme du raisonnement synthétique: tojours même point de départ, même fonction au début, marche fixement uniforme, généralisation des résultats, enfin possibilité de démontrer, chaque proposition à *prori: voilà les avantages secondaires de notre calcul.*

§ 68. Venons maintenant aux surfaces:

Longueurs, superficies et volumes ne peuvent être calculés s'ils ne sont considérés comme rapports, c'est — à — dire comme quotients,— nombres nécessairement abstraits,— quotients provenant des divisions, où le dividende et le diviseur sont respectivement homogènes, et où ce dernier est ordinairement considéré pour l'unité, unité, que d'ailleurs on peut prendre à volonté et que nous convenons de. représenter par λ lorsqu'il s'agira de longueurs.

Cela posé, soit donnée la fonction f (m, φ). Nous pouvons la considérer pour un produit provenant de la multiplication de n fonctions égales ou inégales. Si $n = h + l$, où h et l sont nombres entiers et positifs, représentons le produit de h facteurs par f (a, α) et celui de l facteurs restants par f (b, β), il viendra alors

$$f(m, \varphi) = f(a, \alpha) \times f(b, \beta) = f(ab, \alpha + \beta) = x + y \sqrt{-1} \quad [1.]$$

Or

$$f(a, \alpha) = x_1 + y_1 \sqrt{-1}$$
$$f(b, \beta) = x_2 + y_2 \sqrt{-1}$$

dont le produit est

$$f(ab, \alpha + \beta) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \sqrt{-1} \qquad [2.]$$

et comme il faut nécessairement que

$$f(ab, \alpha + \beta) = x + y \sqrt{-1} \qquad [3.]$$

par conséquent, si l'on égale [2] à [3], il vient que l'abscisse et l'ordonnée du produit $f(ab, \alpha + \beta) = f(m, \varphi)$ sont respectivement

$$x = x_1 x_2 - y_1 y_2$$
$$y = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

Il est donc bien entendu que le produit de n *fonctions polaires représente analytiquement un rayon vecteur dont la signification géométrique est de déterminer la position d'un point.*

Cette conclusion est générale et formelle: elle se trouve donc vraie dans le cas même où l'amplitude du produit est zéro, et il faut bien qu'il en fût ainsi, puisque c'est un raisonnement direct qui nous y fait aboutir. Cependant, dans le cas que précisement nous venons de mentionner, c'est— à — dire lorsque l'amplitude du produit de deux facteurs polaires est zéro, il y a lieu, non pas de faire de restrictions, mais de conclure aussi à l'égard de surfaces. Faisons immédiatement voir cela, et à cet effet discutons la formule

$$f(ab, \alpha + \beta) = f(a, \alpha) \times f(b, \beta)$$

tout en supposant connues à l'élève les six premières propositions du III Livre de la Géométrie par Legendre.

§ 69. Si les amplitudes des facteurs sont $\alpha = \pm$ k. 360 et $\beta = \pm$ l. 360, — où k et *l* soient entiers, — il est évident qu'alors

$$f(a, \alpha) = f(a, 0) = a = x_1$$
$$f(b, \beta) = f(b, 0) = b = x_2$$

et en faisant le produit, il vient

$$f(ab, 0) = ab = x_1 x_2 = x$$

or, en vertu du § précédent

$$ab = \frac{OA}{\lambda} \times \frac{OB}{\lambda} = \frac{OA \times OB}{\lambda^2}, \text{ et}$$

$$x = \frac{OC}{\lambda}$$

$$\text{donc} \quad \frac{OA \times OB}{\lambda^2} = \frac{OC}{\lambda}$$

$$\text{ou bien} \quad \frac{OA \times OB}{\lambda^2} = \frac{OC \times \lambda}{\lambda^2}$$

et en chassant les dénominateurs, il vient

$$OA \times OB = OC \times \lambda$$

formule faisant voir que le rectangle ayant pour dimensions $a\lambda$ et $b\lambda$, c'est — à dire ayant pour dimensions les modules de nos deux facteurs, équivaut à un rectangle dont la base est égale à $OC = m\lambda = ab\lambda$, et duquel la hauteur = à l'unité linéaire λ.

§ 70. Si dans la formule

$$f(a, \alpha) \times f(b, \beta) = f(ab, \alpha + \beta)$$

l'amplitude $\beta = -\alpha$, alors,— en vertu du § 34, formules [C] (fig. 7),— il vient

$$f(a, \alpha) = p + q\sqrt{-1}$$

$$f(b, -\alpha) = c - d\sqrt{-1}$$

d'où l'on tire, la multiplication et les simplifications étant faites

$$ab = pc + dq + (qc - pd)\sqrt{-1}$$

mais alors $(qc - pd)$ doit nécessairement être zéro, puisqu'une quantité réelle ne saurait autrement être égalée à l'imaginaire qui se trouve dans le second membre, c'est — à — dire il faut que

$$qc = pd \quad \text{ou bien} \quad q : p = d : c \qquad [1.]$$

comme cella effectivement a lieu (fig. 7), puisque les triangles ODA et OCB sont, par construction, semblables.

Notre produit équivaut donc à

$$ab = pc + qd$$

où, en substituant aux rapports les lignes respectives, — voyez § 34 (fig. 7),— il vient

$$OB \times OA = OC \times OD + BC \times AD \qquad [2.]$$

Nos relations [1] et [2] du § courant établissent donc d'une maniére palpable le théorème suivant:

Si des points A et B, choisis à volonté sur les côtés d'un angle quelconque AOB (fig. 7) l'on abaisse des perpendiculaires sur la bissectrice de l'angle AOB, alors, il en résulte: 1° *deux triangles rectangles semblables;* et 2° *le rectangle ayant les hypothénuses pour dimen-*

sions est, quant à sa surface, équivalent à la somme des rectangles qui, respectivement, ont pour dimensions les côtés homologues des angles droits.

Voilà un théorème, auquel nous sommes uniquement arrivés par la voie de notre calcul, théorème qu'on ne cite guère dans les Traités, et pourtant il ne laisse pas d'être important, puisqu'il est très fécond en corollaires et que le théorème le plus important de la Géométrie,— celui de Pythagore,— n'en est qu'un cas particulier: en effet (fig. 7) si dans l'angle AOB, on prend OB = OA = OE et si des points A et E on abaisse les perpendiculaires AD et ED, il se trouvera que les triangles rectangles ODA et ODE seront égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal,— et conséquemment, en vertu du théorème précité, il viendra

$$OA \times OE = OD \times OD + AD \times ED$$

mais OE = OA et ED = AD, donc

$$OA \times OA = OD \times OD + AD \times AD$$

ou enfin

$$\overline{OA}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{AD}^2$$

§ 71. Consignons que dès le § 35, nous étions en mesure de déduire directement le théorème de Pythagore. Si, en effet, on multiplie entre eux les membres correspondants des formules [D] ou [E], il viendra, de part et d'autre

$$a^2 = p^2 + q^2$$

§ 72. Si dans la formule

$$f\ (ab,\ \alpha + \beta) = f\ (a,\ \alpha) \times f\ (b,\ \beta)$$

l'amplitude $(\alpha + \beta) = 90^0$, alors, comme (fig. 15)

$$f\ (a,\ \alpha) = p + q\sqrt{-1}$$
$$f\ (b,\ \beta) = c + d\sqrt{-1}$$

dont le produit est

$$f\ (ab,\ \alpha + \beta) = (pc - qd) + (pd + qc)\sqrt{-1}$$

il vient que

$$ab\sqrt{-1} = (pc - qd) + (pd + qc)\sqrt{-1} \qquad [1.]$$

puisque, par hypothèse, $f\ (ab,\ \alpha + b) = ab\sqrt{-1}$. Donc,—en vertu de ce que nous avons dit dans le § 70,— l'équation [1] du paragraphe courant donne:

$$pc = qd\ , \quad \text{ou}$$
$$1^{o} \quad p : q = d : c, \ \text{et}$$
$$2^{o} \quad ab = pd + qc \qquad [2.]$$

ce qui étant traduit en langage ordinaire nous donne le théorème inédit que voici:

Si sur une transversale passant à volonté par le sommet de l'angle droit COP (fig. 15), l'on prend deux points quelconques I et A, et si de ces points, l'on mène, respectivement, AP perpendiculaire sur l'un des côtés de l'angle droit donné, et IB perpendiculaire à la transversale, il en résultera: 1° *deux triangles rectangles AOP et OIB qui seront semblables; et* 2° *le rectangle ayant les hypothénuses pour dimensions équivaudra à la somme des rectangles, qui, respectivement, ont, pour dimensions les côtés homologues des angles droits.*

Ce théorème ne souffre aucune restriction, et il est fort simple de prouver qu'il a aussi lieu dans le cas, où nous aurions affaire à toute autre transversale, à OL par exemple.

Divisons la formule [2] par 2, il viendra

$$\frac{ab}{2} = \frac{pd}{2} + \frac{qc}{2} \qquad [3.]$$

Construisons maintenant (fig. 16) un triangle rectangle ABC qui soit égal au triangle OPA (fig. 15); menons (fig. 16) DE, DF, FE respectivement parallèles à AC, AB, BC et situées de ces côtés à des distances OB = b, IB = d, OI = c, distances mesurées sur la figure 15; si maintenant, sur ces parallèles, nous prenons, respectivement, trois points quelconques Q, S, V, il viendra que les triangles AQC, ASB, BVC auront, respectivement, pour mesure $\frac{ab}{2}$, $\frac{pd}{2}$, $\frac{qc}{2}$, et, en conséquence, pour les aires de ces triangles, il vient la relation

$$\text{aire AQC} = \text{aire ASB} + \text{aire BVC}$$

égalité équivalente à [3].

Si, sur la transversale OA (fig. 15), au lieu du point I, nous eussions pris le point K, également y choisi à volonté, nous aurions été en mesure de nous procurer, par un moyen semblables, les lieux géométriques marqués par les parallèles KM, KL, LM, en sorte qu'il y aurait eu

$$\text{aire ARC} = \text{aire ATB} + \text{aire BIC}.$$

§ 73. Si dans l'expression du produit f (ab, $\alpha + \beta$), on suppose, à tour de rôle, $\alpha + \beta = 180$ et $\alpha + \beta = 270$, alors, successivement, par une voie analogue à celle que nous venons de signaler, il viendra

$$1^0 \quad q : p = d : c$$
$$- ab = - pc - qd$$
et
$$2^0 \quad q : p = c : d$$
$$- ab = - pd - qc$$

ce qui équivaut évidemment à

$$1^0 \quad q : p = d : c$$
$$ab = pc + qd$$
et
$$2^0 \quad q : p = c : d$$
$$ab = pd + qc$$

formules dont les §§ précédents nous ont déjà fait connaître la signification géométrique.

§ 74. En conclusion des §§ 64 — 69, il y a donc lieu d'établir le principe que voici:

Si en multipliant f *(a, α) par* f *(b, β), l'on obtient un produit, dont l'amplitude soit zéro, 90, 180 ou 270 degrés, alors:* 1° *le résultat* f *(ab, α + β) n'est fonction polaire qu'autant, qu'on lui fait respectivement garder des formes telles que* ± f *(ab, 0)*, ± f *(ab, 90)*, ± *ab* $\sqrt{-1}$; 2° *le résultat* f *(ab, α + β) n'est plus fonction polaire dès qu'il revêt la forme* ab: *il doit alors être traité à l'égal du produit provenant de la multiplication de deux longueurs dépouillées des coefficients vecteurs, et, conséquemment, il y a à y entendre le rectangle ayant pour dimensions les lignes déterminées par les modules des facteurs.*

§ 75. *Proposons-nous maintenant d'exprimer analytiquement une ligne indéfinie, telle que BC (fig. 19) où l'angle BAX = α et OA = c sont des quantités connues.*

Remarquons, à cet effet, que pour un point quelconque E, pris sur la droite au dessus des abscisses, il vient

$$c + f(a, \alpha) = x + y\sqrt{-1}$$

ou bien

$$c + a \cos \alpha + a \sin \alpha \sqrt{-1} = x + y \sqrt{-1}$$

et par suite de la décomposition

$$a \sin \alpha = y$$

$$c + a \cos \alpha = x$$

ce qui équivaut à

$$a \sin \alpha = y \qquad [1.]$$

$$a \cos \alpha = x - c \qquad [2.]$$

et en divisant [1] par [2], il vient

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x - c}$$

d'où l'on tire

$$y - \operatorname{tg} \alpha . x = - c . \operatorname{tg} \alpha . \qquad [3.]$$

Prenez maintenant un point quelconque M, situé au — dessous des abscisses; faites AM = b; il viendra

$$c + f (b, \alpha + 180) = x - y \sqrt{-1}$$

et par la voie d'une transformation semblable, vous obtiendrez pour le point M:

$$y - \operatorname{tg} \alpha . x = - c . \operatorname{tg} \alpha \qquad [4.]$$

donc l'équation [3] représente tous les points de la ligne proposée.

De l'équation $y - \operatorname{tg} \alpha . x = - c \operatorname{tg} \alpha$ à l'indéterminée du premier degré entre deux variables, il n'y a qu'un pas à faire. C'est ici que l'Analyse de Descartes tend la main à la *théorie de nos Fonctions Polaires*, théorie simplifiant les recherches sur *les Courbes*, et moyennant laquelle, il est possible de déduire les résultats par une méthode rigoureusemeni uniforme. Notre „*Analyse de Position*" le prouvera, ouvrage dont nous avons fait mention dans la *Préface*, et duquel la brochure présente constitue précisement *l'Introduction*

APPENDICE.

§ 76. Soient OX, OY, OZ, trois axes perpendiqulaires entre eux (fig. 17). Si dans les plans XOY et XOZ, de l'origine, comme centre, et d'un rayon OB = z, nous décrivons deux demi — circonférences, les axes OY et OZ en seront, respectivement, coupés dans les points E et C, de sorte, qu'en vertu du § 53, il y a lieu d'employer la même expression $z\sqrt{-1}$, pour représenter analytiquement (OC) et (OE), puisque ces rayons vecteurs sont, par hypothèse, tous les deux, perpendiculaires à OX. Mais cela n'est guère possible, puisque (OE) et (OC) ne se confondent point: Comment concilier donc les choses? Voici un moyen pour lever cet embarras.

Consignons tout d'abord (OE) moyennant la notation qu'impute à ce rayon vecteur notre § 53; il vient donc

$$(OE) = f(z,\ 90) = z\sqrt{-1} \qquad [1.]$$

expression que nous appellerons „*Imaginaire du premier ordre.*"

Remarquons maintenant que (OC) est aussi perpendiculaire à OX, et que par conséquent, en vertu du § 53, à l'effet de présenter analytiquement (OC), il faut multiplier z par *la racine carrée de moins un.* Convenons donc de nommer *imaginaires du second ordre* les rayons vecteurs pris sur l'axe OZ, et, quant au coefficient $\sqrt{-1}$, par lequel il faut forcement multiplier *z*, apposons le à *z*, mais de la manière que voici $\underline{-1}\measuredangle$; il viendra donc

$$(OC) = z \times \underline{-1}\measuredangle$$

ce que oralement nous distinguerons en prononçant „z *multiplié par la coracine de moins un.*" Le facteur $\underline{-1}\measuredangle$ est donc le coefficient vecteur des rayons couchés sur l'axe OZ, rayons, lesquels, visiblement, ont zéro pour l'amplitude, et 90 degrés pour la *coamplitude*,— le mot „*coamplitude*" signifiant l'angle que fait un rayon sphérique (OA) avec sa projection horizontale OP.

Cela posé, il viendra pour (OC) la notation que voici:

$$(OC) = f(z,\ 0,\ 90) = z \times \underline{-1}\measuredangle \qquad [2.]$$

Augmentons maintenant de 90 degrés la coamplitude de (OC); (OC) prendra alors la position de (OD), et pour exprimer (OD) en fonction de l'expression [2], nous savons du § 53, qu'il faut multiplier [2] par $f(1,0,90) = \underline{-1}\measuredangle$; il viendra donc

$$(OD) = f(z,\ 0,\ 90) \times f(1,0,90) = z \times \underline{-1}\measuredangle\, \underline{-1}\measuredangle \qquad [3].$$

or, il est acquis du § 16, que

$$(OD) = -z \qquad [4].$$

puisque (OD) est le prolongement de l'axe OX de l'autre côté de l'origine; donc, en égalant [3] à [4], il vient

$$z \times -1\angle 1 - 1\angle 1 = -z \qquad [5.]$$

d'où à la suite de la division, il résulte que

$$-1\angle 1 - 1\angle 1 = -1 \qquad [6.]$$

équation faisant voir que $-1\angle 1$ doit être, dans les calculs, assimilé au facteur $\sqrt{-1}$.

§ 77. Il serait non moins facile de prouver qu'étant données les équations suivantes:

$$p + q\sqrt{-1} + t \times -1\angle 1 = x + y\sqrt{-1} + z \times -1\angle 1$$

$$p + q\sqrt{-1} + t\sqrt{-1} \times -1\angle 1 = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1} \times -1\angle 1$$

il s'en suit nécessairement que

$$\left.\begin{array}{l} p = x \\ q = y \\ t = z \end{array}\right\} \qquad [7.]$$

et réciproquement, étant donrées les équations [7], c'est — à — dire étant données les coordonnées rectangulaires du point A, considéré dans l'espace, si nous multiplions $q = y$ par $\sqrt{-1}$ et $t = z$ par $-1\angle 1$, il en résultera

$$p = x$$

$$q\sqrt{-1} = y\sqrt{-1}$$

$$t \times -1\angle 1 = z \times -1\angle 1$$

équations qui étant ajoutées donneront

$$p + q\sqrt{-1} + q \times -1\angle 1 = x + y\sqrt{-1} + z \times -1\angle 1 =$$

$$F\,(x, y\sqrt{-1}, z \times -1\angle 1) = (OA) = f\,(a, \alpha, \beta) \qquad [8]$$

fonction polaire du rayon sphérique (OA),— (fig. 17),— duquel a, α, β sont, respectivement, *le module*, *l'amplitude* et *la coamplitude*, en sorte que $OI = p = x$; $IP = q = y$; $PA = t = z$; angle $IOP = \alpha$; angle $POA = \beta$.

§ 78. A l'instar de ce que nous avons fait dans le Chapitre II, appliquez les règles du calcul algébrique aux fonctions polaires des rayons vecteurs considérés dans l'espace: vous trouverez que ces règles sont en tous points analogues à celles que nous avons établies dans les §§ 22—53. Si, ensuite, vous analysez les fonctions de la forme f (a, α, β), f(1, α, β), $x + y\sqrt{-1} + z\,-1\angle 1$, vous verrez bien qu'une simple multiplication vous donnera la formule fondamentale de la Trigonométrie Sphérique, et, dans la suite, vous serez en mesure de faire pour la Géométrie à trois dimensions ce que nous avons fait pour la *Géometric Plane*.

Ainsi, par exemple, étant données deux fonctions polaires, dont les modules soient égaux et les quantités angulaires de signe contraire

$$f\,(a,\ \alpha, \beta) = p + q\sqrt{-1} + t \times \underline{-1}\diagup\!1$$
$$f\,(a, -\alpha, -\beta) = p - q\sqrt{-1} - t \times \underline{-1}\diagup\!1$$

il suffit de multiplier entre eux les membres correspondants de ces équations et de réduire, pour qu'il vienne

$$a^2 = p^2 + q^2 + t^2$$

c'est — à — dire que *le carré de la diagonale du parallélipipède de rectangle est égal* à *la somme des carrés des trois côtés contigus.*

§ 79. Nous avons fait voir, § 76 formule [6], que $\underline{-1}\diagup\!1$ doit doit être assimilée à $\sqrt{-1}$; or la différentielle d'une expression imaginaire du premier ordre s'obtient comme celle d'une somme, pourvu toutefois que l'on traite $\sqrt{-1}$ comme un facteur constant; donc la différentielle de l'imaginaire du second ordre

$$y = u + z \times \underline{-1}\diagup\!1$$

est égala à

$$dy \quad \text{ou} \quad d(u + z \times \underline{-1}\diagup\!1) = du + dz \times \underline{-1}\diagup\!1$$

§ 80. Consignons encore qu'en assujétissant nos fonctions au calcul infinitésimal, il vient sans peine que

$$f\,(a, \alpha) = a.\,e^{\alpha\sqrt{-1}} = a\,(-1)^k \qquad (1)$$

$$f\,(1, \alpha) = e^{\alpha\sqrt{-1}} = (-1)^k \qquad (2)$$

avec l'équation de condition

$$k.\,\pi = \alpha \qquad (3)$$

expressions dans lesquelles est représenté par e le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1.

A l'effet de présenter nos recherches *sur les Courbes* dans un état de généralité ne laissant rien à désirer, c'est sous l'aspect des expressions précitées que dans notre „*Analyse de Position*" nous considérerons nos fonctions polaires, tout en les y distinguant sous le double point de vue, comme théorie, et comme instrument de calcul.

NOTE.

§ 81. Voici le problème de la *Quadrature du cercle* résolu graphiquement avec une approximation portée aussi loin que la nature de choses le permet: l'erreur y est moindre que 0,000004, et je ne sais personne qui ait donné une solution plus approchée de ce problème.

Soit OR = R (fig. 18) le rayon du cercle donné. Supposons le problème résolu et soit OG = x = R cos φ, où par x est à entendre la moitié du côté cherché.

Cela posé, en vertu d'une formule connue, il vient

$$x^2 = \frac{\pi}{4} . \; R^2 = R.^2 \cos^2 \varphi$$

$\pi = 3,14159265358 9$

d'où l'on tire

$$\cos^2 \varphi = \frac{\pi}{4} = 0,8862269$$

$\frac{\pi}{4} = 0,7853731$

et en exprimant la tang φ en fonction du cosinus que nous venons de déterminer, il vient sans peine, les calculs étant effectués

$$\tan \varphi = 0,5227232$$

Or, le nombre 0,5227232, étant converti en fraction ordinaire, donne $\frac{23}{44}$ avec une erreur moindre que 0,000004. Si donc nous négligeons cette erreur, il résultera que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{23}{44} . \; R$$

donc pour déterminer OG, il faut:

Mener, à volonté, BC parallèle à OR; prendre BI d'une longueur quelconque et porter cette grandeur 44 fois sur BC; joindre le dernier point de division C et l'extrémité R du rayon donné par la ligne CR; tirer BO et déterminer par là le sommet A; joindre le 23 point de division D et le sommet A par la droite AD, laquelle déterminera nécessairement le point E, en sorte que la ligne OE se trouvera égale à $\frac{23}{24} \times R$. Pour achever la construction, élévez la perpendiculaire RT = OE; tirez OT; prenez OS = OR; enfin, du point S, abaissez SG perpendiqulaire sur le rayon donné: il se trouvera visiblement que OG = x = R cos φ, puisque, par construction, RT = R tg φ = R. $\frac{23}{24}$, avec l'approximation précitée.

Fig. 1.

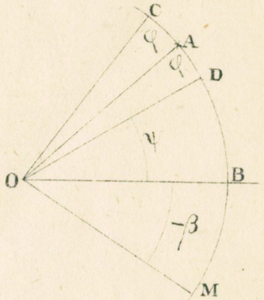


Fig. 2.

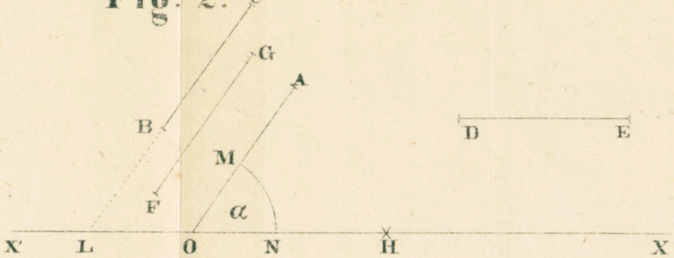


Fig. 3.

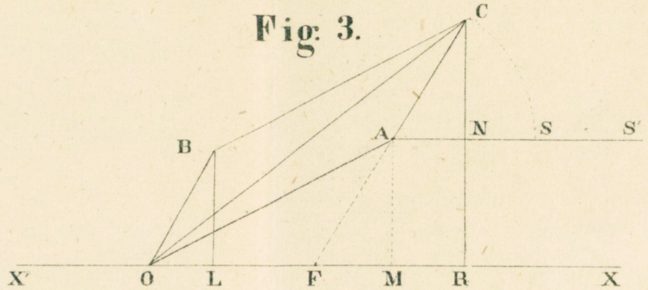


Fig. 4.

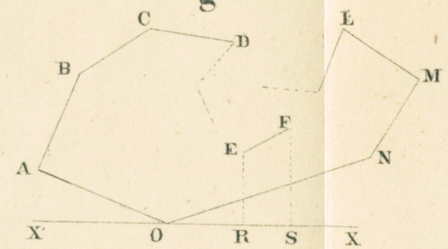


Fig. 5.

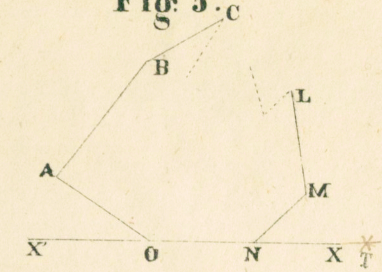


Fig. 6.

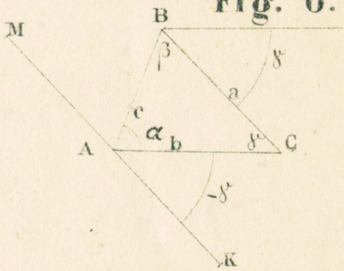


Fig. 7.

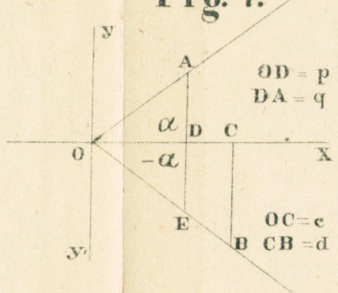


Fig. 8.

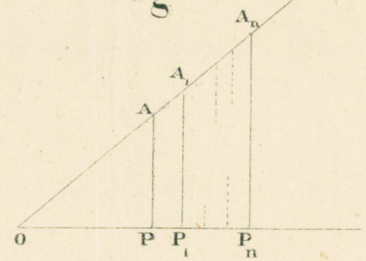


Fig. 9.

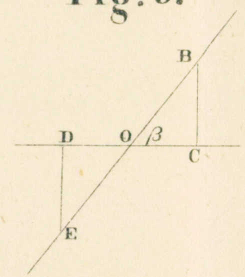


Fig. 10.

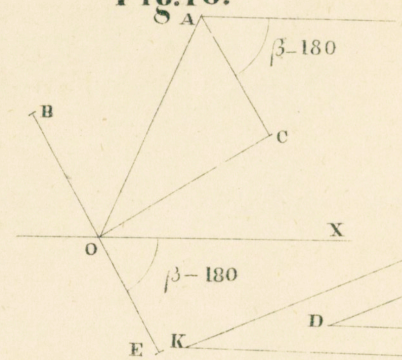


Fig. 16.

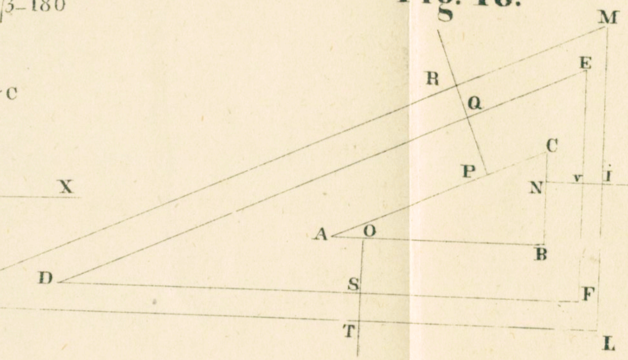


Fig. 19.

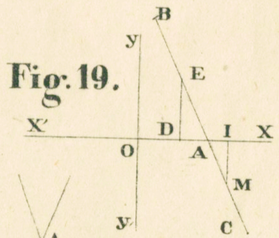


Fig. 11.

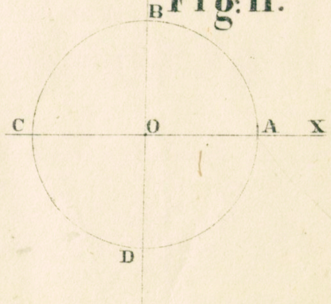


Fig. 12.

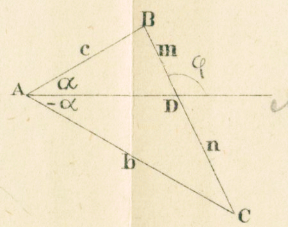


Fig. 13.

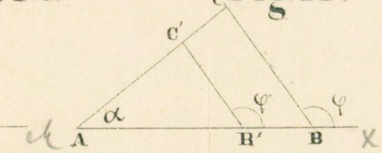


Fig. 14.

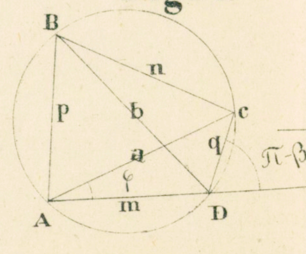


Fig. 15.

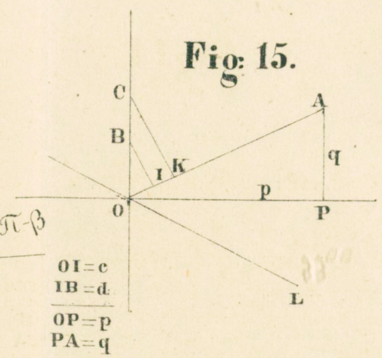


Fig. 17.

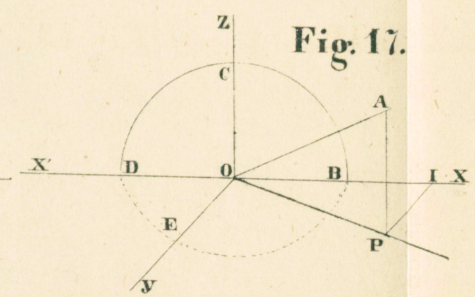
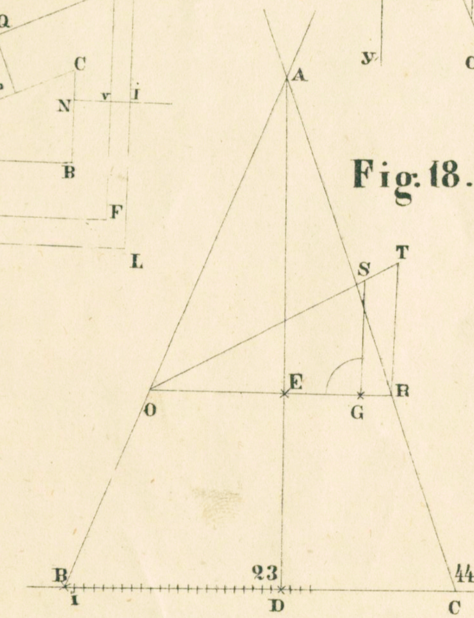


Fig. 18.



Odbit. z litografii Radomskiej

PRIX:

1 Rouble Argent (4 Francs).