ROK I. WARSZAWA.—LUTY 1917 r. № 1

NAUCZANIE MATEMATYKI I FIZYKI

WYCHODZI 4 RAZY DO ROKU POD REDAKCJĄ TADEUSZA GUTKOWSKIEGO

OD REDAKCJI.

Nauki matematyczne i fizyczne zajmują bardzo poważne miejsce w szkole średniej. Nauki te były zawsze jednemi z ważniejszych przedmiotów w szkole dzięki ich wysokiemu pierwiastkowi kształcącemu. Od pewnego zaś czasu znaczenie ich jeszcze bardziej się zwiększa, gdyż zastosowanie ich w życiu dzięki ogromnym postępom techniki ma pierwszorzędną wartość.

To też w całym świecie cywilizowanym dążą teraz do tego, żeby programy matematyki w szkołach wyzyskiwały możliwie najszerzej obie cechy tych nauk. Wszędzie dążą do tego, aby z nauk tych dać to, co ma wartość kształcącą, wybierając materjał tylko większej wartości realnej.

Nauczanie matematyki i fizyki w naszych szkołach odbiega znacznie od wymagań, jakie się stawia tym przedmiotom na Zachodzie. Dzieje się to głównie dzięki temu, że zaraz prawie po powstaniu naszej szkoły władze rosyjskie zniewoliły ją do ścisłego przytrzymywania się programów szkół rządowych. Narzucone programy zdążyły się zżyć z naszą szkołą i mimo, że władze rosyjskie nie wpływają obecnie bezpośrednio na naszą szkołę, to jednak wyzwolenie w pożądanym kierunku jest jeszcze słabe. Nauczamy w większości wypadków tak, jak dawniej, i tego, co dawniej.

NAUCZANIE MATEMATYKI I FIZYKI ma jako główny cel podniesienie wykładu tych przedmiotów w naszej szkole. To też artykuły nasze będą zmierzały głównie do tego celu. Chcielibyśmy bardzo, aby czytelnicy nasi uważali się za należących do redakcji, aby wypowiadali swe myśli i komunikowali swe spostrzeżenia dla spólnego użytku.

Zdajemy sobie sprawę z tego, że zamiłowanie ucznia do przedmiotu jest jednym z najważniejszych czynników podniesienia samego nauczania. To też w każdym numerze NAUCZANIA MATEMATYKI I FIZYKI będziemy podawali zadania do rozwiązania dla uczącej się młodzieży.

Ufni w to, że służymy dobrej sprawie, zwracamy się do kolegów z prośbą o poparcie nas w naszych usiłowaniach.

* * *

NAUCZANIE MATEMATYKI I FIZYKI będzie wychodziło cztery razy do roku: w lutym, kwietniu, październiku i grudniu.

Cena prenumeraty wynosi 1 rb. 50 kop. Jest ona dostępna dla każdego. Pismo nasze nie jest obliczone na zyski. W razie większej ilości prenumeratorów, a co za tym idzie i większych wpływów, będziemy dążyli do rozszerzenia samego wydawnictwa.

* * *

Zwracamy się z prośbą do PP. Autorów i Wydawców o nadsyłanie nam do oceny dzieł, wchodzących w zakres naszego programu.

REDAKCJA.

R. WITWIŃSKI.

O WARUNKU ARYTMETYCZNYM PODZIELNOŚCI WIELOMIANÓW.

(Referat, wygłoszony w Kole matematyczno-fizycznym i w Sekcji fizyko-matematycznej Stowarzyszenia Nauczycielstwa Polskiego).

Niech będą dane dwie funkcje algebraiczne całkowite o spółczynnikach całkowitych

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m, \\ g(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Będziemy zakładali, iż spółczynniki drugiej funkcji nie posiadają dzielnika wspólnego. Funkcje takie, zgodnie z *Gaussem*, będziemy nazywali funkcjami *pierwotnemi*. Możemy więc powiedzieć, iż dane są dwie funkcje całkowite o spółczynnikach całkowitych, z których druga jest funkcją pierwotną. Na mocy znanego twierdzenia *Gaussa*, jeżeli przy obecności tych warunków funkcja $f(x)$ dzieli się całkowicie przez funkcję $g(x)$, wówczas iloraz posiada spółczynniki całkowite, czyli że

$$f(x) = g(x) \,.\, h(x), \tag{2}$$

gdzie $h(x)$ oznacza funkcję całkowitą o spółczynnikach całkowitych. Nadając zmiennej x wartość całkowitą ξ, otrzymamy

$$f(\xi) = g(\xi) \,.\, h(\xi). \tag{3}$$

Ponieważ $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$ są funkcje o spółczynnikach całkowitych, przeto $f(\xi)$, $g(\xi)$ i $h(\xi)$ są liczby całkowite; jednocześnie, przy $g(\xi)$, różnem od zera, liczba $h(\xi)$ jest ilorazem od dzielenia arytmetycznego liczby $f(\xi)$ przez liczbę $g(\xi)$. W ten sposób otrzymujemy bardzo proste i jasne twierdzenie:

Jeżeli funkcja całkowita o spółczynnikach całkowitych algebraicznie dzieli się przez funkcję całkowitą pierwotną, wówczas przy wszelkiej wartości całkowitej argumentu x, nie zamieniającej dzielnika na zero, liczebna wartość pierwszej funkcji dzieli się przez liczebną wartość drugiej funkcji.

Celem artykułu niniejszego jest odwrócenie tego twierdzenia. Zagadnienie to postawimy w sposób następujący: Dane są dwie funkcje całkowite $f(x)$ i $g(x)$ o spółczynnikach całkowitych. Przy pewnych wartościach liczebnych ξ zmiennej x liczba $f(\xi)$ dzieli się całkowicie przez liczbę $g(\xi)$. Pytamy, czy można stąd wyprowadzić wniosek, iż funkcja $f(x)$ algebraicznie dzieli się przez funkcję $g(x)$. Odpowiedź otrzymuje się nader interesująca: przy zachowaniu należytych warunków, wystarcza zbadać jedną tylko liczbę ξ; innemi słowy, jeżeli, przy jednej tylko należycie obranej wartości liczebnej $x = \xi$, liczba $f(\xi)$ dzieli się całkowicie przez $g(\xi)$, to tego już wystarcza, aby i algebraiczne dzielenie $f(x)$ przez funkcję $g(x)$ miało miejsce. Co do wzmiankowanych warunków, to nie zawierają się one w żadnych osobliwych własnościach funkcji $f(x)$ i $g(x)$, natomiast zależą tylko od tego, aby liczba ξ była należycie wielka; mianowicie, za odpowiedź na pytanie powyższe uważamy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. *Jeżeli dwie funkcje* (1) *posiadają spółczynniki całkowite, wówczas zawsze można wskazać dodatnią liczbę L, posiadającą własność następującą: gdy istnieje choć jedna liczba całkowita ξ, większa od L, przy której $f(\xi)$ dzieli się przez $g(\xi)$, wówczas funkcja $f(x)$ dzieli się algebraicznie przez $g(x)$.*

Dowód tego twierdzenia opierać się będzie na kilku innych prostych twierdzeniach. Pierwsze z tych twierdzeń stanowi powszechnie znane twierdzenie algebry wyższej; podajemy tutaj prosty dowód tego twierdzenia w tym celu, aby zachować możliwie przystępny i elementarny poziom wykładu.

Lemat I. *Jeżeli funkcja*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

jest funkcją całkowitą o spółczynnikach rzeczywistych, z których spółczynnik a_0 jest dodatni, zaś pozostałe, według wielkości bezwzględnej, nie są większe od liczby dodatniej a, wówczas przy każdej wartości argumentu x, większej od $1+\frac{a}{a_0}$, funkcja posiada wartość dodatnią.

Dowód. Niech będzie ξ liczba, większa od $1+\frac{a}{a_0}$; będziemy mieli

$$\xi > 1+\frac{a}{a_0}, \quad \xi - 1 > \frac{a}{a_0}, \quad \frac{a}{\xi-1} < a_0. \tag{4}$$

Przejście od nierówności drugiej do trzeciej uskutecznia się drogą mnożenia przez $\frac{a_0}{\xi-1}$, a to jest możliwe, ponieważ a_0 i $\xi - 1$ są liczby dodatnie. Z drugiej strony, z uwagi na to, iż wielkości bezwzględne wszystkich spółczynników $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nie są większe od a, mamy:

$$|a_1\xi^{n-1}+a_2\xi^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\xi+a_n| \leqq a(\xi^{n-1}+\xi^{n-2}+\ldots+1) \leqq$$
$$\leqq \frac{a(\xi^n-1)}{\xi-1} < \frac{a\xi^n}{\xi-1}.$$

Stąd, uwzględniając nierówność (4), otrzymujemy:

$$|a_1\xi^{n-1}+a_2\xi^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\xi+a_n| < a_0\xi^n.$$

Przedstawiając teraz liczbę $f(\xi)$ w postaci sumy dwóch składników

$$f(\xi) = a_0\xi^n + (a_1\xi^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\xi+a_n),$$

wnosimy, iż pierwszy z nich posiada wartość dodatnią, zaś drugi posiada wielkość bezwzględną mniejszą niż pierwszy. Więc suma posiada wartość dodatnią, co było do okazania.

Lemat II. *Niech będą $g(x)$ i $r(x)$ funkcje całkowite o spółczynnikach rzeczywistych:*

$$g(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1}+\ldots+b_{k-1}x+b_k,$$
$$r(x) = c_0x^l + c_1x^{l-1}+\ldots+c_{l-1}x+c_l,$$

w których: 1) spółczynniki starsze są liczby całkowite i dodatnie, 2) wszystkie spółczynniki b_i, według wielkości bezwzględnej, nie przewyższają liczby dodatniej b, i wszystkie *spółczynniki c_i nie przewyższają liczby dodatniej c, 3) stopień drugiej funkcji jest mniejszy od stopnia pierwszej, czyli $l < k$.*

W takim razie, przy wszelkiej wartości argumentu x, większej od $1 + b + c$, ułamek algebraiczny $\frac{r(x)}{g(x)}$ zamienia się na ułamek arytmetyczny właściwy i dodatni.

Dowód. Niech będzie

$$\xi > 1 + b + c. \tag{5}$$

Ponieważ $1 + b + c > 1 + b$, zaś $1 + b \geqq 1 + \frac{b}{b_0}$ (albowiem b_0 jest liczba całkowita dodatnia), przeto $\xi > 1 + \frac{b}{b_0}$; na mocy lematu poprzedniego wnosimy, iż $g(\xi) > 0$. Zupełnie taksamo dowiedziemy, iż, przy obecności związku (5), również $r(\xi) > 0$.

Uważajmy teraz wielomian $g(x) - r(x)$. Ponieważ wykładniki drugiego wielomianu są mniejsze od wykładników pierwszego, zatym wyrazem starszym różnicy $g(x) - r(x)$ jest wyraz $b_0 x^k$, pozostałe zaś spółczynniki tej różnicy, według wielkości bezwzględnej, oczywiście nie są większe od liczby $b+c$, ponieważ spółczynniki różnicy $g(x) - r(x)$ mają postać $b_i - c_j$. Z drugiej strony, ponieważ

$$1 + b + c \geqq 1 + \frac{b + c}{b_0}, \quad \text{przeto} \quad \xi > 1 + \frac{b + c}{b_0},$$

przeto, na mocy lematu powyższego, $g(\xi) - r(\xi) > 0$. Ponieważ przytym $g(\xi) > 0$ i $r(\xi) > 0$, wnosimy stąd, iż

$$1 > \frac{r(\xi)}{g(\xi)} > 0.$$

Lemat III. *Jeżeli funkcje całkowite*

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

i

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n,$$

gdzie $m \geqq n$, posiadają spółczynniki rzeczywiste, które, według wielkości bezwzględnej, nie przewyższają w pierwszym wielomianie liczby dodatniej a, w drugim zaś—liczby dodatniej b; jeżeli przytym b_0 posiada wartość dodatnią, wówczas spółczynniki reszty, która otrzymuje się od dzielenia pierwszego *wielomianu przez drugi, nie przewyższają, według wielkości bezwzględnej, liczby*

$$a\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^{m-n+1}.$$

Dowód. Przystąpimy do dzielenia wielomianu $f(x)$ przez wielomian $g(x)$. Wyraz starszy ilorazu będzie $\frac{a_0}{b_0}x^{m-n}$. Mnożąc dzielnik przez ten wyraz ilorazu i odejmując iloczyn ten od dzielnej, otrzymamy, iż w reszcie pierwszej spółczynnik przy x^{m-i} równa się

$$a_i - \frac{b_i a_0}{b_0},$$

gdzie i przybiera wartości $0, 1, 2, \ldots n$; lecz przy $i > n$ należy położyć $b_i = 0$, gdyż spółczynniki przy $x^{m-(n+1)}$, $x^{m-(n+2)}, \ldots, x^1, x^0$ równają się a_{n+1}, a_{n+2}, a_m.

Ponieważ

$$|a_i| \leqq a, \quad |b_i| \leqq b, \quad |b_0| = b_0,$$

przeto

$$\left|a_i - \frac{b_i a_0}{b_0}\right| \leqq a + \frac{ba}{b_0}, \text{ czyli } \left|a_i - \frac{b_i a_0}{b_0}\right| \leqq a\left(1+\frac{b}{b_0}\right).$$

Innemi słowy, każdy spółczynnik pierwszej reszty, według wielkości bezwzględnej, nie przewyższa wartości granicznej a wielkości bezwzględnych spółczynników dzielnej, pomnożonej przez $1+\frac{b}{b_0}$. Ale teraz możemy uważać pierwszą resztę, jako nową dzielną, którą znowu należy dzielić przez tenże dzielnik. Zatym, każdy spółczynnik drugiej reszty nie przewyższa, według wielkości bezwzględnej, liczby $a\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^2$; spółczynnik trzeciej reszty nie przewyższa, według wielkości bezwzględnej, liczby $a\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^3$, i t. d. Ponieważ liczba dzieleń do otrzymania ostatniej reszty nie może być większą od liczby $m-n+1$, przeto spółczynnik ostatniej reszty nie przewyższa, według wielkości bezwzględnej, liczby

$$a\left(1+\frac{b}{b_0}\right)^{m-n+1}.$$

Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia, stanowiącego przedmiot naszego artykułu.

Niech będą $f(x)$ i $g(x)$ funkcje całkowite (1) o spółczynnikach całkowitych, przyczym stopień drugiej funkcji nie przewyższa stopnia pierwszej. Spółczynnik starszy b_0 drugiego wielomianu będziemy uważali za dodatni; co do wielomianu drugiego, ograniczenia tego nie czynimy. Największą z wielkości bezwzględnych spółczynników pierwszego wielomianu oznaczmy przez a, największą z wielkości bezwzględnych drugiego wielomianu oznaczmy przez b.

Jeżeli podzielimy wielomian pierwszy przez drugi, otrzymamy wówczas pewien iloraz i pewną resztę. Spółczynniki ilorazu, jak również i spółczynniki reszty, mogą okazać się liczbami ułamkowemi; ale ułamki te otrzymywać się będą przy powtórnym dzieleniu starszych spółczynników kolejnych reszt przez b_0; otóż mianownikami tych ułamków (jeżeli je nie skracamy) będą potęgi liczby b_0. Ponieważ dzieleń takich wypadnie wykonać nie więcej $m - n + 1$, przeto mianownikami spółczynników ułamkowych będą dzielniki liczby b_0^{m-n+1}. Jeżeli więc, przedtym, nim dokonamy dzielenia, pomnożymy dzielną przez b_0^{m-n+1}, wówczas spółczynniki ilorazu i reszty będą liczbami całkowitemi. Niech będzie $h(x)$ iloraz, $r(x)$—reszta. Wówczas

$$b_0^{m-n+1} f(x) = g(x) h(x) + r(x). \tag{6}$$

Załóżmy, iż reszta $r(x)$ nie równa się tożsamościowo zeru. W takim razie spółczynnik starszy reszty posiada albo wartość dodatnią, albo wartość ujemną. W tym przypadku ostatnim zmienimy wszystkie znaki spółczynników pierwszego wielomianu, to jest zamiast funkcji $f(x)$ weźmiemy funkcję—$f(x)$; jednocześnie zmienią się na odwrotne znaki ilorazu i reszty, i w ostatniej spółczynnik starszy posiadać już będzie wartość dodatnią.

Teraz wartość bezwzględna spółczynnika starszego dzielnej nie przewyższa liczby ab_0^{m-n+1}. Więc, na mocy lematu III, wartość bezwzględna spółczynników reszty nie przewyższa liczby

$$c = ab_0^{m-n+1}\left(1 + \frac{b}{b_0}\right)^{m-n+1} = a(b_0 + b)^{m-n+1}.$$

Jednocześnie, funkcje $g(x)$ i $r(x)$ czynią zadość wszystkim wymaganiom lematu II. Jeżeli więc wartości bezwzględne spółczynników wielomianu $r(x)$ nie przewyższają liczby c, wówczas przy

$$\xi > 1 + b + c \tag{7}$$

ułamek $\frac{r(\xi)}{g(\xi)}$ jest ułamkiem właściwym dodatnim. Z drugiej strony, związek (6) daje:

$$b_0^{m-n+1} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = h(\xi) + \frac{r(\xi)}{g(\xi)}. \tag{8}$$

Jeżeli liczba ξ jest liczbą całkowitą, wówczas i $h(\xi)$ jest liczbą całkowitą; w ten sposób, część prawa nierówności (8) składa się z liczby całkowitej i właściwego ułamka dodatniego; więc i lewa część nierówności również nie stanowi liczby całkowitej, zatym liczba $f(\xi) : g(\xi)$ nie jest liczbą całkowitą. Z drugiej strony, jeżeli podstawimy wartość $a(b + b_0)^{m-n+1}$ liczby c w nierówność (7), to rozumowanie powyższe doprowadzi nas do wyniku następującego: *jeżeli funkcja $f(x)$ algebraicznie nie dzieli się przez funkcję $g(x)$, wówczas przy wszelkiej wartości całkowitej ξ, większej od liczby $1 + b + a(b + b_0)^{m-n+1}$, liczba całkowita $f(\xi)$ nie dzieli się przez liczbę całkowitą $g(\xi)$. Więc, odwrotnie, jeżeli choć przy jednym całkowitym ξ, większym od liczby*

$$L = 1 + b + a(b + b_0)^{m-n+1} \tag{9}$$

$f(\xi)$ dzieli się przez $g(x)$, wówczas i funkcja $f(x)$ algebraicznie dzieli się przez funkcję $g(x)$. Oto właśnie twierdzenie, które mieliśmy udowodnić.

Dowód twierdzenia zakłada tylko, iż spółczynniki obu wielomianów (1) są liczbami całkowitemi. Zakładając teraz o funkcji drugiej, iż jest pierwotna, otrzymamy twierdzenie:

Na to, aby wielomian $f(x)$ o spółczynnikach całkowitych dzielił się przez wielomian pierwotny $g(x)$, jest koniecznym i dostatecznym, aby przy pewnej, zupełnie dowolnie obranej jednej wartości ξ argumentu x, większej od liczby (9), *liczba $f(\xi)$ dzieliła się przez liczbę $g(\xi)$.*

Dowód. Warunek jest konieczny: jeżeli $f(x)$ dzieli się przez funkcję pierwotną $g(x)$, wówczas $f(\xi)$ dzieli się przez $g(\xi)$ przy wszelkiej wartości całkowitej ξ. Warunek jest dostateczny — na mocy dowiedzionego przez nas twierdzenia.

Warszawa, 15 stycznia 1917 r.

TADEUSZ GUTKOWSKI.

ZASADA ZACHOWANIA ENERGJI W WYKŁADZIE SZKOLNYM.

Zasada zachowania energji ma pierwszorzędne znaczenie w fizyce, a jednak nie jest dostatecznie wyzyskiwana u nas w wykładzie szkolnym, jeżeli sądzić o tym z naszej literatury.

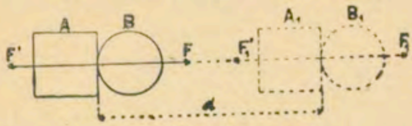
W artykule niniejszym podaję kilka uwag, które wskazują, co można i należy wprowadzić w wykład szkolny.

Najważniejszym pojęciem, od którego pochodzi pojęcie energji, jest praca. Od tego też więc zacznę.

Określeniu samej pracy w naszych podręcznikach nie można może zarzucić nic poważniejszego, wobec tego nie będę się zatrzymywał nad jej określeniem. Zauważę tylko, iż to, co następuje, wymaga również pojęcia pracy ujemnej.

Natomiast brak jest zupełny określenia tak ważnego pojęcia, jak *oddawanie i pobieranie pracy*. A przecież praca w życiu jest prawdziwym towarem, który się kupuje i sprzedaje. Za przyniesienie węgla do mieszkania płacimy, gdyż otrzymujemy wraz z węglem pewną pracę, zaś ten, kto przynosi węgiel, otrzymuje pieniądze za oddaną pracę. Jeżeli kupujemy jakikolwiek przedmiot, to w większości wypadków płacimy dużo więcej za pracę, włożoną w ten przedmiot, niż za materjał surowy. Tak naprzykład, cena przedmiotu szklanego jest prawie niezależną od wartości samego materjału, gdyż przedmiot, ten traci swą wartość, jak tylko się stłucze. Główna wartość przedmiotu szklanego pochodzi od pracy, włożonej w wykonanie tego przedmiotu, w przewiezienie z fabryki do sklepu, w opakowanie przy przewozie i t. p. Pojęcie pobierania i oddawania pracy ma również kapitalne znaczenie teoretyczne i dlatego też należy się nim zająć.

Oddawanie i otrzymywanie pracy. Rozpatrzmy dwa ciała A i B, opierające się jedno o drugie; niech F będzie siłą działania ciała A na ciało B i niech F' będzie siłą przeciwdziałania. Jeżeli przy tych warunkach układ przesunie się do A_1B_1, to siła F wypełnia pracę dodatnią równą Fd i będziemy mówili, że ciało A dostarczyło pracy Fd. Siła F' wypełnia pracę ujemną równą—Fd i powiadamy wtedy, że ciało B otrzymuje pracę Fd.



Rys. 1.

Nie wystarcza więc *do otrzymania pracy przez ciało*, żeby siły, działające nań, wypełniły pracę dodatnią, *należy jeszcze, żeby siły przeciwdziałania tego ciała na środowisko zewnętrzne wypełniły pracę ujemną*. Tak, naprzykład, gdy ciało spada swobodnie, to nie otrzymuje żadnej pracy, chociaż siła, działająca nań, wypełnia pracę dodatnią. W tym wypadku siła przeciwdziałania na ziemię nie wypełnia pracy ujemnej.

Przeciwnie, ciężar w zegarze dostarcza pracy, spadając, bo jego siła działania na łańcuch, podtrzymujący go, wypełnia pracę dodatnią. W tych samych warunkach mechanizm zegara otrzymuje pracę, bo jego przeciwdziałanie na ciężar spadający wypełnia pracę ujemną.

Gdy podnosimy ciężar ręką lub gdy naciągamy sprężynę, to ciężar lub sprężyna otrzymują pracę, bo ich przeciwdziałanie na rękę wypełnia pracę ujemną, zaś działanie ręki wypełnia pracę dodatnią.

Pojęcie o energji. Jeżeli pewne ciało może podlegać pewnym zmianom, w ciągu których ono dostarcza pracy, to powiadają, że ciało to posiada energję. Tak, naprzykład, ciężar w zegarze, podciągnięty do góry, może poruszać mechanizm; mówimy więc, że on posiada energję. Jeżeli ten ciężar P, spadając wolno, dojdzie do dołu, to odda mechanizmowi zegara pracę Ph, jeżeli h oznacza wysokość spadku. Powiemy przytym, że energja ciężaru P zmniejszyła się o Ph.

Jeżeli teraz podniesiemy ręką ciężar, to znowu powiększymy jego energję, dostarczając mu pracy, którą on oddaje znowu całkowicie.

Wogóle będziemy mówili, że energja ciała powiększa się lub też zmniejsza, zależnie od tego, czy ono otrzymuje, czy też oddaje pracę. Powiększamy energję ciężaru, podnosząc go, a sprężyny, naciągając ją. W pierwszym wypadku *podnosimy* ciężar, w drugim odkształcamy sprężynę. Ale może się zdarzyć, że dostarczając pracy pewnemu ciału, nie podnosimy go, ani też nie odkształcamy. Rozpatrzmy, jako przykład, koło rozpędowe, umocowane na osi. Obracajmy to koło ręką. Ponieważ przeciwdziałanie koła wypełnia pracę ujemną, gdy ręka wypełnia pracę dodatnią, to koło otrzymuje pracę. Gdyby ono było wolne na swej osi i gdyby nie doznawało żadnego tarcia, to zachowałoby bez końca swą prędkość, jaką miało w chwili, gdy ręka przestała działać. W tych warunkach ono posiadałoby pewną energję, bo wiadomo, że ciężkie koło rozpędowe w ruchu może poruszać w ciągu pewnego czasu różne maszyny; lecz w miarę, jak te otrzymują pracę, prędkość koła maleje i ono zatrzymuje się, gdy odda całą swą energję.

Energję ciała w spoczynku nazywamy *potencjalną*, zaś ciała w ruchu *kinetyczną*.

Wiadomo jest, jak się wyprowadza wartości liczebne tych dwojakiego rodzaju postaci energji. Wiadomo również, jak można zamieniać jeden rodzaj energji na drugi. To też nie będziemy tu o tym mówili. Przejdziemy odrazu do sformułowania samej zasady. Zaznaczymy tylko, że pod słowem zasada będziemy rozumieli takie prawo fizyczne, które nie może być udowodnione w całej swej rozciągłości, lecz którego słuszność sprawdza się we wszelkich zastosowaniach.

Zasada zachowania energji. 1°. *Jeżeli w ciągu jakiejś przemiany energja ciała wzrasta* (t. j. ciało otrzymuje pewną ilość pracy), *to ciało to może wypełnić pracę większą, niż poprzednio, o wartość otrzymanej pracy;* 2°. *Jeżeli zaś w ciągu jakiejś przemiany energja ciała maleje* (t. j. ciało oddaje pewną ilość pracy), *to ciało to może wypełnić pracę mniejszą, niż poprzednio, o wartość oddanej pracy;* 3°. *Jeżeli w ciągu jakiejś*

Widzimy więc, że w tym wypadku działanie siły jest zależne nie tylko od wielkości samej siły, lecz i od powierzchni, na jaką ta siła działa.

Chodząc po śniegu, grzęźniemy w nim; ale na nartach utrzymujemy się na jego powierzchni. Tu znowu ciężar człowieka działa na większą powierzchnię i wskutek tego działanie siły zmniejsza się.

Tępym nożem trudniej jest ukrajać, niż ostrym, ponieważ powierzchnia dotyku ostrego noża jest mniejszą. W wielu wypadkach możemy powiększyć działanie siły przez zmniejszenie powierzchni i, naodwrót, zmniejszyć działanie siły przez powiększenie powierzchni. Nogi u mebli zakończone są płasko, żeby nie grzęzły w podłogę, boby ją psuły; ale nóżki statywu do fotografji zakończone są ostro, gdyż tu chodzi właśnie o to, żeby one grzęzły cokolwiek w podłogę, żeby aparat stał pewniej. Wozy, przeznaczone do przewożenia wielkich ciężarów, mają bardzo szerokie obręcze na kołach, bo inaczej grzęzłyby w ziemię. Nawet natura ma to na względzie. Ona uposaża zwierzęta, łażące po bagnach, w szerokie stopy lub w palce przerośnięte błoną, bez tego zwierzęta nie mogłyby łazić swobodnie po bagnach. Jeśli zaś działanie siły u zwierzęcia ma być wielkie, to powierzchnia, na którą działa ta siła, jest małą. Tak kły u drapieżników są zakończone ostro, jak również ich pazury. Widzimy więc, jaka jest różnica pomiędzy kopytem łosia a pazurem tygrysa, dzięki roli, jaką odgrywają te dwa narządy.

Z przytoczonych przykładów widać, że działanie siły jest tym większe, im powierzchnia, na którą działa siła, jest mniejsza, i naodwrót. Naturalnym więc jest wprowadzić nowe pojęcie *ciśnienia,* określając je jako *wielkość proporcjonalną do siły i odwrotnie proporcjonalną do powierzchni, na jaką ta siła działa.* Jako miarę tej wielkości przyjmiemy stosunek siły do powierzchni. Jeżeli więc oznaczymy siłę przez f, powierzchnię, na którą ta siła działa, przez s, o, według określenia, ciśnienie p wyraża się wzorem:

$$p = \frac{f}{s}.$$

Można więc powiedzieć, że w przytoczonych przykładach działanie siły jest tym większe, im ciśnienie wytworzone jest większe.

Ze wzoru tego widać, że jeżeli $s = 1$, to p liczbowo równe jest f. Można więc powiedzieć, że *ciśnienie jest to siła, działająca na jednostkę powierzchni.*

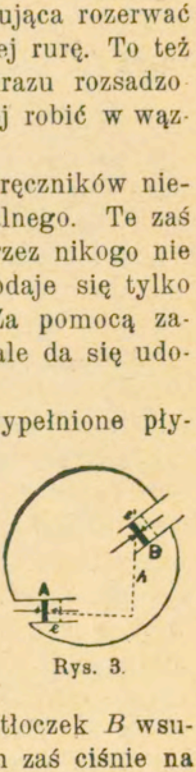
Z ostatniej zależności mamy:

$$f = ps,$$

t. j. siła równa się ciśnieniu, pomnożonemu przez powierzchnię. Ten wzór jest bardzo wielkiej wagi; wskazuje on, że przy jednakowym wszędzie ciśnieniu siła jest proporcjonalną do powierzchni. Wiadomo, że w kotle maszyny parowej ciśnienie jest takie same, jak i w rurze wodowskazowej. Ponieważ powierzchnia kotła jest bardzo wielką w porównaniu z powierzchnią rury, to i siła, usiłująca rozerwać kocioł, jest dużo większa od siły, rozrywającej rurę. To też rura może być szklana, gdy kocioł byłby odrazu rozsadzony. Wszelkie wybuchy jest dużo bezpieczniej robić w wązkich rurkach niż w dużych naczyniach.

Prawo Pascala. W żadnym z naszych podręczników niema dowodu tego prawa, nawet doświadczalnego. Te zaś doświadczenia, które są opisywane, nigdy przez nikogo nie były i zresztą nie mogą być wykonane. Podaje się tylko gotowe już sformułowanie samego prawa. Za pomocą zasady zachowania energji prawo to doskonale da się udowodnić.

Wyobraźmy sobie naczynie całkowicie wypełnione płynem, którego ciężar właściwy jest π. Zobaczymy, jaką jest różnica ciśnień w dwuch małych bardzo płaszczyznach A i B, znajdujących się na różnych poziomach, mianowicie B o h wyżej od A.



Rys. 3.

Wyobraźmy sobie, że te płaszczyzny są powierzchniami tłoczków, poruszających się w walcach, i wyobraźmy sobie, że tłoczek A się wysunął o odległość e, zaś tłoczek B wsunął się o e'. Tłoczek A ciśnie na płyn, płyn zaś ciśnie na *przemiany energja ciała pozostaje niezmienną* (t. j. ciało nie dostaje, ani nie oddaje żadnej pracy, lub też dostaje tyle, co oddaje), *to praca, jaką to ciało może wykonać, jest taka sama, jak poprzednio. I nawzajem.*

Istnieje kilka ciekawych przyrządów, za pomocą których można sprawdzić doświadczalnie wspomnianą zasadę. Jednym z najprostszych przyrządów jest zwyczajne wahadło, złożone z ciężarka, zawieszonego na nici. Jeżeli odchylić wahadło i puścić je, to ono spada coraz prędzej aż do położenia pionowego. W tym położeniu energja potencjalna, którą posiadało wahadło, zamieniła się całkowicie na energję kinetyczną — tutaj wahadło ma największą prędkość. Dzięki tej prędkości, wahadło porusza się dalej i zaczyna spadać, gdy dolatuje do tej samej wysokości, z jakiej wyleciało. Ponieważ w ciągu takiego wahania wahadło nie otrzymuje, ani też nie oddaje pracy, to ono zachowuje swą energję i podnosi się tak wysoko, jak było początkowo.

W rzeczywistości wahadło oddaje pewną pracę, dzięki tarciu w punkcie zaczepienia i dzięki oporowi powietrza. To też energja wahadła powoli maleje — ono podnosi się coraz niżej, aż wreszcie ustaje zupełnie.

Daleko lepsze i ciekawsze potwierdzenia zasady zachowania energji są w zastosowaniach. Podamy parę ciekawych zastosowań, które całkowicie potwierdza doświadczenie.

Warunek równowagi kołowrotu. Do sznurka, nawiniętego na mniejszy walec, przywiązany jest ciężar P, ciągniemy zaś ręką z siłą F za sznur, nawinięty na większy walec. Zobaczymy, jakim warunkom powinny odpowiadać siły, aby się zrównoważały, t. j. żeby kołowrót nie poruszał się lub też poruszał się ruchem jednostajnym. Przypuśćmy, że kołowrót obraca się ruchem jednostajnym. Jeżeli ciężar działa na kołowrót z siłą P, to kołowrót oddziaływa również na ciężar z siłą P', równą i przeciwną do siły P. To samo można powiedzieć i o ręce, że na nią oddziaływa siła F', równa i przeciwna do siły F. Niech w ciągu pewnego czasu ręka zrobi drogę d, zaś ciężar drogę d'. W ciągu tego czasu energja kołowrotu nie zmieniła się, bo on obraca się z taką samą, jak poprzednio, prędkością. Wobec tego praca, jaką kołowrót otrzymał od ręki, równa się pracy, jaką oddał ciężarowi, czyli

$$Fd = Pd'.$$

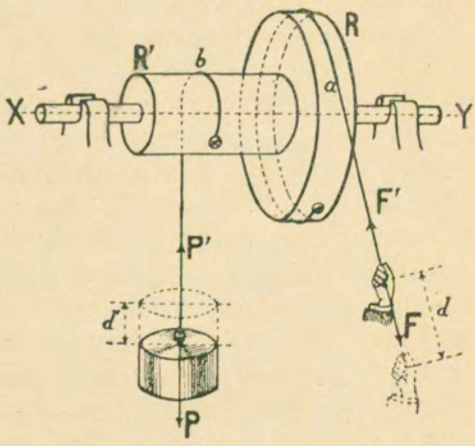
Ale drogi d i d' są proporcjonalne do promieni R i R', t. j.

$$\frac{R}{d} = \frac{R'}{d'}.$$

Jeżeli pomnożymy te dwie równości stronami, to otrzymamy:

$$FR = PR'.$$

Jest to zależność, o którą nam chodziło. Doświadczenie sprawdza ścisłość tych rozumowań, więc ono potwierdza słuszność zasady, na której oparte zostały rozumowania.



Rys 2.

W podobny sposób można byłoby wyprowadzić warunki równowagi wszystkich maszyn prostych.

Pojęcie o ciśnieniu. Wpierw, niż podać inne zastosowania zasady zachowania energji, jestem zmuszony odbiec od tematu, a to w celu dania pojęcia o ciśnieniu, które całkowicie pomijane jest w naszych podręcznikach, a jeśli używa się nawet słowa „ciśnienie", to nigdy w znaczeniu właściwym, bo identyfikuje się to słowo ze słowem „siła", co oczywiście nie jest słuszne. Pojęcie o ciśnieniu jest niezbędne do dalszych zastosowań.

Jeżeli ciśniemy na pluskiewkę, to pomimo że siła, z jaką ciśnie palec, równa się sile oporu drzewa, i pomimo, iż drzewo jest twardsze od ciała, dotykającego pluskiewkę, to pluskiewka grzęźnie w drzewo, a nie w palec. Dzieje się to dzięki temu, że powierzchnia dotyku ze strony drzewa jest dużo mniejsza, niż powierzchnia dotyku ze strony palca.

tłoczek z taką samą siłą w przeciwną stronę. Wobec tego płyn otrzymał pracę od tłoczka, równą fe, gdzie f jest siłą, z jaką płyn ciśnie na tłok. Jeżeli oznaczymy przez p_A ciśnienie płynu na powierzchnię, zaś przez s samą powierzchnię, to będziemy mieli $f = p_A s$, skąd praca, otrzymana przez płyn, jest $p_A se$. Płyn, prócz tego, oddał pracę tłoczkowi B, która oblicza się tak samo i jest $p_B s'e'$, gdzie p_B oznacza ciśnienie w B, zaś s oznacza powierzchnię B.

Po takim przesunięciu się tłoczków energja potencjalna płynu powiększyła się, bo część płynu została wytłoczona z A, a wtłoczona wyżej w B. Przyrost tej energji równa się ciężarowi przelanego płynu z A do B, pomnożonemu przez różnicę poziomów h; jeśli więc v oznacza objętość przelanego płynu, to πv oznacza ciężar przelanego płynu, zaś πvh przyrost energji. Ten przyrost energji równa się różnicy pomiędzy pracą $p_A se$, otrzymaną przez płyn, a pracą $p_B s'e'$, oddaną przez płyn, czyli

$$p_A se - p_B s'e' = \pi vh.$$

Ale se jest objętością wylanego płynu z A, zaś $s'e'$ jest objętością płynu wlanego w B. Te objętości są sobie równe i równają się v. Możemy więc skrócić ostatnią równość i otrzymamy wtedy:

$$p_A - p_B = \pi h.$$

Różnica ciśnień w dwuch punktach płynu równa się ciężarowi właściwemu płynu, pomnożonemu przez różnicę poziomów tych punktów.

Jest to właściwie prawo Pascala, które bywa zwykle podawane w innym sformułowaniu.

Zauważmy, że różnica ciśnień w dwuch punktach A i B jest zależną tylko od ciężaru właściwego płynu i od różnicy poziomów. Jeżeliby więc powiększyło się ciśnienie w A, a płyn nie ścisnął się od tego, t. j. pozostał tej samej gęstości, to różnica ciśnień powinna pozostać ta sama, czyli że przyrost ciśnienia w B równa się przyrostowi ciśnienia w A. Stąd więc wynika, że *jeśli w jakimkolwiek punkcie płynu ciśnienie powiększa się, to przyrost ciśnienia we* *wszystkich punktach płynu jest jednakowy.* Prasa hydrauliczna potwierdza słuszność podanych wywodów.

Opierając się na zasadzie zachowania energji, można byłoby wykazać w podobny sposób słuszność prawa Archimedesa.

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE RÓWNANIA KWADRATOWEGO.

Znaleźć odcinek, którego długość x jest zadana równaniem:

$$x^2 - 2px + qq' = 0,$$

gdzie p, q i q' oznaczają długości zadanych odcinków.

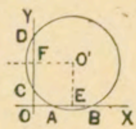
Wiadomo jest, że jeżeli równanie to ma pierwiastki, to naogół ma dwa x' i x'' takie że

$$x'x'' = qq' \qquad \text{i} \qquad x' + x'' = 2p.$$

Poprowadźmy koło O' (rys. 4), przecinające oś OX w A i B, zaś oś OY w C i D.

Łatwo jest wykazać, że jeżeli $OA = x'$ i $OB = x''$ i jeżeli $AE = EB$, to

$$OE = \frac{x' + x''}{2} = p.$$



Rys. 4.

Z drugiej strony wiadomo, że jeżeli $OC = q$ i $OD = q'$, to

$$OC \times OD = OA \times OB.$$

Jeżeli punkt O leży zewnątrz koła, to odcinki q i q' są jednakowego znaku, ich iloczyn jest dodatni. Wtedy x' i x'' są również jednakowego znaku i iloczyn ich jest również dodatni, jeśli zaś punkt O leży wewnątrz koła, to iloczyny qq' i $x'x''$ są ujemne. Biorąc to pod uwagę; możemy napisać, na zasadzie ostatniej równości:

$$qq' = x'x''.$$

Mamy więc zadane punkty C i D koła O' i punkt środkowy E cięciwy AB. Możemy więc wyznaczyć środek O' koła, a co za tym idzie, i promień. Środek O' koła powinien leżeć na osi symetrji odcinka CD i na prostopadłej do OX, przechodzącej przez E.

Więc budowę wypełniamy w następujący sposób. Na osi OX odmierzamy $OE = p$ na prawo lub na lewo, zależnie od tego, czy p jest dodatnie, czy ujemne. Przez punkt E prowadzimy prostopadłą do OX.

Na osi OY odmierzamy odcinki OC i OD odpowiednio równe q i q'. Prowadzimy oś symetrji odcinka CD.

Przecięcie się tej ostatniej z prostą, poprowadzoną przez E, wyznacza środek O' koła. Z O', jako ze środka, zataczamy koło promieniem, równym OC. Jeśli koło to przecina oś OX w A i B, to $OA = x'$ i $OB = x''$.

Uwaga. Jeśli $q = q'$, to punkty C i D zlewają się ze sobą. Wtedy koło powinno być styczne do OY, a środek koła powinien leżeć na prostopadłej do OY, przechodzącej przez C.

Dyskusja. Ażeby zadanie było możebne, t. j. żeby koło przecięło oś OX, należy aby promień OC był większy, lub co najmniej równy odcinkowi EO', lub też, żeby $O'C^2 \geqq O'E^2$. Otóż z trójkąta $O'CF$ mamy:

$$O'C^2 = O'F^2 + CF^2$$
$$= p^2 + \left(\frac{q' - q}{2}\right)^2.$$

Z drugiej strony

$$O'E = OF = \frac{OQ + OQ'}{2} = \frac{q + q'}{2}.$$

Skąd

$$O'E^2 = \left(\frac{q + q'}{2}\right)^2.$$

Więc warunek możliwości zadania jest

$$p^2 + \left(\frac{q' - q}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{q' + q}{2}\right)^2.$$

Albo po uproszczeniu

$$p^2 \geqq qq'$$

lub też

$$p^2 - qq' \geqq 0.$$

Jest to znany z algebry warunek możliwości równania kwadratowego.

Przykład. Podzielić dany odcinek w stosunku średnim i skrajnym. Jest to zagadnienie, znane z geometrji. Rozwiążemy je podanym sposobem.

Niech a oznacza długość zadanego odcinka, a x długość większej części, czyli

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x},$$

skąd

$$x^2 = a^2 - ax,$$

albo

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

albo

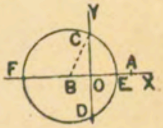
$$x^2 - 2\frac{-a}{2}x + a(-a) = 0.$$

Z ostatniego równania widać, jak należy wypełnić budowę. Na osi OX odmierzamy

$$OA = a,\quad OB = \frac{-a}{2};$$

na osi OY odmierzamy

$$OC = a \text{ i } OD = -a.$$



Rys. 5.

Środek koła rozwiązującego powinien leżeć na prostopadłej do OX, przechodzącej przez B, i na osi symetrji odcinka CD, czyli powinien być w B. Z punktu B, jako ze środka, promieniem równym BC zataczamy koło, które wyznacza odcinek OE, czyniący zadość równaniu. Znaną jest dyskusja co do odcinka OF, więc jej nie podajemy.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA DLA UCZĄCEJ SIĘ MŁODZIEŻY.

Nazwiska osób, które przyślą nam dobre rozwiązanie, będziemy umieszczali w następnych numerach przy rozwiązaniu zadań.

Prosimy o podawanie nazwy szkoły obok nazwiska.

Rozwiązania należy skierowywać do Redakcji, Koszykowa 70 m. 23.

Zadania, skierowywane do Redakcji w celu umieszczenia ich w Nauczaniu Matematyki i Fizyki, winny być nadsyłane wraz z rozwiązaniem.

1. Dane jest koło o środku O i o średnicy $AB = 2r$. W końcach A i B średnicy poprowadzono dwie styczne do koła Δ_A i Δ_B. Rozważamy styczną zmienną, przecinającą Δ_A w C i Δ_B w D.

1°. Wykazać, że $AC \times BD = R^2$.

2°. Zbadać zmienność pola trójkąta COD, gdy styczna CD zmienia swe położenie, i przedstawić graficznie tę zmienność. Za zmienną niezależną przyjąć $AC = x$.

3°. Wykreślić tak CD, żeby trójkąt COD był równoważny z zadanym kwadratem o boku a. Przedyskutować, t. j. podać warunki możebności zadania.

2. Dany jest stożek obrotowy, o promieniu podstawy równym r i o wysokości h. Na podstawie tego stożka wzięta jest cięciwa AB, znajdująca się w odległości x od środka podstawy.

1°. Zbadać pole trójkąta, mającego cięciwę jako podstawę i wierzchołek w wierzchołku stożka.

2°. Określić x tak, żeby trójkąt ten był równoważny z kwadratem o boku a. Dyskusja.

3°. Zastosowanie liczbowe. Kąt pomiędzy wysokością stożka i tworzącą jest $\frac{\pi}{3}$. Znaleźć kąty trójkąta, gdy pole jego jest największe.

3. Pocisk wylatuje z armaty, z prędkością stałą v. 1°. Pod jakim kątem do poziomu należy wystrzelić z armaty, żeby pocisk trafił w punkt, leżący na tym samym poziomie i w odległości x od armaty? Wykazać, że naogół są dwa takie kąty, które są do siebie dopełniającemi. 2°. Pod jakim kątem do poziomu należy wystrzelić z armaty, aby trafić w punkt, leżący na wysokości y, licząc od poziomu armaty i w odległości x od pionowej, przechodzącej przez armatę? 3°. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, do których pocisk armatni może dolecieć. Przyśpieszenie ziemskie jest g. Przypuszcza się, że oporem powietrza można zaniechać.

4. Dany jest kąt prosty XOY. Trójkąt równoramienny MON zmienny ma podstawę swoją ON na OX. Prócz tego promień koła wpisanego w ten trójkąt jest stały i równa się r.

1°. Wykazać, że dwusieczna kąta ONM przechodzi przez punkt stały I, że prosta MN jest styczną do stałego koła i że środek koła zawpisanego przy boku ON trójkąta ONM leży na paraboli, mającej wierzchołek w O.

2°. Zbadać zmienność $PM = y$ w zależności od $OP = x$ i wykreślić krzywą, zatoczoną przez punkt M ($PM \perp ON$).

5. Dany jest trójkąt ABC. Poprowadzić prostą, przecinającą boki AB i AC, tak, żeby dzieliła obwód trójkąta i jego pole na równe części. Jakie warunki powinny być spełnione, aby zadanie miało dwa rozwiązania, jedno lub wcale?

TEMATY Z ALGEBRY NA EGZAMINACH POWAKACYJNYCH W ROKU 1916.

Następujące cztery zadania z algebry były dane na dwuch sesjach na egzaminach powakacyjnych.

I A. Rzeka płynie z prędkością 3 km. na godzinę. Wioślarz na drogę od A do B (położonych nad tą rzeką) i z powrotem zużył czasu o $1\frac{1}{4}$ godziny więcej, niżby go potrzebował dla przebycia tej samej drogi, płynąc po wodzie stojącej. Następnego dnia tenże wioślarz dobrał sobie pomocnika i wówczas łódka przebyła tę samą drogę od A do B i z powrotem w czasie o 36 minut dłuższym od tego, jakiego potrzebowałaby dla przepłynięcia takiej odległości po wodzie stojącej. Z jaką prędkością płynie po wodzie stojącej łódka, poruszana siłą pierwszego wioślarza, i jaka jest odległość od A do B, jeżeli pomoc drugiego wioślarza zwiększa prędkość łódki w wodzie stojącej o $33\frac{1}{3}$ %?

I B. Postęp arytmetyczny ma $15\sqrt[4]{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt{1+\sqrt{3}}$ wyrazów. 8-my wyraz tego postępu równa się pierwiastkowi równania

$$100^{\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = 10.$$

Znaleźć sumę wszystkich wyrazów tego postępu.

II A. Na szosie, prowadzącej do fabryki, złożono kilka stosów kamieni w odległości 500 metr. jeden od drugiego. Odległość między pierwszym i ostatnim stosem była o $1\frac{1}{2}$ kilometra mniejsza, niż odległość od fabryki do najbliższego stosu. Woźnica, któremu polecono zwieźć kamienie do fabryki, wyruszył z niej o godz. 6-ej rano i, zabierając za każdym razem na wóz po jednym stosie, na g. 1 m. 48 pp. zwiózł wszystkie kamienie. Próżnym wozem woźnica jechał z prędkością 5 km. na godzinę, naładowanym zaś 2 km. na godzinę; na ładowanie każdego stosu zużywał $\frac{1}{4}$ godziny. Obliczyć, ile stosów kamieni leżało na szosie.

II B. Obliczyć sumę wymiernych wyrazów rozwinięcia $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^n$ według dwumianu Newtona, jeżeli n = zasadzie logarytmów, przy której logarytm liczby $0{,}01\sqrt{10}$ równa się $-1{,}5$.

W zadaniach I A i II A widać, że autor chciał zadanie zrobić nieco więcej skomplikowanym od zadań treści podobnej, które znajdują się zwykle w zbiorach zadań. Ale zamiary skomplikowania skierowano w złą stronę. Bo zamiast tego, żeby wprowadzić pierwiastek dyskusji, co jest przecie rzeczą bardzo ważną w algebrze, to autor daje wioślarzowi pomocnika, który zwiększa prędkość łódki w wodzie stojącej o $33\frac{1}{3}$ %! albo daje prędkość 5 km. na godzinę z wozem próżnym i 2 km. z naładowanym! Tematy, które na pozór są wzięte z życia przez nieudatne komplikowanie, nie mają nic spólnego z życiem, a co ważniejsza, nie mogą służyć dostatecznym kryterjum rozwoju zdającego, gdyż nie zawierają tego, co powinno być wymagane od maturzystów.

Najciekawsze jednak pod względem niedorzecznego komplikowania są tematy I B i II B. Wystarczy przeczytać same te tematy, ażeby dać im należytą ocenę. Tematy tego rodzaju dawno już zostały potępione w Kole Matematyczno-Fizycznym i w Sekcji Fizyko-Matematycznej przy S. N. P.

Co powiedziałby autor takiego zadania, gdyby w podręczniku języka nowożytnego znalazł następujące zdanie do przetłumaczenia: „Azja jest największą częścią świata, a kanarek jest żółty?” Czyż pomiędzy tym zdaniem a poruszanemi tematami niema zupełnej analogji? Można podziwiać, że podobne tematy służyły jako kryterja dojrzałości naszej młodzieży, a właściwie należy żałować, że osoby, dające takie tematy, decydowały o jej dojrzałości.

PROGRAM MATEMATYKI NA EGZAMINACH MATURALNYCH.

Przy rozsyłaniu tematów z matematyki do szkół delegacja egzaminów maturalnych za mało liczyła się z programami szkół, szczególniej zaś tych, które wyzwoliły się w znacznej mierze od programów szkół rosyjskich. Gdyby przyszła delegacja postępowała tak samo, to szkołom naszym zagrażałaby silna reakcja w nauczaniu matematyki. To też w Sekcji Matematyczno-Fizycznej opracowano i przyjęto na posiedzeniu dnia 9 b. m. program wymagań z matematyki na egzaminach maturalnych, który przeciwstawia się programowi szkół rosyjskich. Pomiędzy temi krańcowemi programami są, oczywiście, możliwe inne pośrednie. Postanowiono więc na tym samym posiedzeniu zwrócić się do szkół z prośbą o nadesłanie do Sekcji programów matematyki, aby na zasadzie ich można było opracować programy wymagań dla tych szkół Wymagania te mają gwarantować z jednej strony dostateczny rozwój i zasób wiadomości maturzysty, z drugiej zaś strony mają gwarantować szkole, że z programem jej będzie się liczono przy ewentualnym rozsyłaniu tematów.

Program, opracowany i przyjęty przez Sekcję, jest następujący:

ARYTMETYKA.

Liczby równe i nierówne. Układ dziesiętny liczenia.

Dodawanie. Przemienność, łączność. Teorja dodawania liczb wielocyfrowych.

Odejmowanie. Odejmowanie sumy. Dodawanie i odejmowanie różnicy. Przemienność dodawania i odejmowania łącznie. Podstawowa własność różnicy. Odejmowanie bezpośrednie i odejmowanie liczb wielocyfrowych.

Mnożenie. Przemienność. Łączność. Rozdzielność. Mnożenie liczb jednocyfrowych. Mnożenie liczby wielocyfrowej przez jednocyfrową. Mnożenie liczb wielocyfrowych.

Dzielenie. Iloraz z niedomiarem i iloraz z nadmiarem, reszta. Podstawowa własność dzielenia. Teorja dzielenia praktycznego.

Podzielność. Rozdzielność. Warunek wystarczający podzielności iloczynu przez pewną liczbę. Dzielenie iloczynu przez pewną liczbę. Dzielenie liczby przez iloczyn.

Cechy podzielności przez 2, 5, 4, 25, 9, 3. Największy spólny dzielnik (sposobem kolejnego dzielenia) i jego podstawowa własność. Najmniejsza spólna wielokrotna.

Liczby pierwsze. Rozkładanie na czynniki pierwsze. Zastosowanie do odnajdywania N. S. D. i N. S. W.

Ułamki. Określenie. Iloraz dokładny dwu liczb. Podstawowa własność ułamka. *Dodawanie i odejmowanie. Mnożenie.* Przemienność, łączność, rozdzielność. *Dzielenie.*

Ułamki dziesiętne. Działania. Iloraz przybliżony z dokładnością do 0,1; 0,01,...

Zamiana ułamków dziesiętnych na zwyczajne i naodwrót (ułamki okresowe nie są wymagane).

Związki proporcjonalne.

ALGEBRA.

Liczby względne. Suma, przemienność, łączność. Różnica. Iloczyn, przemienność, łączność i rozdzielność. Iloraz. Potęga. Pierwiastek. Nierówność liczb względnych.

Wyrażenia całkowite. Dodawanie i odejmowanie. Mnożenie. Wzory na kwadrat dwumianu, iloczyn sumy przez różnicę, sześcian dwumianu. [Dwumian Newtona. Dzielenie jednomianów i wielomianów.

Cecha podzielności przez $x - a$. Największa liczba pierwiastków wielomianu stopnia n.

Wyrażenia ułamkowe.

Funkcja linjowa. Przebieg jej zmienności. Wykres i własności wykresu. Równanie i nierówność pierwszego stopnia. Układy dwu równań z dwiema niewiadomemi. Teorja rozwiązywania takich układów. Układ dwu równań I-go stopnia z dwiema niewiadomemi. Dyskusja takiego układu.

Pierwiastek kwadratowy całkowity i przybliżony. Określenie pierwiastka z liczby nie będącej kwadratem. Działania najprostsze z pierwiastkami.

Trójmian kwadratowy. Formy kanoniczne. Przebieg zmienności. Minimum lub maximum trójmianu kwadratowego. Przedstawienie graficzne. Równanie i nierówność kwadratowe. Dyskusja równań i zadań drugiego stopnia.

Układ dwu równań drugiego i pierwszego stopnia.

Funkcja homograficzna.

Najprostsze równania kwadratowe i ich krzywe.

Postęp arytmetyczny i geometryczny. (Przy wyprowadzeniu własności postępu należy wyzyskać metodę indukcji). Logarytmy. (Teorja logarytmów powinna być wymagana tylko o tyle, o ile tego wymaga teorja rachunku za pomocą logarytmów). Procenty składane.

Liczby niewymierne. Określenie liczby niewymiernej. Równość i nierówność liczb rzeczywistych. Działania z liczbami niewymiernemi.

Teorja granic. Określenie granicy zmiennej. Granica sumy, iloczynu, ilorazu i pierwiastka. Pojęcie o ciągłości. Równania ułamkowe.

Badanie funkcji. Pochodna funkcji całkowitej, ułamkowej i pierwiastkowej i zastosowanie jej do badania funkcji.

GEOMETRJA.

Linja prosta i płaszczyzna. Kąty. Proste prostopadłe.

Trójkąty. Trójkąt równoramienny. Wypadki równości trójkątów.

Prostopadłe i pochyłe. Trójkąty prostokątne. Wypadki równości.

Określenie miejsca geometrycznego. Miejsce geometryczne punktów jednakowo odległych od dwu punktów lub od dwu prostych.

Proste równoległe. Suma kątów w trójkącie i wielokącie wypukłym.

Równoległoboki.

Figury symetryczne względem punktu i względem prostej. Równość figur symetrycznych płaskich. Przesunięcia równoległe figury płaskiej niezmiennego kształtu.

Koło. Przecięcie koła i prostej. Styczna do koła. Dwa określenia stycznej. Łuki i cięciwy. Wzajemne położenie dwu kół.

Wszelkie przesunięcie figury płaskiej na swej płaszczyźnie sprowadza się do obrotu lub do przesunięcia prostolinjowego.

Odcinki proporcjonalne. Twierdzenie Talesa. Prosta równoległa do podstawy trójkąta. Jednokładność i podobieństwo. Własność dwusiecznych kątów, wewnętrznego i zewnętrznego, w trójkącie. Miejsce punktów, których stosunek odległości do dwu punktów stałych jest stały. Pęk harmoniczny.

Zależność między elementami linjowemi trójkąta.

Wielokąty foremne. Wpisanie w koło kwadratu, sześciokąta foremnego, trójkąta równobocznego i dziesięciokąta. Wzór na podwojenie i na bok wielokąta opisanego. Wyprostowanie okręgu.

Czwarta proporcjonalna. Średnia proporcjonalna. Zastosowanie algebry do zadań konstrukcyjnych. Rozwiązanie graficzne równania kwadratowego.

Pola. Pole prostokąta, równoległoboku, trójkąta, trapezu, wielokąta. Stosunek pól figur podobnych. Pole wielokąta foremnego wypukłego. Pole koła, wycinka i odcinka kołowego. Stosunek pól dwu kół.

*

* *

Płaszczyzna i prosta. Wyznaczenie płaszczyzny. Proste i płaszczyzny równoległe. Prosta i płaszczyzna prostopadłe do siebie. Prostopadła i pochyłe poprowadzone z punktu do płaszczyzny.

Kąty dwuścienne. Kąt linjowy. Płaszczyzny prostopadłe. Rzut figury płaskiej.

Przesunięcia prostolinjowe. Obrót dookoła osi. Symetrja względem punktu, prostej i płaszczyzny. Ta ostatnia sprowadza się do pierwszej.

Kąty bryłowe. Kąty bryłowe trójścienne. Kąty trójścienne symetryczne. Podstawowa własność kątów trójściennych. Granica sumy kątów płaskich kąta bryłowego wielościennego. Kąty trójścienne spełniające się. Wypadki równości kątów trójściennych.

Jednokładność. Przecięcia płaskie równoległe kąta bryłowego.

Bryły. Graniastosłup. Ostrosłup.

Zasadnicze wiadomości, odnoszące się do symetrji sześcianu i ośmiościanu foremnego.

Objętość graniastosłupa, ostrosłupa i ostrosłupa ściętego o podstawach równoległych. Stosunek objętości brył podobnych. Równoważność brył symetrycznych.

Walec z podstawą kołową, płaszczyzna styczna. Stożek obrotowy z podstawą kołową, płaszczyzna styczna, przecięcie równoległe do podstawy. Kula, przecięcie płaskie. Bieguny. Płaszczyzna styczna. Stożek i walec opisane.

Powierzchnia walca, stożka, stożka ściętego, kuli, pasa, czaszy.

Objętość walca, stożka, stożka ściętego, kuli, wycinka i odcinka.

*
* *

Elipsa. Styczna. Zadania proste na styczną. Elipsa, jako rzut koła. Przecięcie się elipsy z prostą.

Hiperbola. Styczna asymptoty. Zadania proste na styczną.

Parabola. Styczna. Zadania proste na styczną. Przecięcia płaskie stożka i walca obrotowego.

TRYGONOMETRJA.

Funkcje kołowe (sinus, cosinus, tangens i cotangens).— Zależność pomiędzy funkcjami kołowemi tego samego łuku. Funkcje kołowe niektórych łuków $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, i t. p.

Teorja rzutów.

Wzory na dodawanie kątów, dla sinusów, cosinusów i tangensów. Wyrażenia dla sin $2a$, cos $2a$, tg $2a$. Wyrażenie funkcji kąta a w zależności od tg $\frac{a}{2}$. Mając cos $a=b$, znaleźć sin $\frac{a}{2}$ i cos $\frac{a}{2}$. Umieć wybrać wartość odpowiednią do zadanego łuku a.

Przekształcanie na iloczyn sumy i różnicy sinusów, cosinusów lub tangensów. Zadanie odwrotne. Wyrażenie

$$a \cos (\omega t + \alpha) + b \cos (\omega t + \beta),$$

gdzie tylko t oznacza zmienną.

Pochodna sinusa, cosinusa i tangensa i zastosowanie jej do badania funkcji trygonometrycznej.

Używanie tablic cztero lub pięciocyfrowych w układzie dziesiętnym lub sześćdziesiętnym.

Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

Rozwiązywanie i dyskusja prostszych równań trygonometrycznych.

Zależność pomiędzy bokami i kątami trójkąta. Rozwiązywanie trójkątów. Zastosowanie trygonometrji do geometrji.

NOWE KSIĄŻKI.

Romuald Witwiński. **Zbiór zadań na dyskusję i na badanie zależności funkcjonalnej.** Z przedmową *L. Zarzeckiego.* Jednym z głównych zadań algebry jest rozwinięcie pojęcia funkcji. Jednakże istniejące u nas zbiory zadań z algebry prawie bez wyjątku nie czynią zadość temu wymaganiu. Pan Witwiński postawił sobie, jako cel, wypełnić tę lukę. On podaje szereg zadań na funkcję linjową, sporo zadań na trójmian kwadratowy i wreszcie na inne funkcje, które dają się badać sposobem elementarnym. Sporo zadań podanych jest z rozwiązaniem, co ułatwia zapoznanie się z metodami badania funkcji.

Tego rodzaju zadania powinny stanowczo być dawane w szkole do przerabiania, tym bardziej, że czasu na nie nie brak, gdyż można korzystać z czasu, przeznaczanego dawniej na ułamki łańcuchowe, równania nieoznaczone i kombinatorykę. Zresztą na te zadania powinno się znaleźć czas również i w klasach młodszych. To też zbiór zadań pana Witwińskiego należy gorąco zalecać.

Stefan Świderski. **Zarys Kosmografji. Cz. I.** Nauczanie kosmografji w szkole średniej pozostawia wiele do życzenia. Nauczanie innych nauk zrobiło wielkie postępy, nauczanie zaś kosmografji prowadzi się zwykle po dawnemu. Trudności w polepszeniu wykładu upatrywano zwykle w tym, że trudno jest uposażyć szkołę średnią w taką ilość przyrządów, aby wszyscy uczniowie mogli z pożytkiem badać jednocześnie, ponieważ przyrządy te są dość kosztowne. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że przyrządy, któremi operował Kopernik, nie są bynajmniej bardzo drogie i nawet bardzo dostępne, to przyjdziemy do wniosku, że jest zupełnie rzeczą możebną dać uczniowi te podstawy, na których jest oparty układ Kopernika. A to jest przecie najważniejsze zadanie kosmografji w szkole średniej. Jednakże do tego, aby uczeń mógł przystąpić do krytycznego badania układu Kopernika, powinien obserwować niebo w ciągu jednego roku co najmniej. Na zasadzie tych spostrzeżeń, może dopiero przystąpić do kursu tego, który wykłada się zwykle w szkołach. Dążenia do poprzedzenia wykładu kosmografji obserwacjami nieba są coraz silniejsze, one odbiły się nawet echem i na naszym gruncie.

Wielu upatruje wielką trudność w wyprowadzaniu klasy pod gołe niebo—szczególniej w nocy. Rzeczywiście jest to rzecz dość trudna, ale nie tyle ze względu na zorganizowanie samych obserwacji nocnych, ile ze względu na niezrozumienie doniosłości takich obserwacji przez zarządy szkolne, które często nie tylko, że nie popierają usiłowań nauczyciela, ale raczej sprzeciwiają się im. To też znalazło się kilku pomysłowych pedagogów, którzy niebo naturalne zastępują sztucznym. To niebo sztuczne jest robione czy to w postaci wielkiego globusu, mieszczącego wewnątrz całą klasę, czy to w postaci mnóstwa kulek, imitujących gwiazdy i zawieszanych w klasie. Nie należy chyba przekonywać nikogo, że tego rodzaju „poglądowe metody" nie są w stanie zastąpić obserwacji, i że wobec tego nie rozwiązują trudności.

Na jedno należy się zgodzić, a mianowicie, że obserwacje powinny poprzedzać kurs systematyczny kosmografji.

Jednakże nie wydaje nam się słusznym, ażeby zarzucić wykład kosmografji, jeśli obserwacje nie dadzą się uskutecznić. Nie można chyba wyobrazić sobie człowieka z maturą, nie zdającego sobie dokładnie sprawy z ruchów choćby naszej ziemi.

Póki więc nie wprowadzimy obowiązkowych obserwacji, nie mamy innej drogi do wykładu, jak tylko 1° opis obserwacji i ich wyników i 2° na zasadzie tych wiadomości, przyjętych dogmatycznie, budowanie teorji ruchu we wszechświecie, a szczególniej w naszym układzie. Główne braki niektórych istniejących dotychczas podręczników szkolnych polegały na tym, że ta druga część nie była skonstruowana należycie. W podręczniku swym pan Świderski ogranicza się do podania w krótkiej bardzo formie rezultatów badań, pozostawiając, jak zaznacza w przedmowie, do dopełnienia nauczycielowi. Oczywiście najlepiej byłoby, gdyby nauczyciel miał możność zrobić te uzupełnienia, obserwując niebo wraz z uczniami. Część teoretyczna jest starannie rozwinięta. Opisy dowodów natury fizycznej, jak odchylenie od pionu ciał spadających, wahadło Foucaulta i t. p. są zrobione wyraźnie i starannie. To samo da się powiedzieć o dowodach i rozważaniach matematycznych. Podręcznik p. Świderskiego ma tę właśnie zaletę, że strona teoretyczna dobrze w nim jest rozwinięta.

Podręczniki, używane przeważnie w naszych szkołach, mają pod tym względem duże braki. To też książka pana Świderskiego, jako wypełniająca je, powinna być przyjęta przychylnie.

Podręcznik p. Świderskiego nadaje się doskonale również dla wykładu teoretycznego kosmografji, jeżeli ten wykład został poprzedzony systematycznemi obserwacjami.

REDAKTOR I WYDAWCA TADEUSZ GUTKOWSKI.