Rok II Warszawa, Luty 1918 r. № 5

NAUCZANIE MATEMATYKI i FIZYKI

WYCHODZI W LUTYM, KWIETNIU, PAŹDZIERNIKU I GRUDNIU

TREŚĆ:

Prenumerata wynosi 5 marek rocznie w Warszawie i na prowincji. Cena oddzielnego zeszytu wynosi 1 m. 50 fen.

Redakcja: Koszykowa 70 m. 23.

Administracja: Księgarnia M. Arcta, Nowy-Świat 35.

Rok II. Warszawa, Luty 1918 r. № 5

NAUCZANIE
MATEMATYKI I FIZYKI

WYCHODZI 4 RAZY DO ROKU POD REDAKCJĄ TADEUSZA GUTKOWSKIEGO

ALEKSANDER ŁAPAREWICZ.

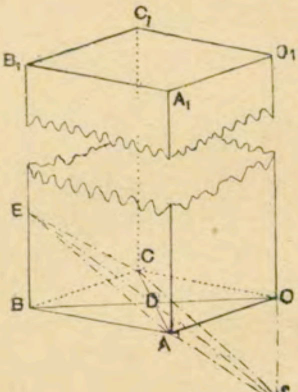
ZAGADNIENIE NAJMNIEJSZOŚCI W PLASTRZE MIODU.

W plastrze miodu spostrzegamy dwie warstwy szczelnie do siebie przylegających, doskonale równych komórek woskowych, przedstawiających, na pierwszy rzut oka, graniastosłupy foremne sześciokątne prostopadłe. Krawędź podstawy takiego graniastosłupa zawsze mierzy 2,7 mm., wysokość jest do niej w stosunku, jak 25 : 6.

Dwie warstwy, składające się na jeden plaster, zdają się być względem siebie cokolwiek przesuniętymi, ponieważ z sześciu bocznych krawędzi dowolnej komórki jednej warstwy tylko co druga stanowi przedłużenie jednej z trzech bocznych krawędzi, należących do trzech różnych komórek drugiej warstwy, trzy zaś pozostałe boczne krawędzie wspomnianej komórki pierwszej warstwy spodkami swymi leżą w środkach sześciokątów, stanowiących podstawy wspomnianych komórek drugiej warstwy. Każda więc strona płaszczyzny, rozgraniczającej dwie te warstwy, pokryta jest siecią sześciokątów foremnych, tak iż boki sześciokąta jednej strony dzielą pole sześciokąta drugiej na trzy równe ukośniki, których wspólny wierzchołek przypada w środku pierwszego sześciokąta.

Bliższe rozważanie wykazuje, że ukośniki te nie leżą na jednej płaszczyźnie, lecz stanowią kąt trójścienny z wierzchołkiem na przedłużeniu osi graniastosłupa, skutkiem czego co druga z bocznych krawędzi ulega skróceniu o tyleż, o ile oś została przedłużona; wielkość tego skrócenia krawędzi, czyli wydłużenia osi, na podstawie licznych pomiarów, możemy określić jako $\frac{1}{4}$ część przekątnej kwadratu, zbudowanego na krawędzi sześciokąta, stanowiącego już nie podstawę, lecz prostopadły do osi przekrój komórki.

Łatwo zauważyć, że skutkiem opisanej zamiany pojemność komórki pozostaje bez zmiany, natomiast powierzchnia jej ulega pewnemu zmniejszeniu. Jakoż, przez oś graniastosłupa i trzy naprzemianległe jego boczne krawędzie poprowadźmy trzy płaszczyzny, dzieląc przez to graniastosłup na trzy proste równoległościany, o równych ukośnikach w podstawie. Przypuśćmy, że jednym z nich jest $ABCOO_1A_1B_1C_1$ (rys. 1), gdzie odcinek OO_1 przedstawia oś, AA_1, BB_1 i CC_1 — trzy boczne krawędzie pierwotnego graniastosłupa. Przez dowolny punkt E na środkowej krawędzi BB_1 oraz spodki A i C dwóch pozostałych AA_1 i CC_1 poprowadźmy płaszczyznę, przecinającą przedłużenie osi w punkcie S; otrzymany wówczas czworobok $AECS$ będzie ukośnikiem, ponieważ $SC \parallel AE$ i $SA \parallel CE$, jako proste, według których równoległe płaszczyzny: OCC_1O_1 i ABB_1A_1, oraz OAA_1O_1 i CBB_1C_1 przecinają się z płaszczyzną $SAEC$, a nadto $AE = CE$, jako naprzeciwprostokątne trójkątów ABE i CBE o wspólnej przyprostokątnej BE i przyprostokątnych AB i CB równych, jako stanowiących boki sześciokąta foremnego.



Rys. 1.

Ukośnik ten odcina od komórki czworościan $ACBE$, natomiast dostawia do niej czworościan $ACOS$; podstawy tych czworościanów ACB i ACO są dwiema połowami tegoż samego ukośnika, krawędzie EB i SO są prostopadłe do podstaw, pozostałe zaś boczne krawędzie są bokami ukośnika. Czworościany te więc są równe, tak iż objętość komórki żadnej zmianie nie uległa.

Rozważmy, w jakim razie komórka, ograniczona ukośnikiem $AECS$, może mieć mniejszą powierzchnię, niż pierwotny równoległościan. (Ściany AO_1 i CO_1, jako tylko myślowo poprowadzone w komórce, nie grają tu żadnej roli). Zagadnienie to, jak łatwo zauważyć, sprowadza się do określenia warunku, przy którym

$$AECS < ABCO + ABE + CBE.$$

Oznaczając $BE = x$ i kładąc $AB = a$, tak iż $AC = a\sqrt{3}$, $BD = \frac{a}{2}$, mamy:

$$AECS = AC \,.\, ED = a\sqrt{3} \,.\, \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$ABCO = AC \,.\, BD = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}.$$

$$ABE + CBE = 2ABE = ax.$$

Żądany więc warunek prowadzi do nierówności:

$$x + \frac{a}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}} > 0.$$

Że zaś wielkości x i a, jako bezwzględne, tożsamościowo sprawdzają nierówność:

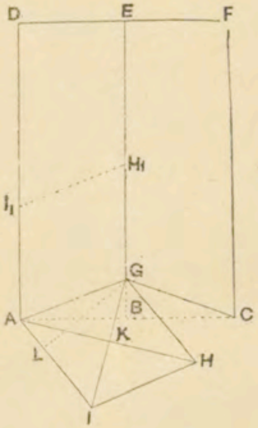
$$x + \frac{a}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}} > 0,$$

mnożąc więc te nierówności stronami, otrzymamy ostatecznie:

$$x < \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Że zaś odcinek BE wynosi, jakeśmy widzieli, daleko mniej, niż otrzymana granica, mianowicie $\frac{a}{4}\sqrt{2}$, przeto powierzchnia komórki jest mniejsza, niż powierzchnia graniastosłupa.

Trzecią część zupełnej powierzchni graniastosłupa (z wyjątkiem górnej podstawy, która, jako otwarta, na ilość zużytego wosku nie wpływa), t. j. $ABB_1A_1 + CBB_1C_1 + ABCO$, gdzie $AB = a$, $BB_1 = \frac{25}{6}\,a$, $AC = a\sqrt{3}$, $BD = \frac{a}{2}$, otrzymamy w postaci $\frac{25}{3}a^2 + \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{6}(50 + 3\sqrt{3})$. Dla komórki wielkością tą będzie wyrażenie $AEB_1A_1 + CEB_1C_1 + SAEC = 2(ABB_1A_1 - ABE) + SAEC = \frac{a^2}{6}(50 + 3\sqrt{2})$. Oczywiście, że drugie wyrażenie jest mniejsze od pierwszego, a stosunek ich wynosi w przybliżeniu 54 : 55.



Rys. 2.

Przypuśćmy, że prostokąty $ABED$ i $BCFE$ (rys. 2) przedstawiają dwie boczne ścianki (przeniesione na jedną płaszczyznę) graniastosłupa sześciokątnego, oraz $AB = BC = a$, $AD = BE = CF = \frac{25}{6}a$. Na środkowej BE z trzech bocznych krawędzi tegoż odetnijmy część $BG = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, poczym, łącząc punkt G z A i C, otrzymamy dwie boczne ścianki komórki w postaci równych trapezów $ADEG$ i $CFEG$, część zaś dna komórki, przylegającą do obu tych trapezów, wyznaczy ukośnik, zbudowany na odcinku

$$AG = \sqrt{AB^2 + BG^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3a}{4}\sqrt{2}.$$

Ponieważ przekątną tego ukośnika, jakeśmy widzieli z rozważania równoległościanu na rys. 1, stanowi bok trójkąta foremnego, wpisanego w taki sześciokąt o boku a, czyli odcinek $a\sqrt{3}$, przeto ukośnik ten łatwo wykreślić na płaszczyźnie wspomnianych trapezów: wystarczy w tym celu z punktów G i A zakreślić łuki odpowiednio promieniami $\frac{3a}{4}\sqrt{2}$ i $a\sqrt{3}$, punkt zaś przecięcia łuków H połączyć z G i A, otrzymany zaś trójkąt AHG uzupełnić do równoległoboku $AGHI$, który będzie właśnie szukanym ukośnikiem.

Prowadząc w nim drugą przekątną GI i oznaczając przez K punkt jej przecięcia z pierwszą, AH, znajdziemy:

$$GK = \sqrt{AG^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{6},$$

zaczym pole ukośnika $AGHI = AH \,.\, GK = \frac{3a^2}{4}\sqrt{2}$. Że zaś pole to stanowi również iloczyn podstawy przez wysokość, np., $AI \,.\, GL$, przeto $GL = a = AB$. Wnosimy stąd o równości trójkątów AGL i AGB, a tym samym o równości kątów: $\widehat{GAI} = \widehat{AGB}$. Że zaś w trójkącie AGB przyprostokątne $AB = a$ i $BG = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, a ich stosunek $= \dfrac{a}{\frac{a}{4}\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ wyraża styczną goniometryczną kąta AGB, przeto $\widehat{GAI} =$ $=$ arc tg $2\sqrt{2}$, skąd z pomocą tablic znajdujemy: $\widehat{GAI} =$ $= 70^0 31' 45''$, kąt zaś dopełniający $\widehat{AGH} = 109^0 28' 15''$.

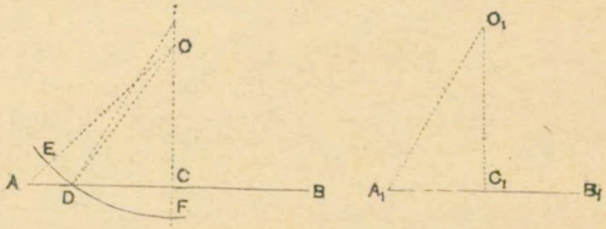
Z powyższego rozważania wynika również $\widehat{IAG} = \widehat{DAG}$, $\widehat{AGH} = \widehat{AGE}$, t. j., jeżeli ukośnik $AGHI$ obrócimy dokoła osi AG o kąt 180^0, wówczas prosta AI przystanie do AD, GH do GE, tak iż ukośnik ten zajmie położenie AGH_1I_1, gdzie $AI_1 = GH_1 = I_1H_1 = AG$. Wynika stąd najprostszy sposób zbudowania modelu komórki.

Pierwszym, który komórki woskowe rozważał ze stanowiska geometrycznego, był głośny matematyk aleksandryjski z w. IV po Chr., Pappus, autor dzieła „Synagoge" (Zbiory matematyczne), które, w greckim oryginale, oraz w przekładzie łacińskim, p. t. „Pappi Alexandrini Collectiones mathematicae", wydał Hultsch w Berlinie, w latach 1875 — 78 (3 t.). W V księdze tego dzieła znajdujemy interesujące nas zagadnienie, poprzedzone badaniami niejakiego Zenodora nad „izoperymetrami", t. j. wielobokami foremnymi o równych obwodach.

Z twierdzeń Zenodora przytoczymy następujące, pośrednio związane z naszą kwestją:

Pola izoperymetrów wzrastają wraz z liczbą boków.

Jakoż, niech AB (rys. 3) przedstawia bok wielokąta foremnego o n bokach, ze środkiem w punkcie O i A_1B_1 — bok wielokąta o n_1 bokach, ze środkiem w O_1 i niech



Rys. 3.

$n < n_1$, tak iż, wobec równości obwodów wieloboków, $AB > A_1B_1$. Prowadząc apotemy OC i O_1C_1, mamy ze względu na równość obwodów

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{\widehat{AOC}}{\widehat{A_1O_1C_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

(Jakoż, oznaczając obwody ich przez p, mamy $AC = \frac{p}{2n}$, $A_1C_1 = \frac{p}{2n_1}$; z drugiej zaś strony $\widehat{AOC} = \frac{4d}{2n} . < A_1O_1C_1 = \frac{4d}{2n_1}\Big)$.

Odcinając na prostej CA część $CD = C_1A_1$, łączymy D z O i promieniem OD zataczamy łuk, który niech przetnie prostą OA w punkcie E, a przedłużenie OC w punkcie F. Mamy wówczas:

$$\Delta\, AOD > \text{wyc. } EOD, \qquad \Delta\, DOC < \text{wyc. } DOF.$$

Dzieląc te nierówności stronami i zważając, że iloraz większej dzielnej przez mniejszy dzielnik a fortiori winien być większy, mamy stąd

$$\frac{\Delta\, AOD}{\Delta\, DOC} > \frac{\text{wyc. } EOD}{\text{wyc. } DOF},$$

czyli

$$\frac{AD}{DC} > \frac{\widehat{AOD}}{\widehat{DOC}}.$$

Dodając do obydwóch stron po 1 i zważając, że $DC = A_1C_1$, mamy:

$$\frac{AC}{A_1C_1} > \frac{\widehat{AOC}}{\widehat{DOC}}.$$

Stąd, na podstawie (1), wynika:

$$\widehat{A_1O_1C_1} < \widehat{DOC},$$

tym samym więc

$$\widehat{C_1A_1O_1} > \widehat{CDO}.$$

Stąd wnosimy, że jeżeli trójkąt $A_1C_1O_1$ przeniesiemy na trójkąt DOC, tak by ramiona kątów prostych przystały do siebie, a dzięki równości ramion C_1A_1 i CD, punkt A_1 upadł na D, wówczas ramię A_1O_1 upadnie powyżej ramienia DO, a przeto punkt O_1 — na przedłużeniu prostej CO, tak iż apotema drugiego z tych wieloboków będzie większa, niż apotema pierwszego. Gdy więc obwody tych wieloboków są równe, przeto pole drugiego z nich będzie większe, c. b. d. o.

Przypuśćmy, że wielobokami foremnymi o x bokach można pokryć płaszczyznę, zbierając dokoła każdego z wierzchołków otrzymanej w ten sposób sieci po y takich wieloboków. Ponieważ kąt takiego wieloboku wyraża się wzorem $\frac{2d(x-2)}{x}$, a y takich kątów, według przyjętego założenia, ma się składać na kąt pełny, przeto założenie nasze prowadzi do równania $\frac{2d(x-2)}{x} \cdot y = 4d$, czyli $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, z którego winniśmy wyznaczyć na x i y wartości dodatnie całkowite. Z otrzymanego równania wynika $x = \frac{2y}{y-2}$, czyli $x = 2 + \frac{4}{y-2}$, skąd wnosimy, że na x otrzymamy wartości całkowite w takim jedynie razie, jeżeli liczba $y-2$ jest jednym z dzielników liczby 4. Że zaś liczba 4 jest podzielna przez jedną z 3 tylko liczb: 1, 2 albo 4, przeto na y możemy położyć jedynie 3, 4 lub 6 i odpowiednio na x otrzymamy jedną z trzech wartości: 6, 4 lub 3. Zatym:

Sześć trójkątów równobocznych lub cztery kwadraty, lub wreszcie trzy sześcioboki foremne — są to trzy jedynie możliwe układy wieloboków foremnych, którymi można w zupełności pokryć płaszczyznę dokoła punktu.

Z zestawienia tego twierdzenia, znanego jeszcze Pytagorasowi, z poprzednim twierdzeniem Zenodora wnosimy, że z trzech rodzajów wieloboków foremnych, którymi można pokryć płaszczyznę, przy równym obwodzie największe pole zajmuje sześciobok.

Wynik ten łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Jakoż, jeżeli obwód każdego z tych wieloboków oznaczymy przez p, to dla ich pól otrzymamy odpowiednie wyrażenia $\frac{p^2}{36}\sqrt{3}$, $\frac{p^2}{16}$ i $\frac{p^2}{24}\sqrt{3}$, tak iż pola te są do siebie w stosunku, jak $4\sqrt{3} : 9 : 12\sqrt{3}$, a ich kwadraty — jak $48 : 81 : 432$.

Z tych to twierdzeń, zgodnie z Pappusem, wnosimy, że do utworzenia warstwy zwartej, w którejby każda ze ścianek wewnętrznych służyła odrazu dla dwóch komórek, nadają się zpośród graniastosłupów jedynie trójkątne, kwadratowe i sześcioboczne, z których przy równej powierzchni, sześcioboczne posiadają największą pojemność. Zatym, ograniczając się komórkami graniastosłupowymi, przyjść winniśmy do wniosku, że ze wszystkich możliwych w tym razie komórek sześciokątne, jakie w samej rzeczy spostrzegamy w plastrze miodu, przy równej ilości zużytego na nie wosku, mogą pomieścić największą ilość miodu.

Paryski astronom F. Maraldi w r. 1712 zauważył, że komórki nie są czystymi graniastosłupami, lecz posiadają dno, złożone z trzech opisanych wyżej ukośników; doświadczalnie przytym określił kąt takiego ukośnika, znajdując go równym $70^\circ 32'$, co, jak widzieliśmy, odpowiada wydłużeniu osi graniastosłupa o $\frac{a}{4}\sqrt{2}$. Słynny entomolog Réaumur domyślił się, że kąt ten odpowiada najmniejszej wartości powierzchni komórki; by więc sprawdzić swój domysł, zaproponował Königowi (nic zresztą nie wspominając o związku zagadnienia tego z komórkami woskowymi) wyznaczenie kątów ukośników, jakie w graniastosłupie sześciokątnym foremnym prowadzimy przez wspólny punkt na przedłużeniu jego osi i przez każdy z trzech boków trójkąta wpisanego w sześciobok podstawy — pod warunkiem, by powierzchnia otrzymanej w ten sposób bryły była możliwie najmniejsza. König w r. 1739 ogłosił rozwiązanie pomienionego zagadnienia, określając kąt wspomniany na 70°34′.

Uderzony tą rozbieżnością wyników, Mac Laurin w roku 1743 zagadnienie Réaumura rozwiązał ponownie, otrzymując wynik zgodny z pomiarem Maraldiego. Rozwiązanie to możemy przedstawić w sposób następujący:

Warunki zagadnienia wymagają, by suma pól

$$AEB_1A_1 + CEB_1C_1 + AECS$$

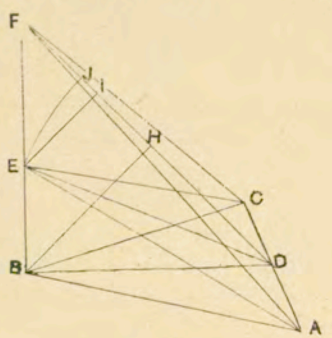
(rys. 1) była najmniejsza; lecz ponieważ każdy z dwu pierwszych wyrazów tej sumy przedstawia pole prostokąta $ABB_1A_1 = \frac{25}{6}a^2$, zmniejszone o pole trójkąta $ABE = \frac{ax}{2}$, ostatni zaś wyraz, jako pole ukośnika, daje się wyrazić przez połowę iloczynu jego przekątnych, czyli przez iloczyn jego przekątnej AC, którą oznaczmy przez d, przez połowę drugiej przekątnej, t. j. przez odcinek ED, a z trzech otrzymanych w ten sposób wyrażeń pierwsze ma wartość stałą, przeto wystarczy znaleźć warunek, by najmniejszą wartość otrzymywało wyrażenie

$$d \,.\, ED - ax \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dla wyrazistości rysunku, czworościan $ABEC$ (rys. 1) w powiększonych rozmiarach wykreślmy osobno na rys. 4. Na przedłużeniu wysokości tego czworościanu obierzmy taki punkt F, by

$$\frac{FB}{FD} = \frac{a}{d} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

poczym w płaszczyźnie BFD prowadzimy BH i $EI \perp DF$, oraz



Rys. 4.

z punktu D, jako ze środka, promieniem DE zataczamy łuk, oznaczając przez J punkt przecięcia łuku z prostą DF. Z podobieństwa trójkątów FBD, FHB i FIE otrzymamy:

$$\frac{FB}{FD} = \frac{FH}{FB} = \frac{FI}{FE}.$$

Uzupełniając szereg tych stosunków jeszcze wyrazem $\frac{FH - FI}{FB - FE}$ i zważając na warunek (2), znajdujemy

$$ax = d \cdot IH,$$

poczym wyrażenie (1) sprowadzamy do

$$d(ED - IH).$$

Że zaś $ED = JD = JI + IH + HD$, ostatnie wyrażenie daje

$$d(JI + HD).$$

A ponieważ d i HD są stałe, najmniejszą wartość rozważanego wyrażenia otrzymamy w takim razie, jeżeli odcinek JI otrzymuje wartość najmniejszą. Lecz najmniejszą wartością odcinka może być tylko O, wartość tę zaś odcinek JI osiąga wówczas, jeżeli E, I i J zlewają się z sobą, czyli jeżeli płaszczyzna AEC przylega do płaszczyzny AFC, określonej przez warunek (2). Stąd wnosimy, że warunek (2) jest właśnie warunkiem najmniejszości rozważanego wyrażenia.

Ponieważ, jak wiadomo, $d = a\sqrt{3}$, $BD = \frac{a}{2}$, przeto z trójkąta prostokątnego BDF, na podstawie (2), wynika:

$$FB = \frac{a}{4}\sqrt{2},$$

skąd już w dalszym ciągu, jak poprzednio,

$$\widehat{FAC} = \tfrac{1}{2} \cdot (70^0 31' 45'').$$

Po Mac Laurinie zagadnieniem komórek woskowych zajmowali się: L'Huillier (1781), Brougham (1858), Hennessy (1885) — nic wszakże nowego do niej nie dodali. W polskim języku mamy tę kwestję uwzględnioną w t. I „Zupełnego wykładu algebry” A. Sągayłły (1873).

Pierwsze dokładne opisy komórek znajdujemy u Arystotelesa (w. V przed Chr.) i Pliniusza Starszego (w. I po Chr.). Buffon prawidłowość komórek przypisuje czynnikom czysto mechanicznym: początkowo, jego zdaniem, mają one kształt dowolny, po napełnieniu jednak miodem pęcznieją i, wzajemnie napierając na siebie, przyjmują postać graniastosłupów sześciokątnych, podobnież, jak ziarnka grochu, zalanego wodą, wykazują na swej powierzchni sześciokąty. Huber jednak stwierdził, że komórki te już od samego początku budowy mają postać graniastosłupów sześciokątnych. Lalanne prawidłowość komórki starał się objaśnić foremnością korpusu i członków samej pszczoły. Réaumur zaznaczył, że prócz pszczoły domowej, inne ich gatunki wznoszą również budowle, godne uwagi ze względu na ich foremność; ze względu na stałe wymiary komórek, zalecał przyjęcie jednego z nich za miarę powszechną.

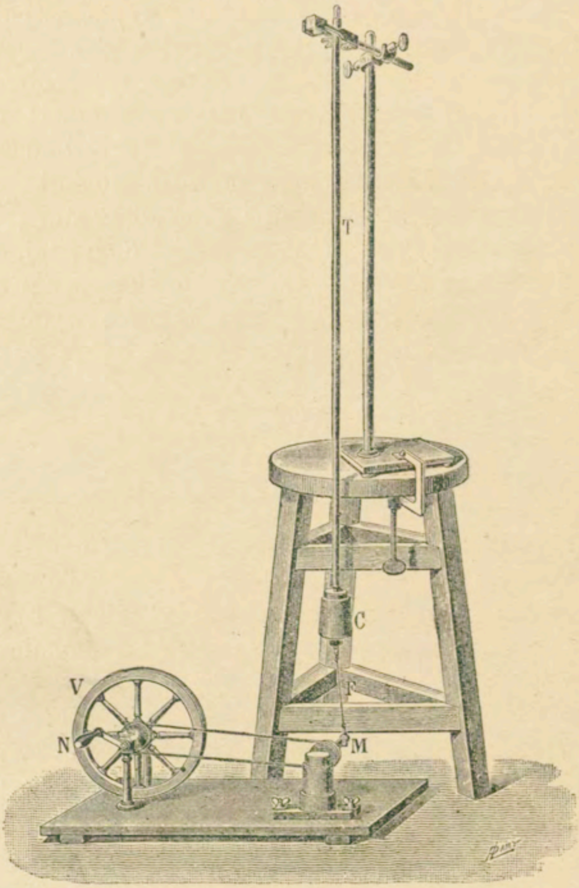
TADEUSZ GUTKOWSKI.

ROZCHODZENIE SIĘ FAL W ŚWIETLE PRAWA CORNU.

Falowanie odgrywa bardzo ważną rolę w fizyce. Mechanizm ruchu falowego wyjaśnia się doskonale prawem Cornu.

Prawo to głosi, że *jeżeli pewne ciało może podlegać wahaniom i jeśli na to ciało działa okresami pewna niewielka siła, to ciało to waha się, przyczym amplituda wahania jest mała; ale jeśli okres siły równa się okresowi wahania, to wtedy amplituda staje się znaczną;* amplituda ta jest znaczną również i wtedy, gdy okres działania siły jest 2, 3, 4, ... razy większy od okresu wahania.

Prawo to jest dość łatwo wykazać doświadczalnie. W tym celu robimy wahadło z kawałka drzewa *C* (rys. 1), zawieszonego na rurce gumowej *T*, takiej, jaka jest używana do gazu. U spodu tego wahadła umocowywamy cienką gumkę, za którą szarpiemy rytmicznie. Za gumkę tę można ciągnąć bezpośrednio ręką lub, jeśli jest przyrząd taki, jak na rysunku, to zapomocą niego; wtedy łatwiej jest ujednostajnić poszarpywania; zresztą, doświadczenie to wypada dobrze i bez tego dodatkowego przyrządu.



Rys. 1.

Otóż wahadło nasze może wahać się w trojaki sposób: 1° jedno wahanie jest takie, jak każdego innego wahadła, mianowicie waha się ono dookoła punktu zawieszenia w jedną i drugą stronę; 2° drugie wahanie może odbywać się w kierunku pionowym, dzięki sprężystości gumy; 3^0 i wreszcie trzecie wahanie polega na tym, iż ciężar drewniany *C* waha się dookoła pewnego punktu, znajdującego się w pobliżu przymocowania go do gumy.

Otóż, jeśli będziemy poszarpywali miarowo za gumkę *F*, to wahadło waha się tak słabo, że wahnięć jego nie znać, ale jeśli będziemy zmieniali częstość poszarpywań, to zauważymy w pewnym momencie, że wahania 1-go rodzaju są bardzo szerokie. Jeśli przyjrzymy się uważnie, to spostrzeżemy, że poszarpywania gumki są jednoczesne z wahaniami wahadła. Jeśli przyśpieszymy teraz poszarpywania, to ruch wahaniowy znowu ustaje, ale przy dalszym przyśpieszaniu spostrzegamy silne amplitudy wahania drugiego rodzaju, przyczym spostrzegamy również zgodność okresów poszarpywań i wahań. Jeśli będziemy przyśpieszali poszarpywania w dalszym ciągu, to wahania te zamrą znowu. Przy dalszym przyśpieszaniu poszarpywań zauważamy wahania trzeciego rodzaju i ich zgodność z okresem poszarpywania.

Prawo Cornu wyjaśnia wiele zjawisk. Każdy wie, że słabe potrącania huśtawki wprawiają ją koniec końców w silny ruch wahaniowy.

W Angers, we Francji, zdarzył się raz następujący wypadek: wojsko przechodziło krokiem miarowym przez most wiszący; takt kroku odpowiadał akurat wahaniom mostu; wskutek tego amplituda wahania stała się wielką; kable nie wytrzymały silnego wydłużenia i pękły, wskutek czego wielu żołnierzy utonęło. Od tego czasu wojsko przerywa krok miarowy za każdym razem, jak wchodzi na most wiszący.

Prawo Cornu doskonale wyjaśnia zjawisko rozchodzenia się fal. Wyobraźmy sobie, żeśmy cisnęli kamień na spokojną powierzchnię wody. Wtedy pod naciskiem kamienia woda wgłębi się cokolwiek. Lecz w tym położeniu nie może być w równowadze i unosi się, dążąc do położenia równowagi. Do tego położenia woda przychodzi z pewną prędkością, czyli posiada pewną energję kinetyczną, która sprawia, że woda podnosi się wyżej od swego położenia równowagi, zatrzymuje się dopiero tam, gdzie energja kinetyczna podniesionej wody zamienia się całkowicie w potencjalną. Woda zaczyna znowu opadać, ale znowu nie zatrzymuje się w położeniu równowagi, lecz porusza się dalej i t. d. W punkcie, w który upadł kamień, woda waha się. Otóż wskutek wzajemnego przyciągania się cząsteczek wody cząsteczki drgające poszarpują sobą cząsteczki sąsiednie, które mogą wahać się z taką samą częstością. Na zasadzie prawa Cornu cząsteczki te rzeczywiście wprawiają się w drganie i działają w ten sam sposób na inne cząsteczki, wskutek czego ruch wahaniowy rozchodzi się we wszystkie strony.

W podobny sposób można, oczywiście, wyjaśnić rozchodzenie się fal dźwiękowych w powietrzu, jak również rozchodzenie się wogóle fal.

Z tego oświetlenia mechanizmu falowania wynika bezpośrednio, że każdy punkt drgającego środowiska może być rozpatrywany jako źródło drgania. Rzeczywiście, drgania tego punktu wywierają poszarpywania cząsteczek sąsiednich i wskutek tego punkty sąsiednie znajdują się pod wpływem tych poszarpywań.

R. WITWIŃSKI.

BUDOWA PIERWIASTKÓW RÓWNANIA $a \sin x + b \cos x = c$.

Równanie trygonometryczne

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

gdzie a, b, c oznaczają liczby dane, rozwiązuje się, jak wiadomo, zapomocą podstawienia

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi;$$

okazuje się przytym, iż pierwiastek x posiada wartość rzeczywistą przy warunku

$$c \leqq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

W notatce niniejszej podajemy geometryczne rozwiązanie tego równania, zakładając, iż spółczynniki a, b, c są dane, jako odcinki.

Jeżeli na bokach kąta prostego C *) odłożymy odcinki $CA = b$ i $CB = a$, wówczas $\widehat{CBA} = \varphi$. Odkładając teraz na AC od punktu A odcinek $AD = c$ i opisując ze środka D koło promieniem, równym a, przecinające przeciwprostokątną AB w punktach E i F, z trójkątów DEA i DFA otrzymujemy:

$$\left.\begin{matrix}\sin DEA \\ \sin DFA\end{matrix}\right\} : \sin A = DA : \left\{\begin{matrix}DE \\ DF\end{matrix}\right. ;$$

stąd $\sin DEA = DFA = \dfrac{c \cos \varphi}{a}$; zatym kąty DEA i DFA stanowią dwie wartości kąta $x + \varphi$; oznaczając przez L i M punkty przecięcia prostych DF i DE z BC, wnosimy, iż pierwiastkami naszego równania są kąty następujące:

$$x' = \widehat{BLF} \text{ i } x'' = \widehat{BME}.$$

Prowadząc z punktu D prostopadłą DH na AB, spostrzegamy, iż równanie jest możliwe tylko przy obecności warunku $DH \leqslant a$; lecz $\dfrac{DH}{c} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, skąd warunek możliwości wyrazi się zapomocą nierówności

$$c \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

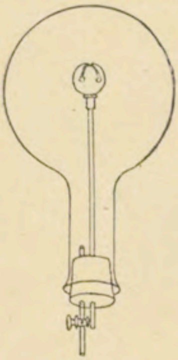
W podobny sposób dadzą się zbudować i pierwiastki równania

$$a \sin x - b \cos x = c.$$

*) Czytelnik sam zrobi rysunek (dop. red.).

PRZYRZĄD DO WYKAZANIA ROZCHODZENIA SIĘ DŹWIĘKU W POWIETRZU.

Kolbkę z okrągłym dnem (rys. 1) zatykamy korkiem gumowym, w który są wstawione rurka z kranem i pręcik, do którego umocowywa się grzechotkę lub dzwoneczek. Jeśli w kolbie jest powietrze, to drgania dzwonka przedostają się nazewnątrz; jeśli z kolby wypompować powietrze, to drgania dzwonka nie przedostają się nazewnątrz i dzwonka nie słychać. Jeśli do korka gumowego wstawić dwie rurki i przez jedną z nich wpuszczać dwutlenek węgla, to spostrzegamy, że w miarę tego, jak kolba wypełnia się dwutlenkiem węgla, dźwięk dzwonka słychać jest coraz lepiej. Jeśli zaś powietrze wycieśniać wodorem, to dźwięk słychać coraz gorzej.



Rys. 1.

PROGRAM

MATEMATYKI W LICEACH WE FRANCJI.

Licea we Francji mają programy czterech rodzai. Dwa z tych programów mają kierunek filozoficzny ze spólnym programem z matematyki, dwa inne mają kierunek nauk ścisłych, również ze spólnym programem z matematyki.

Liceum ma 7 klas: szóstą (najmłodszą), piątą, czwartą, trzecią, drugą, pierwszą i klasę filozofji lub klasę matematyki. Nauka w liceum poprzedzana jest nauką wstępną z kursem sześcioletnim. Te klasy wstępne często są przy samym liceum. Niżej podajemy program matematyki w klasach wstępnych, obydwa programy matematyki i instrukcje dla nauczycieli klas właściwego liceum.

Klasy początkowe (classes enfantines) 2 lata.

Liczenie.

Pierwsze zasady rachunku pamięciowego i piśmiennego.

1°. Ćwiczenia proste w liczeniu pamięciowym: dodawanie liczb w granicach jednej setki.

2°. Liczenie piśmienne: dodawanie i odejmowanie liczb dwucyfrowych.

Metr, frank, litr, nie wskazując ich krotności lub podkrotności. Ćwiczenia proste w pomiarach intuicyjnych.

Klasy przygotowawcze (classes préparatoires).

Klasa X (3 godziny).

Liczenie.

Zasady rachunku ustnego i piśmiennego, ograniczając się początkowo liczbami do 100, następnie do 1000.

Metr, litr, frank, gram. Zaznajomienie się z najważniejszymi miarami, większymi lub mniejszymi od metra, litra i t. d.

Ćwiczenia w pomiarach i porównanie intuicyjne wielkości.

Liczenie ustne. Zastosowanie czterech działań do liczb w granicach 10, potym 20, i wreszcie 100. Tablice dodawania i mnożenia.

Rachunek piśmienny. Dodawanie i odejmowanie liczb trzycyfrowych, mnożenie (największy mnożnik dwucyfrowy); dzielenie przez liczbę, mniejszą od 10.

Rozwiązywanie w klasie prostych zadań, najczęściej na tablicy, czasem w postaci zadań klasowych, wymagających tylko jednego działania.

Klasa IX (3 godziny).

Liczenie.

Powtórzenie kursu poprzedniego. Numeracja liczb całkowitych. Podstawowe jednostki układu metrycznego i ich krotności.

Liczenie ustne. Zwracanie szczególnej uwagi na liczenie w pamięci. Dalsze uczenie się tablic dodawania i odejmowania. Zaznajomienie się z wyrażeniami: pół, połowa, trzecia część, ćwierć. W dalszym ciągu ćwiczenia w pomiarach i porównaniu wielkości na oko.

Liczenie piśmienne. Cztery działania z liczbami niewielkimi (mnożnik trzycyfrowy, dzielnik dwucyfrowy). Rozwiązywanie prostych zadań, najczęściej na tablicy, czasem w postaci zadań klasowych.

Geometrja poglądowa.

Ćwiczenia proste, zapomocą których dzieci zaznajamiają się i rozpoznają najprostsze figury geometryczne: kwadrat, prostokąt, trójkąt, koło. Różne rodzaje kątów.

Klasy elementarne (classes élémentaires).

Klasa VIII (4 godziny).

Liczenie.

Powtórzenie kursu klasy IX. Te same ćwiczenia w numeracji. Numeracja ułamków dziesiętnych (ograniczając się na dziesiątych, setnych i tysiącznych).

Układ metryczny miar: metr, litr, gram, frank, ster, ich krotności i podkrotności.

Liczenie ustne. Ćwiczenia w liczeniu ustnym w dużej ilości nad małymi liczbami.

Liczenie piśmienne. Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych ze wszystkimi możliwymi wypadkami.

Cztery działania z ułamkami dziesiętnymi bez teorji lub też, chociaż ograniczając się najprostszymi wyjaśnieniami, które uczeń jest w stanie zrozumieć.

Zaleca się unikanie zadań sztucznych i zawiłych; zaleca się stałe wyjaśnianie używanych terminów.

Geometrja poglądowa.

Przedstawienie figur najprostszych. Pojęcie o najprostszych bryłach geometrycznych przy pomocy modeli.

Klasa VII (4 godziny).

Liczenie.

Prędkie powtórzenie kursu klasy VIII-ej. Numeracja liczb dziesiętnych. Działania z liczbami całkowitymi i ułamkami dziesiętnymi.

Układ metryczny miar.

Liczenie pamięciowe. Dalszy ciąg ćwiczeń w liczeniu na pamięć z badaniem najprostszych wypadków.

Pojęcie ogólne o ułamku: cztery działania z ułamkami. Reguły praktyczne. Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne.

Reguła trzech prosta (sposób sprowadzenia do jedności). Reguła procentów prostych.

Liczenie piśmienne. Rozwiązywanie zadań, wziętych z życia. Rozwiązywanie zadań z objaśnieniem.

Geometrja poglądowa.

Ćwiczenia te same, co i w klasach IX i VIII. Mierzenie powierzchni sposobem doświadczalnym; mierzenie objętości tym samym sposobem; równoległościan, sześcian, graniastosłup, walec.

Zastosowania do układu metrycznego.

KIERUNEK FILOZOFICZNY.

Klasa VI (2 godziny).

Liczenie.

Powtórzenie działań z liczbami całkowitymi. Ćwiczenia w liczeniu pamięciowym. Zadania na liczby całkowite.

Ułamki zwyczajne. Sprowadzanie ułamków do spólnego mianownika. Działania z ułamkami. Ułamki dziesiętne. Działania. Ćwiczenia.

Wskazówki ogólne. Nauczyciel powinien wystrzegać się podawania wszelkiej teorji; celem wykładu powinno być nauczyć świadomie i dokładnie wypełniać działania z liczbami i na licznych przykładach rozumieć znaczenie każdego działania. Wszelkie określenia, szczególniej ułamków, powinny się opierać stale na przykładach konkretnych.

Klasa V (2 godziny).

Układ metryczny miar. Miary długości, powierzchni, objętości, gęstości, monety. Czas, prędkość. Proste przykłady dla przejścia od jednej jednostki do drugiej.

Reguła trzech prosta sposobem sprowadzania do jedności. Procenty proste. Dyskonto handlowe. Renty. Proste zadania na mieszaninę i stopy. Używanie liter do oznaczenia niewiadomych. Proste zadania, sprowadzające się do równań pierwszego stopnia.

Wskazówki ogólne. Przy wykładzie układu metrycznego, procentów prostych i t. d. zaleca się przyzwyczajać uczni do używania liter i prostych wzorów; w końcu używanie metody algebrycznej daje możność unikać ciężkich i zawiłych rozumowań, które spotykają się przy rozwiązaniach czysto arytmetycznych. Nauczyciel powinien nauczyć uczni układać równania, mówiąc tylko o wielkościach konkretnych, a przy rozwiązywaniu równań tłumaczyć ich przekształcenia.

Klasa IV (2 godziny).

Arytmetyka.

Iloczyn kilku czynników. Potęga. Cecha podzielności przez 2, 5, 9, 3.

Liczby pierwsze. Reguły rozkładania na czynniki proste w celu odnajdywania najmniejszego dzielnika i najmniejszej krotności.

Ćwiczenia na stosowanie układu metrycznego miar; ułamki i wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne. Reguła wyciągania pierwiastka kwadratowego z liczb całkowitych i ułamków dziesiętnych z zadanym przybliżeniem (do $\frac{1}{10^n}$ przy n całkowitym).

Geometrja.

Używanie linji, trójkąta, cyrkla i przenośnika.

Prosta i płaszczyzna. Kąty.

Trójkąty. Trójkąt równoramienny. Wypadki równości trójkątów.

Prostopadła i pochyłe. Wypadki równości trójkątów prostokątnych. Proste równoległe. Suma kątów trójkąta i wielokąta wypukłego.

Równoległobok. Prostokąt. Ukośnik. Kwadrat. Koło. Cięciwy i łuki. Styczna.

Położenie względne dwu kół.

Proste zadania konstrukcyjne na prostą i koło.

Klasa III (3 godziny).

Arytmetyka.

Ćwiczenia na zastosowania układu metrycznego i na wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne. Stosunki i proporcje.

Algebra.

Liczby dodatnie i ujemne. Działania. Zastosowania konkretne.

Wielomiany i jednomiany. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie jednomianów i wielomianów. Dzielenie jednomianów.

Równania liczbowe pierwszego stopnia z jedną i dwiema niewiadomymi.

Geometrja.

Zadania i pytania z kursu zeszłorocznego.

Punkty, dzielące prostą w stosunku danym. Odcinki proporcjonalne.

Trójkąty podobne. Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kąta.

Określenie figur jednokładnych. Wielokąty podobne.

Zależności metryczne w trójkącie prostokątnym.

Własność siecznej w kole.

Wykreślanie czwartej proporcjonalnej i średniej proporcjonalnej.

Wielokąty foremne: kwadrat, sześciokąt i trójkąt równoboczny.

Długość okręgu koła (bez dowodu).

Pola prostokąta, równoległoboku, trójkąta, trapezu, wielokąta, koła. Stosunek pól dwu wielokątów podobnych.

Klasa II (2 godziny).

Uwagi ogólne. Wykład matematyki w klasach drugiej i pierwszej powinien przygotować uczni do fizyki. Za każdym razem, gdy nadarza się sposobność, rozwinięciu teoretycznemu programu tych klas powinny towarzyszyć ćwiczenia liczbowe. Nauczyciel powinien dobierać dane liczbowe tych ćwiczeń tak, aby uczniowie nabierali wprawy w działaniach z ułamkami zwyczajnymi i dziesiętnymi, z układem miar i zamianą jednostek. Nie należy unikać określania górnej granicy błędu w najprostszych wyliczeniach przybliżonych.

Algebra.

Liczby dodatnie i ujemne. Działania. Zastosowania konkretne.

Jednomiany i wielomiany. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie jednomianów i wielomianów. Dzielenie jednomianów.

Ćwiczenia w rozwiązywaniu równań pierwszego stopnia z jedną i dwiema niewiadomymi, nierówność pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Zmiana wyrażenia $ax + b$; przedstawienie graficzne. Ruch jednostajny. Przedstawienie zmian funkcji x^2 i $\frac{1}{x}$.

Geometrja.

O płaszczyźnie i prostej w przestrzeni. Kąt dwuścienny. Płaszczyzny równoległe i proste. Prosta i płaszczyzna prostopadłe.

Określenie równoległościanu, graniastosłupa, ostrosłupa. Przecięcia równoległe w graniastosłupie i ostrosłupie.

Stożek i walec obrotowe; przekroje równoległe do podstawy. Kula; wielkie koło, małe koła; bieguny.

Wykład reguł wyliczania powierzchni i objętości graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka i kuli.

Klasa I (2 godziny + 2 nieobowiązkowe).

Algebra.

Ćwiczenia w rozwiązywaniu równań pierwszego stopnia z jedną i wieloma niewiadomymi i drugiego stopnia z jedną niewiadomą.

Zmiana trójmianu kwadratowego, przedstawienie graficzne. Ruch jednostajnie przyśpieszony. Zmiana wyrażenia $\frac{ax + b}{a'x + b'}$; przedstawienie graficzne.

Program nieobowiązkowy. Pojęcie o pochodnej, znaczenie geometryczne pochodnej. Znak pochodnej wskazuje na kierunek zmiany; zastosowanie do zmiany funkcji $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ i $ax^2 + bx + c$.

Geometrja.

Mierzenie kątów; stopnie, grady, radjany. Trójkąty podobne. Określenie sinusa, cosinusa i tangensa kąta, zawartego pomiędzy 0 a π. Sinusoida.

Zależności metryczne w trójkącie i kole. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych. Mierzenie pól figur płaskich. Pojęcie elementarne o symetrji. Ćwiczenia piśmienne na wyliczanie powierzchni i objętości graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka i kuli.

Program nieobowiązkowy. Jednokładność i podobieństwo na płaszczyźnie. Jednokładność w przestrzeni. Pojęcie o wielokątach foremnych. Kąty trójścienne.

Trygonometrja.

Program nieobowiązkowy. Ten sam program, co i dla klasy pierwszej kierunku nauk ścisłych, z wyjątkiem zadania, odnoszącego się do podziału łuków.

Nauczyciel, któremu polecone są zajęcia nieobowiązkowe z matematyki, może według własnego uznania rozwijać więcej lub mniej szczegółowo odpowiednią część programu w zależności zdolności uczni, z którymi ma do czynienia; jednakże zaleca mu się zapoznać uczni ze wszystkimi częściami programu nieobowiązkowego.

Klasa filozofji.

Matematyka (2 godz. nieobowiązkowe).

Powtórzenie najważniejszych reguł działań z liczbami dodatnimi i ujemnymi; wzory $(a + b)^2$, $(a + b)^3$; tożsamość:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + ... + b^n).$$

Pojęcie o algebrze geometrycznej Greków: przedstawienie liczby zapomocą odcinka, iloczynu zapomocą prostokąta; figury równoważne z tożsamościami:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \quad \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = ab.$$

Kwadrat, zbudowany na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego. Budowa prostokąta, mającego bok dany i równoważnego danemu prostokątowi. Budowa prostokąta, równoważnego danemu kwadratowi, gdy dana jest suma lub różnica boków; wyrażenia boków, wynikające z budowy. Rozwiązywanie algebryczne równań kwadratowych. Zastosowanie tego rozwiązania do zadania poprzedniego i porównanie wyników. Zalety oznaczeń teraźniejszych, a szczególniej używania liczb dodatnich i ujemnych.

Określenie położenia punktu na płaszczyźnie zapomocą dwu liczb dodatnich czy ujemnych i nawzajem przedstawienie układu dwu liczb zapomocą punktu na płaszczyźnie.

Rozszerzenie pojęcia o spółrzędnych; długość i szerokość punktu na powierzchni kuli.

Funkcje od jednej zmiennej. Przedstawienie graficzne zmiany zjawisk, zależnych od jednej tylko zależnej; krzywe temperatury ciśnień, zastosowanie do statyki. Pojęcie o funkcji. Przedstawienie graficzne najprostszych funkcji.

$$y = ax; \quad y = ax + b; \quad y = x^2; \quad y = x^3; \quad y = \frac{1}{x}.$$

Wykreślanie prostej, danej w postaci równania liczbowego pomiędzy x i y; spółczynnik kątowy *). Rzędna w początku. Spółczynnik kątowy prostej, przechodzącej przez dwa punkty dane. Zastosowanie papieru kratkowanego. Rozwiązanie układu dwu równań z dwiema niewiadomymi zapomocą przecięcia się prostych. Rozwiązanie równań liczbowych postaci:

$$x^2 + px + q = 0; \quad x^3 + px + q = 0$$

zapomocą przecięcia krzywych (wykreślonych raz na zawsze):

$$y = x^2, \qquad y = x^3$$

z prostą, zadaną równaniem

$$y + px + q = 0.$$

Grafiki dróg żelaznych. Krzywe, wykreślane przyrządami samozapisującymi.

Wykreślanie niektórych prostych krzywych, określonych geometrycznie; równania ich.

Pojęcie o stycznej i pochodnej. Przykłady stycznych, otrzymanych geometrycznie, jako położenia graniczne siecznych (koło, parabola). Spółczynnik kątowy stycznej, zastosowanie do niektórych wypadków prostych

$$\left(y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = \frac{1}{x}\right).$$

---

*) Spółczynnik kątowy należy określać, jako spółczynnik przy x w równaniu prostej, rozwiązanym względem y, lub też jako rzędną punktu o odciętej 1, przechodzącej przez początek osi spółrzędnych równolegle do danej prostej.

Pojęcie o zastosowaniu pochodnej funkcji do badania zmienności funkcji. Obliczanie przybliżone pola krzywej, wykreślonej na papierze kratkowanym, zapomocą liczenia kwadracików, zawartych wewnątrz tej krzywej; granica błędu, dostarczona liczbą kwadratów przeciętych krzywą; błąd ten może stać się bardzo małym, jeśli używać do tego bardzo drobnej kratki. Pole trójkąta, rozpatrywane jako granica spólna dwu sum prostokątów, z których jedna jest mniejsza, a druga większa pola poszukiwanego. Pole paraboli. Zadanie odwrotne do odnajdywania pochodnej. Pola trójkąta i paraboli, otrzymane przez odnajdywanie funkcji, dla których pochodna względem x jest ax lub ax^2. Zastosowanie metody nieskończenie małych do wyliczania objętości i powierzchni, rozpatrywanych w geometrji elementarnej.

Wskazówki ogólne. Nauczyciel nie powinien zapominać, że uczniowie, z którymi ma do czynienia, nie mają jeszcze przygotowania matematycznego, a więc powinien unikać wszelkich teorji oderwanych; nie należy wysuwać na plan pierwszy pojęć ogólnych, lecz przeciwnie, aby uczniowie rozumieli go, należy, aby te pojęcia ogólne wypływały z przykładów poszczególnych, szczegółowo opracowanych. Program jest podany, aby wskazywać drogę nauczycielowi, lecz nie po to, aby był dokładnie wypełniony. Nauczyciel może przejść bardziej lub mniej szczegółowo pewne części programu, zależnie od zdolności i zainteresowania się uczni, które on potrafi w nich wzniecić. Odnosi się to również i do zastosowań, o których jest mowa w końcu programu, i które należy przerobić, jednakże szczegółowiej, nie wysilając się zbytnio w kierunku ścisłości.

Zaleca się nauczycielowi wprowadzać do wykładu pierwiastek historyczny, tak np. można mówić o metodzie wyczerpania starożytnych (Euklides, Archimedes), opowiedzieć szczegółowiej o wynalezieniu rachunków różniczkowego i całkowego; celem nauczyciela powinno być współdziałanie filozoficznemu rozwojowi uczni, dając możność zaznajomienia się z najważniejszymi pojęciami matematycznymi.

Cyrkularz z dnia 4 — V — 1912 uzupełnia ten program w sposób następujący:

Pochodna. Pochodna sumy, iloczynu, ilorazu i pierwiastka kwadratowego.

Zmiana funkcji $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ i $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ze spółczynnikami liczbowymi. Prędkość ruchu prostolinjowego zmiennego.

Zastosowania liczbowe, wzięte z geometrji i odnoszące się do wyliczenia pól (prostokąta, równoległoboku, trójkąta, trapezu, koła, walca prostego, stożka prostego, stożka ściętego i kuli) i objętości (równoległościanu, graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka i kuli). Te zastosowania liczbowe dadzą możność powtórzyć układ metryczny, reguły wypełnienia działań nad liczbami całkowitymi i ułamkami zwyczajnymi i dziesiętnymi.

Geometrja. Badanie zasadniczych własności elipsy, hiperboli i paraboli.

Trygonometrja. Rozwiązywanie trójkątów, zastosowania liczbowe.

Program powyższy jest nieobowiązkowy.

Nauczyciel ma zupełną swobodę przystosować swój wykład do potrzeb i sił swych uczni. Nie ma on potrzeby wypełniania całkowitego programu i może zadowolić się powtórzeniem układu metrycznego, reguł wykonywania działań z liczbami całkowitymi i ułamkami zwyczajnymi i dziesiętnymi na licznych przykładach, jeśli ma on jako uczni przyszłych lekarzy, którzy w klasie pierwszej nie przechodzili kursu nieobowiązkowego.

Kosmografja (1 godzina).

Układ Kopernika.

Słońce, jego wymiary, odległość od ziemi. Zasadnicze pojęcia o budowie fizycznej, obrocie, plamach słońca.

Zasadnicze wiadomości o planetach.

Ziemia. Forma i rozmiary. Obrót, bieguny, równik, południki, równoleżniki. Długość. Szerokość.

Komety, meteory. Bolidy.

Gwiazdy. Mgławice. Droga mleczna.

KIERUNEK NAUK ŚCISŁYCH.

Klasa VI (3 godziny).

Liczenie.

Powtórzenie działań z liczbami całkowitymi. Ćwiczenia w rachunku pamięciowym. Zadania na liczby całkowite.

Ułamki zwyczajne. Sprowadzanie ułamków do spólnego mianownika. Działania z ułamkami. Ułamki dziesiętne; działania. Ćwiczenia.

Układ metryczny. Miary długości, powierzchni, objętości, wagi, gęstości, monet.

Czas, prędkość. Wyłożenie reguł wyliczania pól figur prostych i objętości brył prostych. Ćwiczenia, proste przykłady na przejście od jednego rodzaju jednostek do drugiego, wziętych z układu metrycznego.

Reguła trzech sposobem sprowadzenia do jedności. Procenty proste. Dyskonto handlowe. Renty. Zadania proste na mieszaninę i stopy.

Wskazówki ogólne. Przy przechodzeniu pierwszej części programu nauczyciel powinien unikać wszelkiej teorji; celem jego wykładu powinno być nauczyć uczni świadomie i dokładnie wypełniać działania z liczbami i licznymi przykładami zmusić do zrozumienia znaczenia każdego działania. Wszelkie określenia, szczególniej ułamków, powinny opierać się stale na przykładach konkretnych.

Przy przechodzeniu układu metrycznego, procentów prostych i t. d. nauczyciel powinien zaznajamiać uczni z używaniem liter i prostych wzorów

Klasa V (4 godziny).

Arytmetyka.

Numeracja dziesiętna. Dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych. Mnożenie liczb całkowitych. Iloczyn sumy lub różnicy przez pewną liczbę. Iloczyn kilku czynników. Potęga. Dzielenie liczb całkowitych. Reguła praktyczna. Cechy podzielności przez 2, 3, 5, 9.

Liczby pierwsze. Reguła rozkładu liczby na czynniki pierwsze w celu odnajdywania największego dzielnika i najmniejszej krotności.

Powtórzenie układu metrycznego.

Geometrja i rysunki geometryczne.

(patrz instrukcje).

Używanie linji, trójkąta, cyrkla i przenośnika.

Prosta i płaszczyzna. Kąty. Symetrja względem prostej. Trójkąty. Trójkąt równoramienny. Wypadki równości trójkątów.

Prostopadła i pochyłe. Wypadki równości trójkątów prostokątnych.

Proste równoległe. Suma kątów trójkąta i wielokąta wypukłego. Równoległobok. Prostokąt. Ukośnik. Kwadrat. Koło. Średnica. Cięciwy i łuki. Styczne.

Położenie względne dwu kół.

Wykreślanie kątów i trójkątów. Wykreślanie prostopadłych i równoległych. Wykreślanie kół i stycznych. Wykreślanie zapomocą cyrkla i linji zadań konstrukcyjnych, podanych w kursie geometrji. Przykłady proste i zadania, odnoszące się do kursu geometrji, wykreślanie ich.

Klasa IV (5 godzin).

Arytmetyka.

Ułamki zwyczajne. Działania. Ułamki dziesiętne. Wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne. Działania z ułamkami dziesiętnymi.

Reguła wyciągania pierwiastka kwadratowego z liczby całkowitej lub ułamka dziesiętnego z daną dokładnością (do $\frac{1}{10^n}$ przy n całkowitym).

Postęp arytmetyczny i geometryczny. Suma wyrazów postępu skończonego.

Sposoby handlowe wyliczania procentów i dyskonta; rachunki, rachunki bieżące. Podstawowe pojęcie o walutach.

Geometrja i kreślenie geometryczne.

Punkty, dzielące prostą w stosunku danym. Odcinki proporcjonalne. Własność dwusiecznych trójkąta. Trójkąty podobne. Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kąta. Określenie figur jednokładnych. Wielokąty podobne. Zależności metryczne w trójkącie prostokątnym. Wykreślanie czwartej proporcjonalnej i średniej geometrycznej.

Wielokąty foremne: kwadrat, sześciokąt i trójkąt równoboczny.

Pomiar długości okręgu (bez dowodu).

Mierzenie pól prostokąta, równoległoboku, trójkąta, trapezu, wielokąta. Stosunek pól dwu wielokątów podobnych. Pole koła.

Wykreślanie zadań konstrukcyjnych, podanych w kursie geometrji. Przykłady i zadania proste, odnoszące się do kursu geometrji. Wykreślanie ich. Wykreślanie miejsc geometrycznych. Wykreślanie krzywych.

Klasa III (4 godziny).

Algebra.

Liczby dodatnie i ujemne. Działania. Zastosowania konkretne.

Jednomiany i wielomiany. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie jednomianów i wielomianów. Dzielenie jednomianów.

Równania liczbowe pierwszego stopnia z jedną i dwiema niewiadomymi.

Zmiana i znak wyrażenia $ax + b$; przedstawienie graficzne.

Równanie kwadratowe. Zależność pomiędzy pierwiastkami a spółczynnikami. Zmiana x^2 i $\frac{1}{x}$, przedstawienie graficzne.

Używanie tablic logarytmów i antylogarytmów z czterema znakami dziesiętnymi. Procenty składane.

Geometrja.

O płaszczyźnie i prostej w przestrzeni. Kąt dwuścienny. Płaszczyzny i proste równoległe. Płaszczyzna i prosta prostopadłe do siebie. Rzut wielokąta. Określenie kątów bryłowych, graniastosłupy, ostrosłupy. Powierzchnie i objętości graniastosłupa i ostrosłupa.

Walec, stożek, płaszczyzny styczne. Kula. Przekrój płaski kuli. Bieguny.

Powierzchnie i objętości walca i stożka obrotowych. Powierzchnia i objętość kuli (bez dowodu). Zdejmowanie planów, mierzenie gruntów, niwelacja.

Kreślenie geometryczne.

Przykłady cieni ogólnie używanych i wypełnianie systematyczne cieniowania. Kreślenia geometryczne ozdobne płaskie, w które wchodzą proste i koła: posadzkowanie, mozaika, witraże; pokrywanie tuszem i farbami niektórych z tych rysunków.

Klasa II (5 godzin).

Algebra.

Działania z liczbami dodatnimi i ujemnymi.

Jednomiany, wielomiany, wyrazy podobne. Działania. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie jednomianów i wielomianów. Dzielenie jednomianów.

Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Nierówność pierwszego stopnia. Rozwiązywanie i dyskusja dwu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Zadania na układanie równań. Dyskusja rozwiązań. Zmiana wyrażenia $ax + b$; przedstawienie graficzne.

Równanie kwadratowe z jedną niewiadomą (bez teorji liczb urojonych). Zależność między spółczynnikami i pierwiastkami. Istnienie i znaki pierwiastków. Dyskusja trójmianu kwadratowego. Nierówność kwadratowa. Zadania na układanie równań kwadratowych.

Zmiana trójmianu kwadratowego; przedstawienie graficzne. Zmiana wyrażenia $\frac{ax + b}{a'x + b'}$, przedstawienie graficzne.

Postęp arytmetyczny i geometryczny. Logarytmy. Używanie tablic logarytmów z czterema lub pięcioma znakami. Procenty składane.

Uwaga. Co się tyczy logarytmów, to główna uwaga powinna być zwrócona na to, aby uczniowie przyzwyczaili się do tablic. Nauczyciel powinien podać tylko najogólniejsze wskazówki teoretyczne, opierając się czy to na postępach, czy też na wykładnikach.

Geometrja.

Prosta i płaszczyzna. Kąty, kierunek, zmiany kąta (powiększanie i zmniejszanie). Prostopadłe. Trójkąty. Trójkąt równoramienny. Prostopadła i pochyłe. Trójkąty prostokątne. Wypadek ich równości. Określenie miejsca geometrycznego. Miejsca geometryczne punktów jednakowo odległych od dwu punktów i od dwu danych prostych. Proste równoległe. Suma kątów w trójkącie i w wielokącie wypukłym.

Równoległoboki.

Figury symetryczne względem punktu i względem prostej. Równość figur symetrycznych płaskich.

Koło. Przecięcie się koła z prostą. Styczna, dwa określenia stycznej. Łuki i cięciwy. Położenie względne dwu kół. Mierzenie kątów.

Odcinki proporcjonalne. Punkty, dzielące odcinek prostej w stosunku danym. Określenie podziału harmonicznego. Trójkąty podobne. Prosta, równoległa do jednego z boków trójkąta, dzieli pozostałe boki na części proporcjonalne. Twierdzenie wzajemne. Określenie pęku harmonicznego. Własność dwusiecznych trójkąta. Koło Apolonjusza.

Pojęcie o jednokładności.

Wielokąty podobne. Sinus, cosinus, tangens i cotangens kątów, zawartych pomiędzy 0 a π. Zależności metryczne w trójkątach prostokątnym i skośnokątnym. Linje proporcjonalne w kole. Czwarta proporcjonalna; średnia proporcjonalna.

Wielokąty foremne. Wpisywanie w koło kwadratu, sześciokąta, trójkąta i dziesięciokąta. Dwa wielokąty foremne o jednakowej liczbie boków są podobne. Stosunek ich obwodów. Długość łuku koła. Stosunek okręgu do średnicy. Wyliczanie π (metodą obwodów). Pola wielokątów; pole koła. Mierzenie pola prostokąta, równoległoboku, trójkąta, trapezu i dowolnego wielokąta. Stosunek pól dwu podobnych wielokątów. Pole wielokąta foremnego wypukłego. Pole koła, wycinka i odcinka. Stosunek pól dwu kół.

Pojęcie o mierzeniu ziemi, używanie łańcucha i ekieru.

Klasa I (5 godzin).

Geometrja.

Płaszczyzna i prosta. Wyznaczanie płaszczyzny. Równoległość prostych i płaszczyzn. Prosta i płaszczyzna prostopadłe. Własność prostopadłej i pochyłych, wyprowadzonych z punktu do płaszczyzny.

Kąt dwuścienny. Zwrot. Kąt linjowy, odpowiadający kątowi dwuściennemu. Płaszczyzny prostopadłe do siebie. Rzut figury płaskiej. Symetrja względem prostej, punktu i płaszczyzny. Ten drugi wypadek sprowadza się do ostatniego.

Kąty trójścienne. Rozkład elementów. Kąty trójścienne symetryczne. Każda ściana kąta trójściennego jest mniejsza od sumy pozostałych. Granica sumy ścian kąta bryłowego wypukłego. Kąty trójścienne spełniające. Zastosowania. Wypadek równości kątów trójściennych.

Jednokładność. Przekroje kąta bryłowego płaszczyznami równoległymi. Pola.

Wielościany. Wielościany jednokładne. Graniastosłup, ostrosłup. Objętość równoległościanów i graniastosłupów. Objętość ostrosłupa i ostrosłupa ściętego płaszczyzną równoległą do podstawy. Objętość ostrosłupa trójściennego ściętego. Stosunek objętości dwóch wielościanów jednokładnych. Równoważność dwu wielościanów symetrycznych. Walec z kołem jako podstawą. Płaszczyzna styczna. Stożek z kołem, jako podstawą. Płaszczyzna styczna. Przekroje równoległe do podstawy. Powierzchnie obrotowe proste: walec, stożek. Kula. Przekrój kuli płaszczyzną. Bieguny. Płaszczyzna styczna. Stożek i walec opisane. Powierzchnia boczna walca i stożka obrotowych. Objętość walca i stożka obrotowych. Powierzchnia pasa kulistego. Powierzchnia kuli. Objętość kuli.

Geometrja wykreślna.

Rzut i cecha punktu. Przedstawienie prostej. Pochylenie. Odległość pomiędzy dwoma punktami. Proste zbieżne. Proste równoległe. Przedstawienie płaszczyzny. Skala pochyleń. Płaszczyzny równoległe. Przystawanie linji do płaszczyzny poziomej. Kąt między dwiema prostymi. Odległość punktu od prostej. Przecięcie się prostych i płaszczyzn. Proste i płaszczyzny prostopadłe. Odległość punktu od płaszczyzny. Kąt pomiędzy prostą i płaszczyzną. Kąt pomiędzy dwiema płaszczyznami. Przedstawienie punktu, prostej i płaszczyzny przy pomocy dwu płaszczyzn rzutów. Przecięcie się prostych i płaszczyzn. Proste i płaszczyzny równoległe. Przystawanie płaszczyzny do płaszczyzny poziomej. Zamiana pionowej płaszczyzny rzutów. Drugi sposób rozwiązania zadań na odległości i kąty.

Trygonometrja.

Funkcje kątowe (sinus, cosinus, tangens i cotangens). Zależność pomiędzy funkcjami kątowymi tego samego łuku. Wyliczanie funkcji kątowych niektórych łuków: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ i t. d.

Teorja rzutów. Wzory na sinus, cosinus i tangens sumy. Wzory na $\sin 2a$, $\cos 2a$ i $\operatorname{tg} 2a$.

Wszystkie funkcje kątowe kąta a wyrażają się wymiernie w zależności od $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

Mając $\cos a = b$, znaleźć sinus i cosinus kąta $\frac{a}{2}$; wybór znaku, odpowiadającego danemu kątowi. Mając $\operatorname{tg} a$, znaleźć $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

Przekształcanie sumy i różnicy dwu funkcji kątowych sin, cos i tg na iloczyn. Zadanie odwrotne.

Używanie tablic logarytmicznych z czterema lub pięcioma znakami. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych. Rozwiązywanie i dyskusja najprostszych równań trygonometrycznych. Zależności między bokami i kątami trójkąta.

Algebra.

Równanie i trójmian drugiego stopnia; przykłady liczbowe, w których zmienną może być funkcja trygonometryczna.

Pojęcie o pochodnej, znaczenie geometryczne pochodnej. Znak pochodnej wskazuje na kierunek zmiany funkcji; zastosowanie do badania funkcji.

$$\frac{ax + b}{a'x + b'}, \quad ax^2 + bx + c, \quad ax + b + \frac{c}{x}$$

i zmiana funkcji $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ze spółczynnikami liczbowymi.

Badanie ruchów prostolinjowych jednostajnego i jednostajnie przyśpieszonego. Określanie prędkości i przyśpieszenia w ruchu prostolinjowym za pomocą pochodnych.

(*Dok. nast.*).

POLEMIKA.

Od p. Leona Markuszewskiego z Kalisza otrzymaliśmy list treści następującej:

Korzystając z uprzejmie udzielonego miejsca w niniejszym piśmie, mam zamiar uzasadnić i z całą stanowczością obronić te punkty programu matematyki, uchwalonego przez sekcję matem.-fiz. Oddz. Kaliskiego Stow. N. P., które w № 4-m „Nauczania Matematyki i Fizyki" były podane do wiadomości ogólnej.

Z artykułu Sz. Pana możemy wywnioskować, że głównym zarzutem, skierowanym ku nam, jest przeładowanie programu materjałem zbytecznym. A więc, z programu tego należałoby usunąć: ułamki okresowe czyste i mieszane, zamianę ich na zwyczajne; proporcję arytmetyczną ze wszystkimi szczegółami; regułę łańcuchową; dzielenie wielomianu przez wielomian; wyciąganie pierwiastka sześciennego z liczb; wyciąganie pierwiastka kwadratowego z wielomianów; liczby urojone; równania dwumienne i trójmienne, równania wykładnicze i logarytmiczne; kombinatorykę; dwumian Newtona; objętość odcinka kulistego i warstwy kulistej.

Otóż w porozumieniu z członkami sekcji mat.-fiz. Oddz. Kaliskiego, uznaję, że:

1. Nauka o ułamkach okresowych wiąże się ściśle z zamianą ułamka zwyczajnego na dziesiętny i nie jest wcale „szczególikiem", bez którego człowiek ze średnim wykształceniem mógłby się obejść.

2. Dzielenie wielomianu przez wielomian odrzucić nie podobna, gdyż w przeciwnym razie nie potrafilibyśmy uzasadnić wielu wypadków rozkładania wielomianów na czynniki.

3. Bez wyliczania pierwiastków sześciennych nie umielibyśmy rozwiązywać całego szeregu dość prostych zadań z zakresu stereometrji, naprzykład: znaleźć krawędź sześcianu, mając jdgo objętość, albo: znaleźć promień kuli, mając jej objętość i t. p. Wprawdzłe, moglibyśmy wyliczać wielkości, poszukiwane w tych zadaniach przy pomocy logarytmów, ale te wyliczenia nie będą dokładne.

4. Równania dwumienne, trójmienne, wykładnicze i logarytmiczne rozwijają umysł ucznia.

5. Kombinatoryka ma zbyt często zastosowanie praktyczne, rozwija i kształci wyobraźnię, przytym jest to dział zajmujący i z tego powodu po ukończeniu szkoły średniej mniej się zapomina niż każdy inny.

Jeżeli mamy przyjąć zasadę: „nie dużo, lecz gruntownie", dlaczego „Program matematyki na egzaminach maturalnych" sekcji matem.-fiz. Oddziału Warszawskiego St. N. P., ułożony dość chaotycznie, nie uległ krytyce. Zdaje się, że ułamki okresowe, albo dzielenie wielomianu przez wielomian, są działy ważniejsze dla szkoły średniej, niż znajdowanie „maximum lub minimum trójmianu kwadratowego" albo „funkcja homograficzna".

Przyznać należy, że program niektórych klas z matematyki jest przeładowany i z tego powodu, naprzykład zadania z geometrji na wyliczenia, a zwłaszcza konstrukcyjne, często traktowane są zbyt pobieżnie, wobec tego możemy uznać działy mniej ważne za nieobowiązujące, naprzykład: regułę łańcuchową, wyciąganie pierwiastka kwadratowego z wielomianów, ułamki łańcuchowe, objętość odcinka kulistego i warstwy kulistej. Pozostałe zaś działy tworzą tak niezbędną całość, że bez nich uczeń po skończeniu szkoły średniej będzie odczuwał lukę, którą trudno mu będzie później wypełnić.

Mylnem jest twierdzenie, że szkoły zagraniczne redukują program matematyki. Mam przed sobą program rządowy szkół pruskich (wydanie r. 1916) p. t. „Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preussen." Znajdziemy w nim wszystkie te szczególiki, które Sz. Panowie proponują nam opuścić.

Nakoniec zaznaczę, że wyrażenie: „Położenie płaszczyzny w przestrzeni", w którym Sz. Pan widzi błąd, jest powszechnie przyjęte w terminologji geometrji.

Z powodu wielkiej wagi, jaką ma kwestja programu matematyki dla szkół średnich, sądzę, byłoby niezmiernie pożądanem, aby nad tą sprawą była otworzona dyskusja i zainteresowane siły nauczycielskie z innych oddziałów mogły zabrać głos na łamach „Nauczania Matematyki i fizyki".

Leon Markuszewski.

Kalisz, 27/I — 1918 r.

Odpowiedź. W sprawozdaniu moim z omawianego programu istotnie rozpatrywałem głównie stronę dotyczącą doboru materjału. Robiłem to z tego względu, że program ów zawiera w sobie wyłącznie wykaz rzeczy, przeznaczonych do programu. Nie zawiera on żadnych wskazówek metodycznych.

Rozejrzę po kolei punkty repliki.

1. Przedewszystkim ułamki okresowe na poziomie klasy drugiej nie mogą być należycie potraktowane, więc, choćby dla tego, tu niema dla nich miejsca. Ułamki okresowe nie przedstawiają sobą bynajmniej czegoś, bez czego człowiek ze średnim wykształceniem nie mógłby się obyć. Są rzeczy dużo poważniejsze, bez których człowiek ze średnim wykształceniem doskonale się obywa. Proszę wziąć choćby programy dwu typów szkół średnich — klasycznej i realnej. Pomiędzy tymi programami zachodzą znaczne

różnice, a pośród rzeczy niespólnych jest dużo więcej elementu kształcącego od zamiany ułamków okresowych na zwyczajne. Rzecz jakaś, szczególniej może w matematyce, o tyle powinna znaleźć miejsce w programie, o ile wiąże się organicznie z innymi rzeczami, o ile bez niej inne rzeczy tracą na wartości. Ale proszę sobie zadać pytanie: „kiedy w zagadnieniu, postawionym naturalnie, możemy otrzymać ułamek okresowy i kiedy wobec tego zachodzi potrzeba zamiany go na zwyczajny?"

W zagadnieniu konkretnym dane nie mogą być w postaci ułamka okresowego, więc on może powstać jedynie w ciągu rozwiązywania, t. j. przy dzieleniu jednej liczby przez drugą. Ale w tym wypadku zamiana jego na ułamek zwyczajny nie wymaga znajomości reguł, ponieważ wystarczy wziąć dzielną jako licznik, zaś dzielnik jako mianownik. Zamiana ułamka okresowego na zwyczajny może być nawet ciekawym „szczególikiem", ale nie w drugiej klasie, lecz jako przykład na granicę sumy postępu.

2. Bez umiejętności dzielenia wielomianów, istotnie, niektóre wypadki rozkładania na czynniki byłyby trudne do wypełnienia. Jednakże przeceniamy zwykle wartość rozkładania na czynniki i zbyt wiele nacisku kładziemy na ten dział bez żadnej wyraźnej potrzeby. Ułamki, co prawda, wymagają tej wiedzy. Ale jeśli rozejrzymy się w zadaniach (nie licząc, oczywiście, w umyśle ułożonych), które się natrafiają, to nie napotkamy na potrzebę dzielenia wielomianów.

3. Tablice logarytmiczne nawet czterocyfrowe dają aż nadto wystarczającą dokładność we wszystkich zastosowaniach.

4. Jeśli nie widzimy jakiejś poważniejszej racji za utrzymaniem pewnej rzeczy w programie, którą chcielibyśmy widzieć jako obowiązującą, to mówimy, że rzecz dana „rozwija umysł". Otóż słowa takie nic jeszcze nie mówią, jeśli nie wskażemy, na czym polega ten rozwój umysłu. Przypuśćmy, że zapoznaliśmy ucznia na licznych przykładach z metodami rozwiązywania zadań konstrukcyjnych, daliśmy mu w ten sposób do ręki pewne jakby narzędzie, z którym przystępuje on teraz z większą świadomością do rozwiązywania innych zagadnień. Rozwinęliśmy jego umysł w kierunku samodzielności. Wyobraźmy sobie również, że kazaliśmy uczniowi wykleić modele różnych brył geometrycznych — przyczyniliśmy się tym sposobem do rozwoju umysłu w kierunku przestrzennym. Ale w jakim kierunku rozwijamy umysł ucznia, każąc mu rozwiązywać równania dwumienne i t. p. Niektóre z tych równań są może i ciekawe, ale znowu jako pewien szczegół, jako zwyczajne zadanie, ale nie jako coś koniecznego.

5. Kombinatoryka sama przez się nic poważnego nie daje. Ale dołączmy do programu pewne zasady rachunku prawdopodobieństwa, wtedy staje się ciekawą i wartościową. Jeśli więc nie

podajemy rachunku prawdopodobieństwa, to nie przeladowujemy programu i kombinatoryką.

P. Markuszewski porusza kwestję „programu matematyki na egzaminach maturalnych" ułożonego w Oddz. Warszawskim St. N. P. i zapytuje, dlaczego nie uległ on krytyce. Prosimy go o nią, bardzo chętnie ją umieścimy.

Szkoły istotnie wzorowe pod względem programu z matematyki na Zachodzie, są przedewszystkim we Francji, a poza tym w Wirtembergji, Badenji, Włoszech.

Wyrażenie „położenie płaszczyzny w przestrzeni" nic nie mówi. Może być mowa o położeniu płaszczyzny względem czegoś innego, więc względem punktu, względem prostej, względem innej płaszczyzny i t. p.

T. Gutkowski.

Ostatnie słowo w tej sprawie należy do autorów programu.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA DLA UCZĄCEJ SIĘ MŁODZIEŻY.

1.—Ktoś, stojąc przy torze kolejowym, zauważył, że wysokość tonu gwizdka lokomotywy spadła o cały ton w chwili, gdy lokomotywa przebiegła obok niego. Znaleźć prędkość pociągu, jeśli prędkość dźwięku wynosi 330 m/s. Wskazać, z jaką dokładnością znaleziona jest ta prędkość, jeśli interwał tonu może być $\frac{10}{9}$ albo $\frac{9}{8}$.

2.—Na bilardzie, mającym formę koła, leży kula. W jakim kierunku należy uderzyć kulę, aby ta przeszła przez miejsce, gdzie leżała po dwukrotnym odbiciu się od brzegu, lecz nie wcześniej (patrz „Rozwiązanie graficzne równania kwadratowego" № 1 „Nauczania Matem. i Fiz.").

3.—Rozwiązać równanie:

$$\lambda \sin x + \cos x + 3\lambda - 1 = 0.$$

Jakim warunkom powinno odpowiadać λ, żeby równanie było możebne?

Rozwiązania powyższych zadań należy nadsyłać pod adresem redakcji do dnia 15 września r. b.

Za najlepsze rozwiązanie zadania № 1 wyznaczamy nagrodę w postaci książki: *T. Gutkowski* — „Fizyka". Pierwszeństwo przy otrzymaniu nagrody będą mieli ci, którzy nadeślą rozwiązania i innych zadań. Przy jednakowych danych rozstrzyga losowanie.

NOWE KSIĄŻKI.

Tadeusz J. Łazowski. **Geometrja wykreślna.** Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich (z ćwiczeniami i 200 rysunkami). — Gebethner i Wolff. Warszawa. Str. VIII, 243. 8⁰. 1917. Cena (w oprawie) 6 mk. *)

Autor zaznacza w przedmowie, że starał się o „jak największe zainteresowanie ucznia", „pogłębienie najistotniejszych pojęć i konstrukcji zasadniczych, których narzucanie zbyt pośpieszne umysłowi wyrządza wielkie szkody" i wreszcie „o przejrzystość w wykładzie metod ogólnych, wyzyskanie pożytecznych analogji i uwzględnienie zastosowań teorji do życia praktycznego". Rozdział I zawiera pobieżne wiadomości o rzutach środkowych, stereograficznych i równoległych (str. 3—13); w rozdziale II znajdujemy teorję rzutów prostokątnych (na jedną płaszczyznę) oraz „pojęcie o metodzie aksonometrycznej" (str. 14 — 29); w rozdziale III autor podaje określenia, dotyczące rzutów cechowanych i przechodzi do rzutów prostokątnych na dwie płaszczyzny (str. 30 — 51); dwa następne rozdziały (IV i V) zawierają wiadomości podstawowe, dotyczące punktów, prostych i płaszczyzn w rzutach prostokątnych na dwie płaszczyzny (str. 52 — 113). W czterech rozdziałach pozostałych (przeznaczonych do wykładu w następnej klasie) znajdujemy: rzuty środkowe koła i rzut równoległy (VI, str. 114 — 131), metodę zmiany płaszczyzn rzutów, metodę kładów i obrotów (VII, str. 132—160), zagadnienia, dotyczące wielościanów (VIII, str. 161 — 197) i powierzchni krzywych (IX, str. 198 — 243).

Wbrew intencjom, zaznaczonym wyraźnie w przedmowie, autor nie uwzględnia „zastosowań teorji do życia praktycznego"; brak konkretnych przykładów, zbyt abstrakcyjny wykład i skomplikowane znakowanie symboliczne nie mogą oczywiście stanowić dodatnich stron podręcznika, przeznaczonego dla początkujących, gdyż głównym celem elementarnego wykładu geometrji wykreślnej jest rozwój intuicji przestrzennej. W końcu każdego rozdziału podano ćwiczenia konstrukcyjne (przeszło 400), przeplatane pytaniami uzupełniającymi z dziedziny teorji. Rysunki wykonane zostały wogóle dość starannie, napisy jednak nie odznaczają się dostateczną przejrzystością.

L. W.

---

*) W № 3 „Nauczania Mat. i Fiz." podaliśmy recenzję tego podręcznika, napisaną przez p. R. Witwińskiego. Ażeby być możliwie bezstronnym przy ocenie nowych książek, podajemy jeszcze jedną.

REDAKTOR I WYDAWCA TADEUSZ GUTKOWSKI.

Za zezwoleniem Cenzury Niemieckiej.

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-ŚWIAT 41.