Rok II Warszawa, Kwiecień 1918 r. № 6

NAUCZANIE MATEMATYKI i FIZYKI

WYCHODZI W LUTYM, KWIETNIU, PAŹDZIERNIKU I GRUDNIU

TREŚĆ:

Prenumerata wynosi 5 marek rocznie w Warszawie i na prowincji. Cena oddzielnego zeszytu 2 marki.

Redakcja: Polna 78 m. 7.

Administracja: Księgarnia M. Arcta, Nowy-Świat 35.

OGŁOSZENIA

Z przyczyn od Redakcji niezależnych № 6 „Nauczania Matematyki i Fizyki" wyszedł z opóźnieniem.

Rok II. Warszawa, Kwiecień 1918 r. № 6

NAUCZANIE
MATEMATYKI I FIZYKI

WYCHODZI 4 RAZY DO ROKU POD REDAKCJĄ TADEUSZA GUTKOWSKIEGO

ROMUALD WITWIŃSKI.

Z TEORJI FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ.

§ **1.** W artykule p. t. „Metoda Fermata w świetle analizy spółczesnej" [1]) podaliśmy metodę znajdowania extrema funkcji $f(x)$, czyniącej zadość należytym ograniczeniom. Metoda ta sprowadza zagadnienie znajdowania extrema funkcji $f(x)$ do zupełnego, wyczerpującego rozwiązania równania

$$(1) \qquad f(z) = f(x)$$

względem z. Jeżeli równanie (1) względem z daje się rozwiązać zapomocą szeregu równości postaci

$$(2) \qquad z = \varphi_v(x),$$

i jeżeli funkcja $f(x)$ i funkcje $\varphi_v(x)$ czynią zadość ograniczeniom, wskazanym w § 6-tym rzeczonego artykułu, wówczas wyłożona metoda pozwala wyznaczyć extrema funkcji $f(x)$ i szczegółowo zbadać jej zmiany, nie uciekając się do rachunku różniczkowego. W rzeczy samej, przy obecności wskazanych warunków, w celu znalezienia wszystkich wartości zmiennej niezależnej, dla których funkcja $f(x)$ osiąga extremum, wystarcza znaleźć wszystkie pierwiastki rzeczywiste wszystkich równań postaci

$$(3) \qquad x = \varphi_v(x),$$

---

[1]) №№ 2 i 3 „Nauczania matematyki i fizyki".

otrzymanych z równości (2) przez zamianę z na x, przyczym okazuje się, iż między dwoma nierównymi najbliższymi pierwiastkami równań (3) funkcja $f(x)$ jest jednostajna.

W artykule niniejszym zamierzam uzupełnić metodę tę rozwiązywania zadań na extrema pewnymi uwagami. Prócz tego, chcę wyjaśnić pytanie, w jakiej postaci należy stosować, przy spółczesnym rozwoju analizy, zasadnicze twierdzenia rachunku różniczkowego do rozwiązywania zadań na extrema. Rachunek różniczkowy zaleca następującą powszechnie znaną metodę znajdowania extrema funkcji $f(x)$, opartą na zastosowaniu szeregu Taylora: różniczkujemy funkcję $f(x)$ i znajdujemy pierwiastki rzeczywiste równania $f'(x) = 0$; następnie obliczamy dla każdego ze znalezionych pierwiastków c wartości kolejne (oczywiście, gdy jest to możliwe) drugiej, trzeciej i t. d. pochodnych funkcji $f(x)$; jeżeli w szeregu liczb $f''(c)$, $f'''(c), \ldots,$ dojdziemy tą drogą do pierwszej różnej od zera pochodnej $f^{(n)}(c)$, wówczas przy n nieparzystym $f(c)$ nie jest extremum; jeżeli zaś n jest parzyste, wówczas, przy $f^{(n)}(c) < 0$, $f(c)$ jest maximum, a przy $f^{(n)}(c) > 0$—minimum funkcji $f(x)$. W artykule niniejszym wykażemy, iż zwykła ta metoda rozwiązywania zadań na extrema, zapomocą rachunku różniczkowego, może być korzystnie zastąpiona, przy rozwiązywaniu większości zwykle proponowanych zagadnień inną metodą, bardziej prostą i praktyczną.

§ 2. Metoda Fermata posiada tę niewątpliwą wyższość nad metodą stosowania szeregu Taylora, iż natychmiast wyznacza warunki konieczne i dostateczne osiągania przez funkcję $f(x)$ wartości extrema w pewnych punktach c, przyczym proste stosunkowo rachunki pozwalają zarówno odróżnić maximum od minimum'a, jak i wyznaczyć największe i najmniejsze wartości funkcji. Dla przykładu wystarczy porównać rozwiązanie zadania № III artykułu poprzedniego (znaleźć extrema funkcji $\left.\frac{2-4x-x^2}{x^2+1}\right)$ zapomocą metody Fermata z rozwiązaniem zwykłym zapomocą szeregu Taylora; zwykłe to rozwiązanie wymagałoby, oczywiście, w rozważanym przypadku rachunków nieco bardziej złożonych. Rozpatrzmy jeszcze przykład następujący: niech mamy do znalezienia extrema funkcji $f(x)=x^3$ (jeżeli te ostatnie istnieją). Stosując metodę Fermata, rozwiązujemy równanie:

$$(4) \qquad z^3 - x^3 = 0$$

względem z, przyczym wyłączamy pierwiastek $z = x$. Tym sposobem dochodzimy do równania $z^2+zx+x^2 = 0$, rozwiązując które względem z, otrzymamy:

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} x.$$

Tak więc, nie otrzymaliśmy żadnej funkcji rzeczywistej $z = \varphi_v(x)$, rozwiązującej równanie (4), nie sprowadzającej się do funkcji $z = x$ i określonej w pewnym przedziale. Wnosimy stąd, iż funkcja x^3 jest jednostajna w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$, zatym nie posiada extremum w żadnym punkcie. Metoda zwykła wymagałaby różniczkowania funkcji x^3 znalezienia pierwiastka pochodnej funkcji x^3 i kolejnego podstawiania tego jedynego pierwiastka, mianowicie, $x = 0$ w drugą pochodną, zamieniającą się na zero, i wreszcie — w trzecią pochodną, która okazuje się różną od zera; ponieważ w danym przypadku pierwsza nie zamieniająca się na zero pochodna jest rzędu nieparzystego, przeto okoliczność ta dowodzi nieistnienia extremum badanej funkcji.

Należy również zauważyć, iż metoda Fermata może być stosowana i do takiej funkcji $f(x)$, do której nie da się zastosować metoda zwykła. W rzeczy samej, metoda Fermata stosuje się do każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w całym obszarze jej określenia i czyniącej zadość wymaganiom 1°, 2°, 3°, 4°, wskazanym w § 6-tym naszego poprzedniego artykułu, gdy natomiast metoda zwykła, oparta na stosowaniu szeregu Taylora, zakłada istnienie pochodnej funkcji $f(x)$ w całym obszarze jej określenia, prócz tego,—istnienie pochodnych rzędu wyższego aż do pierwszej niezamieniającej się na zero pochodnej w punktach c, stanowiących pierwiastki równania $f'(x) = 0$. Tym sposobem, naprzykład, punkty kątowe i punkty zwrotu krzywej $y = f(x)$ nie stają na przeszkodzie możliwości stosowania metody Fermata, jeżeli tylko funkcja $f(x)$ w całym przedziale jej określenia jest ciągła i czyni zadość wymaganiom 1°, 2°, 3°, 4°, [1]). Wreszcie, jeżeli funkcja $f(x)$ posiada liczbę skończoną punktów przerwy ciągłości w tym przedziale, w którym jest dana, i jeżeli w przedziałach między kolejnymi punktami przerwy funkcja ta czyni zadość wymaganiom 1°, 2°, 3°, 4°, wówczas metoda Fermata stosuje się w kolejnych przedziałach między punktami przerwy (albo też w przedziale od jednego z końców całego obszaru określenia funkcji $f(x)$ do najbliższego punktu przerwy), przyczym, oczywiście, każdy punkt przerwy powinien być badany zosobna. W szczególności, jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w obszarze jej określenia liczbę skończoną wyłącznie tylko przerw nieskończonych, wówczas metoda Fermata nie wymaga żadnych dodatkowych badań, poza określeniem charakteru przerwy. Niech, naprzykład, chcemy wyznaczyć extrema funkcji $f(x)$, określonej przez równość:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}.$$

---

[1]) Punktem kątowym krzywej $y = f(x)$ nazywa się punkt, w którym funkcja $f(x)$, będąc ciągłą, posiada prawą i lewą pochodne, nie równe sobie, — t. j. punkt a, $f(a)$ jest punktem kątowym w tym przypadku, kiedy stosunek $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ posiada granice różne, gdy h dąży do zera, zachowując w jednym przypadku znak dodatni, zaś w drugim—ujemny. Ponieważ dla krzywej $y = \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$, jeżeli umówimy się, iż przy $x = 0$ i $y = 0$, wówczas początek spółrzędnych jest punktem kątowym. Punktem zwrotu krzywej $y = f(x)$ jest punkt, w którym funkcja $f(x)$, będąc ciągłą, posiada nieskończone lewą i prawą pochodne różnego znaku,—t. j. punkt a, $f(a)$ jest punktem zwrotu, jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła przy $x = a$, i jeżeli stosunek $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ dąży, przy nieograniczonym maleniu h i przy zachowaniu przez niego określonego znaku, — odpowiednio do nieskończoności określonego znaku. Naprzykład, dla krzywej $y = (\sqrt[3]{x})^2$ początek spółrzędnych jest punktem zwrotu.

Napiszmy badaną funkcję w postaci:

$$f(x) = 1 - \frac{6x}{(x+1)(x+2)};$$

spostrzegamy, iż funkcja ta jest określona w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$, wyjąwszy wartości zmiennej niezależnej $x = -1$ i $x = -2$, przy których funkcja osiąga nieskończoną przerwę. Czyniąc $x = -1 + \varepsilon$, a następnie $x = -1 - \varepsilon$, gdzie ε oznacza dowolnie małą liczbę dodatnią, otrzymamy:

$$f(-1+\varepsilon) = 1 + \frac{6(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)},\ f(-1-\varepsilon) = 1 - \frac{6(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varepsilon)}.$$

Gdy liczba ε, pozostając dodatnią, zmierza do zera, wówczas wyrażenia $6(1-\varepsilon)$ i $6(1+\varepsilon)$ dążą do granicy, równej 6, zaś każde z wyrażeń $\varepsilon(1+\varepsilon)$ i $\varepsilon(1-\varepsilon)$ dąży do granicy, równej zeru, stając się ostatecznie liczbą dodatnią. Wynika stąd [1]), iż

$$(4)\qquad \lim_{x=1-0} f(x) = \lim_{\varepsilon=+0} f(-1-\varepsilon) = -\infty,$$

$$\lim_{x=-1+0} f(x) = \lim_{\varepsilon=+0} f(-1+\varepsilon) = +\infty.$$

W sposób podobny znajdziemy, iż

$$(5)\qquad \lim_{x=-2-0} f(x) = \lim_{\varepsilon=+0} f(-2-\varepsilon) = +\infty,$$

$$\lim_{x=-2+0} f(x) = \lim_{\varepsilon=+0} f(-2+\varepsilon) = -\infty.$$

Z drugiej strony, zapisując funkcję $f(x)$ w postaci

$$f(x) = 1 - \frac{6}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{x+2}$$

i spostrzegając, iż, przy wzrastaniu x do nieskończoności,

---

[1]) Granice $\lim\limits_{x=a+0} f(x)$ i $\lim\limits_{x=a-0} f(x)$ oznaczają odpowiednio granice $\lim\limits_{h=0} f(a+h)$ i $\lim\limits_{h=0} f(a-h)$ przy nieograniczonym maleniu zmiennej h, zachowującej wartość dodatnią.

czynnik $\dfrac{6}{1+\dfrac{1}{x}}$ dąży do granicy, równej 6, czynnik zaś $\dfrac{1}{x+2}$ dąży do zera, znajdujemy:

$$(6) \qquad \lim_{x=+\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x=-\infty} f(x) = 1.$$

Tak więc badana funkcja $f(x)$ jest ciągła w każdym z przedziałów rozwartych $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, +\infty)$, czyniąc przytym w każdym z nich zadość, jako ułamkowa funkcja wymierna, wymaganiu 1° § 6-tego artykułu poprzedniego. Rozwiązując teraz względem z równanie

$$1 - \frac{6z}{z^2+3z+3} = 1 - \frac{6x}{x^2+3x+3},$$

$$\text{albo} \quad \frac{z}{z^2+3z+2} = \frac{x}{x^2+3x+2},$$

otrzymamy po wykonaniu zwykłych przekształceń xz^2+2x- $-x^2z-2z=0$, albo też $(z-x)(xz-2)=0$, skąd, po wyłączeniu rozwiązania $z=x$, znajdujemy: $z=\frac{2}{x}$; tym sposobem, wymagania 2°, 3° artykułu poprzedniego również spełniają się. Czyniąc wreszcie $\frac{2}{x}=x$ [t. j. zgodnie z przyjętymi przez nas oznaczeniami, $\varphi(x)=x$], znajdujemy, iż równanie $\frac{2}{x}=x$ posiada pierwiastki $x=c_1=-\sqrt{2}$, $x=c_2=\sqrt{2}$; tak więc wymaganie 4° również spełnia się. Wynika stąd, iż do rozważanej funkcji $f(x)$ da się zastosować metoda F e r m a t a w każdym z przedziałów $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, +\infty)$. Pierwszy z tych przedziałów nie zawiera żadnego z pierwiastków $\pm\sqrt{2}$ równania $\frac{2}{x}=x$; zatym w przedziale $(-\infty, -2)$ badana funkcja $f(x)$ jest jednostajna, przyczym w przedziale tym funkcja ta [p. (5), (6)] wzrasta od 1 do $+\infty$. Przedział $(-2, -1)$ zawiera tylko jeden pierwiastek $c_1=-\sqrt{2}$ równania $\frac{2}{x}=x$, zatym $f(-\sqrt{2})$ stanowi e x t r e m u m funkcji $f(x)$, mianowicie m aximum $f(x)$ i jednocześnie największą wartość w $(-2, -1)$, ponieważ [p. (4), (5)]

$$\lim_{x=-2+0} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x=-1-0} f(x) = -\infty.$$

W rzeczy samej, na mocy twierdzenia podstawowego metody Fermata, funkcja $f(x)$ jest jednostajna w każdym z przedziałów $(-2, -\sqrt{2}\rangle$ i $\langle\sqrt{2}, -1)$, przyczym z równości

$$\lim_{x=-2+0} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x=-1-0} f(x) = -\infty$$

jest jasne, iż w pierwszym z tych przedziałów funkcja $f(x)$ jednostajnie rośnie, zaś w drugim — jednostajnie maleje. Obliczając $f(-\sqrt{2})$, otrzymamy, iż

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(4+\sqrt{18})^2}{2} = -(17+4\sqrt{18}) = -33{,}97...$$

Przedział $(-1, +\infty)$ również zawiera tylko jeden pierwiastek $c_2 = \sqrt{2}$ równania, zatym $f(\sqrt{2})$ także jest extremum funkcji $f(x)$. Obliczając $f(\sqrt{2})$, znajdujemy, iż

$$f(\sqrt{2}) = -\frac{(4-\sqrt{18})^2}{2} = 4\sqrt{18} - 17 = -0{,}03...$$

Ponieważ [p. (4), (6)]

$$\lim_{x=-1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x=+\infty} f(x) = 1,$$

przeto $f(\sqrt{2})$ jest minimum, mianowicie — najmniejsza wartość funkcji $f(x)$ w przedziale $(-1, +\infty)$; z łatwością przekonamy się o tem, rozpatrując zosobna przedziały $(-1, \sqrt{2}\rangle$ i $\langle\sqrt{2}, +\infty)$.

§ **3**. Metoda Fermata stosuje się tylko do tych funkcji ciągłych, które czynią zadość wymaganiom 1°, 2°, 3°, 4°. Z wymagań tych warunek 2° jest najbardziej uciążliwy, ponieważ, przy złożonej postaci funkcji $f(x)$, zagadnienie, polegające na rozwiązaniu równania $f(z) = f(x)$ względem z stanowi często znaczne trudności; tym sposobem nie łatwą jest wogóle rzeczą rozpoznać, czy spełnia się wymaganie 2°, czy też nie. Okoliczność ta znacznie ogranicza zakres stosowalności metody Fermata, stąd też rozwiązywanie zadań na extrema zapomocą rachunku różniczkowego okazuje się zwykle najbardziej celowym. Dalej wykażemy, iż przy rozwiązywaniu zwykłego typu zadań na extrema korzystnie jest stosować nie zwykłą metodę rachunku różniczkowego, opartą na szeregu Taylora (p. § 1), a rozważania nieco inne. Rozważania te związane są z badaniem przebiegu funkcji zapomocą twierdzenia Lagrange'a (p. § 2 artykułu „Metoda Fermata w świetle analizy spółczesnej") i z tymi znacznymi uproszczeniami, które wprowadza w badanie to znane twierdzenie Darboux'a, ustanawiające jedną z zasadniczych własności pochodnej; twierdzenia tego dowiódł Darboux w swej słynnej rozprawie p. t. „Sur les fonctions discontinues" [1]. Twierdzenie Darboux'a orzeka: *jeżeli w przedziale* $<a, b>$ *istnieje pochodna* [2] $f'(x)$ *funkcji* $f(x)$, *przyczym wartości pochodnej* $f'(a) = A$ i $f'(b) = B$ *w końcach przedziału są różne, prócz tego* C *oznacza dowolną liczbę daną, położoną między* A *i* B, *wówczas w przedziale* $<a, b>$ *istnieje liczba* c, *dla której* $f'(c) = C$. Krócej, twierdzenie to można wyrazić w sposób następujący: *pochodna* $f'(x)$ *funkcji* $f(x)$ *nie może przechodzić od jednej wartości do drugiej, nie przechodząc przez wszystkie wartości pośrednie.*

Dla dowodu twierdzenia Darboux'a ustalimy przedewszystkim jego prawdziwość w przypadku szczególnym, — dowiedziemy mianowicie twierdzenia następującego:

Twierdzenie I. *Jeżeli w przedziale* $<a, b>$ *istnieje pochodna* $f'(x)$ *funkcji* $f(x)$, *i jeżeli wartości* $f'(a)$ *i* $f'(b)$ *pochodnej są znaków różnych, wówczas wewnątrz przedziału* $<a, b>$ *istnieje liczba* c, *dla której* $f'(c) = 0$.

Niech będzie $a < b$,

$$f'(a) > 0, \quad f'(b) < 0. \tag{7}$$

---

[1]) „Annales de l'École Normale", 1875. Patrz również de la Vallée Poussin—„Cours d'Analyse infinitésimale", § 102 (t. I).

[2]) W całym dalszym wykładzie przez pochodną rozumiemy pochodną skończoną.

Ponieważ funkcja $f(x)$ posiada pochodną w przedziale zamkniętym $<a, b>$, przeto jest w nim ciągła. Zatym, zgodnie z twierdzeniem Weierstrass'a, funkcja $f(x)$ osiąga przy pewnych wartościach x, położonych w $<a, b>$ swoją największą i najmniejszą wartość w przedziale $<a, b>$. Niech $f(x)$ osiąga wartość największą w przedziale $<a, b>$ przy $x = c$,—to znaczy

$$(8) \qquad f(c) \geqslant f(x), \text{ jeżeli } a \leqslant x \leqslant b.$$

Wykażemy teraz, opierając się na nierównościach (7), iż liczba c jest położona wewnątrz przedziału, $<a, b>$. Istotnie, spostrzegając, iż, na mocy warunku, $a<b$, mamy, zgodnie z określeniem pochodnej, dla należycie małych dodatnich wartości h równości następujące:

$$(9) \qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)+\eta,$$

$$(10) \qquad \frac{f(b-h)-f(b)}{-h} = f'(b)+\eta_1,$$

gdzie η i η_1 oznaczają odpowiednie funkcje zmiennej h, które dążą do zera wraz z h. Wynika stąd, na mocy nierówności (7), iż, przy dostatecznie małych dodatnich wartościach h, mamy: $f'(a)+\eta>0$, $f'(b)+\eta_1<0$, t. j. [p. (9), (10)] $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$, $\frac{f(b-h)-f(b)}{-h}<0$, skąd, z uwagi na to, iż $h > 0$, wynika dla dostatecznie małych wartości h, iż $f(a+h)-f(a) > 0$, $f(b-h)-f(b) > 0$, albo

$$(11) \qquad f(a) < f(a+h), \qquad (12) \qquad f(b)<f(b-h),$$

gdzie h—dostatecznie mała liczba dodatnia. Z nierówności (11) i (12) wynika, iż c jest położone wewnątrz $<a, b>$; w rzeczy samej, gdyby c nie było położone wewnątrz $<a, b>$, wówczas, z uwagi, iż znajduje się w tym przedziale, zlewałoby się z a lub z b, tak że [p. (10), (11)] spełniałaby się jedna z nierówności $f(c) < f(a+h)$, $f(c) < f(b-h)$, co jest niemożliwe, ponieważ każda z tych nierówności przeczy nierówności (8) na mocy tej okoliczności, iż liczby $a+h$ i $b-h$ należą do przedziału $<a, b>$. Tak więc, funkcja $f(x)$ osiąga wartość największą w pewnym punkcie c, położonym wewnątrz przedziału $<a, b>$. Wnosimy stąd, na mocy twierdzenia podstawowego teorji maximum'a i minimum'a, iż $f'(c) = 0$.

Gdybyśmy mieli

$$(13) \qquad f'(a) < 0, \qquad f'(b) > 0,$$

wypadłoby podówczas powtórzyć w gruncie rzeczy ten sam dowód, z tą tylko zmianą, iż przez $f(c)$ rozumielibyśmy nie największą, lecz najmniejszą wartość funkcji $f(x)$ w przedziale $<a, b>$. Ten ostatni przypadek dowodu twierdzenia można również sprowadzić do poprzedniego, rozważając funkcję pomocniczą $g(x)$, określoną w $<a, b>$ przez równość $g(x) = -f(x)$. Wówczas

$$(14) \quad g'(x) = -f'(x), \quad g'(a) = -f'(a), \quad g'(b) = -f'(b),$$

a zatym [p. (13)]

$$(15) \qquad g'(a) > 0, \qquad g'(b) < 0.$$

Nierówności (15) dają możność nasze twierdzenie zastosować do funkcji $g(x)$ w rozpatrzonym już przez nas przypadku [p. (7)], skąd wynika, iż wewnątrz $<a, b>$ istnieje liczba c, przy której $g'(c) = 0$, t. j. [p. (14)] $-f'(c) = 0$, albo $f'(c) = 0$. Tym sposobem, twierdzenie nasze zostało dowiedzione dla wszystkich przypadków.

Przejdźmy teraz do ogólnego przypadku twierdzenia Darboux'a.

Twierdzenie II. *Jeżeli w przedziale* $<a, b>$ *istnieje pochodna* $f'(x)$ *funkcji* $f(x)$, *przyczym wartości pochodnej* $f'(a) = A$ *i* $f'(b) = B$ *w końcach przedziału są różne, prócz tego* C *oznacza dowolną liczbę daną, położoną między* A *i* B, *wówczas w przedziale* $<a, b>$ *istnieje liczba* c, *dla której* $f'(c) = C$.

Rozważając funkcję pomocniczą $g(x)$, określoną w $<a, b>$ przez równość $g(x) = f(x) - Cx$, znajdujemy:

$$(16) \qquad g'(x) = f'(x) - C$$

i, w szczególności, $g'(a) = f'(a) - C$, $g'(b) = f'(b) - C$, t. j.

$$(17) \qquad g'(a) = A - C, \quad g'(b) = B - C.$$

Na mocy warunku, C jest położone między A i B; zatym [p. (17)] wartości $g'(a)$ i $g'(b)$ pochodnej $g'(x)$ funkcji

$g(x)$ w końcach przedziału $\langle a, b \rangle$ mają znaki różne. Wnosimy stąd, na mocy twierdzenia poprzedniego, iż istnieje liczba c, położona wewnątrz $\langle a, b \rangle$, dla której $g'(c) = 0$, albo [p. (16)] $f'(c) - C = 0$, skąd $f'(c) = C$. Innymi słowy, istnieje wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$ liczba c, dla której $f'(c) = C$.

Uwaga. Tak więc, jeżeli pochodna $f'(x)$ istnieje w pewnym przedziale, wówczas posiada ona znaną własność funkcji ciągłej [1]), mianowicie własność, iż nie może przechodzić od jednej wartości do drugiej, nie przechodząc przez wszystkie wartości pośrednie. Nie wynika stąd jeszcze wcale, że gdy pochodna $f'(x)$ pewnej funkcji istnieje w pewnym przedziale, wówczas pochodna ta jest w nim ciągła. W rzeczy samej, rozpatrzmy funkcję

$$(18) \qquad f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Funkcja ta jest określona dla wszystkich rzeczywistych wartości x, z wyjątkiem $x = 0$; umówmy się określić ją i dla $x = 0$ zapomocą równości

$$(19) \qquad f(0) = 0.$$

W ten sposób funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Obliczmy jej pochodną w punkcie $x = 0$. Przy $x = 0$ mamy [p. (18), (19)]:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Ponieważ (oczywiście przy $x \neq 0$) $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant 1$, przeto $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < |x|$; to znaczy, jeżeli x dąży do zera, wówczas i $x \sin \frac{1}{x}$ dąży do zera, t. j.

$$(20) \qquad \lim_{x=0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

---

[1]) p., naprzykład, G. Kowalewski (§ 33).

Tak więc, $\lim\limits_{x=0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x=0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, t. j.

$$(21) \qquad f'(0) = 0.$$

Jeżeli zaś $x \neq 0$, to różniczkując zwykłą drogą równość (18), otrzymamy

$$(22) \qquad f'(x) = 2\, x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Ponieważ funkcje $\sin z$ i $\cos z$ są ciągłe przy dowolnym z, zaś funkcja $\frac{1}{x}$ jest ciągła przy $x \neq 0$, przeto przy $x \neq 0$ pochodna $f'(x)$ [p. (22)] funkcji badanej jest ciągła. Lecz w punkcie $x = 0$ pochodna tej funkcji jest nieciągła. Istotnie, gdyby pochodna $f'(x)$ naszej funkcji była ciągła i w punkcie $x = 0$, wówczas mielibyśmy, iż $\lim\limits_{x=0} f'(x) = f'(0)$, t. j. [p. (21)]

$$(23) \qquad \lim_{x=0} f'(x) = 0.$$

Lecz [p. (22)], przy $x \neq 0$, $\cos \frac{1}{x} = 2\, x \sin \frac{1}{x} - f'(x)$, skąd wynikałoby [p. (20), (23)]:

$$\lim_{x=0} \cos \frac{1}{x} = 2 \lim_{x=0} x \sin \frac{1}{x} - \lim_{x=0} f'(x) = 0,$$

t. j. $\lim \cos \frac{1}{x} = 0$. Ostatnia równość jest, oczywiście, niedorzeczna. W rzeczy samej, gdyby tak było istotnie, wówczas granica funkcji $\cos \frac{1}{x}$ zostawałaby równą zeru, jakiekolwiek miałoby miejsce prawo malenia x-a. Rozpatrzmy wartości x-a, określone przez wzór $x = \frac{1}{2k\pi}$, gdzie k przybiera wartości $k = 1, 2, 3,...$; wówczas x, przy nieograniczonym wzrastaniu k, dążyłoby do zera, i mielibyśmy:

$$\lim_{k=\infty} \cos \frac{1}{(1 : 2k\pi)} = \lim_{k=\infty} \cos 2k\pi = 0,$$

gdzie k przybiera wartości 1, 2, 3,..., — co jest niedorzecznością, ponieważ $\cos 2k\pi = 1$ przy dowolnym całkowitym dodatnim k, skąd wynika, iż $\lim\limits_{k=\infty} \cos 2k\pi = 1$; tym sposobem doszlibyśmy do niedorzecznej równości $1 = 0$.

Tak więc, funkcja $f(x)$, określona przez równości (18) i (19), posiada pochodną w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$, która jest ciągła przy $x \neq 0$, lecz przy $x = 0$ — nieciągła. Zauważmy jeszcze, iż dla naszych celów potrzebne nam będzie właściwie twierdzenie I, nie zaś ogólne twierdzenie drugie.

(Dokończenie nastąpi).

TADEUSZ GUTKOWSKI.

OBRAZ ŹRÓDŁA FAL.

Nalejmy rtęci do pudełka postaci elipsy [1]). Potrąćmy tę rtęć w ognisku elipsy. Spostrzeżemy wtedy, jak z tego punktu biegnie fala i następnie po odbiciu zbiega się w drugim ognisku, następnie rozchodzi się dalej, zbiega się w pierwszym ognisku i t. d. aż do zamarcia.

Jeśli potrącimy wodę przy brzegu zupełnie równym, to spostrzeżemy, że fala odbita jest kulista i idzie tak, jak gdyby wychodziła z jakiegoś punktu za brzegiem.

Fala odbita najczęściej nie jest kulista, jeśli rozchodzi się w przestrzeni, i nie jest kolista, jeśli rozchodzi się po płaszczyźnie. Jednakże zdarzają się wypadki, kiedy fala odbita jest kulista lub kolista. Za przykład fali odbitej kolistej służyło odbicie fali o brzeg naczynia o postaci eliptycznej. Gdyby fala rozchodziła się w przestrzeni wewnątrz elipsoidy obrotowej z ogniska tej elipsoidy, odbicie dałoby również falę kulistą, zbiegającą się w drugim ognisku. Odbicie się fali od przegrody płaskiej daje również falę kulistą, której środek jest symetryczny do źródła fal padających. Widzimy więc, że jeśli fala odbita jest kulista, wtedy albo ona biegnie do pewnego punktu, żeby potym z niego biec dalej, albo też płynie tak, jak gdyby wychodziła z jednego punktu. I w jednym, i w drugim wypadku śro-

---

[1]) W braku takiego pudełka można je łatwo zrobić samemu, wystarczy wykrajać z deseczki elipsę i okleić ją dookoła sztywnym papierem.

dek fali odbitej będziemy nazywali *obrazem* źródła fal. Jeśli więc jedno ognisko naczynia eliptycznego jest źródłem fali, wtedy drugie ognisko jest obrazem tego źródła. Przy przegrodzie płaskiej obrazem źródła jest punkt symetryczny do źródła względem przegrody odbijającej. Jeśli obraz jest punktem, w którym fala odbita skupia się rzeczywiście i następnie rozchodzi się z niego, jak to ma miejsce w przykładzie z elipsą, obraz taki źródła będziemy nazywali rzeczywistym. Jeśli zaś fala odbita nie skupia się w obrazie, lecz tylko idzie tak, jak gdyby zeń wychodziła, jak to ma miejsce przy odbiciu się fali od przegrody płaskiej, obraz taki źródła będziemy nazywali *urojonym*.

Zajmiemy się teraz odnalezieniem warunków, przy których fala odbita daje obraz rzeczywisty lub urojony, t. j. jest kulista lub kolista. Zauważymy przedewszystkim, że jeśli pewna fala m zmienia się na falę m', czas, potrzebny na przejście od dowolnego punktu fali m do odpowiedniego punktu fali m', jest jednakowy dla wszystkich punktów fali. Otóż, żeby utworzył się obraz S' źródła S, należy, żeby powierzchnia odbijająca mogła odpowiadać temu warunkowi.

Obraz rzeczywisty.—Niech S będzie źródłem fali, niech AA' będzie powierzchnią odbijającą (rys. 1). Żeby fala odbita dała obraz w S' źródła S, należy aby czas, potrzebny na przejście drogi $SI + IS'$ był stały, t. j. niezależny od położenia punktu I na powierzchni odbijającej. Jeśli oznaczymy przez V prędkość rozchodzenia się fali, jako warunek istnienia obrazu w S', otrzymamy:

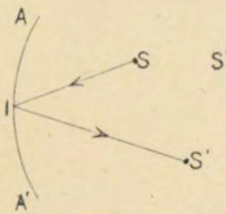
$$\frac{SI + IS'}{V} = \text{Const.}$$

albo

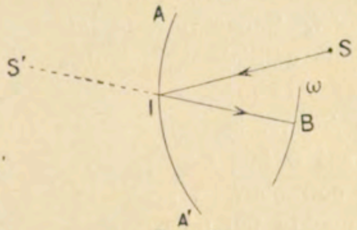
$$SI + IS' = \text{Const.}$$

Otóż miejsce geometryczne punktów odpowiadających temu warunkowi jest elipsa, jeśli te punkty leżą na płaszczyźnie, i jest elipsoida obrotowa, jeśli te punkty leżą wogóle w przestrzeni. I w jednym, i w drugim wypadku punkty S i S' są ogniskami. Widzimy więc, że rozpatrywany wyżej przykład otrzymania obrazu źródła mieszczącego się w ognisku elipsy, jest jedynym przykładem możności otrzymania obrazu rzeczywistego.

Wypadek poszczególny elipsoidy lub elipsy może być kula lub koło, jeśli obraz źródła mieści się w samym źródle.



Rys. 1.



Rys. 2.

Obraz urojony.—Niech S będzie źródłem fali, niech AA' będzie powierzchnią odbijającą (rys. 2). Znajdziemy warunek, przy którym fala odbita ma swój środek w S', czyli, obraz źródła jest urojony. Czas, potrzebny na przejście drogi $SI + IB$ od źródła do dowolnego punktu fali odbitej ω, jest jednakowy dla każdego punktu tej fali; jeśli V oznacza prędkość falowania, to:

$$\frac{SI + IB}{V} = \text{Const.}$$

albo
$$SI + IB = \text{Const.} \tag{1}$$

Ponieważ fala ω jest kulista albo kolista o środku S', więc:

$$S'B = \text{Const.}$$

albo
$$S'I + IB = \text{Const.} \tag{2}$$

Odejmując od równości (1) równość (2), otrzymamy jako warunek obrazu urojonego:

$$SI - S'I = \text{Const.}$$

Jeśli ta stała równa jest zeru, to $SI = S'I$ i powierzchnia AA' jest miejscem geometrycznym punktów jednakowo odległych od S i od S', czyli jest to oś symetrji odcinka SS', jeśli falowanie odbywa się w płaszczyźnie, i jest płaszczyzną symetrji odcinka SS', jeśli falowanie odbywa się w przestrzeni.

Jeśli stała nie jest zero, to miejsce punktów jest hiperbola lub hiperboloida obrotowa.

Widzimy więc, że na płaszczyźnie tylko przegroda prosta lub postaci hiperboli może dać obraz urojony, w przestrzeni zaś tylko płaszczyzna lub hiperboloida obrotowa.

Obraz w nieskończoności. — Jeśli obraz źródła znajduje się bardzo daleko, to fala odbita jest prawie płaska. Będziemy mówili, że jeśli fala odbita jest płaska, to obraz znajduje się *w nieskończoności*. Zobaczymy, jakim warunkom powinna odpowiadać powierzchnia odbijająca, aby obraz w nieskończoności, t. j. żeby fala odbita była płaska.

Niech S (rys. 3) będzie źródłem fali, AA' powierzchnią odbijającą, zaś ω falą odbitą płaską.

Czas, potrzebny na przejście drogi $SI+IB$ od źródła do dowolnego punktu fali odbitej ω jest jednakowy dla każdego punktu tej fali; jeśli V oznacza prędkość falowania, to ten czas jest:

$$\frac{SI+IB}{V} = \text{Const.}$$

albo

$$SI+IB = \text{Const.}$$

Ponieważ droga $SI+IB$ jest stała, więc możebnym jest przeprowadzić płaszczyznę D (lub prostą D) równoległą do fali ω taką, żeby odległość między nimi była równa $SI+IB$.

Mamy więc:

$$\begin{cases} CB = SI+IB \\ CB = CI+IB \end{cases}$$

skąd:

$$SI = CI.$$

Widzimy więc, że by po odbiciu od powierzchni AA' fala była powierzchnią płaską (lub linją prostą), należy, aby ta powierzchnia odbijająca była miejscem geometrycznym punktów jednakowo odległych od punktu S i od płaszczyzny (lub prostej) D. Otóż jest to paraboloida obrotowa (lub parabola), której ognisko jest w S.

Obraz rzeczywisty źródła nieskończenie dalekiego. — Falę płaską lub też falę na płaszczyźnie w postaci linji prostej będziemy nazywali falą, której źródło jest w nieskończoności. Zobaczymy, jakim warunkom powinna odpowiadać powierzchnia odbijająca, żeby fala po odbiciu skupiała się w jednym punkcie, czyli, żeby dawała *obraz rzeczywisty* punktu nieskończenie dalekiego.

Niech ω (rys. 4) będzie falą płaską (lub linją prostą, jeśli falowanie odbywa się na płaszczyźnie), niech AA' będzie powierzchnią odbijającą i S' obrazem rzeczywistym źródła fali ω.

Czas, potrzebny na przebycie drogi $BI+IS'$ od fali do obrazu, jest jednakowy dla każdego punktu tej fali; jeśli V oznacza prędkość falowania, to ten czas jest:

$$\frac{BI+IS'}{V} = \text{Const.}$$

albo

$$BI+IS' = \text{Const.}$$

Ponieważ droga $BI+IS'$ jest jednakowa dla każdego punktu B fali ω, więc możebnym jest poprowadzić płaszczyznę D (lub prostą D), równoległą do fali ω, taką żeby odległość między nimi była równa $BI+IS'$.

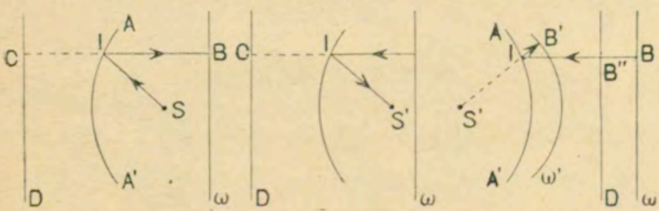
Mamy więc:

$$\begin{cases} CB = BI+IS' \\ CB = BI+IC \end{cases}$$

skąd:

$$SI = CI.$$

Widzimy więc, że aby po odbiciu od powierzchni AA' fala skupiła się w S', należy, aby ta powierzchnia była paraboloidą obrotową (lub parabolą), której ognisko jest w S'_n.



Rys. 3. Rys. 4. Rys. 5.

Obraz urojony źródła nieskończenie dalekiego.— Znajdziemy teraz warunki, jakim powinna odpowiadać powierzchnia odbijająca, aby fala płaska po odbiciu była kulistą (lub kolistą), której środek leżałby za powierzchnią odbijającą, czyli byłby obrazem urojonym źródła nieskończenie dalekiego.

Niech ω (rys. 5) będzie falą płaską (lub linją prostą), niech AA' będzie powierzchnią odbijającą, ω' falą odbitą kulistą (lub kolistą), której środek jest w S', czyli że S' jest obrazem urojonym źródła.

Czas, potrzebny na przebycie drogi $BI+IB'$ od dowolnego punktu fali padającej ω do odpowiedniego punktu B' fali odbitej, jest jednakowy dla każdej pary punktów odpowiednich; jeśli V oznacza prędkość falowania, to ten czas jest:

$$\frac{BI+IB'}{V} = \text{Const.}$$

albo

$$BI+IB' = \text{Const.}$$

Ponieważ $S'B'$ jest promieniem fali odbitej, więc:

$$S'I+IB' = \text{Const.}$$

Odejmując stronami dwie ostatnie równości, otrzymamy:

$$BI - S'I = \text{Const.}$$

Niech $BI - S'I = d$. Przeprowadźmy płaszczyznę (albo prostą) D, równoległą do fali ω w odległości d od tej fali. Wtedy:

$$\begin{aligned} d = BI - S'I &= BB''+B''I - S'I \\ &= d+B''I - S'I. \end{aligned}$$

Skąd:

$$B''I - SI = 0, \qquad \text{albo} \qquad B''I = SI.$$

Widzimy więc, że powierzchnia odbijająca powinna być paraboloidą (lub parabolą), której S' jest ogniskiem.

PROGRAM

MATEMATYKI W LICEACH WE FRANCJI.

(Dokończenie).

Klasa matematyki (8 godzin).

Arytmetyka.

Numeracja w układzie dziesiętnym. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb całkowitych. Twierdzenia zasadnicze odnośnie do czterech działań arytmetycznych. Objaśnienie reguł praktycznych wypełniania działań. Reszta od dzielenia sumy, różnicy, iloczynu nie zmienia się, jeśli do tej sumy, różnicy, jak również do jednego z czynników iloczynu dodać lub odjąć krotność dzielnika. Reszty od dzielenia liczby całkowitej przez 2, 5, 4, 25, 8, 125, 9, 3 i 11. Cechy podzielności dla każdej z tych liczb.

Największy spólny dzielnik dwu lub kilku liczb. Liczby pierwsze względem siebie. Każda liczba, dzieląca iloczyn dwu czynników i będąca pierwszą względem jednego z tych czynników, dzieli drugi czynnik.

Najmniejsza krotność dwu lub kilku liczb.

Określenie i własności najprostsze liczb pierwszych. Rozkładanie liczb na czynniki pierwsze. Wynik rozłożenia liczby na czynniki pierwsze istnieje tylko jeden. Odnajdywanie największego spólnego dzielnika i najmniejszej spólnej krotności sposobem rozkładania na czynniki pierwsze.

Ułamki zwyczajne. Skracanie ułamków. Sprowadzanie ułamków do spólnego mianownika. Najmniejszy spólny mianownik. Działania z ułamkami zwyczajnymi.

Ułamki dziesiętne. Działania (ułamki dziesiętne są rozpatrywane jako poszczególny wypadek ułamków zwyczajnych). Odnajdywanie ilorazu z dokładnością do $\frac{1}{10^n}$ (n—liczba całkowita).

Zamiana ułamka zwyczajnego na dziesiętny; warunek możebności. Jeśli zamiana jest niemożebna, to ułamek może być rozpatrywany jako granica ułamka okresowego nieskończonego.

Kwadrat liczby całkowitej i ułamka. Kwadrat sumy dwu liczb. Kwadrat ułamka nieskracalnego nie może równać się kwadratowi liczby całkowitej.

Określenie i wyciąganie pierwiastka kwadratowego z dowolnej liczby całkowitej lub ułamkowej z dowolną dokładnością.

Układ metryczny. Ćwiczenia.

Stosunek dwu liczb. Stosunki równe.

Podział na części proporcjonalne.

Pomiar wielkości. Określenie stosunku dwu wielkości jednorodnych. Twierdzenie: stosunek dwu wielkości jednorodnych równa się stosunkowi liczb, mierzących te wielkości.

Wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne. Zadania.

Określenie błędu rzeczywistego i bezwzględnego. Określenie górnej granicy błędu wyników dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, gdy dane są górne granice błędów popełnionych na danych.

Algebra.

Liczby dodatnie i ujemne; działania z nimi.

Jednomiany, wielomiany; dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie jednomianów i wielomianów.

Zasady, na jakich oparte jest rozwiązywanie równań. Równania pierwszego stopnia.

Równania drugiego stopnia z jedną niewiadomą (nie rozwijając teorji o rzekomych wielkościach).

Proste równania, zamieniające się na kwadratowe. Nierówności pierwszego i drugiego stopnia. Zadania pierwszego i drugiego stopnia.

Postępy arytmetyczne i geometryczne. Suma kwadratów i sześcianów n pierwszych całych liczb.

Logarytmy zwyczajne. Stosowanie tablic czterocyfrowych i pięciocyfrowych. Procenty składane i zapłaty na termin.

Spółrzędne punktu. Przedstawienie prostej zapomocą równania pierwszego stopnia. Spółczynnik kątowy prostej. Budowa prostej, danej zapomocą równania.

Zmiany i przedstawienia graficzne funkcji:

$$y = ax+b; \quad y = \frac{ax+b}{a'x+b'}; \quad y = ax^2+bx+c;$$

$$y = ax^4+bx^2+c.$$

Pochodna sumy, iloczynu, ilorazu, pierwiastka kwadratowego z funkcji, funkcji: sin x, cos x, tg x i cotg x. Przykłady do badania zmienności, jak również znajdowanie maximum i minimum najprostszych funkcji, w szczególności takich:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}; \quad x^3+px+q$$

ze spółczynnikami liczbowymi.

Pochodna pola krzywej, rozpatrywanego jako funkcja odciętej. (Przypuszcza się, że wiadome jest pojęcie o polu).

Wykładającemu zaleca się nie stawiać takich pytań, które wymagają szczegółowego wykładu teorji pochodnych; głównie powinien zastosowywać przykłady i dążyć do intuicji.

Trygonometrja.

Funkcje kołowe. Dodawanie i odejmowanie łuków. Mnożenie i dzielenie przez 2.

Rozwiązywanie trójkątów.

Zastosowanie trygonometrji do różnych pytań, dotyczących zdejmowania planów miejscowości. (O układaniu tablic trygonometrycznych nie wspomina się).

Geometrja.

Prosta; kąty. Równoległość. Wielokąty. Koło. Płaszczyzna; proste i płaszczyzny. Kąty dwuścienne i wielościenne. Przesunięcie, obrót. Symetrja. Jednokładność i podobieństwo. Stosunki miarowe. Wielokąty foremne.

Graniastosłup. Ostrosłup. Walec. Stożek. Kula. Powierzchnie i objętości.

Potęga punktu względem koła i kuli. Osie pierwiastne. Płaszczyzny pierwiastne. Biegunowe punktu względem koła; płaszczyzna biegunowa punktu względem kuli. Inwersja. Zastosowanie. Inwersor Pocelieu. Rzut stereograficzny.

Wektory. Rzut wektora na oś; moment linjowy względem punktu; moment względem osi. Suma geometryczna wektorów; moment wypadkowy względem punktu; suma momentów względem osi. Zastosowanie do pary wektorów.

Rzuty środkowe. Płaszczyzna rzutowa.

Perspektywa punktu, prostej i linji. Punkt zejścia. Perspektywa dwóch prostych równoległych. Linja zejścia. Pojęcie o prostej i płaszczyźnie nieskończenie odległych.

Przecięcia stożka.

Elipsa. Wykreślanie elipsy, styczna, zadania proste na styczne. Równanie elipsy odniesione do osi. Elipsa, rozpatrywana jako rzut koła; przecięcia elipsy i prostej.

Hiperbola. Wykreślanie, styczna, asymptota, zadania proste na styczne. Równanie hiperboli odniesione do osi.

Parabola. Wykreślanie, styczna; zadania proste na styczne. Równanie paraboli odniesione do jej osi i stycznej w wierzchołku.

Określenie ogólne tych krzywych zapomocą ogniska i kierownicy. Przecięcia płaskie stożka albo obroty walca.

Geometrja wykreślna.

Obroty rzutów płaszczyzn. Zmiana rzutów płaszczyzny; obroty naokoło osi, prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutów.

Zadania na mierzenie odległości i kątów. Odległość między dwoma punktami, punktu od prostej i od płaszczyzny; najkrótsza odległość między prostymi, równoległymi jednej i tej samej płaszczyzny rzutów, między nierównoległymi prostymi, z których jedna pionowa; spólna prostopadła do tych prostych. Kąt między dwiema prostymi, między prostą i płaszczyzną, między dwiema płaszczyznami.

Rzut koła. Kula, przecięcia jej płaszczyzną, przecięcie jej z prostą. Stożek i walec mające za podstawę koło; styczna płaszczyzna, przechodząca przez punkt; styczna płaszczyzna, przechodząca równolegle do prostej; cienie; kontury widziane; przecięcia płaskie. Stożki i walce, opisane na kuli. Cienie.

Przedstawienie powierzchni przy pomocy poziomych. Cecha punktu powierzchni, której rzut poziomy jest wiadomy. Pochylenie linji, poprowadzonej na powierzchni. Linje jednakowego pochylenia. Linje największego pochylenia. Zastosowanie powyższych pojęć do map topograficznych. Zdejmowanie planów i niwelacja. Umowne linje i sposoby tuszowania. Orjentowanie się w mapach i w szczególności w mapach sztabu głównego. Używanie mapy.

Cynematyka.

Jednostki długości i czasu. O ruchu, jego stosunku. Tor punktu. Przykłady ruchu. Ruch prostolinjowy: ruch jednostajny; prędkość, przedstawienie jej zapomocą wektora. Ruch zmienny, prędkość średnia, prędkość ruchu w danym momencie, przedstawienie jej zapomocą wektora, średnie przyśpieszenie, przyśpieszenie w danym momencie, przedstawienie go zapomocą wektora. Ruch jednostajnie-zmienny. Ruch krzywolinjowy. Prędkość średnia, prędkość w danym momencie, przedstawienie zapomocą wektora. Wartość algebraiczna prędkości. Hodograf. Przyśpieszenie. Jednostajny ruch punktu po kole, prędkość kątowa, rzut ruchu na średnicę, ruch prosty wahający na prostej.

Zmiana układu porównania. Suma prędkości.

Przykłady i zastosowania (nie należy kłaść nacisku na zastosowania geometryczne).

Ruch suwny ciał stałych. Suwne (glissières). Obrót ciał stałych dokoła osi. Walce i łożyska. Badanie geometryczne linji śrubowej. Ruch śrubowy ciała. Śruba i mutra. Proste przekształcenia ruchów, rozpatrywane z punktu widzenia praktycznego: przekładnia pasowa, koła trybowe, korba (nie potrzebne są szczegóły mechanizmów).

Dynamika i statyka.

Ciało materjalne. Bezwładność. Siła; przedstawienie jej zapomocą wektora. Masa. Niezależność działania sił. Dodawanie sił.

Równowaga ciała materjalnego wolnego. Równowaga ciała materjalnego na linji krzywej albo na powierzchni. Równowaga ciała materjalnego na płaszczyźnie, gdy istnieje tarcie.

Ruch wolnego punktu materjalnego po pionowej. Ruch paraboliczny punktu materjalnego.

Tarcie przy posuwaniu. Ruch punktu materjalnego wzdłuż linji największego pochylenia płaszczyzny, z tarciem i bez tarcia.

Praca mechaniczna. Jednostka pracy. Praca siły stałej i zmiennej. Praca elementarna.

Praca całkowita. Graficzne wykreślenie pracy. Praca kilku sił. Teorja żywych sił dla ciała materjalnego. Przykłady proste.

Siły, zastosowane do ciał stałych. Siły równoległe. Środek sił równoległych. Środek ciężkości. Odnajdywanie środka ciężkości w wypadkach prostych: trójkąt, trapez, czworokąt, pryzmat, ostrosłup.

Para sił. Dodawanie par.

Sprowadzenie sił, zastosowanych do ciał stałych, do dwóch sił albo do jednej siły, albo do pary sił.

Rodzaje równowagi ciał stałych. Wypadkowa trzech sił, sił równoległych, sił, położonych na jednej płaszczyźnie.

Równowaga ciał, poruszających się naokoło nieruchomej osi, nieruchomego punktu albo zmuszonych pozostawać na nieruchomej płaszczyźnie.

Maszyny proste w stanie spoczynku i ruchu. Dźwignia. Siła na punkt oporu. Kołowrót. Bloki stałe i ruchome. Wielokrążek, równia pochyła. Sprawdzenie położenia: gdy maszyna prosta znajduje się w ruchu i gdy warunki równowagi są spełnione w każdym momencie, to praca elementarna motoru równa się, lecz jest znaku przeciwnego pracy przeciwdziałania. Zasada sił żywych (bez dowodzenia). Zastosowanie dowodzenia do maszyn.

Praca siły poruszającej i praca oporu. Opory bierne. Tarcie.

Praca oporu biernego. Wydajność maszyny.

Wskazanie co do użycia kół rozpędowych i hamulców.

Kosmografja.

Kula niebieska. Odległość kątowa. Wysokość i odległość zenitu. Teodolit.

Prawa ruchu dziennego. Południk. Biegun. Doby gwiazdowe. Pochylenie i wschód po linji prostej. Koło południkowe.

Ziemia. Spółrzędne geograficzne. Rozmiary i kształt ziemi. Mapa półkul. Mapy.

Słońce. Widzialny ruch słońca na niebie. Ekliptyka. Nierówność dnia i nocy w różnych szerokościach. Pory roku. Rok zwrotnikowy i gwiazdowy. Czas gwiazdowy i czas średni.

Kalendarz Juljański i Gregorjański.

Księżyc. Widzialny ruch księżyca na niebie. Fazy.

Obrót. Zmiana widzialnej średnicy księżyca.

Zaćmienia słońca i księżyca.

Planety. System (układ) Kopernika. Prawa Keplera.

Prawo Newtona i jego następstwa.

Ogólne pojęcia o odległościach, rozmiarach i składzie fizycznym słońca, planet i ich księżyców.

Komety; gwiazdy spadające, bolidy.

Gwiazdy, konstelacje. Mgła. Droga mleczna.

INSTRUKCJA PROWADZENIA WYKŁAD. MATEM.

Program nauk matematycznych powinien być uważany za zbiór materjału, jaki należy wykładać w różnych klasach.

Wykładający może dowolnie wybierać materjał, który należy przejść, oraz metody prowadzenia wykładów odpowiednio do poziomu klasy.

W drugim cyklu wykładów, po ukończeniu którego otrzymuje się stopień bakałarza, wykładający powinien przejść wszystko, co jest podane w programie; po ukończeniu pierwszego cyklu wykładów egzamin nie jest wymagany, dlatego też wykładający może przy przechodzeniu wymaganego kursu zastosować się do poziomu słuchaczy, jak i opuścić pewne punkty swego programu, o ile uzna to za stosowne, a zatrzymywać się na najważniejszych i najodpowiedniejszych.

Wogóle materjał programu oficjalnego można uważać za maksymalny; lepiej będzie, gdy uczniowie posiądą pewne wiadomości, chociaż może w mniejszym zakresie, niż zbyt ogólnikowe w znacznie większej ilości. Chociaż w prowadzeniu wykładów można stosować różne metody, to jednak trzeba uważać na kierunek i ciągłość wykładu, ażeby podać podstawowe rzeczy i w należytym porządku, co umożliwiłoby naukę w dalszym ciągu. W tym celu zwraca się uwagę pp. wykładających na następujące wskazówki, które dotyczą programów różnych cyklów.

CYKL I.

Przedewszystkim należy mieć to na uwadze, że w tym okresie uczniowie są jeszcze zbyt młodzi i może nie jeden z nich opuści liceum po ukończeniu klasy 3-ej; dlatego też wykładający powinien przerabiać jak najwięcej ćwiczeń z życia praktycznego i nie nazbyt skombinowanych; teorja, przynajmniej na początku, powinna być wyprowadzana z przykładów konkretnych. Trzeba koniecznie oswajać uczniów stopniowo z pojęciami oderwanymi, zwracając uwagę, na licznych przykładach, na ścisłe określanie pojęć i na logiczne rozważanie, wskazując w każdym wypadku na błędy, jakie mogą się zdarzyć, zwłaszcza gdy spotyka się rzeczy źle określone lub z figurami, których elementy i rozkład nie są dokładnie określone. Zbiory ciekawych zadań mogą dostarczyć wiele przykładów, mogących wywrzeć silne wrażenie na uczniu. Weźmy np. dowodzenie równości 64 i 65, kąta prostego i rozwartego etc.

Arytmetyka. Uczniów należy ćwiczyć w liczeniu, w rozwiązywaniu zadań, które nie wymagają sposobów sztucznych, w szczególności nie należy zmuszać uczniów do rozwiązywania zadań sposobem arytmetycznym, o ile uczeń może łatwiej rozwiązać je przy pomocy algebry. Należy stale zwracać uwagę na sam rezultat; na błędy, jakie mogą się zdarzyć. Zmieniając dane zadania, np. metr na centymetr, należy przyzwyczajać uczniów do szybkiego poznawania danego rezultatu i porównywać go z uprzednim. Należy unikać tylko tego, aby uczniowie nie robili obliczeń sposobem tylko mechanicznym, nie zdając sobie sprawy z tego, czy dane obliczenia powinny mieć miejsce, czy też nie.

Program arytmetyki handlowej (comptabilité) jest skrócony i zastąpiony pojęciami o obrotach, przeprowadzanych w bankach i w handlu; wprawiać uczniów należy tylko przy pomocy pewnych danych, wziętych z prawdziwych obrotów. Podczas przechodzenia powyższego działu programu wykładającemu proponuje się przejść go z większą starannością, gdyż ten rozdział, będąc znacznie skróconym, może być bardzo potrzebny uczniom, którzy mają porzucić liceum albo college po przejściu pierwszego cyklu. Teoretyczna część arytmetyki dotyczy nauki dodawania, odejmowania, mnożenia liczb całych, odnajdywania cech podzielności i poznania ułamków; takie poznawanie powinno opierać się na przykładach konkretnych, ale to niekoniecznie obowiązkowe: o ile uczeń interesuje się nie tylko mechanizmem samego wykonywania danego działania, ale i podstawami, na których opiera się jakaś reguła, to jest wskazane zaspokoić jego ciekawość, a nawet byłoby złym odmówić mu tego.

Algebra. Najważniejsza faktycznie treść algebry zawiera się w ćwiczeniach piątej i czwartej klasy; w klasie 3-ej można podać konkretne określenia i ich teorję elementarną. Budowa twierdzeń powinna być ścisłą; na pewnych wyjątkach nie należy zatrzymywać się zbyt długo; wystarcza, gdy uczeń wie, że twierdzenia, którymi operuje, mają miejsce tylko w znanych wypadkach; o ile w pewnych wypadkach warunki te nie są wypełnione, to uczeń powinien wiedzieć, że należy uważać je, jako pewne samoistne zadania i to będzie dla niego o wiele lepszym ćwiczeniem od tego, w którym wymaga się od niego jedynie wysiłku pamięciowego, polegającego na tym, żeby znaleźć, jakie powinny być wprowadzone zmiany do twierdzenia, aby móc rozwiązać ten wypadek konkretny. Badanie zmienności funkcji powinno, o ile możności, iść w parze z pewnymi wykreśleniami grafiki; wykreślona w ten sposób krzywa może służyć jako określenie jednej spółrzędnej w zależności od drugiej. Porównanie rezultatów, otrzymanych zapomocą grafiki, ze znaczeniami, odnajdywanymi przy pomocy rachunku, dowodzi, jak jest ważne wykreślenie rysunku i przyzwyczai uczniów zdawać sobie sprawę ze stopnia przybliżenia, jaki może być osiągnięty przy pomocy grafiki.

Geometrja. Wykład geometrji powinien być poglądowy; ma on na celu klasyfikacje i ścisłe określanie pojęć, spotykanych w życiu praktycznym, wyprowadzanie drugich mniej rzucających się w oczy pojęć i zastosowanie ich do zagadnień, które zastosowujemy w życiu praktycznym. Wszelkich ustnych określeń należy unikać i nigdy nie należy mówić o nowych elementach, gdy nie przedstawia się ich konkretnie i nie pokazuje się ich budowy, w tym celu należy zmienić ogólnie przyjęty porządek wykładu; przeważnie określenie koła należy podać od początku i w miarę potrzeby, należy uczyć obchodzić się i korzystać z przyrządów, służących do kreślenia. O ile program podany jest zgodnie z przyjętym porządkiem, to tylko dlatego, aby nie wprowadzać żadnego nowego; w każdymbądź razie należy zwrócić uwagę na to, że wyżej podany rozkład nie jest koniecznie tym, jaki powinien być stosowanym przy wykładzie. Przy objaśnieniu faktów wykładający powinien ciągle zwracać się do doświadczenia i bez żadnych wahań uważać na to, jako doświadczalną rzeczywistość, co okaże się dla uczniów jasnym. Szkodliwie byłoby dowodzić równości kątów prostych, równości odpowiednich kątów, istnienie przecięcia okręgu z prostą, której jeden z punktów znajduje się wewnątrz jego etc.; uczeń nie pojmuje, jak można dowodzić tych rzeczy i zatrzymuje w pamięci tylko same słowa, pozbawione dla niego wszelkiego sensu; można zawsze i nawet byłoby pożądane dowieść uczniowi konieczności dowodzenia w pewnych wypadkach, ale tylko wtedy, gdy uczeń przekona się o konieczności tego. W ten sposób uczeń będzie przekonany o dwóch postaciach wiarogodności różnego rodzaju: jedna doświadczalna, należąca do nauk fizycznych, druga — logiczna, związana z istotą matematyczną; ale byłoby wielkim błędem przywiązywać do ostatniej z nich taką wagę, której w rzeczywistości nie posiada, a mieć pewne wątpliwości co do pierwszej z nich. Wiarogodność doświadczalna (należy to jej przyznać) jest jedyną, jaką my posiadamy; podstawowe reguły matematyki nie mają innej podstawy dla uczniów. Szczególnie trzeba mieć na widoku wagę, jaką posiada logiczne rozważanie w celu doprowadzenia do minimum danych doświadczalnych. Dużo można przytoczyć przykładów, jak np. jeśli zacząć budowę 10-ciokąta foremnego, to drogą eksperymentu można się przekonać, że prawie nie można wykonać tej budowy tak, ażeby otrzymać wielokąt zamknięty; jeżeli wziąć za bok wielokąta foremnego połowę boku trójkąta równobocznego, to otrzymujemy długość bardzo bliską do boku 7-miokąta foremnego; jeśli mierzyć kąty trójkąta, to zawsze znajdziemy, że suma ich jest zbliżona do 180° etc. To wszystko wskazuje, że doświadczenie daje możność poznać wpierw rzeczywistość, ale nie wystarcza jeszcze dla ścisłego poznania tej rzeczywistości. Tak więc, jeżeli można zapomocą logicznego rozważania wykazać prawdziwość danej rzeczywistości lub obalić to, czego dostarcza nam doświadczenie, to należy koniecznie zastosować te rozważania, tak samo łatwo można wskazać na ważność w praktyce, którą przedstawia metoda logicznego dowodzenia, opierając się na tym, że dzięki tej metodzie znika wszelka wątpliwość o prawdziwości rezultatów.

W ten sposób można przygotować uczniów do geometrji w drugim cyklu wykładów, gdyż wtedy tylko będą zadziwiali się, z jak wielką łatwością dowodzi się różnych twierdzeń. Stałe wracanie do idei ruchu powinno ułatwić wykład geometrji; tak więc naukę o równoległości można przechodzić w związku z pojęciem przenoszenia, wyprowadzonym sposobem eksperymentalnym, poznawanie linji prostopadłych i płaszczyzn — w związku z obrotem; ideję równości można związać z ideją przestawiania figur, którą należy zrobić więcej ścisłą zapomocą prostego pojęcia wzajemnego rozkładu (orientation).

Rysunek powinien odgrywać wielką rolę w takim wykładzie geometrji; należy wymagać od uczniów ścisłego wykonywania rysunku, wskazanego w kursie i usilnie łączyć obliczenia z bezpośrednim mierzeniem, zwłaszcza w klasie 3-ej; można wzbudzać zainteresowanie uczniów, zmuszając ich do wykreślenia rysunków cieniowanych i przecięć płaskich; niema mowy o tym, czy trzeba wskazywać uczniom na ogólne metody geometrji wykreślnej i wykreślenia; każde zadanie powinno być rozwiązywane samodzielnie i pomysłowość ucznia powinna być ćwiczona w znajdywaniu odpowiednich sposobów rozwiązania zadanego zadania; uczeń powinien operować najważniejszymi twierdzeniami kursu, sądząc w ten sposób o ich doniosłości. Nic nie przeszkadza zadać uczniowi zbudować jakieś ciało, przedstawione na rysunku, obliczyć jego elementy, następnie zmierzyć je na rysunku lub na samym ciele; porównanie rezultatów pozwoli mu samemu ocenić każdy sposób.

Lecz rysunek nie przedstawia sobą jedynego sposobu, mogącego ułatwić taki wykład geometrji; są jeszcze i inne środki, które mają większe znaczenie, ażeby ułożyć związek pomiędzy teorją a jej zastosowaniem. W rzeczywistości dobrze byłoby dać uczniowi do ręki jakieś ciało, proponując mu zmierzyć to, co on uważa za konieczne, ażeby później otrzymać to samo przy pomocy rysunku; obliczyć powierzchnię, objętość danego ciała etc. i otrzymane rezultaty sprawdzić drogą eksperymentu. W tym celu dobrze byłoby ćwiczyć uczniów w zdejmowaniu planów, co można osiągnąć nie wychodząc nawet z budynku szkolnego. Łatwo jest poprowadzić prostą, łączącą dwa punkty, leżące w dwu jakich pokojach i zmierzyć ich odległość etc.; należy przytym zwrócić uwagę na to, że przy rozwiązywaniu tych zadań spotykamy się z twierdzeniami, które, mogłoby się zdawać, mają czysto teoretyczny charakter.

Obok tych praktycznych ćwiczeń, które mogłyby być ułatwione przez odpowiednie kolekcje modeli i prostych przyrządów, koniecznym jest przyzwyczajać uczniów do rozwiązywania zadań prostych, proponując im spróbować odgadnąć rozwiązanie, rozwijając w ten sposób ich intuicję, a potym żądać już od nich ścisłego dowodzenia, kładąc nacisk na znaczenie każdego zdania, jak również w miarę potrzeby, wskazując i na to, że źle zastosowane lub określone słowo może doprowadzić do różnych wniosków, stosownie do pojęcia, które można nadawać danemu słowu.

CYKL II.

Program drugiego cyklu jest ułożony w ten sposób, aby dać możność uczniom, wstępującym do klasy matematyki, posiąść wszystkie wiadomości podstawowe z geometrji, algebry i trygonometrji. Pożądanym jest ten sposób prowadzenia wykładów, ponieważ przejście cyklu pierwszego pozwala teraz robić nacisk w wykładach na stronę logiczną. Należy zawsze zważać na to, że tylko przez liczne ćwiczenia uczniowie przyzwyczajają się do zastosowywania tych podstaw, jakie już zdążyli posiąść. Dobrze byłoby utrzymać związek pomiędzy równymi częściami kursu, rozwijając na równi dział algebryczny i geometryczny. Nic nie szkodzi, jeżeli do dowodzeń geometrycznych będziemy wprowadzali stosunki trygonometryczne, jeśli dla określenia objętości skorzystać z metody nieskończenie małych, którą w prostych wypadkach można zastosować z największą ścisłością.

Klasa matematyki.

W kursie matematyki tej klasy wykładający nie potrzebuje już zatrzymywać się na kursach pierwszej i drugiej klasy algebry, geometrji, trygonometrji i geometrji wykreślnej, ale drogą zapytywań i ćwiczeń powinien się przekonać o tym, czy wszyscy uczniowie zrozumieli i posiedli owe kursy.

W szczególności dobrze jest oddzielić w geometrji własności rzutowe od metrycznych, porównywając badanie przestrzeni z badaniem płaszczyzny; to nie będzie zbyt trudne dla tych uczni, którzy przeszli już początkowy kurs geometrji, jest nawet rzeczą wskazaną łączyć razem fakty podobne, dając tym sposobem obraz ogólny, bez czego trudno bardzo uporządkowywać pojęcia.

Chyba zbytecznym jest podkreślać ważność ćwiczeń praktycznych, jak: zdejmowanie planów, wypełnianie rysunków z geometrji wykreślnej; tylko przy wypełnianiu wielkiej liczby tych ćwiczeń uczniowie zrozumieją geometrję wykreślną i polubią ją.

W mechanice nie napotyka się żadnych przeszkód w stosunku do zasad podstawowych; zasada niezależności działania siły może być doprowadzona do tego, że jeśli jakieś siły działają w danym momencie t na punkt materjalny, to przyśpieszenie, jakie ono posiada w danym momencie, równa się sumie geometrycznej przyśpieszeń, jakie posiadałaby ta (niezależność), gdyby każda z tych sił działała osobno. Wykładający powinien unikać wszelkich ćwiczeń, przedstawiających się tylko z punktu geometrji; w tym celu, ażeby usunąć powody do podobnego rodzaju rozwinięć, twierdzenia o wektorach sprowadzane są do koniecznego minimum i zastosowane do geometrji, w której są przedstawione w świetle rzeczywistym.

Wykładający powinien wybierać przykłady z mechaniki o charakterze praktycznym, odnoszące się do mechanizmów, do wypadków ruchu i równowagi, znanych uczniom; powinien zadawać zadania z danymi liczbowymi, przyzwyczajać do rozmaitych układów metrycznych, należy unikać rozważań ogólnych i zbyt wielkiej liczby obliczań, ćwicząc uczniów w rozumowaniu nad każdym poszczególnym wypadkiem. Przy wyjaśnieniu w praktyce istoty przenoszenia, obrotu śrubowego ruchu i przekształceniu ruchu przy pomocy maszyn, wykładający nie powinien posiłkować się jedynie tylko rysunkiem i modelami, lecz powinien pokazać uczniom maszyny najwięcej używane, rozbierać je wraz z uczniami, pokazać im związek między różnymi częściami i przekształcenie ruchów, które otrzymuje się przy tym.

Tak samo i w statyce i dynamice dobrze jest wybierać ćwiczenia o charakterze praktycznym i sprawdzać je drogą eksperymentu. Przy poprawianiu robót klasowych uczniów na obliczanie wykładający powinien przy każdej okazji objaśnić im metody obliczeń przybliżonych.

W kosmografji nie należy rozwijać metody pomiarów i badań, które są potrzebne tylko dla prawdziwych astronomów, lecz należy tylko dać pojęcie astronomji fizycznej.

Jedną godzinę przynajmniej w tygodniu koniecznie należy poświęcić wyłącznie na zadania obliczeń praktycznych, na zadania z geometrji wykreślnej, z mechaniki i na przykłady z kursu. Wszystkie ćwiczenia wyłącznie powinny być dostosowane do programu i nie należy wdawać się w żadne nowe rozwinięcia z teorji w wypadku jakichś nowych przykładów.

Okólnik 23 marca 1906 roku o prowadzeniu wykładów matematyki i fizyki w dziale matematyki.

Zmiany, zaprowadzone na mocy rozporządzenia z dnia 27 lipca 1905 r. do programu matematyki, odbiją się na wykładach fizyki, głównie w dziale matematyki. Program tego działu był ułożony pod warunkiem, że uczniowie wstępowali do tej klasy ze znajomością kinematyki, kosmografji, krzywych, wogóle całego materjału, który przedstawiał sobą rzeczywiście część programu pierwszej klasy działu C i D (nauk ścisłych). Ale materjał ten został przeniesiony do działu matematyki, tak iż uczniowie od tej pory będą przechodzili do tej klasy, nie posiadając odpowiednich podstaw, koniecznych do nauki fizyki.

Zwróciłem przeto uwagę na ten stan i na środki, którymi możnaby go złagodzić. Nie chcąc zmieniać rozkładu materjału naukowego proponuję dwa rozwiązania.

W dziale matematyki:

I. Wykładający powinni zaczynać swój kurs od kinematyki, na co potrzeba zużyć dziesięć godzin.

II. Wykładający fizykę nie powinni zaczynać wykładów fizyki przed ukończeniem kinematyki. Do tego czasu powinni zająć się wyłącznie chemją.

Powinno się wprowadzić do kursu niektóre pojęcia z dziedziny kosmografji, pojęcia o krzywych, używanych w praktyce, które są im konieczne.

KIERUNEK FILOZOFICZNY.

Te wykłady matematyki powinny odróżniać się tym samym charakterem, co i I cyklu kierunku nauk ścisłych. Brak czasu nie pozwala wykładającemu zbyt rozwodzić się nad swoim kursem; powinien zawsze zważać na to, że koniecznym jest podać uczącym się pojęcie formy ciał, a może nawet opuścić, o ile uzna to za potrzebne, każdą oderwaną teorję. Jako ćwiczenia powinny służyć zadania na obliczanie powierzchni i objętości ciał ze stałym wskazywaniem na obiór jednostek i ze stałym korzystaniem systemu metrycznego miar. Najprostsze konstrukcje, lecz starannie wykonane, mogą być najlepszymi zadaniami; rozwiązywaniem prawdziwych zadań geometrycznych, zadań na dowodzenie twierdzeń i miejsca geometryczne, można zająć się tylko w tych klasach, gdzie znajdują się uczniowie, chcący zajmować się w dalszym ciągu nauką. Dowodzenia twierdzeń mogą być przeprowadzane tylko wtedy, gdy w klasie okaże się dostateczna liczba uczniów, zdolnych do ich pojęcia; przy obliczaniu objętości ciał można ograniczyć się w ostatecznym razie sformułowaniem prawideł lub w prostszych wypadkach sprawdzić te prawidła, korzystając z metod nieskończenie małych, unikając wtedy (ma się rozumieć) wszelkich trudności, jakie mogą się natrafić.

Zajęcia nieobowiązkowe.

Co do nauczania uczniów, zamierzających wstąpić na wydział fizyko-matematyczny po skończeniu kursu, pozostawia się wykładającemu zupełną swobodę. Ucząc uczniów pilnych i zdolnych, sam może rozstrzygać o wielkości i jakości kursu. Chodzi głównie o to, ażeby uczniowie pojmowali matematykę; nie idzie o to, ażeby uczniowie umieli jak najwięcej, lecz ażeby posiadali podstawowe zasady matematyki i przyzwyczaili się rozumować logicznie.

PRZYRZĄD DO WYKAZANIA PODŁUŻNOŚCI FALI DŹWIĘKOWEJ.

W wykładzie fizyki teoretycznie przychodzimy do przekonania, że fale dźwiękowe są podłużne. Fakt ten da się sprawdzić doświadczalnie w następujący sposób. Obręcz drewnianą od 35 do 40 cm. średnicy oklejamy sztywno papierem pergaminowym. Tarczę, utworzoną w ten sposób, ustawiamy pionowo, a obok niej zawieszamy wahadełko, zrobione z kulki z rdzenia bzowego, zawieszonego na cienkiej nici. Wahadło to ustawiamy tak, aby dotykało lekko tarczę akurat po środku. W odległości m. w. 1 metra od tarczy w kierunku do niej prostopadłym zapalamy przez uderzenie kapiszon papierowy. Zauważamy, jak wahadełko odskakuje, wskazując, że papier per-

gaminowy zadrgał w kierunku rozchodzenia się fali widocznie. Jeśli teraz zrobimy taki sam wybuch w płaszczyźnie tarczy, to nie zauważymy odchylenia się wahadła; widocznie drgające cząsteczki powietrza ślizgają się po tarczy, nie wprawiając papieru w drganie.

T. Gutkowski.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ (№ 4 N. M. i F.).

1.—Oznaczmy przez f opór powietrza, stawiany płycie przy prędkości v. Gdyby prędkość płyty była 10 m/sek., to opór byłby $8 \times 0,5$ czyli 4 kg. Ponieważ opór jest proporcjonalny do kwadratu prędkości płyty, więc:

$$f = 4\left(\frac{v}{10}\right)^2 = 0,04\ v^2.$$

Znajdźmy, jaka powinna być prędkość v płyty, aby opór f zrównoważał się ciężarem płyty, czyli żeby $f = 4$. Otrzymamy:

$$4 = 0,04\ v^2, \quad \text{skąd} \quad v = 10 \text{ m/sek.}$$

Początkowa prędkość płyty jest mniejsza od 10 m/sek. ponieważ ona jest 0. Wobec tego początkowo opór jest mniejszy od siły ciężaru płyty, ciągnącej ją w dół. Istnieje więc pewna siła wypadkowa, która sprawia, że ruch jest przyśpieszony, skutkiem czego prędkość wzrasta. Jednakże prędkość nie może przekroczyć 10 m/sek., gdyż wtedy siła oporu zrównoważa ciężar. Z drugiej strony prędkość wzrasta, póki nie dojdzie do 10 m/sek., więc graniczna wartość prędkości jest 10 m/sek.

Rozwiązanie nadesłał p. *Wł. Majewski*, który otrzymał nagrodę.

2.—Dzieląc licznik zadanego ułamka przez jego mianownik, otrzymamy:

$$y = x - 6 + \frac{20}{x+3} = (x+3) + \frac{20}{x+3} - 9.$$

Pierwsze dwa wyrazy dają w iloczynie 20. Zastosujemy więc do tej funkcji twierdzenie IX artykułu „Badanie bezpośrednie funkcji" (№ 4 Nauczania M. i F.). Zbadamy najpierw tę funkcję dla wypadku, gdy $x+3$ jest dodatnie, t. j. $x > -3$. Wiadomo, że suma $(x+3)+\frac{20}{x+3}$ zmienia się tak, jak bezwzględna wartość różnicy. Otóż ta wartość jest najmniejsza przy $x+3 = \frac{20}{x+3}$, t. j. przy $x = -3 + 2\sqrt{5}$. Ponieważ rozpatrujemy wypadek, w którym $x > -3$, więc tu może być tylko $x = -3 + 2\sqrt{5}$. Możemy więc podać następującą tablicę zmian:

x	-3	$\nearrow$	$-3+2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Przy ujemnych wartościach $x+3$, t. j. przy $x < -3$ funkcja zachowuje się przeciwnie. Pełna tablica zmienności przedstawia się tak:

x	$-\infty$		$-3-2\sqrt{5}$		-3			$-3+2\sqrt{5}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$4\sqrt{5}-9$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$		$-4\sqrt{5}-9$	$\nearrow$	$+\infty$

Pierwiastki tej funkcji są te, które zamieniają licznik na zero, t. j. 1 i 2.

Przejdźmy teraz do funkcji Y. Podzielmy licznik przez mianownik, otrzymamy:

$$Y = 1 + \frac{x+3}{x^2 - 3x + 2} = 1 + \frac{1}{y}.$$

Możemy więc odrazu podać następującą tablicę:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{5}-3$		-3		1		$2\sqrt{5}-3$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-4\sqrt{5}-9$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$4\sqrt{5}-9$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
Y	1	$\nearrow$	$4\sqrt{5}-8$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$-4\sqrt{5}-8$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

Rozwiązanie nadesłał p. *Wl. Majewski.*

3.— Przypuśćmy, że zadanie zostało rozwiązane. Zegnijmy figurę wzdłuż prostej Y, wtedy punkt C upadnie w A, zaś prosta Z przyjmie położenie symetryczne do dawnego względem Y. Stąd wynika budowa. Wykreślamy prostą Z' symetryczną do Z względem Y; przez punkt przecięcia się prostych X i Z' prowadzimy prostą Δ prostopadle do Y, która jest poszukiwaną.

Konstrukcja ta wskazuje na to, że aby zadanie było oznaczone, należy aby symetryczna do Z przecinała X. Jeśli ta prosta przylega do X, czyli jeśli prosta Z i X są symetryczne względem Y, to zadanie jest nieoznaczone.

Rozwiązanie nadesłał p. *Wl. Majewski.*

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA DLA UCZĄCEJ SIĘ MŁODZIEŻY.

1.—Dany jest ostrosłup trójkątny foremny. 1°. Oznaczając przez α kąt między jedną z krawędzi bocznych a podstawą i przez β kąt między jedną ze ścian bocznych a podstawą, znaleźć związek między kątami α i β. 2°. Niech r oznacza promień koła, opisanego na podstawie; wyrazić promień kuli, opisanej na ostrosłupie, w zależności od r i α i zbadać, jak się zachowuje, gdy α przybiera wszelkie wartości możliwe. 3°. Opierając się na ustalonym związku między kątami α i β, zastąpić w pytaniu 2° kąt α kątem β i rozwiązać zagadnienie analogiczne.

2.—Dwa środowiska, w których fale rozchodzą się z różną prędkością, są rozdzielone powierzchnią. Jakim warunkom powinna odpowiadać ta powierzchnia, żeby obraz źródła fal był urojony. Wykazać, że jedną z takich powierzchni jest kula.

Rozwiązania należy nadsyłać do 15 września.

ODPOWIEDŹ REDAKCJI.

Otrzymaliśmy następujące zapytanie od p. J. K. Czy zawór elektrolityczny Nodona, podany w № 2 „Nauczania M. i F.," może być stosowany do prądu zmiennego z cewki Rumkorfa.

Wyprostowywanie tych prądów jest możebne przy uwzględnieniu granicy, podanej na str. 13 omawianego artykułu, t. j. że zawór taki z roztworem fosforanu amonu działa do 150 wolt. W cewkach indukcyjnych najmniejszych nawet, mamy napięcia od kilku tysięcy wolt. Weźmy przykład: dla cewki, dającej między kulkami iskrę około 5 mm., różnica potencjałów wynosi około 15,000 wolt, czyli potrzeba byłoby stu elementów Nodona, połączonych w szereg dla zatrzymania części prądów (uzwojenia wtórnego), odpowiadających przerywaniom obwodu pierwszego. Dla zatrzymania elektryczności kierunku przeciwnego, odpowiadającego zamknięciom obwodu pierwotnego, jako o potencjale niższym możnaby użyć liczby mniejszej elementów zaworu Nodona. Ta liczba jest zależną od cewki.

Ażeby znaleźć dolną granicę tej liczby, należałoby uciec się do doświadczenia.

DODAWANIE UŁAMKÓW.

Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych lepiej przeprowadzać inaczej, niż, jak to zwykle bywa, zapomocą rozkładu na czynniki, znajdywania spólnego najmniejszego mianownika i t. d. Np.:

$$\frac{4}{15}+\frac{2}{9}-\frac{2}{25}=\frac{\left(\frac{4}{15}+\frac{2}{9}-\frac{2}{25}\right).25}{25}$$

$$=\frac{\frac{4.5}{3}+\frac{2.25}{9}-2}{25}=\frac{\frac{20}{3}+\frac{50}{9}-2}{25}$$

$$=\frac{\left(\frac{20}{3}+\frac{50}{9}-2\right).9}{25.9}=\frac{60+50-18}{225}=\frac{110-18}{225}=\frac{92}{225}.$$

Zaczynam od największego mianownika (25). Chcąc się go pozbyć (nie zmieniając wielkości ułamka) mnoży się wszystko i dzieli przez 25, a co można skraca się; w ten sposób pozbywamy się kolejno i innych mianowników, przechodząc do coraz mniejszych.

Zygmunt Grzymski.

PRZYRZĄD PROSTY DO PRĄŻKÓW NEWTONA.

Jedną płytkę fotograficzną wyświetla się i wywołuje na czarno, a z drugiej zmywa się emulsję. Jeśli położyć drugą płytkę na pierwszej i ścisnąć w palcach, to można zauważyć w wielu miejscach prążki Newtona.

T. Gutkowski.

REDAKTOR I WYDAWCA TADEUSZ GUTKOWSKI.

Za zezwoleniem Cenzury Niemieckiej.

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-SWIAT 41.