

XIII.

SUR L'ÉQUILIBRE DES CORPS ÉLASTIQUES
MULTIPLEMENT CONNEXES

«Annales sc. de l'Éc. Norm. Sup.», ser. 3^a, t. XXIV, 1907, pp. 401-518.

INTRODUCTION.

J'ai consacré ce Mémoire à une étude systématique de l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.

Dans le premier Chapitre, je montre qu'il y a des cas d'équilibre pour les corps à connexion multiple qui ne se présentent pas pour les corps à connexion simple. Le point de départ de ces recherches est le groupe de formules (I), (I'), (I'') du premier Chapitre. Lorsqu'on déforme un corps élastique on peut calculer, par ces formules, les déplacements en connaissant les éléments caractéristiques de la déformation. Les formules (I), (I'), (I'') caractérisent la polydromie des déplacements et montrent qu'un corps élastique multiplement connexe, à déformation régulière, peut garder la déformation étant en équilibre, sans l'action de forces extérieures. On obtient ces états d'équilibre par des opérations que j'ai appelées des *distorsions*.

Dans le deuxième Chapitre j'ai étudié les éléments qui caractérisent les distorsions.

La composition des tensions, qui sollicitent les éléments d'un corps élastique, sur lequel on a fait une ou plusieurs distorsions, donne lieu aux *efforts* que j'ai étudiés dans le Chapitre III. On peut exprimer l'énergie de déformation du corps élastique par les caractéristiques des distorsions et par celle des efforts ou par des formes bilinéaires de deux différentes espèces de caractéristiques. J'ai donné aussi dans ce Chapitre deux propositions fondamentales: le *théorème de réciprocité* pour les efforts et le *théorème des coupures équivalentes*.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude des corps élastiques multiplement connexes et symétriques par rapport à un axe. La symétrie simplifie l'expression de l'énergie et de cette expression simplifiée on peut tirer plusieurs théorèmes très singuliers sur la distribution des efforts.

Dans le Chapitre V j'ai commencé des applications particulières afin de comparer les résultats du calcul à ceux de l'expérience et je les ai continuées dans les Chapitres VI et VII.

J'ai envisagé un cylindre creux qui est un corps à connexion double et j'ai calculé les formes qu'il doit prendre en l'assujettissant aux six distorsions élémentaires. On peut dessiner ces formes et les comparer avec celles qu'un gros cylindre creux de caoutchouc prend effectivement. Les dessins dont je viens de parler et les photographies du cylindre sont reproduits dans ces Chapitres.

Enfin, dans les Chapitres VIII et IX, j'ai étudié le problème suivant: *Déterminer les efforts en connaissant les distorsions d'un système formé par plusieurs parties déformables reliées rigidement entre elles.*

On arrive par là à une théorie du même type que celle de KIRCHHOFF sur la distribution des courants électriques dans les fils.

Les sept premiers Chapitres sont l'ensemble de quelques Articles que j'ai publiés à plusieurs reprises dans les « Comptes rendus de l'Académie des Lincei » (*). J'y ai ajouté les deux derniers Chapitres qui sont inédits.

J'ai aussi ajouté trois Notes: la première renferme une démonstration des formules (I), (I'), (I'') donnée par CESÀRO, après la publication de mes résultats; dans la seconde j'ai exposé les élégantes expériences faites par M. ROLLA dans le laboratoire de Physique de l'Université de Gènes, dirigé par M. GARBASSO. Par des expériences très ingénieuses d'Optique faites sur un cylindre creux de gélatine on peut distinguer les parties comprimées et celles dilatées lorsqu'on assujettit le cylindre à des distorsions. La troisième Note se rapporte à une méthode que M. ALMANZI vient de publier pour déterminer les déformations des cylindres à connexion multiple.

Je dois remercier MM. les professeurs ALESSANDRINI et TRANQUILLI pour la traduction française de ce Mémoire; MM. les professeurs SELLA, PITTARELLI, ZAMBIASE pour les expériences, les dessins et les photographies et M. l'ingénieur JONA pour les modèles en caoutchouc.

CHAPITRE I.

Théorèmes généraux sur l'équilibre ().**

I.

1. M. WEINGARTEN a publié une Note intéressante⁽¹⁾: *Sur la théorie de l'élasticité.* Il a remarqué qu'il peut exister des cas dans lesquels un corps élastique tout en n'étant sujet à aucune action extérieure, c'est-à-dire sans être sujet ni aux forces extérieures agissant sur ses points intérieurs, ni aux forces extérieures agissant sur sa surface, peut cependant ne pas se trouver à l'état naturel, mais être dans un état de tension qui varie d'une façon continue et régulière d'un point à l'autre.

Il est facile de trouver des cas pratiques de corps dans ces conditions. Par exemple, un anneau auquel on a supprimé une tranche très mince transversale et dont on a ensuite ressoudé les deux extrémités.

(*) Queste Note del VOLTERRA trovasi elencate nella Bibliografia, alla fine della presente Memoria (pp. 241-242). Ad evitare inutili ripetizioni tali Note non sono state pubblicate in queste « Opere ». [N.d.R.].

(**) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Un teorema sulla teoria della elasticità.* « Rend. Acc. Lincei », s. 5^a, vol. XIV, 1905, pp. 127-137. [N.d.R.].

(1) *Sur les surfaces de discontinuité dans la théorie de l'élasticité des corps solides.* « Rend. R. Acc. Lincei », 5^e série, Vol. X, 1^{er} sem. 1901.

2. Dans la Note de M. WEINGARTEN il y a une question qui reste en suspens. En dehors des anneaux et des autres corps qui occupent des espaces multiples connexes peut-il exister des corps simplement connexes qui se trouvent dans les conditions précédentes?

A première vue, la question n'est pas facile à résoudre; mais intuitivement on serait porté à donner une réponse affirmative. En effet, on serait porté à croire que, même dans les cas de corps simplement connexes, en produisant une fente et en y introduisant à force un élément cunéiforme, ou même en ressoudant les deux surfaces de la fente, on pourrait obtenir des états d'équilibre sans forces extérieures, dans lesquels la tension et la déformation varient sans discontinuité et régulièrement d'un point à un autre comme dans les corps à connexion multiple. M. WEINGARTEN a donné des conditions qui devraient se vérifier dans ces cas, si toutefois ceux-ci existent.

3. Dans ce Chapitre nous démontrerons, à l'aide d'une simple observation analytique, l'impossibilité de ces cas lorsqu'on admet que les éléments caractéristiques de la déformation⁽²⁾ et leurs dérivées premières et secondes sont continus.

Ceci établit un étroit rapport entre la question d'élasticité et une question analogue d'hydrodynamique.

Le théorème d'hydrodynamique auquel nous nous rapportons est le suivant:

Un fluide incompressible fini qui se trouve renfermé entre des parois rigides et fixes, et dans lequel n'existent pas des tourbillons doit rester en repos si l'espace qu'il occupe est simplement connexe (acyclique); au contraire il peut être en mouvement si l'espace occupé est multiples connexe (cyclique)⁽³⁾.

Voici maintenant les propriétés analogues pour l'élasticité.

Nous dirons que la déformation d'un corps élastique est régulière si les six caractéristiques de la déformation sont fonctions finies, continues et monodromes, ayant aussi les dérivées du premier et du second ordre finies, continues et monodromes.

Nous pourrions alors énoncer le théorème suivant:

Si un corps élastique occupe un espace fini simplement connexe (acyclique) et subit des déformations régulières, il se trouvera à l'état naturel, quand il est en équilibre et il n'est pas sujet à des forces extérieures.

(2) Nous appelons éléments caractéristiques d'une déformation les six déformations élémentaires, c'est-à-dire les trois dilatations et les trois glissements (voir CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduite par de SAINT-VENANT et FLAMANT, p. 46 et suivantes). Les caractéristiques de la déformation correspondent aussi au *strain* selon la nomenclature des Anglais.

(3) La connexion des espaces à trois dimensions est de deux sortes: *connexion superficielle* ou *périphaxie* et *connexion linéaire* ou *cyclose*. La connexion qui nous intéresse est la cyclose (voir J. CLERK MAXWELL, *Traité d'électricité et de magnétisme*, traduit par G. SELIGMANN-LUI, t. I, p. 18 et suivantes).

Au contraire:

Un corps élastique en équilibre, qui occupe un espace fini multiplement connexe (cyclique), pourra ne pas être à l'état naturel, c'est-à-dire pourra se trouver dans un état de tension, même quand il n'est sujet à des forces extérieures, sa déformation étant régulière.

Cette proposition établit une différence essentielle entre les propriétés des corps élastiques qui occupent des espaces simplement connexes (acycliques) et celles des corps qui occupent des espaces multiplement connexes (cycliques).

Si nous nous rapportons aux cas pratiques déjà rappelés, ce que nous venons de dire signifie que dans le cas de la connexion simple, l'introduction d'une couche cunéiforme ou la suppression d'une tranche très mince suivie de la soudure des surfaces de la fente, engendre toujours dans le système élastique une déformation irrégulière ou des lacunes; tandis que la propriété contraire peut se vérifier quand la connexion est multiple.

En général, nous pourrions affirmer que, s'il existe un corps qui n'est pas sujet à des actions extérieures et qui est dans un état de tension, il doit, ou occuper un espace multiplement connexe, ou avoir en quelque région une déformation irrégulière.

Dans ce Chapitre, le deuxième Article sera consacré à la démonstration de la proposition énoncée et le suivant à des exemples analytiques relatifs aux corps élastiques multiplement connexes qui se trouvent dans un état de tension tout en n'étant soumis à des forces extérieures.

II.

I. Représentons par $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ six fonctions des variables x, y, z monodromes, finies, continues et ayant aussi les dérivées du premier et du second ordre monodromes, finies et continues dans un domaine à trois dimensions S simplement connexe. Menons dans l'intérieur du domaine S une ligne régulière s , représentons ses coordonnées par x, y, z et appelons $x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1$ celles des extrémités A_0 et A_1 .

La direction positive de s soit de A_0 à A_1 . Les valeurs des quantités γ_{is} en A_0 et A_1 soient représentées respectivement par $\gamma_{is}^{(0)}$ et $\gamma_{is}^{(1)}$. Supposons $\gamma_{rs} = \gamma_{sr}$. Posons:

$$(I) \quad u = u_0 + \frac{1}{2} (\gamma_{21}^{(0)} + r_0) (y_1 - y_0) + \frac{1}{2} (\gamma_{31}^{(0)} - q_0) (z_1 - z_0) \\ + \int_s \left\{ \left[\gamma_{11} + (y_1 - y) \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y} + (z_1 - z) \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial z} \right] \frac{dx}{ds} \right. \\ + \left[(y_1 - y) \left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x} \right) + \left(\frac{z_1 - z}{2} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} \right) \right] \frac{dy}{ds} \\ \left. + \left[\left(\frac{y_1 - y}{2} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x} \right) \right] \frac{dz}{ds} \right\} ds,$$

$$\begin{aligned}
 (I') \quad v &= v_0 + \frac{1}{2} (\gamma_{32}^{(0)} + p_0) (z_1 - z_0) + \frac{1}{2} (\gamma_{12}^{(0)} - r_0) (x_1 - x_0) \\
 &+ \int_s \left\{ \left[\left(\frac{z_1 - z}{2} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} \right) + (x_1 - x) \left(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y} \right) \right] \frac{dx}{ds} \right. \\
 &\quad + \left[\gamma_{22} + (z_1 - z) \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial z} + (x_1 - x) \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x} \right] \frac{dy}{ds} \\
 &\quad \left. + \left[(z_1 - z) \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial y} \right) + \left(\frac{x_1 - x}{2} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} \right) \right] \frac{dz}{ds} \right\} ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (I'') \quad w &= w_0 + \frac{1}{2} (\gamma_{13}^{(0)} + q_0) (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} (\gamma_{23}^{(0)} - p_0) (y_1 - y_0) \\
 &+ \int_s \left\{ \left[(x_1 - x) \left(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial z} \right) + \left(\frac{y_1 - y}{2} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} \right) \right] \frac{dx}{ds} \right. \\
 &\quad + \left[\left(\frac{x_1 - x}{2} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} \right) + (y_1 - y) \left(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x} \right) \right] \frac{dy}{ds} \\
 &\quad \left. + \left[\gamma_{33} + (x_1 - x) \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x} + (y_1 - y) \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial y} \right] \frac{dz}{ds} \right\} ds,
 \end{aligned}$$

où $u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$ sont des quantités constantes.

Cherchons les conditions afin que u, v, w ne dépendent pas de la ligne d'intégrations s , mais seulement des deux extrémités A_0 et A_1 , c'est-à-dire, en supposant A_0 fixe, cherchons les conditions afin que u, v, w soient des fonctions de x_1, y_1, z_1 .

2. A cet effet, il suffit de supposer la ligne s fermée en faisant coïncider les points A_0 et A_1 et déterminer les conditions afin que les intégrales étendues à la ligne s soient nulles.

Le théorème de STOKES, lorsque la ligne s est fermée, transforme ces intégrales en

$$\begin{aligned}
 &\int_{\sigma} \left\{ \left(\frac{y_1 - y}{2} \right) B - \frac{z_1 - z}{2} C \right\} \cos nx + \left[(z_1 - z) F + \frac{y_1 - y}{2} A \right] \cos ny \\
 &\quad + \left[(y_1 - y) G + \frac{z_1 - z}{2} A \right] \cos nz \} d\sigma, \\
 &\int_{\sigma} \left\{ \left[(z_1 - z) E + \frac{x_1 - x}{2} B \right] \cos nx + \left(\frac{z_1 - z}{2} C - \frac{x_1 - x}{2} A \right) \cos ny \right. \\
 &\quad \left. + \left[(x_1 - x) G + \frac{z_1 - z}{2} B \right] \cos nz \right\} d\sigma, \\
 &\int_{\sigma} \left\{ \left[(y_1 - y) E + \frac{x_1 - x}{2} C \right] \cos nx + \left[(x_1 - x) F + \frac{y_1 - y}{2} C \right] \cos ny \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{x_1 - x}{2} A - \frac{y_1 - y}{2} B \right) \cos nz \right\} d\sigma,
 \end{aligned}$$

où σ est une surface ayant pour contour s et se trouvant dans l'intérieur du domaine S ; n dénote la normale à σ tracée dans une direction convenable et

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial z \partial y}, & E &= \frac{\partial^2 \gamma_{32}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial y^2}, \\ B &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x \partial z}, & F &= \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial z^2}, \\ C &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial y \partial x}, & G &= \frac{\partial^2 \gamma_{21}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les conditions nécessaires et suffisantes pour que u, v, w soient indépendants de la ligne s d'intégration sont:

$$(II) \quad A = B = C = E = F = G = 0.$$

3. Supposons que les conditions précédentes soient vérifiées; u, v, w seront des fonctions de x_1, y_1, z_1 .

Pour calculer leurs dérivées par rapport à x_1, y_1, z_1 , il faut remarquer que ces quantités paraissent explicitement sous le signe d'intégration et qu'elles sont en même temps les coordonnées d'une extrémité de la ligne d'intégration. Cette observation étant faite, les règles ordinaires du calcul conduisent aisément aux formules

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \gamma_{11}^{(1)}, & \frac{\partial v}{\partial y_1} &= \gamma_{22}^{(1)}, & \frac{\partial w}{\partial z_1} &= \gamma_{33}^{(1)}, \\ \frac{\partial v}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial y_1} &= \gamma_{23}^{(1)}, & \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial z_1} &= \gamma_{31}^{(1)}, & \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial x_1} &= \gamma_{12}^{(1)}. \end{aligned} \right.$$

On tire de là que, lorsque les quantités γ_{rs} satisfont les conditions (II), on peut trouver les trois fonctions u, v, w qui vérifient les équations (I), c'est-à-dire que l'on peut considérer les quantités γ_{rs} comme les six caractéristiques de la déformation d'un milieu élastique. La proposition réciproque se vérifie immédiatement.

4. Les formules (I), (I'), (I'') sont utiles et intéressantes puisque chacune d'elles donne le moyen d'obtenir par une simple quadrature une des composantes du déplacement étant donné les caractéristiques de la déformation.

KIRCHHOFF⁽⁴⁾ et LOVE⁽⁵⁾ ont calculé chacune des dérivées de u, v, w par des quadratures analogues. On peut à l'aide d'intégrations faciles passer des formules de KIRCHHOFF et LOVE aux (I), (I'), (I''). Dans celles-ci paraissent les six constantes arbitraires $u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$, c'est-à-dire les valeurs des composantes du déplacement dans le point A_0 et celles des com-

(4) *Mechanik*, XXVII Vorl., § 4.

(5) *Math. Theory of elasticity*, Vol. I, § 66.

posantes du vecteur, appelé par MAXWELL *rotation*. Les égalités (II) ne sont que les formules très connues de SAINT-VENANT.

5. Les équations (II) expriment les conditions afin que les valeurs de u, v, w , données par les formules (I), (I'), (I'') soient indépendantes de la ligne d'intégration quand l'espace S est simplement connexe: mais, si l'espace S est multiplément connexe, ces valeurs peuvent dépendre de la ligne d'intégration tout en étant satisfaites les conditions (II). Rappelons, en effet, que l'on a démontré l'indépendance de la ligne sur les valeurs de u, v, w dans le paragraphe 2 où l'espace a été supposé simplement connexe, en observant que chaque ligne fermée s de l'espace peut être regardée comme le contour d'une surface σ appartenant au même espace. Mais, si l'espace est multiplément connexe, ce fait ne se vérifie plus pour chaque ligne s et l'on voit alors que les valeurs de u, v, w peuvent dépendre de la ligne d'intégration. Nous avons donc le théorème suivant:

Un corps élastique qui occupe un espace simplement connexe et dont la déformation est régulière peut toujours être amené à son état naturel à l'aide de déplacements finis, continus et monodromes de ses points.

Au contraire, nous pouvons dire:

Si un corps élastique occupe un espace multiplément connexe et si sa déformation est régulière, les déplacements des points ne sont pas nécessairement monodromes.

Réduisons simplement connexe l'espace cyclique moyennant un système de coupures. Alors les déplacements qui correspondent à la déformation donnée peuvent être regardés, dans l'espace sectionné, comme des fonctions finies continues et monodromes, mais leurs valeurs peuvent ne pas se rattacher avec continuité suivant lesdites coupures. Lorsque cela arrive, si l'on veut ramener le corps à l'état naturel, il faut, ou supprimer la connexion de la matière suivant les coupures et y produire des fissures, ou retrancher de la matière, ou faire glisser les deux surfaces de la fente l'une sur l'autre (voir les exemples de l'Article suivant).

6. Rappelons maintenant la démonstration que l'on fait ⁽⁶⁾ pour prouver qu'un corps élastique qui n'est pas sujet aux forces extérieures se trouve à l'état naturel. Elle présuppose implicitement que les points du corps élastique subissent des déplacements finis, continus et monodromes et que la déformation du système est régulière. C'est pourquoi, si l'on sait que la déformation est régulière, que le corps occupe un espace simplement connexe et qu'il n'est pas soumis à des forces extérieures, on peut conclure que le système ne devra pas être sujet à aucune tension intérieure. Mais, si le corps occupe un espace multiplément connexe, la déformation régulière pourra coexister avec une polydromie des déplacements et alors le corps pourra être dans un état de tension, même s'il n'est pas sujet à des forces extérieures.

(6) Voir par exemple CLEBSCH, op. cit., p. 132 et suiv.

C'est par là qu'on tire le théorème que nous avons énoncé à l'Article I.

7. On peut déduire facilement de ce théorème un corollaire intéressant:

Lorsque l'on connaît les forces extérieures qui agissent sur un corps élastique, la déformation est individualisée si l'espace occupé par le corps est simplement connexe; mais elle n'est pas déterminée si le même espace est multiple-ment connexe à moins qu'on ne sache, a priori, que le système peut être ramené à l'état naturel par des déplacements finis, continus et monodromes.

La démonstration de ce corollaire découle immédiatement de celle du théorème que l'on vient de rappeler.

Donc la théorie mathématique de l'élasticité doit être modifiée dans le cas des corps qui occupent des espaces multiplement connexes, car cette théorie est entièrement appuyée sur le fait général que les forces extérieures déterminent la déformation du corps. Voilà l'intérêt de la proposition que nous venons d'énoncer. La théorie ordinaire reste le même dans le cas des corps qui occupent des espaces simplement connexes, ou même quand on sait, a priori, que le système peut être ramené à l'état naturel par le moyen de déplacements monodromes.

8. Il est facile de tirer des formules (I), (I'), (I'') la nature des discontinuités que présentent les déplacements u, v, w , suivant les coupures qui rendent l'espace occupé par le corps simplement connexe. Appelons $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha$ les valeurs d'un côté de ces sections, $u_\beta, v_\beta, w_\beta$ les valeurs de l'autre côté et posons

$$u_\beta - u_\alpha = U \quad , \quad v_\beta - v_\alpha = V \quad , \quad w_\beta - w_\alpha = W.$$

En indiquant par l, m, n, p, q, r six quantités constantes suivant chaque section, nous avons

$$(III) \quad U = l + ry - qz \quad , \quad V = m + pz - rx \quad , \quad W = n + qx - py,$$

comme M. WEINGARTEN avait trouvé d'une autre façon.

Dans le cas, donc, d'un corps multiplement connexe à chacune des coupures, qui servent à réduire l'espace simplement connexe, on peut faire correspondre six constantes qui individualisent la polydromie des déplacements calculés par les formules (I), (I'), (I'').

Ces constantes, par analogie à ce que l'on fait dans la théorie des fonctions, peuvent s'appeler *les six constantes de chaque coupure*.

La proposition fondamentale de la théorie de l'élasticité doit s'énoncer alors dans les termes suivants:

Si un corps élastique occupe un espace multiplement connexe et si sa déformation est régulière, celle-ci sera déterminée par les forces extérieures et par les six constantes relatives à chacune des coupures qui servent à réduire l'espace simplement connexe.

III.

Exemple I.

1. Posons

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\beta x^2 - \alpha y^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta}{2} \log(x^2 + y^2) & , & \quad \gamma_{23} = 2\gamma \frac{yz}{x^2 + y^2} , \\ \gamma_{22} &= \frac{\beta y^2 - \alpha x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta}{2} \log(x^2 + y^2) & , & \quad \gamma_{31} = 2\gamma \frac{xz}{x^2 + y^2} , \\ \gamma_{33} &= \gamma \log(x^2 + y^2) & , & \quad \gamma_{12} = 2(\alpha + \beta) \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

où α , β , γ sont des quantités constantes.

Il est facile de vérifier que les équations (II) de de SAINT-VENANT sont satisfaites. Ces fonctions n'ont d'autres singularités que pour $x = y = 0$, c'est-à-dire suivant l'axe coordonné z .

En excluant donc ce lieu singulier par un cylindre ayant pour axe z , dans tout l'espace restant ces quantités pourront être interprétées comme les caractéristiques d'une déformation régulière T.

On calcule facilement les composantes u , v , w des déplacements correspondants. Elles seront données (à moins d'un déplacement rigide arbitraire) par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} u = \alpha y \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \frac{\beta}{2} x \log(x^2 + y^2), \\ v = -\alpha x \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \frac{\beta}{2} y \log(x^2 + y^2), \\ w = \gamma z \log(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Les fonction u et v sont polydromes et l'axe de diramation est l'axe z .

2. Cela posé, imaginons un corps isotrope homogène C qui occupe un espace S limité par deux cylindres de révolution σ_1 et σ_2 qui ont pour axe z et dont les rayons sont R_1 et R_2 et par deux plans normaux à l'axe z . Si l'on suppose nulles les forces extérieures, les équations indéfinies de l'équilibre,

$$(3) \quad \begin{cases} K\Delta^2 u + (L + K) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ K\Delta^2 v + (L + K) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ K\Delta^2 w + (L + K) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \end{cases}$$

seront satisfaites par les fonctions (2) quand est vérifiée l'équation

$$K\alpha + (L + 2K)\beta + (L + K)\gamma = 0,$$

qui, à son tour, sera satisfaite en prenant

$$\gamma = 0 \quad , \quad \beta = -\alpha \frac{K}{L+2K} .$$

Le calcul des forces extérieures agissant sur la surface ne présente pas de difficultés. Sur la surface σ_x nous trouvons une tension uniforme normale à σ_x dirigée vers l'intérieur de la masse, donnée par

$$T_{\sigma_1} = \alpha (L + K) \left(1 + \frac{2K}{L+2K} \log R_1 \right)$$

et de même sur σ_2 une tension normale uniforme et dirigée vers l'intérieur de la masse, donnée par

$$T_{\sigma_2} = \alpha (L + K) \left(1 + \frac{2K}{L+2K} \log R_2 \right) ,$$

tandis que sur les deux bases normales à z nous trouvons les tensions normales dirigées toujours vers l'intérieur

$$T_\omega = \frac{\alpha L}{L+2K} (L + 3K + 2K \log r)$$

où r désigne la distance de l'axe z .

3. Imaginons maintenant un corps fictif de même nature que le corps C et qui occupe le même espace, mais qui se trouve à l'état naturel. Sans lui ôter la connexion, sollicitons-le moyennant les forces T_{σ_1} , T_{σ_2} et T_ω agissant sur les surfaces latérales et sur les bases. Indiquons avec u' , v' , w' les composantes correspondantes du déplacement. Celles-ci seront des fonctions finies, continues et monodromes, et, si nous prenons

$$u'' = u - u' = \alpha \left[y \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L+2K} x \log (x^2 + y^2) \right] - u' ,$$

$$v'' = v - v' = \alpha \left[-x \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L+2K} y \log (x^2 + y^2) \right] - v' ,$$

$$w'' = w - w' = -w' ,$$

nous obtenons un système de déplacements du corps C qui ne sont pas zéro et sont différents d'un déplacement rigide. Aux déplacements u'' , v'' , w'' correspond une déformation différente de zéro et régulière et par conséquence une tension intérieure; mais les forces extérieures sont nulles. Si nous indiquons avec γ'_{is} les caractéristiques de la déformation Γ' correspondante aux déplacements u' , v' , w' , celles de la déformation Γ'' correspondante à u'' , v'' , w'' sont

$$\gamma''_{is} = \gamma_{is} - \gamma'_{is} .$$

4. Les fonctions u'' , v'' , w'' sont polydromes ainsi que u , v , w et elles ont pour axe de polydromie l'axe z . Appelons u''_a , v''_a , w''_a les valeurs de u'' , v'' , w'' dans un point situé sur le plan xz du côté positif de l'axe x . Partant de ce point, parcourons un cycle autour de l'axe z et prenons les valeurs successives

de u'' , v'' , w'' qui se suivent avec continuité. Indiquons avec u''_{β} , v''_{β} , w''_{β} les valeurs par lesquelles on revient au point de départ, nous aurons

$$u''_{\beta} - u''_{\alpha} = 0 \quad , \quad v''_{\beta} - v''_{\alpha} = -2\pi\alpha x \quad , \quad w''_{\beta} - w''_{\alpha} = 0.$$

5. Il s'ensuit que, si α est positif, l'état de déformation régulière Γ'' du corps peut s'obtenir en prenant le corps qui occupe dans l'état naturel le cylindre creux précédemment considéré, en y faisant ensuite une coupure suivant le plan xz du côté positif de l'axe x et, enfin, en plaçant entre les deux parois de la coupure une couche très mince dont l'épaisseur varie proportionnellement à la distance de l'axe.

Si α est négatif, pour obtenir l'état de tension correspondant, il faut, au contraire, supprimer suivant le plan xz du côté des x positives une tranche très mince, dont l'épaisseur varie proportionnellement à la distance de l'axe, et souder ensuite les deux surfaces de la fente.

Exemple II.

6. Posons

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 0 & , & & \gamma_{22} &= 0 & , & & \gamma_{33} &= 0, \\ \gamma_{23} &= \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} & , & & \gamma_{31} &= -\frac{\alpha y}{x^2 + y^2} & , & & \gamma_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Les équations (II) de de SAINT-VENANT sont satisfaites et les précédentes fonctions n'ont d'autre singularité que suivant l'axe z .

Les déplacements correspondants seront (à moins d'un déplacement rigide)

$$(4) \quad u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = \alpha \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x};$$

w résulte donc polydrome et a pour axe de diramation l'axe z .

Imaginons un corps homogène et isotrope qui occupe le même espace formé par le cylindre creux S , comme dans l'exemple précédent. Les déplacements (4) satisfont les équations (3) et les forces extérieures agissant sur les surfaces latérales σ_x et σ_y deviennent nulles, tandis que celles agissant sur les bases ont respectivement pour composantes sur l'une d'elles

$$X_{\omega} = -\frac{\alpha K y}{x^2 + y^2} \quad , \quad Y_{\omega} = \frac{\alpha K x}{x^2 + y^2} \quad , \quad Z_{\omega} = 0,$$

sur l'autre

$$X'_{\omega} = \frac{\alpha K y}{x^2 + y^2} \quad , \quad Y'_{\omega} = -\frac{\alpha K x}{x^2 + y^2} \quad , \quad Z'_{\omega} = 0.$$

Prenons maintenant un corps fictif de la même substance à l'état naturel, qui occupe le cylindre creux S et sans supprimer la connexion assujettissons-le aux forces de torsion précédentes qui agissent sur les deux bases.

Appelons u', v', w' les déplacements qui en dérivent. Ceux-ci sont des fonctions finies, continues et monodromes et, si l'on pose

$$u'' = -u' \quad , \quad v'' = -v' \quad , \quad w'' = w - w' ,$$

à ces déplacements correspond un état de tension intérieure du corps, tandis que toutes les forces extérieures sont nulles. La déformation sera évidemment régulière.

7. Il est facile de voir comment peut se produire cet état de tension. On prend le corps à l'état naturel qui occupe l'espace renfermé dans le cylindre creux S, on le coupe suivant le plan xz du côté positif de l'axe z , on fait ensuite glisser légèrement les deux surfaces de la coupure l'une par rapport à l'autre parallèlement à l'axe z de manière que le cylindre prenne une forme légèrement hélicoïdale. Cela fait, on soude les deux parties l'une à l'autre selon les points qui se trouvent en face.

Les deux bases acquièrent ainsi une dentelure suivant le plan xz du côté des x positives; mais elle est infiniment petite et, sans déranger les conditions du système, nous pouvons imaginer de la supprimer en aplanissant les bases mêmes.

NOTE AU CHAPITRE I.

CESÀRO a donné une démonstration ⁽⁷⁾ très simple des formules (I), (I'), (I''). La voici: Soient u, v, w les composantes du déplacement du point (x, y, z) et

$$(1) \quad a = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad b = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad c = \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

$$(2) \quad f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad , \quad g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad , \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) .$$

Nous supposons que a, b, c, f, g, h et leurs dérivées premières et secondes soient des fonctions finies, continues et monodromes.

Ces conditions peuvent n'être pas vérifiées par u, v, w et par les composantes de la rotation

$$(3) \quad p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad , \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad , \quad r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) .$$

Pour calculer u dans un point M quelconque partons de la formule

$$u = u_0 + \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) ,$$

u_0 étant la valeur de u dans un point arbitraire M_0 , et l'intégrale étant étendue à une ligne qui va du point M_0 au point M_x .

Donc

$$u = u_0 + \int (a dx + h dy + q dz) + \int (q dz - r dy) .$$

(7) « Comptes rendus de la R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche de Naples », juillet e août 1906.

Pour faire paraître dans la seconde intégrale les caractéristiques de la déformation nous pourrions écrire

$$\int (q dz - r dy) = \int [rd(y_1 - y) - qd(z_1 - z)] \\ = q_0(z_1 - z_0) - r_0(y_1 - y_0) + \int [(z_1 - z) dq - (y_1 - y) dr].$$

Or

$$(4) \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}, \dots$$

Par suite

$$(5) \quad u = u_0 + q_0(z_1 - z_0) - r_0(y_1 - y_0) + \int (\xi dx + \eta dy + \zeta dz),$$

où

$$\xi = a + (y_1 - y) \left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \right), \\ \eta = h + (y_1 - y) \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ \zeta = g + (y_1 - y) \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right).$$

Les formules (5) et les formules analogues qui donnent v et w coïncident avec les formules (I), (I'), (I'') du Chapitre I, mais les formules (5) ont une forme plus simple et plus symétrique.

CESÀRO, dans son Mémoire, étend les formules et les théorèmes que je viens de donner dans le Chapitre I au cas d'un espace non euclidien.

CHAPITRE II.

Les distorsions (*).

I.

1. Dans le Chapitre précédent j'ai montré que les corps élastiques occupant des espaces plusieurs fois connexes peuvent se trouver dans des états d'équilibre bien différents de ceux qu'on a quand les corps élastiques occupent des espaces simplement connexes. Dans ces nouveaux états d'équilibre on a une déformation intérieure régulière du corps, sans toutefois que celui-ci soit sollicité par des forces extérieures.

Imaginons qu'on mène les coupures qui rendent simplement connexe l'espace occupé par le corps. A chacune d'elles correspondent six constantes que nous avons appelées les *constantes de la coupure*. Il est facile d'établir la signification mécanique de ces constantes au moyen des formules (III) du Chapitre précédent.

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi*. « Rend. Acc. Lincei », s. 5^a, vol. XIV₁, 1905₁, pp. 193-202. [N.d.R.].

En effet, exécutons matériellement les coupures suivant lesdites sections et laissons le corps reprendre son état naturel. Si, en reprenant cet état, certaines parties du corps viennent à se superposer entre elles, supprimons les parties excédentes. Alors les formules (III) déjà rappelées nous montrent que les parcelles placées des deux côtés d'une même section et qui, avant la coupure, étaient en contact subissent, par le fait même de la coupure, un déplacement résultant d'une translation et d'une rotation égales pour tous les couples de parcelles adjacentes à une même section.

En prenant l'origine pour centre de réduction, les trois composantes de la translation et les trois composantes de la rotation, suivant les axes coordonnés, sont les six caractéristiques de la coupure.

Réciproquement, si le corps élastique multiplement connexe est pris à l'état naturel, on pourra, pour l'amener à l'état de tension, exécuter l'opération inverse, c'est-à-dire le sectionner afin de le rendre simplement connexe, déplacer ensuite les deux parties de chaque coupure, l'une par rapport à l'autre, de manière que les déplacements relatifs des différents couples de parcelles (qui adhéraient entre elles et que la coupure a séparées) soient résultantes des translations et des rotations égales; rétablir enfin la connexion et la continuité suivant chaque coupure, en retranchant ou en ajoutant la matière nécessaire et en ressoudant les parties entre elles. L'ensemble de ces opérations relative à chaque coupure peut s'appeler une *distorsion* du corps et les six constantes de chaque coupure peuvent s'appeler les *caractéristiques de la distorsion*.

Dans un corps élastique multiplement connexe, dont la déformation est régulière et qui a subi un certain nombre de distorsions, l'inspection de la déformation ne peut en aucune manière révéler les endroits où les coupures et les distorsions qui s'ensuivent se sont produites, et cela en vertu de la régularité elle-même. On peut dire en outre que les six caractéristiques de chaque distorsion ne sont pas des éléments dépendant du lieu où la coupure a été exécutée.

En effet, le même procédé qui nous a servi à établir les formules (III) prouve que, si l'on prend dans le corps deux coupures qu'on peut transformer l'une dans l'autre par une déformation continue, les constantes relatives à l'une des coupures sont égales aux constantes relatives à l'autre.

Il s'ensuit que les caractéristiques d'une distorsion ne sont pas des éléments spécifiques de chaque coupure, mais qu'elles dépendent exclusivement de la nature géométrique de l'espace occupé par le corps et de la déformation régulière à laquelle il est assujéti.

Le nombre des distorsions indépendantes auxquelles un corps élastique peut être soumis est évidemment égal à l'ordre de la connexion de l'espace occupé par le corps moins 1.

En conformité de ce que nous avons trouvé, deux coupures qu'on peut par une déformation continue transformer l'une dans l'autre s'appellent *équivalentes*. Nous dirons aussi qu'une distorsion est connue quand les caractéristiques et la coupure relative ou une autre coupure équivalente seront données.

2. Cela posé, deux questions se présentent naturellement, à savoir:

1° A des distorsions arbitrairement choisies correspondra-t-il toujours un état d'équilibre et une déformation régulière du corps si l'on suppose nulles les actions extérieures ?

2° Les distorsions étant connues, quel est cet état de déformation ?

Pour relier ces problèmes à d'autres déjà connus nous démontrerons le théorème suivant:

Si dans chaque corps élastique isotrope plusieurs fois connexe on prend un ensemble arbitraire de distorsions, on pourra calculer un nombre infini de déformations régulières du corps qui correspondent à ces distorsions et qui sont équilibrées par des forces extérieures superficielles (que nous indiquons avec T) ayant la résultante nulle et le moment nul par rapport à un axe quelconque.

Dès lors, pour reconnaître si dans un corps isotrope les distorsions données correspondent à un état d'équilibre, les forces extérieures étant nulles, il suffira de voir si les forces extérieures T changées de signe et appliquées au contour du corps, quand celui-ci n'est sujet à aucune distorsion, déterminent un état de déformation régulière équilibrant les forces elles-mêmes. Si l'on peut calculer effectivement cet état de déformation, le problème concernant l'équilibre du corps soumis aux distorsions données sera résolu.

En effet, appelons Γ la déformation relative aux distorsions données et aux forces extérieures T trouvées, qui agissent sur la surface, et Γ' la déformation déterminée par ces forces extérieures changées de signe quand le corps ne subit aucune distorsion. La déformation Γ'' qui résulte de Γ et Γ' correspondra aux distorsions données et aux forces extérieures nulles.

Les questions sont ainsi ramenées à voir si la déformation Γ' existe et à la trouver. Elles se réduisent donc à des problèmes d'élasticité où les distorsions ne paraissent pas, c'est-à-dire à des problèmes ordinaires d'élasticité.

Mais les forces extérieures T, agissant sur la surface, en vertu du théorème énoncé sont telles que si le corps est rigide elles s'équilibrent; il s'ensuit qu'elles satisfont aux conditions fondamentales nécessaires pour l'existence de la déformation Γ' .

Or tout dernièrement on a beaucoup avancé par des méthodes nouvelles dans l'étude du théorème d'existence pour les questions d'élasticité, c'est pourquoi on peut dire que, sauf certaines conditions relatives à la forme géométrique de l'espace occupé par le corps élastique (conditions que nous ne préciserons pas ici), Γ' et Γ'' existeront toujours.

Ces réserves faites, on pourra donc répondre affirmativement à la première question dans le cas des corps isotropes.

La seconde question posée est relative au cas où le corps n'est pas sujet aux actions extérieures; mais elle peut se généraliser et l'on peut supposer les distorsions données et le corps sollicité par des forces extérieures déterminées. Alors, si le corps est isotrope, il suffit pour la résolution du problème de superposer à la déformation Γ déterminée par les distorsions et par les forces extérieures T, la déformation déterminée par les forces extérieures

données et par les forces extérieures — T qui agissent sur la surface dans l'hypothèse que les distorsions manquent.

Le théorème énoncé sert d'une certaine façon à éliminer les distorsions dans tous les cas d'isotropie, en y substituant des forces extérieures superficielles, et c'est pour cette raison qu'il rapporte les questions qui se rattachent aux distorsions à des questions ordinaires d'élasticité.

Si le corps est anisotrope on voit facilement que l'état de déformation Γ est équilibré par des forces extérieures agissant sur la surface et par des forces extérieures agissant sur l'intérieur du corps. Il est donc facile, même dans ce cas, d'éliminer les distorsions et de rapporter les différentes questions qui peuvent se présenter aux problèmes ordinaires de l'équilibre des corps élastiques.

L'article II est consacré à la démonstration du théorème ci-dessus énoncé et l'article III à l'examen d'un cas particulier.

II.

1. Pour démontrer le théorème énoncé à l'article précédent il faut avant tout établir certaines formules préliminaires (8).

En désignant par r la distance entre deux points (x, y, z) et (ξ, η, ζ) posons avec SOMIGLIANA (9):

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, & v_1 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, & w_1 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}, \\ u_2 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x}, & v_2 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, & w_2 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z}, \\ u_3 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial x}, & v_3 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial y}, & w_3 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Les précédentes fonctions n'ont d'autre singularité que pour $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ et sont symétriques par rapport aux couples de variables x, ξ ; y, η ; z, ζ .

Si $\alpha = -\frac{L+K}{L+2K}$ chaque groupe de trois fonction u_s, v_s, w_s vérifie dans tout l'espace (excepté le lieu singulier rappelé plus haut) les équations différentielles (3) du chapitre précédent et celles qu'on en peut tirer en y substituant ξ, η, ζ à x, y, z . Alors u_s, v_s, w_s peuvent être regardés comme les composantes des déplacements des points d'un milieu élastique isotrope et homogène non sujet aux forces extérieures appliquées sur l'intérieur du milieu, soit qu'on considère ces composantes comme fonctions de x, y, z ou de ξ, η, ζ .

(8) J'ai exposé ces formules pour la première fois à Pisa dans mes *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, 1892; elles ont déjà été citées par M. le professeur LAURICELLA dans sa dissertation (« Ann. Scuola Norm. di Pisa, 1894 »).

(9) « Annali di Mat. », 2^e serie, t. XVII.

Prenons un élément de surface $d\Sigma$ passant par le point ξ, η, ζ , dont la normale soit n . Désignons par X_s, Y_s, Z_s les composantes de la tension unitaire (correspondante aux déplacements u_s, v_s, w_s) qui est exercée suivant Σ , par la région du milieu élastique placée du côté d'où sort la normale n sur la région placée du côté où entre la même normale.

Le calcul de X_s, Y_s, Z_s ne présente aucune difficulté. Si maintenant u_o, v_o, w_o sont des intégrales des équations différentielles (3) du Chapitre précédent, régulières dans le domaine S limité par une surface Σ , et si X_o, Y_o, Z_o sont les composantes de la tension correspondante, agissant sur la surface, les formules de SOMIGLIANA donnent:

$$(1) \quad \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_o u_1 + Y_o v_1 + Z_o w_1) d\Sigma + \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_1 u_o + Y_1 v_o + Z_1 w_o) d\Sigma = u_o(x, y, z),$$

$$(1') \quad \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_o u_2 + Y_o v_2 + Z_o w_2) d\Sigma + \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_2 u_o + Y_2 v_o + Z_2 w_o) d\Sigma = v_o(x, y, z),$$

$$(1'') \quad \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_o u_3 + Y_o v_3 + Z_o w_3) d\Sigma + \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_3 u_o + Y_3 v_o + Z_3 w_o) d\Sigma = w_o(x, y, z),$$

en supposant que le point x, y, z soit intérieur au domaine S et ξ, η, ζ , représentent les coordonnées des points de la surface Σ . Dans le calcul de X_s, Y_s, Z_s , on doit supposer que la normale est dirigée de l'extérieur à l'intérieur du domaine S.

Au contraire, si le point x, y, z est extérieur au domaine, les seconds membres des équations précédentes sont nuls.

2. Posons maintenant dans les formules précédentes

$$(2) \quad u_o = l + ry - qz, \quad v_o = m + pz - rx, \quad w_o = n + qx - py,$$

où l, m, n, p, q, r sont des quantités constantes. Les équations (3) du Chapitre précédent seront satisfaites et X_o, Y_o, Z_o résulteront nulles.

Il arrivera alors que les intégrales

$$U = \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_1 u_o + Y_1 v_o + Z_1 w_o) d\Sigma,$$

$$V = \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_2 u_o + Y_2 v_o + Z_2 w_o) d\Sigma,$$

$$W = \frac{1}{4\pi K} \int_{\Sigma} (X_3 u_o + Y_3 v_o + Z_3 w_o) d\Sigma$$

seront respectivement égales à $l + ry - qz, m + pz - rx, n + qx - py$ si le point x, y, z est intérieur à l'espace S et seront nulles si le point est

extérieur⁽¹⁰⁾. Enfin on voit tout de suite, qu'en calculant

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \Gamma_{11} \quad , & \frac{\partial V}{\partial y} &= \Gamma_{22} \quad , & \frac{\partial W}{\partial z} &= \Gamma_{33} \quad , \\ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} &= \Gamma_{23} \quad , & \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} &= \Gamma_{31} \quad , & \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} &= \Gamma_{12} \quad , \end{aligned}$$

les quantités Γ_{rs} seront nulles soit que x, y, z soit intérieur ou extérieur à l'espace S .

Nous pouvons donc conclure que les intégrales U, V, W sont discontinues en traversant la surface Σ , tandis que les fonctions Γ_{rs} n'ont pas de discontinuités. En appelant U_i, V_i, W_i les valeurs de U, V, W suivant Σ du côté intérieur et U_e, V_e, W_e leurs valeurs du côté extérieur, nous avons

$$\begin{aligned} U_i - U_e &= l + ry - qz \quad , \\ V_i - V_e &= m + pz - rx \quad , \\ W_i - W_e &= n + qx - py \quad . \end{aligned}$$

3. Cela posé, partageons la surface Σ en deux parties σ et σ' et posons:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} (X_1 u_o + Y_1 v_o + Z_1 w_o) d\sigma \quad , \\ v &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} (X_2 u_o + Y_2 v_o + Z_2 w_o) d\sigma \quad , \\ w &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} (X_3 u_o + Y_3 v_o + Z_3 w_o) d\sigma \quad ; \end{aligned} \right.$$

et

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma'} (X_1 u_o + Y_1 v_o + Z_1 w_o) d\sigma' \quad , \\ v' &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma'} (X_2 u_o + Y_2 v_o + Z_2 w_o) d\sigma' \quad , \\ w' &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma'} (X_3 u_o + Y_3 v_o + Z_3 w_o) d\sigma' \quad . \end{aligned} \right.$$

Il est facile de voir que $u, v, w; u', v', w'$ jouissent des propriétés suivantes:

1° Dans tous les points de l'espace, excepté la surface σ , les fonctions u, v, w sont finies, continues, monodromes, ayant des dérivées d'ordre quelconque;

(10) En égalant dans les deux membres des équations précédentes les coefficients de l, m, n, p, q, r on trouve des relations intégrales analogues aux formules de GAUSS dans la théorie du potentiel. Cfr. le Mémoire cité de M. LAURICELLA, Chap. III, § 3.

2° Les fonctions u, v, w satisfont les équations (3) du Chapitre précédent, excepté la surface σ . On peut donc les regarder comme les composantes des déplacements d'un milieu élastique isotrope homogène, non sujet aux forces extérieures;

3° u', v', w' jouissent des mêmes propriétés que u, v, w si σ' est substituée à σ ;

4° Enfin nous aurons

$$U = u + u' \quad , \quad V = v + v' \quad , \quad W = w + w'$$

Or u', v', w' sont continues suivant σ tandis que U, V, W sont discontinues, donc u, v, w auront suivant σ la même discontinuité que U, V, W . Calculons maintenant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \gamma_{11} \quad , & \frac{\partial v}{\partial y} &= \gamma_{22} \quad , & \frac{\partial w}{\partial z} &= \gamma_{33} \quad , \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \gamma_{23} \quad , & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \gamma_{31} \quad , & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{12} \quad , \\ \frac{\partial u'}{\partial x} &= \gamma'_{11} \quad , & \frac{\partial v'}{\partial y} &= \gamma'_{22} \quad , & \frac{\partial w'}{\partial z} &= \gamma'_{33} \quad , \\ \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} &= \gamma'_{23} \quad , & \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} &= \gamma'_{31} \quad , & \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} &= \gamma'_{12} \quad . \end{aligned}$$

Nous aurons

$$\gamma_{rs} + \gamma'_{rs} = \Gamma_{rs} = 0.$$

Mais les fonctions γ'_{rs} se conservent régulières⁽¹¹⁾ en traversant la surface σ (excepté tout au plus le contour de σ), donc les fonctions γ_{rs} jouiront aussi de la même propriété.

En substituant dans les formules (3) à u_0, v_0, w_0 les valeurs (2) et en ordonnant les seconds membres relativement à l, m, n, p, q, r , on arrive au théorème suivant:

Soit donnée une surface σ . Posons

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{i1}^{(\sigma)} &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} X_i d\sigma \quad , \quad A_{i2}^{(\sigma)} = \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} Y_i d\sigma \quad , \quad A_{i3}^{(\sigma)} = \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} Z_i d\sigma \quad , \\ B_{i1}^{(\sigma)} &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} (\zeta Y_i - \eta Z_i) d\sigma \quad , \quad B_{i2}^{(\sigma)} = \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} (\xi Z_i - \zeta Y_i) d\sigma \quad , \\ & B_{i3}^{(\sigma)} = \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma} (\eta X_i - \xi Y_i) d\sigma . \end{aligned} \right.$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= A_{11}^{(\sigma)} l + A_{12}^{(\sigma)} m + A_{13}^{(\sigma)} n + B_{11}^{(\sigma)} p + B_{12}^{(\sigma)} q + B_{13}^{(\sigma)} r \quad , \\ v &= A_{21}^{(\sigma)} l + A_{22}^{(\sigma)} m + A_{23}^{(\sigma)} n + B_{21}^{(\sigma)} p + B_{22}^{(\sigma)} q + B_{23}^{(\sigma)} r \quad , \\ w &= A_{31}^{(\sigma)} l + A_{32}^{(\sigma)} m + A_{33}^{(\sigma)} n + B_{31}^{(\sigma)} p + B_{32}^{(\sigma)} q + B_{33}^{(\sigma)} r \quad , \end{aligned} \right.$$

(11) Voir le Chap. I, Art. I, § 3.

l, m, n, p, q, r étant des quantités arbitraires. On peut regarder u, v, w comme les composantes du déplacement d'un milieu élastique indéfini, isotrope et homogène, et à déformation régulière dans tout l'espace excepté tout au plus le contour L de σ . Ce milieu est soustrait aux forces extérieures et est en équilibre; en même temps les déplacements u, v, w sont discontinus suivant σ . Ces discontinuités sont individualisées par les équations

$$(4) \quad \begin{cases} u_i - u_e = l + ry - qz, \\ v_i - v_e = m + pz - rx, \\ w_i - w_e = n + qx - py, \end{cases}$$

où u_e, v_e, w_e désignent les valeurs de u, v, w du côté d'où sort la normale à la surface σ et u_i, v_i, w_i les valeurs du côté où la même normale entre.

On tire de cette proposition que, en partant des caractéristiques de la déformation précédente et en calculant au moyen des formules (I), (I'), (I'') du Chapitre précédent, les quantités u, v, w , celles-ci résulteront polydromes quand la surface σ sera ouverte. La ligne ou les lignes de diramation seront formées du contour L de σ et la polydromie sera individualisée par les formules (4).

4. Supposons maintenant un corps S , $n + 1$ fois connexe. Menons n coupures qui le rendent simplement connexe.

Appelons $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ les n surfaces formées desdites coupures prolongées de quelque façon que ce soit en dehors de S . Posons:

$$(II') \quad \begin{cases} u = \sum_1^n (A_{11}^{(\sigma_i)} l_i + A_{12}^{(\sigma_i)} m_i + A_{13}^{(\sigma_i)} n_i + B_{11}^{(\sigma_i)} p_i + B_{12}^{(\sigma_i)} q_i + B_{13}^{(\sigma_i)} r_i), \\ v = \sum_1^n (A_{21}^{(\sigma_i)} l_i + A_{22}^{(\sigma_i)} m_i + A_{23}^{(\sigma_i)} n_i + B_{21}^{(\sigma_i)} p_i + B_{22}^{(\sigma_i)} q_i + B_{23}^{(\sigma_i)} r_i), \\ w = \sum_1^n (A_{31}^{(\sigma_i)} l_i + A_{32}^{(\sigma_i)} m_i + A_{33}^{(\sigma_i)} n_i + B_{31}^{(\sigma_i)} p_i + B_{32}^{(\sigma_i)} q_i + B_{33}^{(\sigma_i)} r_i), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \end{aligned}$$

où $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ sont des constantes arbitraires; la déformation $\Gamma \equiv (\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12})$ sera régulière au dedans de S et correspondra à des distorsions arbitraires faites suivant lesdites coupures.

Si l'on calcule les forces extérieures agissant sur l'intérieur du corps, on trouve qu'elles sont nulles, mais en général les forces agissant sur le contour du corps S ne seront pas nulles. Or le corps est en équilibre, c'est pourquoi ces forces doivent avoir leur résultante nulle et leur moment nul relativement à un axe quelconque.

Le théorème énoncé à l'article I est donc démontré.

III.

1. Soit une surface σ simplement connexe et finie située dans le plan xz et qui ne rencontre pas l'axe z . Pendant que le plan xz tourne, autour de z , supposons que σ se déforme et se déplace dans le plan d'une manière quelconque sans jamais rencontrer z , mais supposons que, après un tour complet, elle revienne sur sa configuration primitive. Par ce mouvement, l'aire σ engendre un solide annulaire deux fois connexe enchainé à l'axe z . Soit-il rempli de matière élastique isotrope et homogène. Assujettissons-le à la distorsion la plus générale suivant une coupure formée par un plan passant par z et étudions la déformation de ce corps.

2. On sait que les intégrales des équations (3) du Chapitre précédent doivent être des fonctions bi-harmoniques, c'est-à-dire doivent satisfaire la double équation de LAPLACE $\Delta^2 \Delta^2 = 0$.

Or, si l, m, n, p, q, r sont des constantes arbitraires, les fonctions

$$\frac{1}{2\pi} (l - qz + ry) \operatorname{arc tang} \frac{y}{x},$$

$$\frac{1}{2\pi} (m - rx + pz) \operatorname{arc tang} \frac{y}{x},$$

$$\frac{1}{2\pi} (n - py + qx) \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}$$

sont bi-harmoniques et elles ont la polydromie correspondant à une distorsion ayant pour caractéristiques l, m, n, p, q, r .

Mais les fonctions précédentes ne satisfont pas les équations indéfinies de l'élasticité dans le cas de l'isotropie.

Prenons donc

$$u = \frac{1}{2\pi} (l - qz + ry) \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \lambda,$$

$$v = \frac{1}{2\pi} (m - rx + pz) \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \mu,$$

$$w = \frac{1}{2\pi} (n - py + qx) \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \nu,$$

et déterminons les fonctions monodromes λ, μ, ν de manière que les expressions de u, v, w ainsi obtenues satisfassent les équations (3).

Posons:

$$\lambda = (a x + b y + c z + e) \log (x^2 + y^2),$$

$$\mu = (a' x + b' y + c' z + e') \log (x^2 + y^2),$$

$$\nu = (a'' x + b'' y + c'' z + e'') \log (x^2 + y^2),$$

Les constantes $a, b, c, e; a', b', c', e'; a'', b'', c'', e''$ se calculent facilement et l'on trouve

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{2\pi} \left[(l - qz + ry) \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \left(-m - pz - \frac{rK}{L + 2K} x \right) \log (x^2 + y^2) \right], \\ v = \frac{1}{2\pi} \left[(m - rx + pz) \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \left(l - qz - \frac{rK}{L + 2K} y \right) \log (x^2 + y^2) \right], \\ w = \frac{1}{2\pi} \left[(n - py + qz) \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} (px + qy) \log (x^2 + y^2) \right]. \end{array} \right.$$

Il est facile de reconnaître que la déformation correspondante est régulière et qu'on peut obtenir aisément les tensions agissant sur la surface.

Donc, pour le corps en question, on peut calculer la déformation Γ et les forces T de l'article I, quelle que soit la distorsion à laquelle le corps ait été assujetti.

3. Les formules que nous avons données à l'article III du Chapitre précédent ont été déduites comme un cas particulier des précédentes expressions. En effet les formules (2) du Chapitre cité s'obtiennent quand $\gamma = 0$ en prenant

$$l = m = n = p = q = 0, \quad r = 2\pi\alpha,$$

et les formules (4) du même Chapitre en posant

$$l = m = p = q = r = 0, \quad n = 2\pi\alpha.$$

CAPITRE III.

Les efforts (*).

I.

1. Dans les Chapitres précédents j'ai montré que les lois de l'équilibre des corps solides élastiques occupant des espaces plusieurs fois connexes (cycliques) sont bien différentes de celles des solides élastiques occupant des espaces simplement connexes (acycliques) pourvu qu'on admette dans les deux cas les déformations régulières.

En effet, si l'espace occupé par le solide est cyclique, on peut déterminer un état de tension dans le corps même à défaut de forces extérieures en l'assujettissant à des distorsions. Mais il n'en est pas de même quand le corps occupe un espace acyclique. C'est pourquoi, dans le cas d'un corps élastique occupant un espace cyclique, nous aurons à résoudre une série de problèmes nouveaux très intéressants qui ne se présentent pas dans l'autre

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi*. « Rend. Acc. Lincei », s. 5^a, vol. XIV₁, 1905₁, pp. 351-356. [N.d.R.]

cas et qui consistent à calculer les états de tension des corps dus à des distorsions données.

Pour faciliter la résolution de ces problèmes nous exposerons brièvement dans ce Chapitre quelques considérations générales qui permettront de les transformer facilement.

2. Calculons tout d'abord l'énergie d'un solide élastique soumis à des distorsions données.

Représentons par $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12}$ les caractéristiques de la tension d'un solide élastique déformé (le *stress* selon la dénomination des Anglais) et par $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ les caractéristiques de la déformation (le *strain*).

Si nous appelons φ le potentiel élastique unitaire, φ sera une fonction homogène du second degré des quantités γ_{rs} et nous aurons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{rs}} = t_{rs} \quad , \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum t_{rs} \gamma_{rs} ;$$

l'énergie du système sera donc

$$E = -\frac{1}{2} \int_S \sum t_{rs} \gamma_{rs} dS ,$$

S représentant l'espace occupé par le solide.

Supposons S multiplesment connexe (cyclique) et la déformation régulière. Imaginons tracées les coupures $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ qui rendent S simplement connexe. Au moyen de simples intégrations et en représentant par u, v, w les composantes des déplacements des points du solide élastique à partir de l'état naturel, nous aurons

$$\begin{aligned} (1) \quad E &= \frac{1}{2} \int_S \left[u \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + w \left(\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} \right) \right] dS \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\sigma} [u(t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz) + v(t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz) \\ &\quad + w(t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz)] d\sigma \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i^n \int_{\sigma_i} [(u_\alpha - u_\beta)(t_{11} \cos v_i x + t_{12} \cos v_i y + t_{13} \cos v_i z) \\ &\quad + (v_\alpha - v_\beta)(t_{21} \cos v_i x + t_{22} \cos v_i y + t_{23} \cos v_i z) \\ &\quad + (w_\alpha - w_\beta)(t_{31} \cos v_i x + t_{32} \cos v_i y + t_{33} \cos v_i z)] d\sigma_i , \end{aligned}$$

où σ est le contour de S, n la normale à σ dirigée vers l'intérieur de S, v_i la normale à σ_i ; $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha$ les valeurs de u, v, w sur σ_i du côté adjacent à la région où entre v_i et $u_\beta, v_\beta, w_\beta$ les valeurs de l'autre côté.

Appelons $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ les six caractéristiques de la distorsion relative à la coupure σ_i et représentons par X_i, Y_i, Z_i les composantes de la tension unitaire qui sollicite chaque élément de la section σ_i . Les forces extérieures étant nulles, on aura par des intégrations par parties:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_i^n \int_{\sigma_i} [(l_i + r_i y - q_i z) X_i + (m_i + p_i z - r_i x) Y_i + (n_i + q_i x - p_i y) Z_i] d\sigma_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^n \left[l_i \int_{\sigma_i} X_i d\sigma_i + m_i \int_{\sigma_i} Y_i d\sigma_i + n_i \int_{\sigma_i} Z_i d\sigma_i \right. \\ &\quad \left. + p_i \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) d\sigma_i + q_i \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) d\sigma_i + r_i \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) d\sigma_i \right]. \end{aligned}$$

Si l'on pose:

$$L_i = \int_{\sigma_i} X_i d\sigma_i, \quad M_i = \int_{\sigma_i} Y_i d\sigma_i, \quad N_i = \int_{\sigma_i} Z_i d\sigma_i,$$

$$P_i = \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) d\sigma_i, \quad Q_i = \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) d\sigma_i,$$

$$R_i = \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) d\sigma_i,$$

on trouvera

$$E = \frac{1}{2} \sum_i^n (L_i l_i + M_i m_i + N_i n_i + P_i p_i + Q_i q_i + R_i r_i).$$

Désignons par s_1, s_2, \dots, s_{6n} les $6n$ caractéristiques des distorsions et par E_1, \dots, E_{6n} les coefficients qui dans l'expression précédente leur correspondent. Nous aurons alors

$$E = \frac{1}{2} \sum_i^{6n} E_i s_i.$$

3. Nous appellerons *distorsion élémentaire* la distorsion qui correspond aux quantités $s_i = 0$, excepté une qui a pour valeur l'unité.

Supposons que cette dernière soit s_h et appelons E_{ih} les valeurs correspondantes des coefficients E_i . On reconnaît immédiatement que, si les valeurs des caractéristiques des distorsions sont s_1, \dots, s_{6n} , on a

$$E_i = \sum_h^{6n} E_{ih} s_h,$$

et, par conséquent,

$$E = \frac{1}{2} \sum_i^{6n} \sum_h^{6n} E_{ih} s_i s_h.$$

(*) { Si, outre les distortions, existent des forces extérieures appliquées au corps élastique et nous désignons par $\rho X dS$, $\rho Y dS$, $\rho Z dS$ les forces de masse et par $X_\sigma d\sigma$, $Y_\sigma d\sigma$, $Z_\sigma d\sigma$ les tensions superficielles, on aura

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} = \rho X, \quad \frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} = \rho Y,$$

$$\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} = \rho Z,$$

$$t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz = X_\sigma, \quad t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz = Y_\sigma,$$

$$t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz = Z_\sigma;$$

et l'énergie du système s'obtiendra en ajoutant au second membre de l'équation précédente l'expression

$$\int_{\Sigma} \rho (Xu + Yv + Zw) dS + \int_{\sigma} (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w) d\sigma \}.$$

4. Il est facile d'établir la signification des quantités E_i et E_{ih} .

A cet effet, observons que L_i, M_i, N_i sont les composantes de la force résultante et P_i, Q_i, R_i les composantes du couple résultant des tensions qui agissent sur la section σ_i quand on prend pour centre de réduction l'origine des axes.

Nous pourrions donc appeler les coefficients $L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i$ les *efforts qui sollicitent la section σ_i* , ou en général nous dirons que E_1, E_2, \dots, E_{6n} sont les *efforts correspondants à la distorsion s_1, s_2, \dots, s_{6n}* . La quantité E_{ih} s'appellera l'*effort d'ordre i , induit par la distorsion élémentaire d'ordre h* . Plus simplement encore les coefficients E_{ih} pourront s'appeler les *coefficients des efforts*.

II.

1. GREEN a démontré, par l'application du théorème de GAUSS, une proposition fondamentale dans la théorie du potentiel. Par le même procédé, BETTI a découvert un théorème analogue pour l'élasticité⁽¹²⁾. Mais, si le potentiel est polydrome, le théorème de GREEN n'est pas applicable. De même le théorème de BETTI n'est pas applicable si les déplacements sont polydromes. Nous allons voir cependant que, même dans ce cas, on peut reprendre l'idée fondamentale et l'on est amené par là à une loi de réciprocité fort intéressante.

(*) In questa pagina e nelle due seguenti si inseriscono tra parentesi a griffa talune postille che il VOLTERRA comunicò al prof. J. PÉRÈS in una sua lettera dell'11 ottobre 1938. [N. d. R.]

(12) *Teoria della elasticità* (« Nuovo Cimento », 1872-1873).

Envisageons deux distorsions s_1, s_2, \dots, s_{6n} et $s'_1, s'_2, \dots, s'_{6n}$ appliquées successivement à un corps élastique S multiplement connexe qui n'est pas soumis à des forces extérieures. Soient $\gamma_{rs}, \gamma'_{rs}$ les caractéristiques des deux déformations différentes qui s'ensuivent et $u, v, w; u', v', w'$ les composantes respectives des déplacements.

On trouve facilement

$$\int_S \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{rs}} \gamma'_{rs} dS = \int_S \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma'_{rs}} \gamma_{rs} dS,$$

où φ' représente la fonction φ dans laquelle on a substitué les quantités γ'_{rs} aux γ_{rs} .

On tire de là:

$$\begin{aligned} & \sum_i^n \int_{\sigma_i} [(u'_\alpha - u_\beta) (t_{11} \cos \nu_i x + t_{12} \cos \nu_i y + t_{13} \cos \nu_i z) \\ & + (v'_\alpha - v_\beta) (t_{21} \cos \nu_i x + t_{22} \cos \nu_i y + t_{23} \cos \nu_i z) \\ & + (w'_\alpha - w_\beta) (t_{31} \cos \nu_i x + t_{32} \cos \nu_i y + t_{33} \cos \nu_i z)] d\sigma_i \\ & = \sum_i^n \int_{\sigma_i} [(u_\alpha - u_\beta) (t'_{11} \cos \nu_i x + t'_{12} \cos \nu_i y + t'_{13} \cos \nu_i z) \\ & + (v_\alpha - v_\beta) (t'_{21} \cos \nu_i x + t'_{22} \cos \nu_i y + t'_{23} \cos \nu_i z) \\ & + (w_\alpha - w_\beta) (t'_{31} \cos \nu_i x + t'_{32} \cos \nu_i y + t'_{33} \cos \nu_i z)] d\sigma_i, \end{aligned}$$

où les notations sont les mêmes que celles déjà employées dans la formule (1).
Donc

$$(2) \quad \sum_i^{6n} E_i s_i = \sum_i^{6n} E_i s'_i.$$

{ Si, outre les deux distorsions appliquées dans les deux cas, on a appliqué dans le premier cas au corps élastique les forces de masse $\rho X dS, \rho Y dS, \rho Z dS$ et les tensions superficielles $X_\sigma d\sigma, Y_\sigma d\sigma, Z_\sigma d\sigma$ et dans le second cas les forces de masse $\rho X' dS, \rho Y' dS, \rho Z' dS$ et les tensions superficielles $X'_\sigma d\sigma, Y'_\sigma d\sigma, Z'_\sigma d\sigma$, il faudra remplacer l'équation (2) par

$$\begin{aligned} & \sum_i^{3n} E_i s_i + \int_S \rho (X' u + Y' v + Z' w) dS + \int_{\sigma} (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w) d\sigma \\ & = \sum_i^{3n} E_i s'_i + \int_S \rho (X u + Y v + Z w) dS + \int_{\sigma} (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w) d\sigma. \end{aligned}$$

En conséquence, { lorsqu'il n'y a que les distorsions et les forces manquent }, nous avons le théorème suivant:

Si dans un corps élastique multiplement connexe deux systèmes de distorsions engendrent deux systèmes d'efforts, la somme des produits des efforts

du premier système de distorsions par les caractéristiques du second système est égale au produit des efforts du second système de distorsions par les caractéristiques du premier système.

{ Si les distorsions manquent et il n'y a que les forces on retrouve le théorème de BETTI. Si dans le premier cas les forces manquent et dans le second cas manquent les distorsions on a le théorème de COLONNETTI (*) }.

2. De l'égalité (2), en tenant compte que $s_1, s_2, \dots, s_{6n}, s'_1, s'_2, \dots, s'_{6n}$ sont des quantités arbitraires, on tire

$$(3) \quad E_{ih} = E_{hi},$$

pour toutes les valeurs des indices i et h . Réciproquement de ces égalités découle, comme conséquence, l'équation (2). Le théorème de réciprocité que nous venons de donner pourra donc s'énoncer de la manière suivante:

L'effort d'ordre i induit par la distorsion élémentaire d'ordre h est égal à l'effort d'ordre h induit par la distorsion élémentaire d'ordre i .

Par cet énoncé le théorème prend une forme semblable au théorème fondamental de l'induction électrostatique.

Plus simplement encore le théorème peut s'énoncer:

Les coefficients des efforts ne changent pas de valeur par une transposition des indices.

3. Étant données les nombreuses applications du théorème de réciprocité il ne sera pas inutile de l'examiner encore sous un autre point de vue.

Prenons deux sections quelconques σ_1 et σ_2 du corps élastique, les deux sections pouvant aussi coïncider.

Exécutons tout d'abord une distorsion, consistant dans une translation relative T_1 suivant la direction h_1 , des éléments des deux faces de la coupure σ_1 . Déterminons ensuite la projection S_2 suivant la direction h_2 de la résultante des tensions qui sollicitent la section σ_2 .

Exécutons enfin, au lieu de la précédente distorsion, une autre distorsion qui consistera dans une translation T_2 suivant la direction h_2 des éléments des deux faces de la coupure σ_2 et déterminons la projection S_1 suivant h_1 de la résultante des efforts qui sollicitent la section σ_1 .

Le théorème de réciprocité nous donne

$$S_2 T_2 = S_1 T_1$$

et, par suite,

$$\frac{S_2}{T_1} = \frac{S_1}{T_2},$$

{ (*) M. COLONNETTI a énoncé et démontré ce théorème en 1912 directement et d'une manière indépendante des propositions précédentes. Ce n'est que la première de ces propositions que j'avais donnée dans le présent mémoire et dans mes notes antérieures de l'Académie des Lincei. M. COLONNETTI a appelé son théorème le *second principe* de réciprocité et il en a fait un grand nombre d'applications }.

c'est-à-dire les projections des deux efforts suivant les directions des deux translations sont proportionnelles aux valeurs des translations elles-mêmes.

On obtient un théorème tout à fait analogue en substituant à la translation T_1 une rotation T_1 autour de la ligne droite h_1 , pourvu qu'on remplace la projection S_1 de la résultante des tensions qui sollicitent les éléments de σ_1 par le moment de ces tensions par rapport à la ligne droite h_1 .

Enfin avec de semblables substitutions pour T_2 et S_2 , on obtient un nouveau théorème analogue aux deux premiers.

Ces trois propositions sont équivalentes au théorème de réciprocité que nous avons déjà énoncé de diverses manières dans le paragraphe précédent.

III.

1. En vertu de l'égalité (3) on a

$$E_i = \frac{\partial E}{\partial s_i},$$

et, si l'on appelle e_{ih} les coefficients de la forme réciproque de l'expression

$$\sum_i \sum_h E_{ih} s_i s_h,$$

nous pourrons exprimer d'une autre façon l'énergie du système moyennant la formule

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_h e_{ih} E_i E_h.$$

2. Dans le Chapitre précédent nous avons démontré que, étant donné une déformation d'un système multiplement connexe, les distorsions qui correspondent à ses coupures équivalentes sont égales.

Nous voulons maintenant compléter cette proposition et prouver que les efforts qui correspondent à des coupures équivalentes sont aussi égaux.

En effet, envisageons la section σ_1 . Par définition on peut la réduire à une section équivalente σ_2 au moyen d'une déformation continue. Pendant qu'on effectue cette réduction la surface σ_1 engendre un solide S_1 qui constitue une partie du corps élastique S .

Le solide S_1 sera limité par σ_1 , σ_2 et par une surface latérale ω . Nous pouvons alors imaginer S_1 en équilibre sous la seule action des tensions qui agissent sur σ_1 et σ_2 . De là résulte l'égalité des efforts.

On en conclut que les efforts, comme les distorsions, ne sont pas des éléments spécifiques de chaque coupure, mais qu'ils dépendent exclusivement de la nature géométrique de l'espace occupé par le corps et de la déformation régulière dont le corps est affecté.

Le premier problème fondamental que nous pourrions nous proposer dans l'étude des solides élastiques plusieurs fois connexes sera le suivant:

Les 6 n distorsions étant données, déterminer les 6 n efforts en supposant nulles les forces extérieures.

Cette question revient à déterminer les coefficients des efforts.

CHAPITRE IV.

Distorsions et efforts dans un corps cyclique symétrique (*).

I.

1. En partant des principes que nous avons établis dans le Chapitre précédent, nous étudierons dans celui-ci un cas particulier de distorsions. Nous verrons comment ces principes nous permettent d'approfondir le mécanisme des distorsions et nous révèlent des faits qui sont bien loin de ceux qu'on aurait pu prévoir, *a priori*, en examinant intuitivement la question. On, atteindra le but sans recourir à l'intégration des équations différentielles, mais à l'aide d'une discussion élémentaire de l'expression de l'énergie d'un système élastique qui a subi des distorsions données.

Pour donner brièvement une idée des résultats, revenons à l'exemple d'où nous sommes partis au Chapitre I.

Nous avons supposé de supprimer dans un anneau une tranche très mince transversale qui varie en épaisseur proportionnellement à la distance de l'axe de symétrie; ensuite, nous avons supposé de rapprocher les deux faces de la coupure et de les souder. Le corps abandonné à lui-même cesse d'être à l'état naturel. Il prend un état de déformation régulière et ses éléments sont sollicités par des forces élastiques. On peut donc se demander quelles sont les actions qui s'exercent sur les faces soudées. Il semblerait évident qu'elles devraient être tendues, mais la chose n'est pas ainsi. Il y a toujours une partie tendue et une partie comprimée; de plus « la somme des forces de tension est égale à la somme des forces de compression ».

Le présent Chapitre est consacré à ce théorème et à d'autres analogues qui jettent un jour inattendu sur la distribution des efforts élastiques engendrés dans les corps par les distorsions.

2. Donnons tout d'abord quelques définitions. Dans le Chapitre précédent, nous avons exprimé l'énergie élastique d'un corps sujet à des distorsions par la formule

$$E = \frac{1}{2} \sum_i^{6n} E_i s_i,$$

où les efforts sont représentés par E_i et les caractéristiques des distorsions par s_i . Nous appellerons E_i l'effort conjugué à la caractéristique s_i de la distorsion.

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici*. « Rend. Acc. Lincei », s. 5^a, vol. XIV₁, 1905₁, pp. 431-438. [N. d. R.].

Le centre de réduction étant choisi, la distorsion appliquée à chaque coupure peut être décomposée en une translation et en une rotation relative des éléments des faces de la coupure. Faisons usage du même centre de réduction et composons les actions qui sollicitent les éléments d'une face de la même coupure comme si elles étaient appliquées aux points d'un système rigide. On trouve ainsi une force résultante et un couple résultant. Cette force et ce couple constituent l'effort total appliqué à la section (voir Chap. précédent, Art. I, § 4).

En vertu de la précédente définition, les composantes, suivant les axes coordonnés, de la force résultante sont les efforts conjugués des projections correspondantes de la translation; et les composantes du couple résultant sont les efforts conjugués des projections correspondantes de la rotation.

Si la distorsion est élémentaire, une seule des caractéristiques et, par conséquent, une seule des précédentes projections sera différente de zero; alors la composante de la force ou la composante du couple qui est conjuguée à cette caractéristique pourra s'appeler *l'effort conjugué à la distorsion élémentaire*.

3. Un solide de révolution peut être engendré par la révolution d'une surface plane connexe (surface génératrice) autour d'une ligne droite de son plan. Soit n l'ordre de connexion de la surface génératrice. Si l'axe de rotation lui est extérieur, l'ordre de connexion du solide est $n + 1$; mais, si l'axe constitue une partie du contour de la surface génératrice, l'ordre de connexion du solide est égal à n .

Réduisons simplement connexe la surface génératrice moyennant $n - 1$ coupures linéaires. Par la rotation, ces coupures engendrent autant de surfaces qui peuvent être considérées comme des sections du solide. Dans le second cas, ces sections suffisent pour rendre le solide simplement connexe, tandis que dans le premier cas, pour obtenir la connexion simple, il faut faire encore une coupure transversale, par exemple une coupure qui coïncide avec une des positions que la surface génératrice prend pendant qu'elle tourne autour de l'axe.

Cette dernière coupure, ou toute coupure équivalente, s'appellera de *première espèce*; chacune des autres, ou une coupure équivalente, s'appellera de *seconde espèce*.

Soit un solide symétrique deux fois connexe: deux cas peuvent se présenter: 1° la surface engendrée est simplement connexe et extérieure à l'axe de symétrie; 2° la surface engendrée est deux fois connexe et en partie limitée par l'axe de symétrie.

Pour réduire le solide simplement connexe, nous ferons dans le premier cas une coupure de première espèce, et dans le second cas une coupure de seconde espèce, et nous dirons, dans le premier cas, que le corps est *deux fois connexe de première espèce*, et dans le seconde cas, qu'il est *deux fois connexe de seconde espèce*.

II.

1. Étudions maintenant les distorsions d'un corps élastique symétrique deux fois connexe de première espèce. Dans cette étude, nous admettrons que la symétrie n'est pas seulement limitée à la forme, mais dans l'hypothèse de l'anisotropie qu'elle subsiste aussi relativement à la constitution du corps élastique.

Supposons que la distorsion soit exécutée sur une coupure σ faite suivant une des positions que la surface génératrice prend dans la rotation.

Plaçons l'origine en un point de l'axe de symétrie et prenons cet axe comme axe z .

L'énergie du système sera exprimée par la formule (voir Chapitre précédent, Art. I, § 3)

$$(1) \quad E = \frac{1}{2} \sum_i^6 \sum_h^6 E_{ih} s_i s_h,$$

où

$$s_1 = l, \quad s_2 = m, \quad s_3 = n, \quad s_4 = p, \quad s_5 = q, \quad s_6 = r$$

désignent les caractéristiques de la distorsion, selon les notations employées dans le Chapitre précédent.

Cela posé, observons que, à cause de la symétrie, l'énergie du système ne changera pas si, au lieu d'appliquer la distorsion à la section primitive σ , nous l'appliquons à une autre section qui forme avec la première un angle θ quelconque.

Or, les deux sections étant équivalentes, l'énergie du système sera la même, soit que nous appliquions au système, suivant la section σ , la distorsion

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6,$$

soit que nous appliquions, suivant la même section, la distorsion

$$\begin{aligned} s'_1 &= s_1 \cos \theta + s_2 \sin \theta, & s'_2 &= -s_1 \sin \theta + s_2 \cos \theta, & s'_3 &= s_3, \\ s'_4 &= s_4 \cos \theta + s_5 \sin \theta, & s'_5 &= -s_4 \sin \theta + s_5 \cos \theta, & s'_6 &= s_6. \end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$(2) \quad E = \frac{1}{2} \sum_i^6 \sum_h^6 E_{ih} s'_i s'_h$$

devra être indépendante de θ , c'est-à-dire

$$\frac{dE}{d\theta} = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{ds'_1}{d\theta} = s'_2 \quad , \quad \frac{ds'_2}{d\theta} = -s'_1 \quad , \quad \frac{ds'_3}{d\theta} = 0 \quad , \\ \frac{ds'_4}{d\theta} = s'_5 \quad , \quad \frac{ds'_5}{d\theta} = -s'_4 \quad , \quad \frac{ds'_6}{d\theta} = 0 \quad , \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dE}{d\theta} = & (E_{11} - E_{22}) s'_1 s'_2 + E_{12} (s'^2_2 - s'^2_1) + E_{13} s'_2 s'_3 - E_{23} s'_1 s'_3 \\ & + (E_{44} - E_{55}) s'_4 s'_5 + E_{45} (s'^2_5 - s'^2_4) + E_{46} s'_5 s'_6 - E_{56} s'_4 s'_6 \\ & + (E_{14} - E_{25}) (s'_2 s'_4 + s'_1 s'_5) + (E_{24} + E_{15}) (s'_2 s'_5 - s'_4 s'_1) \\ & + E_{16} s'_2 s'_6 - E_{26} s'_1 s'_6 + E_{34} s'_3 s'_5 - E_{35} s'_3 s'_4 . \end{aligned}$$

Or, les quantités $s'_1, s'_2, s'_3, s'_4, s'_5, s'_6$ sont arbitraires; il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E_{11} = E_{22} \quad , \quad E_{44} = E_{55} \quad , \quad E_{14} = E_{25} \quad , \quad E_{24} = -E_{15} \quad , \\ E_{12} = E_{13} = E_{23} = E_{45} = E_{46} = E_{56} = E_{16} = E_{26} = E_{34} = E_{35} = 0 . \end{aligned}$$

Par conséquent, l'expression (2) se réduira à

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} [E_{11} (s^2_1 + s^2_2) + E_{33} s^2_3 + E_{44} (s^2_4 + s^2_5) + E_{66} s^2_6 \\ + 2 E_{14} (s_1 s_4 + s_2 s_5) + 2 E_{24} (s_2 s_4 - s_1 s_5) + 2 E_{36} s_3 s_6] . \end{aligned}$$

Prenons le plan xz comme plan de la section σ et envisageons la distorsion d'ordre 6, c'est-à-dire la distorsion due à une rotation relative des éléments des deux faces de la coupure σ autour de l'axe z .

Il est évident que la déformation du corps résultera symétrique par rapport au plan xz et, par conséquent, l'ellipsoïde d'élasticité et la surface directrice⁽¹³⁾ dans chaque point de σ auront le plan xz pour plan de symétrie.

En d'autres termes, les actions élastiques qui s'exercent sur les éléments de σ devront être normales à σ . En composant ces actions et en prenant l'origine pour centre de réduction, on ne pourra obtenir qu'une résultante normale à σ (ayant la direction y) et un couple résultant dont l'axe est parallèle à σ . Il s'ensuit que

$$E_{16} = E_{36} = E_{56} = 0 \quad ,$$

c'est pourquoi

$$\begin{aligned} (3) \quad E = \frac{1}{2} [E_{11} (s^2_1 + s^2_2) + E_{33} s^2_3 + E_{44} (s^2_4 + s^2_5) + E_{66} s^2_6 \\ + 2 E_{14} (s_1 s_4 + s_2 s_5) + 2 E_{24} (s_2 s_4 - s_1 s_5)] . \end{aligned}$$

(13) Voir CLEBSCH, loc. cit., Chap. I, § 6.

De la même manière, envisageons la distorsion élémentaire d'ordre 2, c'est-à-dire la distorsion due à une translation relative des éléments des deux faces de la coupure σ , parallèlement à l'axe y . L'ellipsoïde d'élasticité et la surface directrice résulteront symétriques par rapport au plan xz en chaque point de σ . C'est pourquoi, à l'aide d'un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, on tire

$$E_{12} = E_{32} = E_{52} = 0.$$

Mais

$$E_{14} = E_{52},$$

donc

$$(4) \quad E = \frac{1}{2} [E_{11} (s_1^2 + s_2^2) + E_{33} s_3^2 + E_{44} (s_4^2 + s_5^2) + E_{66} s_6^2 + 2 E_{24} (s_2 s_4 - s_1 s_5)].$$

Observons maintenant que le coefficient $E_{11} = E_{22}$ ne peut pas être nul, autrement l'énergie due à une distorsion élémentaire d'ordre 1 ou d'ordre 2 serait nulle, ce qui est absurde.

Il s'ensuit que, en composant toutes les actions qui sollicitent σ , en vertu de la distorsion élémentaire d'ordre 2, on doit obtenir une résultante différente de zéro dont la ligne d'action rencontre l'axe z en un point Ω . En effet, toutes ces actions sont équivalentes à la force E_{22} appliquée à l'origine et au couple ayant pour moment E_{24} et pour axe x .

Mais, si nous prenons le centre de réduction dans le point Ω , nous aurons $E_{24} = 0$ et, par suite,

$$(5) \quad E = \frac{1}{2} [E_{11} (s_1^2 + s_2^2) + E_{33} s_3^2 + E_{44} (s_4^2 + s_5^2) + E_{66} s_6^2].$$

2. Étudions maintenant les distorsions des corps symétriques multiplement connexes de seconde espèce. Supposons que les distorsions soient appliquées à une coupure de seconde espèce symétrique par rapport à l'axe de symétrie du corps.

L'énergie du système aura toujours la forme (1) et, si nous prenons comme axe z l'axe de symétrie, l'expression de cette énergie ne doit point changer si nous faisons tourner dans leur plan les axes x, y d'un angle θ . Donc, même dans ce cas, l'expression (2) doit résulter indépendante de θ et E doit prendre la forme (3). Mais, en vertu de la symétrie, E ne doit pas varier si l'on change s_6 , lorsqu'on suppose $s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = 0$; donc $E_{36} = 0$. Même si l'on change entre eux les axes x, y , l'énergie E ne variera pas, c'est-à-dire la quantité E doit se conserver la même, si l'on substitue en même temps s_1 à s_2 et s_4 à $-s_5$. Il en résulte que $E_{14} = 0$ et, par conséquent, l'énergie E doit avoir la forme (4).

Un raisonnement analogue à celui que l'on a fait dans le paragraphe précédent prouve que, en choisissant convenablement l'origine en un point Ω , on peut rendre E_{24} égal à zéro. Par conséquent, même dans le cas où la double connexion est de seconde espèce, l'expression de l'énergie peut se réduire à la formule (5).

Le point Ω s'appellera *le point central de l'axe de symétrie*.

3. La formule (5), quand on tient compte du principe des coupures équivalentes, renferme le théorème suivant:

Dans un corps élastique symétrique deux fois connexe, chaque distorsion élémentaire engendre le seul effort conjugué, quand on prend le centre de réduction dans le point central de l'axe de symétrie.

De ce théorème découle le corollaire suivant:

L'effort total engendré par une distorsion, consistant en une translation relative des éléments des faces de la coupure, est une force dont la ligne d'action passe par le point central de l'axe de symétrie.

L'effort total engendré par une distorsion, consistant en une rotation relative des éléments des faces de la coupure autour d'un axe passant par le point central de l'axe de symétrie, est un couple.

Il serait ensuite facile de démontrer que:

Si le corps élastique a un plan de symétrie normal à l'axe de symétrie, le point central est le lieu d'intersection de l'axe de symétrie avec le plan de symétrie.

4. Examinons le cas où la double connexion est de première espèce et la distorsion d'ordre 6. Alors l'effort est réduit à un couple ayant pour axe l'axe de symétrie. Donc, si nous considérons les actions élastiques qui sollicitent une face de la coupure, leur résultante est nulle. De là le théorème énoncé dans le § 1 de l'Article I. Il est facile de compléter ce théorème en montrant que, par rapport à l'axe de symétrie, le moment des forces de tension surpasse celui des forces de compression et précisément de la quantité E_{66} .

D'une manière analogue supposons que la coupure soit faite suivant le plan xz et considérons la distorsion d'ordre 2. L'effort induit sera une force normale à la coupure dont la ligne d'action rencontrera l'axe de symétrie. Donc, dans ce cas aussi doivent exister des éléments des faces de la coupure qui sont comprimés tandis que les autres sont tendus.

Revenant à l'exemple du paragraphe 1, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Si nous supprimons dans l'anneau (au lieu d'une tranche proportionnelle en largeur à la distance de l'axe de symétrie) une tranche de largeur uniforme et si nous soudons ensuite les faces de la fente, quelques parties de ces faces seront tendues et d'autres comprimées. Les tensions surpasseront les pressions (et précisément de E_{11}), mais le moment des premières sera égal au moment des secondes par rapport à l'axe de symétrie.

On déduit très facilement des résultats précédents que, si l'on supprime dans l'anneau une tranche dont l'épaisseur est donnée par

$$s_2 - s_6 x,$$

en appelant x la distance de l'axe de symétrie, en soudant ensuite les faces

de la fente, on engendre un effort normal à la section dont la ligne d'action est éloignée de l'axe de symétrie de

$$h = \frac{s_6}{s_2} \frac{E_{66}}{E_{11}}.$$

On voit ainsi que, en choisissant convenablement le rapport s_6/s_2 , on peut faire en sorte que cette ligne d'action soit à une distance quelconque de l'axe de symétrie.

Dans le premier Chapitre nous avons examiné la distorsion qui consiste à faire glisser les deux faces de la coupure l'une relativement à l'autre dans le sens de l'axe de symétrie, de manière à donner à l'anneau une forme légèrement hélicoïdale et, ensuite, à souder entre elles les deux faces.

Cette distorsion correspond à une distorsion d'ordre 3. En conséquence, l'effort correspondant a pour ligne d'action l'axe de symétrie; c'est pourquoi les éléments d'une face de la coupure seront tirés les uns dans le sens où l'on a fait le glissement, les autres dans le sens opposé; de plus, le moment des premières actions sera égal à celui des autres par rapport à un axe normal à la section et qui rencontre l'axe de symétrie.

Nous ne nous arrêterons pas à discuter d'autres cas particuliers qui ne sont pourtant pas sans intérêt, mais qui donnent lieu à des considérations et à des conclusions analogues à celle que nous venons de développer et de formuler.

CHAPITRE V.

Cylindre creux de révolution. — Distorsion d'ordre 6 (*).

I.

1. Un des résultats auxquels je suis arrivé dans le Chapitre précédent a été le suivant:

Soit un anneau symétrique relativement à un axe (fig. 1). Retrançons en AA' BB' une mince tranche dont la largeur varie proportionnellement à la distance de l'axe (nous appellerons cette opération *faire une fissure radiale*). Rapprochons ensuite les faces AA' et BB' de la fissure, soudons-les et laissons l'anneau libre.

Les faces soudées ne sont pas simplement tendues, mais en partie tendues et en partie comprimées et la somme des forces de compression est égale à la somme des forces de tension (voir Chap. IV, Art. I, § 1, Art. II, § 4).

(*) Traduzione, con lievissime modificazione di forma, della Nota: *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici*. «Rend. Acc. Lincei», s. 5^a, vol. XIV₁, 1905, pp. 641-654. [N. d. R.].

En retranchant en $AA' BB'$ (fig. 2) une tranche mince à faces parallèles et équidistantes de l'axe de l'anneau (*fissure uniforme*) on trouverait encore, après avoir soudé les deux faces et abandonné le corps à lui-même, que les faces sont en partie tendues et en partie comprimées. Toutefois les conditions du corps en équilibre sont essentiellement différentes dans les deux cas (Chap. IV, Art. II, § 4).

Dans le premier cas, l'état de déformation du corps est symétrique, relativement à l'axe, en sorte que l'on aurait obtenu le même état en exécutant la même fissure radiale en une autre section axiale quelconque de l'anneau [par exemple, en celle diamétralement opposée $C'C$ (fig. 1)] et en

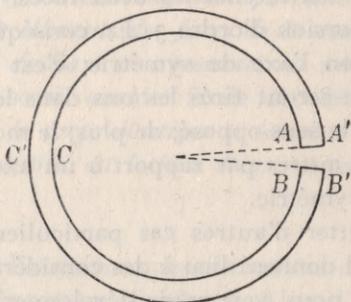


Fig. 1.

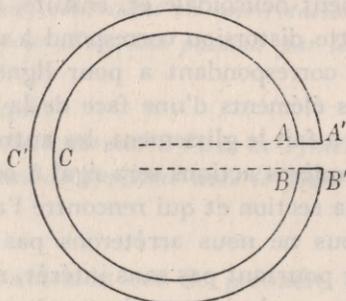


Fig. 2.

soudant ensuite les faces. Dans le second cas, pour obtenir le même état de déformation en opérant une distorsion dans la région diamétralement opposée à $AA' BB'$, on aurait dû faire une coupure en CC' et interposer entre les faces de la coupure un coin d'épaisseur uniforme (voir le principe des coupures équivalentes; Chap II, Art. I, § 1).

De plus, la distribution des efforts est tout à fait différente dans les deux cas.

Dans le premier, si nous examinons les actions que AA' exerce sur BB' après la soudure et si nous composons entre eux tous les efforts de compression et ensuite tous ceux de tension, nous obtenons que la ligne d'action de la résultante des premiers efforts est située vers la région intérieure de l'anneau, c'est-à-dire du côté AB , et la ligne d'action de la résultante des autres efforts vers la région extérieure, c'est-à-dire du côté $A'B'$. En vertu de la symétrie on trouverait un résultat analogue en chaque section axiale de l'anneau.

En effet, nous avons trouvé (voir Chap. IV, Art. II, § 4) que la résultante des efforts de tension est égale en intensité à celle des efforts de compression, mais que le moment de la première résultante relativement à l'axe de symétrie surpasse le moment de l'autre résultante.

Au contraire, en faisant, dans le second cas, une semblable composition, on a que la ligne d'action de la résultante des efforts de compression qui agissent sur la face BB' , après la soudure, est située vers la région exté-

rière de l'anneau, c'est-à-dire du côté A'B' : tandis que la ligne d'action des efforts de tension est située vers la région intérieure, c'est-à-dire du côté AB. Mais on trouve le contraire du côté opposé CC' ; la ligne d'action de la résultante des efforts de compression est ici située du côté intérieur, vers C, et la ligne d'action de la résultante des tensions est du côté opposé, vers C'.

En effet, nous avons démontré (Chap. IV, Art. II, § 4) que dans le cas d'une coupure uniforme, en chaque section transversale de l'anneau, les efforts de tension surpassent ceux de compression et la résultante des uns et des autres rencontre orthogonalement l'axe de symétrie de l'anneau.

En d'autres termes, dans le cas de la fissure radiale, les fibres circulaires étirées de l'anneau se trouvent principalement vers la région extérieure et celles comprimées vers la région intérieure et cela tout le long de l'anneau. Au contraire, dans le cas de la fissure uniforme, les fibres circulaires, du côté droit de l'anneau, sont principalement étirées dans la région extérieure ; le contraire arrive du côté gauche de l'anneau.

Les résultats que nous venons d'énoncer se déduisent facilement soit du principe des coupures équivalentes, soit de la loi de composition des efforts (voir les Chapitres précédents). Par l'intuition on arriverait difficilement, *a priori*, à ces résultats ; ils nous semblent inattendus. On peut se rendre compte de cela en remarquant que l'expérience quotidienne nous habitue à prévoir les déformations des corps, lorsqu'ils sont assujettis à des efforts extérieurs connus. Mais dans le cas présent, aucun effort extérieur n'est exercé sur le corps élastique : les efforts qui le sollicitent sont intérieurs et, pour ainsi dire, cachés à l'observateur, en sorte qu'ils figurent, en même temps que la déformation, comme les inconnues du problème.

2. Pour avoir la confirmation expérimentale de quelques-uns des résultats obtenus j'ai opéré sur des solides de caoutchouc, avec lesquels il est facile d'obtenir des déformations très sensibles.

Pour faire une comparaison entre les résultats du calcul et les expériences, je commencerai, dans ce Chapitre, par approfondir le premier exemple développé dans le Chapitre I, c'est-à-dire le cas correspondant à la distorsion d'ordre 6 (voir Chap. IV) due à une fissure radiale en un cylindre creux de révolution, cas qui présente les moindres difficultés au point de vue analytique. Les distorsions des autres ordres seront examinées dans les Chapitres suivants.

II.

1. Les formules (2), du Chapitre I, dans lesquelles on suppose $\gamma = 0$, expriment les déplacements correspondant à une distorsion d'ordre 6 (fissure radiale) quand le cylindre est sujet respectivement à des actions uniformes, suivant les surfaces cylindriques qui forment le contour latéral du corps, et à des tensions qui en sollicitent les bases. On élimine facilement les pre-

mières en composant les déplacements (2) dudit Chapitre avec les déplacements

$$u = \lambda \frac{x}{r^2} + \mu x \quad , \quad v = \lambda \frac{y}{r^2} + \mu y \quad , \quad w = 0 \quad ,$$

et en choisissant convenablement les constantes λ et μ .

En opérant ainsi, on arrive aux déplacements

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\alpha \left[y \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L+2K} x \log r^2 \right. \\ \quad \left. + \frac{L+K}{L+2K} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{x}{r^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{x}{2} \left(1 + \frac{K}{L+2K} \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) \right], \\ v = -\alpha \left[-x \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L+2K} y \log r^2 \right. \\ \quad \left. + \frac{L+K}{L+2K} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{y}{r^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{y}{2} \left(1 + \frac{K}{L+2K} \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) \right], \\ w = 0 \quad , \end{array} \right.$$

qui correspondent à l'hypothèse d'une distorsion (d'ordre 6) due à une fissure radiale, dont l'ouverture angulaire est $2\pi\alpha$, pendant que le corps est sollicité par les seules actions agissant sur les deux bases. Ces actions maintiennent lesdites bases planes et à la distance primitive⁽¹⁴⁾.

On peut facilement calculer les six caractéristiques des tensions (*strain*) qui correspondent aux déplacements (I) et l'on a

$$(1) \quad t_{11} = \frac{\alpha(L+K)K}{L+2K} \left[\log r^2 + \frac{2y^2}{r^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \right) - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right],$$

$$(2) \quad t_{22} = \frac{\alpha(L+K)K}{L+2K} \left[\log r^2 + \frac{2x^2}{r^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right) - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right],$$

$$(3) \quad t_{33} = \frac{\alpha L K}{L+2K} \left(1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right),$$

(14) Dans ces formules, comme dans les suivantes, les logarithmes sont népériens.

$$(4) \quad t_{23} = 0,$$

$$(5) \quad t_{31} = 0,$$

$$(6) \quad t_{12} = -\frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \frac{xy}{r^2} \left[1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} \right].$$

Les égalités $t_{23} = 0$ et $t_{31} = 0$ prouvent que les forces agissent normalement aux bases.

Cette action sur les bases, rapportée à l'unité de surface, doit être considérée comme positive lorsqu'elle est dirigée de l'extérieur vers l'intérieur du cylindre et comme négative dans le cas contraire. Voici son expression

$$(II) \quad P_{\omega} = t_{33} = \frac{\alpha LK}{L+2K} \left(1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right).$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Un cylindre creux de révolution, qui a subi une distorsion (d'ordre 6) due à une fissure radiale d'ouverture $2\pi\alpha$, maintient ses bases planes et à leur distance primitive à l'aide de forces normales agissant sur les mêmes bases. Ces forces sont données par la formule précédents (II) dans laquelle R_1 et R_2 représentent les rayons des surfaces cylindriques latérales et r la distance de l'axe aux différents points des bases.

2. Cela posé, calculons les actions qui s'exercent sur les éléments de la section σ du cylindre. Cette section est faite avec la moitié du plan détaché de l'axe du cylindre qui forme, avec le plan xz , l'angle β .

Les équations (1), (2) et (6) nous fournissent tout de suite les composantes suivant les axes de l'action unitaire relative à chaque élément de la section. Ces composantes sont

$$-F \sin \beta, \quad F \cos \beta, \quad 0,$$

dans lesquelles

$$F = -\frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \left[1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right].$$

Ce qui prouve que chaque élément de σ est sollicité par une force normale de grandeur unitaire F .

Un calcul élémentaire nous donne

$$\int_{R_2}^{R_1} F \, dr = 0.$$

Il s'ensuit que, en composant toutes les actions qui s'exercent sur les éléments de σ , on trouve une force résultante nulle.

Ce résultat vérifie, dans le cas particulier que nous traitons, le théorème général démontré dans le Chapitre précédent, § 6.

En effet, il prouve que la somme des compressions qui agissent sur σ est égale, en valeur absolue, à la somme des tensions. Cette condition devra évidemment continuer à subsister, même quand nous ne solliciterons plus les bases du cylindre creux, au moyen des forces P_0 .

On peut calculer facilement le moment des actions qui sollicitent les éléments de σ par rapport à l'axe z . En indiquant par h la hauteur du cylindre, ce moment sera

$$h \int_{R_2}^{R_1} r F dr = - \frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{4} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)^2}{R_1^2 - R_2^2} \right] h.$$

3. Posons

$$(7) \quad f(r) = 1 + \log r - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2}.$$

La fonction $f(r)$ est croissante, et, puisque

$$\int_{R_2}^{R_1} f(r) dr = 0,$$

il résulte que l'équation

$$f(r) = 0$$

a une seule racine ρ_1 comprise entre R_2 et R_1 , et que $f(r)$ est négative pour les valeurs de r comprises entre R_2 et ρ_1 et positive pour les valeurs comprises entre ρ_1 et R_1 .

Cela prouve que les fibres circulaires du cylindre, ayant pour axe l'axe du cylindre et dont le rayon est compris entre R_2 et ρ_1 , sont comprimées, tandis que celles dont le rayon est compris entre ρ_1 et R_1 sont tendues. Les fibres neutres ont pour rayon ρ_1 .

De l'équation $f(r) = 0$ on tire

$$\log \frac{\rho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\frac{R_1}{R_2} \log \frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1} \frac{R_1 R_2}{\rho_1^2} + \frac{\frac{R_1^2}{R_2^2} \log \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} - \log \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1} - 1;$$

et, en posant

$$\frac{R_1}{R_2} = \varepsilon, \quad \log \frac{\rho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = \varphi,$$

nous aurons

$$(8) \quad \varphi = \frac{\varepsilon \log \varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} e^{-2\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1} \log \varepsilon - 1.$$

Soit

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{R_1 - R_2}{R_1},$$

nous aurons $0 < \gamma < 1$. Dans l'expression (8) développons en série, suivant les puissances ascendantes de γ , le coefficient de $e^{-2\varphi}$ et les termes successifs. Nous obtiendrons

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \gamma^2 + \dots \right) e^{-2\varphi} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \gamma^2 + \dots \right),$$

d'où l'on a

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = \frac{1}{12},$$

donc

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{24} \gamma^2 + \dots$$

et

$$\frac{\rho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = e^{\varphi(\gamma)} = 1 + \frac{1}{24} \gamma^2 + \dots,$$

c'est-à-dire, en négligeant les puissances de $(R_1 - R_2)/R_1$ supérieures à la seconde,

$$\rho_1 = \sqrt{R_1 R_2} \left[1 + \frac{1}{24} \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1} \right)^2 \right].$$

Si l'épaisseur du cylindre creux est petite relativement aux rayons, et si le rapport de l'épaisseur au rayon extérieur est envisagé comme une quantité du premier ordre, le rayon des fibres neutres sera donné par

$$\rho_1 = \sqrt{R_1 R_2}$$

en négligeant les quantités du second ordre.

4. De la formule (7) et de l'équation

$$0 = 1 + \log \rho_1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2},$$

on tire

$$f(r) = \log \frac{r}{\rho_1} + \frac{R_1^2 R_2^2 \log \frac{R_1}{R_2}}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{r^2 - \rho_1^2}{r^2 \rho_1^2} \right).$$

Considérons $(R_1 - R_2)/R_1 = \gamma$ comme une quantité très petite du premier ordre. Par des calculs faciles, en posant $r = \rho_1 + \xi$ et en négligeant les quantités du second ordre, nous obtenons

$$f(r) = \frac{2\xi}{\sqrt{R_1 R_2}} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{R_1 - R_2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)} \right].$$

C'est pourquoi

$$F = - \frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \frac{2\xi}{\sqrt{R_1 R_2}} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{R_1 - R_2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)} \right].$$

Soit E le module d'élasticité et γ le coefficient de POISSON. Nous aurons

$$\frac{(L + K) K}{L + 2 K} = -\frac{E}{4(1 - \gamma^2)}$$

et, si nous appelons θ l'ouverture angulaire de la coupure radiale, α sera égal à $\theta/(2\pi)$; donc

$$(III) \quad F = \frac{E}{(1 - \gamma^2)} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\xi}{\rho} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{s}{\rho}\right),$$

où ρ est la moyenne (arithmétique ou géométrique) des rayons et s la différence des rayons, c'est-à-dire l'épaisseur du cylindre creux.

5. Passons maintenant à examiner la loi de distribution des forces P_0 sur les bases du cylindre.

Posons

$$(9) \quad \psi(r) = 1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2};$$

par un calcul élémentaire on démontre que

$$(10) \quad \int_{R_2}^{R_1} r \psi(r) dr = 0,$$

il s'ensuit que l'équation $\psi(r) = 0$ devra avoir une racine comprise entre R_1 et R_2 , et, comme $\psi(r)$ est une fonction croissante, cette racine sera unique. En l'appelant ρ_2 nous aurons que $\psi(r)$ sera négative si la variable r est comprise entre R_2 et ρ_2 , et positive si r est comprise entre ρ_2 et R_1 .

Il est facile de montrer que $\rho_2 > (R_1 + R_2)/2$.

Nous avons, en effet,

$$(11) \quad 1 + \log \rho_2^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} = 0,$$

d'où

$$\log \frac{2 \rho_2^2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2^2 \log \frac{R_1}{R_2}}{R_1^2 - R_2^2} + \log \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{2} + \log 2$$

et, en posant

$$\frac{R_1}{R_2} = \varepsilon, \quad \log \frac{2 \rho_2^2}{R_1 + R_2} = \chi(\varepsilon),$$

$$\chi(\varepsilon) = \frac{\log \varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} + \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} - \frac{1}{2} + \log 2,$$

il s'ensuit

$$\chi'(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} - 2 \log \varepsilon}{\varepsilon (\varepsilon^2 - 1)^2} = \frac{\ddot{\omega}(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - 1)^2}.$$

Si l'on écrit, comme nous avons fait précédemment (§ 3), $\gamma = 1 - 1/\varepsilon$ et, si l'on développe le logarithme et, ensuite, $\chi'(\varepsilon)$ en série suivant les puissances de γ , on a

$$(12) \quad \chi'(\varepsilon) = \frac{\left(\frac{1}{3}\gamma^3 + \dots\right)(1-\gamma)^3}{\gamma^2(2-\gamma)^2} = \frac{1}{12}\gamma + \dots,$$

où les termes qui suivent le premier contiennent des puissances supérieures de la variable γ . On en déduit

$$\chi'(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0, \quad \chi(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0.$$

Mais

$$\tilde{\omega}'(\varepsilon) = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

c'est pourquoi $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ et, par conséquent, $\chi'(\varepsilon)$ sont positives pour $\varepsilon > 1$. Donc $\chi(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 1$ est une fonction croissante. Mais $\lim_{\varepsilon=1} \chi(\varepsilon) = 0$ donc

$$\log \frac{2\rho_2}{R_1 + R_2} > 0,$$

ou bien

$$\rho_2 > \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Comme $\chi(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0$, de la formule (12) on tire

$$\chi(\varepsilon) = \frac{1}{24}\gamma^2 + \dots,$$

et, par suite,

$$\frac{2\rho_2}{R_1 + R_2} = e^{\frac{1}{24}\gamma^2 + \dots} = 1 + \frac{1}{24}\gamma^2 + \dots,$$

d'où

$$\rho_2 = \frac{R_1 + R_2}{2} \left[1 + \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1} \right)^2 \right],$$

en négligeant, dans l'expression de ρ_2 , des puissances de $(R_1 - R_2)/R_1$ supérieures à la seconde.

Nous pouvons donc conclure que le cercle qui sépare la région tendue de la région comprimée en chaque base a pour rayon la moyenne arithmétique des rayons extrêmes, à moins de quantités du second ordre.

6. Des équations (9) et (11) il résulte que

$$\psi(r) = 2 \log \frac{r}{\rho_2},$$

donc, pour la formule (II),

$$P_\omega = \frac{2\alpha LK}{L + 2K} \log \frac{r}{\rho_2}$$

et, en introduisant le module d'élasticité, le coefficient de POISSON et l'ouverture angulaire θ de la fissure radiale (voir § 4)

$$(II') \quad P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \log \frac{r}{\rho_2}.$$

On tire de là que, pour maintenir planes et à la distance primitive les deux bases du cylindre, il faut les comprimer dans la région comprise entre les cercles de rayons R_2 et ρ_2 et les étirer dans la région comprise entre les cercles de rayons ρ_2 et R_1 .

De la formule (10) on déduit que la somme algébrique de toutes les forces agissant sur une bande radiale prise sur une des bases est égale à zero; c'est-à-dire que la résultante des tensions a la même intensité que la résultante des pressions. L'ensemble donc de toutes les forces agissant sur la bande radiale équivaut à un couple.

En posant $r = \rho_2 + \xi$ nous aurons $|\xi/\rho_2| < 1$ étant $\rho_2 > (R_1 + R_2)/2$ (voir § 5). Il sera donc possible de développer la fonction $\log(r/\rho_2)$ en série, suivant les puissances de ξ/ρ_2 et la formule (II') s'écrira

$$P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \left(\frac{\xi}{\rho_2} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\rho_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\xi^3}{\rho_2^3} + \dots \right).$$

Si l'épaisseur du cylindre est petite, en négligeant les termes du second ordre, nous aurons

$$(II'') \quad P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\xi}{\rho_2}.$$

III.

1. Supposons maintenant de ne plus soumettre les deux bases du cylindre aux actions P_{ω} mais de les laisser libres et voyons la forme que prendra le cylindre en vertu de la seule distorsion, quand aucune force extérieure ne le sollicite.

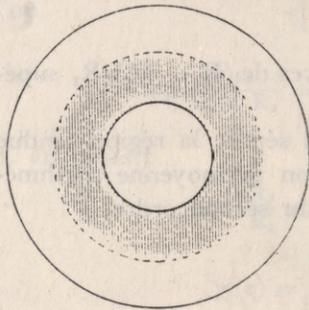


Fig. 3.

Pour cet effet, il suffira d'appliquer les principes généraux que nous avons énoncés dans le Chapitre II, Article I, paragraphe 2, c'est-à-dire qu'il faudra superposer à la déformation (1) celle due aux forces $-P_{\omega}$ qui agissent sur les bases du cylindre. Mais la déformation (1) conserve au corps la forme cylindrique de révolution, il suffira donc d'examiner la déformation que subit un cylindre sujet, sur les deux bases, aux actions $-P_{\omega}$.

La figure 3 représente une des bases du cylindre.

Le grand cercle et le petit cercle sont les deux bords de la base: le cercle pointillé est la ligne de séparation de la région qui doit être tendue par les

forces $-P_\omega$ (elle a été hachée) d'avec la région qui doit être comprimée par les forces $-P_\omega$ (elle a été laissée en blanc).

Considérons maintenant (fig. 4) une tranche longitudinale ABCDEFGH infiniment mince du cylindre creux et imaginons-la détachée du reste du corps. D'après ce que nous avons trouvé dans le paragraphe 6 de l'article précédent la somme des compressions agissant sur la base supérieure ABCD sera égale à la somme des tensions; il en sera de même pour la base inférieure EFGH, donc les deux bases seront respectivement sollicitées par les couples $P_1, -P_1; P_2, -P_2$.

Il s'ensuit que la tranche fléchira de manière que les génératrices de la face DCGH se courberont et prendront une forme concave. Les génératrices de la face ABFE se courberont également mais en devenant convexes. En même temps, la région de la base supérieure ABCD adjacente à AB se soulèvera et la région de la même base adjacente à CD s'abaissera. L'inverse aura lieu pour la base inférieure.

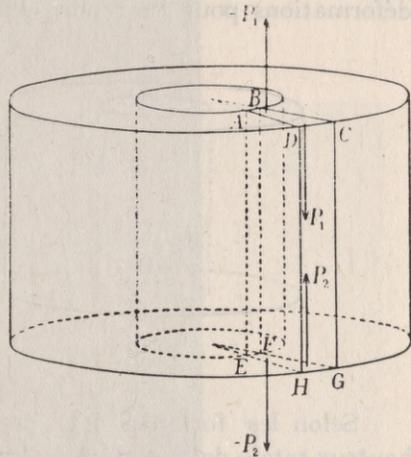


Fig. 4.

Il est facile de calculer, au moyen des formules ordinaires de la flexion, le soulèvement, l'abaissement et la flèche de flexion relative à la tranche considérée. Reportons-nous au plan normal à l'axe conduit par le milieu de l'axe même; nous aurons:

Soulèvement des points de la base supérieure:

$$(13) \quad w' = -\frac{1}{E} (-P_\omega) \frac{h}{2} = -\frac{\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2h} \frac{\xi h}{2\rho_2};$$

Abaissement des points de la base inférieure:

$$(13') \quad w'' = -\frac{1}{E} (-P_\omega) \frac{h}{2} = -\frac{\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\xi h}{2\rho_2};$$

Flèche de flexion:

$$(14) \quad g = -\frac{P_\omega}{E\xi} \frac{h^2}{8} = \frac{\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{h^2}{8\rho_2};$$

où h représente la hauteur du cylindre.

On aurait le même résultat pour toute autre bande longitudinale infiniment mince du cylindre, en la supposant séparée du reste du corps. La liaison mutuelle des différentes bandes changera lesdits soulèvements et abaissements en les rapetissant et surtout en diminuant la flèche de flexion; mais la marche de la déformation restera évidemment inaltérée et les cor-

rections à faire dans les valeurs trouvées seront d'autant plus petites que le cylindre sera plus bas et que l'épaisseur, relativement aux rayons des bases, sera plus petite ⁽¹⁵⁾.

Le cylindre primitif, représenté par la figure 5, prendra donc, en vertu de la distorsion, la forme représentée par la figure 6, où l'on a exagéré les déformations pour les rendre plus visibles.

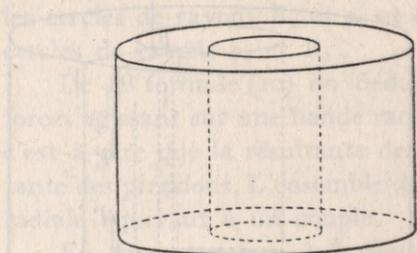


Fig. 5.

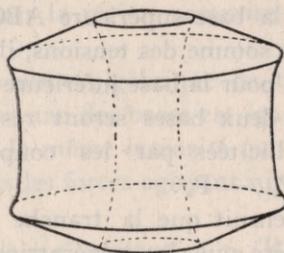


Fig. 6.

Selon les formules (13), (13'), (14) et en prenant $\rho_2 = (R_1 + R_2)/2$ la hauteur totale de la surface latérale qui limite le solide intérieurement serait, après la distorsion, égale à

$$h + \frac{\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h,$$

et la hauteur totale de la surface latérale qui limite le solide extérieurement deviendrait

$$h - \frac{\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h.$$

D'où la différence de hauteur des deux surfaces qui limitent intérieurement et extérieurement le cylindre serait

$$(15) \quad H = \frac{2\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h,$$

et la flèche de flexion serait

$$(16) \quad g = \frac{\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{h^2}{4(R_1 + R_2)}.$$

2. J'ai fait l'expérience avec un cylindre creux de caoutchouc des dimensions suivantes:

$$R_1 = 28^{\text{mm}} \quad , \quad R_2 = 12^{\text{mm}} \quad , \quad h = 28^{\text{mm}},$$

et j'ai fait une coupure radiale de $68^{\circ}30'$.

(15) On peut obtenir ce résultat avec beaucoup de facilité; il suffit de mettre en équation le problème moyennant les équations de l'élasticité transformées en coordonnées cylindriques.

Après la distorsion toutes les particularités prévues par le calcul se manifestèrent; la différence de hauteur des surfaces qui limitaient intérieurement et extérieurement le solide fut mesurée et trouvée égale à $2^{\text{mm}},1$;

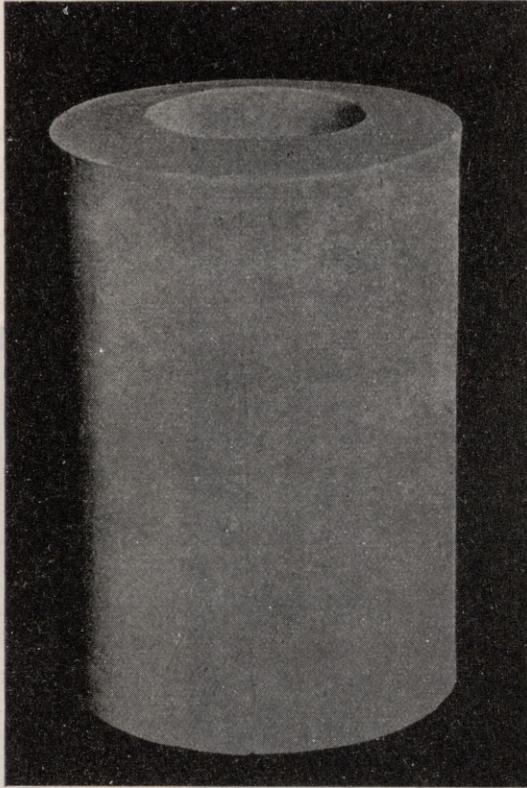


Fig. 7.

la longueur de la flèche de flexion était de $0^{\text{mm}},35$. Après avoir fait le calcul au moyen des formules (15) et (16) et pris $\eta = 1/2$, j'obtins

$$H = \text{différence de hauteur} = 2^{\text{mm}},6,$$

$$g = \text{flèche de flexion} = 0^{\text{mm}},53.$$

L'accord entre le calcul et les mesures directes est donc très satisfaisant.

M. JONA, ingénieur de Milan, eut l'amabilité de faire préparer à l'établissement PIRELLI un cylindre creux de caoutchouc des dimensions suivantes:

$$R_1 = 5^{\text{cm}} \quad , \quad R_2 = 2^{\text{cm}},95 \quad , \quad h = 13^{\text{cm}}.$$

Il y fit exécuter une coupure radiale d'une largeur angulaire de 78° . Comme la soudure tendait à s'ouvrir, pour fixer la forme du solide déformé, j'en fis prendre une empreinte en plâtre, laquelle est reproduite photographiquement dans la figure 7.

Ce solide montre manifestement toutes les particularités que le calcul avait prévues, c'est-à-dire l'allongement intérieur, le raccourcissement

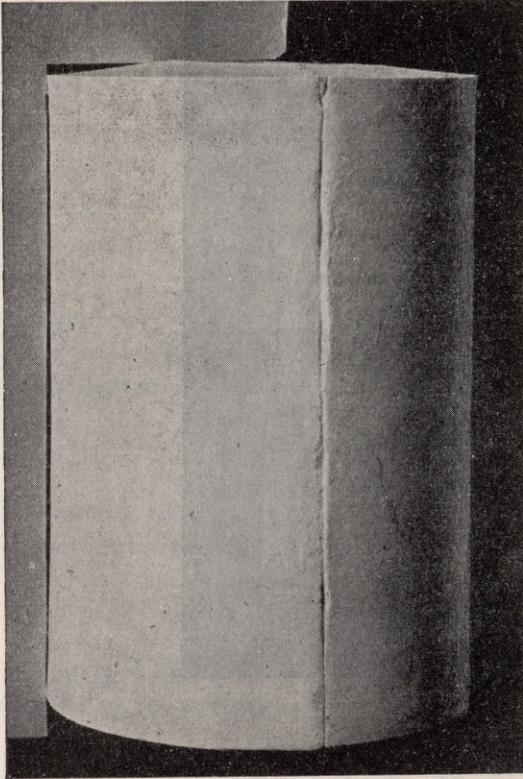


Fig. 8.

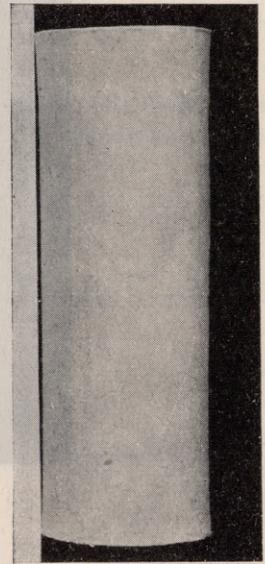


Fig. 9.

extérieur et la flexion latérale comme l'indique la figure 8. Pour rendre plus évident le phénomène on a fait la photographie du cylindre avec une équerre appliquée contre lui du côté gauche. Dans les figures 7 et 8 on voit très bien l'endroit où furent exécutées la coupure et par suite la soudure.

La figure 9 représente la photographie de l'empreinte en plâtre de l'âme du cylindre. Ayant placé du côté gauche une règle, la courbure intérieure devient clairement visible.

A cause de la grande hauteur de ce cylindre par rapport aux rayons de la base les formules (15) et (16) ne sont pas applicables à ce cas.

CHAPITRE VI.

Cylindres creux de révolution. Distorsion d'ordre 2 (*).

I.

1. Dans le Chapitre précédent j'ai tout d'abord indiqué (Art. I, § 1) les conditions essentiellement différentes qui se présentent quand, dans un cylindre creux, on opère une distorsion due à une coupure radiale (distorsion d'ordre 6) ou à une coupure uniforme (distorsion d'ordre 1). J'ai ensuite approfondi le premier cas et j'ai montré que le corps, après la distorsion, ne conserve pas sa forme cylindrique: le bord intérieur des deux bases s'enfle en se soulevant, tandis que le bord extérieur se contracte et la partie moyenne du cylindre se rétrécit (voir les figures 6, 7, 8, 9 du Chapitre précédent). Les déformations qui se produisent dans le cas d'une coupure uniforme sont plus sensibles et plus singulières encore, puisque le corps cesse d'être symétrique après la distorsion. Je me propose de développer ce cas dans le présent Chapitre, bien que les calculs soient assez compliqués. Comme dans le cas précédent les résultats prévus par le calcul sont si bien confirmés par l'expérience que le cas lui-même constitue un exemple instructif dans le domaine de l'élasticité. En effet la seule intuition, sans être guidée par le calcul ou par les expériences, n'aurait pas pu faire prévoir, même d'une manière grossière et qualitative, quelle est la déformation produite dans le corps par la distorsion.

On arrive ainsi au très curieux résultat suivant: si dans un anneau symétrique ayant la forme d'un cylindre creux on supprime une tranche, il est impossible, en ressoudant les faces de la coupure, de conserver à l'anneau une forme cylindrique. En effet, si l'on fait une coupure radiale, le corps prend la forme indiquée à la figure 6 du Chapitre précédent; si la coupure est uniforme, le corps cesse d'être symétrique et prend la forme indiquée à la figure 15 du présent Chapitre.

Moyennant une coupure qu'on peut considérer comme résultant d'une coupure ou d'un coin radial et d'une coupure ou d'un coin à faces parallèles on arrive toujours à un état de déformation où la symétrie par rapport à l'axe est perdue.

Dans la pratique les forgerons qui doivent restreindre un tube en lui ôtant une tranche opèrent tout d'abord une coupure radiale: ensuite, avant de rapprocher les faces de la coupure, ils en liment la partie intérieure de façon à les faire appliquer exactement l'une contre l'autre et cela avec le

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi*. «Rend. Acc. Lincei», s. 5^a, vol. XIV₂, 1905, pp. 329-342. [N. d. R.]

plus petit effort possible ⁽¹⁶⁾. Finalement, ils les soudent. Mais, alors, la coupure n'étant plus radiale, le tube ne conserve pas la forme d'un solide de révolution.

2. Reprenons la figure 2 du Chapitre précédent et cherchons les formules relatives à la fissure uniforme.

Supposons que l'axe z soit l'axe de symétrie et que la coupure ait été exécutée suivant le plan xz , du côté positif de l'axe x . En faisant, dans les formules du paragraphe 2 de l'Article III du Chapitre II,

$$l = n = p = q = r = 0,$$

nous aurons

$$(1) \quad u = -\frac{1}{2} \frac{m}{2\pi} \log(x^2 + y^2) \quad , \quad v = \frac{m}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x}.$$

Ces formules correspondent à la coupure uniforme d'ampleur m . Cependant le corps sera sujet à des tensions superficielles qui s'équilibrent entre elles (voir Art. I du Chap. II).

Représentons respectivement par R_2 et R_1 le rayon intérieur et le rayon extérieur du cylindre creux qui constitue l'anneau. Par un calcul facile nous trouverons les six caractéristiques de la déformation et des tensions, lesquelles seront nulles sur les deux bases; tandis que les tensions unitaires agissant sur les surfaces latérales seront parallèles à l'axe x et respectivement égales à $Km/(\pi R_1)$ sur la surface extérieure et à $-Km/(\pi R_2)$ sur la surface intérieure.

Il faut maintenant éliminer ces tensions latérales. On peut opérer à ce but de la manière suivante: Faisons abstraction de la coordonnée z et, à la place du corps en question, substituons une lame élastique limitée par deux cercles de rayons R_2 et R_1 . Commençons par éliminer les tensions agissant sur la circonférence intérieure C_2 . Supposons pour cela que la lame ne soit pas limitée par la circonférence extérieure C_1 mais qu'elle s'étende indéfiniment dans toutes les directions, extérieurement à C_2 . Alors la question se présente d'une manière parfaitement analogue à un problème sur un milieu élastique extérieur à une sphère que j'ai résolu dans un

(16) Pour nous former une idée de la grandeur de ces actions, supposons que notre cylindre creux soit un anneau d'acier symétrique à section rectangulaire dont le diamètre moyen soit de 5^{cm} et l'épaisseur de 1^{cm}. Appliquons la formule (III) du Chapitre précédent en prenant $E = 19549$ (kg par millimètre carré; WERTHEIM) $\eta = 0,3$, $\rho = 2,5$, $s = 1$. Prenons également $\theta/2\pi = 1/360$ (en supposant que l'ampleur angulaire de la fissure radiale soit de 1°), $\xi = 0,5$ afin de calculer la pression dans les régions adjacentes à la surface extérieure. On obtiendra $F = 10,7$, c'est-à-dire que la pression ou la tension calculées seront de 10^{kg},7 par millimètre carré et pour chaque degré d'ampleur angulaire de la fissure radiale faite dans l'anneau. On obtient ces efforts quand on suppose les bases sollicitées par des actions qui les conservent planes et à la distance primitive. En calculant ces actions au moyen des formules (II'') du Chapitre précédent, on trouve qu'elles prennent aux bords des bases la valeur de 3^{kg},6 par millimètre carré.

cours donné à Pise en 1893 et que le professeur TEDONE⁽¹⁷⁾ a repris récemment.

En d'autre termes nous éliminerons les tensions en C_2 si nous composons les déplacements (1) avec les déplacements

$$(2) \quad \begin{cases} u' = \frac{m}{2\pi} \frac{L+3K}{L+2K} \left[\log r + \frac{L+K}{2(L+3K)} (r^2 - R_2^2) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} \right], \\ v' = \frac{m}{2\pi} \frac{L+K}{2(L+2K)} (r^2 - R_2^2) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

dans lesquels $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et L et K désignent les constantes de l'élasticité, comme dans les Chapitres précédents.

Mais en composant les tensions qui agissaient précédemment sur C_1 en vertu des déplacements (1), avec les tensions engendrées en C_1 par les déplacements (2), on trouve sur C_1 les tensions de composantes

$$\begin{aligned} & - \frac{mK(L+K)}{\pi(L+2K)} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^3} \cos 2\theta, \\ & - \frac{mK(L+K)}{\pi(L+2K)} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^3} \sin 2\theta, \end{aligned}$$

où $\theta = \text{arc tang } y/x$, c'est-à-dire θ représente l'angle que le rayon vecteur forme avec l'axe x .

Or ces dernières tensions peuvent être éliminées, ou par le moyen des déplacements

$$(3) \quad \begin{cases} u'' = \frac{2A}{4K(L+K)} [(3L+5K)y^2 + (L-K)x^2], \\ v'' = \frac{2A}{4K(L+K)} (L+3K)xy, \end{cases}$$

ou par les déplacements

$$(3') \quad \begin{cases} u''' = B \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}, \\ v''' = B \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

en choisissant convenablement les constantes A et B, ou par une combinaison linéaire des deux.

Nous pouvons maintenant nous servir du caractère arbitraire de cette combinaison linéaire pour que les déplacements résultants des déplacements représentés par les formules (1), (2), (3), (3') engendrent des tensions nulles non seulement sur C_1 mais aussi sur le cercle C_2 . De cette manière on arrive facilement aux formules

(17) « Comptes rendus du Cercle mathématique de Palerme », t. XVII, 1903, p. 259.

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log r + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} [(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2] \right\}, \\ V &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \text{arc tang} \frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right\}. \end{aligned} \right.$$

3. Si aux formules précédentes on ajoute

$$(I') \quad W = 0,$$

on obtient les composantes des déplacements dus à une distorsion engendrée par une fissure uniforme d'ampleur m dans l'hypothèse que les deux bases soient sollicitées par des forces capables de les conserver planes et à leur distance primitive.

Il est facile de calculer les caractéristiques des tensions qui correspondent à ces déplacements. Elles sont données par les formules suivantes:

$$(4) \quad t_{11} = \frac{mK}{\pi} \left\{ \frac{L}{L+2K} x \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right) + \frac{K}{L+2K} \frac{\partial \log r}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left[2x \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} \right] \right. \\ \left. + \frac{L-K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} x \right\},$$

$$(5) \quad t_{22} = \frac{mK}{\pi} \left\{ \frac{L}{L+2K} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right) + \frac{x}{x^2 + y^2} \right. \\ \left. + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left[2y \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^3 \log r}{\partial x \partial y^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} x \right\},$$

$$(6) \quad t_{33} = \frac{mKL}{\pi(L+2K)} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right),$$

$$(7) \quad t_{12} = \frac{mK}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \frac{\partial \log r}{\partial y} - \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \right. \\ \left. \times \left[2y \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + 2 \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^2 \partial y} \right] \right. \\ \left. + \frac{2(L+K)}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} y \right\},$$

$$(8) \quad t_{23} = t_{31} = 0.$$

De ces formules on tire

$$t_{11}x + t_{12}y = \frac{mK}{\pi} \frac{L+K}{L+2K} \frac{(r^2 - R_1^2)(r^2 - R_2^2)}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2},$$

$$t_{21}x + t_{22}y = \frac{mK}{\pi} \frac{L+K}{L+2K} \frac{(r^2 - R_1^2)(r^2 - R_2^2)}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y},$$

quantités qui s'annulent pour $r = R_1$, $r = R_2$. On vérifie ainsi que les actions extérieures s'annulent sur les surfaces latérales du cylindre creux.

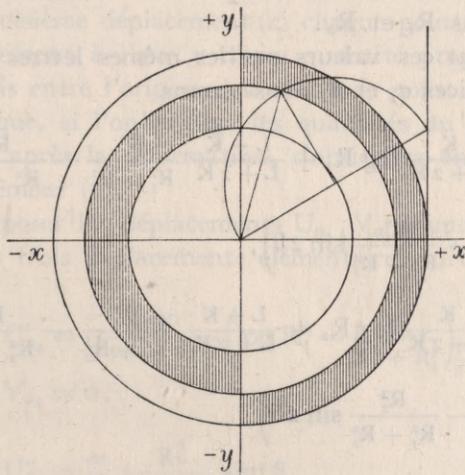


Fig. 10.

On a ensuite comme valeur de la dilatation cubique

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{mK}{\pi(L+2K)} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right).$$

Nous pouvons donc établir la division entre la partie dilatée et la partie comprimée du corps élastique.

Menons à cet effet la ligne

$$r = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}},$$

laquelle est la circonférence intermédiaire de la figure 10 comprise entre les deux circonférences extrêmes de rayons R_1 et R_2 . Traçons ensuite l'axe des y .

Ces deux lignes divisent la couronne circulaire en quatre régions que nous avons distinguées dans la figure 1 par des teintes claires et foncées. Les régions claires représentent les projections sur le plan xy des parties dilatées du corps élastique et les régions obscures les projections, sur le même plan, des parties comprimées.

Dans la figure on a indiqué la construction à faire pour obtenir la circonférence intermédiaire. Elle est tellement évidente qu'elle ne demande aucune explication.

II.

1. Passons maintenant à la détermination de la forme prise par le corps élastique après la distorsion en supposant toujours que les deux bases soient maintenues planes et à leur distance primitive.

Il suffira pour cela de voir comment se déforment les bases. Au moyen des formules (1) nous pouvons calculer les valeurs de U et V sur les circonférences σ_1 et σ_2 qui forment le contour primitif des deux bases et ont respectivement pour rayons R_1 et R_2 .

En représentant ces valeurs par les mêmes lettres U et V auxquelles on a ajouté les indices σ_1 et σ_2 nous aurons

$$U_{\sigma_1} = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{K}{L+2K} \log R_1 + \frac{L+K}{L+2K} \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \cos 2\theta \right),$$

$$V_{\sigma_1} = \frac{m}{2\pi} \left(\theta - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \sin 2\theta \right),$$

$$U_{\sigma_2} = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{K}{L+2K} \log R_2 + \frac{L+K}{L+2K} \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} - \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \cos 2\theta \right),$$

$$V_{\sigma_2} = \frac{m}{2\pi} \left(\theta - \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \sin 2\theta \right).$$

Les déplacements U_{σ_1} et V_{σ_1} peuvent être décomposés en trois déplacements élémentaires (a), (b), (c) ayant respectivement pour composantes

$$(a) \quad \begin{cases} U'_{\sigma_1} = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log R_1 - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \right), \\ V'_{\sigma_1} = 0, \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} U''_{\sigma_1} = \frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \sin^2 \theta, \\ V''_{\sigma_1} = -\frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \sin \theta \cos \theta, \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} U'''_{\sigma_1} = 0, \\ V'''_{\sigma_1} = \frac{m}{2\pi} \theta. \end{cases}$$

Le premier déplacement (a) consiste dans une translation parallèle à l'axe x , et par suite il ne change pas la forme de la circonférence σ_1 .

On a ensuite

$$U''_{\sigma_1} \cos \theta + V''_{\sigma_1} \sin \theta = 0,$$

$$U''_{\sigma_1} \sin \theta - V''_{\sigma_1} \cos \theta = \frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \sin \theta.$$

Cela prouve que par le second déplacement (*b*) chaque point de la circonférence σ_1 se déplace tangentiellement à la circonférence même de la quantité

$$\frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \theta.$$

Dans ce second déplacement les points de la circonférence σ_1 restent toujours sur elle, à moins de quantités du second ordre qu'on peut négliger.

En vertu du troisième déplacement (*c*) chaque point de la circonférence σ_1 se meut parallèlement à l'axe y d'une quantité proportionnelle à l'arc du cercle σ_1 , compris entre l'origine des arcs et le point lui-même.

On voit donc que, si l'on néglige les quantités du deuxième ordre, la forme du cercle σ_1 , après la déformation, s'obtiendra en ne tenant compte que du seul déplacement (*c*).

On peut décomposer les déplacements $U_{\sigma_2}, V_{\sigma_2}$ d'une manière analogue. On obtient ainsi les trois déplacements élémentaires suivants:

$$(a') \quad \begin{cases} U'_{\sigma_2} = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log R_2 - \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right), \\ V'_{\sigma_2} = 0, \end{cases}$$

$$(b') \quad \begin{cases} U''_{\sigma_2} = \frac{m}{\pi} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin^2 \theta, \\ V''_{\sigma_2} = -\frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \theta \cos \theta, \end{cases}$$

$$(c') \quad \begin{cases} U'''_{\sigma_2} = 0, \\ V'''_{\sigma_2} = \frac{m}{2\pi} \theta. \end{cases}$$

Pour obtenir la forme prise par σ_2 , après la déformation, on pourra négliger les déplacements (*a'*) et (*b'*) et ne tenir compte que du troisième déplacement (*c'*) parfaitement analogue au déplacement précédent (*c*).

Les deux déplacements (*a*) et (*a'*) consistent en deux translations. Leur différence sera

$$\delta = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right).$$

En posant $(R_1 - R_2)/R_1 = \gamma$ et en développant l'expression précédente suivant les puissances de γ on obtient

$$\delta = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right).$$

c'est-à-dire en introduisant le module d'élasticité E et le coefficient de

POISSON η (voir Chapitre précédent, § 6) on a

$$\delta = \frac{m}{2\pi} \frac{(1-2\eta)}{2(1-\eta)} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right);$$

donc, si l'épaisseur de l'anneau est petite relativement à son rayon extérieur, la différence δ des deux translations est négligeable.

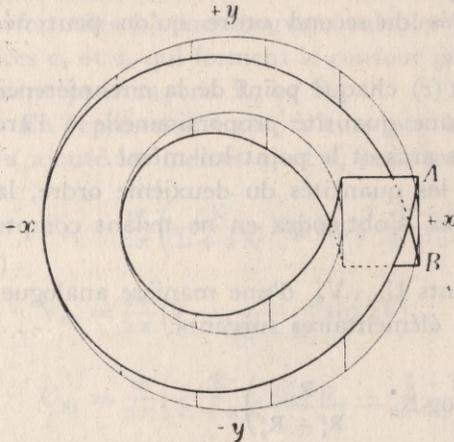


Fig. 11.

Dans la figure 11 nous avons construit le contour des bases déformées, en prenant comme origine des arcs des deux cercles σ_1 et σ_2 leur point de rencontre avec le côté négatif de l'axe x . Les deux circonférences représentées par des lignes minces sont les contours primitifs des deux bases. Les deux lignes plus fortes représentent les contours des bases déformées. Les traits rectilignes sont les déplacements que les points du contour ont subis en vertu des déplacements (c) et (c'). Le trait AB représente l'ampleur de la coupure. La différence δ a été négligée.

2. La formule (6) donne la caractéristique t_{33} . En introduisant le module d'élasticité et le coefficient de POISSON elle s'écrira

$$t_{33} = -\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1 + R_2} \right).$$

En tenant compte de cette formule et des précédents résultats nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Un cylindre creux de révolution, qui a subi une distorsion (d'ordre 2) due à une fissure uniforme, conserve ses bases planes et à leur distance primitive en les assujettissant à des forces normales données par

$$P = -\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 - R_2^2} \right),$$

où l'on envisage comme positives les actions dirigées vers l'intérieur du corps et comme négatives celles dirigées dans le sens opposé. En même temps les bases se déforment selon les lois établies précédemment (voir fig. 11).

La figure 10 peut donc s'interpréter d'une autre manière. En supposant que la couronne circulaire représente une des bases dans sa forme primitive, la région foncée représentera la partie de la base, qui, après la distorsion, devra être comprimée du côté extérieur et la région claire indiquera la partie qui devra être étirée de l'extérieur afin de conserver les bases planes et à la distance primitive.

III.

1. La figure 12 représente le cylindre avant la distorsion et la figure 13 le même cylindre après la distorsion quand les bases sont conservées planes et à la distance primitive.

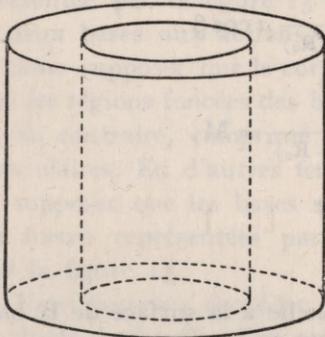


Fig. 12.

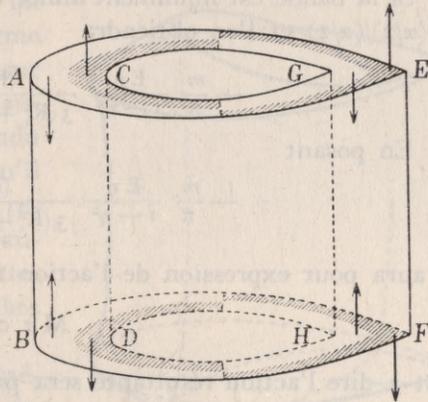


Fig. 13.

Les bases elles-mêmes sont divisées en quatre régions respectivement claires et foncées. Les régions foncées sont celles comprimées de l'extérieur et les régions claires celles tendues. Le sens de ces actions extérieures s'obtient en intervertissant la direction des flèches tracées dans la figure.

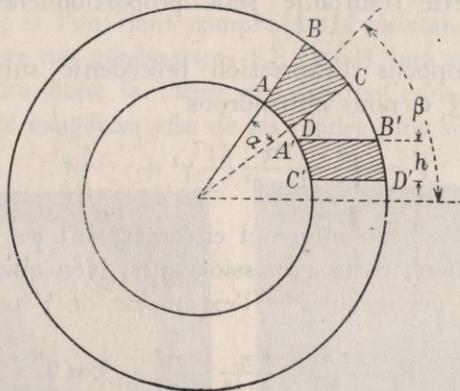


Fig. 14.

Il est facile de composer ces actions agissant sur les bases.

Considérons tout d'abord sur une des bases une bande radiale ABCD d'une ouverture angulaire α et dont la ligne médiane forme avec l'axe x un angle β (voir fig. 14).

Calculons la résultante des actions P agissant sur la bande ABCD.

Par un simple calcul on obtient

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2 a}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} \cos \beta \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right),$$

où a représente la surface de la bande.

Si la bande est infiniment mince on pourra substituer l'unité au rapport $\sin(\alpha/2)/(\alpha/2)$ et l'on obtiendra

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} a \cos \beta.$$

En posant

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} = M,$$

on aura pour expression de l'action résultante

$$M a \cos \beta,$$

c'est-à-dire l'action résultante sera proportionnelle à la surface de la bande infiniment mince et au cosinus de l'angle qu'elle forme avec l'axe x .

Considérons maintenant dans la couronne circulaire une bande A'B'C'D' d'épaisseur h , comprise entre deux droites parallèles à l'axe x . La résultante des forces P agissant sur A'B'C'D' sera

$$-\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \left(\log \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) h$$

c'est-à-dire que cette résultante sera proportionnelle à l'épaisseur de la bande.

Si nous développons l'expression précédente suivant les puissances de γ (cfr. Art. II, § 1) nous obtiendrons

$$-\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right) h.$$

En supposant l'anneau mince et en négligeant les puissances de γ supérieures à la première, cette expression aussi bien que celle de M deviennent des quantités négligeables et l'expression de P peut s'écrire

$$P = \frac{2m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{\xi}{R_1^2 + R_2^2} \cos \theta,$$

le rayon vecteur étant

$$r = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}} + \xi,$$

et appelant θ l'angle que le rayon vecteur forme avec l'axe x .

Dans cette hypothèse chaque bande radiale des bases peut être regardée approximativement comme sujette à un couple.

2. Cherchons maintenant la forme que prend le cylindre quand on n'assujettit plus les bases aux actions P , mais qu'on les laisse libres; c'est-à-dire cherchons la forme que prend le cylindre en vertu de la seule distorsion quand aucune force extérieure ne le sollicite.

Il suffira pour cela d'appliquer les principes que nous avons établis au Chapitre II, Article I, paragraphe 2 (voir aussi le Chapitre précédent, Art. III) et d'étudier ensuite la déformation d'un corps ayant, à l'état naturel, la forme représentée par la figure 13 et sujet sur les deux bases aux actions — P . Il faudra donc supposer que le corps est tendu dans les régions foncées des bases et qu'il est, au contraire, comprimé dans les régions claires. En d'autres termes, il faudra supposer que les bases sont sujettes aux forces représentées par les flèches dans la figure 13.

Nous pouvons procéder ici de la même façon qu'au Chapitre précédent (cfr. Art. III) et supposer que le corps soit divisé en tranches radiales. Les couples agissant sur les bases feront fléchir les tranches situées à gauche de manière à soulever le bord intérieur en C et l'abaisser en D (voir fig. 13) tandis qu'elles abaisseront le bord extérieur en A et le soulèveront en B . En même temps les génératrices AB se courberont et prendront une forme concave, tandis que les génératrices CD deviendront convexes. Le contraire se vérifiera à droite; mais, si l'on tient compte de la résistance présentée par l'arête EF , la courbure des génératrices EF et GH sera moins sensible.

Le corps prendra donc la forme représentée dans la figure 15 où les déformations ont été exagérées afin de les rendre plus visibles.

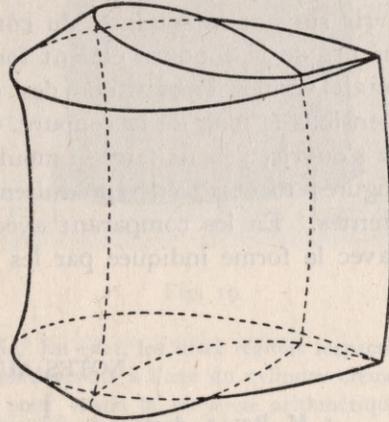


Fig. 15.

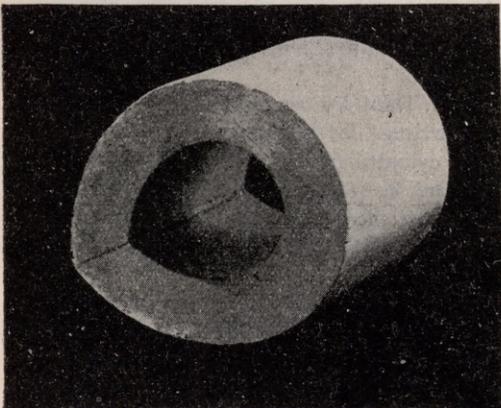


Fig. 16.

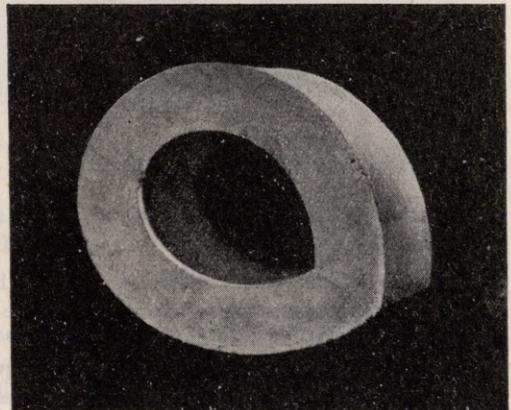


Fig. 17.

Grâce à l'amabilité de M. JONA, ingénieur de la Maison Pirelli de Milan, j'ai pu confronter les résultats du calcul et de l'expérience.

Il me procura un gros cylindre creux de caoutchouc de $7^{\text{cm}},7$ de hauteur environ et dont les rayons, intérieur et extérieur, étaient respectivement de $2^{\text{cm}},95$ et 5^{cm} ; il fit couper dans le cylindre une tranche à faces parallèles de l'épaisseur de $2^{\text{cm}},3$ et fit souder ensuite les faces de la fente. Le cylindre fut lié fortement au moyen d'une ficelle et quand on le délia il tendit à s'ouvrir suivant la soudure, du côté intérieur, tandis que les deux bords extérieurs de la soudure étaient fortement comprimés l'un contre l'autre. Ainsi était vérifiée l'exactitude des prévisions du calcul sur la distribution des tensions le long de la coupure. Comme le cylindre laissé à lui-même tendait à s'ouvrir, j'en fis faire le moule en plâtre afin d'en conserver la forme. Les figures 16 et 17 en reproduisent les photographies en deux positions différentes. En les comparant avec la figure 15 on voit leur parfaite analogie avec la forme indiquée par les calculs.

NOTES AUX CHAPITRES V ET VI

1. M. ROLLA, docteur en sciences physiques, a cherché à vérifier les résultats trouvés dans les Chapitres précédents. Il s'est proposé de trouver une méthode de vérification qu'on pourrait montrer dans un cours de leçons. A cet effet, il a employé une méthode optique.

M. ROLLA a fait ses recherches dans le laboratoire de Physique de l'Université de Gênes dirigé par M. le professeur GARBASSO, et il les a publiées dans les « Comptes rendus de l'Académie des Lincei » (t. XVI, 1^{er} semestre 1907). Nous allons exposer dans cette Note les recherches de M. ROLLA.

La substance choisie fut la gélatine et la déformation fut déterminée en observant la biréfringence produite, que l'on pouvait compenser par une méthode bien connue, avec une lame de la même substance déformable d'une manière connue.

2. Dans les deux Chapitres précédents, j'ai envisagé les distorsions d'ordre 6 et 2 d'un cylindre creux de révolution et j'ai comparé les résultats du calcul avec ceux de l'expérience. La méthode optique permet à son tour d'établir la comparaison, mais dans

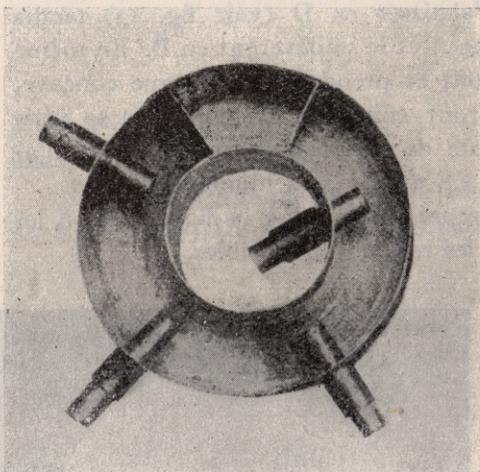


Fig. 18.

des conditions plus semblables à l'hypothèse du calcul.

La gélatine, tout d'abord, fut coulée dans un moule cylindrique en fer-blanc haut de 6^{cm} et dont le rayon extérieur est de 5^{cm} et l'intérieur de 2^{cm} . Le moule avait une fissure radiale d'environ 56° et était muni de quatre petits cylindres mobiles en cuivre jaune, rangés de manière à pouvoir obtenir dans le cylindre de gélatine solidifiée quatre trous pénétrant jusqu'à la moitié de son épaisseur. Trois de ces trous doivent s'ouvrir sur la face extérieure de cylindre et le quatrième sur la face intérieure (fig. 18).

La position et la direction des trous sont calculées de façon que, les faces de la fente ⁽¹⁸⁾ une fois soudées, deux des trous extérieurs soient en ligne droite et que le troisième corresponde à celui de l'intérieur.

Aux bases du cylindre, après avoir soudé la fissure, on voit clairement (fig. 19) les déformations que mes calculs avaient prévues.

Si maintenant on soude soigneusement les deux bases sur toute leur surface à deux plateaux de bois, de manière qu'elles restent planes et à la distance primitive, les phénomènes de double réfraction accidentelle doivent apparaître.

En effet, à la lumière rouge, entre deux nicols croisés, on observe facilement que la lumière, à travers les deux trous extérieurs, ne s'éteint pas et n'a même pas un minimum d'intensité. Au contraire, si l'on observe la lumière à travers le trou extérieur et son correspondant intérieur, la gélatine se montre isotrope. En défonçant un des trous, c'est-à-dire en observant à travers un seul trou, au moyen de l'analyseur, la lumière polarisée, la biréfringence revient.

Tout ceci est parfaitement conforme à la théorie. En effet, les deux régions respectivement comprimées et dilatées sont symétriques, relativement à l'axe du cylindre creux, et elles sont séparées par un cylindre coaxial ayant pour rayon la moyenne arithmétique

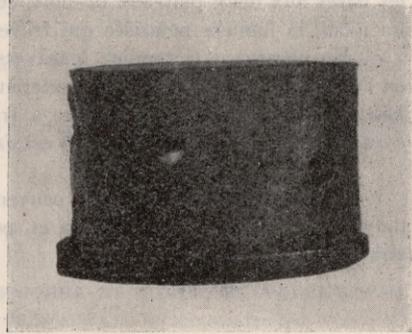


Fig. 19.

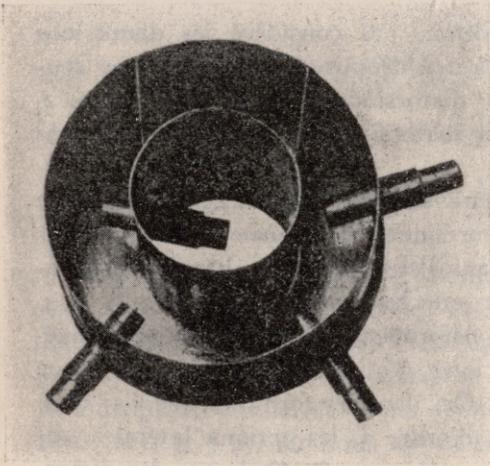


Fig. 20.

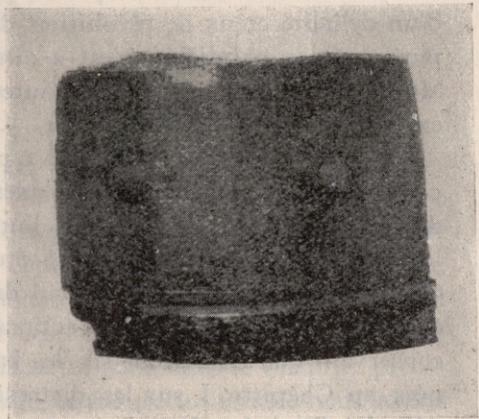


Fig. 21.

des rayons extrêmes du cylindre primitif. La nature de la déformation peut être reconnue à l'aide de la méthode du paragraphe 2, mais elle se montre toujours conforme à la déformation prévue.

(18) Pour faire la soudure, on enduit les faces de la coupure d'un peu de gélatine fondue et on les fait ensuite adhérer, par un moyen quelconque, par exemple en y appuyant quelque objet, jusqu'à ce que la gélatine soit solidifiée. L'adhésion s'opère rapidement, étant donnée la grande viscosité de la gélatine préparée selon la méthode indiquée au paragraphe 2.

3. L'expérience, dans le cas de la coupure uniforme, est tout à fait semblable à celle que nous venons de décrire, quoique les résultats soient différents. Le moule (fig. 20) a une fissure de 6^{cm} et quatre petits cylindres disposés comme précédemment. Après la soudure des faces de la fente, le cylindre prend la forme représentée par la figure 21.

La distribution des tensions et des compressions se déduit immédiatement en soudant les bases aux deux plateaux de bois, comme dans le cas précédent, et en observant, avec un nicol, la lumière polarisée qui traverse les différentes régions du cylindre.

En observant la lumière à travers les trous extérieurs, la gélatine se montre isotrope; en l'observant à travers un trou extérieur et un intérieur, elle se montre biréfringente au plus haut degré; enfin, en l'observant à travers un seul trou, la biréfringence reste toujours très évidente. Dans ce dernier cas, il est facile d'établir le signe de la déformation.

4. Les expériences décrites peuvent être rendues visibles à un nombreux auditoire au moyen d'un appareil de projection et, pour cette raison, conviennent très bien aux démonstrations des cours.

CHAPITRE VII.

Cylindre creux de révolution. Distorsions d'ordre 1, 3, 4, 5 (*).

I.

1. Dans les deux Chapitres précédents, j'ai considéré les distorsions d'un cylindre creux de révolution dues à une coupure radiale et à une coupure à faces parallèles, c'est-à-dire les distorsions d'ordre 6 et d'ordre 2. Maintenant, pour considérer toutes les distorsions possibles, nous devons examiner celles d'ordre 1, 3, 4, 5.

Mais les distorsions d'ordre 1 peuvent être ramenées à celles d'ordre 2 par un simple changement d'axes coordonnés. De même, les distorsions d'ordre 4 et 5 se transforment l'une dans l'autre par un changement analogue d'axes. Il ne reste donc à étudier que les distorsions d'ordre 3 et 4. Observons d'abord que le calcul de la déformation du cylindre a été exécuté en éliminant toutes les actions le long des surfaces latérales et en ne conservant que les actions sur les bases. Or, dans les formules que j'ai données au Chapitre I sur les distorsions d'ordre 3, les actions latérales ont déjà été éliminées. Il ne reste donc plus qu'à approfondir le cas des distorsions d'ordre 4.

Nous montrerons, dans ce Chapitre, que ce cas peut être ramené à celui de la distorsion d'ordre 2 ⁽¹⁹⁾. Nous pourrions alors dire que le problème de la déformation d'un cylindre creux de révolution qui a subi la distorsion la plus générale et qui n'est sollicité qu'aux bases est résolu.

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Nuovi studii sulle distorsioni dei solidi elastici*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5°, vol. XV, 1906 (1° sem.). [N. d. R.].

(19) La méthode suivie est analogue à celle employée par la professeur ALMANZI dans son Mémoire: *Sur la déformation des cylindres sollicités latéralement* (« Comptes rendus de la R. Acad. des Lincei », séances des 5 et 19 mai 1901).

Pour obtenir la forme que prend le cylindre, en vertu de la seule distorsion, sans qu'il existe de sollicitations extérieures, il faut éliminer les sollicitations aux bases. On peut faire cette élimination d'une manière approximative, comme nous avons déjà vu dans les cas que nous avons traités dans les Chapitres précédents.

2. Dans les formules trouvées à l'article III du Chapitre II, faisons successivement

$$l = n = p = q = r = 0$$

et

$$l = m = n = q = r = 0;$$

nous obtiendrons respectivement pour les seconds membres les valeurs suivantes:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} m \log(x^2 + y^2), \\ \frac{1}{2\pi} m \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x}, \\ 0, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} pz \log(x^2 + y^2), \\ \frac{1}{2\pi} pz \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x}, \\ \frac{1}{2\pi} py \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{4\pi} px \log(x^2 + y^2). \end{array} \right.$$

Les formules (1) donnent les déplacements correspondant à une distorsion d'ordre 2 et les formules (2) les déplacements correspondant à une distorsion d'ordre 4. Il est facile maintenant de reconnaître que les deux premières expressions (2) peuvent se tirer des expressions correspondantes (1) en multipliant ces dernières par $(p/m)z$. D'autre part, dans le Chapitre précédent (art. I, § 2), où nous avons envisagé la fissure uniforme, nous avons montré que, dans le cas d'un cylindre creux de révolution dont les surfaces latérales ont les rayons R_1 et R_2 , on peut éliminer les tensions le long des surfaces latérales en ajoutant aux expressions (1) respectivement les quantités

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' + Au'' + Bu''', \\ v' + Av'' + Bv''', \\ 0, \end{array} \right.$$

et en choisissant convenablement les constantes A et B. Cherchons donc à éliminer les tensions latérales dans le cas de la distorsion d'ordre 4 en

prenant les composantes des déplacements donnés par

$$(4) \quad \begin{cases} u = \frac{\rho}{m} z \left[-\frac{1}{4\pi} m \log(x^2 + y^2) + u' + Au'' + Bu''' \right] = zU, \\ v = \frac{\rho}{m} z \left(\frac{1}{2\pi} m \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + v' + Av'' + Av''' \right) = zV, \\ w = -\frac{1}{2\pi} \rho y \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{4\pi} \rho x \log(x^2 + y^2) + \Phi(x, y) = W + \Phi(x, y), \end{cases}$$

où $\Phi(x, y)$ est une fonction régulière, inconnue, qu'on doit déterminer.

En substituant ρ à la lettre m dans les formules (I) du dernier Chapitre, on obtiendra

$$(5) \quad \begin{cases} U = \frac{\rho}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log r + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} [(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2] \right\}, \\ V = \frac{\rho}{2\pi} \left[\operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right. \\ \quad \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right]. \end{cases}$$

Ensuite, en posant $r^2 = x^2 + y^2$, nous aurons

$$(5') \quad W = -\frac{1}{2\pi} \rho y \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{2\pi} \rho x \log r.$$

3. Si nous remplaçons les expressions (4) dans les équations indéfinies de l'équilibre élastique

$$K\Delta^2 u + (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$K\Delta^2 v + (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0,$$

$$K\Delta^2 w + (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

où

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

on voit aisément que les deux premières équations sont satisfaites. La troisième équation devient

$$(6) \quad K\Delta^2 \Phi + (L+K) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0.$$

Appelons $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12}$ les caractéristiques des tensions correspondant aux déplacements (4). On vérifie facilement que, suivant les surfaces latérales du cylindre creux, on a

$$t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz = 0,$$

$$t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz = 0,$$

$$t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz \\ = \left(U + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cos nx + \left(V + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cos ny,$$

où n désigne la normale au contour. Dès lors, afin que les déplacements (4) correspondent à des tensions latérales nulles, il sera nécessaire et suffisant que

$$(7) \quad \left(U + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cos nx + \left(V + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cos ny = 0.$$

II.

1. En vertu des formules (6) et (7) de l'article précédent, le problème que nous nous sommes proposé revient à déterminer la fonction $\Phi(x, y)$ dans l'espace ω compris entre deux circonférences σ_1 et σ_2 de rayons R_1 et R_2 ayant le centre dans l'origine. La fonction Φ satisfait, dans ce champ, à l'équation différentielle

$$(6') \quad \Delta^2 \Phi = - \frac{L+K}{K} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

et, au contour, à la condition

$$(7') \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{\partial W}{\partial n} - (U \cos nx + V \cos ny).$$

Or, par des calculs faciles, on transforme l'égalité (6') en

$$(6'') \quad \Delta^2 \Phi = - \rho \frac{L+K}{\pi(L+2K)} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right),$$

et les conditions (7') en

$$(7'') \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{L+3K}{L+2K} \log R_1 + 1 - \frac{K}{L+2K} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \cos \theta, & \text{sur } \sigma_1, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{L+3K}{L+2K} \log R_2 + 1 - \frac{K}{L+2K} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \cos \theta, & \text{sur } \sigma_2, \end{cases}$$

où

$$\cos \theta = \cos nx.$$

On vérifie facilement que

$$\int_{\omega} \Delta^2 \Phi d\omega + \int_{\sigma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma_2 = 0$$

quand on suppose la normale n dirigée vers l'intérieur du champ ω . En effet, les trois intégrales de la formule précédente sont nulles, prises séparément. Il s'ensuit que les conditions (6') et (7') sont compatibles entre elles.

2. Si l'on fait

$$(8) \quad \Phi = - \frac{\rho}{2\pi} \frac{L+K}{L+2K} \left(\log r - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) x + \Psi,$$

l'équation (6'') se transformera en

$$\Delta^2 \Psi = 0,$$

et les conditions (7'') deviendront respectivement

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\frac{\rho}{2\pi} \frac{K}{L+2K} \left(1 + 2 \log R_1 + \frac{3L+K}{2K} \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \right) \cos \theta, \quad \text{sur } \sigma_1,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\frac{\rho}{2\pi} \frac{K}{L+2K} \left(1 + 2 \log R_2 + \frac{3L+K}{2K} \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \right) \cos \theta, \quad \text{sur } \sigma_2.$$

Donc

$$\Psi = Mx + N \frac{x}{r^2},$$

M et N étant des constantes. Celles-ci peuvent se calculer facilement, et l'on trouve

$$(9) \quad \Psi = -\frac{\rho}{2\pi} \frac{Kx}{L+2K} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{L+K}{K} + \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2} \right) + \frac{R_1^2 R_2^2}{r} \left(\frac{\log R_1 - \log R_2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{3L+K}{2K} \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \right) \right],$$

d'où, en combinant les formules (5'), (8) et (9), on tire facilement la valeur de w .

3. En tenant compte des formules (4) et (5), nous aurons donc

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\rho z}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log r + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} [(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2] \right\}, \\ v &= \frac{\rho z}{2\pi} \left[\text{arc tang } \frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right], \\ w &= -\frac{\rho y}{2\pi} \text{arc tang } \frac{y}{x} \\ &\quad - \frac{\rho x}{2\pi} \frac{K}{L+2K} \left[\frac{3}{2} \frac{L+K}{K} + \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2} - \log r \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \left(\frac{\log R_1 - \log R_2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{3L+K}{2K} \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{L+K}{K} \frac{r^2}{R_1^2 + R_2^2} \right], \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$(B) \quad \begin{cases} t_{33} = \frac{\rho KL}{\pi(L+2K)} xz \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right), \\ t_{13} = 2K \left(U + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ t_{23} = 2K \left(V + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Ainsi se trouvent déterminées les tensions agissant sur les deux bases.

III.

1. Pour obtenir pratiquement une distorsion d'ordre 4, il suffit de faire, dans le cylindre creux, une fissure cunéiforme, comme il est indiqué dans la figure 22, de manière que les deux faces de la fissure se rencontrent suivant un rayon d'une des deux bases (axe x). Cela fait, on rapproche les deux faces de la fissure et on les soude. Si les deux faces de la fissure sont également inclinées sur la base, la forme que le solide déformé prend après la soudure est symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à la base.

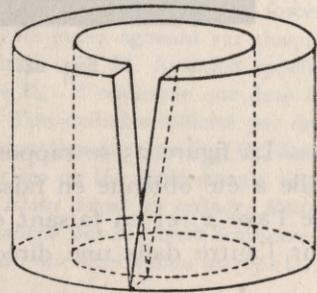


Fig. 22.

En s'appuyant sur les résultats que nous venons de trouver, et en employant des raisonnements analogues à ceux qui ont été faits dans les deux Chapitres précédents, on pourrait se faire une idée approchée de la forme que le cylindre prend lorsqu'il est soumis à la seule distorsion d'ordre 4, c'est-à-dire lorsqu'on suppose d'éliminer les tensions aux bases. Mais nous supprimons cette discussion, et nous nous bornons à donner (figg. 23 et 24) l'image d'un cylindre de caoutchouc qui a subi la distorsion d'ordre 4.

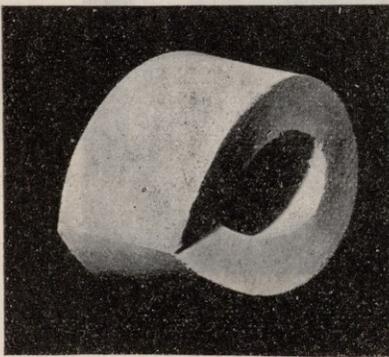


Fig. 23.

Les deux photographies (figg 23 et 24) du moule en plâtre du solide déformé vu de deux côtés différents montrent clairement la forme des deux bases. L'arête correspond à la soudure. Le cylindre de caoutchouc mesurait avant la distorsion 10^{cm},6 de diamètre extérieur, 6^{cm} de

diamètre intérieur et 5^{cm},9 de hauteur. L'ouverture angulaire de la fissure cunéiforme était d'environ 38°.

2. Pour compléter les images des six distorsions élémentaires d'un cylindre creux de révolution, nous reproduisons ici les photographies des moules en plâtre de trois gros tubes de caoutchouc qui ont subi respectivement les distorsions d'ordres 1, 3, 5.

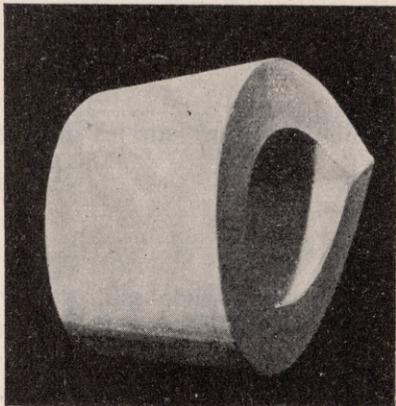


Fig. 24.



Fig. 25.

La figure 25 se rapporte à la distorsion d'ordre 1 d'un cylindre creux. Elle a été obtenue en faisant une coupure axiale (plan x, z du côté positif de l'axe x) et en faisant ensuite glisser les deux faces de la coupure l'une sur l'autre dans une direction normale à l'axe du cylindre (axe z).

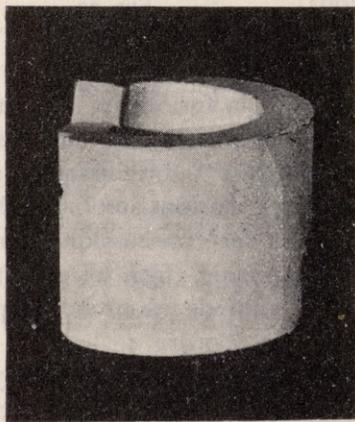


Fig. 26.

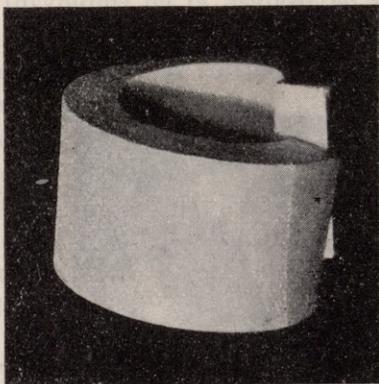


Fig. 27.

La figure 26 se rapporte à la distorsion d'ordre 3 (cf. Chap. I, Art. III, § 7). Le cylindre a été coupé comme dans le cas précédent et l'on a fait ensuite glisser les deux faces de la coupure l'une par rapport à l'autre dans le sens de l'axe du cylindre (axe z).

Enfin, la figure 27 représente un cylindre creux qui a subi une distorsion d'ordre 5. Après avoir fait la coupure, on a tourné les deux faces l'une par rapport à l'autre autour de la perpendiculaire (axe y) aux deux faces menée par le milieu de l'axe du cylindre. L'origine est donc située au milieu de l'axe du cylindre. Nous faisons observer que, pour rendre plus facile la construction du modèle de la distorsion d'ordre 4, nous avons choisi l'origine au centre d'une des bases.

NOTE AUX CHAPITRES V, VI, VII.

1. M. ALMANZI a consacré deux Notes⁽²⁰⁾ à l'étude des déformations régulières des cylindres, lorsque les déplacements sont polydromes.

L'axe z étant parallèle aux génératrices du cylindre, M. ALMANZI envisage, dans la première Note, le cas où les caractéristiques des tensions sont indépendantes de z , tandis que, dans la seconde Note, il envisage le cas général.

2. Soit un cylindre élastique à l'état naturel. Supposons de le déformer par des forces agissant sur les bases, et supposons aussi que, en composant les forces agissant sur chaque base, on trouve la force résultante nulle et le couple résultant nul. M. ALMANZI appelle alors la déformation du cylindre une déformation du type D_0 . Il remarque que dans le problème de DE SAINT-VENANT on trouve la déformation d'un cylindre sollicité par des forces données, agissant sur les bases en négligeant une déformation du type D_0 . Or, dans le problème de DE SAINT-VENANT, on envisage seulement le cas où les déplacements sont monodromes. M. ALMANZI se propose le problème suivant: *Étant donné un cylindre élastique homogène et isotrope multiplement connexe qui n'est pas sollicité par des forces extérieures, déterminer la déformation plus générale du cylindre en négligeant une déformation du type D_0 .*

3. Il commence par démontrer le théorème suivant: *Dans le cas envisagé on peut toujours représenter les caractéristiques des tensions par des fonctions linéaires de z .*

Prenons pour axes x et y les axes principaux d'inertie d'une section normale du cylindre; alors il démontre qu'on peut calculer, dans le cas envisagé, les caractéristiques des tensions par les formules

$$\begin{aligned} t_{11} &= z \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, & t_{31} &= -\eta \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y}, \\ t_{22} &= z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, & t_{32} &= -\eta \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\ t_{12} &= -z \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, & t_{33} &= \eta (z \Delta^2 U + \Delta^2 V), \end{aligned}$$

où η désigne le coefficient de POISSON (voir Chap. V) et U, V, W ne dépendent pas de z et sont des fonctions régulières et bi-harmoniques des variables x et y (voir Chap. II, Art. III, § 2).

Entre les fonctions U et W doivent exister les relations suivantes:

$$\frac{\partial \Delta^2 W}{\partial x} = (1 - \eta) \frac{\partial \Delta^2 U}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Delta^2 W}{\partial y} = -(1 - \eta) \frac{\partial \Delta^2 U}{\partial x}.$$

(20) *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici* (« Rend. d. R. Accademia dei Lincei », Gennaio 1907).

Sulle deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici (« Rend. d. R. Istituto Lombardo », 1907).

Soit σ la base du cylindre et supposons que le contour de cette base soit formé par plusieurs lignes fermées s_1, s_2, \dots, s_n . Sur chaque ligne s_i on doit avoir

$$U = a_i x + b_i y + c_i, \quad V = g_i x + h_i y + l_i,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial (a_i x + b_i y + c_i)}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\partial (g_i x + h_i y + l_i)}{\partial \nu},$$

$$W = \eta (a_i y - b_i x + k_i),$$

où les quantités $a_i, b_i, c_i, g_i, h_i, l_i$ sont des constantes et ν désigne la normale à la ligne s_i dirigée intérieurement à l'aire σ .

4. Si la fonction U est nulle, alors les caractéristiques des tensions sont indépendantes de z . Dans ce cas, on a

$$\Delta^2 W = \text{const.},$$

et les caractéristiques des tensions sont données par les formules

$$t_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad t_{31} = \frac{\partial W}{\partial y},$$

$$t_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad t_{32} = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$t_{12} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad t_{33} = \eta \Delta^2 V.$$

CHAPITRE VIII.

Système cyclique d'éléments élastiques pliés.

I.

1. A la fin du Chapitre III, j'ai énoncé dans les termes suivants le *problème fondamental* qui se présente dans la théorie des distorsions des corps solides élastiques multiplément connexes: *Étant données les distorsions du système élastique, déterminer les efforts*. Je vais exposer dans ce Chapitre les principes de la solution de ce problème dans un cas qui présente un intérêt spécial⁽²¹⁾.

2. Pour fixer les idées considérons une verge rectiligne dont les dimensions transversales soient très petites relativement à la longueur.

Envisageons les particules A et B qui forment les extrémités de la petite verge. Par A et B nous entendrons les deux troncs extrêmes de la petite verge ayant la hauteur du même ordre de grandeur que les dimensions transversales.

Quand le corps se déforme les déplacements relatifs de A et B sont, en général, très grands relativement à la déformation pure des particules

(21) Voir CLEBSCH, loc. cit., Chap. VIII.

elles-mêmes et de tout autre élément du corps dont les dimensions soient du même ordre que les dimensions transversales de la petite verge.

Nous pouvons donc considérer A et B approximativement comme deux éléments rigides dont le déplacement relatif sera résultant d'une translation et d'une rotation. Nous supposons aussi que les déplacements relatifs de A et B soient tels qu'on puisse négliger les puissances supérieures aux premières des composantes des dites rotations et translations.

3. Admettons maintenant que les forces extérieures agissant à l'intérieur de la verge soient négligeables. Supposons que les forces extérieures soient appliquées seulement aux particules A et B, et que le système soit en équilibre. Dans cette hypothèse imaginons une section transversale quelconque σ divisant la petite verge en deux parties S_a et S_b dont la première contienne la particule A et l'autre la particule B, et composons les actions que la partie S_b exerce sur la partie S_a suivant σ , en prenant comme centre de réduction un point quelconque O. Il est évident que, en maintenant ce point fixe et en changeant n'importe comment la section σ , la force et le couple résultants sont indépendants de la section. Ils seront aussi respectivement égaux à la force et au couple résultants qu'on obtiendra en composant les forces appliquées en B, et seront égaux et contraires à la force et au couple qu'on trouvera en composant les forces appliquées en A, O étant toujours le centre de réduction.

4. Supposons, pour rendre le cas plus simple, que la petite verge soit isotrope et qu'à l'état naturel elle ait la forme d'un cylindre de révolution de hauteur l et de rayon R.

Prenons l'origine O dans le centre de la base adjacente à la particule A et pour axe z l'axe du cylindre. En choisissant l'origine O pour centre de réduction, représentons par

$$X_1^{(ab)}, X_2^{(ab)}, X_3^{(ab)}$$

les composantes de la force résultante des actions extérieures appliquées en B, et par

$$X_4^{(ab)}, X_5^{(ab)}, X_6^{(ab)}$$

les composantes du couple résultant.

Désignons par

$$x_1^{(a)}, x_2^{(a)}, x_3^{(a)}$$

les composantes de la translation subie par A à partir de l'état naturel, et par

$$x_4^{(a)}, x_5^{(a)}, x_6^{(a)}$$

les composantes de la rotation subie par la même particule. Soient

$$x_1^{(b)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_4^{(b)}, x_5^{(b)}, x_6^{(b)}$$

les quantités analogues pour la particule B. Les composantes de la translation et de la rotation de B relativement à A seront respectivement

$$x_1^{(b)} - x_1^{(a)} ; x_2^{(b)} - x_2^{(a)} , x_3^{(b)} - x_3^{(a)} \quad ; \quad x_4^{(b)} - x_4^{(a)} , x_5^{(b)} - x_5^{(a)} , x_6^{(b)} - x_6^{(a)} .$$

Entre les forces $X_i^{(ab)}$ et les quantités $x_i^{(b)} - x_i^{(a)}$ existeront les relations suivantes:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(b)} - x_1^{(a)} = \frac{1}{E} \frac{l^2}{\mu} \left(-X_5^{(ab)} + \frac{2}{3} X_1^{(ab)} l \right) , \\ x_2^{(b)} - x_2^{(a)} = \frac{1}{E} \frac{l^2}{\mu} \left(X_4^{(ab)} + \frac{2}{3} X_2^{(ab)} l \right) , \\ x_3^{(b)} - x_3^{(a)} = 0 ; \end{array} \right.$$

$$(A') \quad \left\{ \begin{array}{l} x_4^{(b)} - x_4^{(a)} = \frac{1}{E} \frac{l}{\mu} (2 X_4^{(ab)} + X_2^{(ab)} l) , \\ x_5^{(b)} - x_5^{(a)} = \frac{1}{E} \frac{l}{\mu} (2 X_5^{(ab)} - X_1^{(ab)} l) , \\ x_6^{(b)} - x_6^{(a)} = \frac{2(1 + \eta)}{E} \frac{l}{\mu} X_6^{(ab)} , \end{array} \right.$$

où E dénote le module d'élasticité, η la constante d'élasticité déjà introduite dans les précédents Chapitres; $\mu = \pi R^4/2$ est le moment d'inertie de la section circulaire de la petite verge relativement à son centre. Dans les formules précédentes, on a supposé que les forces $X_i^{(ab)}$ soient du même ordre de grandeur et on a négligé les termes d'ordre supérieur à ceux qui y figurent ⁽²²⁾.

5. Ces formules prouvent que, si l'on choisit arbitrairement les trois composantes de la rotation relative de B par rapport à A et les deux composantes de la translation relative dans le sens normal à la petite verge, on peut toujours trouver des forces extérieures capables de les engendrer; la translation relative dans le sens de l'axe de la petite verge est, au contraire, de l'ordre des quantités négligeables.

Mais il serait facile de modifier un peu les conditions du système de manière à rendre même possible une translation relative dans le sens de l'axe. Supposons en effet que les forces extérieures soient appliquées à deux petits coulants capables de glisser le long du cylindre dans le sens longitudinal et maintenus contre le cylindre par deux ressorts tels que les efforts, du même ordre de grandeur que ceux qui produisent les flexions et les torsions de la petite verge, induisent dans les deux coulants des déplacements relatifs dans le sens de l'axe et de même ordre de grandeur que les premiers. Si l'on suppose les deux coulants situés aux extrémités de la petite

(22) On peut obtenir les formules précédentes de plusieurs manières, par exemple en employant la méthode de DE SAINT-VENANT. (Voir KIRCHHOFF, *Vorl. über Math. Physik; Mechanik*, 27, 28 Vorl.).

verge et si on les appelle A et B, les formules (A) et (A') ne sont pas altérées. La troisième formule seule doit être remplacée par cette autre

$$(1) \quad x_3^{(b)} - x_3^{(a)} = m X_3^{(ab)},$$

où m est une quantité positive du même ordre de grandeur que les coefficients des quantités $X_i^{(ab)}$ dans les formules précédentes.

6. L'énergie élastique du système déformé est

$$H = \frac{1}{2} \sum_i^6 (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}) X_i^{(ab)} = \frac{1}{E} \frac{l}{\mu} \left[\frac{1}{3} (X_1^{(ab)} l)^2 + \frac{1}{3} (X_2^{(ab)} l)^2 + \frac{m}{2} (X_3^{(ab)})^2 + (X_4^{(ab)})^2 + X_5^{(ab)2} + (1 + \eta) (X_6^{(ab)})^2 - X_1^{(ab)} X_5^{(ab)} l + X_2^{(ab)} X_4^{(ab)} l \right],$$

laquelle est une forme définie positive si m est différent de zéro. Mais si m est nul (comme dans le cas où manquent les coulants) H est une forme positive qui peut s'annuler sans que soit nul $X_3^{(ab)}$. Mais afin que H soit nulle il est nécessaire que $X_1^{(ab)}$, $X_2^{(ab)}$, $X_4^{(ab)}$, $X_5^{(ab)}$, $X_6^{(ab)}$ soient nuls. Il suffit donc qu'une seule des quantités $x_i^{(b)} - x_i^{(a)}$ soit différente de zéro pour que H le soit aussi.

II.

1. On peut imaginer un nombre infini d'autres cas où des corps à formes très variées ont des propriétés analogues à celles que nous venons d'examiner. La petite verge avec ou sans coulants peut être regardée comme le cas typique. Désirant nous placer à un point de vue général nous envisagerons des corps auxquels nous attribuerons d'une manière absolue certaines propriétés. Ces propriétés seront les mêmes que nous avons vues se vérifier approximativement dans le cas examiné à l'Article précédent:

1° il existe deux particules A et B du corps que nous appellerons *extrémités* dont les déformations sont négligeables par rapport aux translations et aux rotations relatives qu'elles subissent;

2° si l'on suppose les actions extérieures appliquées seulement aux extrémités A et B et le corps en équilibre, les composantes des translations et des rotations de B par rapport à A peuvent être représentées linéairement au moyen des composantes de la force et du couple résultants des actions extérieures appliquées en B;

3° l'énergie élastique du système déformé (toujours positive) ne peut s'annuler que dans le cas où toutes les composantes de la translation et de la rotation relatives de B par rapport à A sont nulles.

Nous appellerons les corps qui ont lesdites propriétés *éléments élastiques pliables* et nous les distinguerons en deux catégories:

1) *éléments élastiques librement pliables*, c'est-à-dire tels que, si l'on choisit arbitrairement les trois composantes de la translation et les trois composantes de la rotation d'une extrémité par rapport à l'autre on pourra

toujours trouver les actions extérieures capables de les engendrer (type: la petite verge avec les coulants);

2) *éléments élastiques pliables mais soumis à des liens* tels que les composantes de la rotation et de la translation d'une extrémité par rapport à l'autre soient liées par une ou plusieurs relations linéaires (type: la petite verge simple).

2. Nous indiquerons l'élément élastique pliable par AB et les composantes de la force et du couple résultants des actions extérieures appliquées en B par

$$(2) \quad X_1^{(ab)}, X_2^{(ab)}, X_3^{(ab)} \quad ; \quad X_4^{(ab)}, X_5^{(ab)}, X_6^{(ab)}.$$

En vertu de l'équilibre les composantes de la force et du couple résultants des actions extérieures appliquées en A seront

$$-X_1^{(ab)}, -X_2^{(ab)}, -X_3^{(ab)} \quad ; \quad -X_4^{(ab)}, -X_5^{(ab)}, -X_6^{(ab)},$$

que nous représenterons respectivement par

$$X_1^{(ba)}, X_2^{(ba)}, X_3^{(ba)} \quad ; \quad X_4^{(ba)}, X_5^{(ba)}, X_6^{(ba)}.$$

Si l'on imagine une section quelconque transversale σ qui divise le corps en deux parties S_b et S_a dont la première possède l'*extrémité* B et la seconde l'*extrémité* A, les quantités (2) seront les composantes de la force et du couple résultants qu'on obtiendra en composant les actions que la partie S_b exerce sur S_a suivant σ ⁽²³⁾. Dans toutes ces compositions des forces on devra supposer de choisir toujours le même centre de réduction et admettre qu'il soit l'origine des axes coordonnés.

Les quantités (2) s'appelleront *les caractéristiques des efforts* ou simplement les *efforts* qui sollicitent l'élément AB. Désignons par $x_1^{(a)}, x_2^{(a)}, x_3^{(a)}$ les composantes de la translation, par $x_4^{(a)}, x_5^{(a)}, x_6^{(a)}$ les composantes de la rotation de l'*extrémité* A.

Nous appellerons ces quantités les *caractéristiques du déplacement* du point A.

Indiquons les quantités analogues pour l'*extrémité* B par $x_1^{(b)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}$; $x_4^{(b)}, x_5^{(b)}, x_6^{(b)}$.

Les relations linéaires qui lient les déplacements relatifs des deux extrémités aux efforts s'écriront en général

$$(3) \quad x_i^{(b)} - x_i^{(a)} = \sum_s^6 A_{is}^{(ab)} X_s^{(ab)} \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

et l'on aura évidemment

$$A_{is}^{(ab)} = A_{is}^{(ba)}.$$

(23) Si le corps est multiplement connexe (voir, par exemple, Art. V, § 3), alors la section σ qui divise le corps en deux parties pourra être formée de plusieurs parties distinctes.

3. Les quantités $A_{is}^{(ab)}$ ne dépendront que de la nature du corps et de sa position par rapport aux axes. Elles s'appelleront les *constantes directes de l'élément*. Il est facile de voir les valeurs qu'elles prendront si l'on change la position du corps par rapport aux axes. A cet effet, supposons connues les *constantes* précédentes quand le corps est rapporté à un certain système d'axes et supposons de changer les axes. Des équations très connues de la Statique nous donnent les relations existant entre les forces $X_s^{(ab)}$ et les quantités analogues qu'on trouve si l'on change les directions des axes et l'origine qui est le centre de réduction des forces. De même, des formules élémentaires de Cinématique nous donnent les relations qui existent entre les quantités $x_i^{(a)}$ et $x_i^{(b)}$ et les quantités analogues rapportées aux nouveaux axes et au nouveau centre de réduction.

De simples opérations de substitution dans les formules (3) suffisent donc pour avoir les relations linéaires qui existent entre les coefficients $A_{is}^{(ab)}$ et les coefficients correspondants relatifs au nouveau système des axes.

4. Si l'élément élastique est librement pliable, les égalités (3) seront invertibles et nous aurons

$$(3') \quad X_s^{(ab)} = \sum_1^6 a_{is}^{(ab)} (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}).$$

La détermination des coefficients $a_{is}^{(ab)}$ et de leurs variations, si les axes changent, ne présente aucune difficulté.

Nous appellerons les coefficients $a_{is}^{(ab)}$ les *constantes inverses* de l'élément AB.

Lorsque l'élément élastique pliable est soumis à des liens, il est impossible d'invertir les équations (3).

5. L'énergie élastique du système déformé sera donnée par

$$H = \frac{1}{2} \sum_1^6 X_i^{(ab)} (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}) = \frac{1}{2} \sum_1^6 \sum_1^6 A_{is}^{(ab)} X_i^{(ab)} X_s^{(ab)}.$$

La forme précédente sera donc une *forme positive* et elle sera *définie* si le système élastique est librement pliable; au contraire elle ne sera pas définie si le système est pliable, mais soumis à des liens.

Dans le premier cas nous aurons encore

$$H = \frac{1}{2} \sum_1^6 \sum_1^6 a_{is}^{(ab)} (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}) (x_s^{(b)} - x_s^{(a)}).$$

III.

1. Les considérations préliminaires exposées dans les Articles précédents nous serviront de base dans l'étude des distorsions d'un système cyclique composé de plusieurs éléments pliables. Imaginons en effet d'unir entre eux un nombre quelconque d'éléments élastiques pliables, unissant entre

eux rigidement les extrémités, de manière à former un ensemble cyclique dont toutes les parties soient à l'état naturel. Étudions l'effet des distorsions dans ce système.

2. Pour fixer les idées, supposons d'avoir quatre verges minces, rectilignes. Réunissons leurs extrémités deux à deux en les fixant rigidement dans quatre dés ou étaux à main de manière que les verges forment les côtés d'un quadrilatère $ABDC$ et les quatre dés, ou étaux à main, les quatre sommets, comme il est indiqué dans la figure 28.

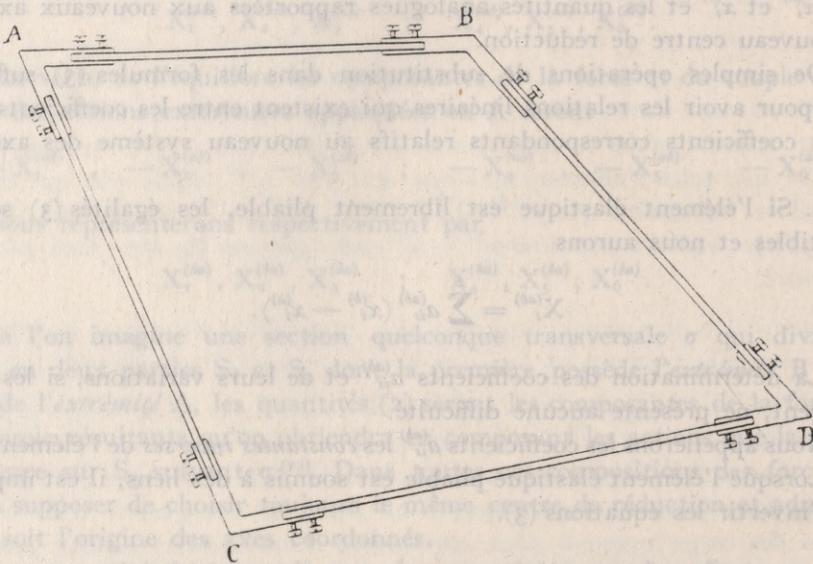


Fig. 28.

On fait ensuite une coupure dans un des côtés et l'on exécute suivant la coupure une distorsion. Voyons comment le système se déforme et quels efforts sont induits.

3. Admettons, en général, que les éléments élastiques pliables reliés entre eux soient n et que les extrémités soient unies rigidement en m nœuds. Supposons, en outre, que le système soit soustrait à toute action extérieure.

Considérons tout d'abord un élément quelconque unissant les nœuds A et B et dont les extrémités soient A et B . Indiquons cet élément par AB .

En faisant usage des mêmes notations que nous avons employées dans l'Article précédent nous aurons que, si l'élément n'a subi aucune distorsion, subsisteront les relations suivantes:

$$(3) \quad x_i^{(b)} - x_i^{(a)} = \sum_s^6 A_{is}^{(ab)} X_i^{(ab)} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Mais si l'élément a subi une distorsion de caractéristiques $\alpha_1^{(ab)}, \alpha_2^{(ab)}, \alpha_3^{(ab)}, \alpha_4^{(ab)}, \alpha_5^{(ab)}, \alpha_6^{(ab)}$, les équations précédentes devront être remplacées par

$$(I) \quad x_i^{(b)} - x_i^{(a)} - \alpha_i^{(ab)} = \sum_s^6 A_{is}^{(ab)} X_i^{(ab)} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Si donc, en général, on exécute une distorsion en chaque élément, on aura six équations analogues aux précédentes pour chaque élément.

Considérons maintenant un nœud, que nous indiquerons par la lettre A, où aboutissent et sont unies rigidement les extrémités A des éléments AB, AC, AD, ...

Pour l'équilibre nous aurons les six équations

$$(II) \quad X_i^{(ab)} + X_i^{(ac)} + X_i^{(ad)} + \dots = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

On aura donc, pour chaque nœud, six équations analogues aux précédentes.

4. Supposons connues les constantes de chaque élément et les caractéristiques de chaque distorsion, c'est-à-dire tous les coefficients $A_{is}^{(ab)}$ et toutes les caractéristiques $\alpha_i^{(ab)}$, et supposons inconnues les composantes des translations et des rotations de chaque extrémité et les efforts qui sollicitent chaque élément. Nous aurons $6n + 6m$ inconnues qui vérifieront les $6n + 6m$ équations linéaires (I) et (II).

Observons toutefois que dans ce système six équations découlent des autres. En effet, en ajoutant membre à membre toutes les égalités (II) qui correspondent à un même indice i , nous obtiendrons le premier membre identiquement nul, parce que chaque terme $X_i^{(ab)}$ qui paraît dans une équation est éliminé par le terme $X_i^{(ba)}$ qui paraît dans une autre. Ce résultat s'explique facilement, car il est évident que les trois composantes de la translation et les trois composantes de la rotation d'un nœud sont arbitraires.

5. Nous démontrerons maintenant le théorème fondamental suivant:

Dans tout système cyclique d'éléments élastiques pliables, si les constantes de chaque élément et les distorsions exécutées en chacun d'eux sont connues, les translations et les rotations relatives de tous les nœuds seront déterminées ainsi que les efforts qui sollicitent tous les éléments du système qui sont librement pliables.

Pour simplifier, supposons nulles les trois composantes de la translation et les trois composantes de la rotation correspondant à un nœud choisi arbitrairement. Supposons encore que, à un même système de valeurs des caractéristiques $\alpha_i^{(ab)}$ et des coefficients $A_{is}^{(ab)}$ correspondent deux systèmes de valeurs des quantités $x_i^{(a)}$ et $X_i^{(ab)}$ que nous dénoterons respectivement par $\bar{x}_i^{(a)}$ et $\bar{X}_i^{(ab)}$; $\bar{x}_i^{(a)}$ et $\bar{X}_i^{(ab)}$. Écrivons

$$\bar{x}_i^{(a)} - \bar{x}_i^{(a)} = \zeta_i^{(a)},$$

$$\bar{X}_i^{(ab)} - \bar{X}_i^{(ab)} = \Xi_i^{(ab)}.$$

Ces quantités vérifieront les équations

$$(4) \quad \xi_i^{(b)} - \xi_i^{(a)} = \sum_{\mathbf{r}}^6 A_{is}^{(ab)} \Xi_s^{(ab)},$$

$$(5) \quad \Xi_i^{(ab)} + \Xi_i^{(ac)} + \Xi_i^{(ad)} + \dots = 0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4) par $\Xi_i^{(ab)}$ et les deux membres de l'équation (5) par $\xi_i^{(a)}$, et ajoutons membre à membre toutes les équations que nous venons d'obtenir. Le premier membre résultera identiquement nul, d'où

$$\sum_{ab} \sum_{\mathbf{r}}^6 \sum_{\mathbf{s}}^6 A_{is}^{(ab)} \Xi_i^{(ab)} \Xi_s^{(ab)} = 0.$$

Par \sum_{ab} on doit entendre une somme de n termes relatifs à tous les éléments élastiques constituant le système.

Mais chaque forme

$$\sum_{\mathbf{r}}^6 \sum_{\mathbf{s}}^6 A_{is}^{(ab)} \Xi_i^{(ab)} \Xi_s^{(ab)}$$

est positive; donc, en vertu des équations précédentes, nous aurons

$$(6) \quad \sum_{\mathbf{r}}^6 \sum_{\mathbf{s}}^6 A_{is}^{(ab)} \Xi_i^{(ab)} \Xi_s^{(ab)} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\xi_i^{(b)} - \xi_i^{(a)} = 0,$$

d'où

$$\xi_i^{(a)} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{x}_i^{(a)} = \bar{x}_i^{(a)}.$$

Donc, dans les deux solutions, les composantes des translations et des rotations des nœuds ne peuvent pas différer entre elles.

De la formule (6) on tire que, si l'élément AB est librement pliable, les quantités $\Xi_i^{(ab)}$ doivent être nulles et, par suite, $\bar{X}_i^{(ab)} = \bar{X}_i^{(ab)}$. Par conséquent, les efforts relatifs à l'élément (AB), s'il est librement pliable, ne peuvent pas différer entre eux dans les deux solutions.

Le théorème énoncé est donc démontré.

6. Du théorème précédent découle immédiatement le corollaire suivant:

Dans un système cyclique d'éléments élastiques librement pliables et dont on connaît les constantes, les efforts sont déterminés par les distorsions et l'on peut les obtenir en résolvant un système d'équations du premier degré.

En supposant toujours que les éléments soient librement pliables, nous avons trouvé que les formules (4) et (5) n'ont d'autres solutions que $\xi_i^{(a)} = 0$,

$\Xi_i^{(ab)} = 0$ si nous admettons que, pour un nœud donné, les quantités ξ soient nulles.

Cela prouve que les équations (I) et (II) sont entre elles toujours compatibles de quelque façon qu'on prenne les $\alpha_i^{(ab)}$, d'où:

Dans un système cyclique d'éléments élastiques librement pliables, les distorsions peuvent être choisies d'une façon complètement arbitraire.

7. Si les éléments élastiques ne sont pas tous librement pliables, les formules (4) et (5) peuvent admettre des solutions où les inconnues $\Xi_i^{(ab)}$ ne sont pas toutes nulles. Il peut même se rencontrer des cas où les formules (4) et (5) ne sont satisfaites que par des valeurs nulles des quantités $\Xi_i^{(ab)}$. Dans le premier cas, les distorsions ne peuvent pas être choisies arbitrairement, tandis que, dans le second cas, les distorsions sont arbitraires. En outre, dans le premier cas, les efforts ne sont pas déterminés, tandis qu'ils le sont dans le second.

On voit tout de suite que si les éléments élastiques sont de simples verges rectilignes nous aurons respectivement le second ou le premier cas, suivant que le système est ou n'est pas statiquement déterminé.

IV.

1. Les équations (I) et (II) présentent d'étroites analogies avec les équations de KIRCHHOFF sur la propagation des courants dans un système de fils conducteur formant un réseau: mais dans notre cas les équations de KIRCHHOFF sont sextuplées. Les composantes des efforts figurent dans les équations (I) et (II) comme des éléments analogues aux intensités des courants; les composantes de translations et des rotations des nœuds, comme les éléments analogues des potentiels électriques aux nœuds du réseau: les *caractéristiques des distorsions* remplacent les *forces électromotrices*. Les relations (I) remplacent l'équation qui exprime la loi d'OHM. Les constantes des éléments élastiques ont le même rôle des inverses des résistances électriques.

2. Cette analogie une fois établie, il est facile d'examiner des cas qui se présentent d'une manière analogue au pont de WHEATSTONE dans l'étude de l'électricité et d'en profiter pour déterminer des constantes des éléments élastiques.

3. Le *principe des coupures équivalentes* (Chap. II, Art. 1, § 1) permet de substituer une distorsion faite dans une section donnée, par une autre exécutée dans une section obtenue de la première par une déformation continue.

On comprend qu'en pratique, on aura un moyen simple d'obtenir des distorsions dans un système cyclique d'éléments pliables, en les exécutant

aux nœuds, ce qu'on peut faire par la manière même avec laquelle on attache entre elles les extrémités des éléments.

V.

1. Avant de passer au Chapitre suivant, où nous nous proposons de traiter un cas particulier, nous voulons démontrer le théorème général suivant et quelques autres propositions:

Les constantes directes $A_{is}^{(ab)}$ (voir Art. II) de chaque élément vérifient les équations

$$A_{is}^{(ab)} = A_{si}^{(ab)}.$$

En effet, supposons qu'aux efforts $X_i^{(ab)}$ correspondent les déplacements $x_i^{(a)}$ et $x_i^{(b)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) des extrémités A et B de l'élément AB et qu'aux efforts $\Xi_i^{(ab)}$ correspondent les déplacements $\zeta_i^{(a)}$ et $\zeta_i^{(b)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Nous appellerons première et seconde déformation les deux différentes déformations que subit l'élément AB.

Considérons la quantité

$$\sum_i^6 (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}) \Xi_i^{(ab)}.$$

Elle est le travail que les tensions engendrant la seconde déformation de l'élément AB exécutent en vertu de la première déformation de l'élément. La quantité

$$\sum_i^6 (\zeta_i^{(b)} - \zeta_i^{(a)}) X_i^{(ab)}$$

est le travail que les tensions engendrant la première déformation de l'élément AB exécutent en vertu de la seconde déformation.

Mais, en vertu d'un principe général d'élasticité [théorème de BETTI (voir Chap. III, Art. II, § 1)] que nous étendons aux corps élastiques pliables, ces deux travaux sont égaux et, par conséquent,

$$\sum_i^6 (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}) \Xi_i^{(ab)} = \sum_i^6 (\zeta_i^{(b)} - \zeta_i^{(a)}) X_i^{(ab)}$$

ou

$$\sum_i^6 \sum_s^6 A_{is}^{(ab)} X_s^{(ab)} \Xi_i^{(ab)} = \sum_i^6 \sum_s^6 A_{is}^{(ab)} \Xi_s^{(ab)} X_i^{(ab)};$$

c'est pourquoi

$$A_{is}^{(ab)} = A_{si}^{(ab)}.$$

En passant des constantes directes aux inverses $a_{is}^{(ab)}$ (Art. II, § 4), on trouve évidemment vérifiée la relation analogue

$$a_{is}^{(ab)} = a_{si}^{(ab)}.$$

2. Lorsqu'on a n éléments élastiques pliables $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_{n+1}$, on peut les unir les uns aux autres de manière, que, deux éléments consécutifs $A_{i-1} A_i, A_i A_{i+1}$, aient les extrémités A_i communes attachées rigidement entre elles. On obtiendra ainsi un élément élastique unique $A_1 A_{n+1}$. On appellera cette liaison *une composition par série des éléments donnés* et l'élément obtenu *élément composé par série*.

Appelons $A_{is}^{(a_h a_{h+1})}$ les constantes directes de chaque élément composant $A_h A_{h+1}$ et $A_{is}^{(a_1 a_{n+1})}$ les constantes directes de l'élément composé se rapportant toujours au même système d'axes. En vertu des équations (3) nous aurons

$$A_{is}^{(a_1 a_{n+1})} = \sum_1^n A_{is}^{(a_h a_{h+1})},$$

c'est-à-dire:

Les constantes directes de l'élément composé par série s'obtiendront en ajoutant les constantes correspondantes des éléments composants.

Ce théorème correspond à la proposition que l'on rencontre dans la théorie de la conduction électrique, c'est-à-dire que la résistance de plusieurs conducteurs disposés en série est la somme des résistances électriques de chaque conducteur (voir § 1 de l'Art. précédent).

3. La liaison de plusieurs éléments élastiques pliables pour former un élément composé peut aussi se faire d'une autre manière. En effet, prenons n éléments pliables $(AB)_1, (AB)_2, \dots, (AB)_n$ ayant à l'état naturel les mêmes extrémités A et B et supposons de lier rigidement entre elles les n extrémités qui sont en A, ainsi que les n extrémités qui sont en B. Cette liaison se dira *une composition par dérivation* ou *en parallèle des éléments donnés*. L'élément composé AB s'appellera *élément composé par dérivation*.

Supposons que chaque élément composant soit librement pliable et appelons $a_{is}^{(AB)_h}$ les constantes inverses de chacun d'eux, $a_{is}^{(AB)}$ les constantes inverses de l'élément composé; à cause des équations (3') nous aurons

$$a_{is}^{(AB)} = \sum_1^n a_{is}^{(AB)_h},$$

c'est-à-dire:

Les constantes inverses de l'élément composé par dérivation s'obtiendront en ajoutant les constantes correspondantes des éléments composés.

Ce théorème correspond aussi à un théorème sur la conduction électrique. En effet, la conductibilité électrique d'un conducteur formé par la réunion de plusieurs conducteurs disposés en parallèle est la somme des conductibilités de chaque conducteur composant.

CHAPITRE IX.

Système cyclique plan d'éléments élastiques pliables.

I.

1. Quand un élément élastique pliable AB est plan et sujet à des forces situées dans son plan, si l'on prend celui-ci comme premier plan coordonné on aura que les trois caractéristiques des efforts

$$X_3^{(ab)}, X_4^{(ab)}, X_5^{(ab)}$$

seront nulles. De même, les caractéristiques des déplacements des extrémités

$$x_3^{(a)}, x_4^{(a)}, x_5^{(a)} \quad ; \quad x_3^{(b)}, x_4^{(b)}, x_5^{(b)}$$

seront nulles.

Pour simplifier, représentons par x, y les axes coordonnés, par $X^{(ab)}, Y^{(ab)}, M^{(ab)}$ les caractéristiques $X_1^{(ab)}, X_2^{(ab)}, X_6^{(ab)}$ des efforts, et par $x^{(a)}, y^{(a)}, r^{(a)}$ les caractéristiques $x_1^{(a)}, x_2^{(a)}, x_6^{(a)}$ des déplacements de l'extrémité A. En même temps indiquons par $x^{(b)}, y^{(b)}, r^{(b)}$ les quantités correspondantes $x_1^{(b)}, x_2^{(b)}, x_6^{(b)}$.

2. Cela posé, démontrons le théorème suivant:

Si un élément élastique pliable et plan AB est sollicité par des forces situées dans son plan, on pourra toujours trouver dans ce même plan un couple d'axes orthogonaux x, y tels que

$$(1) \quad \begin{cases} x^{(b)} - x^{(a)} = \lambda X^{(ab)}, \\ y^{(b)} - y^{(a)} = \mu Y^{(ab)}, \\ r^{(b)} - r^{(a)} = \nu M^{(ab)}. \end{cases}$$

En effet, nous aurons, en général

$$(2) \quad \begin{cases} x^{(b)} - x^{(a)} = a_{11} X^{(ab)} + a_{12} Y^{(ab)} + a_{13} M^{(ab)}, \\ y^{(b)} - y^{(a)} = a_{21} X^{(ab)} + a_{22} Y^{(ab)} + a_{23} M^{(ab)}, \\ r^{(b)} - r^{(a)} = a_{31} X^{(ab)} + a_{32} Y^{(ab)} + a_{33} M^{(ab)}, \end{cases}$$

étant $a_{rs} = a_{sr}$.

En transportant l'origine au point de coordonnées ξ, η , sans altérer la direction des axes, et en distinguant par un suffixe les quantités relatives au nouveau système d'axes, nous aurons

$$\begin{aligned} x_1^{(b)} - x_1^{(a)} &= x^{(b)} - x^{(a)} + \eta (r^{(b)} - r^{(a)}), \\ y_1^{(b)} - y_1^{(a)} &= y^{(b)} - y^{(a)} - \xi (r^{(b)} - r^{(a)}), \\ r_1^{(b)} - r_1^{(a)} &= r^{(b)} - r^{(a)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1^{(ab)} &= X^{(ab)}, \\ Y_1^{(ab)} &= Y^{(ab)}, \\ M_1^{(ab)} &= M^{(ab)} - X^{(ab)} \eta + Y^{(ab)} \xi; \end{aligned}$$

par suite, les formules (2) deviendront

$$(2') \quad \begin{cases} x_1^{(b)} - x_1^{(a)} = (a_{11} + 2\eta a_{31} + \eta^2 a_{33}) X_1^{(ab)} \\ \quad + (a_{12} + \eta a_{32} - \xi a_{31} - \xi \eta a_{33}) Y_1^{(ab)} + (a_{13} + \eta a_{33}) M_1^{(ab)}, \\ y_1^{(b)} - y_1^{(a)} = (a_{21} - \xi a_{31} + \eta a_{23} - \xi \eta a_{33}) X_1^{(ab)}, \\ \quad + (a_{22} - 2\xi a_{23} + \xi^2 a_{33}) Y_1^{(ab)} + (a_{23} - \xi a_{33}) M_1^{(ab)}, \\ r_1^{(b)} - r_1^{(a)} = (a_{31} + \eta a_{33}) X_1^{(ab)} + (a_{32} - \xi a_{33}) Y_1^{(ab)} + a_{33} M_1^{(ab)}. \end{cases}$$

Il suffira donc de prendre

$$\eta = -\frac{a_{13}}{a_{33}}, \quad \xi = \frac{a_{23}}{a_{33}},$$

ce qui est toujours possible si $a_{33} \geq 0$, afin que les équations précédentes deviennent

$$(2'') \quad \begin{cases} x_1^{(b)} - x_1^{(a)} = \frac{a_{11} a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}} X_1^{(ab)} + \frac{a_{12} a_{33} - a_{23} a_{13}}{a_{33}} Y_1^{(ab)}, \\ y_1^{(b)} - y_1^{(a)} = \frac{a_{12} a_{33} - a_{13} a_{23}}{a_{33}} X_1^{(ab)} + \frac{a_{22} a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}} Y_1^{(ab)}, \\ r_1^{(b)} - r_1^{(a)} = a_{33} M_1^{(ab)}. \end{cases}$$

Si a_{33} était nul, a_{13} et a_{23} seraient aussi nuls (Chap. VIII, Art. II, § 1, 3^e propriété), et alors les formules (2) auraient originairement la forme (2'').

En changeant maintenant l'orientation des axes, c'est-à-dire en les choisissant comme axes principaux de la conique

$$(a_{11} a_{33} - a_{13}^2) x^2 + 2(a_{12} a_{33} - a_{23} a_{13}) xy + (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) y^2 = a_{33},$$

nous pourrions réduire les formules (2'') à la forme (1).

3. Nous appellerons *centre de l'élément élastique* l'origine des axes x, y pour lesquels sont vérifiées les formules (1) et ces axes eux-mêmes seront les *axes principaux de l'élément*. Les coefficients λ et μ s'appelleront les *coefficients de traction* et ν le *coefficient de flexion*.

Il est facile de démontrer le théorème suivant:

Si l'élément élastique admet deux axes de symétrie, ceux-ci sont les axes principaux de l'élément.

Il est aussi facile de calculer les *constantes d'un élément* relativement à des axes quelconques quand on connaît les *coefficients de traction et de flexion*.

Désignons par ξ et η les coordonnées du centre de l'élément relativement aux axes x, y et par x', y' les axes principaux. Le Tableau des cosinus des deux systèmes d'axes soit

	x'	y'
x	α	β
y	γ	δ

et λ et μ soient les coefficients de traction par rapport aux axes x' et y' . Alors les formules (2) relativement aux axes x, y prendront la forme

$$(3) \quad \begin{cases} x^{(b)} - x^{(a)} = (\lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \nu\eta^2) X^{(ab)} \\ \quad + (\lambda\gamma\alpha + \mu\beta\delta - \nu\xi\eta) Y^{(ab)} - \nu\eta M^{(ab)} \\ y^{(b)} - y^{(a)} = (\lambda\alpha\gamma + \mu\beta\delta - \nu\xi\eta) X^{(ab)} \\ \quad + (\lambda\gamma^2 + \mu\delta^2 + \nu\xi^2) Y^{(ab)} + \nu\xi M^{(ab)}, \\ z^{(b)} - z^{(a)} = -\nu\eta X^{(ab)} + \nu\xi Y^{(ab)} + \nu M^{(ab)}, \end{cases}$$

ou encore, en appelant θ l'angle $\widehat{xx'}$, c'est-à-dire en faisant

$$\alpha = \cos \theta \quad , \quad \beta = -\sin \theta,$$

$$\gamma = \sin \theta \quad , \quad \delta = \cos \theta,$$

on aura

$$(3') \quad \begin{cases} x^{(b)} - x^{(a)} = (\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta + \nu\eta^2) X^{(ab)} \\ \quad + [(\lambda - \mu) \sin \theta \cos \theta - \nu\xi\eta] Y^{(ab)} - \nu\eta M^{(ab)}, \\ y^{(b)} - y^{(a)} = [(\lambda - \mu) \sin \theta \cos \theta - \nu\xi\eta] X^{(ab)} \\ \quad + (\lambda \sin^2 \theta + \mu \cos^2 \theta + \nu\xi^2) Y^{(ab)} + \nu\xi M^{(ab)}, \\ z^{(b)} - z^{(a)} = -\nu\eta X^{(ab)} + \nu\xi Y^{(ab)} + \nu M^{(ab)}. \end{cases}$$

4. Soient n éléments plans $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_{n+1}$, et supposons de les lier rigidement entre eux deux à deux par les extrémités communes A_2, A_3, \dots, A_n , c'est-à-dire supposons de les composer en série (voir Chap. VIII, Art. V).

Marquons par un indice i les quantités $\lambda, \mu, \nu, \xi, \eta, \theta$ lorsqu'elles se rapportent à l'élément $i^{\text{ième}}$. Alors les formules relatives à l'élément plan engendré moyennant la liaison des éléments donnés seront

$$x^{(A_{n+1})} - x^{(A_1)} = \sum_i^n (\lambda_i \cos^2 \theta_i + \mu_i \sin^2 \theta_i + \nu_i \eta_i) X^{(A_1 A_{n+1})} \\ + \sum_i^n [(\lambda_i - \mu_i) \sin \theta_i \cos \theta_i - \nu_i \xi_i \eta_i] Y^{(A_1 A_{n+1})} \\ - \sum_i^n \nu_i \eta_i M^{(A_1 A_{n+1})},$$

$$y^{(A_{n+1})} - y^{(A_1)} = \sum_i^n [(\lambda_i - \mu_i) \sin \theta_i \cos \theta_i - \nu_i \xi_i \eta_i] X^{(A_1 A_{n+1})} \\ + \sum_i^n (\lambda_i \sin^2 \theta_i + \mu_i \cos^2 \theta_i + \nu_i \xi_i^2) Y^{(A_1 A_{n+1})} \\ + \sum_i^n \nu_i \xi_i M^{(A_1 A_{n+1})},$$

$$r^{(A_{n+1})} - r^{(A_1)} = - \sum_i^n \nu_i \eta_i X^{(A_1 A_{n+1})} + \sum_i^n \nu_i \xi_i Y^{(A_1 A_{n+1})} + \sum_i^n \nu_i M^{(A_1 A_{n+1})}.$$

Mais si les axes x, y sont les axes principaux de l'élément composé $A_1 A_{n+1}$ on aura

$$\sum_i^n \nu_i \xi_i = 0, \quad \sum_i^n \nu_i \eta_i = 0,$$

$$\sum_i^n (\lambda_i - \mu_i) \sin \theta_i \cos \theta_i - \nu_i \xi_i \eta_i = 0.$$

En outre, les coefficients de traction et les coefficients de flexion seront respectivement

$$\Lambda = \sum_i^n (\lambda_i \cos^2 \theta_i + \mu_i \sin^2 \theta_i + \nu_i \eta_i^2),$$

$$M = \sum_i^n (\lambda_i \sin^2 \theta_i + \mu_i \cos^2 \theta_i + \nu_i \xi_i^2),$$

$$N = \sum_i^n \nu_i,$$

d'où découlent les théorèmes suivants:

Le centre d'un élément composé est le centre de gravité des centres des éléments composants si l'on suppose qu'en chacun d'eux soit concentrée une masse égale au coefficient de flexion.

Par le centre de l'élément composé en série, conduisons des segments unitaires normaux aux axes de chaque élément composant et concentrons, à l'extrémité de chacun d'eux, une masse égale au coefficient correspondant de traction, et en même temps considérons les masses égales aux coefficients de flexion de chaque élément composant, concentrées dans les centres respectifs. Les axes d'inertie de ce système de masses sont les axes principaux de l'élément composé et les moments principaux d'inertie en sont les coefficients de traction.

Le coefficient de flexion de l'élément composé en série est la somme des coefficients de flexion de chaque élément composant.

II.

1. Considérons maintenant un corps élastique plan quelconque deux fois connexe et assujettissons-le à des distorsions qui le conservent plan. Si les axes x, y sont situés dans le même plan et si nous indiquons les six caractéristiques des distorsions par l, m, n, p, q, r , nous aurons (voir Chap. III)

$$n = p = q = 0$$

et, en représentant les efforts par L, M, N, P, Q, R , on aura

$$N = P = Q = 0,$$

tandis que les relations entre les caractéristiques et les efforts deviendront (voir Chap. III, Art. II, § 3)

$$L = E_{11} l + E_{12} m + E_{16} r,$$

$$M = E_{21} l + E_{22} m + E_{26} r,$$

$$N = E_{61} l + E_{62} m + E_{66} r.$$

En transportant l'origine au point de coordonnées ξ, η sans altérer la direction des axes, nous aurons

$$L_1 = E_{11} l_1 + E_{12} m_1 + (E_{16} - E_{11} \eta + E_{12} \xi) r_1,$$

$$M_1 = E_{21} l_1 + E_{22} m_1 + (E_{26} - E_{21} \eta + E_{22} \xi) r_1,$$

$$R_1 = (E_{61} - E_{11} \eta + E_{21} \xi) l_1 + (E_{62} - E_{12} \eta + E_{22} \xi) m_1$$

$$+ (E_{66} - 2 E_{16} \eta + 2 E_{26} \xi + 2 E_{11} \eta^2 - 4 E_{12} \xi \eta + 2 E_{22} \xi^2) r_1,$$

où $L_1 = L, M_1 = M, R_1$; $l_1, m_1, r_1 = r$ sont les efforts et les caractéristiques relatives au nouveau système d'axes.

Mais nous pouvons choisir les coordonnées ξ et η de façon que les coefficients de r_1 dans les expressions de L_1 et M_1 s'annulent, par suite s'annuleront aussi les coefficients de l_1 et m_1 dans l'expression de R_1 .

En orientant ensuite convenablement les axes nous pourrions réduire les relations entre les caractéristiques et les efforts aux formes suivantes:

$$L = E_{11} l,$$

$$M = E_{22} m,$$

$$R = E_{66} r,$$

c'est-à-dire:

Étant donné un système plan deux fois connexe assujéti à des distorsions qui le conservent plan, il existe dans le même plan un système d'axes tels, que, relativement à ce système, chaque distorsion élémentaire produit le seul effort conjugué.

2. Supposons maintenant que le système plan deux fois connexe soit formé d'éléments pliables $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$ liés rigidement entre eux deux à deux par les extrémités communes, c'est-à-dire soit obtenu par une composition par série, et que dans l'état naturel la première et la dernière extrémité A_1 viennent coïncider et se lier rigidement.

Pour obtenir les axes dont on a parlé dans le précédent paragraphe, il suffira d'appliquer les règles données dans le § 4 de l'Article précédent pour trouver le centre et les axes principaux de l'élément composé par série des éléments $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$. Les trois coefficients des efforts s'obtiendront en calculant les inverses des coefficients de traction et du coefficient de flexion de l'élément composé.

3. Nous avons comparé dans le Chapitre précédent (Art. IV) la théorie des distorsions d'un système constitué d'éléments élastiques pliables à la théorie de KIRCHHOFF sur la propagation des courants dans les fils. Les résultats que nous venons d'obtenir jettent une nouvelle lumière sur les rapports qui existent entre les deux théories.

En effet, le théorème que nous avons démontré dans le § 4 de l'Article précédent, c'est-à-dire: *Le coefficient de flexion du circuit composé est la somme des coefficients de flexion de chaque élément*, correspond à cette proposition: *La résistance électrique d'un circuit est la somme des résistances de toutes les parties qui, disposées en séries, forment le circuit lui-même* (voir Chap. VIII, Art. V, § 2). Mais la règle pour obtenir les coefficients de traction est bien plus compliquée et n'a pas sa correspondante dans la théorie de la conduction électrique. En outre, la considération du centre et des axes principaux, qui est fondamentale dans la présente théorie, manque complètement dans la théorie électrique.

III.

1. Dans l'Article I nous avons traité le cas d'un système plan d'éléments élastiques pliables disposés en série, et nous avons déterminé les axes et les coefficients de traction et de flexion de l'élément composé, en connaissant les axes et les coefficients analogues des éléments composants.

Nous nous proposons maintenant de résoudre la même question en étudiant une composition d'éléments en parallèle (par dérivation) (voir Chap. précédent, Art. V, § 3).

2. En supposant un élément plan librement pliable, nous aurons, en nous rapportant à ses axes principaux [voir formule (1), Art. I]

$$X^{(ab)} = \frac{1}{\lambda} (x^{(b)} - x^{(a)}),$$

$$Y^{(ab)} = \frac{1}{\mu} (y^{(b)} - y^{(a)}),$$

$$M^{(ab)} = \frac{1}{\nu} (r^{(b)} - r^{(a)}).$$

A l'aide de calculs très simples on trouve que si les axes principaux x', y' forment, avec les axes x, y des angles dont le Tableau des cosinus est

	x'	y'
x	α	β
y	γ	δ

et si le centre de l'élément a les coordonnées ξ, η , les formules qui expriment les efforts moyennant les déplacements seront

$$X^{(ab)} = \left(\frac{1}{\lambda} \alpha^2 + \frac{1}{\mu} \beta^2 \right) (x^{(b)} - x^{(a)}) + \left(\frac{1}{\lambda} \alpha\gamma + \frac{1}{\mu} \beta\delta \right) (y^{(b)} - y^{(a)}) + \left(\frac{1}{\lambda} \eta\alpha - \frac{1}{\mu} \xi\beta \right) (r^{(b)} - r^{(a)}),$$

$$Y^{(ab)} = \left(\frac{1}{\lambda} \alpha\gamma + \frac{1}{\mu} \beta\delta \right) (x^{(b)} - x^{(a)}) + \left(\frac{1}{\lambda} \gamma^2 + \frac{1}{\mu} \delta^2 \right) (y^{(b)} - y^{(a)}) + \left(\frac{1}{\lambda} \eta\gamma - \frac{1}{\mu} \xi\delta \right) (r^{(b)} - r^{(a)}),$$

$$M^{(ab)} = \left(\frac{1}{\lambda} \eta\alpha - \frac{1}{\mu} \xi\beta \right) (x^{(b)} - x^{(a)}) + \left(\frac{1}{\lambda} \eta\gamma - \frac{1}{\mu} \xi\delta \right) (y^{(b)} - y^{(a)}) + \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda} \eta^2 + \frac{1}{\mu} \xi^2 \right) (r^{(b)} - r^{(a)}).$$

3. Composons en parallèle les n éléments $(AB)_1, (AB)_2, \dots, (AB)_n$. En marquant les quantités relatives à l'élément $(AB)_h$ par un indice h , nous aurons par rapport à l'élément composé les formules suivantes:

$$X^{(ab)} = \sum_1^n \left(\frac{1}{\lambda_h} \alpha_h^2 + \frac{1}{\mu_h} \beta_h^2 \right) (x^{(b)} - x^{(a)}) \\ + \sum_1^n \left(\frac{1}{\lambda_h} \alpha_h \gamma_h + \frac{1}{\mu_h} \beta_h \delta_h \right) (y^{(b)} - y^{(a)}) + \sum_1^n \left(\frac{1}{\lambda_h} \eta_h \alpha_h - \frac{1}{\mu_h} \xi_h \beta_h \right) (r^{(b)} - r^{(a)}),$$

$$Y^{(ab)} = \sum_1^n \left(\frac{1}{\lambda_h} \alpha_h \gamma_h + \frac{1}{\mu_h} \beta_h \delta_h \right) (x^{(b)} - x^{(a)}) \\ + \sum_1^n \left(\frac{1}{\lambda_h} \gamma_h^2 + \frac{1}{\mu_h} \delta_h^2 \right) (y^{(b)} - y^{(a)}) + \sum_1^n \left(\frac{1}{\lambda_h} \eta_h \gamma_h - \frac{1}{\mu_h} \xi_h \delta_h \right) (r^{(b)} - r^{(a)}),$$

$$M^{(ab)} = \sum_1^n \left(\frac{1}{\lambda_h} \eta_h \alpha_h - \frac{1}{\mu_h} \xi_h \beta_h \right) (x^{(b)} - x^{(a)}) \\ + \sum_1^n \left(\frac{1}{\lambda_h} \eta_h \gamma_h - \frac{1}{\mu_h} \xi_h \delta_h \right) (y^{(b)} - y^{(a)}) + \sum_1^n \left(\frac{1}{\nu_h} + \frac{1}{\lambda_h} \eta_h^2 + \frac{1}{\mu_h} \xi_h^2 \right) (r^{(b)} - r^{(a)}).$$

De ces formules découle le théorème suivant:

Par un point arbitraire conduisons des segments unitaires parallèles aux axes, et, à l'extrémité de chacun d'eux, concentrons une masse égale à l'inverse du coefficient correspondant. Les axes d'inertie de cet ensemble de masses sont parallèles aux axes principaux de l'élément composé et les moments principaux d'inertie sont les inverses $1/\lambda$ et $1/\mu$ des coefficients de traction.

En considérant ces axes d'inertie comme axes coordonnés, les coefficients de $r^{(b)} - r^{(a)}$ dans les expressions de $X^{(ab)}$ et $Y^{(ab)}$ seront respectivement égaux aux coordonnées η et ξ du centre de l'élément composé multipliées par $1/\lambda$ et $-1/\mu$.

BIBLIOGRAPHIE

Aux Travaux cités dans le Mémoire il faut ajouter:

- MAGGI, *Sull'interpretazione del nuovo teorema di Volterra sulla teoria dell'elasticità* (« Rend. Acc. dei Lincei », vol. XIV, 2^o sem.).
- TIMPE⁽²⁴⁾, *Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Function*. [Inaugural Dissertation, Göttingen (Leipzig 1905). « Zeitschrift für Math. und Phys. », Bd. LII; Voir « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XV, 1^{er} sem., p. 521].
- WEINGARTEN, *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi* (« Rend. R. Accademia dei Lincei », 5^e série, t. X).
- VOLTERRA, *Un teorema sulla teoria della elasticità* (Ibid., 5^e série, t. XIV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (Ibid., 5^e série, t. XIV); *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi* (Ibid., 5^e série, t. XIV); *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici* (Ibid. 5^e série, t. XIV); *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici*

(24) J'ai eu connaissance de la dissertation de M. TIMPE après la publication de mon Mémoire: *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi*. M. TIMPE avait résolu par des méthodes différentes un problème qui est traité dans ce Mémoire et d'autres analogues.

- (Ibid., 5^e série t. XIV); *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi* (Ibid., 5^e série, t. XIV); *Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici* (Ibid., 5^e série, t. XV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (« Nuovo Cimento » 5^e série, t. X, XI); *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles, professées à Stockholm* (Upsal, 1906 [in questo vol.: X, pp. 63-141], Leçons 1, 2, 3, 4).
- CESÀRO, *Sulle formole del Volterra fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche* (« Rend. R. Accademia di Napoli », 1906; « Nuovo Cimento », 5^e série, t. XII).
- ROLLA, *Esperienze illustrative per la teoria del Volterra su l'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (« Rend. R. Accademia dei Lincei », 5^e série, t. XVI).
- ALMANSI, *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici* (« Rend. R. Istituto Lombardo », 5^e série, t. XL).

TABLE DES CHAPITRES

	Page
INTRODUCTION	153
CHAPITRE I. — Théorèmes généraux sur l'équilibre	154
Note au Chapitre I	164
CHAPITRE II. — Les distorsions	165
CHAPITRE III. — Les efforts	174
CHAPITRE IV. — Distorsions et efforts dans un corps cyclique symétrique	181
CHAPITRE V. — Cylindre creux de révolution. Distorsion d'ordre 6	187
CHAPITRE VI. — Cylindre creux de révolution. Distorsion d'ordre 2	201
Note aux Chapitres V et VI	212
CHAPITRE VII. — Cylindre creux de révolution. Distorsions d'ordres 1, 3, 4, 5	214
Note aux Chapitres V, VI, VII	221
CHAPITRE VIII. — Système cyclique d'éléments élastiques pliables	222
CHAPITRE IX. — Système cyclique plan d'éléments élastiques pliables	234
BIBLIOGRAPHIE	241