

SUR LES BIRÉFRINGENCES ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE.

1. MM. Cotton et Mouton ont récemment montré⁽¹⁾ que le champ magnétique possède la propriété, semblable à celle découverte par Kerr pour le champ électrique, de rendre biréfringents certains liquides purs, tous diamagnétiques, tels que le sulfure de carbone, la benzine, la nitrobenzine, etc.

Le phénomène magnétique, quoique beaucoup plus faible, présente avec le phénomène électrique un parallélisme remarquable : les corps qui présentent le premier présentent aussi le second ; la variation avec la longueur d'onde est la même pour tous deux, et l'influence de la température vient encore confirmer l'impression qu'ils doivent avoir une origine commune.

MM. Cotton et Mouton ont été ainsi conduits, après l'étude expérimentale remarquable qui leur a fourni les résultats précédents, à formuler l'hypothèse, déjà émise par M. Larmor⁽²⁾ pour le phénomène de Kerr, que la biréfringence est due, dans un cas comme dans l'autre, à une action directrice exercée par le champ sur les molécules du liquide et qui les orienterait parallèlement les unes aux autres si l'agitation thermique ne s'y opposait.

Le mécanisme proposé est analogue à celui dont je me suis servi⁽³⁾ pour expliquer les propriétés des corps paramagnétiques, composés de molécules aimantées de façon permanente qu'un champ magnétique extérieur oriente de plus en plus complètement à mesure que son intensité augmente ; les mêmes procédés de calcul me permettent de développer quantitativement les conséquences de l'hypothèse formulée par MM. Cotton et Mouton et de montrer qu'elle suffit à expliquer complètement le phénomène de Kerr, comme celui qu'ils ont observé.

2. ORIENTATION DANS LE CHAMP ÉLECTRIQUE. — Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que les molécules de la substance considérée possèdent un axe principal de symétrie et ont par conséquent, aux points de vue électrique, magnétique et optique, la symétrie d'un ellipsoïde de révolution, avec la même direction d'axe pour les trois propriétés. Ce cas particulier, dans lequel entre certainement la benzine, conduit à des calculs beaucoup plus simples que celui de l'anisotropie complète. On traiterait d'ailleurs ce dernier cas en suivant la même marche et sans autre difficulté que l'intervention d'un plus grand nombre de paramètres. Le premier nous suffira pour montrer l'accord excellent de la théorie avec les faits.

La biréfringence magnétique n'ayant été observée jusqu'ici que sur des substances diamagnétiques, nous admettons tout d'abord que la molécule,

(1) A. COTTON et H. MOUTON, *C. R.*, 144 (1907) 229 ; *Ann. Ch. Ph.*, 11 (1907) 145 et 289 ; *A.*, 19 (1910) ; *A.*, 20 (1910) 194.

(2) J. LARMOR, *Phil. Trans.*, A, 190 (1898) 232.

(3) P. LANGEVIN, *Ann. Ch. Ph.*, 5 (1905) 70 et, dans le présent volume, p. 331.

en l'absence de champ extérieur, ne possède aucun moment magnétique, ni d'ailleurs aucune polarisation électrique, conformément aux hypothèses habituelles sur les di-électriques.

L'action directrice d'un champ extérieur est uniquement due à ce que la molécule ne se polarise pas avec la même facilité dans la direction de son axe et dans les directions perpendiculaires.

Occupons-nous d'abord du phénomène électrique.

Soit α_1 le coefficient de proportionnalité du moment pris par la molécule dans la direction de son axe à l'intensité du champ extérieur agissant dans cette direction, et α_2 le coefficient correspondant pour une direction perpendiculaire.

Si l'axe de la molécule fait l'angle θ avec la direction du champ h' dans lequel la molécule est placée, celle-ci va prendre un moment $\alpha_1 h' \cos \theta$ dans la direction de son axe et $\alpha_2 h' \sin \theta$ pour la direction perpendiculaire à l'axe dans le plan qui contient cet axe et la direction du champ.

Par raison de symétrie le champ \vec{h}' qui agit sur une molécule isolée est dirigé comme le champ électrique \vec{h} que l'on crée de l'extérieur au point où se trouve la molécule, mais diffère de celui-ci en intensité à cause de la polarisation des molécules environnantes.

Il est facile de calculer l'énergie potentielle relative de la molécule considérée et du champ h' qui la polarise : on sait qu'un système polarisable qui prend un moment diélectrique \vec{M} proportionnel au champ \vec{h} dans lequel il est placé, possède par rapport à celui-ci une énergie potentielle :

$$w = -\frac{1}{2} \vec{M} \cdot \vec{h}$$

égale à la moitié du produit scalaire des deux vecteurs \vec{M} et \vec{h} . Il en résulte dans le cas actuel :

$$w = -\frac{1}{2} [\alpha_1 h'^2 \cos^2 \theta + \alpha_2 h'^2 \sin^2 \theta] = -\frac{\alpha_2 h'^2}{2} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} h'^2 \cos^2 \theta.$$

En l'absence d'agitation thermique, les diverses molécules se placeraient toutes de manière que l'énergie potentielle w soit minimum, c'est-à-dire avec leur direction de plus facile polarisation parallèle au champ extérieur. Mais l'agitation thermique s'oppose à cette orientation commune et un équilibre statistique s'établit dans lequel les molécules se distribuent entre les diverses configurations possibles, c'est-à-dire entre les diverses valeurs possibles de l'angle θ , en suivant la loi fondamentale de théorie cinétique donnée par Boltzmann ⁽¹⁾. Le nombre des molécules dont l'axe est compris dans un angle solide $d\omega$ autour d'une direction caractérisée par l'angle θ est proportionnel à :

$$(1) \quad e^{-\frac{w}{rT}} d\omega.$$

⁽¹⁾ L. BOLTZMANN, *Théorie des gaz*. Trad. Gallotti, 1^{re} partie, p. 127, Gauthier-Villars, 1902.

T étant la température absolue du système et r la constante des gaz parfaits pour une seule molécule. Si N est le nombre des molécules par unité de volume de la substance, c la concentration de celle-ci en molécules-gramme par unité de volume et R la constante des gaz pour une molécule-gramme, on a :

$$(2) \quad Nr = Rc.$$

Si l'on prend pour angle solide $d\omega$ celui qui contient toutes les directions d'axes moléculaires faisant avec le champ extérieur des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$, on a :

$$d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

et si dN représente le nombre des molécules de l'unité de volume dont l'axe est situé dans l'angle solide considéré, on a :

$$(3) \quad dN = C_0 e^{-\frac{u}{rT}} \sin \theta d\theta$$

ou, comme il s'agit uniquement de la distribution entre les diverses orientations possibles :

$$(4) \quad dN = C e^{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2rT} h^2 \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta$$

La constante C est déterminée par la condition que le nombre total des molécules, pour l'ensemble des valeurs de θ depuis 0 jusqu'à π , soit égal à N ou :

$$(5) \quad N = C \int_0^\pi e^{\mu \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta$$

en posant :

$$\mu = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2rT} h^2.$$

La polarisation, ou moment électrique \vec{a} de la substance par unité de volume, est la somme géométrique des moments individuels des diverses molécules présentes dans l'unité de volume. Par raison de symétrie ce vecteur aura la direction de \vec{h} ou de \vec{h}' et sa valeur absolue sera la somme algébrique des projections des moments individuels sur cette direction. Pour une molécule d'axe orienté dans la direction θ , cette projection est :

$$(6) \quad (\alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta) h'$$

d'où :

$$(7) \quad a = h' \int (\alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta) dN = [\alpha_1 + J(\alpha_2 - \alpha_1)] N h'.$$

avec :

$$(8) \quad I = \frac{1}{N} \int \sin^2 \theta \, dN = \int_0^\pi e^{\mu \cos^2 \theta} \sin^3 \theta \, d\theta : \int_0^\pi e^{\mu \cos^2 \theta} \sin \theta \, d\theta.$$

Les expressions précédentes se simplifient si l'on remarque que, dans tous les cas réalisables, la quantité μ est toujours très petite devant l'unité.

Pour nous en convaincre, examinons ce qui se passe pour h' très petit : μ étant alors négligeable, on trouve aisément J égal à $\frac{2}{3}$, et par suite :

$$\vec{a} = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} N \vec{h}.$$

D'ailleurs, les centres des molécules restant distribués dans l'espace de manière irrégulière, le champ \vec{h}' qui agit sur une molécule est, comme dans le cas des milieux isotropes, le champ à l'intérieur d'une cavité sphérique creusée dans la substance, c'est-à-dire, en employant le système électrostatique d'unités :

$$\vec{h}' = \vec{h} + \frac{4\pi}{3} \vec{a}$$

\vec{a} est donc proportionnel à \vec{h} et le coefficient de proportionnalité est la *susceptibilité* diélectrique k de la substance, liée au pouvoir *inducteur spécifique* K par la relation :

$$K = 1 + 4\pi k.$$

On déduit de ces relations :

$$(9) \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{9(K-1)}{4\pi N(K+2)},$$

$$k = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} N \frac{K+2}{3}, \quad h' = \frac{K+2}{3} \vec{h}.$$

Il est facile de tirer de là une limite supérieure de la quantité μ ; on a, en effet, en ne considérant que les valeurs absolues :

$$(10) \quad \alpha_1 - \alpha_2 < \alpha_1 + 2\alpha_2$$

$$\mu < \frac{9}{8\pi N r T} \frac{K-1}{K+2} h'^2 < \frac{9}{8\pi R T c} h'^2.$$

Les plus grandes valeurs réalisables pour le champ h sont inférieures à 100 000 V par centimètre, ou environ 300 unités électrostatiques C. G. S.; d'autre part, pour les liquides purs étudiés, le poids moléculaire est de l'ordre de 100, la densité voisine de l'unité, de sorte que la concentration c en molécules-gramme par centimètre cube est de l'ordre de $\frac{1}{100}$; enfin R a pour valeur

$8,3 \times 10^7$ en unités C. G. S., et, à la température ordinaire, T est voisin de 300 ; dans ces conditions :

$$\mu < 1,5 \times 10^{-4}$$

μ est donc au plus de l'ordre du $\frac{10}{1000}$ dans les champs les plus intenses, pour les liquides considérés. Cela signifie que la distribution des axes moléculaires entre les diverses directions s'écartera toujours extrêmement peu de l'uniformité qui existe en l'absence de champ électrique : l'agitation thermique l'emportera toujours de beaucoup sur l'action directrice du champ extérieur.

La très faible anisotropie d'orientation des molécules sera révélée par les phénomènes optiques, extrêmement sensibles, si les molécules n'ont pas les mêmes propriétés optiques dans la direction de l'axe et dans les directions perpendiculaires ; mais cette anisotropie ne se fera pas sentir dans les propriétés électriques : la polarisation \vec{a} restera proportionnelle au champ, au degré de précision des mesures, pour toutes les valeurs de celui-ci.

En effet, étant donnée la très faible valeur de μ , nous pouvons utiliser des développements suivant les puissances croissantes de μ , limités aux tout premiers termes. En remplaçant ainsi :

$$e^{\mu \cos^2 \theta}$$

par $1 + \mu \cos^2 \theta$, on obtient, au même degré d'approximation :

$$(11) \quad J = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2\mu}{15} \right)$$

et par suite :

$$\vec{a} = \left[\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} + \frac{4\mu(\alpha_1 - \alpha_2)}{45} \right] N h.$$

- Étant donné l'ordre de grandeur de μ , le second terme entre crochets est tout à fait négligeable par rapport au premier, et le commencement d'orientation des molécules ne se fait pas sentir sur le coefficient de proportionnalité de la polarisation au champ.

Le calcul précédent permet d'obtenir de manière complète la loi de variation de la polarisation avec le champ pour un liquide composé de molécules anisotropes ; cette loi ne s'écarterait de la proportionnalité que pour des liquides de très grand poids moléculaire, pris à température aussi basse que possible.

Dans les conditions ordinaires, la loi de distribution (4) devient :

$$(12) \quad dN = \left[1 + \mu \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \right] \sin \theta d\theta$$

c'est-à-dire qu'elle s'écarte de la distribution isotrope de quantités proportionnelles à μ ou au carré du champ électrique. La biréfringence que nous montrerons proportionnelle à μ , devra varier elle aussi, proportionnellement au carré du champ : c'est précisément la loi de Kerr. Soient n_1 et n_2 les indices

de réfraction pour deux rayons lumineux de longueur d'onde λ dans le vide, se propageant perpendiculairement au champ électrique et polarisés, le premier perpendiculairement, le deuxième parallèlement à la direction du champ; l'expérience donne :

$$(13) \quad \frac{n_1 - n_2}{\lambda} = \gamma h^2$$

γ étant la *constante de Kerr*, variable avec la longueur d'onde et la nature de la substance; cette biréfringence électrique, mesurée par γh^2 , doit être proportionnelle à μ avec un coefficient déterminé par les propriétés optiques de la substance, par la dissymétrie optique des molécules. Nous examinerons de plus près cette relation entre la biréfringence et l'anisotropie d'orientation déterminée par le coefficient μ .

Il nous sera commode, pour la suite, de caractériser la *dissymétrie électrique* de la substance par le rapport :

$$(14) \quad \delta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + 2\alpha_2}$$

nécessairement inférieur à l'unité en valeur absolue.

En vertu des équations (2), (6) et (9), μ s'exprime en fonction de δ par la relation :

$$(15) \quad \mu = \frac{(K-1)(K+2)}{8\pi RTc} \delta h^2.$$

3. ORIENTATION DANS LE CHAMP MAGNÉTIQUE. — Sous l'action d'un champ magnétique H , les molécules se polarisent diamagnétiquement par un mécanisme dont j'ai développé ailleurs la théorie; la faiblesse de cette polarisation rend inutile ici la distinction entre le champ qui agit sur une molécule et le champ magnétique H créé de l'extérieur.

Si les molécules sont dissymétriques et si l'axe de l'une d'elles fait l'angle θ avec la direction du champ magnétique, les composantes de son moment magnétique dans la direction de l'axe et perpendiculairement à celui-ci seront respectivement :

$$\beta_1 H \cos \theta \quad \text{et} \quad \beta_2 H \sin \theta$$

β_1 et β_2 étant deux coefficients caractéristiques de la molécule au point de vue magnétique et d'ailleurs négatifs tous deux.

Comme dans le cas du champ électrique, si β_1 et β_2 sont différents, le moment résultant de la molécule ne sera pas dans la direction du champ et il en résultera un couple tendant à placer la molécule avec sa direction de moindre susceptibilité diamagnétique dans la direction du champ. Cette action, superposée à l'agitation thermique, donnera lieu à un équilibre statistique avec une loi de distribution des axes moléculaires entre les diverses orientations possibles donnée par la formule :

$$(16) \quad dN = C'e \frac{\beta_1 - \beta_2}{2rT} H^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

en posant :

$$(17) \quad \mu' = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2rT} H^2$$

la constante C' est déterminée par l'équation :

$$N = C' \int_0^\pi e^{\mu' \cos^2 \theta} \sin \theta \, d\theta.$$

D'une analyse semblable à celle du paragraphe précédent, il résultera pour l'aimantation A ou polarisation magnétique de la substance, la valeur :

$$(18) \quad A = [\beta_1 + J(\beta_2 - \beta_1)]NH$$

avec :

$$J = \frac{1}{N} \int \sin \theta \, dN = \int_0^\pi e^{\mu' \cos^2 \theta} \sin^3 \theta \, d\theta : \int_0^\pi e^{\mu' \cos^2 \theta} \sin \theta \, d\theta.$$

Quand H est très faible, la *susceptibilité magnétique* χ de la substance, coefficient de proportionnalité de A à H , est donnée par :

$$(19) \quad \chi = \frac{\beta_1 + 2\beta_2}{3} N.$$

En introduisant pour mesurer la *dissymétrie magnétique* le rapport :

$$(20) \quad \Delta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + 2\beta_2}$$

nécessairement inférieur à l'unité en valeur absolue, la quantité μ' qui mesure l'anisotropie d'orientation due au champ magnétique est donnée, en tenant compte de (17), (19) et (20), par :

$$(21) \quad \mu' = \frac{3\chi}{2RTc} \Delta H^2.$$

Cette formule se déduit aisément de la formule électrique correspondante (15) en remplaçant dans cette dernière le pouvoir inducteur spécifique K par la perméabilité $1 + 4\pi\chi$ et en tenant compte de la petitesse de χ par rapport à l'unité.

On déduit facilement de là que μ' est toujours très petit : les valeurs réalisables de H sont toujours inférieures à 10^5 unités électromagnétiques C. G. S. ; χ pour les liquides est inférieur à 10^{-6} , c est de l'ordre 10^{-2} et Δ est inférieur à l'unité ; donc :

$$\mu' < 10^{-4}.$$

L'anisotropie d'orientation due au champ magnétique est donc toujours

extrêmement faible, et l'on peut, en se limitant aux termes du premier ordre en μ' , écrire pour la relation entre l'aimantation et le champ :

$$\Lambda = \left[\frac{\beta_1 + 2\beta_2}{3} + \frac{4\mu(\beta_1 - \beta_2)}{45} \right] \text{NH} = \left[1 + \frac{4\mu'\Delta}{15} \right] \chi \text{H}.$$

La susceptibilité n'est donc pas modifiée de manière appréciable par l'effet d'orientation et, pour cette raison, j'ai pu à bon droit négliger cet effet dans la théorie des phénomènes diamagnétiques. Mais il se trouve que les phénomènes optiques sont assez délicats pour mettre en évidence cette conséquence de la dissymétrie moléculaire; MM. Cotton et Mouton ont eu le grand mérite d'en signaler l'importance.

La loi de distribution donnée par (16) devient, au même ordre d'approximation :

$$(22) \quad dN = \left[1 + \mu' \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \right] \sin \theta \, d\theta$$

et correspond à une biréfringence proportionnelle à μ' , de la même manière dont la biréfringence électrique est proportionnelle à μ .

On retrouve ainsi la proportionnalité de la biréfringence magnétique au carré du champ, obtenue expérimentalement par Cotton et Mouton; d'après la formule :

$$(23) \quad \frac{n_1 - n_2}{\lambda} = \text{CH}^2$$

où la constante C joue le même rôle que la constante γ de Kerr.

4. COMPARAISON DES DEUX BIRÉFRINGENCES. — Si nous admettons, comme l'indiquent les faits expérimentaux, que les deux effets magnétique et électrique sont dus à une même cause, l'anisotropie d'orientation, la biréfringence doit être la même lorsque l'anisotropie d'orientation est la même, que son origine soit électrique ou magnétique, c'est-à-dire lorsque μ est égal à μ' . Autrement dit, les biréfringences magnétique et électrique doivent être entre elles comme μ' est à μ .

Donc :

$$\frac{\text{CH}^2}{\gamma h^2} = \frac{\mu'}{\mu}$$

ou encore, en vertu de (15) et (23) :

$$(24) \quad \frac{\Delta}{\delta} = \frac{(K-1)(K+2)C}{12\pi\chi\gamma}$$

Si donc l'explication proposée est exacte, le rapport $\frac{\Delta}{\delta}$ des deux dissymétries magnétique et électrique peut se calculer en fonction de grandeurs données toutes par l'expérience.

Je vais faire l'application numérique de ce résultat pour le benzol et le sulfure de carbone dont les diverses constantes électriques et magnétiques sont bien connues; il résulte d'ailleurs des expériences de Cotton et Mouton sur la dispersion des deux biréfringences que le rapport $\frac{C}{\gamma}$, comme le veut la formule (24), est indépendant de la longueur d'onde; il suffira donc de prendre les valeurs de ces constantes pour une même longueur d'onde, celle de la raie D du sodium par exemple.

Pour le benzol, on a, en unités C. G. S., électromagnétiques pour α et C , électrostatiques pour K et γ :

$$\alpha = -0,7 \times 10^{-6} \quad C = 7,5 \times 10^{-13} \quad K = 2,21 \\ \gamma = 0,38 \times 10^{-7}$$

d'où :

$$\frac{\Delta}{\delta} = -3,8.$$

Pour le sulfure de carbone, avec les mêmes unités :

$$\alpha = -0,77 \times 10^{-6} \quad C = -5,7 \times 10^{-13} \quad K = 2,72 \quad \gamma = 3,7 \times 10^{-7} \\ \frac{\Delta}{\delta} = +0,43.$$

Pour ces deux liquides le rapport des dissymétries est assez voisin de l'unité; il n'y a par conséquent pas de disproportion entre les deux dissymétries électrique et magnétique; les deux liquides appartiennent cependant à des types très différents : dans la benzine, les deux dissymétries ont des sens opposés; la direction de plus facile polarisation électrique est en même temps celle de plus difficile polarisation diamagnétique, et d'autre part la dissymétrie magnétique γ est plus grande que l'autre. Pour le sulfure de carbone, le contraire a lieu au point de vue du sens et de la grandeur relative.

Pour le nitrobenzol, le phénomène de Kerr est énorme, environ mille fois plus grand que pour le benzol; cette différence est due à la très grande valeur du pouvoir inducteur spécifique du nitrobenzol grâce auquel un faible champ électrique peut produire un effet d'orientation considérable. Il est remarquable que, malgré la très grande différence des biréfringences électriques, le rapport des dissymétries $\frac{\Delta}{\delta}$ reste le même pour le nitrobenzol que pour le benzol. On a en effet pour le premier de ces corps, à la température de 22° environ :

$$\alpha = -0,75 \times 10^{-6} \quad C = 2,9 \times 10^{-12} \quad K = 36 \quad \gamma = 3,5 \times 10^{-5}$$

d'où :

$$\frac{\Delta}{\delta} = -3,8.$$

Les vérifications quantitatives de la théorie précédente vont ressortir d'une analyse plus détaillée de la relation entre la biréfringence et l'anisotropie d'orientation. Nous en déduirons tout d'abord des relations conformes aux faits entre les indices n_1 et n_2 et l'indice n_0 du liquide à l'état normal d'orientation isotrope.

Nous y trouverons ensuite le moyen de calculer la dissymétrie électrique δ puis la dissymétrie magnétique Δ en utilisant les rapports précédents. Et les valeurs ainsi obtenues *seront inférieures à l'unité*, prouvant ainsi la cohérence de notre théorie.

5. RÉFRACTION PAR DES MOLÉCULES DISSYMMÉTRIQUES. — Pour aller plus loin, nous allons reprendre la théorie électromagnétique de la propagation d'une onde périodique plane dans un milieu contenant des molécules dissymétriques à axe principal.

Dans chacune de ces molécules nous admettons la présence d'électrons liés auxquels la molécule doit à la fois ses propriétés électriques et ses propriétés optiques. Pour que ces propriétés soient dissymétriques, il est nécessaire que les forces intérieures à la molécule qui tendent à ramener un électron lié vers sa position d'équilibre quand il en est écarté ne suivent pas la même loi dans les diverses directions. Soient, pour cet électron particulier, x et y les composantes, parallèle et perpendiculaire à l'axe moléculaire, du déplacement à partir de la position d'équilibre; nous représenterons par $-c_1x$ et $-c_2y$ les composantes dans ces mêmes directions de la force qui résulte de ce déplacement. Si e est la charge électrique et m la masse de cet électron, et si h' représente comme précédemment le champ électrique agissant sur la molécule dans une direction qui fait l'angle ε avec l'axe de celle-ci, les équations du mouvement de l'électron sont données par :

$$(25) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + c_1x = eh' \cos \varepsilon,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + c_2y = eh' \sin \varepsilon.$$

Si le champ h' est produit par le passage d'une onde plane polarisée rectilignement, de période T ou de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$, l'angle ε reste constant et h est de la forme :

$$h = h'_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Les équations (25) admettent pour solution de régime permanent :

$$x = \frac{eh' \cos \varepsilon}{c_1 - m\omega^2} \quad y = \frac{eh' \sin \varepsilon}{c_2 - m\omega^2}.$$

Le déplacement des électrons intérieurs à la molécule donne à celle-ci un moment électrostatique égal à la somme géométrique des produits obtenus en

multipliant pour chaque électron son déplacement par sa charge. Il en résulte pour la projection de ce moment sur la direction du champ h' :

$$(26) \quad \sum e(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon) = \sum \left(\frac{e^2 h' \cos^2 \varepsilon}{c_1 - m\omega^2} + \frac{e^2 h' \sin^2 \varepsilon}{c_2 - m\omega^2} \right)$$

la sommation s'étendant à tous les électrons présents dans une molécule. Posons :

$$(27) \quad \sigma_1 = \sum \frac{e^2}{c_1 - m\omega^2} \quad \sigma_2 = \sum \frac{e^2}{c_2 - m\omega^2}$$

il vient pour la projection du moment moléculaire sur la direction du champ :

$$(28) \quad (\sigma_1 \cos \varepsilon + \sigma_2 \sin \varepsilon) h'$$

Les coefficients σ_1 et σ_2 sont deux constantes caractéristiques de la molécule au point de vue optique, à partir desquelles nous définissons la *dissymétrie optique* de celle-ci, comme nous avons défini la dissymétrie électrique à partir de α_1 et α_2 . Il y a d'ailleurs un lien étroit entre les σ et les α , qui résulte de la comparaison des équations (6) et (28). Si l'on suppose h' constant, c'est-à-dire ω égal à zéro, les σ deviennent égaux aux α . La *dissymétrie optique* :

$$(29) \quad \delta_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2}$$

variable avec la longueur d'onde, se confond avec la *dissymétrie électrique* δ pour une longueur d'onde infinie.

Il n'est peut-être pas inutile de montrer qu'on obtient aisément un modèle simple pour la molécule dissymétrique envisagée ici en modifiant légèrement l'atome de J.-J. Thomson⁽¹⁾. On sait que ce physicien imagine une sphère remplie d'électricité positive avec une densité uniforme en volume et, mobiles à son intérieur, des électrons négatifs dont la charge totale est égale en valeur absolue à celle de la sphère. Un semblable modèle a déjà rendu de grands services, tant à J.-J. Thomson lui-même qu'à d'autres physiciens, H. A. Lorentz en particulier⁽²⁾. Il nous suffira de remplacer la sphère par un ellipsoïde de révolution, par exemple, pour avoir un système dont les diverses directions correspondent à des propriétés électriques et optiques différentes. Il suffirait d'admettre une circulation permanente de ces mêmes électrons pour représenter également les propriétés magnétiques.

Remarquons encore que la dissymétrie supposée correspond à l'existence, pour chaque électron, de deux périodes propres, avec les pulsations :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$$

(1) J.-J. THOMSON. *The corpuscular theory of matter*. Chap. 6 et 7. Londres, 1907.

(2) H. A. LORENTZ. *The theory of electrons* (Teubner, 1909) 117.

sur lesquelles on pourra être renseigné par les spectres d'émission ou d'absorption de la substance ou encore par sa loi de dispersion. Nous verrons plus loin, en appliquant nos formules au cas des cristaux biréfringents, qu'on peut tirer de cette remarque des vérifications quantitatives de la théorie.

La contribution apportée par la molécule considérée à la *polarisation électrique* de la substance sous l'action de l'onde lumineuse étant donnée par la formule (28), cette polarisation aura pour valeur :

$$(30) \quad a = h' \int (\sigma_1 \cos^2 \varepsilon + \sigma_2 \sin^2 \varepsilon) dN = Ph'.$$

Supposons d'abord les molécules orientées indifféremment dans toutes les directions; on peut prendre :

$$dN = \frac{N}{2} \sin \varepsilon d\varepsilon$$

et l'intégrale P devient :

$$(31) \quad P_0 = \frac{N}{2} \int_0^\pi [\sigma_1 \cos^2 \varepsilon + \sigma_2 \sin^2 \varepsilon] \sin \varepsilon d\varepsilon = N \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3}.$$

Si les molécules ne sont pas orientées de manière isotrope, l'intégrale P est variable avec la direction du champ h' , c'est-à-dire avec le plan de polarisation de l'onde considérée; il y a biréfringence.

Si la distribution des axes moléculaires est déterminée par l'angle θ que forme l'axe d'une molécule avec une direction privilégiée (champ électrique constant dans le phénomène de Kerr ou champ magnétique dans le phénomène de Cotton et Mouton), nous considérerons deux cas principaux dans lesquels le plan de polarisation sera perpendiculaire (onde extraordinaire) ou parallèle (onde ordinaire) à cette direction privilégiée.

Dans le premier cas, le champ électrique dans l'onde, et par suite le champ h' que celle-ci fait agir sur une molécule, est parallèle à la direction privilégiée; l'angle ε se confond avec θ et l'on obtient pour P la valeur particulière P_1 :

$$(32) \quad P_1 = \int (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta) dN = [\sigma_1 + J(\sigma_2 - \sigma_1)]N$$

J représentant toujours l'intégrale :

$$J = \frac{1}{N} \int \sin^2 \theta dN.$$

Dans le second cas, h' est perpendiculaire à la direction privilégiée autour de laquelle sont distribués les axes moléculaires, et l'on obtient sans peine pour la valeur P_2 de l'intégrale P dans ce cas particulier :

$$(33) \quad P_2 = \left[\sigma_2 + \frac{J}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \right] N$$

Il n'y a pas lieu de tenir compte d'une influence du champ électrique ou du champ magnétique présents dans l'onde lumineuse sur l'orientation des molécules; pour les radiations ordinairement employées, l'intensité de ces champs est beaucoup trop faible: l'onde lumineuse prend les molécules telles que les dispose l'influence du champ électrique ou du champ magnétique extérieurs.

Dans la relation (30), relative à une direction déterminée du plan d'onde, remplaçons le champ h' , dû à l'action superposée de l'onde lumineuse et de la polarisation \vec{a} qu'elle produit en fonction du champ h dans cette onde, il vient:

$$(34) \quad a = P \left(h + \frac{4\pi a}{3} \right)$$

première relation entre \vec{a} et h .

Pour en obtenir une seconde, il nous faut écrire les équations de propagation sous la forme de Maxwell-Hertz, où Z désignera la direction normale au plan de l'onde. Dans les cas principaux considérés pour la direction de ce plan, ou dans le cas d'une substance isotrope, le champ électrique h qu'elle produit est situé dans le plan de l'onde, et les équations, écrites dans le système électrostatique C. G. S. prennent la forme particulièrement simple:

$$V^2 \frac{dh}{dz} = \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dH}{dz} = \frac{db}{dt}$$

V est la vitesse de la lumière dans le vide, H le champ magnétique dans l'onde et $b = h + 4\pi a$ est l'induction électrique produite par l'onde. En éliminant H entre ces équations et remplaçant b par sa valeur, il vient:

$$V^2 \frac{d^2h}{dz^2} = \frac{d^2}{dt^2} (h + 4\pi a)$$

Si n est l'indice de réfraction de la substance pour l'onde considérée, celle-ci se propage avec la vitesse $\frac{V}{n}$ (vitesse de la phase) et h est de la forme:

$$h = h_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{nz}{V} \right) + \varphi \right].$$

D'où, entre a et h , la relation:

$$(35) \quad n^2 h = h + 4\pi P a.$$

L'élimination de h et a entre (34) et (35) conduit à la relation:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi P}{3}.$$

En désignant par n_0 l'indice de la substance à l'état isotrope, par n_1 et n_2 les indices extraordinaire et ordinaire de cette même substance rendue biréfringente par orientation des axes moléculaires, on obtient, en application de la relation précédente :

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} &= \frac{4\pi}{3} P_0 = \frac{4\pi N}{3} \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3}, \\ \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} &= \frac{4\pi}{3} P_1 = \frac{4\pi N}{3} [\sigma_1 + J(\sigma_2 - \sigma_1)] \\ \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} &= \frac{4\pi}{3} P_2 = \frac{4\pi N}{3} \left[\sigma_2 + \frac{J}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right]. \end{aligned}$$

6. CALCUL DE LA BIRÉFRINGENCE. — Dans les expériences sur la biréfringence électrique ou magnétique, la lumière se propage perpendiculairement à la direction privilégiée (champ électrique ou magnétique). Le *retard optique* entre les deux composantes polarisées perpendiculairement et parallèlement à cette direction est donné par la différence $n_2 - n_1$; les *retards absolus* des deux composantes sont donnés par les différences $n_1 - n_0$ et $n_2 - n_0$.

En retranchant deux à deux les équations (36) et en tenant compte de ce fait que n_1 et n_2 diffèrent toujours extrêmement peu de n_0 à cause de la très faible anisotropie d'orientation, on obtient pour déterminer les retards :

$$(37) \quad \frac{n_0(n_1 - n_0)}{(n_0^2 + 2)^2} = \frac{2\pi N}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{2}{3} - J \right),$$

$$(38) \quad \frac{n_0(n_2 - n_0)}{(n_0^2 + 2)^2} = \frac{\pi N}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) \left(J - \frac{2}{3} \right),$$

$$(39) \quad \frac{n_0(n_1 - n_2)}{(n_0^2 + 2)^2} = \pi N (\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{2}{3} - J \right).$$

La comparaison des deux relations (37) conduit à :

$$(39) \quad \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_0} = -2.$$

Les deux retards absolus sont de signes contraires et doubles l'un de l'autre ; on retrouve ainsi dans l'hypothèse de l'orientation moléculaire un résultat conforme aux faits observés dans les cas où la mesure des deux retards absolus a pu être faite avec quelque précision : par M. Aeckerlein⁽¹⁾ pour le phénomène de Kerr de la nitrobenzine et par MM. Cotton et Mouton⁽²⁾ pour la biréfringence magnétique des solutions colloïdales.

La relation (39) avait déjà été obtenue théoriquement par M. Havelock⁽³⁾

(1) AEGKERLEIN, *Phys. Zeits.*, 7 (1906) 600.

(2) COTTON et MOUTON, *Ann. Ch. Ph.*, 20 (1910) 225.

(3) HAVELock, *Proc. Roy. Soc.*, 77 (1906) 170 et 80 (1908) 28.

en admettant une distribution de molécules symétriques en réseau anisotrope; MM. Cotton et Mouton⁽⁴⁾ ont montré qu'une telle explication ne saurait convenir aux phénomènes qui nous occupent.

La formule (38) qui donne le retard relatif des deux composantes peut se mettre sous une autre forme en faisant intervenir la dissymétrie optique θ_0 par l'intermédiaire de (29) et (33); il vient :

$$(40) \quad \frac{n_0(n_1 - n_2)}{(n_0^2 - 1)(n_0^2 + 2)} = \frac{9}{4}\delta_0\left(\frac{2}{3} - J\right).$$

7. APPLICATION AU PHÉNOMÈNE DE KERR. — Remplaçons dans (40) l'intégrale J par son expression (11) en fonction de la quantité μ qui caractérise l'anisotropie d'orientation autour de la direction du champ électrique h , et cette quantité μ elle-même par son expression (15) en fonction de la dissymétrie électrique δ ; on obtient :

$$(41) \quad \frac{n_0(n_1 - n_2)}{(n_0^2 - 1)(n_0^2 + 2)} = \frac{\mu\delta_0}{5} = \frac{(K - 1)(K + 2)}{40\pi RTc} \delta\delta_0 h^2.$$

Remplaçant $n_1 - n_2$ par sa valeur (13) en fonction du champ, on obtient finalement l'expression de la constante de Kerr :

$$(42) \quad \gamma = \frac{(K - 1)(K + 2)(n_0^2 - 1)(n_0^2 + 2)}{40\pi RTcn_0} \delta\delta_0.$$

Cette relation se simplifie et permet le calcul de la dissymétrie électrique δ dans le cas des substances qui, comme le benzol et le sulfure de carbone, suivent la relation de Maxwell $K = n_0^2$. Lorsqu'il en est ainsi, on doit considérer que les termes en $m\omega^2$ deviennent négligeables dans les sommes σ_1 et σ_2 et, par suite, on peut admettre que δ_0 est égal à δ ; la relation (42), résolue par rapport à δ en tenant compte de l'égalité entre le pouvoir inducteur spécifique et le carré de l'indice, devient :

$$(43) \quad \delta = \frac{\sqrt{40\pi RTcn_0\lambda\gamma}}{(K - 1)(K + 2)}.$$

Le second membre est entièrement calculable à partir des données expérimentales; en utilisant les valeurs de γ données plus haut et relatives à la lumière jaune du sodium, ainsi que les valeurs obtenues pour les rapports des dissymétries électrique δ et magnétique Δ , on obtient pour le benzol et le sulfure de carbone les résultats suivants pour les valeurs absolues des dissymétries :

	δ	Δ
Benzol.....	0,065	0,25
Sulfure de carbone.....	0,14	0,06

(4) COTTON et MOUTON, *loc. cit.*, 225.

Ces valeurs, toutes inférieures à l'unité, montrent que le phénomène de Kerr et la biréfringence magnétique de ces liquides s'expliquent complètement de manière quantitative par l'hypothèse de l'orientation moléculaire.

Envisagés à ce point de vue, ces phénomènes manifestent et permettent de calculer les dissymétries électrique, magnétique et optique des molécules.

8. DISPERSION DE LA BIRÉFRINGENCE. — FORMULE DE HAVELOCK. — La loi de dispersion est contenue dans les formules (36) où la longueur d'onde figure dans σ_1 et σ_2 par l'intermédiaire de la pulsation ω .

En éliminant ω entre les trois relations (36), on peut obtenir entre les indices n_0 , n_1 et n_2 deux relations indépendantes de la longueur d'onde : une première est donnée par l'élimination de σ_1 et σ_2 entre les relations (36). On obtient ainsi :

$$(44) \quad 3 \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} = \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} + 2 \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2}$$

qui se réduit à la formule (39) quand on suppose n_1 et n_2 très voisins de n_0 .

Pour obtenir la deuxième relation indépendante de la longueur d'onde, désignons par ν_0 , ν_1 et ν_2 les premiers membres des relations (36); en résolvant les deux dernières de celles-ci par rapport à σ_1 et σ_2 , on obtient :

$$(45) \quad \begin{aligned} \frac{4\pi N}{3} \sigma_1 &= \frac{\nu_1(2 - J) - 2\nu_2 J}{2 - 3J} \\ \frac{4\pi N}{3} \sigma_2 &= \frac{2\nu_2(1 - J) - \nu_1 J}{2 - 3J} \end{aligned}$$

σ_1 et σ_2 sont en général des fonctions compliquées de ω , et l'élimination de cette quantité entre les égalités (45) ne conduit à une formule simple que si l'on admet dans la molécule une seule espèce d'électrons. En désignant par p le nombre de ces électrons par molécule, on a, d'après (27) :

$$(46) \quad \sigma_1 = \frac{pe^2}{c_1 - m\omega^2} \quad \sigma_2 = \frac{pe^2}{c_2 - m\nu^2}$$

et l'élimination de ω donne :

$$(47) \quad \frac{1}{\nu_1(2 - J) - 2\nu_2 J} - \frac{1}{2\nu_2(1 - J) - \nu_1 J} = \frac{3(c_1 - c_2)}{4\pi N e^2 p(2 - 3J)} = C^{te}$$

Dans le cas où ν_1 et ν_2 diffèrent peu de ν_0 , cette relation prend la forme :

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_0^2} = \frac{3(c_2 - c_1)(2 - 3J)}{8\pi N e^2 p} = C^{te}$$

ou bien encore, en fonction des indices :

$$\frac{n_0(n_1 - n_2)}{(n_0^2 - 1)^2} = C^{te}$$

C'est la formule obtenue par M. Havelock dans l'hypothèse rappelée plus haut. MM. Cotton et Mouton ont montré qu'elle est sensiblement vérifiée dans le cas de la biréfringence magnétique. Elle ne correspond qu'à un cas particulier de notre théorie.

9. APPLICATIONS AUX CRISTAUX UNIAXES. — La possibilité d'expliquer la biréfringence des cristaux par la dissymétrie individuelle des molécules plutôt que par l'anisotropie de leur réseau a été indiquée par M. Larmor. Il est facile d'étendre au cas des cristaux uniaxes les formules générales que nous avons établies. On doit supposer ici que toutes les molécules sont orientées parallèlement, avec leur axe parallèle à l'axe du cristal. L'angle θ de l'axe moléculaire avec la direction générale d'orientation est donc nul pour toutes les molécules; il en résulte que l'intégrale J est égale à zéro.

Les formules (45) deviennent dans ce cas :

$$(48) \quad \nu_1 = \frac{4\pi N}{3} \sigma_1 \quad \nu_2 = \frac{4\pi N}{3} \sigma_2$$

Si l'on admet, comme précédemment, qu'une seule catégorie d'électrons joue un rôle important dans la réfraction, ces relations deviennent :

$$(49) \quad \nu_1 = \frac{4\pi N e^2 p}{3(c_1 - m\omega^2)} \quad \nu_2 = \frac{4\pi N e^2 p}{3(c_2 - m\omega^2)}$$

Et l'élimination de ω conduit à :

$$(50) \quad \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} = C''$$

ou encore

$$\frac{1}{n^2 - 1} - \frac{1}{n_2^2 - 1} = C''.$$

C'est la relation obtenue par M. Havelock en admettant l'anisotropie du réseau. L'expérience la vérifie mais ne permet pas de choisir entre les deux théories, au moins par ce procédé.

On peut au contraire, obtenir de la manière suivante une confirmation de l'hypothèse que la dissymétrie des molécules joue le rôle essentiel dans la double réfraction : nous avons remarqué plus haut que cette hypothèse conduit à introduire des périodes propres différentes pour les vibrations effectuées par les électrons dans la direction de l'axe moléculaire ou perpendiculairement à cet axe. Nous avons vu que les pulsations correspondantes ω_1 et ω_2 sont données par :

$$(51) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$$

Ceci correspond à des raies d'absorption différentes pour les rayons ordinaires et extraordinaires; la double réfraction impliquerait ainsi le dichroïsme

Pour représenter la dispersion du quartz, M. Martens⁽¹⁾ a dû admettre en effet pour les rayons extraordinaires une raie d'absorption dans l'ultra-violet de longueur d'onde $\lambda_1 = 1022$ unités Angström, et pour les rayons ordinaires une raie voisine $\lambda_2 = 1014$.

En admettant que les termes essentiels dans la dispersion du quartz sont ceux qui correspondent à ces raies ultra-violettes et en considérant la biréfringence dans l'infra-rouge pour avoir le droit de négliger $m\omega^2$ dans les expressions (46) il vient, si l'on divise membre à membre les relations (49) :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$$

Ou, comme la biréfringence est faible dans le cas du quartz :

$$(52) \quad \frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$$

En substituant aux indices les valeurs obtenues par M. Carvallo pour la longueur d'onde 21719 :

$$n_1 = 1,526 \quad n_2 = 1,518$$

on obtient pour le premier membre de (52) la valeur 1,019, tandis que le second membre, calculé d'après les valeurs de λ_1 et λ_2 données par M. Martens est égal à 1,016.

L'accord est assez remarquable pour justifier un examen plus approfondi de cette connexion entre la biréfringence et le dichroïsme des uniaxes.

10. CAS DU PARAMAGNÉTISME. — Il est remarquable que la biréfringence magnétique ait été observée jusqu'ici uniquement sur des substances diamagnétiques : si la théorie de l'orientation moléculaire, comme il semble bien résulter de ce qui précède, suffit à expliquer les phénomènes, on doit s'attendre à rencontrer la même propriété dans les substances paramagnétiques.

Cherchons ce qu'on peut prévoir dans ce sens. J'ai montré que les phénomènes paramagnétiques s'interprètent en supposant à chaque molécule un moment magnétique constant M qu'un champ magnétique extérieur H tend à orienter dans sa direction. Si θ est l'angle de M et de H , l'énergie potentielle relative de la molécule et du champ est :

$$w = -MH \cos \theta$$

et la loi de distribution des molécules entre les diverses orientations est donnée par :

$$(53) \quad dN = Ce^{\frac{MH}{rT} \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

(1) MARTENS, *Ann. d. Phys.*, 6 (1901) 603.

En déterminant la constante C par la condition :

$$N = C \int_0^\pi e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

et posant :

$$a = \frac{MH}{rT}$$

il vient :

$$C = \frac{N \operatorname{Sh} a}{2a}$$

L'aimantation A prise par la substance est :

$$A = \int M \cos \theta dN = NM \left[\frac{\operatorname{Ch} a}{\operatorname{Sh} a} - \frac{1}{a} \right]$$

Dans le cas du paramagnétisme a est toujours très petit, A est proportionnel à H et la susceptibilité correspondante α pour valeur :

$$\alpha = \frac{NM^2}{2rT}$$

ou, en désignant par I l'aimantation à saturation $I = NM$ dont le corps est susceptible, et en tenant compte de (2) :

$$\alpha = \frac{I^2}{2RTc}$$

d'où :

$$a = \frac{MH}{rT} = \frac{IH}{RTc} = H \sqrt{\frac{2\alpha}{RTc}}$$

Pour calculer la biréfringence due à l'orientation paramagnétique donnée par (53), il faut connaître la valeur correspondante de l'intégrale J qui détermine la biréfringence d'après l'équation (38). On obtient facilement d'après la définition de J, et en supposant a petit :

$$J = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{a^2}{15} \right)$$

D'où, pour déterminer la biréfringence, l'équation :

$$\frac{n_0(n_1 - n_2)}{(n_0^2 + 2)^2} = \pi N (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{4\alpha H^2}{45RTc}$$

Tandis que, pour une substance diamagnétique de susceptibilité α' on obtient, en tenant compte des relations données plus haut :

$$(54) \quad \frac{n_0(n_1 - n_2)}{(n_0^2 + 2)^3} = \pi N (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{2\alpha' H^2}{15RTc} \Delta$$

La théorie prévoit donc la biréfringence magnétique pour les substances paramagnétiques à condition que leur dissymétrie optique soit suffisante. Il serait important que des recherches soient poursuivies dans ce sens.

Il y a d'ailleurs toujours superposition de diamagnétisme au paramagnétisme, la susceptibilité observée étant la somme de deux termes de signes opposés. Si κ représente le terme positif paramagnétique dû au moment permanent des molécules et κ' le terme négatif correspondant à la polarisation diamagnétique supplémentaire qu'elles prennent sous l'action du champ, l'effet optique total sera donné par :

$$\frac{n_0(n_1 - n_2)}{(n_0 + 2)^2} = \pi N(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{4H^2}{45RTc} \left(\kappa + \frac{3}{2} \kappa' \Delta \right).$$

La dissymétrie magnétique Δ étant une quantité toujours inférieure à l'unité, cette formule montre que si la substance est paramagnétique au total, c'est-à-dire si κ l'emporte sur κ' en valeur absolue, il donnera également son signe à la somme $\kappa + \frac{3}{2} \kappa' \Delta$. Il n'y a donc pas lieu de prévoir que, dans les substances paramagnétiques, l'effet d'orientation dû au diamagnétisme sous-jacent puisse compenser, au point de vue optique, l'effet du paramagnétisme.

11. LA THÉORIE DE M. VOIGT. — M. W. Voigt⁽¹⁾ considère la biréfringence magnétique comme le phénomène transversal correspondant à la polarisation rotatoire magnétique et a donné les formules qui traduisent cette liaison entre les deux phénomènes.

Pour plusieurs raisons, ces formules ne rendent pas compte des faits ; tout d'abord, elles font l'indice extraordinaire n_1 égal à n_0 , la biréfringence étant due uniquement au retard de l'onde ordinaire ; j'ai rappelé plus haut que l'expérience est en désaccord avec ce résultat.

De plus, il est facile de montrer que la valeur prévue par les formules de M. Voigt pour la biréfringence magnétique est, dans le cas du sulfure de carbone par exemple, mille fois plus faible que la valeur observée par Cotton et Mouton.

M. Voigt obtient en effet, pour déterminer l'indice ordinaire n_2 , la formule :

$$n_2^2 - n_0^2 = \Sigma_2 - \frac{\Sigma_1}{n_1^2}$$

avec :

$$(55) \quad \begin{aligned} \Sigma_2 &= 4\pi N \omega^2 V^2 H^2 \sum \frac{e^4}{m^3(\omega_0^2 - \omega^2)^3} \\ \Sigma_1 &= 4\pi N \omega V^2 H \sum \frac{e^3}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \end{aligned}$$

où les sommations sont étendues aux différents électrons présents dans une molécule, où ω_0 est la période propre correspondant à un de ces électrons, de

⁽¹⁾ W. VOIGT, *Magneto und Elektro-Optik*. Teubner (1908) 161.

charge e et de masse m , et où V est la vitesse de la lumière dans le vide ; les autres symboles ont les significations déjà indiquées et correspondent au système électromagnétique C. G. S. d'unités.

Le coefficient p de Verdet, qui détermine le pouvoir rotatoire magnétique, a pour expression, avec les mêmes notations :

$$(56) \quad p = \frac{2\pi N \omega^2 V}{n_0} \sum \frac{e^3}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

n_2 étant très voisin de n_0 , le coefficient C de Cotton et Mouton devient :

$$(57) \quad C = \frac{n_2 - n_0}{\lambda H^2} = \frac{1}{2n_0 \lambda H^2} \left[\sum_2 - \frac{\Sigma_2^2}{n_0^2} \right].$$

C est ainsi la différence de deux termes que nous allons évaluer successivement à partir du coefficient de Verdet. Prenons d'abord le terme soustractif.

La comparaison de (55) et (56) donne facilement pour ce terme, en tenant compte de la relation :

$$\omega = \frac{2\pi V}{\lambda},$$

la valeur absolue :

$$\frac{p^2 \lambda}{2\pi^2 n_0}$$

Ce terme est donc calculable immédiatement à partir du coefficient de Verdet ; dans le cas du sulfure de carbone, on a, pour la lumière jaune du sodium ($\lambda = 6 \times 10^{-5}$) :

$$p = 10^{-5} \quad n_0 = 1,6$$

d'où, pour le terme considéré, la valeur 2×10^{-16} , *trois mille fois plus faible* que la valeur expérimentale de C , égale environ à 6×10^{-13} .

Pour calculer le premier terme de la formule (56), nous remarquerons que, d'après la loi de dispersion, la réfraction dans le sulfure de carbone fait intervenir une seule période propre dans l'ultra-violet, de longueur d'onde $\lambda = 2 \times 10^{-5}$ environ (1), et pour laquelle $\omega_0 = 10^{16}$, conservant ce seul terme dans les sommations, on obtient :

$$\frac{\Sigma_2}{2n_0 \lambda H^2} = \frac{Vp}{\lambda} \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Prenant pour $\frac{e}{m}$ la plus grande valeur possible (celle qui correspond aux particules cathodiques), on obtient, avec les valeurs indiquées plus haut pour les autres quantités, la valeur 10^{-15} pour ce premier terme de l'expression de C , *six cents fois plus petite* que la valeur expérimentale.

(1) DRUDE, *Lehrbuch der Optik*, 2^e éd., Leipzig 1908.

La comparaison faite pour les autres substances conduit à des résultats du même ordre.

Il est donc nécessaire d'attribuer la polarisation rotatoire et la biréfringence magnétique à des causes différentes.

Le premier phénomène est, comme le diamagnétisme, connexe du phénomène de Zeeman; il dérive de l'action directe du champ magnétique sur les électrons en mouvement dans la molécule, auxquels celle-ci doit ses propriétés optiques. Il suit immédiatement la création du champ.

La biréfringence magnétique, au contraire, a son origine dans un réarrangement ultérieur, dû à la dissymétrie des molécules, de l'orientation des axes moléculaires, analogue à celui qui produit le paramagnétisme. Ce réarrangement, qui intervient de la même manière dans le phénomène de Kerr, exige pour se produire un temps de l'ordre du *temps de relaxation* de Maxwell, nécessaire au passage d'une configuration permanente d'agitation thermique à une autre.

Ce point de vue est entièrement d'accord avec les expériences de MM. Abraham et Lemoine⁽¹⁾ sur le temps nécessaire à la disparition de la biréfringence électrique : ces physiciens ont observé la disparition du phénomène de Kerr en 10^{-8} seconde environ après la suppression du champ électrique; le temps de relaxation est tout à fait du même ordre.

Un dernier argument en faveur de notre théorie est apporté par l'influence de la température : alors que, conformément à la conception précédente, l'expérience montre que le pouvoir rotatoire magnétique, rapporté à un nombre constant de molécules, est indépendant de la température, la biréfringence magnétique diminue rapidement quand la température s'élève, et, d'après les résultats de Cotton et Mouton sur la nitrobenzine, varie comme le veut la formule (54). De cette formule on tire la valeur du coefficient C de la biréfringence magnétique :

$$(58) \quad C = \frac{n_1 - n_2}{\lambda H^2} = \frac{2\pi}{15} (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\Delta}{\lambda} \frac{\chi'}{c} \frac{N}{RT} \frac{(n_0^2 + 2)^2}{n_0}.$$

Les premiers facteurs $\sigma_1 - \sigma_2$, $\frac{\Delta}{\lambda}$, $\frac{\chi'}{c}$ doivent être supposés constants quand la température varie : $\sigma_1 - \sigma_2$ correspond aux propriétés optiques, Δ aux propriétés diamagnétiques des molécules individuelles, et sont indépendants de l'agitation thermique; $\frac{\chi'}{c}$ est la susceptibilité diamagnétique pour une molécule-gramme, invariable en général.

Les derniers facteurs diminuent quand la température s'élève; N varie en raison inverse du binôme de dilatation cubique du liquide; l'indice n_0 diminuant aussi, il en résulte une variation *plus rapide que l'inverse de la température absolue*, tout à fait conforme aux faits expérimentaux. Il est à désirer que des résultats quantitatifs précis sur les diverses constantes qui figurent dans la

⁽¹⁾ M. ABRAHAM et LEMOINE, *Journ. de Phys.*, II-9 (1900) 262.

formule (58) permettent de soumettre celle-ci à un contrôle expérimental plus complet.

Enfin l'expression (42) de la constante de Kerr nous conduit à prévoir, pour la biréfringence électrique, une variation avec la température plus rapide encore que celle de la biréfringence magnétique; les résultats expérimentaux sont bien aussi dans ce sens.

La comparaison de (42) et (58) montre que $\frac{\gamma}{C(K+2)^2}$ doit rester constant quand la température varie. Les données numériques ne sont pas encore assez certaines pour permettre une vérification précise de cette relation.

(Manuscrit reçu le 25 août 1910.)

Table (5) presents the results of the regression analysis. The dependent variable is the natural logarithm of the number of employees. The independent variables are the natural logarithm of the number of sales, the natural logarithm of the number of assets, and the natural logarithm of the number of liabilities. The results show that the number of sales is positively related to the number of employees, while the number of assets and liabilities are negatively related to the number of employees.

The regression equation is: $\ln(\text{Employees}) = 0.15 \ln(\text{Sales}) - 0.05 \ln(\text{Assets}) - 0.05 \ln(\text{Liabilities}) + 0.5$. The adjusted R-squared is 0.85. The F-statistic is 12.5, which is significant at the 1% level. The Durbin-Watson statistic is 1.8, indicating no significant autocorrelation in the residuals.

The results indicate that the number of sales is the most important determinant of the number of employees. A 1% increase in sales leads to a 0.15% increase in the number of employees. Conversely, a 1% increase in assets or liabilities leads to a 0.05% decrease in the number of employees.

The regression analysis is based on a sample of 100 firms. The data were obtained from the annual reports of these firms. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

The regression analysis is based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance. The results are based on the following assumptions: the error term is normally distributed, the error term is uncorrelated with the independent variables, and the error term has a constant variance.

VI. RELATIVITÉ

J. Z. 931709.

13A

VI. RYBY

13

13