SUR

LES DÉVIATIONS DE LA VERTICALE EN GÉODÉSIE

Bulletin astronomique, t. 18, p. 257-276 (juillet 1901).

I. Les géodésiens ont coutume de déduire les déviations de la verticale soit vers l'Est, soit vers le Nord, de la différence observée entre les deux latitudes géodésique et astronomique, ou bien encore entre les deux azimuts géodésique et astronomique, ou bien encore entre les deux longitudes. On tient seulement compte de la différence des deux azimuts, par exemple, aux deux stations extrêmes, sans se préoccuper de la loi suivant laquelle cette différence a varié dans les stations intermédiaires. Cette façon d'opérer, généralement légitime, ne tient pas compte de toutes les circonstances du problème et peut entraîner certaines causes d'erreur. Ces causes d'erreur sont à la vérité fort minimes, ainsi que l'ont montré divers auteurs et, en particulier, Yvon Villarceau (*C. R. Acad. Sc.*, t. 62, 1866, p. 741), mais cependant mon attention a été attirée sur elles parce qu'elles peuvent devenir sensibles dans les régions équatoriales.

Peut-être une courte digression ne sera-t-elle pas inutile ? Que doit-on entendre par méridien ? Est-ce le lieu des points du géoïde où le plan tangent est parallèle à une direction donnée du plan équatorial, ou, en d'autres termes, est-ce le lieu des points de longitude donnée ? Ou bien est-ce une courbe tracée sur le géoïde et qui en chaque lieu est tangente au plan méridien de ce lieu, ou, en d'autres termes, est-ce une courbe où l'azimut de la tangente est constamment nul?

Pour un ellipsoïde, ou en général pour une surface de révolution, les deux définitions concordent et, de plus, les méridiens ainsi définis sont des lignes géodésiques. Mais pour un géoïde quelconque les lignes de longitude constante diffèrent des lignes d'azimut nul, et ni les unes ni les autres ne sont des lignes géodésiques.

De même, il faudra distinguer les lignes de latitude constante des lignes où l'azimut de la tangente est constamment égal à 90°.

Soient M un point quelconque du géoïde, MA, MB, MC, MD les tangentes : 1° à la ligne de longitude constante; 2° à la ligne d'azimut nul; 3° à la ligne de latitude constante; 4° à la ligne dont l'azimut est 90°.

MB sera perpendiculaire à MD par définition. Mais MA et MD d'une part, MB et MC d'autre part devront être des diamètres conjugués de l'indicatrice du géoïde. Il en résulte que MA ne peut se confondre avec MB (ou MC avec MD) que si MB et MD sont les axes de l'indicatrice. Cette circonstance ne peut se présenter pour tous les points du géoïde que dans le cas des surfaces de révolution.

Si une des lignes de latitude constante se confond avec une ligne dont l'azimut est 90°, la tangente en chaque point devra être un des axes de l'indicatrice; ce sera donc une ligne de courbure, satisfaisant à l'équation générale des lignes de courbure

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dm} = \frac{dz}{dn},$$

où x, y, z sont les coordonnées et l, m, n les cosinus directeurs de la normale à la surface. Or n c'est le sinus de la latitude; si donc la latitude est constante, dz sera nulle et la courbe sera plane.

De même, si une des lignes de longitude constante se confond avec une ligne d'azimut nul, on verra de même que c'est une ligne de courbure et que c'est une courbe plane. De plus, ce sera une ligne géodésique.

Cela posé, supposons que l'on trace un arc de méridienne AB sur la surface du géoïde, par des moyens géodésiques. Qu'est-ce que cela veut dire? Cela signifie : 1° que cet arc AB sera une ligne géodésique; 2° que l'azimut au point initial sera nul.

En général, cet arc AB ne sera ni une ligne de longitude constante, ni une ligne d'azimut nul, et cela quand même la déviation de la verticale serait nulle aux deux points extrêmes A et B, du moment qu'elle ne serait pas nulle tout le long de l'arc.

Supposons donc la déviation nulle en A et en B, et différente de zéro entre A et B. Comme AB n'est pas une ligne de longitude constante, la longitude de B ne sera pas égale à celle de A; comme ce n'est pas non plus une ligne d'azimut nul, l'azimut en B ne sera pas nul. On constatera donc une différence entre les longitudes géodésique et astronomique, de même qu'entre les azimuts géodésique et astronomique, et, si l'on applique les formules usuelles, on en déduira l'existence d'une déviation de la verticale au point B, laquelle déviation n'existe pas d'après notre hypothèse.

En résumé, la différence entre les longitudes géodésique et astronomique ou entre les azimuts géodésique et astronomique ne dépend pas seulement de la déviation au point considéré, mais de la déviation dans toutes les stations de la chaîne.

C'est l'influence de cette cause d'erreur que je voudrais étudier par une analyse un peu plus approfondie.

II. Soient l et λ la longitude et la latitude d'un point d'une sphère,

$$x = \cos l \cos\lambda, \qquad y = \sin l \cos\lambda, \qquad z = \sin\lambda,$$

les coordonnées rectangulaires de ce même point.

Soient

$$l = \mathrm{F}(\lambda)$$

l'équation d'une courbe tracée sur la sphère, φ l'azimut de cette courbe.

Soient M et M′ deux points infiniment voisins de cette courbe, MM′P un triangle rectangle infiniment petit dont l'hypoténuse est MM′ et dont les côtés sont un arc de méridien et un arc de parallèle, de telle sorte que

$$\mathrm{MM'} = ds, \qquad \mathrm{MP} = d\lambda, \qquad \mathrm{M'P} = \cos\lambda\, dl.$$

On aura dans ce triangle

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{M'P}}{\mathrm{MP}} = \frac{dl\cos\lambda}{d\lambda} = l'\cos\lambda$$

en désignant par l' et l'' les dérivées première et seconde de l par rapport à λ.

Soit maintenant ψ l'angle de la normale à la sphère avec le plan osculateur.

Les cosinus directeurs de la normale à la sphère sont x, y, z. On aura ceux du plan osculateur de la façon suivante : Soit

$$A = y'z'' - z'y'', \quad B = z'x'' - x'z'', \quad C = x'y'' - y'x'',$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2,$$
$$A = \alpha D, \quad B = \beta D, \quad C = \gamma D;$$

α, β, γ sont les cosinus directeurs cherchés de telle sorte que

$$\sin\psi = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

d'où

$$\sin\psi = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{D}.$$

Considérons un mobile parcourant notre courbe de façon que la latitude varie proportionnellement au temps. Les composantes de la vitesse seront x', y', z', et celles de l'accélération x'', y'', z''; de sorte que D sera le parallélogramme construit sur la vitesse et l'accélération. Pour avoir l'aire de ce parallélogramme, il faut multiplier la vitesse par la composante normale de l'accélération. Cette composante, d'après un théorème bien connu, est égale à $\frac{v^2}{\rho}$, v étant la vitesse et ρ le rayon de courbure. On aura donc

$$D = \frac{v^3}{\rho}.$$

Or

$$v = \frac{ds}{d\lambda} = \frac{1}{\cos\varphi}, \qquad \rho = \cos\psi,$$

d'où

$$D = \frac{1}{\cos\psi\cos^3\varphi}$$

et enfin

$$\operatorname{tg}\psi = \Delta\cos^3\varphi.$$

Il reste à calculer Δ; on observera que Δ semble dépendre de λ, de l, de l' et l''; mais par raison de symétrie, il ne dépendra que de λ, l' et l'', et pas de l. Nous pourrons donc, après avoir calculé par différentiation x', y', z', x'', y'', z'', faire $l = 0$; nous trouvons ainsi

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & l'\cos\lambda & \cos\lambda \\ -\cos\lambda(1 + l'^2) & l''\cos\lambda - 2l'\sin\lambda & -\sin\lambda \end{vmatrix},$$

ou en développant et réduisant

$$\Delta = -l''\cos\lambda + 2l'\sin\lambda + l'^3\cos^2\lambda\sin\lambda,$$

d'où

$$\operatorname{tg}\psi = -\, l'' \cos^3\varphi \cos\lambda + l' \sin\lambda(2\cos^3\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi). \tag{2}$$

Si la courbe diffère peu d'un grand cercle, $\operatorname{tg}\psi$ peut être remplacé par ψ. Si la courbe s'écarte peu d'un méridien de telle façon que l', l'' et φ soient très petits, la formule se simplifie et nous pouvons écrire tout simplement

$$\psi = -\, l'' \cos\lambda + 2\, l' \sin\lambda. \tag{3}$$

III. Faisons le même calcul pour un ellipsoïde peu aplati. Désignons toujours par l et λ la longitude et la latitude. Soient

$$x = C\cos l, \qquad y = C\sin l, \qquad z = S$$

les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque. C et S sont des fonctions de λ, peu différentes de $\cos\lambda$ et $\sin\lambda$. Nous désignerons par C', C'', ... les dérivées successives de C par rapport à λ; de même pour celles de S, l, ...

Si nous reprenons notre petit triangle MM'P, nous aurons

$$MM' = ds, \qquad MP = R\,d\lambda, \qquad M'P = C\,dl,$$

R étant le rayon de courbure de la section méridienne, d'où

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M'P}{MP} = \frac{C\,dl}{R\,d\lambda} = \frac{R_1}{R}\, l' \cos\lambda, \tag{4}$$

R_1 étant le second rayon de courbure principal de l'ellipsoïde. Le rapport des rayons de courbure $\frac{R_1}{R}$ diffère peu de l'unité.

Nous définissons A, B, C et D comme plus haut et de sorte que

$$\alpha = \frac{A}{D}, \qquad \beta = \frac{B}{D}, \qquad \gamma = \frac{C}{D}$$

sont les cosinus directeurs du plan osculateur. D'un autre côté, les cosinus directeurs de la normale à l'ellipsoïde sont

$$\cos l \cos\lambda, \qquad \sin l \cos\lambda, \qquad \sin\lambda,$$

de sorte que l'on a

$$\sin\psi = \alpha\cos l\cos\lambda + \beta\sin l\cos\lambda + \gamma\sin\lambda.$$

En posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos l\cos\lambda & \sin l\cos\lambda & \sin\lambda \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

on trouve donc encore

$$\sin\psi = \frac{\Delta}{D}.$$

On aura encore

$$D = \frac{v^3}{\rho}, \qquad v = \frac{ds}{d\lambda} = \frac{R}{\cos\varphi}, \qquad \rho = \rho_0 \cos\psi,$$

ρ_0 étant le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe envisagée, d'où

$$D = \frac{R^3}{\rho_0 \cos\psi \cos^3\varphi}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \Delta \cos^3\varphi \frac{\rho_0}{R^3}.$$

Pour le calcul de Δ nous allons, comme plus haut, faire $l = 0$. Nous avons d'ailleurs

$$S' = R\cos\lambda, \qquad C' = -R\sin\lambda,$$

d'où

$$S'^2 + C'^2 = R^2, \qquad S'S'' + C'C'' = RR'.$$

Il vient ainsi

$$\Delta R = \begin{vmatrix} S' & 0 & -C' \\ C' & l'C & S' \\ C'' - l'^2 C & l''C + 2l'C' & S'' \end{vmatrix},$$

ou en développant

$$\Delta R = l'C(S'S'' + C'C'') - l'^3 C^2 C' - (l''C + 2l'C')(S'^2 + C'^2),$$

ou

$$\Delta R = l'CRR' - l'^3 C^2 C' - (l''C + 2l'C')R^2,$$

ou (à cause de $R\operatorname{tg}\varphi = Cl'$)

$$\Delta = l'(CR' - C'R\operatorname{tg}^2\varphi) - (l''C + 2l'C')R,$$

ou enfin

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\rho_0 \cos^3\varphi}{R^3}[l'(CR' - C'R\operatorname{tg}^2\varphi) - (l''C + 2l'C')R].$$

Si nous supposons que la courbe diffère très peu d'un méridien, de telle façon que ψ et φ soient très petits et ρ_0 très peu différent de R, nous aurons tout simplement

$$(6) \qquad \psi = l'\frac{CR'}{R^2} - l''\frac{C}{R} - 2l'\frac{C'}{R}.$$

En résumé, les formules (4), (5) et (6) sont tout à fait de même forme que les formules correspondantes (1), (2) et (3). Les coefficients de l' et de l'' sont, il est vrai, des fonctions de λ et de φ plus compliquées que dans le cas de la sphère. Mais ces fonctions ont, dans le cas de l'ellipsoïde et dans le cas de la sphère, des valeurs très peu différentes, si l'aplatissement est faible, de sorte que dans la plupart des applications qui vont suivre on obtiendra une approximation suffisante en se contentant des formules relatives à la sphère.

IV. Passons maintenant au cas d'un géoïde quelconque; je supposerai toutefois que ce géoïde diffère extrêmement peu d'un ellipsoïde de révolution que je prendrai pour ellipsoïde de référence et que cet ellipsoïde est lui-même peu aplati. Soient M un point quelconque du géoïde, N sa projection sur l'ellipsoïde de telle façon que MN soit normale à l'ellipsoïde. Soit MP la verticale vraie au point M. Je définirai le point M par la longitude l et par la latitude λ du point N sur l'ellipsoïde et par la longueur

$$MN = \zeta.$$

J'appellerai ensuite ξ et η, les deux composantes de la déviation de la verticale vers le Nord et vers l'Est, de telle façon que l'angle très petit de MN avec MP soit $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

Comment vont se transformer nos formules? Les angles φ et ψ vont, à ce qu'il semble, dépendre non seulement, comme dans le cas précédent, de λ, de l' et de l'', mais de ζ, de ζ', de ζ'', de ξ et de η.

A vrai dire, si l'on supposait que le point M est sur le géoïde, c'est-à-dire que la courbe lieu des points M est l'horizontale et, par conséquent, normale à MP, il y aurait une relation entre ζ', ξ et η, exprimant que la tangente au lieu des points M est perpendiculaire à MP. Ces trois variables ne seraient donc pas indépendantes. Mais on peut ne pas faire cette hypothèse, au moins au début du calcul.

Nos variables ζ, ζ', ζ'', ξ, η étant très petites, nous pouvons écrire

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi}{d\zeta}\zeta + \frac{d\varphi}{d\zeta}\zeta' + \frac{d\varphi}{d\eta}\eta,$$

$$\psi = \psi_0 + \frac{d\psi}{d\zeta}\zeta + \frac{d\psi}{d\zeta'}\zeta' + \frac{d\psi}{d\zeta''}\zeta'' + \frac{d\psi}{d\eta}\eta + \frac{d\psi}{d\xi}\xi,$$

φ_0 et ψ_0 étant les valeurs de φ et ψ pour $\zeta = \zeta' = \zeta'' = \xi = \eta = 0$, c'est-à-dire les valeurs données par les formules (4) et (5). Il est clair, en effet, que φ ne peut dépendre ni de ζ'', ni de ξ.

Je dis maintenant que si $\eta = 0$, on peut prendre tout simplement $\varphi = \varphi_0$. Nous pouvons, en effet, toujours supposer $\xi = 0$, de sorte que MP se confonde avec MN. Soient MT et NT′ les tangentes au lieu des points M et au lieu des points N. L'angle $\varphi - \varphi_0$ n'est autre chose que l'angle des deux plans MNT′ et NMT. Si M′ est un point voisin de M sur la courbe lieu des points M et si N′ est le point correspondant sur le lieu des points N, M′N′ est comme MN normale à l'ellipsoïde.

Les droites MN, M′N′, ... engendrent une surface réglée. Les plans MNT et MNT′ sont les plans tangents à la surface réglée aux points M et N. Ces plans tangents se confondent si la surface réglée est développable; c'est ce qui arrive d'abord si, l'aplatissement étant nul, l'ellipsoïde se réduit à une sphère, parce qu'alors la surface réglée se réduit à un cône. C'est ce qui arrive encore si le lieu des points M est tangent à une ligne de courbure, c'est-à-dire si l'azimut est voisin de o ou de 90°.

Comme l'aplatissement est très petit, comme ζ est toujours très faible, nous pourrons prendre sans erreur sensible

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi}{d\eta}\eta.$$

Le calcul du terme $\frac{d\varphi}{d\eta}\eta$ se déduit immédiatement des formules de l'astronomie sphérique, la correction à apporter à l'azimut est $\eta \operatorname{tg}\lambda$, de sorte que l'on a

$$(7) \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}(l' \cos\lambda) + \eta \operatorname{tg}\lambda.$$

Pour le calcul de ψ, nous pouvons raisonner à peu près de la même manière.

Je remarque d'abord que, si l'aplatissement est nul, si $\xi = \eta = 0$, et si le lieu des points N est un grand cercle de la sphère, on a

$$\psi = \psi_0 = 0.$$

En effet, la verticale MP se confond avec MN, c'est-à-dire avec un rayon de la sphère; le lieu des points M est, comme celui des points N, une courbe plane dont le plan passe par MN. Donc l'angle ψ est nul.

Ainsi les dérivées

$$\frac{d\psi}{d\zeta}, \quad \frac{d\psi}{d\zeta'}, \quad \frac{d\psi}{d\zeta''}$$

s'annulent quand l'aplatissement est nul ainsi que ψ_0.

On aura encore

$$\psi = \psi_0 = 0,$$

si, l'aplatissement n'étant pas nul, le lieu des points N se réduit à un méridien de l'ellipsoïde, pourvu d'ailleurs que $\xi = \eta = 0$. Dans ce cas encore, le lieu des points M comme celui des points N est une courbe plane dont le plan passe par MN.

Si l'on observe que les lignes que nous aurons à envisager s'écartent peu des lignes géodésiques et que, d'autre part, l'aplatissement est très faible, nous voyons que nous pourrons sans erreur sensible supposer

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = \frac{d\psi}{d\zeta'} = \frac{d\psi}{d\zeta''} = 0$$

et écrire

$$\psi = \psi_0 + \frac{d\psi}{d\xi}\xi + \frac{d\psi}{d\eta}\eta.$$

Pour évaluer le terme complémentaire

$$\frac{d\psi}{d\xi}\xi + \frac{d\psi}{d\eta}\eta,$$

j'observerai que l'angle dont il faut corriger ψ pour tenir compte de la déviation de la verticale n'est autre chose que l'angle des deux plans MTN et MTP, c'est-à-dire

$$-\eta\cos\varphi + \xi\sin\varphi.$$

Si l'on suppose que le lieu des points M diffère très peu d'une ligne géodésique, nous pourrons confondre l'angle ψ avec sa tangente, de sorte que la formule (2) (à laquelle nous nous bornerons en négligeant l'aplatissement) s'écrira

$$\psi_0 = -l''\cos^3\varphi\cos\lambda + l'\sin\lambda(2\cos^3\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi),$$

d'où

$$(8)\qquad \psi = -l''\cos^3\varphi\cos\lambda + l'\sin\lambda(2\cos^3\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi) - \eta\cos\varphi + \xi\sin\varphi.$$

Dans le cas où la courbe considérée diffère peu d'un méridien, cette formule se réduit à

$$(9)\qquad \psi = -l''\cos\lambda + 2l'\sin\lambda - \eta.$$

Si nous supposons maintenant que la courbe diffère très peu d'un grand cercle, de telle sorte que l'équation du grand cercle soit

$$l = F(\lambda),$$

celle de la courbe

$$l = F(\lambda) + \delta l,$$

l'azimut du grand cercle φ, celui de la courbe $\varphi + \delta\varphi$, il viendra

$$\delta\varphi = \cos\lambda \cos^2\varphi\, \delta l'$$

et, en laissant de côté les termes en ξ et en η,

$$\begin{aligned}\delta\psi = &- \delta l'' \cos^3\varphi \cos\lambda + \delta l' \sin\lambda (2\cos^3\varphi + \sin^2\varphi \cos\varphi)\\ &+ \delta\varphi[3 l'' \cos\lambda \cos^2\varphi \sin\varphi - l' \sin\lambda (\sin\varphi + 3\cos^2\varphi \sin\varphi)].\end{aligned}$$

Mais la courbe $l = F(\lambda)$ étant un grand cercle pour lequel ψ est nul, nous pouvons écrire

$$l'' = l' \operatorname{tg}\lambda (2 + \operatorname{tg}^2\varphi),$$

d'où

$$3 l'' \cos\lambda \cos^2\varphi \sin\varphi - l' \sin\lambda \sin\varphi (1 + 3\cos^2\varphi) = 2 l' \sin\lambda \sin\varphi.$$

Or

$$2 l' \sin\lambda \sin\varphi\, \delta\varphi = 2\delta l' \sin\lambda \sin^2\varphi \cos\varphi,$$

d'où enfin

$$\delta\psi = - \delta l'' \cos^3\varphi \cos\lambda + \delta l' \sin\lambda \cos\varphi (2 + \sin^2\varphi).$$

Si nous observons que pour la courbe $l = F(\lambda)$, qui est un grand cercle, $\psi = 0$, nous pourrons écrire finalement

$$(10)\qquad \psi = - \delta l'' \cos^3\varphi \cos\lambda + \delta l' \sin\lambda \cos\varphi (2 + \sin^2\varphi) - \eta \cos\varphi + \xi \sin\varphi.$$

Rappelons d'autre part que la longitude et la latitude astronomiques du point M sont

$$l + \frac{\eta}{\cos\lambda} \quad \text{et} \quad \lambda + \xi.$$

V. Appliquons maintenant ces résultats au problème qui nous occupe. Soit AB un arc de méridien tracé par des moyens géodésiques; ce devra d'abord être une ligne géodésique, de sorte qu'on aura par la formule (9),

$$(11)\qquad l'' \cos\lambda - 2 l' \sin\lambda + \eta = 0.$$

D'autre part, au point A l'azimut doit être nul, de sorte qu'on aura par la formule (7) et φ étant très petit

$$(12)\qquad l'_0 \cos\lambda_0 + \eta_0 \operatorname{tg}\lambda_0 = 0.$$

Je désigne par des indices o les valeurs relatives au point A et par des indices 1 les valeurs relatives au point B. Au point B, on aura de même pour la différence mesurable des azimuts géodésique et astronomique

$$(13)\qquad \varphi_1 = l'_1 \cos\lambda_1 + \eta_1 \operatorname{tg}\lambda_1.$$

Nous prendrons pour origine des longitudes astronomiques le point A, de sorte qu'on aura

$$l_0 + \frac{\eta_0}{\cos\lambda_0} = 0 \tag{14}$$

et pour la longitude mesurable du point B (différence des longitudes géodésique et astronomique)

$$L_1 = l_1 + \frac{\eta_1}{\cos\lambda_1}. \tag{15}$$

C'est de l'ensemble des équations (11) à (15) qu'il faut tirer des conclusions en ce qui concerne η, tandis qu'ordinairement on se sert des équations

$$\varphi_1 = (\eta_1 - \eta_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda, \tag{16}$$

$$L_1 = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\cos\lambda}, \tag{17}$$

comme si l était toujours nul.

Les formules peuvent se mettre sous une forme plus simple.

Posons

$$H = L\cos\lambda.$$

H est mesurable, puisque L n'est autre chose que la longitude astronomique.

On trouve alors

$$H = l\cos\lambda + \eta,$$

d'où

$$H' = l'\cos\lambda - l\sin\lambda + \eta',$$
$$H'' = l''\cos\lambda - 2l'\sin\lambda - l\cos\lambda + \eta''.$$

Or

$$\varphi = l'\cos\lambda + \eta\,\mathrm{tg}\,\lambda,$$

d'où

$$H' = \varphi - H\,\mathrm{tg}\,\lambda + \eta'. \tag{18}$$

D'ailleurs l'équation (11) devient

$$H'' + H = \eta''. \tag{19}$$

La combinaison des équations (18) et (19) nous donne l'équation de condition suivante à laquelle doivent satisfaire les quantités mesurables H et φ :

$$\varphi' = H'\,\mathrm{tg}\,\lambda + H\,\mathrm{tg}^2\lambda. \tag{20}$$

Je remarque d'abord, à titre de vérification, que les équations (18) et (19) nous conduisent de nouveau à un théorème que nous avons démontré plus haut directement. Si une ligne est à la fois ligne de longitude constante et ligne d'azimut nul, de telle façon que l'on ait $H = \varphi = 0$, ce sera une ligne géodésique.

Si, en effet, $H = \varphi = 0$, l'équation (18) donnera $\eta' = 0$, d'où $\eta'' = 0$, et alors l'équation (19), qui est celle des lignes géodésiques, se trouve satisfaite d'elle-même.

Reprenons notre arc de méridien AB tracé par des moyens géodésiques (*cf.* § I); ce sera une ligne géodésique, ce qui s'exprime par l'équation (19); de plus, au point A on devra avoir $\varphi_0 = 0$ et, par conséquent,

$$H'_0 = - H_0 \operatorname{tg} \lambda_0 + \eta'_0 ;$$

et comme le point A a été pris pour origine des longitudes astronomiques et que, par conséquent, H_0 est nul, on aura

$$H'_0 = \eta'_0. \tag{21}$$

Si l'arc AB est petit, H, qui est nul à une des extrémités, restera toujours très petit, de sorte que l'équation (19) pourra s'écrire

$$H'' = \eta''$$

ou, à cause de (21),

$$H' = \eta'. \tag{22}$$

Et si l'on suppose η nul au point A

$$H = \eta. \tag{23}$$

L'équation (18) devient alors

$$\varphi = H \operatorname{tg} \lambda = \eta \operatorname{tg} \lambda. \tag{24}$$

Les équations approchées (23) et (24) sont en somme équivalentes aux formules ordinairement employées (16) et (17) et aux résultats d'Yvon Villarceau.

Définissons les fonctions Y et Z par les équations

$$\frac{dY}{d\lambda} = H, \qquad \frac{dZ}{d\lambda} = Y$$

avec la condition que Y et Z s'annulent au point A.

Nous aurons, au lieu de (22) et de (23),

$$H' + Y = \eta', \tag{25}$$

$$H + Z = \eta; \tag{26}$$

d'où

$$\varphi = \eta \operatorname{tg}\lambda - \mathrm{Y} + \mathrm{Z}\operatorname{tg}\lambda. \tag{27}$$

Si l'arc AB est très petit du premier ordre, en général η (considéré comme nul au point initial A) sera aussi du premier ordre et il en sera de même de H et de φ; mais Y sera du deuxième ordre et Z du troisième; de sorte qu'on pourra négliger les termes du deuxième et du troisième ordre dans les formules (26) et (27), qui se réduiront aux formules (23) et (24).

Mais dans certaines circonstances cette conclusion ne sera pas légitime.

Supposons que l'on soit près de l'équateur; le terme $\eta \operatorname{tg}\lambda$ deviendra beaucoup plus petit à cause du facteur $\operatorname{tg}\lambda$ et pourra devenir comparable à Y.

Dans ce cas, le dernier terme $\mathrm{Z}\operatorname{tg}\lambda$ est négligeable, car les deux facteurs Z et $\operatorname{tg}\lambda$ sont tous deux très petits; d'un autre côté, nous pouvons prendre avec une approximation suivante :

$$\mathrm{Y} = \int \mathrm{H}\, d\lambda = \int \eta\, d\lambda,$$

de sorte que la formule (27) qui donne les azimuts devient

$$\varphi = \eta \operatorname{tg}\lambda - \int \eta\, d\lambda,$$

d'où l'on tire pour la valeur de η

$$\eta = \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\lambda} + \operatorname{cotg}\lambda \int \frac{\varphi\, d\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}.$$

Le second terme pourra ne pas être négligeable devant le premier, à cause du facteur $\operatorname{cotg}\lambda$ qui est très grand.

Cela sera surtout à craindre si les déviations de la verticale sont grandes et varient irrégulièrement, comme cela peut arriver dans les pays de montagne.

Supposons que, sur l'arc AB, η reste constamment positif, soit nul au point A, croisse d'abord rapidement, puis décroisse de telle façon qu'au point B il redevienne nul ou très petit. Alors $\int \eta\, d\lambda$ pourra être relativement grand, bien que η soit nul ou très petit et le second terme de notre formule pourra devenir le plus important.

Si on laisse de côté les cas où se produiraient de semblables irrégularités, la valeur de η à l'extrémité B sera du même ordre de grandeur que la valeur moyenne de η sur l'arc AB, et il en résultera que le terme $\int \eta\, d\lambda$ sera comparable à η multiplié par l'arc AB (le rayon de la sphère étant pris pour unité).

Par conséquent, pour que l'on puisse négliger ce terme coreectif, il faut que l'arc AB soit négligeable devant $\operatorname{tg}\lambda$, c'est-à-dire devant la distance du point B à l'équateur.

Ce terme correctif pourra donc d'autant plus facilement être négligé que l'arc AB sera plus court. Mais tout dépend de la façon dont cet arc est compensé. Quand on réduira un arc de méridien, cet arc sera en général assez long; mais il sera partagé en plusieurs sections assez courtes et à l'extrémité de chacune de ces sections on mesurera les éléments astronomiques (latitude et azimut). Si chaque section était calculée pour elle-même, elle serait assez courte pour qu'il n'y eût pas lieu de se préoccuper de la correction dont nous avons parlé. Mais en opérant de la sorte, on se priverait des avantages de la compensation; on ne peut donc traiter les différentes sections indépendamment les unes des autres.

Supposons, par exemple, qu'on calcule l'arc tout entier, *en bloc*, en partant des seules données géodésiques; puis qu'on veuille se servir des données astronomiques pour calculer les déviations de la verticale aux extrémités des différentes sections. La correction sera alors, en général, nécessaire. Pour qu'on puisse s'en passer, en effet, ce qui devrait y être négligeable devant la latitude, ce ne serait pas la longueur d'une des sections, ce serait la longueur totale de l'arc.

Il faudrait pour ainsi dire, pour avoir le droit de se passer de la correction, *se remettre à l'heure* au commencement de chaque section. Je m'explique. Soit AB l'arc total, partagé par exemple en n sections : AA_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nB. Si l'arc AB est calculé *en bloc*, ce sera une ligne géodésique unique, telle que l'azimut astronomique soit nul au point A, et l'on mesurera l'azimut astronomique aux points A_2, ..., A_n, et au point B; c'est de là qu'on déduira les variations de la verticale. Dans ce cas la correction sera nécessaire, à moins que l'arc *total* ne soit négligeable devant la latitude. Si, au contraire, les différentes sections sont traitées indépendamment, l'arc AB sera une sorte de ligne brisée dont les éléments seront des lignes géodésiques. Il faudra donc distinguer en chaque point de division, au point A_i par exemple, qui est un point anguleux de la ligne brisée, l'azimut de l'élément $A_{i-1}A_i$ et l'azimut de l'élément A_iA_{i+1}. L'azimut des divers éléments AA_2, A_2A_3, ..., A_nB aux points *initiaux* A, A_2, ..., A_n, sera nul, et l'on mesurera l'azimut de ces mêmes éléments aux points *finaux* A_2, A_3, ..., B. En d'autres termes, *on se remettra à l'heure* en revenant à l'azimut zéro au commencement de chaque section. Dans ces conditions, la correction ne serait pas nécessaire, pourvu que chaque arc *partiel* soit négligeable devant la latitude.

VI. Si au lieu d'un arc de méridien on avait affaire à un arc orienté d'une manière quelconque, on pourrait appliquer les formules (3) ou (6); mais on peut encore faire autrement.

Au lieu de définir la position d'un point sur la sphère par sa longitude et sa latitude, on peut se servir d'un autre système de coordonnées, qui seraient définies de la même façon que la longitude et la latitude, mais en faisant jouer le rôle du pôle à un point quelconque de la sphère.

Soit alors P le pôle, L et $\lambda + \xi = \nu$ la longitude et la latitude astronomiques d'un point quelconque M, et φ l'azimut astronomique d'une ligne passant par ce point.

Soit maintenant P_1 le point qui dans le nouveau système de coordonnées va jouer le rôle du pôle, c'est-à-dire ce que je pourrai appeler le *nouveau pôle;* soient de même L_1 et ν_1 la *nouvelle* longitude et la *nouvelle* latitude astronomiques du point considéré et φ_1 le nouvel azimut astronomique de la ligne considée.

Il y a entre les quantités L, ν, φ et L_1, ν_1, φ_1, certaines relations faciles à écrire. Si en effet L_0 et ν_0 sont la longitude et la latitude du nouveau pôle P_1 et si l'on envisage le triangle sphérique PP_1M, les trois côtés de ce triangle sont :

$$PP_1 = \frac{\pi}{2} - \nu_0, \qquad PM = \frac{\pi}{2} - \nu, \qquad P_1M = \frac{\pi}{2} - \nu_1$$

et les trois angles sont :

$$P = L - L_0, \qquad P_1 = \pi + L_0 - L_1, \qquad M = \varphi - \varphi_1,$$

Supposons maintenant que l'on ait mesuré un arc AB de ligne géodésique de direction quelconque. Je désignerai par

$$L^0, \quad \nu^0, \quad \varphi^0$$

la longitude et la latitude astronomiques du point A et l'azimut astronomique de AB au point A; par

$$L_1^0, \quad \nu_1^0, \quad \varphi_1^0$$

les *nouvelles* coordonnées astronomiques du point A et le *nouvel* azimut astronomique au point A. Je désignerai par

$$L^1, \quad \nu^1, \quad \varphi^1, \quad L_1^1, \quad \nu_1^1, \quad \varphi_1^1$$

les quantités analogues relatives au point B.

On calculera l'arc AB comme si c'était une ligne géodésiqne de l'ellipsoïde de référence. Mais dans l'analyse qui va suivre, nous pourrons supposer que l'ellipsoïde de référence se réduit à une sphère et que l'aplatissement est nul. L'erreur commise ainsi sera de l'ordre de la déviation η de la verticale multipliée par l'aplatissement e; comme ces deux facteurs sont très petits, cette erreur sera très petite, non seulement d'une manière absolue, mais encore par rapport à la quantité à mesurer, c'est-à-dire à η. C'est ce dont on peut d'ailleurs se rendre compte en comparant les formules (1) et (3) du paragraphe II aux formules (4) et (6) du paragraphe III.

Nous pourrons donc raisonner comme si l'ellipsoïde de référence était une sphère et dire que l'arc AB doit être calculé comme si c'était un arc de grand cercle. Nous choisirons le *nouveau pôle* P_1 sur ce grand cercle de façon que AB soit un arc d'un *nouveau méridien*.

On mesurera L^0, ν^0, φ^0 au point A. Le grand cercle en question sera ainsi entièrement déterminé et l'on choisira le nouveau pôle P_1 sur ce grand cercle. On en déduira L_1^0, ν_1^0, φ_1^0 en résolvant le triangle sphérique PP_1M (qui se réduit à PP_1A), comme il a été expliqué plus haut. On aura d'ailleurs

$$L_1^0 = 0, \qquad \varphi_1^0 = 0.$$

Les nouvelles coordonnées du point B devraient être

$$0, \quad \nu_1^0 + s, \quad 0$$

s'il n'y avait pas de déviation de la verticale; s est la longueur mesurée de l'arc AB. Les observations astronomiques nous donnent pour ces nouvelles coordonnées du point A

$$L_1^1, \quad \nu_1^1, \quad \varphi_1^1,$$

Posons maintenant

$$H_1 = L_1 \cos \nu_1,$$

$$\eta_1 = \eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi, \qquad \xi_1 = \eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi,$$

$$Y_1 = \int H_1 \, d\nu_1, \qquad Z_1 = \int Y_1 \, d\nu_1,$$

de sorte que H_1, η_1, Y_1, Z_1 jouent par rapport au nouveau système de coordonnées le même rôle que H, η, Y, Z par rapport à l'ancien.

L'arc AB étant un *nouveau méridien*, les formules du paragraphe précédent seront applicables et nous aurons

$$H_1 + Z_1 = \eta_1, \qquad \varphi_1 = \eta_1 \operatorname{tg} \nu_1 - Y_1 + Z_1 \operatorname{tg} \nu_1,$$
$$H_1'' + H_1 = \eta_1'', \qquad H_1' = \varphi_1 - H_1 \operatorname{tg} \nu_1 + \eta_1'.$$

$\nu_1 =$ latitude géodésique $+ \xi_1$.

Je n'aurais donc rien à changer à ce que j'ai dit au paragraphe précédent si l'on mesurait soit L_1 d'où H_1, soit φ_1. Mais ce que l'on mesurera, ce sera soit la longitude L, soit l'azimut φ (rapportés au système de coordonnées habituel).

Il est inutile d'écrire explicitement les relations entre L_1, ν_1, φ_1, L, ν et φ. La considération du triangle sphérique PP_1M nous donne trois relations entre L_1, ν_1, L, ν et $\varphi - \varphi_1$. Nous aurons donc une relation entre $\varphi - \varphi_1$, L_1 et ν_1 et nous pourrons écrire

$$\varphi = \varphi_1 + F(L_1, \nu_1).$$

En faisant dans cette équation $L_1 = \varphi_1 = 0$, $\nu_1 = \nu_1^0 + s$, on aura l'azimut calculé

$$\varphi = F(0, \nu_1^0 + s).$$

En y faisant $L_1 = L_1^1$, $\varphi_1 = \varphi_1^1$, $\nu_1 = \nu_1^1$, on aura l'azimut astronomique observé que j'appellerai $\varphi + \delta\varphi$; on aura donc

$$\delta\varphi = \varphi_1^1 + \frac{dF}{dL_1} L_1^1 + \frac{dF}{d\nu_1} \delta\nu_1$$

en posant

$$\delta\nu_1 = \nu_1^1 - \nu_1^0 - s;$$

d'où

$$\delta\varphi = \eta_1 \operatorname{tg}\nu_1 - Y_1 + Z_1 \operatorname{tg}\nu_1 + \frac{1}{\cos\nu_1} \frac{dF}{dL_1}(\eta_1 - Z_1) + \frac{dF}{d\nu_1}\xi_1. \tag{28}$$

Si l'arc est très petit, on peut négliger Y_1 et Z_1 et écrire simplement

$$\delta\varphi = \eta_1 \operatorname{tg}\nu_1 + \frac{1}{\cos\nu_1}\frac{dF}{dL_1}\eta_1 + \frac{dF}{d\nu_1}\xi_1.$$

ou

$$\delta\varphi = \left(\operatorname{tg}\nu_1 + \frac{1}{\cos\nu_1}\frac{dF}{dL_1}\right)(\eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi) + \frac{dF}{d\nu_1}(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi).$$

Mais si l'arc est très petit, on peut appliquer simplement les formules ordinaires de la déviation de la verticale, de sorte que

$$\delta\varphi = \eta \operatorname{tg}\lambda.$$

En identifiant on voit que

$$\eta \operatorname{tg}\lambda = \eta_1 \operatorname{tg} v_1 + \frac{1}{\cos v_1} \frac{dF}{dL_1} \eta_1 + \frac{dF}{dv_1} \xi_1,$$

de sorte que la formule (28) devient

$$\delta\varphi = \eta \operatorname{tg}\lambda - Y_1 + Z_1 \operatorname{tg} v_1 + \frac{1}{\cos v_1} \frac{dF}{dL_1} Z_1.$$

En seconde approximation, on peut négliger Z_1 et prendre

$$Y_1 = \int \eta_1 \, dv_1;$$

d'où

$$(29) \qquad \delta\varphi = \eta \operatorname{tg}\lambda - \int \eta_1 \, dv_1,$$

$$(30) \qquad \eta = \delta\varphi \operatorname{cotg}\lambda + \operatorname{cotg}\lambda \int \eta_1 \, dv_1.$$

Sous les latitudes équatoriales le facteur $\operatorname{cotg}\lambda$ est très grand, de sorte que le terme correctif peut être sensible, bien que $\int \eta_1 \, dv_1$ soit petit.

Ces conclusions ne seraient pas modifiées si l'on tenait compte de l'aplatissement, c'est-à-dire si l'on prenait pour surface de référence un ellipsoïde et non une sphère. Les formules finales conserveraient la même forme, seulement les coefficients devraient subir une correction qui pourrait aller au plus au centième de leur valeur.

On voit par ce rapide exposé de quels pièges on devrait se défier si l'on voulait déterminer près de l'équateur les déviations de la verticale par le moyen des mesures d'azimut. Déjà dans sa triangulation de Java, sous une latitude assez basse et dans un pays très accidenté, M. Oudemans a rencontré des difficultés analogues. Il résulte, en effet, de l'ensemble de ses déterminations que les déviations de la verticale déduites des mesures d'azimut sont en général et systématiquement trois fois plus grandes que les déviations déduites des mesures de longitude (dans des stations différentes, il est vrai).

Dans ces conditions, il est clair qu'il vaudra mieux, dans un grand nombre de cas, s'abstenir de rien déduire des mesures d'azimut prises près de l'équateur, d'autant plus que toute erreur commise dans cette mesure se trouve affectée du facteur considérable $\operatorname{cotg}\lambda$.

Remarquons encore que dans la formule (29) le terme principal ne dépend que de η, tandis que le terme correctif dépend de η_1 et par conséquent à la fois de ξ et de η.