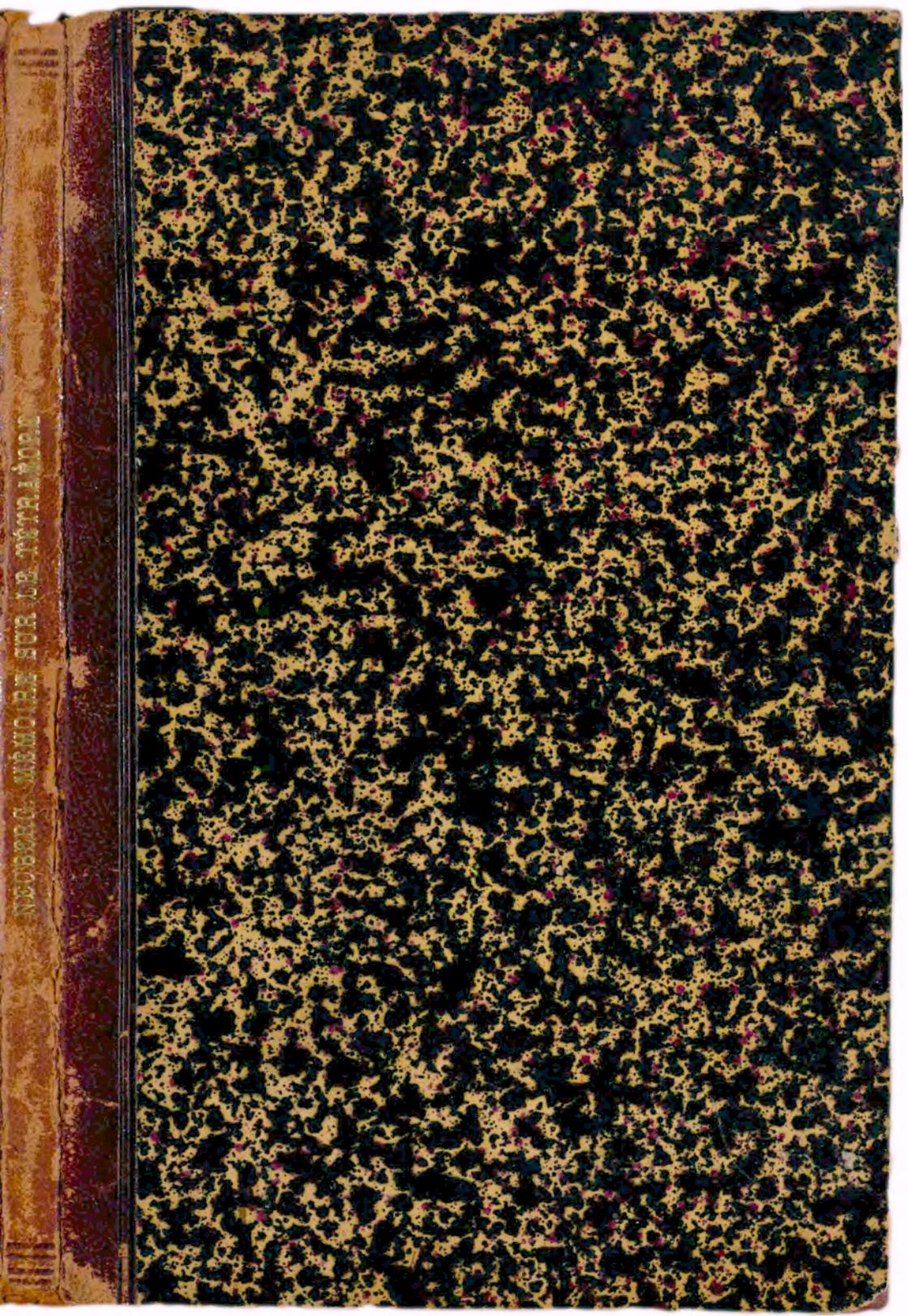


NEUBERG MEMOIRE SUR LE TETRAEDRE



4. 72

1845

1845

4. 72

1845

Hommage de l'auteur.

I. II.

MÉMOIRE
SUR LE TÉTRAÈDRE.

S. DICKSTEIN

(Extrait du tome XXXVII des *Mémoires couronnés et autres Mémoires*
publiés par l'Académie royale de Belgique. — 1884.)

MÉMOIRE
SUR LE TÉTRAÈDRE;

PAR

M. J. NEUBERG,

Professeur à l'Athénée et chargé de cours à l'École des mines de Liège.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~
500.2920,

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE,

Rue de Louvain, 108.

1884

S.DICKSTEIN



6920

J. M. II, 1233

MÉMOIRE

SUR LE TÉTRAÈDRE.

POINTS ET CERCLES DE LEMOINE ET DE BROCARD.

1. Le point K du plan d'un triangle $A_1A_2A_3$, dont les distances aux côtés sont proportionnelles aux longueurs a_1, a_2, a_3 de ces côtés, jouit de nombreuses propriétés, dont les plus remarquables sont dues à M. E. Lemoine (*). Nous le désignons, dans la suite, sous le nom de *point de Lemoine* (**).

A ce point se rattachent intimement deux autres points ω, ω' , qui ont reçu la dénomination de *points de Brocard* (***), du nom du géomètre qui les a étudiés pour la première fois. Ils sont définis par les égalités d'angles

$$\omega A_1A_2 = \omega A_2A_3 = \omega A_3A_1, \quad \omega' A_2A_1 = \omega' A_3A_2 = \omega' A_1A_3.$$

Les angles $\omega A_1A_2, \omega' A_2A_1$ ont une valeur commune α (*angle*

(*) *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences*, congrès de Lyon (1875) et de Lille (1874); *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1875, p. 564; 1885, p. 450; 1884, p. 28; *Nouvelle Correspondance de Catalan*, t. I, p. 47, et t. VI, p. 564; *MATHESES*, t. I, p. 155.

(**) Les Allemands emploient le terme de *point de Grebe*.

(***) *Nouvelle Correspondance*, t. III, IV, V et VI; *Nouvelles Annales*, 1875, p. 286; *Congrès d'Alger*, 1881; *MATHESES*, t. I, p. 174, et t. II, p. 75; *Journal de Bourget*, t. VII; *Congrès de Rouen*, 1885.

de Brocard) qui vérifie des relations trigonométriques importantes, telles que

$$\sin(A_1 - \alpha) \sin(A_2 - \alpha) \sin(A_3 - \alpha) = \sin^3 \alpha,$$

$$\cot \alpha = \cot A_1 + \cot A_2 + \cot A_3 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4A_1 A_2 A_3}.$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 A_1 + \operatorname{cosec}^2 A_2 + \operatorname{cosec}^2 A_3 (*).$$

Il nous a paru intéressant d'étendre à l'espace les propositions concernant les points de Lemoine et de Brocard. Ces recherches présentaient certaines difficultés : les systèmes de trois droites concourantes sont souvent remplacés par des quadruples hyperboloïdiques (**), la considération des figures semblables construites sur les faces du tétraèdre fait défaut, et parfois les analogies entre le triangle et le tétraèdre sont peu apparentes ou même manquent complètement. Plusieurs questions sont restées sans réponse; mais nous espérons y revenir prochainement.

Ces études nous ont conduit à approfondir certaines notions peu répandues et à nous occuper de problèmes qui n'ont pas de rapport direct avec l'objet principal de ce Mémoire. Nous sommes ainsi parvenu à un assez grand nombre de résultats nouveaux qui ne manqueront pas d'offrir un certain intérêt. Ces digressions se rapportent aux transformations arguésiennes, aux quadruples hyperboloïdiques, à quelques tétraèdres particuliers et à quelques minimums.

2. Pour entrer en matière, nous croyons utile de réunir ici

(*) On peut ajouter la suivante, qui est nouvelle :

$$\sin A_1 \cos(A_1 + \alpha) + \sin A_2 \cos(A_2 + \alpha) + \sin A_3 \cos(A_3 + \alpha) = 0.$$

(**) Système de quatre droites telles que toute autre droite rencontrant trois lignes du système s'appuie aussi sur la quatrième. Ces droites sont les génératrices, d'un même système, d'un hyperboloïde. L'expression de « quadruple hyperboloïdique » a été proposée par Hermes (*Journal de Crelle*, t. LXVII, p. 171).

les principaux théorèmes dont nous avons cherché la généralisation.

I. K est le point dont la somme des carrés des distances aux côtés de $A_1A_2A_3$ est minimum.

II. Les droites A_1K, A_2K, A_3K , appelées *médianes antiparallèles* ou *symédianes* (*), sont symétriques des médianes A_1G, A_2G, A_3G par rapport aux bissectrices des angles A_1, A_2, A_3 ; elles passent, respectivement, par les milieux des antiparallèles à un côté du triangle par rapport à l'angle opposé.

III. Ces lignes partagent les côtés correspondants en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents; autrement dit, K est le centre de gravité des points A_1, A_2, A_3 chargés de masses proportionnelles à a_1^2, a_2^2, a_3^2 .

IV. K est le centre de gravité du triangle $K_1K_2K_3$ déterminé par ses projections sur a_1, a_2, a_3 .

V. Les côtés du triangle $K_1K_2K_3$ sont perpendiculaires aux médianes de $A_1A_2A_3$; les droites qui joignent les projections de G sur les côtés $A_1A_2A_3$ sont perpendiculaires aux médianes antiparallèles A_1K, A_2K, A_3K .

VI. Les points K et G sont les foyers d'une ellipse inscrite à $A_1A_2A_3$; leurs projections sur a_1, a_2, a_3 appartiennent à une même circonférence qui a pour diamètre l'axe focal de l'ellipse.

VII. Le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux côtés de $A_1A_2A_3$ est constante, est une ellipse qui a pour centre le point K.

VIII. Soit $B_1B_2B_3$ le triangle formé par les tangentes aux points A_1, A_2, A_3 à la circonférence $A_1A_2A_3$. Le centre d'homologie des triangles $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$ coïncide avec K; leur axe d'homologie est la polaire de K par rapport au cercle $A_1A_2A_3$ et, par conséquent, perpendiculaire à la droite KO qui passe par le centre O.

IX. Les parallèles aux côtés de $A_1A_2A_3$, menées par le point K, rencontrent le périmètre en six points d'un même cercle (*cercle de Lemoine*), dont le centre est au milieu de la droite KO. Les

(*) *Nouvelles Annales*, 1883, p. 450, et 1884, p. 25 (articles de M. d'Ocagne).

cordes interceptées par le cercle sur les côtés sont proportionnelles à a_1^3, a_2^3, a_3^3 (*) ; les arcs interceptés par les angles A_1, A_2, A_3 mesurent le double de l'angle de Brocard (**).

X. Si par K on mène des antiparallèles aux trois côtés de $A_1A_2A_3$, les portions de ces lignes comprises dans les angles A_1, A_2, A_3 sont égales, et leurs extrémités sont sur un cercle, de centre K. Ces droites étant, deux à deux, les diagonales de trois rectangles inscrits à $A_1A_2A_3$, K est à l'intersection des droites qui joignent les milieux des côtés du triangle aux milieux des hauteurs correspondantes.

XI. Les côtés de tout triangle $C_1C_2C_3$ homothétique à $A_1A_2A_3$ par rapport au point de Lemoine déterminent sur les côtés de $A_1A_2A_3$ six points d'une même circonférence dont le centre est sur la droite KO.

XII. Les côtés de tout triangle $D_1D_2D_3$ homothétique à $B_1B_2B_3$ par rapport à K rencontrent ceux de $A_1A_2A_3$ en six points d'une même circonférence.

Les circonférences des théorèmes XI et XII sont identiques et comprennent comme cas particuliers celles des théorèmes IX et X.

XIII (***). Soient E_1, E_2, E_3 les projections de K sur les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés de $A_1A_2A_3$: les triangles isocèles $A_2A_3E_1, A_3A_1E_2, A_1A_2E_3$ sont semblables et l'angle à la base est égal à l'angle de Brocard.

Les triangles $A_1A_2A_3, E_1E_2E_3$ sont inversement semblables et ont même centre de gravité G. Ils sont triplement homologues : les droites A_1E_3, A_2E_1, A_3E_2 se coupent au *premier point de Brocard* ω ; les droites A_2E_3, A_3E_1, A_1E_2 concourent au *second point de Brocard* ω' ; enfin, les lignes A_1E_1, A_2E_2, A_3E_3 se ren-

(*) En raison de cette propriété, M. Tücker, qui avait étudié le cercle de Lemoine sans connaître les travaux du géomètre français, avait proposé la dénomination de « Triplicate ratio circle » (*Quarterly Journal*, vol. XIX et XX ; *Appendix to the Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XIV).

(**) Cette dernière propriété est due à M. Tücker.

(***) Nous rapportons ici quelques-unes des propriétés des points de Brocard, bien que notre Mémoire n'en contienne pas la généralisation. Mais nous espérons revenir prochainement sur ces propriétés.

contrent en un même point ω'' . Les points ω , ω' , ω'' ont pour coordonnées barycentriques

$$\frac{1}{a_2^2}, \frac{1}{a_3^2}, \frac{1}{a_1^2}; \quad \frac{1}{a_3^2}, \frac{1}{a_1^2}, \frac{1}{a_2^2}; \quad \frac{1}{a_1^2}, \frac{1}{a_2^2}, \frac{1}{a_3^2}.$$

L'axe d'homologie qui correspond à ω'' est perpendiculaire à la droite $O\omega''$. Le centre des moyennes distances du triangle $\omega\omega'\omega''$ coïncide avec G.

XIV. Les sept points ω , ω' , O, K, E_1 , E_2 , E_3 sont sur un même cercle (*cercle de Brocard*) ayant pour diamètre la droite $KO = R\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$ (K est le rayon du cercle $A_1A_2A_3$). L'angle $\omega O\omega'$ est égal à 2α et la corde $\omega\omega'$ est perpendiculaire à KO.

XV. Le cercle de Brocard rencontre les médianes antiparallèles A_1K , A_2K , A_3K en trois points F_1 , F_2 , F_3 , qui sont les centres de similitude de trois figures semblables dont A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 sont des lignes homologues.

Les triangles $E_1E_2E_3$, $F_1F_2F_3$ ont mêmes médianes, de sorte que G en est le centre d'homologie. L'axe d'homologie est perpendiculaire à la droite joignant G au milieu de KO.

TRANSFORMATIONS ARGUÉSINIENNES (*).

3. Pour éviter les redites, nous indiquerons ici les notations dont nous ferons constamment usage dans la suite :

T	Tétraèdre fondamental $A_1A_2A_3A_4$;
V, T_1 , T_2 , T_3 , T_4	Volume et aires des faces de T;
a_1 , a_2 , a_3	Longueurs des arêtes A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 ;
a_4 , a_5 , a_6	— — — A_4A_1 , A_4A_2 , A_4A_3 ;
O, R	Centre et rayon de la sphère $A_1A_2A_3A_4$;
O_n , R_n	— — — du cercle circonscrit à T_n ;

(*) Comparer : SALMON, *Higher plane curves*, 2^e édition, pp. 285-296; SALTEL, *Mémoires couronnés et autres Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XII et XIII; MANSION, *Bulletins de l'Académie de Belgique*, t. XXXVI; MANSION, *Nouvelle Correspondance*, t. I, p. 54; SCHOOTTE, *Bulletin de Darboux*, 1882, p. 132.

$B_1 B_2 B_3 B_4 \dots$	Tétraèdre formé par les plans tangents en A_1, A_2, A_3, A_4 à la sphère O ;
$h_1, h_2, h_3, h_4 \dots$	Les hauteurs $A_1 H_1, A_2 H_2, A_3 H_3, A_4 H_4$;
$I, r \dots$	Centre et rayon de la sphère inscrite à T ;
$I_1, I_2, I_3, I_4 \dots$	Points de contact de la sphère I avec les faces de T ;
$J_n, r_n \dots$	Centre et rayon de la sphère exinscrite touchant T_n intérieurement et les trois autres faces extérieurement;
$J_{n,1}, J_{n,2}, J_{n,3}, J_{n,4} \dots$	Points de contact de la sphère J_n avec les faces;
$K_1, K_2, K_3, K_4 \dots$	Points de Lemoine des faces de T ;
$G, g_n \dots$	Centres de gravité de T et de T_n .

Les dièdres de T sont désignés par la même lettre que leur arête.

4. Pour déterminer un point M du plan d'un triangle $A_1 A_2 A_3$, nous emploierons, suivant les cas, ses coordonnées normales ou ses coordonnées barycentriques.

Les *coordonnées normales* de M sont trois quantités $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, proportionnelles aux distances de M aux côtés du *triangle de référence* $A_1 A_2 A_3$, ces distances étant positives ou négatives suivant la position du point.

Les *coordonnées barycentriques* de M sont trois quantités μ_1, μ_2, μ_3 , proportionnelles aux aires des triangles $A_2 A_3 M, A_3 A_1 M, A_1 A_2 M$, affectées de signes convenables, de sorte que

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = a_1 \delta_1 : a_2 \delta_2 : a_3 \delta_3.$$

Les droites $A_1 M, A_2 M, A_3 M$ rencontrent les côtés a_1, a_2, a_3 en trois points m_1, m_2, m_3 qui satisfont aux égalités

$$m_1 A_2 : m_1 A_3 = -\mu_3 : \mu_2, \quad m_1 M : A_1 M = -\mu_1 : \mu_2 + \mu_3, \text{ etc.}$$

Ces relations montrent que M est le centre de trois forces parallèles, proportionnelles à μ_1, μ_2, μ_3 et appliquées en A_1, A_2, A_3 .

Les côtés homologues des triangles $A_1 A_2 A_3, m_1 m_2 m_3$ se rencontrent en trois points m'_1, m'_2, m'_3 , conjugués harmoniques

de m_1, m_2, m_3 par rapport à deux sommets de $A_1A_2A_3$. Ces points sont sur une même droite, appelée *polaire trilinéaire* de M . Les distances de cette droite aux sommets de référence (*coordonnées tangentielles*) sont inversement proportionnelles à μ_1, μ_2, μ_3 .

5. Les *coordonnées normales* d'un point M , par rapport à un tétraèdre de référence T , sont des quantités $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, proportionnelles aux distances de M aux faces de T , ces distances prenant le signe + ou - d'après une règle connue. Pour tous les points d'un plan mené par A_4A_5 , le rapport $\delta_1 : \delta_2$ est invariable; de même, les coordonnées $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ conservent les mêmes rapports, lorsque le point se déplace sur une droite menée par A_4 .

On passe, des coordonnées normales planes d'un point du plan $A_1A_2A_5$, à ses coordonnées tétraédriques $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, en multipliant les premières par $\sin a_1, \sin a_2, \sin a_3$.

Les *coordonnées barycentriques* d'un point M , par rapport à $A_1A_2A_3A_4$, sont des quantités $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, proportionnelles aux volumes $MA_2A_3A_4, MA_3A_4A_1, MA_4A_1A_2, MA_1A_2A_3$; on a évidemment

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4 = T_1\delta_1 : T_2\delta_2 : T_3\delta_3 : T_4\delta_4.$$

Désignons par M_n le point de rencontre du plan T_n avec la droite passant par M et le sommet opposé de T ; par m_n , le point de rencontre de a_n avec le plan passant par M et l'arête opposée à a_n . Les relations suivantes sont souvent utiles :

$$m_5A_1 : m_5A_2 = -\mu_2 : \mu_1, \quad m_6A_5 : m_6A_4 = -\mu_4 : \mu_3,$$

$$m_5M : m_6M = -(\mu_3 + \mu_4) : (\mu_1 + \mu_2), \quad M_4M : A_4M = -\mu_4 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3.$$

On peut les résumer en disant que M est le centre de quatre forces parallèles, proportionnelles à $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ et appliquées en A_1, A_2, A_3, A_4 .

Le plan d'homologie des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4, M_1M_2M_3M_4$ rencontre les arêtes du premier aux conjugués harmoniques des points m_1, m_2, \dots , par rapport à ces arêtes, et il coupe les

faces de T suivant les polaires trilinéaires de M_1, M_2, \dots , par rapport à ces faces. Nous l'appellerons *plan polaire* de M par rapport au tétraèdre T. Ses coordonnées ou distances aux sommets de référence sont inversement proportionnelles à $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

6. Deux points M, N peuvent être appelés *conjugués isogonaux* (*) par rapport à un triangle ou un tétraèdre, lorsque les coordonnées normales de l'un sont inversement proportionnelles à celles de l'autre point.

Pour établir les premières propriétés de ces points, on peut adopter la marche suivante, que nous nous contentons d'esquisser.

A. Lorsque deux points M, N du plan d'un angle AOB sont tels que les angles MON, AOB ont même bissectrice, ils sont dits *conjugués isogonaux* par rapport à AOB; ON est la *polaire isogonale* de M et les rayons OA, OB, OM, ON forment un *faisceau isogonal*.

Si M_a, M_b, N_a, N_b sont les projections, sur les côtés de l'angle AOB, de deux points conjugués isogonaux M et N : 1° les produits $MM_a \cdot NN_a, MM_b \cdot NN_b$ sont égaux ; 2° OM, ON sont perpendiculaires aux droites N_aN_b, M_aM_b ; 3° les points M_a, M_b, N_a, N_b appartiennent à une même circonférence dont le centre est au milieu de la droite MN ; 4° M et N sont les foyers d'une conique tangente à OA et OB.

B. Étant donné un triangle $A_1A_2A_3$ et un point M de son plan : 1° les polaires isogonales de M par rapport aux angles du triangle concourent en un même point N ; 2° les produits des distances de M et N à un côté quelconque de $A_1A_2A_3$ sont égaux entre eux ; 3° les projections de ces points sur les côtés sont six points d'une même circonférence ; 4° les droites A_1M, A_2M, A_3M (ou A_1N, A_2N, A_3N) sont perpendiculaires aux lignes qui joignent les projections de N

(*) Pour plus de précision, nous remplaçons ici les termes généraux de « points arguésiens, réciproques ou inverses » par les dénominations de « points conjugués isogonaux » et « points conjugués isotomiques ».

(ou M) sur les côtés de $A_1A_2A_3$; 4° M et N sont les foyers d'une conique inscrite à $A_1A_2A_3$ (*).

C. Lorsque deux dièdres ont même arête et même plan bissecteur, leurs plans forment un faisceau isogonal; deux points quelconques, pris dans les faces de l'un des dièdres, sont dits conjugués isogonaux par rapport à l'autre dièdre.

M et N étant deux points conjugués isogonaux par rapport aux plans A, B, et se projetant sur ceux-ci en M_a, M_b, N_a, N_b : 1° les produits $MM_a \cdot NN_a, MM_b \cdot NN_b$ sont égaux; 2° les projections appartiennent à une sphère dont le centre est au milieu de la distance MN; 3° les plans menés par l'intersection des plans A et B et par l'un ou l'autre des points M, N sont, respectivement, perpendiculaires aux droites N_aN_b, M_aM_b ; 4° les plans A et B sont tangents à une même surface de révolution du second ordre, dont M et N sont les foyers de la méridienne.

La démonstration de ce théorème devient facile si l'on projette M et N sur les plans NN_aN_b et MM_aM_b .

D. Étant donné un trièdre OABC et un point quelconque M: 1° les plans polaires isogonaux de M par rapport aux trois dièdres du trièdre se coupent suivant une même droite ON; 2° les produits des distances de deux points quelconques M, N des droites conjuguées isogonales OM, ON, à une même face du trièdre, sont égaux entre eux; 3° les projections de M, N sur les trois faces sont situées sur une même sphère dont le centre est au milieu de la droite MN; 4° les lignes OM et ON sont perpendiculaires aux plans qui passent, respectivement, par les projections de N et M sur les faces du trièdre O; 5° M et N sont les foyers d'une surface de révolution du second ordre, inscrite au trièdre.

E. Étant donné un tétraèdre quelconque et un point M: 1° les plans polaires isogonaux de M par rapport aux six dièdres du tétraèdre concourent en un même point N; 2° les distances de M aux faces du solide sont inversement proportionnelles à celles de N

(*) Comparer: *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 57, ou *Steiner's Gesammelte Werke*, t. I, p. 189; CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6^e édition, p. 52; *Nouvelles Annales*, 1865, p. 595 (F.-J.-A. Mathieu).

aux mêmes plans; 3° les projections de M et N sur ces plans sont situées sur une même sphère dont le centre est au milieu de la droite MN ; 4° M et N sont les foyers d'une surface de révolution du second ordre, inscrite au tétraèdre; 5° la droite qui joint M à un sommet du tétraèdre est perpendiculaire au plan qui passe par les projections de N sur les faces du trièdre correspondant.

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 les projections de M sur les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Si l'on transporte le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ parallèlement à lui-même, la dernière partie du théorème (E) conduit à la proposition suivante qui a été signalée pour la première fois par Steiner (*):

Si les perpendiculaires menées par les sommets d'un tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ sur les faces homologues d'un autre tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ concourent en un même point, les perpendiculaires abaissées des sommets de $A_1A_2A_3A_4$ sur les faces de $M_1M_2M_3M_4$ jouiront de la même propriété.

Nous donnerons plus loin (§§) une généralisation de cette proposition. Un cas particulier, qui mériterait un examen plus approfondi, est le suivant: *Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sur les faces homologues du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, qui a pour sommets les centres des cercles circonscrits aux faces du premier, concourent en un même point O' .*

7. Les propositions (B) et (E) donnent lieu à deux cas particuliers remarquables qui correspondent à la parabole et au paraboloïde de révolution.

La droite de l'infini et le cercle $A_1A_2A_3$ ont pour équations

$$a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3 = 0, \quad \frac{a_1}{\delta_1} + \frac{a_2}{\delta_2} + \frac{a_3}{\delta_3} = 0;$$

L'une de ces lignes est donc la transformée isogonale de l'autre. Par conséquent, *les polaires isogonales d'un point M de la circonférence circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$, prises par rapport aux angles A_1, A_2, A_3 , sont parallèles entre elles; ces droites sont des*

(*) *Journal de Crelle*, t. II, p. 287; *Steiner's Gesammelte Werke*, t. I, p. 155.

diamètres de la parabole inscrite au triangle et ayant M pour foyer. La démonstration de ce théorème par la géométrie pure ne présente pas de difficulté.

De même : Si par les six arêtes d'un tétraèdre on mène des plans parallèles à une même droite Δ , les plans polaires isogonaux de ces plans par rapport aux dièdres correspondants du tétraèdre concourent en un même point M ; les projections de M sur les faces du solide sont dans un même plan perpendiculaire à Δ ; le lieu de M est une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre (*).

8. Il existe des surfaces du second ordre circonscrites au tétraèdre de référence et restant invariables par une transformation isogonale (**). L'équation générale d'une *anallagmatique isogonale* est de la forme

$$A(\delta_4\delta_1 + \delta_2\delta_3) + B(\delta_4\delta_2 + \delta_1\delta_3) + C(\delta_4\delta_3 + \delta_1\delta_2) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

Elle est vérifiée par les coordonnées des points J_1, J_2, J_3, J_4 .

La proposition suivante, qui est assez curieuse, s'établit aisément : Toute surface du second degré qui passe par sept des points $A_1, A_2, A_3, A_4, J_1, J_2, J_3, J_4$ passe aussi par le huitième et est une *anallagmatique isogonale* par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

En particulier, il existe trois hyperboloïdes *anallagmatiques*, représentés par les équations

$$\delta_4\delta_1 + \delta_2\delta_3 = 0, \quad \delta_4\delta_2 + \delta_1\delta_3 = 0, \quad \delta_4\delta_3 + \delta_1\delta_2 = 0.$$

Le premier a pour génératrices d'un système les droites A_1A_2 ,

(*) Comparer : *Journal de Crelle*, t. LXIX, p. 197 (Geiser).

Le lieu de M a pour équation

$$\frac{T_1}{\delta_1} + \frac{T_2}{\delta_2} + \frac{T_3}{\delta_3} + \frac{T_4}{\delta_4} = 0.$$

(**) Il serait plus exact de dire que la transformée isogonale de la surface (1) se compose de cette surface et des plans de référence. Car A_4 , par exemple, est conjugué isogonal avec chaque point du plan $A_1A_2A_3$.

A_3A_4 , J_2J_3 , J_4J_1 , et pour génératrices de l'autre les lignes J_1J_2 , J_3J_4 , A_2A_3 , A_4A_1 .

L'équation (1) peut représenter une sphère, lorsque les arêtes opposées du tétraèdre sont égales. Donc la sphère circonscrite à un tétraèdre isocèle (*) passe par les centres des sphères exinscrites et renferme une infinité de couples de points conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre.

9. Nous dirons que deux points M, N sont *conjugués isotomiques* par rapport à un triangle $A_1A_2A_3$, lorsque les droites A_nM , A_nN rencontrent a_n en deux points équidistants du milieu de a_n . Si μ_1, μ_2, μ_3 sont les coordonnées barycentriques de M, celles de N seront $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}$.

De même, deux points M, N dont les coordonnées barycentriques par rapport à un tétraèdre de référence sont $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, $(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}, \frac{1}{\mu_4})$, peuvent être appelés *conjugués isotomiques* relativement à ce tétraèdre. Les droites A_iM , A_iN rencontrent le plan $A_1A_2A_3$ en deux points conjugués isotomiques par rapport au triangle T_4 ; les plans A_1A_2M , A_1A_2N coupent A_3A_4 en deux points équidistants du milieu de A_3A_4 .

Deux transversales peuvent rencontrer un côté quelconque du triangle de référence en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté; nous les appellerons *conjugués isotomiques*. Les coordonnées de l'une de ces droites sont inversement proportionnelles à celles de l'autre; ces lignes sont les polaires trilineaires de deux points conjugués isotomiques.

Deux plans sont dits *conjugués isotomiques* par rapport au tétraèdre de référence, lorsque leurs intersections avec une arête quelconque sont équidistantes du milieu de celle-ci. Les coordonnées de ces plans sont encore inverses les unes des

(*) Le tétraèdre isocèle (ou équifacial) a été étudié par M. Lemoine (*Congrès de Nantes, 1875*, et *Nouvelles Annales, 1880*, p. 155). Voir aussi : *Archives de Grunert*, t. LVII; *Nouvelle Correspondance*, t. II, p. 144; *Nouvelles Annales, 1880*, p. 405.

autres; leurs pôles relativement à la figure de référence sont également conjugués isotomiques (*).

10. Une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre fondamental peut coïncider avec sa transformée isotomique. L'équation générale d'une *anallagmatique isotomique* est de la forme

$$A(\mu_4\mu_1 + \mu_2\mu_3) + B(\mu_4\mu_2 + \mu_1\mu_3) + C(\mu_4\mu_3 + \mu_1\mu_2) = 0.$$

Toute surface du second ordre circonscrite au tétraèdre fondamental et ayant pour centre le centre de gravité de celui-ci est une anallagmatique isotomique.

11. Soient M un point quelconque, M' son conjugué isotomique par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, M'' le conjugué isogonal de M' , M''' le conjugué isotomique de M'' , M^{iv} le conjugué isogonal de M''' , et ainsi de suite. Désignons par $\mu_n, \mu'_n, \mu''_n, \mu'''_n, \dots$, ($n = 1, 2, 3, 4$), les coordonnées barycentriques de M, M', M'', M''', \dots Nous aurons :

Coordonnées barycentriques de M	μ_n ;	
—	—	de M' $\mu'_n = \frac{1}{\mu_n}$;
—	normales	de M' $\frac{\mu'_n}{T_n} = \frac{1}{\mu_n T_n}$;
—	—	de M'' $\mu_n T_n$;
—	barycentriques de M''	$\mu''_n = \mu_n T_n^2$;
—	—	de M^{iv} $\mu^{iv}_n = \mu_n T_n^4$, etc.

Par analogie, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les coordonnées barycentriques du point M^{2n} ,

$$\frac{\alpha_1}{\mu_1 T_1^{2n}} = \frac{\alpha_2}{\mu_2 T_2^{2n}} = \frac{\alpha_3}{\mu_3 T_3^{2n}} = \frac{\alpha_4}{\mu_4 T_4^{2n}}.$$

L'élimination de n conduit aux équations d'une courbe qui

(*) La transformation par droites isotomiques et par plans isotomiques a été étudiée par MM. G. de Longchamps (*Nouvelles Annales*, 1866, p. 118, et *Congrès du Havre*, 1877) et Amigues (*Nouvelles Annales*, 1879, p. 548).

passé par tous les points dérivant de M par un nombre pair de transformations :

$$\left\| \begin{array}{cccc} \log \frac{\alpha_1}{\mu_1} & \log \frac{\alpha_2}{\mu_2} & \log \frac{\alpha_3}{\mu_3} & \log \frac{\alpha_4}{\mu_4} \\ \log T_1 & \log T_2 & \log T_3 & \log T_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} (*) \\ \\ \\ = 0. \end{array}$$

Les équations d'une courbe passant par les points déduits de M par un nombre impair de transformations sont les mêmes, sauf à changer $\frac{\alpha_n}{\mu_n}$ en α_n/μ_n .

Si l'on prend pour M le centre de gravité de $A_1A_2A_3A_4$ ou pour M' le centre de la sphère inscrite, les coordonnées normales ou barycentriques des points M, M', M'', \dots sont toujours proportionnelles à des puissances semblables de T_1, T_2, T_3, T_4 . Ces points jouissent de la propriété de rendre minimum la somme des puissances semblables, d'un certain degré, de leurs distances aux faces du tétraèdre, ou de rendre maximum la somme des inverses de telles puissances (**).

POINT DU MINIMUM DE LA SOMME DES CARRÉS DES DISTANCES
A DES PLANS DONNÉS.

12. Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ les distances d'un point quelconque aux faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et posons

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = S.$$

L'identité

$$\sum \delta_i^2 \cdot \sum T_i^2 - \sum^2 \delta_i T_i = \sum (\delta_1 T_2 - \delta_2 T_1)^2,$$

qui revient à

$$S(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2) - 9V^2 = \sum (\delta_1 T_2 - \delta_2 T_1)^2,$$

(*) Cette notation indique qu'il faut évaluer à zéro les déterminants formés avec trois quelconques des colonnes.

(**) Comparer : une communication de M. Lemoine au *Congrès de la Rochelle* (1882); une de M. Brocard au *Congrès d'Alger* (1881); un article de M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales*, 1885, p. 450.

montre que le minimum de S a lieu lorsque les carrés qui entrent dans le second membre sont nuls. Le point correspondant L est donc défini par les proportions (*)

$$\frac{\delta_1}{T_1} = \frac{\delta_2}{T_2} = \frac{\delta_3}{T_3} = \frac{\delta_4}{T_4},$$

qui donnent

$$\delta_n = \frac{5VT_n}{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2}, \quad S = \frac{9V^2}{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2},$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2}.$$

Les coordonnées barycentriques de L sont $T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2$; ce qui revient à dire que le plan LA_3A_4 partage l'arête A_1A_2 en segments proportionnels aux carrés des faces passant par A_3A_4 , que les plans $A_4A_1L, A_4A_2L, A_4A_3L$ divisent $A_1A_2A_3$ en trois triangles proportionnels aux carrés des faces adjacentes (4 et 5).

13. Les coordonnées normales de G sont inversement proportionnelles à T_1, T_2, T_3, T_4 . Donc les points G et L sont conjugués isogonaux, et on peut leur appliquer les propriétés énoncées au n° 6 (E).

Soient L_1, L_2, L_3, L_4 les projections de L sur les faces de T . D'après une formule connue,

$$\begin{aligned} \text{vol } LL_1L_2L_3 &= \frac{1}{6} LL_1 \cdot LL_2 \cdot LL_3 \sin (LL_1L_2L_3) \\ &= \frac{9V^3}{2\sum^3 T_i^2} T_1 T_2 T_3 \sin (LL_1L_2L_3). \end{aligned}$$

Les trièdres A_4 et $LL_1L_2L_3$ étant supplémentaires, on a aussi

$$V^2 = \frac{2}{9} T_1 T_2 T_3 \sin (LL_1L_2L_3).$$

On déduit de là :

$$\text{vol } LL_1L_2L_3 = LL_2L_3L_4 = LL_3L_4L_1 = LL_4L_1L_2.$$

Donc L est le centre de gravité du tétraèdre $L_1L_2L_3L_4$.

(*) Comparer : SIMON LHUILIER, *Éléments d'analyse*, p. 297.

Cette proposition peut être démontrée *a priori*. En effet, si L'_n est la projection, sur le plan T_n , d'un point quelconque L' , la définition du point L donne

$$\overline{LL_1}^2 + \overline{LL_2}^2 + \overline{LL_3}^2 + \overline{LL_4}^2 < \overline{L'L_1}^2 + \overline{L'L_2}^2 + \overline{L'L_3}^2 + \overline{L'L_4}^2;$$

d'où, à plus forte raison,

$$\overline{LL_1}^2 + \overline{LL_2}^2 + \overline{LL_3}^2 + \overline{LL_4}^2 < \overline{L'L_1}^2 + \overline{L'L_2}^2 + \overline{L'L_3}^2 + \overline{L'L_4}^2.$$

Donc le point L est tel que la somme des carrés de ses distances aux sommets du tétraèdre $L_1L_2L_3L_4$ est minimum; par suite, il est le centre de gravité de ce tétraèdre (*).

11. Soient N_1, N_2, N_3 les points de rencontre des droites A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 avec les plans menés par L parallèlement aux faces $A_1A_2A_3, A_1A_3A_1, A_1A_1A_2$. Dans le parallélépipède ainsi obtenu, la diagonale A_4L passe par le centre de gravité N du triangle $N_1N_2N_3$. Les hauteurs du parallélépipède sont égales aux distances de L aux faces du trièdre A_4 ou proportionnelles à T_1, T_2, T_3 ; en considérant trois expressions différentes du volume de ce solide, on obtient les égalités

$$A_4N_2N_3 \cdot T_1 = A_4N_3N_1 \cdot T_2 = A_4N_1N_2 \cdot T_3 \dots \dots \dots (2)$$

A cause de l'analogie de cette relation avec celle qui a lieu entre les segments des côtés d'un angle coupé par deux antiparallèles, nous dirons que les triangles $A_1A_2A_3$ et $N_1N_2N_3$ sont des sections antiparallèles, de seconde espèce, du trièdre A_4 .

(*) Nous empruntons ce raisonnement aux *Théorèmes et Problèmes*, par E. Catalan, 6^e édition, p. 250. On peut l'appliquer à la même question traitée pour des plans et des droites en nombre quelconque.

Un système de n forces concourantes, perpendiculaires aux faces d'un polyèdre et proportionnelles à leurs aires, est toujours en équilibre (*Nouvelles Annales*, 1877, p. 146, et *Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 150). Mais dans le cas de $n > 4$, il n'existe pas toujours de point dont les distances aux faces du polyèdre soient proportionnelles à ces faces, de sorte que le point L doit être déterminé par des considérations différentes (15).

Le théorème II du § 2 aura alors pour analogue dans l'espace la propriété suivante : *Les droites A_1L , A_2L , A_3L , A_4L passent par les centres de gravité des sections antiparallèles de seconde espèce.*

Les égalités (2) peuvent encore s'écrire ainsi :

$$A_4N_1 \cdot A_4A_1 : A_4N_2 \cdot A_4A_2 : A_4N_3 \cdot A_4A_3 = \sin^2 a_4 : \sin^2 a_5 : \sin^2 a_6.$$

15. Considérons n plans quelconques ne passant pas par un même point ($n > 3$), et soient

$$P_r \equiv x \cos \alpha_r + y \cos \beta_r + z \cos \gamma_r - p_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n),$$

leurs équations par rapport à trois axes rectangulaires MX , MY , MZ . $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ sont les distances du point (x, y, z) à ces plans. Si l'on pose

$$P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_n^2 = S,$$

les conditions du minimum de S sont

$$\left. \begin{aligned} P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n &= 0, \\ P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots + P_n \cos \beta_n &= 0, \\ P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots + P_n \cos \gamma_n &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

On en déduit aisément que *le lieu des points dont la somme des carrés des distances à des plans donnés est constante est un ellipsoïde ayant pour centre le point L qui rend cette somme minimum.*

Soient L_1, L_2, L_3, \dots les projections de L sur les plans donnés. Les équations (3) expriment que les projections de LL_1, LL_2, LL_3, \dots sur un axe de coordonnées ont une somme nulle. Par conséquent, *les perpendiculaires abaissées de L sur les plans représentent un système de forces en équilibre*; autrement dit, *L est le centre des moyennes distances de ses projections L_1, L_2, L_3, \dots sur les plans.*

Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ les angles que font les normales aux plans donnés avec une droite quelconque MU ; la

somme des projections de $LL_1, LL_2, LL_3 \dots$, sur MU étant nulle, on a

$$P_1 \cos \lambda_1 + P_2 \cos \lambda_2 + \dots + P_n \cos \lambda_n = 0 \quad (4)$$

Cette équation représente un plan passant par le point cherché L . Développée, elle devient

$$x \sum \cos \alpha_1 \cos \lambda_1 + y \sum \cos \beta_1 \cos \lambda_1 + z \sum \cos \gamma_1 \cos \lambda_1 = \sum p_1 \cos \lambda_1.$$

Multiplions les deux membres par $\frac{1}{n^2} \sum p_1 \cos \lambda_1$, et posons

$$\frac{1}{n} \sum p_1 \cos \lambda_1 = \rho, \quad \frac{1}{n} \sum \rho \cos \lambda_1 \cos \alpha_1 = x_1, \quad \frac{1}{n} \sum \rho \cos \lambda_1 \cos \beta_1 = y_1, \dots \quad (5)$$

Nous aurons ainsi

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = \rho^2,$$

équation du plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) par rapport à une certaine sphère. La signification des quantités x_1, y_1, z_1, ρ résulte des égalités (5) et conduit au théorème suivant :

D'un point quelconque M , on abaisse des perpendiculaires MM_1, MM_2, \dots, MM_n sur n plans donnés P_1, P_2, \dots, P_n . Soient M' le centre de gravité des points M_1, M_2, \dots, M_n ; M'' la projection de M' sur une droite quelconque MU ; M''' le centre de gravité des projections de M' sur les droites MM_1, MM_2, \dots, MM_n . Le plan polaire de M''' par rapport à la sphère décrite de M comme centre avec le rayon MM'' , passe par un point fixe L qui ne dépend que des plans P_1, P_2, \dots, P_n .

Pour simplifier, faisons coïncider MU avec MM'' et bornons-nous au cas du triangle. Nous aurons alors la proposition que voici :

Soient M_1, M_2, M_3 les projections d'un point quelconque M sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$, M' le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$, et N celui du triangle formé par les projections de M' sur les droites MM_1, MM_2, MM_3 . La polaire de N par rapport au cercle qui a pour centre M et pour rayon MM' passe constamment par le point de Lemoine du triangle $A_1A_2A_3$.

En faisant usage du théorème sur la multiplication des

déterminants rectangulaires, on peut indiquer la solution des équations (3) au moyen des formules :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \dots & \cos \beta_n \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \dots & \cos \gamma_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \dots & \cos \alpha_n \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \dots & \cos \beta_n \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \dots & \cos \gamma_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \dots & \cos \alpha_n \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \dots & \cos \beta_n \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \dots & \cos \gamma_n \end{vmatrix}^2}, \text{ etc.}$$

Pour trouver le point dont la somme des carrés des distances à des droites données dans l'espace est minimum, on peut substituer à chaque droite deux plans rectangulaires menés par cette droite ; la question est alors ramenée à celle que nous venons de traiter.

Ce problème offre un certain intérêt quand on l'applique à trois droites situées d'une manière quelconque dans l'espace ou aux six arêtes d'un tétraèdre.

QUADRUPLES HYPERBOLOÏDIQUES.

Nous venons d'étendre au tétraèdre les théorèmes I à VII du n° 2. Avant de passer à la généralisation des propriétés VIII à XIII, nous croyons utile d'entrer dans quelques développements au sujet des sections antiparallèles du tétraèdre, et des quadruples hyperboloïdiques.

16. Une sphère quelconque passant par A_1, A_2, A_3 rencontre les arêtes A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 du tétraèdre T en des points N_1, N_2, N_3 tels que les droites N_2N_3, N_3N_1, N_1N_2 sont antiparallèles à A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 par rapport aux angles $A_2A_4A_3, A_3A_4A_1, A_1A_4A_2$. Ces droites sont donc parallèles aux tangentes menées aux cercles O_1, O_2, O_3 par le point A_4 ; le plan $N_1N_2N_3$ est parallèle à $B_1B_2B_3$ ou perpendiculaire au rayon OA_4 de la sphère circonscrite à T, et

$$A_4A_1 \cdot A_4N_1 = A_4A_2 \cdot A_4N_2 = A_4A_3 \cdot A_4N_3.$$

Nous dirons que $N_1N_2N_3$ est une *section antiparallèle* à $A_1A_2A_3$ par rapport au trièdre A_4 . Il est évident que le centre de la sphère $A_4N_1N_2N_3$ est situé sur la hauteur A_4H_4 de T.

Les circonférences $A_1A_2A_3$, $N_1N_2N_3$ sont des sections antiparallèles d'un même cône du second degré dont le sommet est A_4 . Si l'on mène les plans tangents le long des arêtes A_4A_1 , A_4A_2 , A_4A_3 , on forme un trièdre circonscrit tel que les plans conduits par les arêtes de ce trièdre et les arêtes opposées du tétraèdre se coupent suivant la droite A_4K_4 . Donc la droite qui joint un sommet d'un tétraèdre au point de Lemoine de la face opposée, passe aussi par le point de Lemoine des sections antiparallèles correspondantes.

Rappelons aussi cette proposition connue (*) que les droites A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , A_4B_4 passent par les centres des sections antiparallèles correspondantes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Les triangles semblables $A_4A_1A_2$ et $A_4N_2N_1$, $A_4A_2A_3$ et $A_4N_3N_2$ donnent les proportions

$$\frac{N_1N_2}{a_5} = \frac{A_4N_2}{a_4}, \quad \frac{N_2N_3}{a_1} = \frac{A_4N_3}{a_6},$$

d'où l'on déduit aisément :

$$\frac{N_1N_2}{a_5a_6} = \frac{N_2N_3}{a_1a_4} = \frac{N_3N_1}{a_2a_5}.$$

Donc les côtés d'une section antiparallèle quelconque sont proportionnels aux produits des arêtes opposées du tétraèdre (**). Les

(*) E. CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6^e édition, p. 401; ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, 4^e édition, t. II, p. 224.

(**) Théorème connu, d'où Von Staudt a déduit l'expression de R en fonction des arêtes. Voir, par exemple, CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, p. 432.

Ce théorème exprime une propriété remarquable de la figure inverse des sommets d'un triangle, propriété qu'on peut énoncer ainsi : *Étant donné un quadrangle quelconque ABCD, les inverses de trois des sommets par rapport au quatrième sont les sommets d'un triangle dont les côtés sont proportionnels aux produits des côtés opposés du quadrangle.* Nous reviendrons sur cette proposition intéressante.

sections antiparallèles des quatre trièdres d'un tétraèdre sont semblables entre elles.

17. Soient quatre points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 pris respectivement dans les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Si les droites $A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4$ sont des génératrices, d'un même système, d'un hyperboloïde, la génératrice du second système, qui passe par A_4 , est située dans les plans $A_4A_1Q_1, A_4A_2Q_2, A_4A_3Q_3$. Réciproquement, si les plans $A_4A_1Q_1, A_4A_2Q_2, A_4A_3Q_3$ se coupent suivant une même droite A_4Q_4 , celle-ci s'appuie sur A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3 ; si, de plus, les sommets A_1, A_2 satisfont à des conditions analogues, les droites $A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4$ forment un quadruple hyperboloïdique.

Par exemple, si l'on considère les hauteurs du tétraèdre, les plans $A_4A_1H_1, A_4A_2H_2, A_4A_3H_3$, menés par une arête du trièdre A_4 perpendiculairement à la face opposée, se coupent suivant une droite; donc *les hauteurs d'un tétraèdre forment un quadruple hyperboloïdique.* (Théorème connu.)

De même, si Q_n est le centre du cercle inscrit à T_n , les plans $A_4A_1Q_1, A_4A_2Q_2, A_4A_3Q_3$ passent par une arête du trièdre A_4 et la bissectrice de la face opposée; donc *les droites joignant les sommets d'un tétraèdre aux centres des cercles inscrits aux faces opposées constituent un quadruple hyperboloïdique.*

18. Prenons pour Q_n le point de Lemoine de T_n . Les droites A_4K_1, A_4K_2, A_4K_3 partagent A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 dans les rapports

$$-\frac{a_5^2}{a_6^2}, \quad -\frac{a_6^2}{a_4^2}, \quad -\frac{a_4^2}{a_5^2},$$

dont le produit est égal à -1 ; donc les plans $A_4A_1K_1, A_4A_2K_2, A_4A_3K_3$, dont les traces sur le plan $A_1A_2A_3$ se coupent en un même point, passent par une même droite. Par conséquent, *les lignes qui joignent un sommet d'un tétraèdre au point de Lemoine de la face opposée appartiennent à un même hyperboloïde.*

19. Considérons maintenant les droites qui vont d'un sommet au point de contact de la face opposée avec la sphère inscrite.

Soit t_1 l'aire des triangles égaux $A_2A_3I_1$, $A_2A_3I_1$; soient aussi t_2, t_3, \dots les aires des triangles analogues qui ont pour base a_2, a_3, \dots (*). Les plans $A_1A_4I_1, A_4A_2I_2, A_4A_3I_3$, divisent les arêtes a_1, a_2, a_3 dans les rapports

$$-\frac{t_5}{t_6}, \quad -\frac{t_6}{t_4}, \quad -\frac{t_4}{t_5},$$

dont le produit égale -1 ; donc ils se coupent suivant une même droite. On déduit de là que *les droites $A_1I_1, A_2I_2, A_3I_3, A_4I_4$ constituent un quadruple hyperboloïdique.*

La démonstration précédente rappelle celle que l'on donne ordinairement de la proposition analogue sur le triangle. On peut aussi s'appuyer sur ce dernier théorème, en observant que les traces des plans $A_4A_1I_1, A_4A_2I_2, A_4A_3I_3$ sur le plan $I_1I_2I_3$ sont les médianes antiparallèles du triangle $I_1I_2I_3$. Un changement de notations conduit alors à la proposition suivante: *Les droites qui joignent les sommets homologues des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4$ sont des génératrices, d'un même système, d'un hyperboloïde; les droites qui unissent les sommets du second tétraèdre aux points de Lemoine des faces homologues du premier sont des génératrices, du second système, de la même surface.*

20. Les distances des points I_1, J_{11} aux côtés du triangle $A_1A_2A_3$ sont respectivement

$$r \cot \frac{1}{2} a_1, \quad r \cot \frac{1}{2} a_2, \quad r \cot \frac{1}{2} a_3;$$

$$r_4 \tan \frac{1}{2} a_1, \quad r_4 \tan \frac{1}{2} a_2, \quad r_4 \tan \frac{1}{2} a_3.$$

On en conclut que *les points I_1, J_{11} sont conjugués isogonaux*

(*) Les aires t_1, t_2, \dots ont pour mesure $\frac{1}{2} a_1 r \cot \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{2} a_2 r \cot \frac{1}{2} a_2, \dots$ Il serait intéressant d'avoir leurs expressions en fonction des arêtes seules ou en fonction de r et des dièdres.

par rapport à $A_1A_2A_3$; ce sont donc les foyers d'une ellipse inscrite à ce triangle et ayant pour petit axe $2\sqrt{rr_1}$. La droite A_4I coupant le plan T_4 en \bar{i} , les points $H_4, I_4, i, J_{4,4}$ forment, évidemment, une division harmonique.

On verrait, de la même manière, que les points J_{14}, J_{24}, J_{34} sont conjugués isogonaux avec les points où le plan $A_1A_2A_3$ touche les sphères inscrites aux combles. Lorsque l'une de celles-ci disparaît, le point de contact d'une sphère exinscrite tombe sur la circonférence $A_1A_2A_3$ (7).

Ces résultats étant mis en rapport avec un théorème de M. Hermary (*), on aura ce théorème assez curieux de géométrie plane :

Trois circonférences décrites des points A_1, A_2, A_3 comme centres se coupent, deux à deux, aux points $(U_1, U'_1), (U_2, U'_2), (U_3, U'_3)$. Si l'on partage ceux-ci en deux groupes de trois points tels que :

$$U_1U_2U_3 \text{ et } U'_1U'_2U'_3, \quad U_1U_2U'_3 \text{ et } U'_1U'_2U_3, \quad U_1U_3U'_2 \text{ et } U'_1U'_3U_2, \\ U_2U_3U'_1 \text{ et } U'_2U'_3U_1,$$

les centres des deux circonférences passant par les triples d'un même groupe sont les foyers d'une conique inscrite au triangle $A_1A_2A_3$, et sont en ligne droite avec le centre radical des cercles A_1, A_2, A_3 . Si le centre de la circonférence $U_1U_2U'_3$, par exemple, tombe sur la circonférence $A_1A_2A_3$, les points U'_1, U'_2, U'_3 sont sur une même droite.

Le tétraèdre isocèle donne lieu à cette jolie remarque : *Les points où une face touche la sphère inscrite et les sphères exinscrites sont : le centre du cercle circonscrit à cette face, les points de ce cercle diamétralement opposés aux sommets, et le point de concours des hauteurs.*

21. Soient pris, sur les côtés d'un triangle sphérique $A_1A_2A_3$, les points I_1 et J_{11}, I_2 et J_{22}, I_3 et J_{33} équidistants du milieu du côté correspondant. Si les arcs A_1I_1, A_2I_2, A_3I_3 concourent en un même point, il en sera de même des arcs $A_1J_{11}, A_2J_{22},$

(*) Voir *Nouvelle Correspondance*, t. VI, p. 8.

A_3J_{33} (*); et si les arcs perpendiculaires sur les côtés de $A_1A_2A_3$ aux points I_1, I_2, I_3 se rencontrent en un même point I , les arcs perpendiculaires sur les mêmes côtés aux points J_{11}, J_{22}, J_{33} (**) se coupent en un même point V . En particulier, les points I_1, I_2, I_3 peuvent être les points de contact des côtés du triangle $A_1A_2A_3$ avec le cercle inscrit; alors les points J_{11}, J_{22}, J_{33} seront ceux où les côtés sont touchés intérieurement par l'un des cercles exinscrits J_1, J_2, J_3 (***) .

La figure sphérique que nous venons de considérer est précisément celle qui résulte de l'intersection d'une sphère décrite du sommet A_4 du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ comme centre, avec les droites joignant A_4 aux points désignés précédemment dans le tétraèdre par les mêmes lettres $A_1, A_2, A_3, I, I_1, I_2, I_3, J_1$, etc.

Il en résulte que les plans $A_4A_1J_{11}, A_4A_2J_{22}, A_4A_3J_{33}$ se coupent suivant une même droite. Par conséquent (17), les droites qui joignent un sommet d'un tétraèdre au point de contact intérieur de la face opposée avec une sphère exinscrite sont des génératrices, d'un même système, d'un hyperboloïde.

On voit aussi que les plans $A_4J_1J_{11}, A_4J_2J_{22}, A_4J_3J_{33}$, menés par les intersections des bissecteurs extérieurs d'un trièdre $A_4A_1A_2A_3$ perpendiculairement sur les faces de ce trièdre, se coupent suivant une même droite A_4V .

(*) Car

$$\sin A_1J_{22} \sin A_2J_{33} \sin A_3J_{11} = \sin A_2J_{11} \sin A_3J_{22} \sin A_1J_{33}.$$

(**) Pour que ces arcs concourent en un même point, il faut et il suffit que

$$\cos A_1J_{22} \cos A_2J_{33} \cos A_3J_{11} = \cos A_2J_{11} \cos A_3J_{22} \cos A_1J_{33} \text{ (Steiner).}$$

(***) De là résulte une seconde démonstration de la propriété que les points de contact d'une face d'un tétraèdre avec les sphères tangentes aux quatre faces sont, deux à deux, conjugués isogonaux par rapport à cette face.

Comme en géométrie plane, le pôle I du cercle inscrit au triangle sphérique $A_1A_2A_3$ est le point de concours des hauteurs du triangle $J_1J_2J_3$ formé par les pôles des cercles exinscrits; il est aussi le conjugué isogonal, par rapport au triangle $J_1J_2J_3$, du point d'intersection V des arcs $J_1J_{11}, J_2J_{22}, J_3J_{33}$ perpendiculaires aux côtés du triangle orthocentrique $A_1A_2A_3$. Mais le point V n'est pas le pôle du cercle circonscrit à $J_1J_2J_3$.

Si l'on veut aller plus loin dans la voie des analogies du triangle et du tétraèdre, on est tenté d'admettre que les rayons J_1J_{11} , J_2J_{22} , J_3J_{33} , J_4J_{44} des sphères exinscrites concourent en un même point ou forment, au moins, un quadruple hyperboloïdique. Mais il n'en est pas ainsi : la droite A_4V qui rencontre les trois premiers rayons ne coupe pas le quatrième. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les droites A_4V , A_4J_4 ne changent pas avec la direction du plan $A_1A_2A_3$, de sorte que la droite J_4J_{44} n'est pas nécessairement située dans le plan A_4VJ_{44} (*).

La droite A_4V et les droites analogues des trièdres A_1 , A_2 , A_3 ne forment pas non plus un quadruple hyperboloïdique; car J_1J_{11} rencontre trois de ces lignes sans s'appuyer sur la quatrième.

22. Voici la généralisation d'un théorème de Steiner, que nous avons annoncée à la fin du n° 6 : *Si deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $M_1M_2M_3M_4$ sont tels que les lignes g_1, g_2, g_3, g_4 menées par les sommets du premier perpendiculairement aux faces du second, constituent un quadruple hyperboloïdique, la même propriété appartient aux lignes g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 menées par les sommets du second tétraèdre perpendiculairement aux faces du premier.*

En effet, les plans (A_4A_1, g_1) , (A_4A_2, g_2) , (A_4A_3, g_3) se coupent suivant la génératrice du second système qui passe par A_4 . Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les distances d'un point de cette droite aux faces du trièdre $A_4A_1A_2A_3$, nous aurons

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\sin(g_5, T_1)}{\sin(g_5, T_2)}, \quad \frac{\delta_2}{\delta_3} = \frac{\sin(g_1, T_2)}{\sin(g_1, T_3)}, \quad \frac{\delta_3}{\delta_1} = \frac{\sin(g_2, T_3)}{\sin(g_2, T_1)},$$

d'où :

$$\frac{\sin(g_5, T_1) \sin(g_1, T_2) \sin(g_2, T_3)}{\sin(g_5, T_2) \sin(g_1, T_3) \sin(g_2, T_1)} = 1.$$

(*) Comment concilier ces conclusions avec un théorème énoncé par Steiner dans les *Annales de Gergonne*, t. XVIII (*Gesammelte Werke*, t. 1, p. 224)?

Réciproquement, cette égalité est suffisante pour qu'il passe par A_4 une droite s'appuyant sur g_1, g_2, g_3, g_4 . Si l'on observe maintenant que (*)

$$\sin(g_5, T_1) = \sin(T_5, g'_1), \quad \sin(g_1, T_2) = \sin(T_1, g'_2), \text{ etc.,}$$

les mêmes égalités expriment que l'un ou l'autre système $(g_1, g_2, g_3, g_4), (g'_1, g'_2, g'_3, g'_4)$ est hyperboloïdique.

En particulier, les *perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre sur les faces correspondantes du tétraèdre qui a pour sommets les pieds des hauteurs du premier, ou les points de concours des hauteurs des faces, constituent un quadruple hyperboloïdique.*

23. Voici deux autres propositions du même genre, qu'il nous suffira d'énoncer : *Si quatre droites menées par les sommets d'un tétraèdre forment un quadruple hyperboloïdique, leurs polaires isogonales par rapport aux trièdres correspondants du tétraèdre jouissent de la même propriété.*

*Soient Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 quatre points des faces d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et soient Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4 leurs conjugués isogonaux ou isotomiques par rapport à ces faces. Si les droites $A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4$ appartiennent à un même hyperboloïde, il en sera de même des droites $A_1Q'_1, A_2Q'_2, A_3Q'_3, A_4Q'_4$ (**).*

DROITES CONCOURANTES.

24. Examinons maintenant les conditions nécessaires pour que les droites considérées dans les numéros précédents concourent en un même point.

(*) T_1, T_2, T_3, T_4 désignent les faces de $M_1M_2M_3M_4$.

(**) Par exemple, de ce que les droites $A_1I_1, A_2I_2, A_3I_3, A_4I_4$ forment un quadruple hyperboloïdique, on peut conclure que les droites $A_1J_{11}, A_2J_{22}, A_3J_{33}, A_4J_{44}$ sont également des génératrices, d'un même système, d'un hyperboloïde (21).

S'il s'agit des hauteurs, les droites A_1H_1 , A_2H_2 étant dans un même plan perpendiculaire à A_3A_4 , les arêtes opposées A_1A_2 , A_3A_4 sont rectangulaires. Les lignes A_1H_2 , A_2H_1 sont perpendiculaires à A_3A_4 en un même point h tel que

$$\overline{A_3h}^2 - \overline{A_4h}^2 = \overline{A_1A_3}^2 - \overline{A_1A_4}^2 = \overline{A_2A_3}^2 - \overline{A_2A_4}^2;$$

donc

$$a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_4^2.$$

Si l'on exprime que les rapports des distances des points H_1 , H_2 aux faces T_3 , T_4 sont égaux entre eux, on trouve

$$\cos a_2 \cos a_3 = \cos a_1 \cos a_4.$$

Donc : si les hauteurs d'un tétraèdre concourent en un même point : 1° les arêtes opposées sont perpendiculaires ; 2° les carrés des arêtes opposées donnent des sommes égales ; 3° les produits des cosinus de deux dièdres opposés sont égaux entre eux.

H étant le point de concours des hauteurs du tétraèdre, les plans HA_3H_1 , HA_2H_1 , HA_4H_1 sont respectivement perpendiculaires aux plans HA_2A_4 , HA_3A_4 , HA_2A_5 . Donc, pour que quatre droites menées par un même point soient les hauteurs d'un même tétraèdre, l'une des droites doit être l'intersection des plans-hauteurs du trièdre formé par les trois autres.

Ces théorèmes sur les hauteurs sont assez connus.

25. Pour que les droites joignant A_1 , A_2 aux centres Q_1 , Q_2 des cercles inscrits aux triangles T_1 , T_2 se coupent, les bissectrices A_1Q_2 , A_2Q_1 des angles $A_4A_1A_3$, $A_4A_2A_5$ doivent rencontrer A_3A_4 au même point ; ce qui exige

$$\frac{A_3A_1}{A_4A_1} = \frac{A_5A_2}{A_4A_2} \quad \text{ou} \quad a_2a_3 = a_1a_4.$$

La même condition exprime aussi que les médianes antiparallèles A_1K_2 , A_2K_1 sont dans un même plan.

Nous appelons *tétraèdre isodynamique* (*) celui dans lequel les

(*) C'est-à-dire : *tétraèdre aux produits égaux des arêtes.*

produits des arêtes opposées sont égaux. Cette dénomination étant adoptée, on peut énoncer le théorème suivant : *Dans tout tétraèdre isodynamique, les droites allant d'un sommet au centre du cercle inscrit à la face opposée se coupent en un même point ; les droites qui joignent un sommet au point de Lemoine de la face opposée, se coupent également en un même point K, et passent par les sommets du tétraèdre circonscrit B₁B₂B₃B₄.*

La dernière propriété résulte de ce que les droites A_nB_n, K_nB_n, qui, dans le cas général, sont des génératrices, de systèmes opposés, d'un hyperboloïde, doivent maintenant coïncider (19).

26. Supposons les droites A₁I₁, A₂I₂, A₃I₃, A₄I₄ concourantes. Les lignes A₁I₂, A₂I₁ doivent rencontrer l'arête A₃A₄ au même point i ; d'où

$$\frac{\Lambda_3 i}{\Lambda_4 i} = \frac{\Lambda_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{\Lambda_4 \Lambda_1 \Lambda_2} = \frac{\Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1}{\Lambda_4 \Lambda_2 \Lambda_1}.$$

On déduit de là :

$$l_1 l_4 = l_2 l_5 = l_3 l_6 \dots \dots \dots (6)$$

Mais

$$l_n = \frac{1}{2} a_n r \cot \frac{1}{2} a_n ;$$

donc l'égalité (6) donne aussi :

$$a_1 a_4 \cot \frac{1}{2} a_1 \cot \frac{1}{2} a_4 = a_2 a_5 \cot \frac{1}{2} a_2 \cot \frac{1}{2} a_5 = a_3 a_6 \cot \frac{1}{2} a_3 \cot \frac{1}{2} a_6,$$

ou, à cause de la relation (*)

$$\frac{a_1 a_4}{\sin a_1 \sin a_4} = \frac{a_2 a_5}{\sin a_2 \sin a_5} = \frac{a_3 a_6}{\sin a_3 \sin a_6}, \dots \dots \dots (7)$$

$$\cos \frac{1}{2} a_1 \cos \frac{1}{2} a_4 = \cos \frac{1}{2} a_2 \cos \frac{1}{2} a_5 = \cos \frac{1}{2} a_3 \cos \frac{1}{2} a_6 \dots \dots (8)$$

(*) Pour démontrer la relation (7), on peut multiplier, terme à terme, les proportions

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\sin \Lambda_2 \Lambda_2 \Lambda_1}, \quad \frac{a_4}{a_5} = \frac{\sin \Lambda_4 \Lambda_2 \Lambda_1}{\sin \Lambda_4 \Lambda_1 \Lambda_2},$$

Enfin, si l'on divise les équations (6) et (8), membre à membre, on obtient

$$IA_2A_5 \cdot IA_1A_4 = IA_5A_1 \cdot IA_2A_4 = IA_1A_2 \cdot IA_5A_4.$$

Examinons maintenant les conséquences qu'on peut déduire du théorème de M. Hermary. Nous faisons tourner les faces T_1, T_2, T_3 autour de a_1, a_2, a_3 de manière à écraser la sphère I ; soient alors U_1, U_2, U_3 les trois rabattements de A_4 sur le plan $A_1A_2A_3$. Les points I_1, I_2, I_3 viennent coïncider avec I_4 , et l'on a $I_4U_1 = I_4U_2 = I_4U_3$. De ce que les droites A_1I_4 et A_3I_4 rencontrent l'arête A_2A_3 au même point, on peut conclure que les points A_1, I_4, U_1 sont en ligne droite; de même les points (A_2, I_4, U_2) et (A_3, I_4, U_3) seront en ligne droite. Mais $A_1U_2 = A_1U_3 = a_1$, $I_4U_2 = I_4U_3$; donc la droite $A_1U_1I_4$ est perpendiculaire au milieu de la ligne U_2U_3 . Les droites $A_2U_2I_4, A_3U_3I_4$ étant également perpendiculaires aux milieux des lignes U_3U_1, U_1U_2 , le triangle $U_1U_2U_3$ est nécessairement équilatéral, et I_4 est le point d'où l'on voit les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ sous le même angle de 120° .

Pour résumer ces résultats, nous énoncerons le théorème suivant :

Si les droites qui joignent un sommet d'un tétraèdre au point de contact de la face opposée avec la sphère inscrite, concourent en un même point : 1° les cosinus des moitiés des dièdres opposés donnent des produits égaux ; 2° les produits des aires des triangles qui ont pour sommet commun le centre de la sphère inscrite et pour bases deux arêtes opposées, sont constants ; 3° la sphère inscrite touche chaque face au point d'où l'on voit les côtés sous des angles égaux.

La dernière propriété est susceptible d'une autre démonstra-

et observer que, dans les trièdres A_1, A_2 :

$$\frac{\sin A_5A_1A_2}{\sin A_4A_1A_2} = \frac{\sin a_4}{\sin a_2}, \quad \frac{\sin A_4A_2A_1}{\sin A_5A_2A_1} = \frac{\sin a_1}{\sin a_5}.$$

On parvient encore très simplement à la formule (8) en égalant les rapports des distances des points I_1 ou I_2 aux plans T_3, T_4 .

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Bankowego Warszawskiego.

tion très simple. Toute section S du trièdre $I_1I_2I_3$ par un plan parallèle à $A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral ; car c'est une section antiparallèle du tétraèdre isodynamique $I_1I_2I_3I_4$. Les traces des plans $A_4A_1I_1$, $A_4A_2I_2$, $A_4A_3I_3$ sur celui de S , étant les médianes antiparallèles d'un triangle équilatéral, font entre elles le même angle de 120° .

Nous reviendrons plus loin sur le tétraèdre satisfaisant aux égalités (6), (7), (8).

27. Supposons maintenant que les droites A_1J_{11} , A_2J_{22} , A_3J_{33} , A_4J_{44} concourent en un même point.

Les distances de J_{44} à A_1A_2 et à A_1A_3 étant égales à $r_4 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a_5$, $r_4 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a_2$, le rapport des distances de ce point à T_3 et T_2 est exprimé par

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a_3 \sin a_3}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a_2 \sin a_2} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a_3}{\sin^2 \frac{1}{2} a_2}.$$

En l'égalant à celui des distances de J_{11} aux mêmes plans, on trouve

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} a_3}{\sin^2 \frac{1}{2} a_2} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a_5}{\sin^2 \frac{1}{2} a_6};$$

donc les conditions cherchées sont

$$\sin \frac{1}{2} a_1 \sin \frac{1}{2} a_4 = \sin \frac{1}{2} a_2 \sin \frac{1}{2} a_3 = \sin \frac{1}{2} a_5 \sin \frac{1}{2} a_6.$$

Pour en trouver une interprétation géométrique, observons que la distance de I à l'arête a_n égale $\frac{r}{\sin \frac{1}{2} a_n}$; donc : si les droites qui joignent un sommet d'un tétraèdre au point de contact intérieur de la face opposée avec une sphère exinscrite concourent en un même point, le produit des distances du centre de la sphère inscrite à deux arêtes opposées est constant.

TÉTRAÈDRE ISODYNAMIQUE.

28. Nous avons appelé tétraèdre isodynamique un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dans lequel les produits des arêtes opposées sont égaux, de sorte que

$$a_1a_4 = a_2a_3 = a_5a_6,$$

$$\sin a_1 \sin a_4 = \sin a_2 \sin a_3 = \sin a_5 \sin a_6.$$

Dans tout tétraèdre isodynamique : 1° les sections antiparallèles sont des triangles équilatéraux (16) ; 2° les droites qui joignent un sommet au centre du cercle inscrit à la face opposée se coupent en un même point ; 3° les droites A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , A_4B_4 qui unissent un sommet au pôle de la face opposée par rapport à la sphère circonscrite, passent par les points de Lemoine K_1 , K_2 , K_3 , K_4 des faces, par les centres des sections antiparallèles correspondantes, et se coupent en un même point K (25) ; 4° des points A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , on voit les côtés des triangles $B_2B_3B_4$, $B_3B_4B_1$, $B_4B_1B_2$, $B_1B_2B_3$ sous des angles égaux (26).

Le point K jouit, par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, de propriétés analogues à celles que nous avons énoncées au n° 2, VIII à XII.

29. Cherchons les coordonnées de K .

Les distances de K aux arêtes a_1 , a_2 étant proportionnelles à a_1 , a_2 , le rapport des distances de ce point aux faces T_1 , T_2 est exprimé par

$$\frac{a_1 \sin a_1}{a_2 \sin a_2} = \frac{a_1 \sin a_3}{a_2 \sin a_4} = \frac{a_1 \sin A_1A_4A_3}{a_2 \sin A_2A_4A_3} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Donc les coordonnées normales de K sont proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux faces du tétraèdre.

Menons par K des plans parallèles aux faces du tétraèdre et rencontrant les droites OO_1 , OO_2 , OO_3 , OO_4 respectivement en E_1 , E_2 , E_3 , E_4 ; les droites KE_1 , KE_2 , KE_3 , KE_4 seront parallèles aux lignes K_1O_1 , K_2O_2 , K_3O_3 , K_4O_4 . Les cônes qui ont pour

sommets les points E_1, E_2, E_3, E_4 et pour bases les cercles circonscrits aux faces correspondantes du tétraèdre sont semblables.

Désignons par $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ les distances de K aux faces de $A_1A_2A_3A_4$, par α l'angle $E_4A_1O_4$; nous aurons

$$\delta_1 = R_1 \tan \alpha, \quad \delta_2 = R_2 \tan \alpha, \dots$$

Mais

$$T_1\delta_1 + T_2\delta_2 + T_3\delta_3 + T_4\delta_4 = 3V;$$

par suite

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{3V}{T_1R_1 + T_2R_2 + T_3R_3 + T_4R_4}, \\ \cot \alpha &= \frac{a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + a_4a_5a_6}{12V} \\ &= \frac{R_1}{h_1} + \frac{R_2}{h_2} + \frac{R_3}{h_3} + \frac{R_4}{h_4}. \end{aligned}$$

Les coordonnées barycentriques de K sont proportionnelles aux produits

$$T_1R_1, \quad T_2R_2, \quad T_3R_3, \quad T_4R_4,$$

ou à

$$a_1a_2a_3, \quad a_2a_3a_4, \quad a_3a_4a_5, \quad a_4a_5a_6.$$

Elles conduisent facilement aux rapports

$$\frac{KK_4}{A_4K_4}, \quad \frac{KK_4}{KA_4}, \text{ etc.}$$

30. Menons quatre plans parallèles aux faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, à des distances proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits à ces faces; nous obtiendrons un nouveau tétraèdre $C_1C_2C_3C_4$ dont les sommets sont situés sur les droites A_1K, A_2K, A_3K, A_4K et les partagent en parties proportionnelles.

Les plans des trièdres A_4, C_4 forment un parallélépipède $A_4N_1N_2N_3N_4N_5N_6C_4$; la diagonale A_4C_4 passe par les centres de gravité N, N' des triangles $N_1N_2N_3, N_4N_5N_6$, dont les sommets sont situés, respectivement, sur les arêtes A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 et C_4C_1, C_4C_2, C_4C_3 . Mais la droite A_4C_4K passe aussi par le centre de gravité de toute section antiparallèle des trièdres A_4

et C_4 . On conclut de là aisément que $N_1N_2N_3$ et $N'_1N'_2N'_3$ sont des triangles équilatéraux, dont N et N' sont les centres.

Soit O' le centre de la sphère $C_1C_2C_3C_4$; ce point est situé sur KO , et $O'C_4$ est parallèle à OA_4 . Les points N et N' divisent A_4C_4 en trois parties égales; par suite, si O'' et O''' sont les points qui divisent OO' en trois parties égales, les droites $O''N$, $O'''N'$ sont perpendiculaires aux plans $N_1N_2N_3$, $N'_1N'_2N'_3$, et

$$O''N = \frac{2OA_4 + O'C_4}{3}, \quad O'''N' = \frac{OA_4 + 2O'C_4}{3}.$$

Désignons par S_4 et S'_4 les triangles $N_1N_2N_3$, $N'_1N'_2N'_3$, et par $S_1, S'_1, S_2, S'_2, S_3, S'_3$ les triangles analogues qui résultent de la combinaison des trièdres A_1 et C_1, A_2 et C_2, A_3 et C_3 . Les plans de S_1, S_2, S_3, S_4 sont à la même distance de O'' et divisent A_1K, A_2K, A_3K, A_4K dans le même rapport; ils forment donc un tétraèdre $D_1D_2D_3D_4$ homothétique à $B_1B_2B_3B_4$ par rapport à K et circonscrit à une sphère de centre O'' .

Les triangles S_1, S_2, S_3, S_4 sont égaux entre eux; car les côtés de S_4 et S_1 , interceptés entre les angles $A_2A_4A_1, A_4A_1A_2$, font avec A_4A_1 un angle égal à $A_4A_2A_1$ et sont compris entre A_4 et une parallèle à A_4A_1 .

Il résulte de là que les triangles S sont inscriptibles à une même sphère ayant son centre en O'' . Le même raisonnement peut s'appliquer aux triangles S' . Par conséquent :

Si deux tétraèdres isodynamiques $A_1A_2A_3A_4, C_1C_2C_3C_4$ sont homothétiques par rapport à K , les arêtes du premier sont rencontrées par les faces du second en douze points, sommets de quatre triangles équilatéraux égaux et inscrits à une même sphère O'' ; les faces du premier rencontrent les arêtes du second en douze points d'une seconde sphère O''' ; les centres O'' et O''' divisent la distance des centres des sphères $A_1A_2A_3A_4, C_1C_2C_3C_4$ en trois parties égales.

Autrement dit : *Étant donné un tétraèdre isodynamique $A_1A_2A_3A_4$ et le tétraèdre circonscrit $B_1B_2B_3B_4$, si l'on construit un troisième tétraèdre $D_1D_2D_3D_4$ homothétique à $B_1B_2B_3B_4$ par*

rapport au point K , les faces de $D_1D_2D_3D_4$ coupent les trièdres correspondants de $A_1A_2A_3A_4$ suivant quatre triangles équilatéraux égaux et inscrits à une même sphère.

31. Les faces des tétraèdres $C_1C_2C_3C_4$, $D_1D_2D_3D_4$ peuvent être menées par K , ce qui donne des cas particuliers remarquables.

A. Les plans menés par K parallèlement aux faces du tétraèdre isodynamique $A_1A_2A_3A_4$, rencontrent les arêtes en douze points d'une même sphère, dont le centre divise KO en deux parties dont l'une est double de l'autre.

B. Les droites menées par K parallèlement aux arêtes d'un tétraèdre isodynamique rencontrent les faces en douze points d'une même sphère dont le centre divise KO en deux segments dont l'un est la moitié de l'autre.

C. Les sections antiparallèles menées par K sont égales entre elles et inscrites dans une même sphère dont le centre est en K .

Il serait intéressant de déterminer les rayons de ces sphères. Si ρ est celui de la sphère (C), ceux des sphères (A) et (B) sont égaux à

$$\frac{1}{3}\sqrt{4R^2 + \rho^2}, \quad \frac{1}{5}\sqrt{R^2 + 4\rho^2}.$$

Pour terminer ce qui est relatif à ces sphères de douze points, nous ferons observer que les théorèmes des nos 30 et 31 peuvent se déduire directement de la proposition XI du n° 2.

En effet, si nous désignons par N les points où les arêtes de $A_1A_2A_3A_4$ sont coupées par les faces de $C_1C_2C_3C_4$, les points N situés sur a_1 , a_2 , a_3 appartiennent à une même circonférence ; car ils sont déterminés par les intersections des côtés de deux triangles homothétiques par rapport à K_1 . De même, les points N de a_1 , a_5 , a_6 sont sur une seconde circonférence. Par ces deux circonférences qui ont deux points communs sur a_1 , on peut faire passer une sphère O'' . Celle-ci contiendra aussi les circonférences des six points N des faces T_2 , T_3 , comme ayant déjà quatre points communs avec chacune de ces lignes.

QUADRANGLE ISODYNAMIQUE.

32. Lorsque quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 d'un même plan satisfont aux relations

$$A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 = A_1 A_3 \cdot A_2 A_4 = A_1 A_4 \cdot A_2 A_3 = P, \dots \dots (9)$$

nous dirons qu'ils forment un *quadrangle isodynamique*, de puissance P . Chacun des points A est un *centre isodynamique* du triangle déterminé par les trois autres.

Un triangle $A_1 A_2 A_3$ a deux centres isodynamiques A_4, A_4' , qui ont des relations très simples avec deux autres points remarquables déjà connus. Ces derniers sont les points d'où l'on voit les trois côtés de $A_1 A_2 A_3$ sous des angles de 120° ou de 60° ; nous les appellerons *centres isogones* du triangle.

Construisons sur les côtés de $A_1 A_2 A_3$, extérieurement et intérieurement, six triangles équilatéraux $A_2 A_3 X_1, A_2 A_3 Y_1, A_3 A_1 X_2, A_3 A_1 Y_2, A_1 A_2 X_3, A_1 A_2 Y_3$. Le premier centre isogone Z est situé sur les droites $A_1 X_1, A_2 X_2, A_3 X_3$ et sur les circonférences $A_2 A_3 X_1, A_3 A_1 X_2, A_1 A_2 X_3$; si les angles A_1, A_2, A_3 sont inférieurs à 120° , il tombe à l'intérieur du triangle et les angles $A_1 Z A_2, A_2 Z A_3, A_3 Z A_1$ sont égaux entre eux. C'est ce que nous supposons pour fixer les idées. Nous ferons aussi

$$A_1 X_1 = A_2 X_2 = A_3 X_3 = A_1 Z + A_2 Z + A_3 Z = s;$$

on sait que Z rend la somme $A_1 Z + A_2 Z + A_3 Z$ minimum (*).

Le second centre isogone Z' est situé à la fois sur les droites $A_1 Y_1, A_2 Y_2, A_3 Y_3$ et sur les circonférences $A_2 A_3 Y_1, A_3 A_1 Y_2, A_1 A_2 Y_3$. Dans l'hypothèse de $(A_2 - 60^\circ)(A_3 - 60^\circ) > 0$, il tombe à l'inté-

(*) Voir E. CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6^e édition, pp. 55 et 228.

Si $A_1 > 120^\circ$, Z tombe dans l'angle opposé au sommet à $A_2 A_1 A_3$.

Le problème classique du point de la somme minimum des distances aux trois sommets d'un triangle demande, nous semble-t-il, un complément de solution : le point Z' peut rendre minimum la quantité $A_2 M + A_3 M - A_1 M$.

rieur de l'angle $A_2A_1A_3$, mais du côté opposé à A_1 par rapport à A_2A_3 . Nous ferons encore

$$A_1Y_1 = A_2Y_2 = A_3Y_3 = \pm(A_1Z' - A_2Z' - A_3Z') = s',$$

le signe \pm correspondant à $A_1 \lesseqgtr 60^\circ$.

Il n'y a pas d'autre centre isogone que Z et Z' , car les circonférences $A_2A_3X_1$ et $A_3A_1Y_2$ ou $A_2A_3Y_1$ et $A_3A_1X_2$, à l'intersection desquelles un tel point devrait se trouver, se coupent sur A_1A_2 , au pied de l'une des obliques menées par A_3 et faisant avec A_1A_2 un angle de 60° (*).

33. Soient m et h la médiane et la hauteur partant de A_1 , a_1, a_2 et a_3 les côtés de $A_1A_2A_3$, T la surface, α l'angle de Brocard, R le rayon du cercle circonscrit. Le triangle $A_1X_1Y_1$ donne les égalités

$$s^2 + s'^2 = 2m^2 + \frac{3}{2}a_1^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

$$s^2 - s'^2 = 2h \times a_1\sqrt{3} = 4T\sqrt{3};$$

par suite

$$s^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2T\sqrt{3},$$

$$s'^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - 2T\sqrt{3}.$$

A cause de

$$\cot \alpha = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4T}, \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3},$$

on peut encore écrire

$$s^2 = 2T(\cot \alpha + \cot 30^\circ),$$

$$s'^2 = 2T(\cot \alpha - \cot 30^\circ),$$

$$ss' = 2T \sqrt{\cot^2 \alpha - 3}.$$

Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les distances de Z aux côtés de $A_1A_2A_3$, a et b

(*) Lorsque $A_1A_2A_3$ est équilatéral, Z coïncide avec le centre de la circonférence circonscrite, et Z' devient un point quelconque de cette circonférence.

les projections de X_1 sur A_1A_2 et A_1A_3 ; les triangles X_1A_2a , X_1A_3b donnent

$$\frac{\delta_3}{\delta_2} = \frac{X_1a}{X_1b} = \frac{X_1A_2 \sin(A_2 + 60^\circ)}{X_1A_3 \sin(A_3 + 60^\circ)}.$$

Par conséquent

$$\delta_1 \sin(A_1 + 60^\circ) = \delta_2 \sin(A_2 + 60^\circ) = \delta_3 \sin(A_3 + 60^\circ).$$

Les coordonnées normales de Z sont donc inversement proportionnelles à $\sin(A_1 + 60^\circ)$, $\sin(A_2 + 60^\circ)$, $\sin(A_3 + 60^\circ)$. Les coordonnées barycentriques (*) sont

$$\frac{\sin A_1}{\sin(A_1 + 60^\circ)}, \quad \frac{\sin A_2}{\sin(A_2 + 60^\circ)}, \quad \frac{\sin A_3}{\sin(A_3 + 60^\circ)},$$

ou plus simplement

$$\frac{1}{\cot A_1 + \cot 60^\circ}, \quad \frac{1}{\cot A_2 + \cot 60^\circ}, \quad \frac{1}{\cot A_3 + \cot 60^\circ}.$$

Pour avoir celles de Z' , il suffit de remplacer 60° par -60° .

34. En mettant les égalités (9) sous la forme

$$\frac{A_4A_2}{A_4A_5} = \frac{A_1A_2}{A_1A_5}, \quad \frac{A_1A_5}{A_1A_1} = \frac{A_2A_5}{A_2A_1}, \quad \frac{A_4A_1}{A_1A_2} = \frac{A_5A_1}{A_5A_2},$$

on trouve immédiatement trois lieux géométriques à l'intersection desquels se trouve le centre isodynamique A_4 du triangle $A_1A_2A_5$. Soient $V_1, V_2, V_3, V'_1, V'_2, V'_3$ les pieds des bissectrices intérieures et des bissectrices extérieures du triangle $A_1A_2A_5$; les circonférences décrites sur $V_1V'_1, V_2V'_2, V_3V'_3$ comme diamètres se coupent aux deux mêmes points A_4, A'_4 . Ces courbes

(*) Les aires des triangles $A_4ZA_5, A_5ZA_1, A_1ZA_2$ sont proportionnelles aux produits $ZA_2 \cdot ZA_5, ZA_5 \cdot ZA_1, ZA_1 \cdot ZA_2$; donc les coordonnées barycentriques de Z sont encore inversement proportionnelles à ZA_1, ZA_2, ZA_5 .

rencontrent la circonférence $A_1A_2A_3$ orthogonalement ; car les diamètres $V_1V'_1$, $V_2V'_2$, $V_3V'_3$ sont partagés harmoniquement par les côtés du triangle.

Par conséquent, si v_1, v_2, v_3, O désignent les centres des quatre cercles, les rayons v_1A_1 , v_2A_2 , v_3A_3 touchent le cercle O ; les points v sont donc sur l'axe d'homologie du triangle $A_1A_2A_3$ et de son polaire réciproque $B_1B_2B_3$ par rapport au cercle O . Mais cet axe est aussi la polaire du point de Lemoine K de $A_1A_2A_3$; de plus, la droite $A_4A'_4$, étant la corde commune aux trois cercles v_1, v_2, v_3 qui sont orthogonaux au cercle O , passe par O et est divisée harmoniquement par la circonférence $A_1A_2A_3$.
En résumé :

Les trois circonférences qui ont pour diamètres les distances des points où un côté du triangle $A_1A_2A_3$ est rencontré par la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle opposé, se coupent aux mêmes points A_4, A'_4 , centres isodynamiques du triangle. Ces points sont en ligne droite avec le centre O du cercle circonscrit et avec le point de Lemoine K . A_4 et A'_4 , K et le milieu M de la distance $A_4A'_4$ forment deux systèmes de points conjugués harmoniques par rapport au cercle $A_1A_2A_3$.

35. Soient N_1, N_2, N_3 les homologues de A_1, A_2, A_3 dans une transformation par rayons vecteurs réciproques, dont le pôle est un point quelconque A . Les triangles semblables AA_1A_2 et AN_2N_1 , AA_2A_3 et AN_3N_2 , AA_3A_1 et AN_1N_3 donnent facilement (16) :

$$\frac{N_1N_2}{A_1A_2 \cdot AA_3} = \frac{N_2N_3}{A_2A_3 \cdot AA_1} = \frac{N_3N_1}{A_3A_1 \cdot AA_2}$$

Ainsi, si $N_1N_2N_3$ est le triangle formé par les inverses des sommets d'un triangle $A_1A_2A_3$, les côtés de ce triangle sont proportionnels aux produits des côtés opposés du quadrangle $AA_1A_2A_3$, A désignant le pôle d'inversion.

Le pôle peut être dans le plan $A_1A_2A_3$ ou extérieur. Dans le dernier cas, les circonférences $N_1N_2N_3, A_1A_2A_3$ sont des sections

antiparallèles d'un même cône. Menons les plans tangents le long des arêtes AA_1 , AA_2 , AA_3 ; les premiers principes des projections centrales conduisent aux théorèmes suivants, qui sont encore applicables, lorsque le pôle A est dans le plan $A_1A_2A_3$:

Si l'on soumet à une inversion les sommets d'un triangle, les points de Lemoine de ce triangle et de son transformé sont en ligne droite avec le pôle d'inversion; les pieds des médianes antiparallèles et les pôles des côtés homologues par rapport aux cercles circonscrits à ces triangles jouissent de la même propriété.

Lorsque le pôle d'inversion coïncide avec un centre isodynamique A_i (ou A'_i), le triangle transformé $N_1N_2N_3$ devient équilatéral. Donc, si l'on transforme par inversion trois sommets d'un quadrangle isodynamique, le pôle d'inversion étant placé au quatrième sommet, on obtient les sommets d'un triangle équilatéral (*).

En particulier, les droites qui joignent les sommets d'un triangle $A_1A_2A_3$ à l'un des centres isodynamiques rencontrent la circonférence circonscrite aux sommets d'un triangle équilatéral.

Réciproquement, les inverses des sommets d'un triangle équilatéral et le pôle d'inversion sont les sommets d'un quadrangle isodynamique.

36. Soient maintenant N_1, N_2, N_3, N_4 les inverses des sommets d'un quadrangle quelconque $A_1A_2A_3A_4$, le pôle d'inversion étant placé en un point arbitraire A . On trouve facilement les proportions

$$\frac{N_1N_2}{A_1A_3} = \frac{AN_1}{AA_2} = \frac{AN_1 \cdot AA_1}{AA_2 \cdot AA_1},$$

$$\frac{N_3N_4}{A_5A_4} = \frac{AN_3}{AA_4} = \frac{AN_3 \cdot AA_5}{AA_4 \cdot AA_5};$$

(*) Plus généralement, si l'on transforme trois sommets d'un quadrangle quelconque en plaçant le pôle d'inversion au quatrième, on obtient quatre séries de triangles semblables entre eux.

d'où, en désignant par π la puissance d'inversion,

$$\frac{N_1 N_2 \cdot N_3 N_4}{A_1 A_2 \cdot A_3 A_4} = \frac{\pi^2}{AA_1 \cdot AA_2 \cdot AA_3 \cdot AA_4}.$$

Le quatrième terme de cette proportion est symétrique par rapport à A_1, A_2, A_3, A_4 ; par conséquent

$$\frac{N_1 N_2 \cdot N_3 N_4}{A_1 A_2 \cdot A_3 A_4} = \frac{N_1 N_3 \cdot N_2 N_4}{A_1 A_3 \cdot A_2 A_4} = \frac{N_1 N_4 \cdot N_2 N_3}{A_1 A_4 \cdot A_2 A_3}.$$

Donc, si l'on transforme par inversion les sommets d'un quadrangle quelconque, les produits des côtés opposés du quadrangle transformé sont proportionnels aux produits homologues de la figure primitive.

En particulier, tout quadrangle isodynamique engendre, par inversion de ses sommets, un nouveau quadrangle isodynamique.

Le quadrangle isodynamique le plus simple est formé par les sommets d'un triangle équilatéral $N_1 N_2 N_3$ et son centre N_4 . Si l'on soumet ces quatre points à une inversion dont le pôle est un point quelconque A_4 , on obtient les sommets d'un nouveau quadrangle isodynamique $A_1 A_2 A_3 A_4$. Mais le pôle A_4 forme aussi avec le triangle $A_1 A_2 A_3$, transformé du triangle équilatéral $N_1 N_2 N_3$, un système isodynamique. L'existence des deux centres isodynamiques pour un même triangle $A_1 A_2 A_3$ devient ainsi manifeste. De plus, si l'on choisit convenablement la puissance d'inversion, les deux triangles $N_1 N_2 N_3, A_1 A_2 A_3$ seront inscrits à la même circonférence O , et l'on voit que le produit $A_4 O \cdot A_4 A_1$ est égal à la puissance de A_4 par rapport à cette circonférence.

37. Désignons par $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$ les côtés et les angles du triangle $A_1 A_2 A_3$, par a_4, a_5, a_6 les distances des sommets au centre isodynamique A_4 , par P et P' les puissances des quadrangles $A_1 A_2 A_3 A_4, A_1 A_2 A_3 A_4'$, enfin par N_1, N_2, N_3 les points d'intersection du cercle $A_1 A_2 A_3$ avec les droites $A_4 A_1, A_4 A_2, A_4 A_3$. Le triangle $N_1 N_2 N_3$ est équilatéral; si l'on suppose A_4 intérieur à ce

triangle, on trouve facilement que les angles $A_2A_4A_3$, $A_3A_4A_1$, $A_1A_4A_2$ valent respectivement

$$A_1 + 60^\circ, \quad A_2 + 60^\circ, \quad A_3 + 60^\circ.$$

Donc le premier centre isodynamique A_4 (*) est à l'intersection des arcs de trois segments capables des angles $A_1 + 60^\circ$, $A_2 + 60^\circ$, $A_3 + 60^\circ$, décrits respectivement sur les côtés a_1 , a_2 , a_3 . De même, le second centre A_4' est déterminé par trois segments capables des angles $A_1 - 60^\circ$, $A_2 - 60^\circ$, $A_3 - 60^\circ$.

Cette construction est applicable à tous les cas, pourvu que l'on convienne de remplacer un segment capable de $180^\circ + \alpha$ ou de $180^\circ - \alpha$ par un segment capable de $180^\circ - \alpha$, tourné du même côté de la corde (**).

38. L'aire du triangle $A_2A_4A_3$ a pour mesure

$$\frac{1}{2} a_2 a_3 \sin(A_1 + 60^\circ) = \frac{P^2 \sin(A_1 + 60^\circ)}{2a_2 a_3} = \frac{P^2 \sin A_1 \sin(A_1 + 60^\circ)}{4T}.$$

De même

$$A_3A_4A_1 = \frac{P^2 \sin A_2 \sin(A_2 + 60^\circ)}{4T}, \quad A_1A_4A_2 = \frac{P^2 \sin A_3 \sin(A_3 + 60^\circ)}{4T}.$$

Par suite, les coordonnées barycentriques de A_4 sont

$$\sin A_1 \sin(A_1 + 60^\circ), \quad \sin A_2 \sin(A_2 + 60^\circ), \quad \sin A_3 \sin(A_3 + 60^\circ),$$

et les coordonnées normales sont

$$\sin(A_1 + 60^\circ), \quad \sin(A_2 + 60^\circ), \quad \sin(A_3 + 60^\circ).$$

Ces dernières étant inversement proportionnelles à celles du

(*) Les points A_4 et A_4' sont, l'un intérieur et l'autre extérieur à la circonférence $A_1A_2A_3$. Nous appelons *premier* centre celui qui est intérieur.

(**) Pour étudier les modifications de la figure, on peut se donner le triangle équilatéral $N_1N_2N_3$ et placer ensuite le point A_4 ou A_4' dans toutes les positions possibles.

centre isogone Z, on voit que *les points A₄ et Z sont conjugués isogonaux par rapport au triangle A₁A₂A₃; ce sont donc les foyers d'une conique inscrite à ce triangle (*)*. Les points A'₄ et Z jouissent de la même propriété.

Les lettres X, Y, s ayant la même signification qu'au n° 32, les triangles équiangles A₁A₂X₁, A₁A₃A₄ donnent

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_1}{a_6} = \frac{s}{a_2};$$

par conséquent

$$a_4 = \frac{a_2 a_5}{s}, \quad a_6 = \frac{a_1 a_2}{s}, \quad a_5 = \frac{a_3 a_1}{s},$$

$$P = a_1 a_4 = \frac{a_1 a_2 a_5}{s} = \frac{4RT}{s}.$$

Si l'on fait la somme des aires A₂A₄A₃, A₃A₄A₁, A₁A₄A₂, on trouve

$$T = \frac{P^2}{4T} \sum \sin A_1 \sin (A_1 + 60^\circ).$$

En remplaçant P par $\frac{4RT}{s}$ et en observant que

$$s^2 = 2T (\cot \alpha + \cot 50^\circ), \quad T = 2R^2 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3,$$

on parvient à la relation

$$\cot A_1 + \cot A_2 + \cot A_3 + \cot 50^\circ = \frac{\sum \sin A_1 \sin (A_1 + 60^\circ)}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3},$$

dont la vérification directe ne présente pas de difficulté.

Le second centre isodynamique A'₄ donne

$$A'_4 A_1 = \frac{a_2 a_3}{s'}, \quad A'_4 A_2 = \frac{a_3 a_1}{s'}, \quad A'_4 A_3 = \frac{a_1 a_2}{s'}, \quad P' = \frac{4RT}{s'}.$$

(*) Cette conique sera étudiée plus loin (50).

La comparaison des formules relatives à A_4 et A'_4 conduit à des égalités curieuses telles que

$$\frac{A_4 A_1}{A'_4 A_1} = \frac{A_4 A_2}{A'_4 A_2} = \frac{A_4 A_3}{A'_4 A_3} = \frac{s'}{s} = \frac{A_1 Y_1}{A_1 X_1}, \dots \dots \dots (10)$$

$$P_s = P's', \quad PP' = \frac{8R^2 T}{\sqrt{\cot^2 \alpha - 5}}, \quad P^2 + P'^2 = \frac{8R^2 T \cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 5},$$

$$\frac{1}{P^2} + \frac{1}{P'^2} = \frac{\cot \alpha}{4R^2 T} = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} + \frac{1}{a_2^2 a_3^2} + \frac{1}{a_3^2 a_1^2}.$$

Les proportions (10) montrent que la circonférence $A_1 A_2 A_3$ est le lieu des points dont les distances à A_4 et A'_4 sont dans le rapport $s' : s$; par conséquent, elle divise la distance $A_4 A'_4$ additivement et soustractivement dans ce même rapport.

Nous avons encore à signaler les formules concernant les distances des points en ligne droite : O, K, A_4 , A'_4 , M (milieu de $A_4 A'_4$). On a vu que

$$OK \cdot OM = R^2, \quad OA_4 \cdot OA'_4 = R^2, \quad OK = R \sqrt{1 - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

de là on déduit :

$$OK^2 - R^2 = -5R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad OM = \frac{R}{\sqrt{1 - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

$$\overline{OM}^2 - R^2 = \overline{MA_4}^2 = \overline{MA'_4}^2 = \frac{5R^2}{\cot^2 \alpha - 5},$$

$$OA_4 = R \sqrt{\frac{\cot \alpha - \sqrt{5}}{\cot \alpha + \sqrt{5}}}, \quad OA'_4 = R \sqrt{\frac{\cot \alpha + \sqrt{5}}{\cot \alpha - \sqrt{5}}}.$$

39. Les théorèmes énoncés au n° 28 peuvent être transportés, en partie, au quadrangle isodynamique. Ainsi : 1° les droites joignant un sommet d'un quadrangle isodynamique au centre du cercle inscrit au triangle qui est formé par les trois autres sommets se coupent en un même point; en ce point se croisent aussi les lignes qui joignent, sur les côtés opposés du quadrangle, les pieds des bissectrices intérieures de ces triangles;

2° les droites qui unissent un sommet au point de Lemoine du triangle déterminé par les trois autres sommets (ou au centre du cercle circonscrit) passent par un même point (*).

Il serait intéressant de préciser la position de ces nouveaux points remarquables. Il doit aussi exister des relations curieuses entre les centres des cercles circonscrits, les points de Lemoine, et les seconds centres isodynamiques des quatre triangles $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$.

TÉTRAÈDRE ISODYNAMIQUE (suite).

40. Considérons de nouveau un tétraèdre isodynamique $A_1A_2A_3A_4$. Désignons par V_n et V'_n les points où l'arête a_n est rencontrée par la bissectrice intérieure et par la bissectrice extérieure des angles plans opposés; par v_n le milieu de $V_nV'_n$, par W_n et W'_n les centres isodynamiques de la face T_n .

Étant donné le trièdre A_4 , il est facile d'obtenir la direction du plan $A_1A_2A_3$: on cherche une section équilatérale $N_1N_2N_3$ du trièdre, et le plan tangent à la sphère $A_4N_1N_2N_3$ au point A_4 est la direction cherchée. Autrement dit, *si l'on transforme par inversion les sommets d'un triangle équilatéral en prenant le pôle hors du plan, ce pôle et les points transformés sont les sommets d'un tétraèdre isodynamique.*

41. Lorsqu'on donne la face $A_1A_2A_3$, le lieu du point A_4 est le cercle β_4 , intersection des sphères v_1^2, v_2, v_3 qui ont pour diamètres $V_1V'_1, V_2V'_2, V_3V'_3$. Ce cercle a pour diamètre la droite $W_4W'_4$, et son plan, perpendiculaire à celui de $A_1A_2A_3$, passe par le centre O_4 du cercle $A_1A_2A_3$ et par le point de Lemoine K_4 .

De même, les sphères qui ont pour diamètres $V_1V'_1, V_5V'_5, V_6V'_6$ se coupent suivant une circonférence β_1 passant par A_1, W_1, W'_1 . Les circonférences β_1, β_4 , tracées sur la même

(*) La dernière partie de cette proposition sera étendue plus loin (54) à d'autres points du plan $A_1A_2A_3$ que les centres isodynamiques.

sphère v_1 , ont deux points communs A_5, A'_5 qui appartiennent aussi à la sphère décrite sur $V_4V'_4$ comme diamètre et aux circonférences β_2, β_5 , intersections des sphères (v_2, v_4, v_6) et (v_5, v_4, v_5).

Les sphères v sont orthogonales à la sphère O ; leurs centres sont à l'intersection de deux arêtes homologues des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4$ et sont situés dans un même plan qui est à la fois le plan d'homologie des deux tétraèdres et le plan polaire de K par rapport à la sphère O . Il résulte de là que les points A_5, A'_5 sont sur la droite KO perpendiculaire au plan $v_4v_5v_6$, qu'ils sont symétriques par rapport au pied M de KO sur ce plan, et conjugués harmoniques relativement à la sphère O , c'est-à-dire

$$OK \cdot OM = OA_5 \cdot OA'_5 = R^2, \quad MA_5 = MA'_5 = \sqrt{OM^2 - R^2}.$$

Le point A_5 appartenant au cercle β_4 , le tétraèdre $A_5A_1A_2A_3$ est isodynamique, et les droites A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3 rencontrent la sphère O aux sommets d'un triangle équilatéral $N_1N_2N_3$. La même propriété subsistant pour les faces T_1, T_2, T_3 , nous résumerons ainsi les résultats obtenus :

Étant donné un tétraèdre isodynamique $A_1A_2A_3A_4$ et son polaire réciproque $B_1B_2B_3B_4$ par rapport à la sphère circonscrite O , les six sphères qui ont pour centres les intersections de deux arêtes homologues des deux tétraèdres et qui passent par les extrémités des arêtes opposées du premier tétraèdre, se coupent aux deux mêmes points A_5, A'_5 de la droite KO . Les droites qui joignent A_5 (ou A'_5) aux points A_1, A_2, A_3, A_4 rencontrent la sphère O aux sommets d'un tétraèdre régulier $N_1N_2N_3N_4$. Chacune des faces de $A_1A_2A_3A_4$ forme avec A_5 (ou A'_5) un tétraèdre isodynamique.

42. On peut confirmer ces conclusions par une autre méthode. Tout quadrangle isodynamique, plan ou gauche, engendre, par inversion des sommets, un nouveau quadrangle isodynamique (36). Le tétraèdre isodynamique le plus simple est le tétraèdre régulier $N_1N_2N_3N_4$; on peut le décomposer en quatre autres tétraèdres isodynamiques en joignant son



centre N_5 aux quatre sommets. Si l'on soumet à une inversion les points N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 , le pôle d'inversion étant en un point arbitraire A'_5 , on obtient un nouveau système *isodynamique complet* de cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , tels que quatre quelconques d'entre eux sont les sommets d'un tétraèdre isodynamique. Un tel système complet est encore formé par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A'_5 .

Lorsque la puissance d'inversion égale celle du point A'_5 par rapport à la sphère $N_1N_2N_3N_4$, le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sera inscrit à la même sphère.

Chacun des points d'un système isodynamique complet peut être appelé *centre isodynamique* du tétraèdre des quatre autres. Le rôle de ce centre peut être défini ainsi : *Les plans menés par ce point et les arêtes du tétraèdre décomposent celui-ci en quatre tétraèdres isodynamiques*; ou encore : *Le centre isodynamique étant pris pour pôle d'inversion, le tétraèdre inverse devient régulier*.

On peut encore remarquer les propriétés suivantes :

Si A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 sont les inverses des sommets d'un tétraèdre isodynamique $A_1A_2A_3A_4$ par rapport à un pôle quelconque A , les centres isodynamiques des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4, A'_1A'_2A'_3A'_4$ se correspondent dans l'inversion. Les points de Lemoine de deux faces homologues, les sommets homologues des tétraèdres $B_1B_2B_3B_4, B'_1B'_2B'_3B'_4$, polaires réciproques de $A_1A_2A_3A_4$ et $A'_1A'_2A'_3A'_4$ relativement aux sphères circonscrites, les centres d'homologie de $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$, de $A'_1A'_2A'_3A'_4$ et $B'_1B'_2B'_3B'_4$ sont, respectivement, en ligne droite avec le pôle d'inversion A .

43. Pour les relations métriques que nous allons établir, il est commode de considérer la figure suivante. Après avoir tracé le triangle $A_1A_2A_3$ et le cercle circonscrit O_4 , déterminons le point de Lemoine K_4 , la polaire de K_4 et la projection M de K_4 sur cette polaire; de M comme centre, avec un rayon égal à la tangente $M\sigma$ menée au cercle O_4 , décrivons un cercle (*)

(*) Le cercle $W\sigma W'$ coupe le cercle $A_1A_2A_3$ orthogonalement; l'axe radical de ces cercles passe par le point de Lemoine.

qui coupe la droite K_4O_4 aux points W, W' . Ce second cercle étant relevé autour de WW' dans une position perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$, est le lieu des sommets des tétraèdres isodynamiques construits sur $A_1A_2A_3$.

Désignons par P la puissance du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, par p et p' celles des quadrangles $A_1A_2A_3W, A_1A_2A_3W'$, et par H le pied de la hauteur menée par A_4 . Le théorème de Stewart, appliqué au triangle A_1WW' et à la ligne A_4H , donne

$$\overline{A_1W}^2 \cdot HW' + \overline{A_1W'}^2 \cdot HW = (\overline{A_1H}^2 + HW \cdot HW') WW' \dots (11)$$

Mais

$$\overline{A_1H}^2 + HW \cdot HW' = \overline{A_1H}^2 + \overline{A_4H}^2 = \overline{A_1A_4}^2;$$

donc, si l'on multiplie les deux membres de (11) par $\overline{A_2A_3}^2$, on obtient

$$p^2 \cdot HW' + p'^2 \cdot HW = P^2 \cdot WW' \dots (12)$$

L'égalité (12) démontre, de nouveau, que le cercle $W\sigma W'$, placé dans un plan perpendiculaire à $A_4A_2A_3$, est le lieu des sommets des tétraèdres isodynamiques construits sur $A_1A_2A_3$; car le premier membre ne dépend pas particulièrement du point A_1 qui a servi à établir la formule.

Cette formule conduit aisément aux suivantes :

$$\begin{aligned} HW &= \frac{P^2 - p^2}{p'^2 - p^2} WW', & HW' &= \frac{p'^2 - P^2}{p'^2 - p^2} WW', \\ \overline{A_4H}^2 &= \frac{(P^2 - p^2)(p'^2 - P^2)}{(p'^2 - p^2)^2} \overline{WW'}^2, \\ V &= \frac{WW' \cdot T_4}{3(p'^2 - p^2)} \sqrt{(P^2 - p^2)(p'^2 - P^2)}. \end{aligned}$$

La valeur de V est susceptible de quelques transformations plus ou moins curieuses.

Il existe aussi une relation très simple entre V, R, P (*) :

$$24VR = P^2 \sqrt{5}.$$

(*) E. CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6^e édition, p. 434.

Le maximum et le minimum de P sont égaux, respectivement, à p' et p ; ils correspondent aux tétraèdres isodynamiques, de hauteur nulle, $A_1A_1A_2W$ et $A_1A_2A_3W'$.

Le maximum de V a lieu lorsque H est au milieu de WW' ; dans ce cas

$$V = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\sqrt{5}(\cot^2 \alpha_4 - 5)},$$

α_4 étant l'angle de Brocard relatif au triangle $A_1A_2A_3$.

Le pied de la hauteur abaissée de A_4 peut coïncider avec K_4 ; alors la sphère $A_1A_2A_3A_4$ aura pour centre O_4 , et

$$V = \frac{a_1 a_2 a_3}{\sqrt{5}} \tan \alpha_4.$$

44. La droite OK occupe une position remarquable : elle passe par les centres isodynamiques A_5 , A_5' du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, est une génératrice de l'hyperboloïde des hauteurs et est perpendiculaire au plan d'homologie des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$. K et le milieu M de A_5A_5' sont conjugués harmoniques par rapport à la sphère O ; il en est de même de A_5 et A_5' . Ces relations permettent d'exprimer les quantités OM , MA_5 en fonction de OK et du rayon R de la sphère O .

Les points A_4 , K , K_4 , B_4 forment une division harmonique; si on les joint au point O_4 et qu'on coupe le faisceau ainsi obtenu par la droite A_4H_4 parallèle au rayon O_4B_4 , on aura une nouvelle division harmonique dont un point est à l'infini; c'est-à-dire la droite O_4K_4 passe par le milieu H_4' de la hauteur A_4H_4 . Donc : *dans le tétraèdre isodynamique, les droites qui passent par le centre du cercle circonscrit à une face et par le milieu de la hauteur correspondante, se coupent en K .*

Convenons de désigner par cône A_n le cône qui a pour sommet le sommet A_n du tétraèdre et pour base le cercle circonscrit à la face opposée. La droite O_4H_4' passe par les milieux des axes des cylindres droits inscrits dans le cône A_4 ; car un tel axe est parallèle à A_4H_4 et a ses extrémités sur les lignes O_4A_4 et O_4H_4 . Il résulte de là que *le point K est le centre commun de quatre cylindres droits inscrits dans les cônes A_1 , A_2 , A_3 , A_4 .*

TÉTRAÈDRE ISOGONE.

45. Lorsque les droites joignant un sommet d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ au point de contact de la face opposée avec la sphère inscrite I , concourent en un même point, le contact a lieu au centre isogone de chaque face (36); à cause de cette propriété, le tétraèdre peut recevoir la dénomination de « *isogone* ».

Dans le tétraèdre isogone :

$$t_1t_4 = t_2t_5 = t_3t_6,$$

$$\cos \frac{1}{2} a_1 \cos \frac{1}{2} a_4 = \cos \frac{1}{2} a_2 \cos \frac{1}{2} a_5 = \cos \frac{1}{2} a_3 \cos \frac{1}{2} a_6,$$

$$IA_1A_2 \cdot IA_3A_4 = IA_1A_3 \cdot IA_2A_4 = IA_1A_4 \cdot IA_2A_3.$$

La seconde de ces relations est une conséquence de la suivante :

$$I_1I_2 \cdot I_3I_4 = I_1I_3 \cdot I_2I_4 = I_1I_4 \cdot I_2I_3,$$

qui caractérise le tétraèdre isodynamique $I_1I_2I_3I_4$; car

$$I_1I_2 = 2r \sin \frac{1}{2} I_1I_2 = 2r \cos \frac{1}{2} a_6, \text{ etc.}$$

Π_1 et Π_2 étant perpendiculaires aux plans T_1 et T_2 .

Désignons par A_1, A_2, A'_1, A'_2 les angles $A_2A_1A_3, A_1A_2A_3, A_2A_1A_4, A_1A_2A_4$. D'après les valeurs des coordonnées barycentriques du centre isogone (38), on a

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_5}{t_4} = \frac{\cot A_2 + \cot 60^\circ}{\cot A_1 + \cot 60^\circ} = \frac{\cot A'_2 + \cot 60^\circ}{\cot A'_1 + \cot 60^\circ}.$$

Pour introduire les arêtes, on peut observer que

$$\cot A_1 = \frac{\cos A_1}{\sin A_1} = \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{4T_4}, \text{ etc.}$$

Mais le résultat ne présente pas une forme suffisamment simple.

Le tétraèdre isogone conduit à deux problèmes d'algèbre que nous nous contentons de poser :

1° Résoudre par rapport à t_1, t_2, \dots le système d'équations

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= T_4, \\ t_1 + t_5 + t_6 &= T_1, \\ t_2 + t_4 + t_6 &= T_2, \\ t_3 + t_4 + t_5 &= T_3, \\ t_1 t_4 &= t_2 t_5 = t_3 t_6. \end{aligned}$$

2° Éliminer $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ entre les équations

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_2 \rho_3, \\ a_2^2 &= \rho_3^2 + \rho_1^2 + \rho_3 \rho_1, \\ a_3^2 &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1 \rho_2, \\ a_4^2 &= \rho_1^2 + \rho_4^2 + \rho_1 \rho_4, \\ a_5^2 &= \rho_2^2 + \rho_4^2 + \rho_2 \rho_4, \\ a_6^2 &= \rho_3^2 + \rho_4^2 + \rho_3 \rho_4. \end{aligned}$$

On a posé $\rho_i = A_i I_i = A_i I_2 = A_i I_3$, etc.

46. Étant donnés une sphère I et un trièdre circonscrit, il est facile de trouver un plan tangent qui forme avec le trièdre un tétraèdre isogone. La construction peut se traduire en cette élégante proposition :

Une sphère I touche les faces d'un trièdre $A_1 A_2 A_3$ aux points I_1, I_2, I_3 . On construit, dans ces faces, les angles $A_4 I_1 A_2, A_4 I_1 A_3, A_4 I_2 A_1$, de 120° ; le plan $A_1 A_2 A_3$ touche la sphère I en un point I_4 , d'où l'on voit $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1$ sous le même angle de 120° . De plus, les droites $A_1 I_1, A_2 I_2, A_3 I_3, A_4 I_4$ se coupent en un même point.

47. Supposons maintenant les droites $A_1 J_{41}, A_2 J_{42}, A_3 J_{43}, A_4 J_{44}$ concourantes; le tétraèdre peut être dit *isogone relative-ment à la sphère exinscrite J_4* . Au moyen des sections antiparallèles du tétraèdre isodynamique $J_{41} J_{42} J_{43} J_{44}$, on démontre facilement que J_{44} est le premier centre isogone de T_4 , que J_{41}, J_{42}, J_{43} sont les seconds centres isogones des autres faces.

Les distances de J_{44} et J_{41} aux plans T_2, T_3 sont égales à

$$r_4 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a_2 \sin a_2, \quad r_4 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a_3 \sin a_3, \quad r_4 \cot \frac{1}{2} a_6 \sin a_6, \quad r_4 \cot \frac{1}{2} a_5 \sin a_5.$$

Le rapport des deux premières doit être égal à celui des deux autres, pour que les droites $A_6 J_{44}$ et $A_4 J_{41}$ soient dans un même plan. En exprimant, de cette façon, que les quatre droites $A_n J_{4n}$ concourent en un même point, on obtient les égalités

$$\sin \frac{1}{2} a_1 \cos \frac{1}{2} a_4 = \sin \frac{1}{2} a_2 \cos \frac{1}{2} a_5 = \sin \frac{1}{2} a_3 \cos \frac{1}{2} a_6.$$

48. Soit J_5 une sphère *inscrite au comble* qui a pour ligne de faite l'arête $A_4 A_1$. Les points de contact J_{34} et J_{31} sont situés entre les prolongements des droites $A_2 A_1$ et $A_3 A_1, A_2 A_4$ et $A_3 A_4$, à l'extérieur des faces T_4, T_1 ; les points J_{32} et J_{33} sont à l'extérieur des faces T_2, T_3 , mais à l'intérieur des angles $A_1 A_2 A_4, A_1 A_3 A_4$. Si les droites $A_n J_{3n}$ concourent en un même point, les points J_{34} et J_{31} sont les premiers centres isogones de T_4, T_1 , ce qui exige que les angles $A_2 A_1 A_3, A_2 A_1 A_4$ soient supérieurs à 120° ; les points J_{32} et J_{33} sont les seconds centres isogones de T_2 et T_3 . Les dièdres de $A_1 A_2 A_3 A_4$ vérifient les relations

$$\cos \frac{1}{2} a_1 \cos \frac{1}{2} a_4 = \sin \frac{1}{2} a_2 \sin \frac{1}{2} a_3 = \sin \frac{1}{2} a_5 \sin \frac{1}{2} a_6 (*).$$

49. Étudions maintenant le lieu (A_4) du sommet d'un tétraèdre isogone construit sur une base donnée $A_1 A_2 A_3$, dont les angles sont inférieurs à 120° .

Soient Z (ou I_4) le premier centre isogone de la base, et Z_1, Z_2, Z_3 les intersections des droites $A_1 Z, A_2 Z, A_3 Z$ avec $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$. Construisons une sphère quelconque I touchant le

(*) La relation

$$\cos \frac{1}{2} a_1 \cos \frac{1}{2} a_4 = \cos \frac{1}{2} a_2 \cos \frac{1}{2} a_3 = \cos \frac{1}{2} a_5 \cos \frac{1}{2} a_6$$

comprend tous les cas, si l'on convient de désigner par a_1, a_2, \dots les dièdres qui sont tournés vers la sphère considérée.

plan $A_1A_2A_3$ en Z , et menons, par les côtés de $A_1A_2A_3$, des plans touchant cette sphère aux points I_1, I_2, I_3 . L'intersection de ces plans est un point du lieu cherché. Mais les triangles $A_2A_3Z, A_2A_3I_4$ sont égaux entre eux et les droites A_4Z, A_4I_1 rencontrent A_2A_3 au même point Z_4 . Donc le point A_4 est sur le cône Z_4 engendré par la droite Z_4ZA_1 tournant autour de A_2A_3 ; le lieu de I_4 est la circonférence engendrée par Z dans ce mouvement.

D'après cela, le lieu (A_4) est l'intersection commune de trois cônes de révolution qui ont pour sommets Z_1, Z_2, Z_3 et pour axes a_1, a_2, a_3 . Le plan $A_1A_2A_3$ renferme d'abord les trois génératrices Z_1Z, Z_2Z, Z_3Z , puis trois autres symétriques des précédentes par rapport aux axes a_1, a_2, a_3 et se coupant en un même point W . Le sommet A_3 , qui est sur la bissectrice de l'angle Z_1ZZ_2 , est le centre d'une sphère inscrite à la fois aux deux cônes Z_1 et Z_2 suivant deux cercles que nous désignons par γ_1 et γ_2 . Soient φ_1, φ_2 les points d'intersection de ces cercles avec les génératrices A_4Z_1, A_4Z_2 . Les droites $A_4\varphi_1, A_4\varphi_2$ sont égales comme tangentes à la sphère A_3 et leurs inclinaisons sur les plans de γ_1 et γ_2 sont constantes. Par conséquent, A_4 est dans le plan dont les distances aux plans de γ_1 et γ_2 sont dans le rapport constant $\cos ZZ_1A_3 : \cos ZZ_2A_3$.

Ainsi la courbe cherchée est plane et se compose d'une hyperbole dont les sommets sont Z et W . La branche qui passe par Z et qui est l'intersection des nappes des cônes Z_1, Z_2 tournées vers Z , est le lieu du sommet d'un tétraèdre qui est isogone par rapport à une sphère *inscrite*; la seconde branche est l'intersection des deux autres nappes et convient à des tétraèdres isogones par rapport à une sphère *exinscrite*. Si l'on combine autrement les nappes, on obtient une seconde conique, intersection des deux cônes, mais il est inutile de la considérer ici (*).

(*) On peut encore trouver facilement trois hyperboloïdes de révolution ayant pour foyers deux des points Z_1, Z_2, Z_3 , et passant par le lieu (A_4) . En effet, les droites A_4Z_1, A_4Z_2 ont une différence constante $Z_1\varphi_1 - Z_2\varphi_2$, etc.

Les sphères décrites des points A_1, A_2, A_3, A_4 comme centres, avec les

50. La considération du lieu (A_4) nous permet de compléter les propriétés du centre isodynamique d'un triangle.

On sait que le lieu des sommets des cônes de révolution construits sur une conique donnée (ellipse ou hyperbole) est une seconde conique (hyperbole ou ellipse); les plans de ces courbes sont perpendiculaires et les foyers de l'une sont les sommets de l'autre (et réciproquement). D'après ce théorème, les sommets Z_1, Z_2, Z_3 des trois cônes de révolution qui ont servi à déterminer le lieu (A_4) sont sur une ellipse ayant pour foyers les points Z et W . Les côtés a_1, a_2, a_3 touchent cette courbe, car ce sont les bissectrices extérieures des angles ZZ_1W, ZZ_2W, ZZ_3W . Par suite, Z et W sont conjugués isogonaux par rapport au triangle $A_1A_2A_3$ et W est le premier centre isodynamique (38).

Soient z_1, z_2, z_3 les intersections des côtés homologues des triangles $Z_1Z_2Z_3, A_1A_2A_3$. La droite Zz_1 étant conjuguée harmonique de ZA_1 par rapport à l'angle Z_2ZZ_3 est la bissectrice extérieure de cet angle et, par conséquent, perpendiculaire à ZA_1 . On déduit de là que la droite $z_1z_2z_3$ est la directrice de l'ellipse considérée.

En résumé : Si $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ sont les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement sur les côtés d'un triangle $A_1A_2A_3$, et que Z_1, Z_2, Z_3 désignent les points de rencontre de ces côtés avec les droites A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3 , les dernières droites se coupent au premier centre isogone Z , et les lignes Z_1Y_1, Z_2Y_2, Z_3Y_3 concourent au premier centre isodynamique W . Les points Z et W sont les foyers d'une ellipse touchant les côtés de $A_1A_2A_3$ en Z_1, Z_2, Z_3 ; une directrice coïncide avec la polaire trilinéaire de Z par rapport au triangle $A_1A_2A_3$.

Réciproquement, si les côtés d'un triangle $Z_1Z_2Z_3$ inscrit à une

rayons A_1Z, A_2Z, A_3Z, A_4I_1 se coupent, deux à deux, sous l'angle de 120° . Les trois premières étant fixes, la quatrième enveloppe une cyclide et son centre décrit une conique.

On parvient à des résultats analogues en remplaçant Z par le second centre isogone de $A_1A_2A_3$.

conique sont vus d'un foyer Z sous des angles de 60° ou 120° , les tangentes en Z_1, Z_2, Z_3 forment un triangle $A_1A_2A_3$ tel que Z est le centre d'homologie et que la directrice correspondante est l'axe d'homologie des triangles $A_1A_2A_3, Z_1Z_2Z_3$.

TÉTRAÈDRE INVOLUTIF.

51. Dans le tétraèdre isodynamique, nous avons rencontré six sphères dont les centres étaient situés sur les arêtes et qui passaient par les extrémités de l'arête opposée.

En généralisant les conditions de la figure, nous avons obtenu quelques résultats qui offrent déjà un grand intérêt, bien que la question soit susceptible de plus grands développements.

Soient v_1, v_2, \dots les points où les arêtes a_1, a_2, \dots du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont rencontrées, respectivement, par les plans perpendiculaires aux milieux M_4, M_5, \dots des arêtes opposées. Pour que les points v_1, v_2, v_3 soient en ligne droite, il faut que

$$\frac{v_3A_1}{v_3A_2} \cdot \frac{v_1A_2}{v_1A_3} \cdot \frac{v_2A_3}{v_2A_1} = -1 \dots \dots \dots (15)$$

Mais, si f_1 et f_2 sont les projections de A_1 et A_2 sur l'arête A_3A_4 , les triangles $A_1A_3A_4, A_2A_3A_4$ donnent

$$a_3^2 - a_1^2 = 2a_6 \cdot M_6f_1, \quad a_3^2 - a_2^2 = 2a_6 \cdot M_6f_2;$$

d'où :

$$\frac{v_3A_1}{v_3A_2} = \frac{M_6f_1}{M_6f_2} = \frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2 - a_2^2}.$$

Par analogie :

$$\frac{v_1A_2}{v_1A_3} = \frac{a_3^2 - a_2^2}{a_3^2 - a_1^2}, \quad \frac{v_2A_3}{v_2A_1} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}.$$

L'égalité (13) peut donc être remplacée par celle-ci :

$$(a_3^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2) = -(a_3^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2).$$

Elle exprime que six points en ligne droite dont les abscisses

sont proportionnelles aux carrés des arêtes du tétraèdre sont en involution. On peut lui donner la forme symétrique

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^2 + a_4^2 & a_1^2 a_4^2 \\ 1 & a_2^2 + a_5^2 & a_2^2 a_5^2 \\ 1 & a_3^2 + a_6^2 & a_3^2 a_6^2 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (14)$$

Par conséquent, la même égalité suffit pour que les triples de points (v_1, v_5, v_6) , (v_2, v_6, v_4) , (v_5, v_4, v_3) soient également en ligne droite. Ainsi : *lorsque les carrés des arêtes d'un tétraèdre sont proportionnels aux abscisses de six points en involution, les points où chaque arête est rencontrée par le plan perpendiculaire au milieu de l'arête opposée sont les sommets d'un quadrilatère complet.*

De même, *lorsque les six côtés d'un quadrangle complet vérifient la relation (14), les points où un côté quelconque est rencontré par la perpendiculaire au milieu du côté opposé sont les sommets d'un quadrilatère complet.*

Ces tétraèdres et ces quadrangles peuvent être appelés *involutifs*.

52. Considérons un tétraèdre involutif $A_1A_2A_3A_4$. Nous donnerons le nom de *plan d'involution* au plan des points v , et nous désignerons par *sphère* v_n la sphère qui a pour centre le point v_n et qui passe par les extrémités de l'arête opposée.

Les sphères v_1, v_2, v_3 , dont les centres sont en ligne droite et qui passent par un même point A_4 , se coupent suivant un cercle β_4 . Tout point de β_4 est sommet d'un tétraèdre involutif construit sur la base $A_1A_2A_3$ et dont le plan d'involution passe par la droite $v_1v_2v_3$.

De même, les sphères v_5, v_4, v_3 passent par un même cercle β_5 . Les cercles β_5, β_4 se rencontrent en deux points A_5, A'_5 qui appartiennent aussi à la sphère v_6 , attendu que les sphères v_1, v_5, v_6 ont pour intersection un cercle β_1 et que les deux premières surfaces contiennent déjà les points A_5, A'_5 .

Donc *les six sphères v se coupent aux deux mêmes points A_5, A'_5 qui sont symétriques par rapport au plan d'involution.* Ces points sont des *centres involutifs* du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et

forment, chacun, avec les points A_1, A_2, A_3, A_4 un système involutif complet : quatre points quelconques d'un système complet tel que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont les sommets d'un tétraèdre involutif, et les plans d'involution de deux quelconques des cinq tétraèdres ainsi obtenus se coupent sur la face commune à ces deux tétraèdres.

53. La disposition des points v d'un système complet a des conséquences très curieuses. Dans les trois tétraèdres $A_1A_2A_4A_5$, $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, les plans perpendiculaires aux milieux des arêtes A_2A_3 , A_2A_5 , A_1A_5 rencontrent l'arête opposée A_4A_5 au même point v ; mais ces plans se coupent aussi suivant l'axe du cercle $A_1A_2A_3$. Donc dans tout système involutif complet, l'axe du cercle qui passe par trois des points s'appuie sur la droite qui joint les deux autres points ; les dix points ainsi obtenus sont, six à six, les sommets d'un quadrilatère complet.

D'après cela, dans le tétraèdre involutif $A_1A_2A_3A_4$, l'axe OO_4 du cercle $A_1A_2A_3$ s'appuie sur les droites A_4A_5 , A_4A_5' ; donc le plan du cercle β_4 qui contient déjà la hauteur A_4H_4 et la ligne A_5A_5' , passe aussi par OO_4 . Par analogie, la droite A_5A_5' rencontre également les hauteurs A_1H_1 , A_2H_2 , A_3H_3 et les axes OO_1 , OO_2 , OO_3 des cercles circonscrits aux faces T_1 , T_2 , T_3 du tétraèdre. On conclut de là que dans tout tétraèdre involutif, le centre de la sphère circonscrite et les deux centres involutifs sont situés sur une même génératrice de l'hyperboloïde des hauteurs ; cette génératrice est perpendiculaire au plan d'involution.

Réciproquement, si l'hyperboloïde des hauteurs d'un tétraèdre passe par le centre de la sphère circonscrite, ce tétraèdre sera involutif.

54. Le plan $A_1A_2A_3$ coupe les sphères v_1, v_2, v_3 suivant trois cercles qui se rencontrent aux deux mêmes points A_4', A_4'' , extrémités d'un diamètre du cercle β_4 . La droite $A_4'A_4''$ est évidemment perpendiculaire à la droite $v_1v_2v_3$ et passe par le centre O_4 du cercle $A_1A_2A_3$. Les quadrangles $A_1A_2A_3A_4'$, $A_1A_2A_3A_4''$ sont involutifs.

Désignons par O_1', O_2', O_3' les centres des cercles circonscrits

aux triangles $A_2A_3A'_1$, $A_1A_3A'_2$, $A_1A_2A'_3$. Les côtés du quadrangle $O'_1O'_2O'_3O'_4$ sont perpendiculaires aux milieux des côtés du quadrangle $A_1A_2A_3A_4$ et rencontrent les côtés opposés de ce dernier en six points $v_1, v_2, v_3, v'_1, v'_2, v'_3$ qui sont, trois à trois, en ligne droite. De même que la ligne A'_4O_4 est perpendiculaire à la droite $v_1v_2v_3$, de même les lignes $A_1O'_1, A_2O'_2, A_3O'_3$ seront perpendiculaires aux droites $v_1v'_1v'_2, v_2v'_2v'_3, v_3v'_3v'_1$. De plus, puisque les côtés homologues des triangles $A_1A_2A_3, O'_1O'_2O'_3$ se coupent sur la droite $v_1v_2v_3$, les droites $A_1O'_1, A_2O'_2, A_3O'_3$ concourent en un même point O' ; par analogie, les droites A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3 se rencontrent aussi au même point O' .

Donc : dans tout quadrangle involutif, les droites qui joignent un sommet au centre du cercle passant par les trois autres sommets concourent en un même point. Ces droites sont perpendiculaires aux côtés du quadrilatère complet formé par les points v .

55. Considérons de nouveau un tétraèdre involutif $A_1A_2A_3A_4$. Les plans perpendiculaires aux milieux des arêtes A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 rencontrent le plan $A_1A_2A_3$ suivant trois droites passant par v_1, v_2, v_3 et formant un triangle $C_1C_2C_3$ dont les sommets appartiennent aussi aux droites OO_1, OO_2, OO_3 . Les triangles $A_1A_2A_3, C_1C_2C_3$, admettant un axe d'homologie $v_1v_2v_3$, ont aussi un centre d'homologie D_4 . On conclut de là que les plans $A_1H_1O_1O, A_2H_2O_2O, A_3H_3O_3O$ se coupent suivant la droite OD_4 . Si l'on répète ces raisonnements pour les autres faces du tétraèdre, on verra que les quatre plans $A_1H_1O_1, A_2H_2O_2, A_3H_3O_3, A_4H_4O_4$ se coupent, trois à trois, suivant quatre droites passant par O ; par conséquent ces quatre droites se confondent en une seule s'appuyant sur les hauteurs du tétraèdre, et passant par O .

Nous retrouvons ainsi, par une autre voie, une partie des résultats du n° 53; en même temps, nous avons une signification géométrique des points où la droite $OA_5A'_5$ rencontre les faces du tétraèdre.

56. Étudions maintenant le lieu (A_4) des sommets des

tétraèdres involutifs de même base $A_1A_2A_3$, et sa trace (A_4) sur le plan $A_1A_2A_3$.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons maintenant le cercle $A_1A_2A_3$ par β , le centre du cercle $A_1A_2A_3$ par o , le point de concours des hauteurs, le point de Lemoine et les centres isodynamiques du triangle $A_1A_2A_3$ par h, k, W, W' , enfin la droite $v_1v_2v_3$ par V .

Les principales variétés du tétraèdre involutif vont nous conduire à des propriétés intéressantes des lieux (A_4) et (A_4') .

L'équation (14) admet la solution

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + a_4^2 = a_5^2 + a_6^2.$$

Donc tout tétraèdre orthogonal est involutif. Le lieu du sommet d'un tel tétraèdre est la droite hH perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$; donc la droite hH fait partie du lieu (A_4) . Le plan d'involution s'est transporté à l'infini.

Le déterminant (14) s'annule comme acquérant deux colonnes identiques, lorsqu'on pose

$$a_1a_4 = a_2a_5 = a_3a_6.$$

Donc tout tétraèdre isodynamique est involutif. Le lieu du sommet d'un tel tétraèdre est le cercle isodynamique construit sur la distance WW' comme diamètre, dans un plan perpendiculaire à $A_1A_2A_3$. Soient $B_1B_2B_3$ le triangle polaire réciproque de $A_1A_2A_3$ relativement au cercle o , et u_1, u_2, u_3 les intersections des côtés homologues des triangles $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$. La droite $u_1u_2u_3$, polaire du point de Lemoine k du triangle $A_1A_2A_3$ par rapport au cercle o , est la position de la ligne V qui correspond aux tétraèdres isodynamiques construits sur $A_1A_2A_3$.

L'équation (14) étant vérifiée par

$$a_4 = a_2, \quad a_5 = a_1,$$

tout tétraèdre formé par deux triangles isocèles de même base est involutif. Lorsque cette base est A_4A_5 , le lieu du point A_4 est la circonférence décrite par A_3 en tournant autour de A_1A_2 . Il résulte de là que la courbe (A_4) passe par les sommets du triangle

fondamental et par leurs symétriques relativement aux côtés opposés.

Désignons par q_n le point de rencontre du côté a_n avec la perpendiculaire élevée au milieu de a_n . Lorsqu'on fait coïncider A'_4 avec A_1, A_2 ou A_3 , la ligne V tombera sur les droites $q_{23}q_{32}, q_{34}q_{43}$ ou $q_{12}q_{21}$; par conséquent, *les symétriques de A_1, A_2, A_3 , pris respectivement par rapport aux droites $q_{23}q_{32}, q_{34}q_{43}, q_{12}q_{21}$ appartiennent à la courbe (A'_4) .*

57. L'équation (14) admet la solution

$$a_4 = a_5 = a_6.$$

Donc l'axe Oo du cercle $A_1A_2A_3$ fait partie de la surface (A_4) . Les tétraèdres correspondants donnent une construction très simple des droites V. En effet, les plans perpendiculaires aux milieux des arêtes égales A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 , rencontrent le plan $A_1A_2A_3$ suivant les côtés d'un triangle $C_1C_2C_3$ qui est homothétique, par rapport à o , du triangle $B_1B_2B_3$ formé par les tangentes en A_1, A_2, A_3 au cercle $A_1A_2A_3$. Les côtés homologues des triangles $A_1A_2A_3, C_1C_2C_3$ se rencontrent en trois points v_1, v_2, v_3 situés sur la trace V du plan d'involution. Lorsque A_4 se déplace sur Oo , la droite $v_1v_2v_3$ occupera toutes les positions possibles, et marquera sur les côtés de $A_1A_2A_3$ des divisions semblables; car les lignes C_1C_2, C_2C_3 se meuvent parallèlement à elles-mêmes en se coupant constamment sur OB_2 .

On déduit de là que la droite V enveloppe une parabole (V) tangente aux côtés de $A_1A_2A_3$.

Ces résultats peuvent se résumer dans le théorème suivant :

Étant donné un triangle quelconque $A_1A_2A_3$ inscrit au cercle o , tout triangle $C_1C_2C_3$ dont les côtés sont perpendiculaires aux rayons oA_1, oA_2, oA_3 et équidistants du centre o , est homologique avec $A_1A_2A_3$. Les cercles qui ont pour centres les points v_1, v_2, v_3 où se coupent les côtés correspondants et pour rayons les distances v_1A_1, v_2A_2, v_3A_3 se coupent aux deux mêmes points A'_4, A''_4 . La corde commune $A'_4A''_4$ passe par o , et la droite $v_1v_2v_3$ enveloppe une parabole inscrite au triangle $A_1A_2A_3$.

58. Passons à la détermination des éléments de cette parabole.

La directrice est la droite ho qui passe par le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ et par le point de concours des hauteurs. Car o est le point de concours des hauteurs des triangles $A_1q_{23}q_{32}$, $A_2q_{31}q_{13}$, $A_3q_{12}q_{21}$ formés par trois tangentes à la parabole.

Le foyer F est à l'intersection des circonférences $A_1A_2A_3$, $A_1u_2u_3$, $A_1q_{23}q_{32}$, etc. On peut remarquer, en passant, cette élégante proposition : *Dans tout triangle $A_1A_2A_3$, les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés rencontrent les autres côtés en six points q_{12} , q_{21} , ... tels que les circonférences $A_1q_{23}q_{31}$, $A_2q_{31}q_{13}$, $A_3q_{12}q_{21}$ se coupent en un même point de la circonférence $A_1A_2A_3$.*

La direction des diamètres de (V) étant connue, le foyer F résulte de l'intersection des polaires isogonales, prises relativement aux angles A_1 , A_2 , A_3 , des perpendiculaires abaissées de A_1 , A_2 , A_3 sur la droite ho . Autrement dit, le point F' , symétrique de F par rapport au point o , a pour polaires isogonales des parallèles à ho .

Cherchons les points p_1 , p_2 , p_3 où la parabole touche les côtés de $A_1A_2A_3$. Lorsque la droite V s'approche indéfiniment de A_2A_3 , les points v_3 , v_2 , v_1 ont pour limites A_2 , A_3 , p_1 , et les cercles v_3 , v_2 tendent à se couper aux sommets X_1 , Y_1 des triangles équilatéraux construits sur A_2A_3 . Donc la courbe (A_1) passe par les sommets X_1 , Y_1 , X_2 , Y_2 , X_3 , Y_3 des triangles équilatéraux construits sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$, et les points de contact de ces côtés avec la parabole (V) sont les centres des cercles $A_1X_1Y_1$, $A_2X_2Y_2$, $A_3X_3Y_3$.

Voici encore une proposition assez curieuse, qui se rattache à la dernière figure : *Le point d'intersection Z des droites A_1X_1 , A_2X_2 , A_3X_3 , et celui des droites joignant A_1 , A_2 , A_3 aux centres x_1 , x_2 , x_3 des triangles équilatéraux $A_2A_3X_1$, $A_3A_1X_2$, $A_1A_2X_3$ sont en ligne droite avec le centre o du cercle $A_1A_2A_3$.* Car les points x_1 , x_2 , x_3 sont les centres des cercles A_2A_3Z , A_3A_1Z , A_1A_2Z ; les droites A_1x_1 , A_2x_2 , A_3x_3 concourant en un même point, le quadrilatère $A_1A_2A_3Z$ est involutif.

Nous faisons encore ressortir, à cette occasion, deux autres cas particuliers du théorème du n° 54 : 1° *Les droites qui joignent A_1, A_2, A_3 aux centres des cercles circonscrits aux triangles $A_2hA_3, A_3hA_1, A_1hA_2$ se coupent sur la ligne ho au centre du cercle des neuf points de $A_1A_2A_3$* ; 2° *les droites joignant A_1, A_2, A_3 aux centres des cercles circonscrits aux triangles $A_2oA_3, A_3oA_1, A_1oA_2$ se rencontrent en un même point (*)*.

59. La parabole (V) admet un autre mode de génération très simple. Lorsqu'un point parcourt une droite quelconque Δ , sa polaire trilinéaire enveloppe une conique inscrite au triangle fondamental. Si la droite Δ passe par le centre de gravité G du triangle, la conique est tangente à la droite de l'infini, polaire de G .

D'après cela, *la parabole (V) est l'enveloppe de la polaire trilinéaire d'un point parcourant la droite Gk qui passe par le centre de gravité et par le point de Lemoine du triangle $A_1A_2A_3$* .

60. L'étude analytique des lieux $(A_i), (A'_i)$ amène des développements intéressants.

Désignons par $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ les coordonnées des points A_i, A_1, A_2, A_3 , et posons

$$S_n \equiv (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2, \quad (n = 1, 2, 3).$$

L'équation (14) prend la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^2 + S_1 & a_1^2 S_1 \\ 1 & a_2^2 + S_2 & a_2^2 S_2 \\ 1 & a_3^2 + S_3 & a_3^2 S_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (15)$$

ou

$$a_1^2 S_1 P_1 + a_2^2 S_2 P_2 + a_3^2 S_3 P_3 = 0, \quad \dots \quad (16)$$

(*) La première de ces propositions est connue; voir, par exemple, CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, p. 28. La seconde est susceptible d'un autre énoncé, si l'on considère comme triangle primitif le triangle $B_1B_2B_3$ formé par les tangentes au cercle O en A_1, A_2, A_3 : les circonférences $A_2OA_3, A_3OA_1, A_1OA_2$ passent, respectivement, par B_1, B_2, B_3 .

pourvu que l'on fasse

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv S_2 + a_2^2 - S_3 - a_3^2, \\ P_2 &\equiv S_3 + a_3^2 - S_1 - a_1^2, \\ P_3 &\equiv S_1 + a_1^2 - S_2 - a_2^2. \end{aligned}$$

Les égalités $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ représentent les plans A_1hH , A_2hH , A_3hH ; car elles expriment que les carrés des distances du point (x, y, z) aux extrémités d'un côté du triangle $A_1A_2A_3$ ont même différence que les carrés des côtés adjacents.

L'équation (16) établit une relation très simple entre les distances d'un point du lieu (A_4) aux sommets du triangle fondamental et aux plans A_1hH , A_2hH , A_3hH . Elle montre aussi que la droite hH est située tout entière sur la surface.

Si l'on décompose le déterminant (15) ainsi :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^2 & a_1^2 S_1 \\ 1 & a_2^2 & a_2^2 S_2 \\ 1 & a_3^2 & a_3^2 S_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & S_1 & a_1^2 S_1 \\ 1 & S_2 & a_2^2 S_2 \\ 1 & S_3 & a_3^2 S_3 \end{vmatrix},$$

et qu'on développe, respectivement, suivant les éléments de la première et de la troisième colonne, on trouve

$$\Sigma(S_2 - S_3)(a_1^2 S_1 - a_2^2 a_3^2) = 0,$$

résultat d'où l'on conclut aisément que la droite oO fait partie de la surface (A_4) .

L'équation (15) est de la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2)U_1 + U_2 = 0,$$

U_1 et U_2 étant respectivement des fonctions du premier et du second degré en x, y, z .

Par conséquent, la surface (A_4) passe par le cercle imaginaire à l'infini; c'est donc une anallagmatique du troisième ordre. La courbe (A_4) est une cubique circulaire.

Nous connaissons vingt et un points remarquables de cette courbe, savoir : les sommets du triangle fondamental, les symétriques de ces points relativement aux côtés opposés et

aux lignes $q_{23}q_{32}$, $q_{31}q_{13}$, $q_{12}q_{21}$; les sommets des triangles équilatéraux construits sur a_1 , a_2 , a_3 ; le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$, le point de concours des hauteurs, les deux centres isogones et les deux centres isodynamiques.

61. Comme (A_4) passe par les droites oO , hH et par le cercle imaginaire à l'infini, tout plan mené par oO rencontre cette surface suivant un cercle β , et tout plan mené par hH donne également une section circulaire γ ; toute sphère passant par l'un des cercles β ou γ coupe (A_4) suivant un second cercle γ ou β .

Pour tirer ces conclusions directement de l'équation (15), nous considérons celle-ci comme la résultante des équations

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon - \eta(a_1^2 + S_1) + a_1^2 S_1 &= 0, \\ \varepsilon - \eta(a_2^2 + S_2) + a_2^2 S_2 &= 0, \\ \varepsilon - \eta(a_3^2 + S_3) + a_3^2 S_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

qui représentent trois sphères ayant pour centres A_1 , A_2 , A_3 et pour carrés des rayons

$$\frac{\varepsilon - \eta a_1^2}{\eta - a_1^2}, \quad \frac{\varepsilon - \eta a_2^2}{\eta - a_2^2}, \quad \frac{\varepsilon - \eta a_3^2}{\eta - a_3^2},$$

ε et η étant deux paramètres variables.

Si l'on élimine ε entre les égalités (17) prises à deux, on obtient les équations de trois nouvelles sphères :

$$\left. \begin{aligned} (a_1^2 - \eta) S_1 - (a_2^2 - \eta) S_2 - (a_1^2 - a_2^2) \eta &= 0, \\ (a_2^2 - \eta) S_2 - (a_3^2 - \eta) S_3 - (a_2^2 - a_3^2) \eta &= 0, \\ (a_3^2 - \eta) S_3 - (a_1^2 - \eta) S_1 - (a_3^2 - a_1^2) \eta &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (18)$$

Ces surfaces se coupent suivant un cercle, lieu des points A_4 qui correspondent à une valeur fixe de η et à des valeurs variables de ε . Leurs centres ont pour coordonnées barycentriques

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 - \eta, & \quad -(a_2^2 - \eta), & \quad 0 \\ 0, & \quad a_2^2 - \eta, & \quad -(a_3^2 - \eta) \\ -(a_1^2 - \eta), & \quad 0, & \quad a_3^2 - \eta, \end{aligned} \right\} \dots \dots (19)$$

et les équations (18) sont vérifiées, respectivement, par

$$S_1 = a_2^2, \quad S_2 = a_1^2; \quad S_2 = a_3^2, \quad S_3 = a_2^2; \quad S_3 = a_1^2, \quad S_1 = a_3^2.$$

Les sphères (18) ont donc leurs centres sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et elles passent par les sommets A_1, A_2, A_3 ; ce sont donc celles qui ont été désignées par v_1, v_2, v_3 , et leur intersection est un cercle β de la surface (A_4) .

L'équation de la droite $v_1v_2v_3$, axe du cercle β , se déduit des coordonnées (19) des points v_1, v_2, v_3 ; on trouve

$$\frac{\mu_1}{a_1^2 - \gamma} + \frac{\mu_2}{a_2^2 - \gamma} + \frac{\mu_3}{a_3^2 - \gamma} = 0,$$

ou, sous forme entière,

$$\gamma^2 \sum \mu_1 - \gamma \sum \mu_1 (a_2^2 + a_3^2) + \sum \mu_1 a_2^2 a_3^2 = 0.$$

De là, on conclut facilement l'équation de l'enveloppe de la droite $v_1v_2v_3$:

$$\sum^2 \mu_1 (a_2^2 + a_3^2) - 4 \sum \mu_1 \sum \mu_1 a_2^2 a_3^2 = 0,$$

ou

$$\sqrt{\mu_1 (a_2^2 - a_3^2)} + \sqrt{\mu_2 (a_3^2 - a_1^2)} + \sqrt{\mu_3 (a_1^2 - a_2^2)}.$$

En coordonnées tangentielles, cette enveloppe est représentée par

$$\frac{a_2^2 - a_3^2}{\rho_1} + \frac{a_3^2 - a_1^2}{\rho_2} + \frac{a_1^2 - a_2^2}{\rho_3} = 0.$$

Ces résultats montrent que l'axe du cercle β enveloppe une conique tangente à la droite de l'infini, c'est-à-dire une parabole. Nous reprendrons plus loin l'étude analytique de cette courbe.

62. Par le cercle β , il passe une infinité de sphères ayant leurs centres sur la droite $v_1v_2v_3$. Pour obtenir l'équation générale de ces surfaces, il suffit d'ajouter les égalités (17) multipliées par des indéterminées dont la somme est nulle. On trouve ainsi

$$\sum \lambda_1 a_1^2 S_1 - \gamma \sum \lambda_1 (a_1^2 + S_1) = 0, \quad (20)$$

sous la condition

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \quad (21)$$

Les coordonnées barycentriques du centre de la sphère (20) (*) sont :

$$v_1 = \lambda_1 (a_1^2 - r), \quad v_2 = \lambda_2 (a_2^2 - r), \quad v_3 = \lambda_3 (a_3^2 - r).$$

Ce centre passe à l'infini, lorsque $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ ou

$$a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2 + a_3^2 \lambda_3 = 0 \quad (22)$$

Les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qu'on tire de (21) et (22) font représenter à l'équation (20) un plan qui est nécessairement celui du cercle β . Ce plan est donc défini par

$$\lambda_1 = a_2^2 - a_3^2, \quad \lambda_2 = a_3^2 - a_1^2, \quad \lambda_3 = a_1^2 - a_2^2,$$

ou, si l'on veut, par

$$\sum a_i^2 (a_2^2 - a_3^2) S_1 - r \sum (a_2^2 - a_3^2) S_1 = 0.$$

On voit qu'il passe par une droite fixe ayant pour équations

$$\sum a_i^2 (a_2^2 - a_3^2) S_1 = 0, \quad \sum (a_2^2 - a_3^2) S_1 = 0 \quad (23)$$

Celles-ci étant vérifiées par $S_1 = S_2 = S_3$, le plan de β contient la droite oO . De plus, les égalités (23) admettent, respectivement, les solutions

$$a_1^2 S_1 = a_2^2 S_2 = a_3^2 S_3, \quad S_1 + a_1^2 = S_2 + a_2^2 = S_3 + a_3^2$$

(*) Si

$$S_n \equiv (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2 - R_n^2 = 0, \quad (n = 1, 2, 3),$$

sont les équations de trois sphères dont les centres sont A_1, A_2, A_3 , l'équation

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 = 0. \quad (A)$$

représente une sphère dont le centre a pour coordonnées barycentriques par rapport au triangle $A_1 A_2 A_3$ les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; c'est ce que l'on voit facilement en développant l'équation. Lorsque $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, (A) représente un plan perpendiculaire aux droites qui ont pour équations

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \quad \frac{\mu_2}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad \frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

qui conviennent aussi au cercle isodynamique et à la ligne hH ; donc elles représentent les plans Ook , Hho . Si on les considère comme représentant deux sphères dont les centres sont à l'infini, on trouve que les coordonnées barycentriques des points à l'infini sur les directions perpendiculaires à ok et oh sont

$$\begin{aligned} a_1^2 (a_2^2 - a_3^2), & \quad a_2^2 (a_3^2 - a_1^2), & \quad a_3^2 (a_1^2 - a_2^2); \\ a_2^2 - a_3^2, & \quad a_3^2 - a_1^2, & \quad a_1^2 - a_2^2. \end{aligned}$$

63. La sphère (20) passe par le cercle qui a pour équations

$$\sum \lambda_1 a_1^2 S_1 = 0, \quad \sum \lambda_1 (a_1^2 + S_1) = 0 \quad \dots \quad (24)$$

Ce cercle est situé sur la surface (A_4) ; car l'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entre les égalités (21) et (24), fait retomber sur l'équation (15). La seconde des équations (24) représente un plan mené par hH ; nous retrouvons donc, par voie analytique, les cercles γ .

L'équation (20) peut être considérée comme étant celle d'une sphère tangente à la surface (A_4) , aux points d'intersection des cercles β et γ . Elle dépend de deux paramètres variables; car les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, qui ont une somme nulle, ne comptent que pour un seul paramètre, et on peut les remplacer par $\lambda_1 - \varepsilon\lambda'_1, \lambda_2 - \varepsilon\lambda'_2, \lambda_3 - \varepsilon\lambda'_3$, en prenant pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ les coordonnées de deux points fixes situés à l'infini. On trouve ainsi pour l'équation générale d'une sphère bitangente :

$$\varepsilon S - \varepsilon S' - \varepsilon S'' + S''' = 0, \quad \dots \quad (25)$$

pourvu que l'on pose

$$\begin{aligned} S & \equiv \sum \lambda_1 (a_1^2 + S_1), \\ S' & \equiv \sum \lambda_1 (a_1^2 + S_1), \\ S'' & \equiv \sum \lambda_1 a_1^2 S_1, \\ S''' & \equiv \sum \lambda_1 a_1^2 S_1. \end{aligned}$$

Toutes les sphères qui correspondent à une valeur constante de ε passent par un même cercle β ayant pour équations

$$\varepsilon S - S' = 0, \quad \varepsilon S' - S'' = 0,$$

et le lieu de ce cercle, lorsque η vient également à varier, est la surface définie par l'équation

$$SS''' - S'S'' = 0 \quad (26)$$

De même, lorsque ε est constant, les sphères passent par le cercle γ dont les équations sont

$$\varepsilon S - S' = 0, \quad \varepsilon S'' - S''' = 0, \quad (27)$$

et l'élimination de ε entre les égalités (27) conduit encore à (26). Il résulte de là que (A₄) admet deux séries de sections circulaires, ainsi que nous l'avons déjà démontré plus haut.

On parvient encore à ces conclusions en multipliant le déterminant (15) par le suivant :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' & \lambda_1'' \\ \lambda_2 & \lambda_2' & \lambda_2'' \\ \lambda_3 & \lambda_3' & \lambda_3'' \end{vmatrix},$$

dans lequel nous supposons $\Sigma \lambda_i = 0$, $\Sigma \lambda_i' = 0$. On retrouve l'équation (26), et en considérant celle-ci comme étant vérifiée par les hypothèses

$$\begin{cases} \eta S - S'' = 0, & \varepsilon S - S' = 0, \\ \eta S' - S''' = 0, & \varepsilon S'' - S''' = 0, \end{cases}$$

on reconnaît encore l'existence de deux séries de sections circulaires.

64. Les axes des cercles β ou γ enveloppent la même parabole. Car les coordonnées barycentriques du centre de la sphère bitangente (25) sont

$$\begin{aligned} \rho\mu_1 &= (\eta - a_1^2)(\varepsilon\lambda_1' - \lambda_1), \\ \rho\mu_2 &= (\eta - a_2^2)(\varepsilon\lambda_2' - \lambda_2), \\ \rho\mu_3 &= (\eta - a_3^2)(\varepsilon\lambda_3' - \lambda_3), \end{aligned}$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. On peut prendre les valeurs

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= a_2^2 - a_3^2, & \lambda_2' &= a_3^2 - a_1^2, & \lambda_3' &= a_1^2 - a_2^2, \\ \lambda_1 &= a_1^2(a_2^2 - a_3^2), & \lambda_2 &= a_2^2(a_3^2 - a_1^2), & \lambda_3 &= a_3^2(a_1^2 - a_2^2), \end{aligned}$$

qui satisfont aux conditions

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

alors

$$\rho^{\mu_1} = (a_2^2 - a_3^2)(\gamma - a_1^2)(\varepsilon - a_1^2),$$

$$\rho^{\mu_2} = (a_3^2 - a_1^2)(\gamma - a_2^2)(\varepsilon - a_2^2),$$

$$\rho^{\mu_3} = (a_1^2 - a_2^2)(\gamma - a_3^2)(\varepsilon - a_3^2).$$

L'équation de l'axe d'un cercle β s'obtient par l'élimination de ρ et ε ; celle de l'axe d'un cercle γ résulte de l'élimination de ρ et γ . Dans les deux cas, on obtient la même équation.

Les centres des cercles β et γ parcourent deux strophoïdes obliques ayant pour points doubles les points o et h , car les lieux de ces centres sont les podaires de la parabole (V), les pôles étant placés sur la directrice.

Une sphère bitangente est coupée par le plan $A_1A_2A_3$ suivant un cercle qui passe par les extrémités de deux diamètres des cercles correspondants β et γ ; ces extrémités appartiennent à la courbe (A'_4) . Donc toute droite passant par o (ou h) rencontre la cubique circulaire (A'_4) en deux points tels, que tout cercle passant par ces points coupe la courbe en deux nouveaux points qui sont en ligne droite avec h (ou o).

Cette propriété assez curieuse est un cas particulier du théorème de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre : Toute conique passant par quatre points fixes M_1, M_2, M_3, M_4 d'une courbe du 3^e ordre rencontre celle-ci en deux nouveaux points N_1, N_2 qui sont en ligne droite avec un point fixe N de la cubique. Prenons pour M_3, M_4 les points circulaires à l'infini, qui font partie de (A'_4) , et soit M le troisième point de rencontre de la droite M_1M_2 avec (A'_4) . Il est facile de voir que les rôles des points M, N peuvent être échangés; donc deux sécantes quelconques menées, l'une par M et l'autre par N , rencontrent la cubique (A'_4) en quatre points d'une même circonférence.

Ces dernières considérations nous paraissent susceptibles de nombreuses conséquences.

65. Pour terminer la théorie des figures involutives, nous déduirons, de l'équation

$$\Sigma^2 \mu_1 (a_2^2 + a_3^2) - 4 \Sigma \mu_1 \Sigma \mu_1 a_2^2 a_3^2 = 0,$$

quelques propriétés de la parabole (V).

La forme de cette équation indique que les droites représentées par

$$\Sigma \mu_1 = 0, \quad \Sigma \frac{\mu_1}{a_1^2} = 0, \quad \Sigma \mu_1 (a_2^2 + a_3^2) = 0,$$

sont deux tangentes et la corde de contact de celles-ci. Les deux premières lignes sont la droite de l'infini et la polaire trilinéaire $u_1 u_2 u_3$ du point de Lemoine; par conséquent, la troisième est le diamètre mené par le point de contact de $u_1 u_2 u_3$. En écrivant

$$(\mu_1 a_2^2 + \mu_2 a_3^2 + \mu_3 a_1^2) + (\mu_1 a_3^2 + \mu_2 a_1^2 + \mu_3 a_2^2) = 0, \\ \Sigma \mu_1 \Sigma a_i^2 - \Sigma \mu_1 a_i^2 = 0,$$

on voit que ce diamètre passe par l'intersection des polaires trilinéaires des points de Brocard, et est parallèle à la conjuguée isotomique de la droite $u_1 u_2 u_3$.

Soient F et F₁ les deux foyers de (V). Le dernier, déterminé par l'intersection des droites

$$\Sigma \mu_1 (a_2^2 + a_3^2) = 0, \quad \Sigma \mu_1 = 0,$$

a pour coordonnées barycentriques

$$a_2^2 - a_3^2, \quad a_3^2 - a_1^2, \quad a_1^2 - a_2^2;$$

le foyer proprement dit F étant le conjugué isogonal de F₁, a pour coordonnées normales

$$\frac{a_1}{a_2^2 - a_3^2}, \quad \frac{a_2}{a_3^2 - a_1^2}, \quad \frac{a_3}{a_1^2 - a_2^2},$$

ou

$$\frac{1}{\sin(A_2 - A_3)}, \quad \frac{1}{\sin(A_3 - A_1)}, \quad \frac{1}{\sin(A_1 - A_2)},$$

On peut conclure de là que les distances FA_1, FA_2, FA_3 sont proportionnelles à

$$\sin(A_2 - A_3), \quad \sin(A_3 - A_1), \quad \sin(A_1 - A_2).$$

Les droites A_1p_1, A_2p_2, A_3p_3 qui aboutissent aux points de contact de (V) avec a_1, a_2, a_3 sont représentées par

$$\mu_2(a_3^2 - a_1^2) = \mu_3(a_1^2 - a_2^2),$$

$$\mu_3(a_1^2 - a_2^2) = \mu_1(a_2^2 - a_3^2),$$

$$\mu_1(a_2^2 - a_3^2) = \mu_2(a_3^2 - a_1^2).$$

Par conséquent, le centre d'homologie π des triangles $A_1A_2A_3$ et $p_1p_2p_3$ a pour coordonnées

$$\frac{1}{a_2^2 - a_3^2}, \quad \frac{1}{a_3^2 - a_1^2}, \quad \frac{1}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Il est conjugué isotomique avec le point à l'infini des diamètres de (V); de plus, il appartient au cercle $A_1A_2A_3$ et à l'ellipse minimum circonscrite au triangle de référence.

Les points F et π se rencontrent souvent dans la théorie du triangle et jouissent de propriétés intéressantes.

L'axe d'homologie des triangles $A_1A_2A_3, p_1p_2p_3$ représenté par l'équation

$$\sum \mu_1(a_2^2 - a_3^2) = 0,$$

forme, avec les polaires trilineaires des points de Brocard et avec le diamètre de (V) conjugué avec $u_1u_2u_3$, un faisceau harmonique.

ERRATA.

Page 6, 1^{re} note, lisez Quarterly, au lieu de Quaterly.

— 7, note, lisez Schoute, au lieu de Schoutte.

— 11, 1^{re} ligne, lisez ou de M, au lieu de ou M.

— 50, § 44, supprimer le troisième alinéa et remplacer la proposition du deuxième alinéa par la suivante :

Dans le tétraèdre isodynamique, la droite qui joint le point K au centre du cercle circonscrit à une face partage la hauteur correspondante en deux segments dont l'un est double de l'autre.

Ce théorème résulte de la relation

$$\frac{A_1B_1}{KB_1} : \frac{A_1K_1}{KK_1} = 5,$$

qu'il faut substituer à la division harmonique $(A_1K_1KB_1)$ dont il est fait mention dans le texte.

