

3.4.1. — fale w ciałach sprężystych

5.1.3. — teoria nieliniowa

**Sławomir Kosiński**

**ODBICIE I EWOLUCJA  
FALI UDERZENIOWEJ  
W WYBRANYCH  
MATERIAŁACH HIPERSPRĘŻYSTYCH**

**33/1995**

P. 269



**WARSZAWA 1995**

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 listopada 1995 r.

Praca habilitacyjna

recenzent – Prof. dr hab. Zbigniew Wesółowski



56576



---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 6,5 Ark. druk. 8,5  
Oddano do drukarni w grudniu 1995 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.  
Warszawa, ul. Jasna 1

## ODBICIE I EWOLUCJA FALI UDERZENIOWEJ W WYBRANYCH MATERIAŁACH HIPERSPRĘŻYSTYCH

### Streszczenie

W pracy rozpatrzono dwa wymienione w tytule zagadnienia związane z propagacją sprężystej, płaskiej fali uderzeniowej o skończonej amplitudzie w szczególnych materiałach hipersprężystych (pewne wyniki dotyczą dowolnego materiału hipersprężystego). W obu przypadkach zastosowano przybliżenie izentropowe, oraz założono, że obszar przed frontem fali jest nieodkształcony, bądź poddany jest jednorodnej deformacji wstępnej i pozostaje w spoczynku. Pierwsze zagadnienie dotyczy brzegu obszaru nieskończonego, a drugie jednowymiarowej struktury sprężystej cienkiego pręta o wolno zmieniającym się przekroju lub cienkiej warstwy z uwzględnieniem jej grubości, przez wprowadzenie dodatkowego wewnętrznego skalarrego parametru.

Stosując półodwrotną metodę zaproponowaną przez Wrighta (1971a) przy odpowiednim doborze warunków dla istnienia rozwiązania, rozpatrzono zagadnienie odbicia stacjonarnej fali uderzeniowej od płaskiego brzegu (lub odbicia-załamania na granicy dwóch materiałów). Rozważono przypadki dwu- i jednowymiarowe, gdy fala pada odpowiednio w kierunku ukośnym i normalnym do brzegu. W metodzie tej zakłada się, że stacjonarne konfiguracje falowe składają się z płaskich centrycznych fal prostych i uderzeniowych (bądź kompozycyjnych) przedzielonych obszarami stałego stanu (dla gradientu deformacji i prędkości cząstek). Fronty falowe w fali prostej nie mogą wyprzedzać jej pierwszego frontu, gdy jest przeciwnie modyfikacja polega na zastąpieniu takiego rozwiązania przez falę uderzeniową lub kompozycyjną. Fale uderzeniowe spełniają postulat stateczności Laxa. Szczegółowa analiza dotyczy materiału ściśliwego Murnaghana i materiału nieściśliwego o potencjale sprężystym  $W(I_1, I_2) = \rho_R \sigma(I_1^2, I_2)$  z którego można również uzyskać równanie konstytutywne dla neoHookeanu. Nawet przy uproszczeniach wynikających z metody Wrighta, zagadnienie to nie ma rozwiązania w postaci ogólnej.

Rozwiązania istnieją tylko dla pewnych szczególnych typów materiałów, deformacji oraz warunków brzegowych i sprowadzają się do zagadnienia początkowo-brzegowego dla układu nieliniowych równań różniczkowych opisujących zachowanie składowych gradientu deformacji i prędkości cząstek ośrodka w obszarze fali prostej. Dla rozwiązania zmodyfikowanego (w postaci fali uderzeniowej), układ równań różniczkowych zastępują równania algebraiczne wynikające z warunków dla skoków na powierzchni nieciągłości. Fale uderzeniowe w materiale ściśliwym osiągają małe intensywności, usprawiedliwione wydaje się więc zastosowanie w tym przypadku

metod perturbacyjnych oraz zlinearyzowanych równan ruchu Toupina-Bernsteina. W materiale nieściśliwym, wartości jakie mogą osiągać intensywności padających fal sprężystych wykluczają te metody i rozwiązania w tym przypadku uzyskuje się przy pomocy innych metod numerycznych.

W przypadku odbicia fali uderzeniowej w kierunku normalnym w materiale ściśliwym Murnaghana gdy obszary przed frontem fali pozostają w spoczynku i poddane są jedynie jednorodnej deformacji wstępnej, występuje jedna fala odbita, która w zależności od warunków brzegowych może być *falą prostą* (brzeg swobodny, mieszane warunki brzegowe) lub *falą uderzeniową* (brzeg utwardzony). W przypadku odbicia i transmisji występuje jedna fala odbita: prosta, uderzeniowa lub sinusoidalna biegnąca oraz jedna fala transmitowana która jest zawsze falą uderzeniową. Typ rozwiązania dla fali odbitej zależy zarówno od stałych sprężystych dwóch materiałów tworzących kompozyt jak też od kolejności ich ustawienia. Rozwiązanie analogicznego zagadnienia dla materiału nieściśliwego prowadzi do podobnych wyników.

Przy odbiciu ukośnej podłużnej fali uderzeniowej od utwardzonego brzegu w materiale Murnaghana, gdy obszar przed frontem fali padającej jest nieodkształcony i pozostaje w spoczynku, rozwiązanie przy założonym płaskim stanie odkształcenia sprowadza się do dwóch fal. Przy zmianie kąta padania każda para fal odbitych składa się z fali uderzeniowej i fali prostej. Dla małych wartości kąta padania, pierwsza (szybsza) fala odbita jest *falą uderzeniową*, a druga *falą prostą*. Ze wzrostem kąta padania "wachlarzyk" frontów (wavelets) w fali prostej stale zmniejsza się, a przy pewnej wartości określanej jako *kąt przejścia* redukuje do pierwszego frontu. Dalej rozwiązanie dla drugiej fali ma postać fali uderzeniowej. Gdy kąt padania jest równy kątowi przejścia, wartości charakterystycznej dla danego materiału i deformacji, pierwsza fala odbita znika, a druga która miała początkowo postać fali prostej, przechodzi w sposób ciągły w falę uderzeniową (przy zastosowanej aproksymacji). Front fali padającej i drugiej odbitej fali uderzeniowej są wtedy wzajemnie prostopadłe. Podobny wynik dla materiału harmonicznego uzyskali Youngchi i Ting (1984). Kolejność fal odbitych jest odwrotna, gdy kąt padania jest większy od kąta przejścia. Kąt krytyczny w tym przypadku jest bliski  $\pi/2$ .

Rozwiązanie analogicznego zagadnienia dla materiału nieściśliwego w przypadku ukośnie padającej poprzecznej płaskiej, poziomo spolaryzowanej fali uderzeniowej, przy antypłaskim stanie odkształcenia prowadzi do rozwiązania w postaci jednej fali odbitej: *uderzeniowej* (dla brzegu utwardzonego), lub *prostej* (mieszane warunki brzegowe, brzeg swobodny). W materiale nieściśliwym o postaci  $W(I_1) = \rho_R \sigma(I_1^2, I_1)$  występują dwa różne krytyczne kąty padania, związane z występowaniem w konfiguracji fal prostych bądź uderzeniowych. W drugim przypadku kąt krytyczny ma charakter typowo geometryczny i zależy w przyjętych przybliżeniach wyłącznie od kąta padania.

Dla rozwiązania zagadnienia ewolucji amplitudy w prostych jednowymiarowych strukturach zastosowano dwie różne metody ograniczając rozważania do materiału ściśliwego. W przypadku półnieskończonego pręta o wolno zmieniającym się przekroju zastosowano teorię powierzchni osobliwych wraz z metodą perturbacyjną uzyskując rozwiązanie dla zmian intensywności podłużnej fali uderzeniowej. Otrzymany wynik porównano z rozwiązaniem analogicznego zagadnienia uzyskanym przez Fu i Scotta (1994) przy pomocy metody modulowanych fal prostych z jednoczesnym tzw. "dopasowaniem" fali uderzeniowej (shock fitting method). Analizę

numeryczną przeprowadzono dla materiału Murnaghana oraz dla pręta o zwiększającym się i zmniejszającym się przekroju.

W prostych nieliniowych teoriach propagacji fal cienki pręt lub warstwa mogą być traktowane jako ciała jednowymiarowe wyposażone w wewnętrzną strukturę tzn. dodatkowo można wprowadzić pewien wewnętrzny skalarny parametr. W postaci takiego parametru wprowadzono do równań ruchu grubość warstwy. Zmienna ta pozwala uwzględnić efekty związane z małym lecz skończonym ruchem poprzecznym jednowymiarowej struktury (Wright, 1981). Wykorzystując teorię powierzchni osobliwych oraz wprowadzając uśrednione równania ruchu (Nunziato, Walsh, 1977, 1978) otrzymuje się sprzężony układ równań dla amplitud fal uderzeniowych w kierunku podłużnym i poprzecznym oraz amplitud towarzyszących im nieciągłości wyższych rzędów.

Przybliżone rozwiązanie zagadnienia ewolucji amplitudy dla podłużnej fali uderzeniowej w cienkiej warstwie uzyskuje się metodą perturbacyjną. W zależności od warunków brzegowych podłużna fala uderzeniowa związana z głównym ruchem propaguje się ze słabą nieciągłością trzeciego rzędu albo z nieciągłością trzeciego rzędu i poprzeczną falą uderzeniową o stałej amplitudzie. Równania ewolucji związane z ruchem w kierunku podłużnym pozostają takie same jak w przypadku teorii jednowymiarowej bez wewnętrznego parametru.

## WPROWADZENIE

## 1.1. Przedmowa

Tematem pracy są dwa zjawiska występujące przy propagacji, fal uderzeniowych o skończonej amplitudzie w materiałach hipersprężystych i prostych strukturach, których przebieg jest jakościowo inny niż w opisie wynikającym z teorii liniowej.

Prezentowane wyniki pochodzą głównie z siedmiu prac autora powstałych w latach 1986-1995 oraz innych wspólnych artykułów. Zarówno w tym okresie jak też wcześniej autor współpracował z prof. Zbigniewem Wesolowskim z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie oraz z doktorem Bernardem Duszczynkiem pracującym ostatnio w Bond University w Gold Coast, Australia. Autor korzystał także w 1990 roku z finansowego wsparcia Ministerstwa Edukacji Narodowej przy realizacji indywidualnego grantu nr I-103/K-61/0181/8/90-B, pt. "Odbicie-załamanie, dyfrakcja i oddziaływanie fal silnej nieciągłości w nieliniowym materiale sprężystym".

Praca omawia szczegółowo dwa zagadnienia: odbicie (odbicie-załamanie) fali uderzeniowej oraz ewolucję jej amplitudy. Zamierzeniem autora było uzyskanie rozwiązań dla tych zagadnień przy użyciu znanych (bądź zmodyfikowanych) metod postępowania oraz przy odpowiednim doborze warunków (związki konstytutywne, symetria deformacji) dla istnienia rozwiązania. Dla uzyskanych w ten sposób wyników we wszystkich przypadkach przeprowadzono analizy numeryczne i porównania.

Praca składa się z ośmiu rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawiono cel pracy, aktualny stan wiedzy oraz przegląd dotychczasowych rozwiązań w zakresie omawianych zagadnień. Rozdział drugi zawiera omówienie podstawowych zagadnień oraz zestawienie równań związanych z propagacją fal uderzeniowych i prostych w materiałach hipersprężystych.

Pozostałe rozdziały od trzeciego do ósmego stanowią oryginalny wkład autora i poświęcone są analizie dwu zagadnień odbicia (odbicia-załamania) i ewolucji amplitudy w materiale hipersprężystym. Poszczególne rozdziały zawierają materiał opublikowany wcześniej w następujących pracach<sup>1</sup>.

ROZDZIAŁ 3 • *Waves generated by an incident shock in a peculiar hyperelastic material* (Mech.Theoret.Stos. 33, (3), 551-576, 1995), • *Odbicie-załamanie, dyfrakcja i oddziaływanie fal silnej nieciągłości w nieliniowym materiale sprężystym* (Rap. nr I-103/K-61/0181/8/90-B, Politechnika Łódzka, 1990), • *Reflection of oblique shock waves in*

<sup>1</sup>W przypadku samodzielnych prac autora nazwisko pominięto, przy pracach wspólnych podano nazwiska wszystkich współautorów.

*incompressible elastic solids*, (J.Austr.Math.Soc., ser. B 27, 31-47, 1985, (Duszczyk, Kosiński, Wesolowski))

- ROZDZIAŁ 4 : •Normal shock reflection in rubber-like elastic material (Arch.Mech., 38, 675-688, 1986, (Duszczyk, Kosiński, Wesolowski)), •Normal reflection-transmission of shock waves on a plane interface between two rubber-like media (Notes on Numerical Fluid Mechanics, 24, 310-319,1989), •Normal shock reflection-transmission in rubber-like elastic material (J.Austr.Math.Soc., ser. B 31, 29-47, 1989, (Kosiński, Duszczyk)),
- ROZDZIAŁ 5 : •Reflection and refraction of shock waves in neo-Hookean material (Mech Teoret Stos., 29, 247-263, 1991, (Kosiński, Duszczyk)),
- ROZDZIAŁ 6 : •Normal reflection and transmission of plane shock waves in nonlinear elastic material (Rozpr.Inż, 34, 483-502, 1986), •Odbicie-załamanie, dyfrakcja i oddziaływanie fal silnej nieciągłości w nieliniowym materiale sprężystym (Rap. nr I-103/K-61/0181/8/90-B, Politechnika Łódzka,1990), •Reflection of oblique shock waves in Murnaghan material, ( Arch.Mech., 45 , (6), 739-766, 1993, (Kosiński, Duszczyk)),
- ROZDZIAŁ 7 : •Transport equation for shock strength in hyperelastic rods (Rozpr.Inż, 43, (1-2), 205-224, 1995)
- ROZDZIAŁ 8 : •Evolution law for shock strength in simple elastic structures (Proc.IFIP Conf., Modelling and Optimization of Distributed Parameter Systems with Applications to Engineering, Warsaw 17-25 July '95, Chapman & Hall, 1996)

Na końcu pracy dokonano podsumowania uzyskanych wyników oraz przedstawiono perspektywy dalszych zastosowań i uogólnień w odniesieniu do zastosowanych metod. Pracę zamyka bibliografia zawierająca zestawienie publikacji związanych zarówno z prezentowaną tematyką jak też z zagadnieniami propagacji fal w nieliniowych materiałach sprężystych.

## 1.2. Wstęp

Koncepcja zastosowania płaskich centrycznych fal uderzeniowych i prostych w rozwiązaniu zagadnienia odbicia (odbicia-załamania) płaskiej stacjonarnej fali uderzeniowej o skończonej amplitudzie propagującej się w materiale hipersprężystym pochodzi z gazodynamiki (por. (v. Neumann, (1963), (Courant, Friedrichs, (1948))). Próba zastosowania tych rozwiązań i ich uogólnienia dla materiału hipersprężystego o bardziej skomplikowanym niż w przypadku gazu równaniu konstytutywnym, była podejmowana przez wielu autorów: Duvaut'a (1967, 1968), Reida (1972) oraz Wrighta (1971a, 1971b). Wszyscy wymienieni autorzy stosując przybliżenie izentropowe otrzymali rozwiązania w postaci centrycznych płaskich fal prostych, uderzeniowych bądź kompozycyjnych lecz sposób rozwiązania różni się we wszystkich trzech przypadkach.

Duvaut (1967) podał rozwiązania dla równań ruchu w opisanej wyżej postaci i wskazał na możliwość zastosowania do następujących zagadnień: odbicia-załamania płaskiej stacjonarnej fali uderzeniowej oraz oddziaływania przy przecięciu frontów dwóch płaskich fal uderzeniowych o tych samych intensywnościach. Choć nie wynika to z tytułu pracy, rozważania ograniczają się do materiału harmonicznego (jest

to jedyny materiał w którym fala płaska w dowolnym kierunku może być rozłożona na trzy fale spolaryzowane; podłużną, i dwie poprzeczne (John, 1960, 1966)). W pracy dyskutowane są głównie możliwe typy rozwiązań układu równań ruchu oraz możliwości zastosowań. Druga praca Duvaut'a (1968) zawiera rozwiązanie zagadnienia odbicia stacjonarnej fali uderzeniowej od brzegu utwierdzonego w materiale harmonicznym. Konfigurację falową dla rozwiązania przyjęto w postaci podobnej jak w przypadku odbicia fali typu P w liniowej teorii, tworzą ją wyłącznie centryczne płaskie fale uderzeniowe: padająca podłużna i dwie odbite, z powodu nieliniowości materiału są to fale; quasipodłużna i quasipoprzeczna.

Konfiguracja taka została wykorzystana później przez Reida (1972) dla rozwiązania podobnego zagadnienia w materiale hipersprężystym ze stałymi sprężystości trzeciego rzędu, przy występowaniu małych odkształceń. Reid rozpatrywał zagadnienie odbicia płaskiej stacjonarnej podłużnej fali uderzeniowej padającej ukośnie od brzegu półprzestrzeni z mieszanymi warunkami brzegowymi. Zdaniem Reida istniały szczególnie powody dla ograniczenia się do jednego tylko typu warunków brzegowych: w rozwiązaniu występują jedynie stateczne fale uderzeniowe (bez fal prostych) i niewielka modyfikacja jednowymiarowej teorii fal uderzeniowych wystarcza do rozwiązania zagadnienia, ponadto takie warunki brzegowe z teorii sprężystości, korespondują z warunkami odbicia fali uderzeniowej od sztywnego brzegu w nielepkim gazie. Stąd łatwość dokonania porównań. W końcu oddziaływanie dwóch płaskich fal uderzeniowych o takich samych intensywnościach można sprowadzić do zagadnienia odbicia od brzegu z mieszanymi warunkami brzegowymi. Dwa główne rezultaty pracy wymienione przez Reida sprowadzają się do: określenia maksymalnego kąta padania powyżej którego opisana konfiguracja nie może istnieć i następuje przejście do odbicia nieregularnego (daje to powód do dyskusji głównie w oparciu o rozwiązania z gazodynamiki (v. Neumann, 1963)) oraz pokazania po raz pierwszy istotnego wpływu nieliniowości na parametry odbitej fali uderzeniowej kąta odbicia i jej intensywności. Reid nie przeprowadził jednak analizy numerycznej dającej lepsze możliwości dla porównań, ani nie wprowadził do rozwiązań fal prostych.

Istotny postęp w badaniu zagadnienia odbicia związany jest z dwoma pracami Wrighta (1971 a,b). Rozważania dotyczą dowolnego materiału hipersprężystego (ściśliwego lub nieściśliwego). Wright w swoich rozważaniach ogranicza się również do ściśle mechanicznej izentropowej teorii i prezentuje metodę półodwrotną dla znalezienia fal odbitych (odbitych i załamanych). Parametry fali padającej: intensywność oraz kąt padania są znane *a priori*. Kąt padania nie może przekraczać pewnej wartości krytycznej  $\Theta_c$  zależnej od związków konstytutywnych oraz intensywności fali. Rozwiązanie zakłada się w postaci ciągu płaskich centrycznych fal prostych oraz obszarów stałego stanu (dla prędkości cząstek ośrodka i gradientu deformacji). Aby przywrócić stan równowagi dynamicznej ośrodka po odbiciu fali, obszar stałego stanu przy brzegu, (zgodny z warunkami brzegowymi) należy przy pomocy ciągu fal tworzącego rozwiązanie, połączyć z obszarem stałego stanu za frontem fali padającej. W przypadku ogólnym przy odbiciu, gdy układ równań jest ściśle hiperboliczny w materiale ściśliwym (nieściśliwym) występują trzy (dwie) rodziny takich fal i zagadnienie odbicia sprowadza się do zagadnienia początkowo-brzegowego dla układu równań różniczkowych opisujących zmiany pola prędkości i gradientu deformacji w obszarze fali prostej. Liczba parametrów falowych powinna być zgodna z liczbą warunków brzegowych. Szczegóły metody przedstawione są w podrozdziale 2.2.

Wright wykorzystując własności powierzchni falowych przedstawił także interpretację geometryczną dla położenia frontów poszczególnych fal po odbiciu. Po raz



pierwszy szczegółowo przedyskutował zagadnienie *kąta krytycznego*; dla odbitych fal prostych i uderzeniowych są to różne wartości. W pracy przedyskutowano ponadto możliwe typy deformacji w materiale ściśliwym i nieściśliwym które przy przyjętej postaci rozwiązania zapewniają zgodność liczby parametrów (opisujących fale odbite w konfiguracji) z liczbą nietrywialnych warunków brzegowych. Zostały także przedstawione dwa przykłady: odbicie w neoHookeanie Rivlina oraz w cieczy sprężystej. W zakończeniu pracy Wright przedstawił propozycje zagadnień które mogą być przy pomocy jego formalizmu jeszcze rozwiązane m. in. zagadnienie odbicia-transmisji w kierunku normalnym. Z sugestii Wrighta autor w pełni skorzystał (por. rozdz.4 oraz podrozdz. 6.6). Yongchi i Ting (1984), korzystając w dużej mierze z formalizmu Wrighta uzyskali rozwiązanie zagadnienia odbicia płaskiej stacjonarnej fali uderzeniowej wywołującej płaski stan odkształcenia, dla szczególnej klasy materiałów, gdy potencjał sprężysty  $W(p,q)$  wyrażony przez dwa specjalnie zdefiniowane niezmienniki  $p, q$  przedstawia w przestrzeni  $\{W,p,q\}$  powierzchnie rozwijalną. W kolejnej pracy (Zhijing, Ting, Yongchi, 1989) dyskutowali przydatność płaskiego i antypłaskiego stanu odkształcenia w zagadnieniu odbicia przy propagacji płaskich dwuwymiarowych fal uderzeniowych i prostych. W literaturze wymienionej w pracy cytowane są dwie pierwsze prace zespołowe z udziałem autora dotyczące tego zagadnienia (Duszczyk, Kosiński, Wesołowski, 1984,1985).

Samodzielne i wspólne prace autora związane z omawianym tematem dotyczą odbicia ukośnego oraz w kierunku normalnym w materiale Murnaghana i uogólnionym materiale Mooneya (Ishihara, Hashitsume, Tatibana, 1952), (Zahorski, 1959, 1962). Rozwiązania otrzymano przy zastosowaniu półodwrotnej metody Wrighta. Dla uzyskania rozwiązań tak dobrano warunki, aby w materiale ściśliwym panował płaski, a w materiale nieściśliwym antypłaski stan odkształcenia. Końcowe wartości parametrów dla każdej jednoparametrowej fali tworzącej rozwiązanie mogą być wtedy wyznaczone z warunków brzegowych. Uzyskane rezultaty są omówione szczegółowo w rozdziałach 3-6.

Drugim prezentowanym w pracy tematem jest zagadnienie ewolucji amplitudy płaskiej fali uderzeniowej. W rozdziałach 7, 8 rozwiązano dwa przypadki. Z opisu jaki daje liniowa teoria wynika, że amplituda takiej fali pozostaje niezmienniona (Thomas, 1961). Równanie amplitudy dla płaskiej fali uderzeniowej w przypadku jednowymiarowym i przy propagacji fali w materiale sprężystym nie przewodzącym ciepła, zostało podane w postaci ogólnej przez Chena (1971). W pracy tej przedyskutowane zostały jednak jedynie ogólne własności rozwiązania.

Dokładne wyprowadzenie równania transportu dla amplitudy fali uderzeniowej nie jest możliwe. Przy propagacji nieliniowych fal uderzeniowych, zawsze występują sprzężenia z towarzyszącymi im nieciągłościami wyższych rzędów. Jest to sytuacja zupełnie inna niż w przypadku fal przyspieszenia, dla których zawsze można otrzymać niesprężone równanie ewolucji typu Bernoulliego (Jeffrey, 1982). Bailey i Chen (1985) rozwiązyali sprzężony układ równań dla amplitud nieciągłości różnych rzędów w przypadku jednowymiarowym rozwijając podstawowe wielkości opisujące zagadnienie w szeregi potęgowe małego parametru (intensywności fali). Przy ograniczeniu rozwinięcia do członów liniowych a potem kwadratowych uzyskali dwusopniową aproksymację. Scott i Fu (1989) do rozwiązania sprzężonego układu równań dla amplitud nieciągłości zastosowali dwie metody: teorię powierzchni osobliwych wraz z metodą perturbacyjną (przyjmując wartość początkowej amplitudy fali uderzeniowej jako parametr perturbacyjny) oraz skonstruowali rozwiązanie przy wykorzystaniu rozwiązania w postaci fali prostej do którego została "dopasowana" fala uderzeniowa (shock fitting method, por. (Whitham, 1974)) W obu metodach

wynik jest ten sam. Ostatnia metoda z pewną modyfikacją, polegającą na użyciu modulowanych fal prostych (Fu, Scott, 1994) została wykorzystana do uzyskania rozwiązania zagadnienia ewolucji amplitudy fali uderzeniowej w cienkim pręcie o wolno zmieniającym się przekroju. Zgodnie z założeniami zawartymi w pracy zagadnienie takie pozostaje jednowymiarowe.

W rozdziale 7 autor uzyskał analogiczne rozwiązanie dla tego zagadnienia, posługując się wyłącznie teorią powierzchni osobliwych i metodą perturbacyjną. W tym przypadku wyniki analityczne z obu metod różnią się. Analiza numeryczna została przeprowadzona dla materiału Murnaghana, oraz wyników analitycznych z obu metod, w przypadku zwiększającego się i zmniejszającego się przekroju i przy różnych czasach propagacji impulsu wejściowego na końcu pręta. Uzyskano dobrą zgodność wyników w pobliżu brzegu. W przypadku przekroju bardzo wolno (wolno) malejącego amplituda maleje po czym stabilizuje się (wzrasta kilkadziesiąt %, po czym również się stabilizuje). W przypadku przekroju wolno zwiększającego się następuje lawinowy spadek amplitudy. Wnioski z obliczeń numerycznych dotyczą obu wyników analitycznych.

W rozdziale ósmym przedstawiono najważniejsze różnice jakościowe związane z rozwiązaniami zagadnienia ewolucji amplitudy podłużnej fali uderzeniowej w cienkiej warstwie, uzyskanymi przy pomocy dwóch metod: uśrednionej jednowymiarowej teorii, dla trójwymiarowej warstwy ((Wright, 1981), (Coleman, Newman, 1988, 1990)) oraz najprostszej jednowymiarowej teorii propagacji fal w pręcie i warstwie (Fu, Scott, 1989). Główny układ równań opisujący zagadnienie wynika z prostej modyfikacji metody uśredniania zaproponowanej przez Wrighta (1981), dla analizy propagacji fal liniowych i nieliniowych w pręcie o przekroju kołowym. Aby włączyć efekty związane z propagacją fal uderzeniowych w warstwie (por. (Kosiński, 1996)), razem z metodą uśredniania (sprowadzającą zagadnienie do jednowymiarowego z wewnętrznym skalarnym parametrem; opisującym grubość warstwy) zastosowano teorię powierzchni osobliwych.

Najprostsze rozwiązanie zagadnienia uzyskane metodą perturbacyjną sprowadza się do niesprężonego z ruchem poprzecznym układu równań dla funkcji związanych jedynie z ruchem podłużnym, który jest identyczny jak w przypadku jednowymiarowym bez wewnętrznego parametru (Fu, Scott, 1989). Wpływ ruchu poprzecznego przy propagacji podłużnych fal uderzeniowych daje jednak dodatkowe efekty. W zależności od warunków brzegowych, podłużna fala uderzeniowa związana z głównym ruchem w warstwie może propagować się z następującymi nieciągłościami związanymi z ruchem poprzecznym: *a)* z nieciągłością trzeciego rzędu, *b)* z nieciągłością trzeciego rzędu i poprzeczną falą uderzeniową o stałej intensywności.

## RÓWNANIA PODSTAWOWE

## 2.1. Podstawowe równania ruchu kontinuum i warunki propagacji fal

Opis ruchu kontinuum przedstawiony jest przez funkcje  $x_i = x_i(X_\alpha, t)$ , gdzie  $(x_1, x_2, x_3)$  i  $(X_1, X_2, X_3)$  są współrzędnymi cząstki materiału odpowiednio; przestrzennymi w konfiguracji aktualnej B oraz materialnymi w konfiguracji odniesienia  $B_R$ . Dla oznaczenia gradientu deformacji, jego odwrotności oraz prędkości cząstek kontinuum używamy tradycyjnego zapisu:  $F_{i\alpha} = x_{i\alpha}$ ,  $X_\alpha$ ,  $\dot{x}_i = u_i$  (por. (Truesdell, Noll, 1965)).

Dla jednorodnego izotropowego materiału sprężystego funkcję  $\sigma$  opisującą energię sprężystą odniesioną do jednostki masy w  $B_R$  można przedstawić jako funkcję trzech niezmienników lewego tensora odkształcenia Cauchy-Greena  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ :

$$(2.1) \quad \sigma = \sigma(I_1, I_2, I_3) = \sigma(x_{i\alpha}).$$

Dla materiałów nieściśliwych gdy  $\rho = \rho_R$ , ( $\rho$ ,  $\rho_R$  są gęstościami odpowiednio w konfiguracjach B i  $B_R$ ) zachodzi następująca zależność dla funkcji  $\sigma$  oraz tożsamość (równanie więzów)

$$(2.2) \quad \sigma = \sigma(I_1, I_2) = \sigma(x_{i\alpha}), \quad J = \det(x_{i\alpha}) = 1.$$

Składowe tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa dla jednorodnych materiałów hipersprężystych; ściśliwego i nieściśliwego wynoszą odpowiednio:

$$(2.3) \quad T_{Ri\alpha} = \rho_R \frac{\partial \sigma}{\partial x_{i\alpha}} = \rho_R \sigma_L \frac{\partial I_L}{\partial x_{i\alpha}}, \quad L = 1, 2, 3,$$

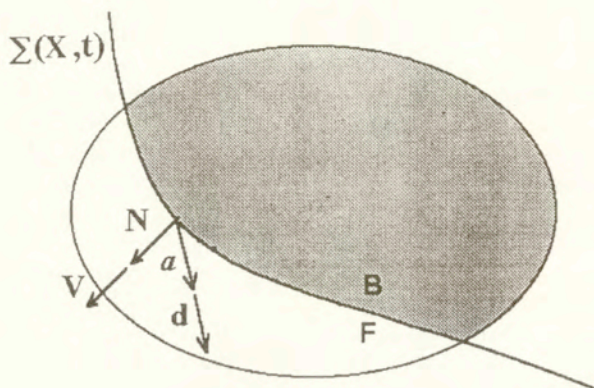
$$T_{R\alpha\alpha} = \rho_R \frac{\partial \sigma}{\partial x_{i\alpha}} + p X_\alpha = \rho_R \sigma_M \frac{\partial I_M}{\partial x_{i\alpha}} + p X_\alpha, \quad M = 1, 2,$$

gdzie  $\sigma_L = \frac{\partial \sigma}{\partial I_L}$ , a  $p = p(X_\alpha)$  jest dowolną funkcją skalarną (ciśnieniem hydrostatycznym), ogólny zapis wyrażen (2.3) dla dowolnej postaci gradientu deformacji  $x_{i\alpha}$  można znaleźć w pracy (Wesołowski, 1974, str.37).

Gdy pola prędkości i naprężeń są różniczkowalne wówczas z zasady zachowania pędu wynikają równania ruchu ośrodka.

$$(2.4) \quad T_{Ri\alpha,a} = \rho_R \dot{u}_i .$$

Jeżeli natomiast funkcje opisujące ruch  $x_i(X_\alpha, t)$  i ich pierwsze pochodne  $x_{i\alpha} = F_{i\alpha}$  (gradient deformacji) są ciągłe w całym obszarze, lecz mają *nieciągłą pierwszą pochodną* na pewnej propagującej się w kontinuum powierzchni  $\Sigma(X, t)$  (powierzchnia taka nazywana jest *falą uderzeniową*), wówczas równania (2.4) muszą być zastąpione skokowymi warunkami zgodności na tej powierzchni (Truesdell, Noll, 1965)



Rys. 2.1. Ruchoma powierzchnia nieciągłości w kontinuum

$$(2.5) \quad [T_{Ri\alpha}]N_\alpha = -\rho_R V [u_i], \quad [x_{i\alpha}] = a_i N_\alpha, \quad [u_i] = -a_i V ,$$

gdzie  $a_i = a d_i$ ,  $a = \sqrt{a_i a_i} > 0$ ,  $a_i$  jest wektorem skoku amplitudy,  $a$  oznacza natomiast intensywność fali, przez  $N_\alpha$  oznaczono jednostkowy wektor normalny do frontu fali w  $B_R$ ,  $V$  jest prędkością propagacji fali uderzeniowej w kierunku normalnym  $N_\alpha$ , a  $d_i$  jest jednostkowym wektorem polaryzacji  $|d| = 1$ . Jeżeli wartości pewnej funkcji  $(\cdot)$  po obu stronach powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X, t)$  (uważanej za front fali uderzeniowej), zostaną oznaczone indeksami F (przed frontem) i B (za frontem), wówczas skok funkcji  $(\cdot)$  definiuje się jako:

$$(2.6) \quad [\cdot] = (\cdot)^B - (\cdot)^F .$$

Dla istnienia *statecznej* fali uderzeniowej musi być spełnione kryterium związane ze skokiem entropii  $[\eta]$  na  $\Sigma(X, t)$  tzn.  $[\eta] > 0$  lub równoważnie ((Lax, 1957), (Bland, 1969)) prędkość propagacji fali uderzeniowej  $V$  powinna być większa od prędkości fali akustycznej propagującej się w tym samym kierunku przed jej frontem  $\Sigma(X, t)$  oraz mniejsza od prędkości fali akustycznej w tym samym kierunku za jej frontem

$$(2.7) \quad U^F \leq V \leq U^B.$$

Eliminując skoki prędkości z równań (2.5) otrzymujemy wyrażenie dla prędkości propagacji fali uderzeniowej

$$(2.8) \quad [T_{R\alpha}] N_\alpha H_i = \rho_R V^2 [x_{j\beta}] N_\beta H_j.$$

Fala prosta (Varley, 1965) charakteryzuje się tym, że wszystkie opisujące ją wielkości są funkcjami jednego tylko parametru  $\gamma = G(X_\alpha, t)$  np.  $x_{i\alpha} = x_{i\alpha}(\gamma)$ ,  $u_i = u_i(\gamma)$  (funkcja  $G(X_\alpha, t)$  jest nazywana niekiedy funkcją fazową). Oznacza to, że w obszarze fali prostej, wszystkie wielkości opisujące pola fizyczne mogą być wyrażone również jako funkcje jednej z nich np.  $x_{i\alpha} = x_{i\alpha}(u_j)$ . Wynika stąd, że gdy jedna z wielkości opisujących pole fizyczne jest w pewnym obszarze stała, pozostałe wielkości też muszą być w tym obszarze stałe. Powierzchnie  $\Gamma(X_\alpha, t)$  na których parametr  $\gamma$  jest stały  $\gamma = G(X_\alpha, t) = \text{const}$ , są propagującymi się powierzchniami (w tej pracy płaszczyznami, (wavelets)) (2.9)<sub>1</sub>, o jednostkowej normalnej i prędkości propagacji w jej kierunku opisanymi w  $B_R$  przez wyrażenia (2.9)

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Gamma(\gamma) &= N_\alpha(\gamma) X_\alpha - U(\gamma)t = \text{const}, \\ N_\alpha &= \frac{G, \alpha}{|\nabla G|}, \quad U(\gamma) = \frac{\dot{G}}{|\nabla G|}. \end{aligned}$$

Uwzględniając w równaniach ruchu (2.4) tzw. warunki zgodności (równość pochodnych mieszanych, wynikająca z tw. Schwarz'a) tj.  $u_{j\alpha} = \dot{x}_{j\alpha}$  oraz zakładając, że funkcja fazowa  $G(X_\alpha, t)$  jest różniczkowalna, rzeczywista, a w obszarze fali prostej, zachodzi warunek  $\dot{G} \neq 0$ , otrzymuje się wyrażenia z których wynikają warunki propagacji dla fal prostych w materiale ściśliwym i nieściśliwym.

$$(2.10) \quad \frac{\partial T_{i\alpha}}{\partial x_{j\beta}} x'_{j\beta} G_{,\alpha} = \rho_R u'_i \dot{G}, \quad x_{j,\beta} = x'_{j\beta} \dot{G} = u'_j G_{,\beta}, \quad (' = \frac{\partial}{\partial \gamma})$$

W rozdziałach 2-6 prim oznacza różniczkowanie względem parametru  $\gamma$  fali prostej. Wykorzystując powyższe równania oraz (2.9) otrzymamy dla materiału ściśliwego

$$(2.11) \quad \begin{aligned} (Q_{ij} - \rho_R U^2 \delta_{ij}) u'_j &= 0, \\ U F'_{j\beta} + u'_j N_\beta &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $Q_{ij} = \rho_R \sigma_{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta$  oznaczają składowe tensora akustycznego, a  $\sigma_{\alpha\beta}$  składowe tensora funkcji materiałowych  $\sigma_{\alpha\beta}$ , dla materiału hipersprężystego składowe  $\sigma_{\alpha\beta}$  można zapisać w postaci (por (Wesołowski, 1974))

$$(2.12) \quad \sigma_{i\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_{i\alpha} \partial x_{j\beta}} = \sigma_{LM} \frac{\partial I_L}{\partial x_{i\alpha}} \frac{\partial I_M}{\partial x_{j\beta}} + \sigma_L \frac{\partial^2 I_L}{\partial x_{i\alpha} \partial x_{j\beta}}, \quad L, M = 1, 2, 3.$$

Aby istniały niezerowe rozwiązania  $u'_j$  dla układu równań (2.11)<sub>1</sub> musi znikać wyznacznik główny tego układu

$$(2.13) \quad u'_j \neq 0 \Rightarrow \det(Q_{ij} - \rho_R U^2 \delta_{ij}) = 0, \quad u'_j = k r_j.$$

Rozwiązania  $u'_j$  są proporcjonalne do składowych prawego wektora własnego tensora akustycznego, jeżeli dodatkowo wybierze się wartość stałej  $k=U$  oba równania różniczkowe opisujące zmiany składowych gradientu deformacji i prędkości cząstek w obszarze fali prostej upraszczają się do postaci

$$(2.14) \quad u'_i = U f(x_{i\alpha}) r_j, \quad x'_{j\beta} = -f(x_{i\alpha}) r_j N_\beta.$$

Prawy wektor własny tensora akustycznego jest określony z dokładnością do dowolnej skalarnej funkcji gradientu deformacji  $f(x_{i\alpha})$ .

Równania (2.14) można rozwiązać po dodaniu warunków początkowych

$$(2.15) \quad \gamma = 0 \quad x_{j\beta} = x_{j\beta}(0), \quad u_j = u_j(0).$$

Dla materiału nieściśliwego tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa ma inną budowę (por.(2.3)<sub>2</sub>). Związki (2.10)<sub>1</sub> po podstawieniu (2.3)<sub>2</sub> oraz uwzględnieniu tożsamości  $X_{i,\alpha}^\alpha = 0$  (por. (Wesołowski, 1974, str. 38) mają też inną postać

$$(2.16) \quad (Q_{ij} - \rho_R U^2 \delta_{ij}) u'_j - p_{,\alpha} \frac{X_i^\alpha U}{|\nabla G|} = 0.$$

W obszarze fali prostej zachodzi związek  $p_{,\alpha} = p' |\nabla G| N_\alpha$  i wyrażenie (2.16) sprowadza się do postaci

$$(2.17) \quad (Q_{ij} - \rho_R U^2 \delta_{ij}) u'_j - p' U X_i^\alpha N_\alpha = 0.$$

Z warunku nieściśliwości materiału (2.2)<sub>2</sub>, wynika tożsamość  $J_{,\beta} = X_i^\alpha x'_\alpha{}^i G_{,\beta} = 0$ . Zachodzi także związek między prędkościami i normalnymi do frontu fali w obu konfiguracjach: B i B<sub>R</sub> (por. (Wesołowski, 1974), str. 111)

$$(2.18) \quad U n_i = u N_\alpha X_i^\alpha,$$

gdzie  $n_i$  jest jednostkową normalną, a  $u$  prędkością propagacji fali prostej w kierunku normalnym w konfiguracji B.

Skalar  $p'$  można z równań wyeliminować otrzymując (por. (Duszczyk, Kosiński, Wesołowski, 1985, str.34))

$$(2.19) \quad Q_{ij} u'_j n_i - \rho_R U^2 u'_i n_i - p' u^{-1} U^2 = 0,$$

$$(2.20) \quad p'(\gamma) = U^{-1} \frac{Q_{ik} n_i u'_k}{X_{\alpha} n_i N_{\alpha}} = u U^{-2} Q_{ij} u'_j n_i.$$

Z obu powyższych równań wynika warunek propagacji fali prostej o postaci (por. (Wesołowski, 1974, str.120))

$$(2.21) \quad (Q_{ij}^* - \rho_R U^2 \delta_{ij}) u'_j = 0,$$

gdzie tensor  $Q^*$  o składowych  $Q_{ij}^* = \frac{\partial T_{Ri\alpha}}{\partial x_{j\beta}} N_{\alpha} N_{\beta} = Q_{ij} - Q_{ij} n_k n_k$ , nazywany jest zredukowanym tensorem akustycznym.

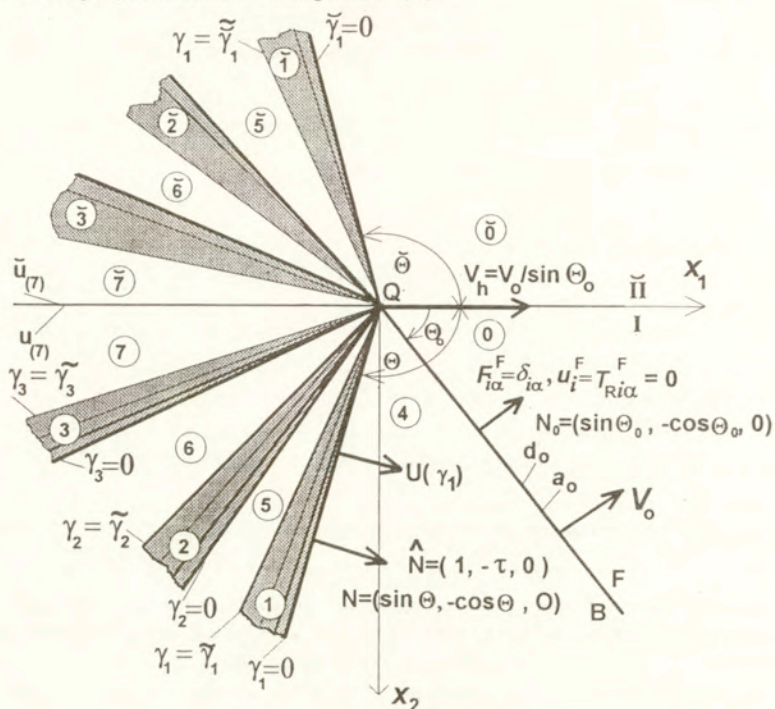
## 2.2. Półodwrotna metoda Wrighta

Rysunek 2.2 przedstawia typową konfigurację falową związaną z zagadnieniem odbicia-załamania płaskiej fali uderzeniowej o skończonej amplitudzie, zgodną z wymienioną w tytule metodą. Symbol ( $\bar{\cdot}$ ) służy do oznaczania wielkości oraz równań w półprzestrzeni  $X_2 < 0$ . W ściśle mechanicznej, półodwrotnej metodzie (Wright, 1971a, 1971b) zakłada się, że dla padającej fali uderzeniowej kąt padania  $\Theta_0$  (nie przekraczający pewnej krytycznej wartości  $\Theta_c$ , (por. (3.67)) oraz jej intensywność  $a_0$  mają stałe, znane *a priori* wartości. Obszary  $0, \bar{0}$  przed frontem fali padającej są obszarami stałego stanu (gradientu deformacji i prędkości cząstek ośrodka). Między nimi, na granicy  $X_2 = 0$  spełnione są warunki ciągłości dla wektora naprężeń i dla prędkości cząstek. Przyjmuje się, że obszary  $0, \bar{0}$  są nieodkształcone (lub poddane jednorodnej deformacji wstępnej) i pozostają w spoczynku. Obszar stałego stanu 4 za frontem fali padającej, jest określony przez jej parametry (por. (3.7)). Fala uderzeniowa padając na brzeg obszarów I,  $\bar{I}$  powoduje zakłócenie stanu równowagi dynamicznej ośrodków, warunki brzegowe na granicy  $X_2 = 0$  między obszarami 7,  $\bar{7}$  nie są spełnione. Staje się to przyczyną powstawania nowych fal odbitych i załamanych, które wraz z falą padającą powinny przywrócić stan równowagi dynamicznej.

Zakłada się, że w przypadku odbicia w półprzestrzeni  $X_2 \geq 0$ , (półprzestrzeń materialna  $X_2 \leq 0$  wtedy nie istnieje) obszary stałego stanu 4 za frontem fali padającej oraz 7 (zgodny z warunkami na brzegu  $X_2 = 0$ ) połączone są ze sobą przy pomocy ciągu jednoparametrowych  $(\gamma_i)$   $i=1, 2, 3$  centrycznych odbitych fal prostych 1, 2, 3 oraz ciągu obszarów stałego stanu 5, 6, 7. Na ruchomej krawędzi płaszczyzny brzegu i płaszczyzny frontu fali padającej w punkcie Q zachodzi zbieżność frontów ciągu fal prostych.

W przypadku ogólnym, gdy układ równań ruchu (2.11)<sub>1</sub> jest ściśle hiperboliczny w obszarze  $X_2 \geq 0$  występują trzy rodziny takich fal, a zagadnienie odbicia sprowadza się do zagadnienia początkowo-brzegowego dla układu równań różniczkowych opisujących zmiany składowych gradientu deformacji oraz pola prędkości w obszarze

fali prostej (2.14). Ich rozwiązania określają "wachlarzykowate" obszary i inne parametry fali prostej. Analogicznie rozwiązuje się zagadnienie dla przypadku odbicia-załamania. Przy ścisłej hiperboliczności układu równan ruchu w obszarze materialnym  $\bar{\Pi}$ , możliwe są również trzy załamane jednoparametrowe fale proste  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ , połączone obszarami stałego stanu  $\bar{5}, \bar{6}, \bar{7}$ .



Rys.2.2. Padająca płaska fala uderzeniowa i konfiguracja odbitych i załamanych fal prostych

Wartości końcowe  $\bar{\gamma}_i, \bar{\tilde{\gamma}}_i$ ,  $i=1,2,3$  dla sześciu parametrów  $(\gamma_i, \bar{\gamma}_i, i=1,2,3)$  charakteryzujących fale proste powinny być tak dobrane, aby można było spełnić sześć warunków ciągłości dla składowych wektorów naprężenia i prędkości cząstek na granicy  $X_2 = 0$  między obszarami  $\bar{7}, \bar{7}$ . Sytuacja taka możliwa jest tylko w wybranych przypadkach, dla szczególnych związków konstytutywnych, deformacji oraz warunków brzegowych.

Rozpatrzmy zagadnienie odbicia. Załóżmy, że płaska fala uderzeniowa o normalnej  $N_0 = (\sin \Theta_0, -\cos \Theta_0, 0)$  oraz intensywności  $a_0$  propagująca się z prędkością  $V_0(a_0)$ , pada na płaszczyznę brzegu pod kątem  $\Theta_0$  (por. rys.2.2). Punkt  $Q$  porusza się wzdłuż brzegu z prędkością  $V_h = V_0 / \sin \Theta_0$ , wobec tego prędkości



normalne w obszarze fal prostych wynoszą  $U(\gamma_i) = V_h \sin \Theta(\gamma_i)$ . Zakładamy początkowo, że istnieją trzy odbite fale proste przedzielone obszarami stałego stanu.

Normalne do elementarnych frontów falowych (wavelets) w fali prostej wynoszą,  $\mathbf{N} = (\sin \Theta(\gamma), -\cos \Theta(\gamma), 0)$ , przy wyborze  $\Gamma(\gamma) = 0$  (por.(2.9)<sub>1</sub>) równanie opisujące płaszczyznę frontów falowych ma postać:

$$(2.22) \quad X_1 \sin \Theta(\gamma) - X_2 \cos \Theta(\gamma) = V_h t \sin \Theta(\gamma).$$

Wprowadzając oznaczenie  $\tau = \cot \Theta(\gamma)$ , jednostkową normalną i równanie frontów (2.22) można zapisać w postaci:

$$(2.23) \quad \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{N} / \sin \Theta(\gamma) = (1, -\tau, 0), \quad X_1 - X_2 \tau = V_h t.$$

Warunki propagacji i zgodności (2.11)) przybiorą postać:

$$(2.24) \quad (\hat{Q}_{ij} - \rho_R V_h^2 \delta_{ij}) u'_j = 0, \quad V_h F'_{i\alpha} + u'_i N_\alpha = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

gdzie  $\hat{Q}_{ij} = \rho_R \sigma_{i\alpha j\beta} \hat{N}_\alpha \hat{N}_\beta$ , a prędkość  $V_h$  jest niezależna od kąta  $\Theta(\gamma)$ .

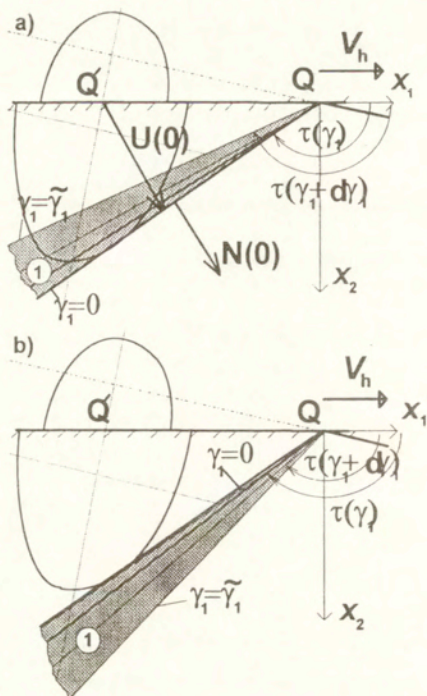
Zgodnie z (2.24)<sub>1</sub> w każdym punkcie obszaru fali prostej muszą być spełnione następujące warunki

$$(2.25) \quad \pi(\tau) = \det(\hat{Q}_{ij} - \rho_R V_h^2 \delta_{ij}) = 0, \quad u'_i = k r_i,$$

gdzie  $\pi(\tau)$  jest wielomianem szóstego stopnia względem  $\tau$ ,  $\mathbf{r}$  jest prawym wektorem własnym tensora akustycznego  $\mathbf{Q}(\tau) = \hat{\mathbf{Q}}(\tau) \sin^2 \Theta(\gamma)$  związanym z ustaloną wartością pierwiastka  $\tau$  (obliczoną zgodnie z (2.23)), a  $k$  jest skalarną funkcją gradientu deformacji (por.(2.14)). Dla wygody zakłada się zwykle, że  $\mathbf{r}$  jest wektorem jednostkowym. Dla odpowiedniej wartości własnej tensora akustycznego  $\mathbf{Q}$  równej  $\rho_R V_h^2 / (1 + \tau^2)$ , prędkość normalna dla fali prostej wyraża się wzorem  $U(\gamma_i) = V_h / \sqrt{1 + \tau^2}$ , wobec czego gdy  $\tau$  oraz  $\mathbf{r}$  związane są z określoną odbitą falą prostą, w jej obszarze muszą być spełnione równania (por. (2.24)<sub>2</sub>):

$$(2.26) \quad \mathbf{u}' = k \mathbf{r}, \quad \mathbf{F}' = -V_h^{-1} k \mathbf{r} \otimes \hat{\mathbf{N}}.$$

Każda z fal prostych określona jest przez jednoparametrowy zbiór funkcji, a układ równań różniczkowych zwyczajnych (2.26) opisuje jego zmiany. Wartości początkowe dla równań (2.26) i pierwszego frontu odbitej fali prostej  $\gamma_1 = 0$ , wynikają z obszaru stałego stanu 4 przed jej frontem. Obszar stałego stanu 5 za frontem pierwszej odbitej fali prostej jest określony przez wartości związane są z końcowym frontem pierwszej fali prostej  $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$ .



Rys.2.3. a) Odbita fala prosta:  $\tau(\gamma_1 + d\gamma) < \tau(\gamma)$ ,  
 b) Odbita fala uderzeniowa:  $\tau(\gamma_1 + d\gamma) > \tau(\gamma)$

Szczegółową dyskusję i interpretację geometryczną dla pierwiastków wielomianu  $\pi(\tau)$  (por. (2.25)) można znaleźć w pracy (Wright, 1971a). Tutaj należy jedynie zauważyć, że dla propagacji fali prostej funkcja  $\tau = \cot \Theta(\gamma)$  musi być rzeczywistą malejącą funkcją parametru  $\gamma$  dla  $\gamma \in [0, \tilde{\gamma}]$  i  $\tilde{\gamma} > 0$ . Oznacza to, że z rosnącymi wartościami  $\gamma$  "wachlarzyk" fali prostej rozwija się. Jeżeli  $\tau(\gamma)$  jest w tym obszarze funkcją rosnącą założone rozwiązanie w postaci odbitej fali prostej należy zmodyfikować włączając fale uderzeniowe i badając ich stateczność (Lax, 1957)

## ODBICIE-ZAŁAMANIE UKOŚNEJ FALI UDERZENIOWEJ W MATERIALE NIEŚCISLIWYM

### 3.1. Wstęp

Założona nieściśliwość materiału ogranicza możliwości propagacji fal, jedynie do fal poprzecznych. W przypadku ogólnym dla płaskiej fali uderzeniowej propagującej się w obszarze materialnym  $X_2 \geq 0$  i padającej na brzeg  $X_2=0$  (lub płaszczyznę rozdzielającą dwa sztywno połączone materiały), nie można spełnić warunków brzegowych (ciągłości). Rozwiązanie założone w postaci odbitych-załamanych fal prostych może nie istnieć. Dla materiałów nieściśliwych istnieją dwie jednoparametrowe rodziny fal prostych w każdym z dwóch materiałów: I oraz  $\bar{I}$  oznacza to, że do wyznaczenia są cztery wartości końcowe dla parametrów opisujących poszczególne fale. Do dyspozycji są jednak trzy warunki brzegowe lub sześć warunków ciągłości. Rozwiązania mogą jednak istnieć dla pewnych wybranych materiałów nieściśliwych, szczególnych deformacji i warunków brzegowych. W rozdziale tym poszukiwane są takie właśnie przypadki szczególnie.

### 3.2. Fala padająca, jej parametry i możliwe konfiguracje fal odbitych

Zakłada się, że płaska fala uderzeniowa propaguje się w półprzestrzeni sprężystej  $X_2 > 0$ . Kąt padania i intensywność fali wynoszą  $\Theta_0 \in (0, \Theta_C)$  i  $a_0$ , a jej front jest jednoparametrową rodziną równoległych powierzchni z normalną  $\mathbf{N}_0$

$$(3.1) \quad \mathbf{N}_0 = (\sin \Theta_0, -\cos \Theta_0, 0), \quad \mathbf{d}_0 = (0, 0, 1).$$

Przyjmuje się ponadto, że kierunek polaryzacji dany przez jednostkowy wektor  $\mathbf{d}_0$ , jest równoległy do osi  $X_3$ . Krawędź frontu fali i płaszczyzny brzegu (punkt Q na rys. 3.1) porusza się wzdłuż brzegu ze stałą prędkością  $V_b = V_0 / \sin \Theta_0$  gdzie  $V_0$  jest prędkością fali padającej. Zakłada się, że powstaje jedna odbita i jedna załamana fala prosta. (zakreskowane obszary 2,  $\bar{2}$ ). Symbol  $(\tilde{\cdot})$  jak poprzednio służy do oznaczania wielkości oraz równań w półprzestrzeni  $X_2 < 0$ . Materiał w obszarach 0 i  $\bar{0}$  przed frontem fali padającej jest nieodkształcony i pozostaje w spoczynku

$$(3.2) \quad F_{i\alpha}^F = \delta_{i\alpha} \quad \dot{u}_i^F = T_{i\alpha} = 0.$$

Obszary I i 3 są obszarami stałego stanu. Fronty wszystkich fal konfiguracji zbiegają się w punkcie Q, wynikają stąd zależności (por. rozdz 2) dla obszaru fali odbitej:

$$(3.3) \quad \mathbf{N}(\gamma) = (\sin\Theta(\gamma), -\cos\Theta(\gamma), 0), \quad U(\gamma) = V_h \sin\Theta(\gamma) = \frac{V_0}{\sin\Theta_0} \sin\Theta(\gamma).$$

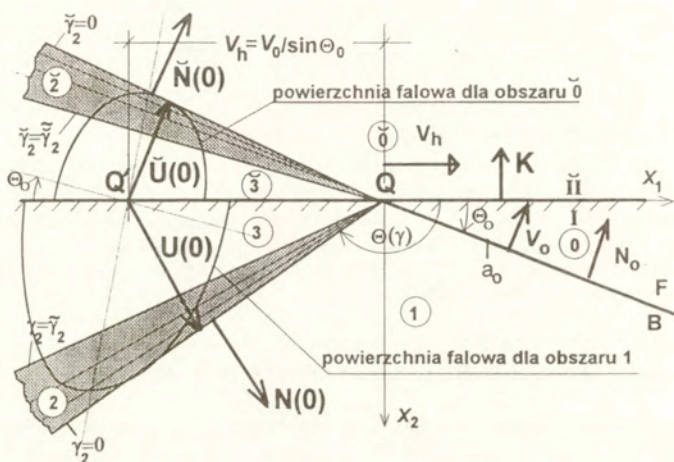
Stosując równania (2.21) i (2.24) dla materiału nieściśliwego otrzymuje się w rozpatrywanym przypadku równania:

$$(3.4) \quad (\hat{Q}_{ij}^* - \rho_R V_h^2 \delta_{ij}) u_j' = 0, \quad V_h F_{i\alpha}' + u_i' N_\alpha = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$(3.5) \quad \pi(\tau) = \det(\hat{Q}_{ij}^* - \rho_R V_h^2 \delta_{ij}) = 0, \quad u_i' = kx_i,$$

gdzie  $\pi(\tau)$  jest w tym przypadku wielomianem czwartego rzędu względem  $\tau$ ,

$$\text{a } \hat{Q}_{ij}^* = T_{R\alpha, j\beta} \hat{N}_\alpha \hat{N}_\beta, \quad (\text{por. (2.21), (2.25)}).$$



Rys. 3.1 Padająca fala uderzeniowa (poziomo spolaryzowana) oraz odbita i załamana fala prosta w materiale nieściśliwym

Materiał w obu półprzestrzeniach sprężystych jest izotropowy, nieściśliwy i opisany przez potencjały sprężyste (por. (2.2)1):

$$(3.6) \quad W(I_1, I_2) = \rho_R \sigma(I_1, I_2) \quad \text{dla } X_2 > 0, \quad \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \bar{\rho}_R \bar{\sigma}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \quad \text{dla } X_2 < 0.$$

Obszar 0 przed frontem fali jest nieodkształcony i pozostaje w spoczynku, niezerowe skoki dla gradientu deformacji i prędkości które są jednocześnie wartościami tych wielkości w obszarze 1 (por. (2.5)) wynoszą:

$$(3.7) \quad [x_{31}] = (x_{31})^B = a_0 \sin\Theta_0, \quad [x_{32}] = (x_{32})^B = -a_0 \cos\Theta_0,$$

$$[\dot{x}_3] = (\dot{x}_3)^B = -a_0 V_0.$$

Podstawiając do (2.8) wyrażenia (3.1) i (3.7) przy znanym potencjale sprężystym (3.6)<sub>1</sub>, otrzymuje się po uwzględnieniu (3.12) wyrażenie dla prędkości propagacji fali padającej  $V_0$  w obszarze 1

$$(3.8) \quad V_0^2 = \frac{1}{\rho_R} \frac{[T_{R3\alpha}]N_\alpha}{[x_{3\beta}]N_\beta} = \frac{[T_{R31}]\sin\Theta_0 - [T_{R32}]\cos\Theta_0}{\rho_R a_0} = 2(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Obszar stałego stanu 1 za padającą falą uderzeniową jest w pełni określony przez jej dwa parametry: kąt padania  $\Theta_0$  i intensywność  $a_0$ . Składowe gradientu deformacji, jego odwrotności oraz prędkości w tym obszarze wynoszą:

$$(3.9) \quad x_{i\alpha}^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_{\alpha}^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\hat{v}_1 & -\hat{v}_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(3.10) \quad \mathbf{u} = (0, \hat{0}, u_3), \quad (u_3)^B = u_3 = -a_0 V_0$$

Fala padająca wywołuje więc antypłaski stan odkształcenia. Dalej dla wygody wprowadzamy oznaczenia (wskaźnik B związany jest z frontem fali padającej)

$$(3.11) \quad (x_{31})^B = \hat{v}_1, \quad (x_{32})^B = \hat{v}_2, \quad (u_3)^B = u_3, \quad x_{31}(\gamma) = v_1(\gamma), \quad x_{32}(\gamma) = v_2(\gamma)$$

Wyrażenia dla składowych tensora naprężenia  $T_{R\alpha}$  (por. 2.3) i tensora funkcji materiałowych  $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}$  (por. 2.12) niezbędne w tym rozdziale wynoszą:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} T_{R11} &= 2\rho_R[\sigma_1 + \sigma_2(2 + v_2^2)] + p, & T_{R13} &= -2\rho_R\sigma_2v_1 - p v_1, \\ T_{R22} &= 2\rho_R[\sigma_1 + \sigma_2(2 + v_1^2)] + p, & T_{R31} &= 2\rho_R(\sigma_1 + \sigma_2)v_1, \\ T_{R33} &= 2\rho_R[\sigma_1 + 2\sigma_2] + p, & T_{R23} &= -2\rho_R\sigma_2v_1 - p v_1, \\ T_{R12} &= T_{R21} = -2\rho_R\sigma_2v_1v_2, & T_{R32} &= 2\rho_R(\sigma_1 + \sigma_2)v_2. \end{aligned}$$

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{33}^{11} &= 2(\sigma_1 + \sigma_2) + 4\sigma_{11}v_1^2, & \sigma_{33}^{22} &= 2(\sigma_1 + \sigma_2) + 4\sigma_{11}v_2^2, & \sigma_{23}^{22} &= 4\sigma_{11}v_2, \\ \sigma_{33}^{12} &= \sigma_{33}^{21} = 4\sigma_{11}v_1v_2, & \sigma_{13}^{22} &= -2\sigma_2v_1, & \sigma_{12}^{22} &= 0, & \sigma_{23}^{11} &= -2\sigma_2v_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\sigma_1 = \frac{\partial\sigma}{\partial I_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\partial\sigma}{\partial I_2}, \quad \sigma_{11} = \frac{\partial^2\sigma}{\partial I_1^2}, \quad I_1 = I_2 = 3 + v_1^2 + v_2^2$$

Wartości tych wyrażeń obliczone są dalej w obszarze 1 i  $\hat{0}$  oraz w obszarach odbitej i załamanej fali prostej (por. rys.3.1).

Ze związków (3.9), (3.10) wynika, że ruch ośrodka ograniczony jest do ruchu w kierunku osi  $X_3$ . Zgodnie z (3.12) i (3.13) oraz przy założeniu, że jedynie  $u_3 \neq 0$ , warunek propagacji (2.21) redukuje się do układu równań

$$(3.14) \quad (Q_{13}^* - \rho_R U^2 \delta_{13}) u_3' = 0 \Rightarrow Q_{33}^* - \rho_R U^2 = 0 \quad \text{oraz} \quad Q_{13}^* = Q_{23}^* = 0 .$$

Po rozwinięciu ostatnie dwa równania przybierają postać:

$$(3.15) \quad Q_{13}^* = Q_{13} - Q_{13} n_1 n_1 - Q_{23} n_2 n_1 = 0, \quad Q_{23}^* = Q_{23} - Q_{13} n_1 n_2 - Q_{23} n_2 n_2 = 0$$

i sprowadzają się do jednorodnego układu równań algebraicznych

$$(3.16) \quad \begin{bmatrix} 1 - n_1 n_1 & -n_2 n_1 \\ -n_1 n_2 & 1 - n_2 n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Dla założonej deformacji składowe wektora normalnego do frontu fali są takie same w obu konfiguracjach B i B<sub>R</sub>

$$(3.17) \quad n_1 = N_1, \quad n_2 = N_2, \quad n_3 = N_3 = 0 .$$

Dla niezerowych pierwiastków  $Q_{13}$ ,  $Q_{23}$ , wyznacznik układu równań (3.16) wynosi zero, istnieją wtedy nietrywialne rozwiązania układu przy zależności  $Q_{23} = -\tau Q_{13}$ . Jakie warunki muszą być spełnione aby zachodziła ta relacja? Oba równania (3.16) można zapisać w postaci

$$(3.18) \quad Q_{i3} - Q_{j3} N_j N_i = 0,$$

z której wynika, że składowa  $Q_{i3}$  jest proporcjonalna do wektora  $N_i$ . Jeżeli związek ten jest spełniony dla dowolnego wektora N, musi być także spełniony dla wektorów:  $N=(1,0,0)$  oraz  $N=(0,1,0)$ , wynika stąd, że dla założonej klasy deformacji i przy ograniczeniu ruchu do kierunku osi  $X_3$  muszą być spełnione zależności:

$$(3.19) \quad N=(1,0,0) \Rightarrow Q_{13} = Q_{13}, \quad \text{oraz} \quad Q_{23} = \sigma_{23}^{11} = -2\sigma_2 v_2 = 0 ,$$

$$N=(0,1,0) \Rightarrow Q_{23} = Q_{23}, \quad \text{oraz} \quad Q_{13} = \sigma_{13}^{22} = -2\sigma_2 v_1 = 0 .$$

Wobec czego warunek  $Q_{23} = -\tau Q_{13}$  jest spełniony jednocześnie dla obu równań (3.19) gdy  $\sigma_2=0$ , oznacza to, że funkcja opisująca energię odkształcenia nie może zależeć od drugiego niezmiennika lewego tensora odkształcenia Cauchy-Greena. Warunek ten jest także spełniony w dwóch szczególnych przypadkach :  $\sigma_2 \neq 0$  i  $v_1=0$  (*normal incidence*, klasa wektorów N ograniczona do (3.19)<sub>2</sub>) jak też dla  $\sigma_2 \neq 0$  i  $v_2=0$  (*grazing incidence*, klasa wektorów N ograniczona do (3.19)<sub>1</sub>). Przyjmując N w wyrażeniu (3.18) w bardziej ogólnej postaci  $N(\alpha, \beta, 0)$  otrzymuje się wyniki identyczne jak wyżej. Dalej w tym rozdziale obowiązuje założenie, że zachodzi pierwszy z trzech powyższych przypadków.

Warunek propagacji dla fal prostych redukuje się (por. (3.14)) do pojedynczego równania (3.20)<sub>1</sub>, a ostatnie dwa równania (3.20) zgodnie z uwagami powyżej są spełnione tożsamościowo

$$(3.20) \quad Q_{33}^* - \rho_R U^2 = 0 \quad \text{oraz} \quad Q_{13}^* = Q_{23}^* = 0 .$$

Dla  $n_3 = N_3 = 0$  (por. (2.21), (2.24), (3.17)),  $\hat{Q}_{33}^* = \hat{Q}_{33} = \sigma_{33}^{\alpha\beta} \hat{N}_\alpha \hat{N}_\beta$  i równanie (3.20)<sub>1</sub> przybiera postać równania kwadratowego względem  $\tau$

$$(3.21) \quad \sigma_{33}^{\alpha\beta} \hat{N}_\alpha \hat{N}_\beta - V_h^2 = 0 \Rightarrow \sigma_{33}^{22} \tau^2 - 2\sigma_{33}^{12} \tau + (\sigma_{33}^{11} - V_h^2) = 0.$$

Mniejszy (większy) pierwiastek równania określa odpowiednio płaszczyzny falowe w obszarze odbitej (załamanej) fali prostej

$$(3.22) \quad \tau = \frac{\sigma_{33}^{12}}{\sigma_{33}^{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{33}^{12}}{\sigma_{33}^{22}}\right)^2 - \frac{\sigma_{33}^{11} - V_h^2}{\sigma_{33}^{22}}}.$$

Składowe tensora funkcji materiałowych  $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}$  występujące w (3.22) są obliczane w odpowiednim obszarze materialnym  $X_2 > 0$  ( $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}$ ) lub  $X_2 < 0$  ( $\bar{\sigma}_{ik}^{\alpha\beta}$ ). Żądanie aby oba pierwiastki były rzeczywiste narzuca warunek dla kąta krytycznego  $\Theta_c$  tzn. największego kąta padania  $\Theta_0$  dla którego w obu materiałach spełnione są następujące nierówności:

$$(3.23) \quad \sigma_{33}^{12} - \sigma_{33}^{22}(\sigma_{33}^{11} - V_h^2) > 0, \quad \text{oraz} \quad \bar{\sigma}_{33}^{12} - \bar{\sigma}_{33}^{22}(\bar{\sigma}_{33}^{11} - V_h^2) > 0.$$

### 3.3 Związki konstytutywne i prędkości propagacji fal

Przyjęto, że materiał w obu półprzestrzeniach sprężystych jest izotropowy, nieściśliwy i opisany przez następujący potencjał sprężysty (por. (dodatek 1) oraz (Ishihara, Hashitume, Tatibana, 1952), (Zahorski, 1959))

$$(3.24) \quad W(I_1, I_2) = \rho_R \sigma(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1^2 - 9) \quad \text{dla } X_2 > 0,$$

$$\bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \bar{\rho}_R \bar{\sigma}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \bar{C}_1(\bar{I}_1 - 3) + \bar{C}_2(\bar{I}_2 - 3) + \bar{C}_3(\bar{I}_1^2 - 9) \quad \text{dla } X_2 < 0,$$

gdzie  $I_1 = B_{ii}$ ,  $I_2 = (B_{ij} - B_{ij} B_{ij})/2$ , są niezmiennikami lewego tensora odkształcenia  $\mathbf{B}$ . Zbiór wartości  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  - reprezentuje materiałowe stałe sprężyste. Aproksymacja (3.24) dla funkcji energii odkształceń  $W$  jest słuszna dla materiałów gumopodobnych poddanych umiarkowanym odkształceniom. Badania eksperymentalne (Zahorski, 1962) pokazują, że stała  $C_3$ , istotna w przeprowadzonej dalej dyskusji jest dodatnia oraz, że dla niektórych gatunków gumy można przyjąć  $C_2 = 0$ . Funkcje materiałowe dla (3.24) mają postać:

$$(3.25) \quad \sigma_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial I_1} = \frac{1}{\rho_R} (C_1 + 2C_3 I_1), \quad \sigma_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial I_2} = \frac{C_2}{\rho_R}, \quad \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial I_1^2} = \frac{2C_3}{\rho_R}.$$

Prędkość propagacji padającej fali uderzeniowej (por. (3.8)) dla związku konstytutywnego (3.24) oraz deformacji (3.7) i niezmienników  $I_1 = I_2 = 3 + v_1^2 + v_2^2$  wynosi

$$(3.26) \quad V_0^2 = c^2 (1 + \eta \alpha_0^2),$$

gdzie

$$c^2 = 2(C_1 + C_2 + 6C_3) / \rho_R, \quad \eta = 4C_3 / (\rho_R c^2).$$

Podstawiając składowe gradientu deformacji do warunku propagacji  $Q_{33}^* - \rho_R U^2 = 0$  dla dowolnego kąta padania  $\Theta_0$ , można otrzymać wyrażenie dla powierzchni prędkości związanej z obszarem I

$$(3.27) \quad U^2(\Theta) = c^2(1 + \eta\alpha_0^2(1 + 2\cos^2(\Theta - \Theta_0))).$$

Łatwo sprawdzić, że padająca fala uderzeniowa spełnia dla powyższych związków konstytutywnych postulat stateczności Laxa (2.7)

$$(3.28) \quad U^2(\Theta_0) \Big|_{\alpha_0=0} \leq V_0^2 \leq U^2(\Theta_0) \Rightarrow c^2 \leq c^2(1 + \eta\alpha_0^2) \leq c^2(1 + 3\eta\alpha_0^2)$$

Stopień ogólności związków (3.24) pozwala na dyskusję następujących przypadków szczególnych:  $\sigma_2=0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$  (przy  $v_1=0$ ). Zakładając  $C_2=C_3=0$  otrzymuje się przypadek neoHookeanu. Zagadnienia te zostały omówione w następnych rozdziałach.

### 3.4. Warunki brzegowe i warunki ciągłości

Załóżmy, że konfiguracje falowe wywołane przez padającą falę uderzeniową mają następujące postacie: w przypadku odbicia - *pojedynczej fali prostej*, a przy odbiciu z załamaniem - *dwoch pojedynczych fal prostych* (po jednej w każdym materiale, rys. 3.1) i rozpatrzmy możliwe typy warunków brzegowych.

Fala prosta jest w pełni zdefiniowana przez jednoparametrowy zbiór funkcji występujących w równaniach różniczkowych zwyczajnych (2.24) i spełniających warunki początkowo-brzegowe. Równania (2.26) po przyjęciu  $k = V_h f(x_{1\alpha})$ , oraz dla wektora własnego  $\mathbf{r} = (0, 0, 1)$  przybiorą teraz postać (por. (2.24), (3.12), (3.13))

$$(3.29) \quad u_3' = V_h f(x_{1\alpha}), \quad x_{31}' = -f(x_{1\alpha}) \quad x_{32}' = \tau f(x_{1\alpha}).$$

Wartości składowych gradientu deformacji i prędkości cząstek za frontem padającej fali uderzeniowej są określone przez (3.7) i stanowią one jednocześnie warunki początkowe dla równań (3.29).

i) *brzeg utwierdzony*: na brzegu  $X_2 = 0$  znika jedyna niezerowa składowa prędkości  $u_3 = 0$ . Przyjmując dla wygody  $f(x_{1\alpha}) = -V_h^{-1}$  z (3.29) otrzymuje się:

$$(3.30) \quad u_3' = -1, \quad x_{31}' = V_h^{-1} \quad x_{32}' = -\tau V_h^{-1}.$$

Całkując dwa pierwsze równania z warunkami początkowymi (3.7), otrzymamy

$$(3.31) \quad u_3 = -\gamma - a_0 V_0, \quad x_{31} = V_h^{-1} \gamma + a_0 \sin \Theta_0.$$

Prędkość na brzegu  $X_2 = 0$  znika gdy  $\tilde{\gamma} = -a_0 V_0$ . Dla wartości parametru  $\gamma = \tilde{\gamma}$  znika także składowa  $x_{31}(\tilde{\gamma}) = 0$ . Podstawiając do (3.30)<sub>3</sub> wyrażenie dla funkcji  $\tau$  (por. (3.22)) oraz otrzymane rozwiązanie dla  $x_{31}$  otrzymuje się nieliniowe równanie różniczkowe dla składowej  $x_{32}$  które może być rozwiązane tylko numerycznie.



ii) *mieszane warunki brzegowe*: na brzegu  $X_2=0$  znika przemieszczenie normalne do brzegu oraz naprężenia styczne  $T_{R12}=T_{R32}=0$ . Ruch ograniczony jest do kierunku osi  $X_3$  pierwszy warunek jest więc spełniony tożsamościowo. Warunki dla naprężeń są spełnione, gdy (por.(3.12)) na brzegu  $X_2=0$  zachodzi warunek  $x_{32} = 0$ , dla jego spełnienia przyjęto w (3.29),  $f(x_{i\alpha}) = -\tau^{-1}$  otrzymując układ równań

$$(3.32) \quad x'_{31} = \tau^{-1}, \quad x'_{32} = -1, \quad u'_3 = -V_h x'_{31}.$$

Całkując dwa ostatnie równania z warunkami początkowymi (3.7), otrzymuje się

$$(3.33) \quad x_{32} = -\gamma - a_0 \cos \Theta_0, \quad u_3 = -V_h(x_{31} - a_0 \sin \Theta_0) - a_0 V_0.$$

Warunek  $x_{32} = 0$  jest spełniony, gdy  $\tilde{\gamma} = -a_0 \cos \Theta_0$ . Postępując analogicznie jak wyżej otrzymuje się nieliniowe równanie różniczkowe dla składowej  $x_{31}$ , które może być rozwiązane również tylko numerycznie.

iii) *brzeg swobodny*: na brzegu swobodnym  $X_2=0$ , znika wektor naprężenia  $t_i = T_{Ri\alpha} K_\alpha$ ,  $\mathbf{K} = (0, -1, 0)$  tzn.  $T_{R12}=T_{R32}=T_{R22}=0$ . Dwa pierwsze warunki są spełnione (por. (3.12)), gdy na brzegu  $X_2=0$ , zachodzi warunek  $x_{32} = 0$  (jak w poprzednim przypadku). Trzeci warunek przybiera postać:

$$(3.34) \quad T_{R22} = 2 \rho_R (\sigma_1 + \sigma_2 [2 + (x_{31})^2]) + p = 0$$

który musi być spełniony na płaszczyźnie  $X_2=0$  w obu obszarach 0 i 3, określając w nich ciśnienia hydrostatyczne:

$$(3.35) \quad p_0 = -c^2 \rho_R \quad p_3 = -c^2 \rho_R (1 + \eta [x_{31}(\tilde{\gamma})]^2),$$

gdzie  $x_{31}(\tilde{\gamma})$  jest wartością składowej gradientu deformacji dla końcowego frontu (trailing wavelet) w obszarze fali prostej 2. W obszarach 1-3 funkcja  $p(\gamma)$  jest ciągła, lecz doznaje skoku na froncie fali uderzeniowej rozdzielającym obszary 0 oraz 1. Wartość  $p_1$  w obszarze 1 można wyznaczyć ze skokowych warunków zgodności (2.5), dla  $i=1,2$  zachodzi równość  $[T_{Ri\alpha}]N_\alpha = 0$ , lub w postaci równowaznej  $[T_{R11}] = \tau^2 [T_{R22}]$ . Wykorzystując (3.7) i (3.12), otrzymuje się dla skoku  $p$ , przy dowolnej wartości kąta  $\Theta_0 \leq \Theta_c$ .

$$(3.36) \quad [p] = p_1 - p_0 = -4C_3 a_0^2 = -c^2 \rho_R \eta a_0^2.$$

W obszarze 2, fali prostej gradient deformacji oraz prędkość cząstek są ciągłymi funkcjami parametru  $\gamma$  w przedziale  $(\tilde{\gamma}, 0)$  (por. (3.31), (3.33)). Równania (3.32) i (3.33) są zgodne z warunkami  $T_{R12}=T_{R32}=0$ . Równanie opisujące zmiany funkcji  $p(\gamma)$  w obszarze fali prostej (2.20), podobnie jak warunek propagacji wynika z równań ruchu oraz warunków zgodności. Równanie różniczkowe (2.20), po podstawieniu składowych tensora naprężeń (3.12) oraz wyrażen dla funkcji:  $x_{32}$ ,  $x_{31}$  i  $u_3$ , określa ciśnienie hydrostatyczne  $p(\gamma)$  z dokładnością do stałej w przedziale  $(\tilde{\gamma}, 0)$ .

Bezpośrednie całkowanie tego równania z uwzględnieniem (3.32), prowadzi do wyniku

$$(3.37) \quad p(\gamma) = -c^2 \rho_R \eta [(x_{31}(\gamma))^2 + (x_{32}(\gamma))^2] + p_0.$$

Stosownie do warunków ciągłości w obszarach 1-3, funkcja  $p(\gamma)$  musi spełniać dwa warunki,  $p(0)=p_1$  and  $p(\tilde{\gamma})=p_3$  gdzie  $p_1$  i  $p_3$  są określone przez (3.35) i (3.36).

iv) odbicie i załamanie na granicy dwóch materiałów ( $\sigma_2=0$  i  $\sigma_2 \neq 0$ ): dwa nieliniowe materiały sprężyste (opisane przez potencjały (3.24)) różniące się własnościami sprężystymi są sztywno połączone wzdłuż granicy  $X_2=0$ . Do spełnienia są teraz (por. rys. 3.1) trzy warunki dla naprężeń i jeden dla prędkości (zgodnie z wcześniejszymi założeniami niezerowe są tylko składowe  $u_3 \neq 0$  i  $\tilde{u}_3 \neq 0$ )

$$(3.38) \quad u_3 = \tilde{u}_3, \quad t_i = \tilde{t}_i, \quad t_i = T_{Ri\alpha} K_\alpha, \quad \tilde{t}_i = \tilde{T}_{Ri\alpha} K_\alpha, \quad K = (0, -1, 0),$$

$$(3.39) \quad u_3 = \tilde{u}_3 \quad \text{oraz} \quad T_{Ri2} = \tilde{T}_{Ri2} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

• odbita fala prosta,  $X_2 > 0$  (por. rys. 3.1)

Równania w obszarze 1 przyjmuje się w postaci:

$$(3.40) \quad u_3' = -1, \quad x_{31}' = V_h^{-1}, \quad x_{32}' = -\tau V_h^{-1}, \quad f(x_{i\alpha}) = -V_h^{-1}.$$

Całkowanie prowadzi do rezultatów

$$(3.40) \quad u_3 = -\gamma + u_3(0), \quad x_{31} = V_h^{-1} \gamma + x_{31}(0), \quad x_{32} = -\int_0^\gamma \tau V_h^{-1} d\gamma + x_{32}(0).$$

• załamana fala prosta,  $X_2 < 0$  (por. rys. 3.1)

Analogiczne równania można otrzymać dla fali załamanej (obszar  $\tilde{0}$  jest nieodkształcony i pozostaje w spoczynku,  $\tilde{u}_3(0) = \tilde{x}_{31}(0) = \tilde{x}_{32}(0) = 0$ )

$$(3.41) \quad \tilde{u}_3 = -\tilde{\gamma}, \quad \tilde{x}_{31} = V_h^{-1} \tilde{\gamma}, \quad \tilde{x}_{32} = -\int_0^{\tilde{\gamma}} \tau V_h^{-1} d\tilde{\gamma}, \quad \tilde{f}(x_{i\alpha}) = -V_h^{-1}.$$

• na granicy  $X_2=0$  w obszarze  $X_1 > 0$ , między obszarami 0 i  $\tilde{0}$  trzy warunki spełnione są tożsamościowo:

$$(3.42) \quad u_3 = \tilde{u}_3 = 0, \quad T_{R12} = \tilde{T}_{R12} = 0, \quad T_{R32} = \tilde{T}_{R32} = 0,$$

a czwarte równanie

$$(3.43) \quad T_{R22} = \tilde{T}_{R22} \Rightarrow c^2 \rho_R + p_o = \tilde{c}^2 \tilde{\rho}_R + \tilde{p}_o,$$

określa związek między ciśnieniami  $p_0$  i  $\tilde{p}_0$  w obszarach 0 i  $\tilde{0}$  wzdłuż granicy rozdzielu materiałów.

• na granicy  $X_2=0$  w obszarze  $X_1<0$ , między obszarami 3 i  $\bar{3}$  spełnienie warunków ciągłości prowadzi do czterech równań algebraicznych dla końcowych wartości parametrów obu fal prostych  $\tilde{\gamma}$  i  $\bar{\tilde{\gamma}}$

$$(3.44) \quad u_3 = \bar{u}_3 \Rightarrow -\tilde{\gamma} + u_3(0) = -\bar{\tilde{\gamma}}, \quad V_R^{-1} \neq 0 \Rightarrow u_3 = \bar{u}_3 \Leftrightarrow x_{31} = \bar{x}_{31},$$

$$(3.45) \quad T_{R12} = \bar{T}_{R12} \Rightarrow C_2 x_{32} x_{31} = \bar{C}_2 \bar{x}_{32} \bar{x}_{31} \Rightarrow C_2 x_{32} = \bar{C}_2 \bar{x}_{32} \quad (x_{31} = \bar{x}_{31} \neq 0),$$

$$(3.46) \quad T_{R22} = \bar{T}_{R22} \Rightarrow C_2 (x_{31})^2 = \bar{C}_2 (\bar{x}_{31})^2,$$

$$(3.47) \quad T_{R32} = \bar{T}_{R32} \Rightarrow c^2 \rho_R (1 + \eta((x_{31})^2 + (x_{32})^2)) x_{32} = \bar{c}^2 \bar{\rho}_R (1 + \bar{\eta}((\bar{x}_{31})^2 + (\bar{x}_{32})^2)) \bar{x}_{32}$$

Cztery równania algebraiczne zawierające dwie niewiadome  $\tilde{\gamma}$ ,  $\bar{\tilde{\gamma}}$ , można zredukować w dwojaki sposób:

1) zakładając, że  $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \bar{C}_2 = 0$  otrzymuje się układ dwóch równań dla dwóch niewiadomych  $\tilde{\gamma}$ ,  $\bar{\tilde{\gamma}}$

$$(3.48) \quad \begin{aligned} & -\tilde{\gamma} + u_3(0) = -\bar{\tilde{\gamma}}, \\ & c^2 [1 + \eta((x_{31}(\tilde{\gamma}))^2 + (x_{32}(\tilde{\gamma}))^2)] x_{32}(\tilde{\gamma}) = \bar{c}^2 [1 + \bar{\eta}((\bar{x}_{31}(\bar{\tilde{\gamma}}))^2 + (\bar{x}_{32}(\bar{\tilde{\gamma}}))^2)] \bar{x}_{32}(\bar{\tilde{\gamma}}). \end{aligned}$$

2) inną możliwością jest założenie, że  $\sigma_2 = C_2 \neq 0$  (oraz  $\bar{\sigma}_2 = \bar{C}_2 \neq 0$ ), a wartość składowej  $x_{31}$  gradientu deformacji stale wynosi zero,  $x_{31} = \bar{x}_{31} = 0$  (por. (3.19) oraz (Duszczyk, Kosiński, Wesołowski, 1986), (Kosiński, 1989)). Układ równań przybiera postać:

$$(3.49) \quad \begin{aligned} & -\tilde{\gamma} + u_3(0) = -\bar{\tilde{\gamma}}, \\ & c^2 [1 + \eta((x_{32}(\tilde{\gamma}))^2)] x_{32}(\tilde{\gamma}) = \bar{c}^2 [1 + \bar{\eta}((\bar{x}_{32}(\bar{\tilde{\gamma}}))^2)] \bar{x}_{32}(\bar{\tilde{\gamma}}). \end{aligned}$$

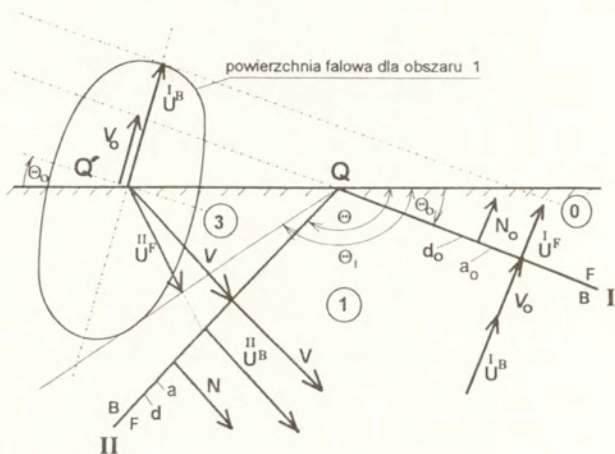
Oba powyższe przypadki przypadki związane są odpowiednio z odbiciem ukośnym i normalnym. Trzeci możliwy przypadek, gdy front fali padającej jest prostopadły do brzegu ( $x_{32} = \bar{x}_{32} = 0$ , grazing incidence, por. (3.19)) nie jest w pracy rozpatrywany.

### 3.5. Odbite ukośne fale uderzeniowe

W poprzednich paragrafach rozwiązanie dla zagadnienia odbicia, zakładano w postaci ciągu fal prostych i obszarów stałego stanu. Jeżeli funkcja  $\tau(\gamma) = \text{ctg}\Theta(\gamma)$  jest rosnącą funkcją argumentu  $\gamma$ , gdy zmienia się on od zera do końcowej wartości  $\bar{\gamma}$ , poruszający się "wachlarzyk" fal elementarnych tworzących falę prostą "kurczy się" do przedniego frontu fali prostej (leading wavelet), tworząc falę uderzeniową (por. rys.2.3). Zakładając, że fala odbita jest falą uderzeniową (II, rys.3.2) bada się w jakich przypadkach jest ona stabilna.

Rozważania ograniczone są do zagadnienia odbicia od brzegu *utwierdzonego* oraz od brzegu z *mieszanymi* warunkami brzegowymi. Zgodnie z kryterium stateczności

Laxa (1957) fala uderzeniowa jest stateczna gdy propaguje się w danym kierunku szybciej niż fala akustyczna w obszarze przed jej frontem oraz wolniej niż fala akustyczna w tym samym kierunku w obszarze za jej frontem (3.50)



Rys.3.2. Konfiguracja z odbitą falą uderzeniową

$$(3.50) \quad U^I_F \leq V_0 \leq U^I_B, \quad U^{II}_F \leq V \leq U^{II}_B$$

Dla spełnienia warunku stateczności padającej fali uderzeniowej konieczne jest, aby jej front przecinał powierzchnię falową skonstruowaną w obszarze bezpośrednio za jej frontem. Przedni front fali prostej (leading wavelet) o kącie nachylenia  $\Theta_1$  musi być styczny do powierzchni falowej skonstruowanej dla obszaru 1, a front odbitej statecznej fali uderzeniowej musi być nachylony pod kątem mniejszym od kąta  $\Theta_1$  ponieważ zgodnie z warunkiem stateczności jej prędkość propagacji  $V$  musi być większa od prędkości fali akustycznej  $U^F$  w tym samym kierunku w obszarze 1 przed odbitą falą uderzeniową.

Składowe gradientu deformacji i prędkości w obszarze 3 wynoszą:

$$(3.51) \quad \begin{aligned} (x_{31})_{II}^B &= (x_{31})_{II}^F + ad_3 N_1, & (x_{32})_{II}^B &= (x_{32})_{II}^F + ad_3 N_2, \\ (u_3)_{II}^B &= (u_3)_{II}^F - ad_3 V \end{aligned}$$

i) brzeg utwierdzony:  $(u_3)_{II}^B = 0 \Rightarrow -a_0 V_0 = -ad_3 V$ , ( $a_0 > 0, a > 0$ ), stąd składowa  $d_3 = -1$ . Wektor polaryzacji  $\mathbf{d}$  odbitej fali uderzeniowej ma kierunek przeciwny do wektora  $\mathbf{d}_0$ . Uwzględniając powyższy warunek oraz warunek dla centryczności wiązki fal (3.3)<sub>2</sub> otrzymuje się

$$(3.52) \quad a = a_0 \frac{\sin \Theta_0}{\sin \Theta}, \quad (x_{31})_{II}^B = 0, \quad (x_{32})_{II}^B = a_0 (\sin \Theta_0 \operatorname{ctg} \Theta - \cos \Theta_0).$$

ii) *mieszane warunki brzegowe*:  $x_{32} = 0 \Rightarrow -a_0 \cos \Theta_0 - a d_3 \cos \Theta = 0$  wynika stąd, że oba wektory polaryzacji  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}_0$  dla fali odbitej i padającej mają ten sam kierunek:  $(a_0 > 0, a > 0, \cos \Theta < 0) \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{d}_0$ . Analogicznie jak w poprzednim przypadku można otrzymać:

$$(3.53) \quad a = -a_0 \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta}, \quad (x_{32})_{II}^B = 0, \quad (x_{31})_{II}^B = a_0 (\sin \Theta_0 - \cos \Theta_0 \operatorname{tg} \Theta).$$

Wyrażenia dla prędkości propagacji, padającej i odbitej fali uderzeniowej oraz prędkości fal akustycznych wynikają z podstawienia do (3.8) składowych gradientu deformacji (3.7), (3.52), (3.53). Wartości prędkości w obszarze I wynoszą

$$(3.54) \quad U^F = c, \quad V_0 = c \sqrt{1 + \eta \alpha_0^2}, \quad U^B = c \sqrt{1 + 3\eta \alpha_0^2}.$$

Warunek stateczności Laxa (1957) dla *padającej* fali uderzeniowej ( $(a_0 \neq 0)$ , por. (3.28)) jest zawsze spełniony, a dla *odbitej* fali uderzeniowej jest spełniony jeśli zachodzą następujące warunki:

- dla brzegu utwierdzonego

$$(3.55) \quad V \geq U^F \Rightarrow \frac{U^B}{\sin \Theta} > 3 \cos(\Theta - \Theta_0), \quad U^B \geq V \Rightarrow \frac{\sin \Theta_0}{\sin \Theta} > \frac{3}{2} \cos(\Theta - \Theta_0).$$

Obie powyższe nierówności spełnione są, gdy

$$(3.56) \quad \operatorname{ctg} \Theta < \xi_1 = \frac{3}{2} \operatorname{ctg} \Theta_0 - \sqrt{\left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} \Theta_0\right)^2 + 2},$$

a warunek ten wynika z nierówności  $V \geq U^F$ , (3.55). Prędkość propagacji odbitej fali uderzeniowej można obliczyć podstawiając do wyrażenia (3.8), zależności (3.52)

$$(3.57) \quad V^2 = c^2 \left( 1 + \eta \alpha_0^2 \left( 1 + 2 \cos^2(\Theta - \Theta_0) + \frac{\sin^2 \Theta_0}{\sin^2 \Theta} - 3 \frac{\sin \Theta_0}{\sin \Theta} \cos(\Theta - \Theta_0) \right) \right)$$

Porównując wyrażenie (3.57) z równaniem wynikającym z warunku centryczności wiązki fal  $V^2 = V_0^2 \sin^2 \Theta / \sin^2 \Theta_0$  otrzymuje się zależność

$$(3.58) \quad \kappa_1 = \frac{1 + \eta \alpha_0^2}{\eta \alpha_0^2} = \frac{2 \cos^2(\Theta - \Theta_0) + \frac{\sin \Theta_0}{\sin \Theta} \left( \frac{\sin \Theta_0}{\sin \Theta} - 3 \cos(\Theta - \Theta_0) \right)}{\left( \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta_0} \right)^2 - 1}$$

Lewa strona powyższego równania jest dodatnia  $\kappa_1 > 0$  (stała materiałowa  $\eta > 0$ , por. dodatek 1), przy spełnieniu warunku (3.55) oraz dla tożsamości  $\sin \Theta_0 / \sin \Theta > 0$  licznik prawej strony jest także dodatni, wobec tego mianownik będzie dodatni, gdy

$$(3.59) \quad \sin \Theta > \sin \Theta_0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \Theta < \pi - \Theta_0 \quad \text{i} \quad \text{ctg} \Theta < \xi_1.$$

Związek między ustalonym kątem odbicia, a intensywnością fali padającej ma postać

$$(3.60) \quad \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta(\kappa_1 - 1)}}, \quad \kappa_1 > 1.$$

• dla mieszanych warunków brzegowych

Analogiczne obliczenia przeprowadzone dla tego przypadku prowadzą do następujących wyników

$$(3.61) \quad V \geq U^F \Rightarrow \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta} < 3 \cos(\Theta - \Theta_0), \quad U^B \geq V \Rightarrow \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta} < \frac{3}{2} \cos(\Theta - \Theta_0).$$

Obie nierówności spełnione są, gdy

$$(3.62) \quad \text{tg} \Theta < \xi_2 = \frac{3}{2} \text{tg} \Theta_0 - \sqrt{\left( \frac{3}{2} \text{tg} \Theta_0 \right)^2 + 2}.$$

Powyższy warunek dla kąta krytycznego wynika z nierówności  $V \geq U^F$ , (3.61)<sub>1</sub>. Następnie otrzymuje się podobnie jak w poprzednim przypadku

$$(3.63) \quad \kappa_2 = \frac{1 + \eta \alpha_0^2}{\eta \alpha_0^2} = \frac{2 \cos^2(\Theta - \Theta_0) + \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta} \left( \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta} - 3 \cos(\Theta - \Theta_0) \right)}{\left( \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta_0} \right)^2 - 1},$$

$$(3.64) \quad \kappa_2 > 0, \quad \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta} < 0 \Rightarrow \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta} < 3 \cos(\Theta - \Theta_0),$$

$$(3.65) \quad \sin \Theta > \sin \Theta_0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \Theta < \pi - \Theta_0, \quad \text{i} \quad \text{tg} \Theta < \xi_2,$$

$$(3.66) \quad a_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta(\kappa_2 - 1)}}, \quad \kappa_2 > 1.$$

Jest interesujące, że w prezentowanej aproksymacji oba wyrażenia (3.56) i (3.62) są niezależne od stałych materiałowych i intensywności padającej fali uderzeniowej i mają charakter *czysto geometryczny* związany jedynie z zależnością od kąta padania  $\Theta$ .

### 3.6. Kąt krytyczny dla padającej fali uderzeniowej

Kąty krytyczne mogą występować zarówno dla odbitych fal prostych jak i odbitych fal uderzeniowych, a natura fizyczna tego zagadnienia jest taka sama. Załóżmy najpierw tak jak w poprzednich podrozdziałach, że fala odbita jest pojedynczą ukośną ( $\sigma_2=0$ ) falą prostą (lub obie fale odbite i załamane są pojedynczymi ukośnymi falami prostymi). Warunki dla kątów krytycznych  $\Theta_c$  wynikają z równań (3.23).

Konfigurację powierzchni falowych dla dwóch różnych sztywno połączonych materiałów pokazano na rys.3.3a. Dla ustalonego kąta padania  $\Theta_0$  (ustalonej intensywności  $a_0$ ), punkt Q porusza się ku powierzchni falowej, gdy intensywność fali padającej  $a_0$  (kąt padania  $\Theta_0$ ) rośnie. Wszystkie fale konfiguracji zbiegają się w punkcie Q. Punkt Q zbliża się do powierzchni falowej i przedni front fali prostej (leading wavelet) staje się najpierw styczny do dolnej powierzchni falowej, a potem przecina ją i warunek (3.23)<sub>1</sub> nie jest już dłużej spełniony (rys.3.3b). Położenie styczne odpowiada kątowi krytycznemu. Z oszacowania (3.23)<sub>1</sub> w obszarze I wynika wartość kąta krytycznego:

$$(3.67) \quad \sin \Theta_c \leq \sqrt{\frac{1 + 3\eta a_0^2}{1 + 5\eta a_0^2}}.$$

Przy odwrotnym usytuowaniu materiałów (rys.3.3c) punkt Q najpierw przecina górną powierzchnię falową. Geometryczny kształt powierzchni falowej związanej z przednim frontem odbitej fali prostej zależy od gradientu deformacji w obszarze I, który jest zależny od parametrów fali padającej:  $\Theta_0$ ,  $a_0$ . W obszarze I powierzchnia prędkości dla deformacji (3.7) ma dwie osie symetrii (por. (3.27)) oraz półosie (por. (3.27))

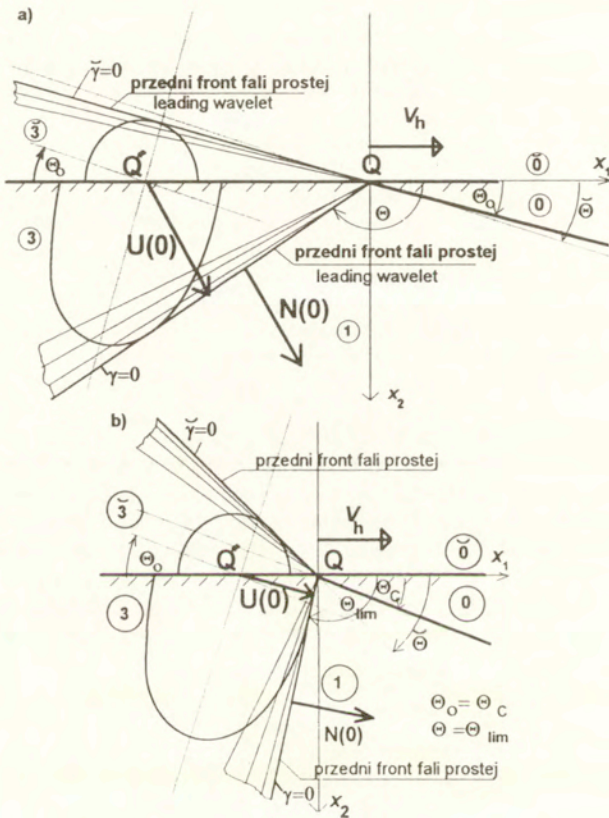
$$(3.68) \quad d_1 = c\sqrt{1 + 3\eta a_0^2}, \quad d_2 = c\sqrt{1 + \eta a_0^2}.$$

Graniczna wartość dla cotangensa kąta odbicia związanego z przednim frontem (leading wavelet) fali prostej:  $\text{ctg}\Theta_{\text{lim}}$  jest określona poniżej przez (3.69)<sub>2</sub>

$$(3.69) \quad V_h = \frac{V_0}{\sin \Theta_0} = \frac{U(0)}{\sin \Theta}, \quad \text{ctg}\Theta_{\text{lim}} = -\frac{2\eta a_0^3 \sqrt{2\eta(1 + 3\eta a_0^2)}}{1 + 3\eta a_0^2(2 + 3\eta a_0^2)}.$$

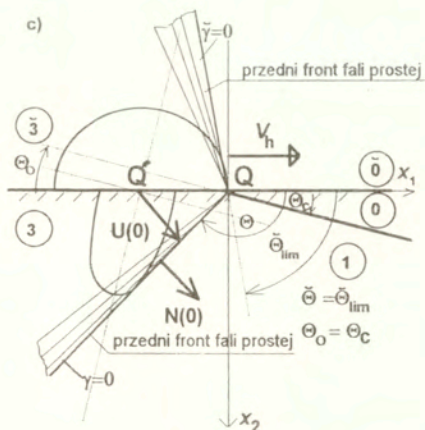
Oszacowania dla kąta krytycznego związanego z odbitą falą uderzeniową wynikają z warunku jej stateczności. Jeżeli w obu przypadkach: brzegu utwierdzonego oraz

brzegu z mieszanymi warunkami, spełniony jest warunek  $V \geq U^F$ , zachodzi wówczas także nierówność  $U^B \geq V$  i odbita fala uderzeniowa jest stateczna o ile w przedziale dla kątów odbitych  $\pi/2 \leq \Theta \leq \Theta - \Theta_0$ , spełnione są warunki (3.59) i (3.65). Jak wspomniano oba te warunki mają charakter typowo geometryczny i zależą jedynie od kąta padania nie zależą natomiast ani od intensywności fali padającej  $a_0$  ani od związków konstytutywnych. W położeniu granicznym, gdy występuje kąt krytyczny zachodzą równości  $V = U^F$ ,  $\Theta = \Theta_1$  fronty obu tych fal pokrywają się i są styczne do powierzchni falowej, punkt Q leży na powierzchni falowej w punkcie styczności (por. rys.3.2).



Rys.3.3 Geometria powierzchni falowych w obszarach 1 oraz 0  
 a) konfiguracja bez kątów krytycznych  
 b) Kąt krytyczny dla fali odbitej



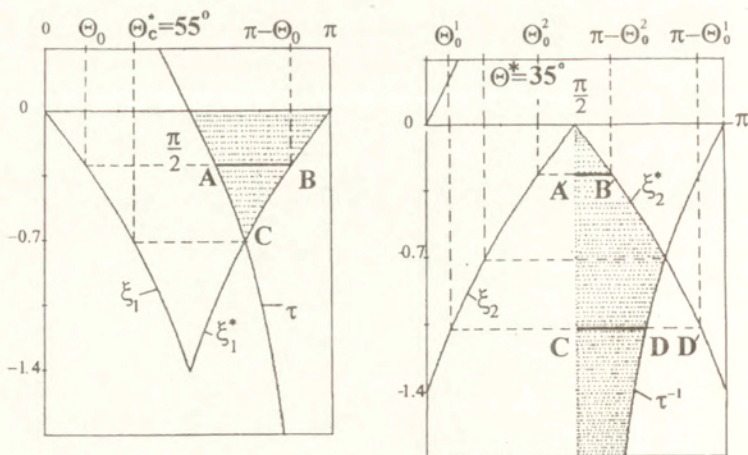


Rys. 3.3 Geometria powierzchni falowych w obszarach 1 oraz 0  
c) Kąt krytyczny dla fali załamanej

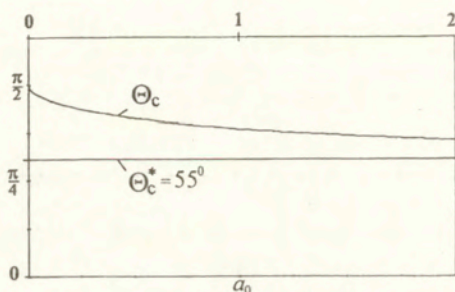
Rysunki 3.4a,b przedstawiają wykresy ilustrujące odpowiednio warunki (3.59)<sub>2</sub> i (3.65)<sub>2</sub>. Dla wygody narysowano dodatkowo dwie funkcje  $\xi_i^* = \xi_i(\pi - \Theta_0)$ ,  $i = 1, 2$  symetryczne do funkcji  $\xi_i(\Theta_0)$ ,  $i = 1, 2$  względem prostej  $\Theta = \pi/2$ . Dla brzegu utwierdzonego zachodzi warunek (3.59)<sub>2</sub>, wynika stąd, że kąty  $\Theta$  określające dopuszczalne położenia frontów fal odbitych (dla intensywności fali padającej  $a_0$ , obliczonej zgodnie z (3.60)), zawarte są w przedziale AB mniejszym od przedziału  $\pi/2 \leq \Theta \leq \Theta - \Theta_0$ . Oba warunki (3.59) spełnione są w zakropkowanym obszarze.

Jeżeli wartość kąta padania przekracza pewną wartość krytyczną  $\Theta_0 = \Theta_c^* \approx 55^\circ$ , punkt C (niezależną od  $a_0$  oraz związków konstytutywnych), oba przedziały dla kątów padania związane z warunkami (3.59) stają się rozłączne. W przyjętej tu aproksymacji kąt  $\Theta_c^*$  jest kątem krytycznym dla fali padającej, niezależnym od jej intensywności oraz związków konstytutywnych. Jest to istotna różnica jakościowa w stosunku do wartości kąta krytycznego związanego z odbitą falą prostą (3.67).

Rys. 3.4b przedstawia graficznie warunki dla statecznej fali odbitej. Dla małych kątów padania  $\Theta_0 < \Theta^* \approx 35^\circ$  przedziały dla dopuszczalnych kątów odbicia są mniejsze niż przedział CD' którego długość wynosi  $\pi/2 \leq \Theta \leq \Theta - \Theta_0$ . Jeżeli kąt padania  $\Theta_0$  jest większy od  $\Theta^* \approx 35^\circ$  (także niezależnie od  $a_0$  i  $\eta$ ) wówczas możliwy jest do przyjęcia pełny przedział kątów odbitych  $\pi/2 \leq \Theta \leq \Theta - \Theta_0$ . Intensywność fali padającej  $a_0$  dla kąta odbicia  $\Theta$  z każdego dopuszczalnego przedziału, oblicza się w tym przypadku zgodnie z (3.66). Dla mieszanych warunków brzegowych oba przedziały dla dopuszczalnych kątów odbicia nie są nigdy rozłączne i kąt krytyczny związany z odbitą falą uderzeniową nie występuje.



Rys. 3.4 Przedziały dla dopuszczalnych kątów odbicia  
a) brzeg utwierdzony, b) warunki mieszane



Rys. 3.5 Krytyczne kąty padania w funkcji  $a_0$  dla fal prostych i uderzeniowych  
w przypadku brzegu utwierdzonego

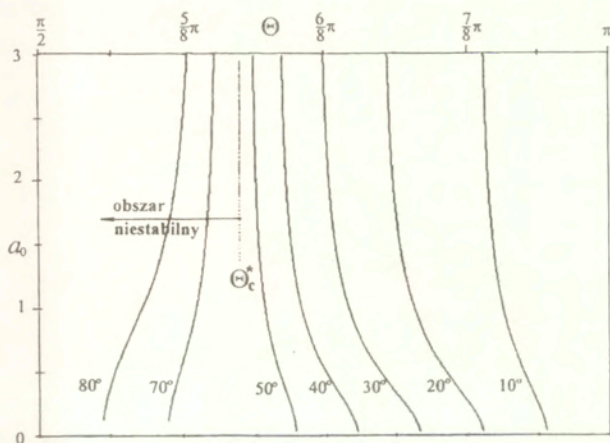
### 3.7. Analiza numeryczna i uwagi

Dla rozwiązań otrzymanych w tym rozdziale przeprowadzono analizę numeryczną. Do rozważań przyjęto materiał (3.24) ze stałymi dla materiału gumopodobnego III ( $C_2=0$ , por. dodatek 1). Obszar materialny za frontem padającej fali uderzeniowej powinien pozostawać sprężysty, skok gradientu deformacji nie może być więc dowolny. Należy przeprowadzić odpowiednie oszacowanie dla intensywności fali padającej (Kosiński, 1981b). W dalszych obliczeniach przyjęto oszacowanie  $a_0 \leq 3$ .

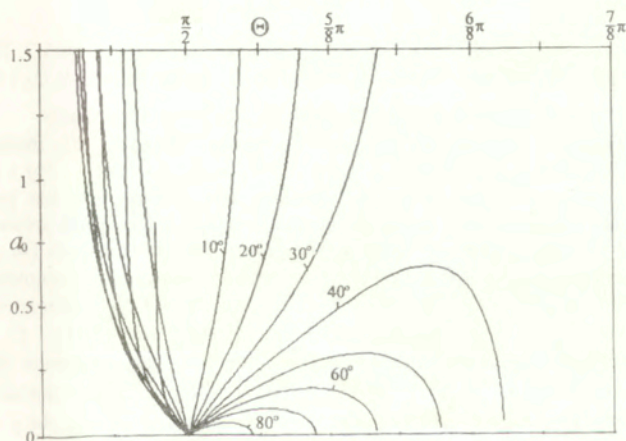
Rys. 3.6a przedstawia plany warstwicowe dla wyrażenia (3.60), (brzeg utwierdzony), przy kątach padania  $\Theta_0 \in \langle 10^\circ, 90^\circ \rangle$ , zmieniających się co  $10^\circ$ . Dla lepszego

porównania pokazano zakres kątów padania większy od dopuszczalnego, lecz falą uderzeniową jest stateczna tylko przy spełnieniu nierówności  $\Theta_0 \leq \Theta_c^* \approx 55^\circ$ .

a)



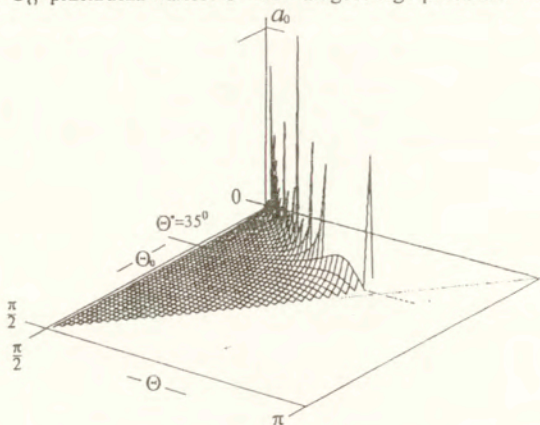
b)



Rys. 3.6. Intensywność fali padającej w funkcji kąta odbicia  $\Theta$  dla różnych wartości kąta padania  $\Theta_0$  a) mieszane warunki brzegowe, b) brzeg utwierdzony.

Linie konturowe nie dążą do nieskończoności, lecz osiągają skończoną wartość nieco wyżej niż pokazuje rysunek dla wartości  $a_0 \approx 10$ . Podobny rezultat dla brzegu z mieszanymi warunkami brzegowymi i wyrażenia (3.66) przedstawiono na rys. 3.6b. Kontury powstały przez przecięcie powierzchni (3.66) płaszczyznami  $\Theta_0 = \text{const}$  (por. rys. 3.7). Na rysunku pokazano wszystkie kontury dla kątów padania  $\Theta_0 = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 90^\circ$ . W przypadku tym jak pokazano wcześniej, nie występuje kąt krytyczny. Oba warunki (3.65) są spełnione w zakropkowanym obszarze na rys. 3.4b. Przy

wzroście kąta padania długość przedziału dla dopuszczalnych kątów odbicia rośnie, gdy jednak  $\Theta_0$  przekracza wartość  $\Theta^* \approx 35^\circ$  długość tego przedziału maleje do zera.



Rys. 3.7. Intensywność fali padającej  $a_0$  w funkcji kąta padania  $\Theta_0$  i dopuszczalnego kąta odbicia  $\Theta$

Pełny trójwymiarowy wykres zależności (3.66) przedstawiono na rys.3.7. Rys.3.5 pokazuje zależność pomiędzy kątami krytycznymi (dla odbitej fali prostej  $\Theta_c$  i odbitej fali uderzeniowej  $\Theta_c^*$ ), a intensywnością fali padającej na brzeg utwierdzonej.

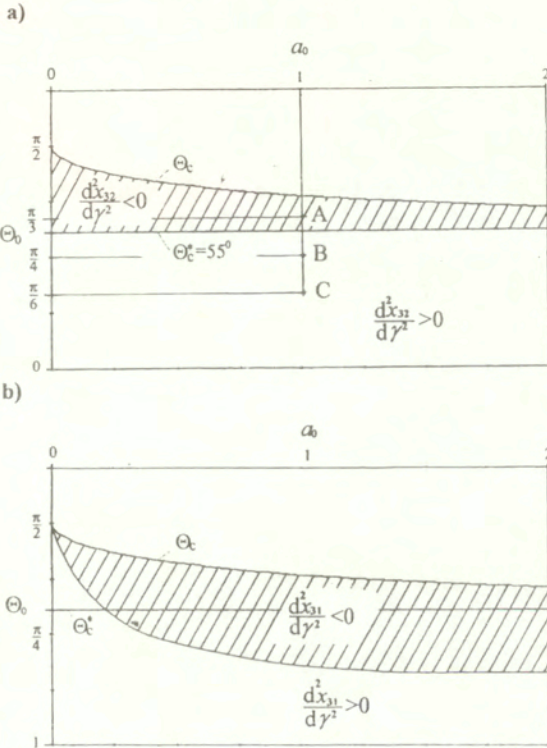
Dla wybranego materiału z przyjętymi do obliczeń stałymi  $C_1$ ,  $C_3$  istotne jest zbadanie jednoznaczności rozwiązań. Biorąc pod uwagę równania (3.30) i (3.32) można stwierdzić kiedy fala odbita jest stateczną falą; uderzeniową lub prostą i rozstrzygnąć zagadnienie jednoznaczności. Rozwiązania mogą być jednak sprawdzone tylko *numerycznie*. Zgodnie z uwagami dotyczącymi prędkości propagacji fali prostej (por. rys.2.3) funkcja  $\tau(\gamma)$  musi być w tym przypadku, rzeczywistą monotonicznie *malejącą* funkcją parametru  $\gamma$ , gdy  $\gamma$  zmienia się od zera do końcowej wartości  $\tilde{\gamma}$  (która w obu rozpatrzonych tu przypadkach jest *ujemna* (por. (3.31) i (3.33),  $\gamma$  monotonicznie maleje). Funkcja  $\tau(\gamma)$  zgodnie z definicją jest nazywana funkcją monotonicznie *rosnącą* (ze wzrostem  $\gamma$  od  $\tilde{\gamma} < 0$  do 0). Geometrycznie oznacza to, że gdy  $\tau(\gamma)$  rośnie (maleje) przy zmianie parametru  $\gamma$  (gdy  $\gamma$  zmienia się teraz od  $\tilde{\gamma} < 0$  do 0) poruszający się "wachlarzyk" centrycznych frontów fal prostych odchyła się od (zbiega się do) przedniego frontu tworząc falę prostą (uderzeniową).

Analizując i różniczkując (3.30)<sub>3</sub> otrzymuje się (dla rosnącego  $\gamma$ ) w przypadku brzegu utwierdzonego

$$(3.70) \quad \begin{array}{l} \text{fala prosta} \\ \text{fala uderzeniowa} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{d\tau}{d\gamma} > 0 \Rightarrow -V_h \frac{d^2 x_{32}}{d\gamma^2} > 0 \Rightarrow \frac{d^2 x_{32}}{d\gamma^2} < 0 \\ \frac{d\tau}{d\gamma} < 0 \Rightarrow \frac{d^2 x_{32}}{d\gamma^2} > 0 \end{array}$$

Analogicznie dla brzegu z mieszanymi warunkami z (3.32)<sub>1</sub> wynika

$$(3.71) \quad \begin{aligned} \text{fala prosta} \quad & \frac{d\tau}{d\gamma} > 0 \Rightarrow -\tau^2 \frac{d^2 x_{31}}{d\gamma^2} > 0 \Rightarrow \frac{d^2 x_{31}}{d\gamma^2} < 0 \\ \text{fala uderzeniowa} \quad & \frac{d\tau}{d\gamma} < 0 \Rightarrow \frac{d^2 x_{31}}{d\gamma^2} > 0 \end{aligned}$$



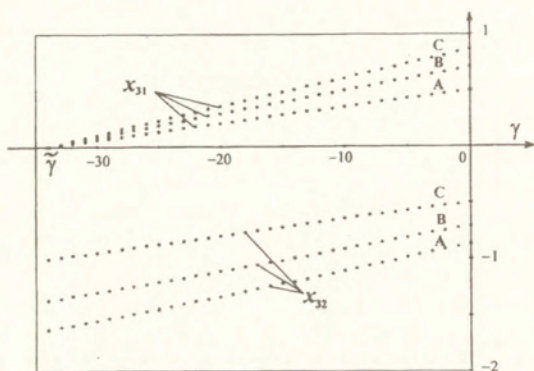
Rys. 3.8. Dopuszczalne obszary dla statecznych odbitych fal prostych (zakresowane)  
a) brzeg utwierdzony, b) mieszane warunki brzegowe

Na rys.3.8a,b dla obu typów warunków brzegowych zakreskowano obszary w których występują stateczne odbite fale proste. Dolna krzywa na rys.3.8b wynika bezpośrednio z rys.3.6b i oznacza granicę dla intensywności fali padającej  $a_0$ , przy ustalonym dla statecznej odbitej fali uderzeniowej, najmniejszym możliwym kącie padania  $\Theta_0$ . Na rys. 3.8a wybrano trzy punkty A, B, C mające wspólną współrzędną  $a_0=1$  i różne współrzędne dla kąta padania  $\Theta_0$  równe odpowiednio  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $30^\circ$ . Zgodnie z wcześniejszą interpretacją związaną z rys.3.5 dla brzegu utwierdzonego punkty B i C są charakterystyczne dla odbitej statecznej fali uderzeniowej, a punkt A

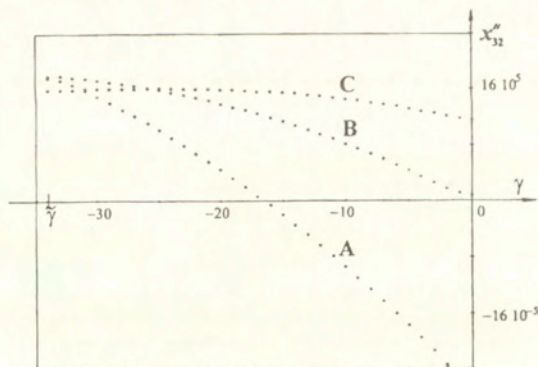
dla odbitej fali prostej. Dla rozwiązania zagadnienia początkowego z danymi w punktach A, B, C użyto metody Rungego-Kutty. Do otrzymanej w ten sposób macierzy danych, użyto dwóch procedur numerycznych dla otrzymania pierwszej i drugiej pochodnej. Druga pochodna w punktach B i C ma znak zgodny z  $(3.70)_2$  (por. rys.3.9b). Inna sytuacja występuje w punkcie A, druga pochodna  $x_{32}''$  zmienia znak ze zmieniającym się  $\gamma$ , oznacza to, że tworzy się tzw. odbita fala *kompozycyjna* (najpierw  $x_{32}''(0) < 0$ , tworzy się więc fala prosta z końcowym frontem w formie fali uderzeniowej  $x_{32}''(\tilde{\gamma}) > 0$  (por. rys.3.9b)).

W przypadku identycznej analizy i brzegu z warunkami mieszanymi znak drugiej pochodnej jest także zgodny z (3.71). Podobna analiza numeryczna została wykonana dla innych zestawów punktów, zawsze z jednoznacznym rezultatem. Typowe wykresy dla składowych  $x_{32}$ ,  $x_{31}$ ,  $x_{32}''$  w przypadku brzegu utwierdzonego pokazano na rys.3.9a,b.

a)



b)



Rys.3.9. a) Składowe gradientu deformacji b) drugiej pochodnej  $x_{32}''(\gamma)$  w punktach A, B, C

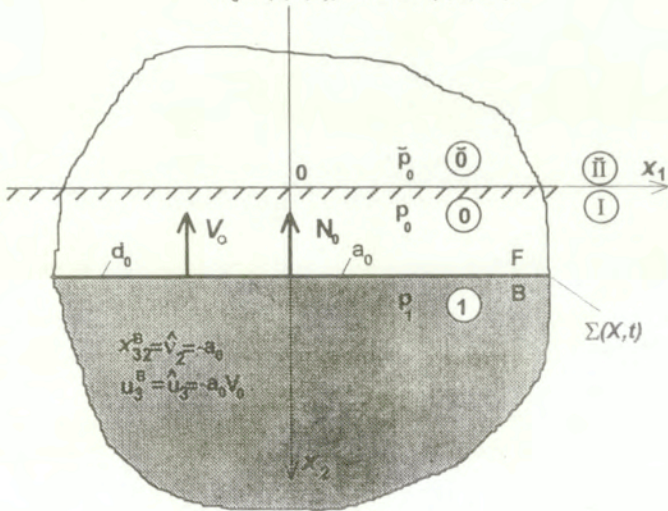
**ODBICIE I TRANSMISJA FALI PADAJĄCEJ  
W KIERUNKU NORMALNYM  
W MATERIALE NIEŚCISLIWYM**

**4.1. Fala padająca i jej parametry**

Dyskusja równań (3.44)-(3.49) sprowadza się do dwóch przypadków. W tym rozdziale rozpatrywany jest szczegółowo przypadek drugi gdy  $\sigma_2 \neq 0$ , (potencjał sprężysty ma postać  $W = \rho_R \sigma(I_1, I_2)$ ), a składowa gradientu deformacji  $x_{31}$  stale równa jest zeru  $x_{31} = v_1 = \bar{x}_{31} = \bar{v}_1 = 0$ . Układ równań dla końcowych wartości parametrów  $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}$  redukuje się do postaci (3.49). W tym przypadku fala pada prostopadłe do brzegu, a fronty fal odbitych i załamanych pozostają do niego równoległe.

Podstawowe wzory i zależności wynikają z równań podrozdziału 3.2. Zakładając, że kąt padania wynosi zero, wektory normalne do frontów fal i wektory polaryzacji fali padającej  $\mathbf{d}_0$ , odbitej  $\mathbf{d}$  i transmitowanej  $\bar{\mathbf{d}}$  mają postać:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Theta_0 &= 0, & \mathbf{N}_0 &= \mathbf{N} = (0, -1, 0), & \bar{\mathbf{N}} &= (0, 1, 0), \\ \mathbf{d}_0 &= (0, 0, 1), & \mathbf{d} &= \bar{\mathbf{d}} = (0, 0, \pm 1). \end{aligned}$$



Rys. 4.1. Fala uderzeniowa padająca w kierunku normalnym do brzegu

Ośrodki  $0, \bar{0}$  przed frontem padającej fali uderzeniowej są nieodkształcone i pozostają w spoczynku. Dla kąta  $\Theta_0=0$  zależności (3.7) przybierają prostszą postać

$$(4.2) \quad [u_3] = u_3^B = -a_0 V_0, \quad [x_{32}] = x_{32}^B = -a_0.$$

Wyrażenie dla prędkości propagacji padającej fali uderzeniowej nie ulega zmianie (por. (3.54)<sub>2</sub>). W obszarze stałego stanu za frontem padającej fali uderzeniowej gradient deformacji, jego odwrotność oraz prędkość cząstek są określone przez:

$$(4.3) \quad x_{i\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \hat{v}_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_{\alpha i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\hat{v}_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(4.4) \quad \mathbf{u} = (0, 0, u_3).$$

Podobnie jak w przypadku odbicia ukośnego wprowadzono oznaczenia

$$(4.5) \quad (x_{32})^B = \hat{v}_2, \quad x_{32}(\gamma) = v_2, \quad (u_3)^B = \hat{u}_3, \quad u_3(\gamma) = u_3.$$

Wartości składowych tensora naprężenia  $T_{R\alpha}$  i tensora funkcji materiałowych  $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}$  istotne w tym rozdziale obliczone w obszarze 1 i  $\bar{0}$  oraz w obszarach odbitej i załamanej fali prostej (por. rys.4.2) można otrzymać przyjmując  $\Theta_0=0$  w wyrażeniach (3.12), (3.13):

$$(4.6) \quad T_{R22} = T_{R33} = 2\rho_R[\sigma_1 + 2\sigma_2] + p, \quad T_{R32} = 2\rho_R(\sigma_1 + \sigma_2)v_2, \\ T_{R11} = 2\rho_R[\sigma_1 + \sigma_2(2 + v_2^2)] + p, \quad T_{R23} = -2\rho_R\sigma_2v_2 - pv_2, \quad T_{R12} = 0,$$

$$(4.7) \quad \sigma_{33}^{22} = 2(\sigma_1 + \sigma_2) + 4\sigma_{11}v_2^2, \quad \sigma_{23}^{22} = 4\sigma_{11}v_2, \quad \sigma_{12}^{22} = \sigma_{13}^{22} = 0, \\ \sigma_{33}^{11} = \sigma_{33}^{11} = 2(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \sigma_{13}^{12} = 4(\sigma_1 + \sigma_{11})v_2, \quad \sigma_{13}^{21} = \sigma_{23}^{11} = -2\sigma_2v_2.$$

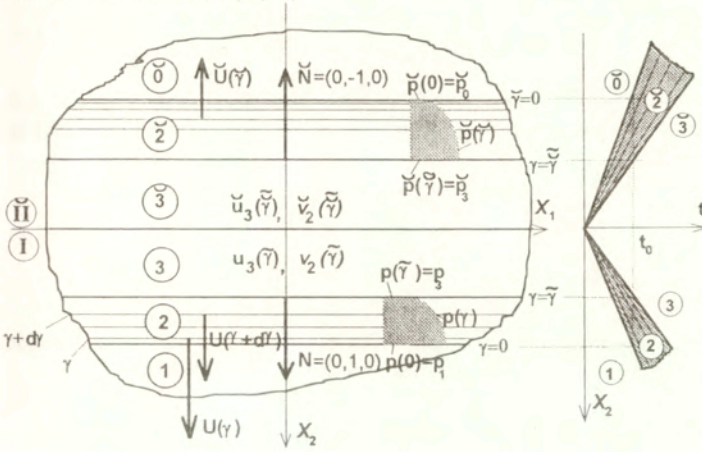
w tym przypadku  $I_1 = I_2 = 3 + v_2^2$ , pozostałe oznaczenia jak poprzednio (por.(3.25)).

#### 4.2. Konfiguracje falowe związane z odbiciem-transmisją fali uderzeniowej

Gdy fala uderzeniowa dociera do brzegu  $x_2=0$  część jej energii którą transportuje jest odbita, a część przepuszczona na granicy dwóch sztywno połączonych materiałów w postaci fal odbitych i transmitowanych. Zakłada się, że są to fale proste poruszające się od granicy materiałów. Fronty falowe  $\gamma=const$  w fali prostej odbitej i załamanej są płaszczyznami z normalnymi  $\mathbf{N} = (0, \pm 1, 0)$ . Fale odbite propagują się w obszar 1 już odkształcony przez falę padającą, a fale przepuszczone w obszar nieodkształcony i pozostający w spoczynku  $\bar{0}$ . Zagadnienie odbicia-transmisji sprowadza się podobnie jak w przypadku odbicia ukośnego do dopasowania fal w konfiguracji tak aby można było połączyć obszary stałego stanu  $3, \bar{3}$  przy granicy między materiałami (zgodne z



warunkami ciągłości na granicy) z obszarami stałego stanu 1,  $\bar{0}$ . Gradient deformacji oraz prędkość w obszarach odbitych i transmitowanych fal prostych mają postać analogiczną do (4.3), (4.4), (4.5).



Rys. 4.2. Konfiguracja złożona z odbitych i transmitowanych fal prostych

Zgodnie z (3.17), (4.1) składowe tensora akustycznego  $Q_{ij}^*$  (por. (2.21)) przybierają prostszą postać:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} Q_{ij}^* &= \sigma_{ij}^{22} \quad \text{dla } i=1,3, \quad Q_{2j}^* = 0 \quad \text{dla } i=2, \quad j=1,2,3 \\ Q_{i3}^* &= 0 \quad \text{dla } i=1,2, \quad Q_{33}^* = \sigma_{33}^{22} \quad \text{dla } i=3. \end{aligned}$$

Warunek propagacji (2.21), (3.20) redukuje się w tym przypadku do jeszcze prostszego równania, którego pierwiastki (wartości własne) są rzeczywiste

$$(4.9) \quad (\sigma_{33}^{22} - \rho_R U^2) u' = 0 \Rightarrow U(\gamma) = \pm \sqrt{\frac{\sigma_{33}^{22}}{\rho_R}} = \pm c \sqrt{1 + 3\eta v_2^2(\gamma)}.$$

Obu wartościom własnym odpowiada prawy wektor własny o postaci

$$(4.10) \quad \mathbf{u}' = (0, 0, f(x_{i\alpha})),$$

funkcja  $f(x_{i\alpha})$  (por. (2.24)) jest dowolną funkcją gradientu deformacji, skalującą wielkości pola. Równanie różniczkowe (2.11)<sub>2</sub> określające związek między gradientem deformacji i prędkością cząstek w obszarach odbitej i transmitowanej fali prostej 2,  $\bar{2}$  ma postać

$$(4.11) \quad Uv_2' + u_3' = 0, \quad \bar{U}\bar{v}_2' - \bar{u}_3' = 0.$$

Zakładając dla uproszczenia obliczeń;  $f = -U$ ,  $\bar{f} = \bar{U}$ , z trzech ostatnich zależności wynikają układy równań różniczkowych opisujące wielkości pola w obu obszarach 2,  $\bar{2}$  reprezentujących odbitą i transmitowaną falę prostą:

$$(4.12) \quad u_3' = -U, \quad v_2' = 1, \quad \bar{u}_3' = \bar{U}, \quad \bar{v}_2' = 1.$$

Równania te przy uwzględnieniu warunków początkowych w obszarze 1,  $\bar{0}$  (por.(4.2) oraz dla  $\bar{u}(0) = \bar{v}_2(0) = 0$ ) sprowadzają się do następujących rozwiązań w obu obszarach fal:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \text{obszar } 2 \quad u_3(\gamma) &= -\int_0^\gamma U(\lambda)d\lambda - a_0V_0, \quad v_2(\gamma) = \gamma - a_0, \\ \text{obszar } \bar{2} \quad \bar{u}_3(\bar{\gamma}) &= -\int_0^{\bar{\gamma}} \bar{U}(\lambda)d\lambda, \quad \bar{v}_2(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Geometryczna interpretacja równań (4.12) jest oczywista. Różniczkując  $\gamma = G(X_2, t)$  wzdłuż linii  $\gamma = \text{const}$  otrzymujemy (por. (2.9))

$$(4.14) \quad d\gamma = G_{,2} \frac{dX_2}{d\gamma} + \dot{G} \frac{dt}{d\gamma} = N_2 |\nabla G| \frac{dX_2}{d\gamma} - U(\gamma) |\nabla G| \frac{dt}{d\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{dX_2}{dt} = U(\gamma)$$

Krzywe (4.14)<sub>2</sub> są charakterystykami układu równań różniczkowych dla odbitej fali prostej (4.12)<sub>1,2</sub>. Trajektorie frontów falowych w płaszczyźnie  $(X_2, t)$  są dane przez charakterystyki równań ruchu w obszarze fali prostej. Identyczne rozważanie można przeprowadzić dla fali transmitowanej otrzymując  $dX_2 / dt = -\bar{U}(\bar{\gamma})$ .

Warunki ciągłości na granicy rozdziału obu materiałów (por.(3.38),(3.39)) sprowadzają się podobnie jak przy odbiciu ukośnym do postaci (3.39) (założono, że  $\bar{\rho}_R = \rho_R$ ). Zanim fala padająca dotrze do granicy  $X_2=0$ , trzy warunki spełnione są tożsamościowo, a z czwartego wynika związek dla ciśnień hydrostatycznych  $p$ :

$$(4.15) \quad \begin{aligned} u_3 = \bar{u}_3 = T_{R2} = \bar{T}_{R2} = 0, \quad \text{dla } i = 1, 3, \\ T_{R22} = \bar{T}_{R22} \Rightarrow p_0 - \bar{p}_0 = 2(\bar{C}_1 - C_1) + 4(\bar{C}_2 - C_2) + 12(\bar{C}_3 - C_3). \end{aligned}$$

Na granicy rozdziału między obszarami 3,  $\bar{3}$  warunek  $T_{12} = \bar{T}_{12}$  jest spełniony tożsamościowo, warunek  $T_{22} = \bar{T}_{22}$  jest równoważny (4.15) i niezależny od gradientu deformacji. Ostatecznie podstawienie składowych tensora funkcji materiałowych  $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}(x_{i\alpha})$  do dwóch pozostałych warunków (3.39) prowadzi do dwóch równań o postaci zbliżonej do (3.49) (zastosowano tu inną funkcję skalującą  $f(x_{i\alpha})$ , por. (4.12)).

$$(4.16) \quad \begin{aligned} T_{32} = \bar{T}_{32} \Rightarrow c^2(1 + \eta v_2^2(\bar{\gamma}))v_2(\bar{\gamma}) = \bar{c}^2(1 + \bar{\eta} \bar{v}_2^2(\bar{\gamma}))\bar{v}_2(\bar{\gamma}), \\ u_3(\bar{\gamma}) = \bar{u}_3(\bar{\gamma}). \end{aligned}$$

Aby funkcje  $U(\gamma)$  ( $\bar{U}(\bar{\gamma})$ ) mogły przedstawiać prędkości fal prostych, konieczne jest aby były monotonicznie malejącymi funkcjami jej parametru  $\gamma$  (lub  $\bar{\gamma}$ ) gdy

zmienia się on od zera do końcowej wartości  $\gamma = \tilde{\gamma}$  ( $\tilde{\gamma} = \tilde{\tilde{\gamma}}$ ). Czy rozwiązanie jest falą prostą, zależy to od znaku pochodnej

$$(4.17) \quad U(\gamma) = c\sqrt{1+3\eta v^2(\gamma)}; \quad \frac{dU}{dv_2} = \frac{3c^2\eta}{U} v_2(\gamma), \quad \frac{dU}{d\tilde{\gamma}} < 0 \quad \text{dla } \gamma \in (0, a_0).$$

Znak ten jest ujemny, gdy  $\gamma$  należy do przedziału  $(0, a_0)$ , z tego względu zgodnie z (4.13)<sub>2</sub> wynika, że końcowa wartość  $v_2(\tilde{\gamma})$  jest w tym przypadku ujemna. Żądanie aby  $v_2(\tilde{\gamma}) < 0$  sprowadza się do dwóch przypadków:

$$(4.18) \quad \begin{aligned} -a_0 < v_2(\gamma) < v_2(\tilde{\gamma}) < 0 & \quad \text{dla } 0 < \gamma < \tilde{\gamma} < a_0, \\ v_2(\tilde{\gamma}) < v_2(\gamma) < -a_0 & \quad \text{dla } \tilde{\gamma} < \gamma < 0. \end{aligned}$$

Z nierówności  $v_2(\tilde{\gamma}) < 0$  zgodnie z (4.16)<sub>1</sub> wynika natychmiast nierówność dla fali transmitowanej  $\tilde{v}_2(\tilde{\tilde{\gamma}}) < 0$ , a wartości składowej i parametru pozostają w granicach

$$(4.19) \quad \tilde{v}_2(\tilde{\tilde{\gamma}}) < \tilde{v}_2(\tilde{\gamma}) < 0 \quad \text{dla } \tilde{\tilde{\gamma}} < \tilde{\gamma} < 0.$$

Każdy z frontów w fali prostej jest określony przez wartość parametru  $\gamma$  (lub  $\tilde{\gamma}$ ) gdy zmienia się on od zera do końcowej wartości  $\tilde{\gamma}$  ( $\tilde{\tilde{\gamma}}$ ). Dla propagacji wiązek równoległych frontów falowych w fali prostej konieczne jest aby front oznaczony przez  $\gamma$  poprzedzał front  $\gamma+d\gamma$  (por. rys.4.2). Konsekwentnie jeśli prędkość fali prostej  $U(\gamma)$  jest funkcją malejącą gdy  $\gamma$  zmienia się od zera do końcowej wartości, front  $\gamma+d\gamma$  propaguje się z prędkością mniejszą niż front  $\gamma$  i fala odbita pozostaje falą prostą (4.18)<sub>1</sub>. Jeśli  $U(\gamma)$  jest funkcją rosnącą, front  $\gamma+d\gamma$  propaguje się z prędkością większą niż front  $\gamma$  i powstaje odbita fala uderzeniowa (4.18)<sub>2</sub>. Może się także zdarzyć, że w przedziale  $(0, \gamma)$  funkcja  $U(\gamma)$  jest jednocześnie monotonicznie malejącą i rosnącą funkcją  $\gamma$ . W tym przypadku fala może się składać z kombinacji fali prostej i uderzeniowej a znak pochodnej  $dU/d\gamma$  w odpowiednich przedziałach określa budowę takiej fali.

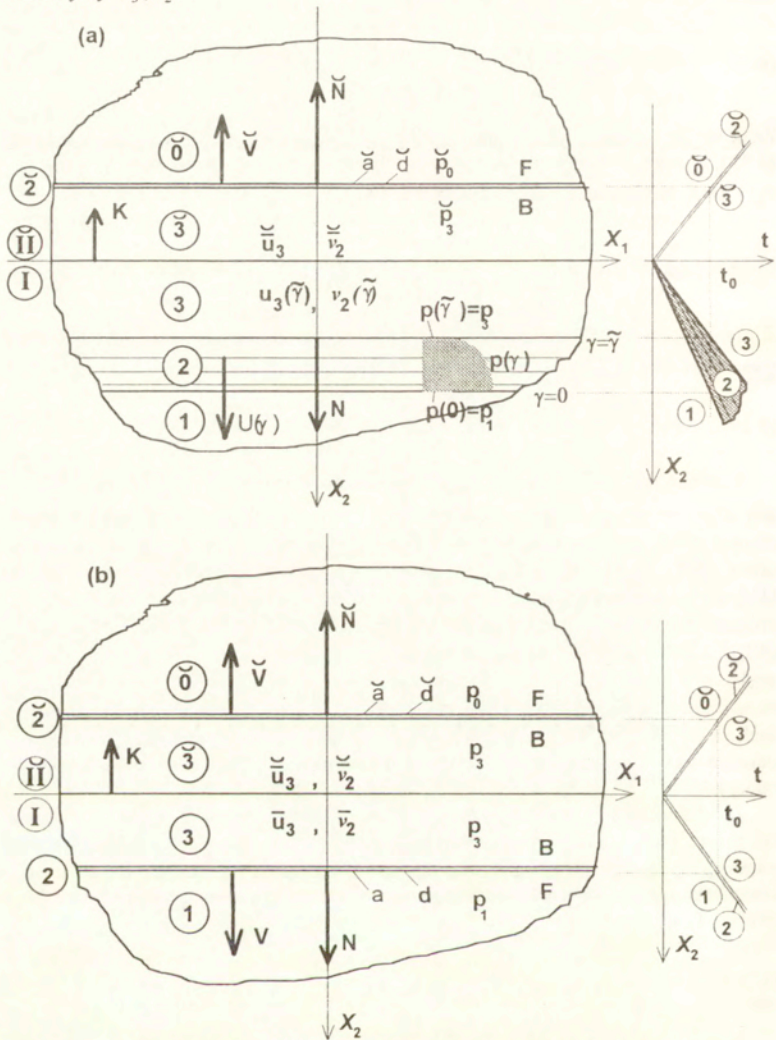
Zgodnie z (4.18)<sub>1</sub> absolutna wartość gradientu deformacji w obszarze 2 i prędkość fali prostej (4.9) maleją ze zmieniającym się parametrem od zera do końcowej wartości parametrem  $\gamma$ . Obszar 2 jest obciążającą falą prostą propagującą się w obszar materialny już zdeformowany przez falę padającą. Obszar odbitej fali prostej można określić (por. (rys 4.2))

$$(4.20) \quad c\sqrt{1+3\eta v_2^2(\tilde{\gamma})}t \leq X_2 \leq c\sqrt{1+3\eta a_0^2}t.$$

Jeżeli zachodzi warunek (4.18)<sub>2</sub> absolutna wartość składowej  $v_2$  gradientu deformacji oraz prędkość propagacji poszczególnych frontów falowych w fali prostej rosną ze zmianą parametru  $\gamma$ . Obszar 2 nie może być w tym przypadku falą prostą.

Modyfikacja rozwiązania polega na założeniu, że fala odbita jest falą uderzeniową propagującą się w kierunku  $\mathbf{N} = (0, 1, 0)$ . Równania ruchu (2.4) zastąpione są warunkami skoków na powierzchni nieciągłości (2.5), łączącymi odpowiednie wielkości w obszarach 1 i 3 po obu stronach frontu fali odbitej. Obszar 1 przed

frontem jest opisany przez (4.2). Wartości w obszarze stałego stanu za falą odbitą oznaczmy  $\bar{u}_3, \bar{v}_2$ .



Rys. 4.3. (a) odbita fala prosta i transmitowana fala uderzeniowa  
(b) odbita i transmitowana fala uderzeniowa

Skoki gradientu deformacji i prędkości wzdłuż frontu fali odbitej wynoszą

$$(4.21) \quad [v_2] = \bar{v}_2 + a_0, \quad [u_3] = \bar{u}_3 + a_0 V_0.$$

Z (4.18)<sub>2</sub> wynika, że  $[v_2] < 0$ . Oznaczając przez  $a = (0, 0, a_3)$ ,  $a = |a|$  oraz  $V$  odpowiednio wektor amplitudy fali odbitej, jej intensywność i prędkość propagacji otrzymamy z (4.21) i (2.5)

$$(4.22) \quad \bar{v}_2 = -a - a_0, \quad \bar{u}_3 = -aV - a_0V_0.$$

Z jednoczesnego spełnienia warunków dla skoków na froncie odbitej fali uderzeniowej ((2.5)<sub>2,3</sub>) wynika

$$(4.23) \quad [u_3]_2 = -[x_{32}]_2 N_2 V = -[v_2]_2 V, \text{ oraz } [u_3]_2 = a_0 V_0 \Rightarrow [v_2] < 0.$$

Zgodnie z (4.21)<sub>1</sub> wynika, że  $\bar{v}_2 < -a_0$ . Podstawowy układ równań wynikający z warunków ciągłości na granicy  $X_2=0$  zachowuje swą postać (4.16) ale końcowe wartości dla funkcji pola związane z falą prostą są zastąpione stałymi wartościami  $\bar{u}_3, \bar{v}_2$  w obszarze 3, intensywność  $a$  spełnia rolę parametru fali i równania (4.12)<sub>1,2</sub> są zastąpione przez (4.22). Równanie dla prędkości propagacji odbitej fali uderzeniowej (por. (2.8)) przybiera postać

$$(4.24) \quad [T_{R32}] = \rho_R [v_2] V^2 \Rightarrow V^2 = c^2 (1 + \eta (\bar{v}_2^2 - \bar{v}_2 a_0 + a_0^2)).$$

Dla stateczności odbitej fali uderzeniowej musi być spełnione kryterium Laxa (2.7). Charakterystyczne (akustyczne) prędkości w obszarach materialnych za i przed frontem fali odbitej można obliczyć z (4.9) podstawiając za  $v_2$  odpowiednio  $\bar{v}_2$  i  $a_0$ . Otrzymuje się wyrażenia

$$(4.25) \quad U^B = U(\bar{v}_2) = c\sqrt{1 + 3\eta\bar{v}_2^2}; \quad U^F = U(a_0) = c\sqrt{1 + 3\eta a_0^2}.$$

Dla obliczonych powyżej prędkości z kryterium Laxa wynika nierówność

$$(4.26) \quad 3\bar{v}_2^2 \geq \bar{v}_2^2 - \bar{v}_2 a_0 + a_0^2 \geq 3a_0^2.$$

Nierówność ta zachodzi dla  $[v_2] < 0$  (por. (4.18)<sub>2</sub>) oraz dowolnej intensywności fali padającej  $a_0 > 0$ . Odbita fala uderzeniowa propagując się do obszaru odkształconego zwiększa jego deformację. Obszar odpowiadający tej fali zdefiniowany jest jako  $X_2 = Vt$  (rys 4.3a).

Identyczna analiza dla obszaru  $\bar{2}$  wykazała, że fala transmitowana nie może być falą prostą. Założenie, że obszar  $\bar{2}$  jest transmitowaną falą uderzeniową propagującą się w kierunku  $\bar{N} = (0, -1, 0)$  w obszar  $\bar{0}$  nieodkształcony i pozostający w spoczynku prowadzi do równań

$$(4.27) \quad \bar{v}_2 = -\bar{a}, \quad \bar{u}_3 = -\bar{a}\bar{V}, \quad \bar{V}^2 = c^2 (1 + \eta\bar{v}_2^2),$$

gdzie  $\bar{v}_2, \bar{u}_3$  są wartościami gradientu i prędkości w obszarze stałego stanu  $\bar{3}$  za frontem fali transmitowanej, a  $\bar{V}, \bar{a}$  oznaczają jej prędkość propagacji i intensywność. Prędkości charakterystyczne dla obszarów  $\bar{3}$  i  $\bar{0}$  wynoszą

$$(4.28) \quad \left( \bar{U}^B(\bar{v}_2) \right)^2 = \bar{c}^2(1 + 3\bar{\eta}\bar{v}_2^2), \quad (\bar{U}^F(0))^2 = \bar{c}^2.$$

Kryterium stateczności Laxa jest spełnione. Transmitowana fala uderzeniowa o równaniu  $x_2 = -\bar{V}t$  propagując się do obszaru nieodkształconego powoduje jego deformację.

### 4.3. Analiza numeryczna i możliwe przypadki fal tworzących konfigurację

Wyniki uzyskane w poprzednim podrozdziale otrzymano przy założeniu, że układ równań wynikający z warunków ciągłości (4.16) ma rozwiązanie. W tym podrozdziale rozważa się szczegółowo kwestię dla jakiej kombinacji parametrów charakteryzujących dwa materiały oraz falę padającą rozwiązania takie są możliwe. Analizę numeryczną przeprowadzono dla kompozytów składających się z dwóch różnych gatunków gumy (por. dodatek 1).

*i) fala odbita i transmitowana są falami uderzeniowymi:* przypadek taki zachodzi, gdy spełnione są nierówności (4.18)<sub>2</sub>. Zakłada się początkowo, że wektory polaryzacji tych fal mają postać  $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}} = (0, 0, 1)$  (łatwo zauważyć dalej, że  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$ ,  $\bar{\mathbf{d}} = (0, 0, -1)$ , (Kosiński, 1989)). Dla fali odbitej i transmitowanej otrzymujemy (por. rys.4.3b):

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \bar{u}_3 &= [u_3]_2 - a_0 V_0 = -aV - a_0 V_0, & \bar{v}_2 &= [v_2]_2 - a_0 = -a - a_0, \\ \bar{\bar{u}}_3 &= [u_3]_2 = -\bar{a}\bar{V}, & \bar{\bar{v}}_2 &= [v_2]_2 = -a. \end{aligned}$$

Podstawiając obie powyższe równości do warunków ciągłości (4.16) otrzymujemy układ dwóch równań dla dwóch parametrów  $\bar{a}$  i  $a$ :

$$(4.30) \quad \bar{a}\bar{V} = aV + a_0 V_0, \quad \bar{c}^2(1 + \bar{\eta}\bar{a}^2)\bar{a} = c^2(1 + \eta(a + a_0)^2)(a + a_0).$$

Ostatnie równanie przybiera postać

$$(4.31) \quad \bar{a}^3 + 3p\bar{a} - 2q = 0,$$

gdzie  $p = (3\bar{\eta})^{-1}$ ,  $q = (c/\bar{c})^2(3\bar{\eta})^{-1}(1 + \eta(a + a_0)^2)(a + a_0)$ , oba współczynniki  $p$ ,  $q$  dla rzeczywistych materiałów ( $\bar{\eta} > 0$ ), por. (dodatek 1)), są większe od zera;  $p > 0$ ,  $q > 0$ . Z teorii równań algebraicznych wynika, że w tym przypadku równanie (4.31) ma tylko jeden nieujemny pierwiastek rzeczywisty

$$(4.32) \quad \bar{a} = \frac{2}{\sqrt{3\bar{\eta}}} \sinh \frac{\varphi}{3},$$

gdzie  $\sinh \varphi = q / p^{3/2}$ . Podstawienie (4.32) do (4.30)<sub>1</sub> pozwala obliczyć intensywność fali odbitej  $a$ . Przeprowadzona analiza numeryczna wykazała, że dla każdej z następujących kombinacji materiałowych  $A = I - \bar{II}$ ,  $B = II - \bar{III}$ ,  $C = I - \bar{III}$  (por. dodatek 1), równanie to posiada jeden rzeczywisty dodatni pierwiastek  $a$  który jest funkcją  $a_0$ . Rezultaty obliczeń przedstawia rys.4.4a. Obszar materiałny za propagującą się falą uderzeniową powinien pozostawać sprężysty, skoki nieciągłości nie mogą być dowolne, należy przeprowadzić oszacowanie dla dopuszczalnej intensywności fali. W pracy używa się oszacowania  $a_0 < 2.66$  (Kosiński, 1981b). Składowe gradientu deformacji  $\bar{v}_2, \bar{\bar{v}}_2$  w funkcji  $a_0$  w obszarach stałego stanu  $\bar{3}, \bar{\bar{3}}$  dla kombinacji materiałowych A, B, C prezentuje rys.4.4a, który pokazuje dodatkowo, że krzywe  $\bar{v}_2 = \bar{\bar{v}}_2(a_0)$  i  $\bar{v}_2 = \bar{v}_2(a_0)$  przecinają się dla pewnej wartości parametru  $a_0$ . Możliwe są więc różne kombinacje materiałowe, dla których padająca fala uderzeniowa generuje fale uderzeniowe transmitowane (odbite) o tej samej intensywności.

ii) *odbitya fala prosta i transmitowana fala uderzeniowa*: spełnienie warunku (4.18)<sub>1</sub> wiąże się z propagacją odbitej fali prostej. Wartości dla ostatniego frontu tej fali wynoszą (por. (4.13)<sub>1,2</sub>)

$$(4.33) \quad u(\tilde{\gamma}) = - \int_0^{\tilde{\gamma}} U(\lambda) d\lambda - a_0 V_0, \quad v_2(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma} - a_0 \quad \text{oraz} \quad 0 < \tilde{\gamma} < a_0.$$

Stałe wartości w obszarze  $\bar{3}$  za transmitowaną falą uderzeniową (rys.4.3b) zdefiniowane są przez (4.29)<sub>2</sub>. Podstawienie do warunków ciągłości (4.16) prowadzi do dwóch równań dla końcowych wartości parametrów falowych  $\bar{\gamma}$  i  $\bar{a}$

$$(4.34) \quad \bar{a}\bar{V} = \int_0^{\bar{\gamma}} U(\lambda) d\lambda + a_0 V_0, \quad \bar{c}^2(1 + \bar{\eta}\bar{a}^2)\bar{a} = c^2(1 + \eta(\bar{\gamma} - a_0)^2)(a_0 - \bar{\gamma}).$$

Wobec założenia, że  $\bar{a} > 0$  oraz zgodnie z (2.5)<sub>2</sub> ostatnie równanie jest równoważne (4.30)<sub>2</sub>, jeśli parametr  $a$  zostanie w nim zastąpiony przez  $-\bar{\gamma}$ , rozwiązanie dla  $\bar{a}$  ma postać (4.32). Całkując równanie (4.33)<sub>1</sub> otrzymuje się zależność

$$(4.35) \quad w(\tilde{\gamma}, \bar{a}) = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{3\eta}{\rho_R}} \left( a_0(\psi - \phi) - \tilde{\gamma}\psi + \frac{1}{3\eta} \ln \left| \frac{\phi - a_0}{\psi + \tilde{\gamma} - a_0} \right| \right) + \frac{\bar{a}\bar{c}(1 + \bar{\eta}\bar{a}_0^2)}{\sqrt{\bar{\rho}_R}} - \frac{a_0 c(1 + \eta a_0^2)}{\sqrt{\rho_R}} = 0$$

gdzie  $\phi(a_0) = (a_0 + 1/(3\eta))^{1/2}$ ,  $\psi(\tilde{\gamma}, a_0) = ((\tilde{\gamma} - a_0)^2 + 1/(3\eta))^{1/2}$ . Podstawienie (4.32) do (4.35) prowadzi do równania dla końcowej wartości parametru  $\tilde{\gamma}$  fali odbitej. Obliczenia numeryczne pokazują, że dla każdej z następujących kombinacji materiałowych:  $D = II - \bar{I}$ ,  $E = III - \bar{II}$ ,  $F = III - \bar{I}$  równanie to posiada jeden dodatni pierwiastek  $\tilde{\gamma}$  będący funkcją  $a_0$ . Składowe gradientu deformacji  $\bar{v}_2$  i  $v_2(\tilde{\gamma})$  w funkcji  $a_0$  w obszarach  $\bar{3}, \bar{\bar{3}}$  za propagującą się falą prostą oraz transmitowaną falą uderzeniową dla kombinacji materiałowych D, E i F przedstawia rys.4.4b. Krzywe

$\vec{v}_2 = \vec{v}_2(a_0)$  oraz  $v_2 = v_2(\tilde{\gamma}, a_0)$  przecinają się na wykresie przy pewnej wartości parametru  $a_0$ , wynika stąd, że możliwe są różne kombinacje materiałów dla których fale transmitowane (odbite) są opisane przez ten sam parametr lecz związane z nimi fale odbite (transmitowane) mają różne parametry.

Na rysunkach w obszarach 3,  $\bar{3}$  jedyna niezerowa składowa gradientu deformacji jest zawsze mniejsza od zera, wynika stąd, że wektor polaryzacji odbitej (transmitowanej) fali uderzeniowej ma kierunek przeciwny (zgodny) z wektorem polaryzacji fali padającej (Kosiński, 1989).

iii) *istnieje tylko fala transmitowana*: fala padająca ulega całkowitemu przepuszczeniu gdy  $a = 0$  lub  $\tilde{\gamma} = 0$  oraz  $\bar{a} \neq 0$ . Równania ciągłości (4.30) (w przypadku  $\bar{\rho}_R \neq \rho_R$ ) redukują się do postaci

$$(4.36) \quad \bar{\rho}_R \vec{V} = \rho_R V_0, \quad \bar{\rho}_R a_0 = \rho_R \bar{a}.$$

Zagadnienie ma rozwiązanie  $\bar{a} = (\bar{\rho}_R / \rho_R) a_0$  pod warunkiem, że parametry kombinacji materiałów spełniają warunek

$$(4.37) \quad a_{0(kr)}^2 = \frac{\bar{\rho}_R^3 (\bar{\rho}_R \bar{c}^2 - \rho_R c^2)}{\rho_R (\rho_R^2 \eta c^2 - \bar{\rho}_R^2 \bar{\eta} \bar{c}^2)} = \frac{(\bar{c}^2 - c^2)}{4(C_3 - \bar{C}_3)}.$$

Dla uproszczenia założono dalej, że  $\bar{\rho}_R = \rho_R$ , i po podstawieniu parametrów materiałowych otrzymano wyrażenie po prawej stronie. Porównanie parametrów materiałowych (dodatek 1) pokazuje, że warunek (4.37) może być spełniony tylko dla kombinacji materiałowych  $A = I - \bar{I}$ . Analiza numeryczna wykazała, że wartość intensywności początkowej  $a_{0(cr)} = 4.74$  odpowiadająca warunkowi (4.37) leży poza przedziałem dopuszczalności (0, 2.66). Wynika stąd, że dla rozpatrywanych tu przypadków, transmisji fali uderzeniowej zawsze towarzyszy odbicie.

iv) *istnieje tylko fala odbita*: fala padająca ulega całkowitemu odbiciu gdy  $\bar{a} = 0$  oraz  $a \neq 0$  ( $\tilde{\gamma} \neq 0$ ). Zgodnie z warunkiem (4.18) dla odbitej fali uderzeniowej  $a > 0$ , a dla odbitej fali prostej  $\tilde{\gamma} > 0$ . Jest widoczne, że ani wyrażenie (4.30) ani (4.34) które przybierają odpowiednio postaci (4.38), (4.39) nie mogą być spełnione dla  $a > 0$  i  $\tilde{\gamma} > 0$ .

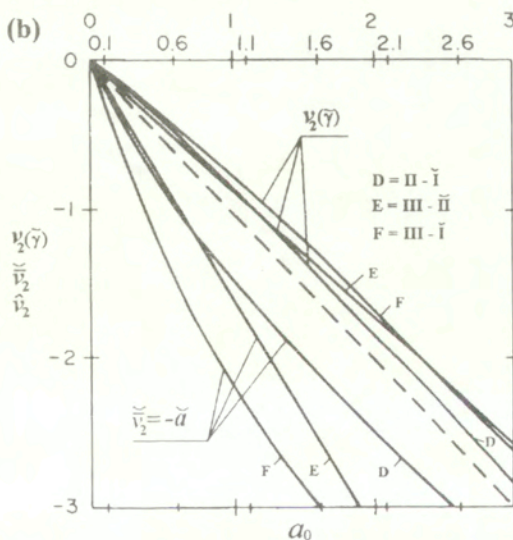
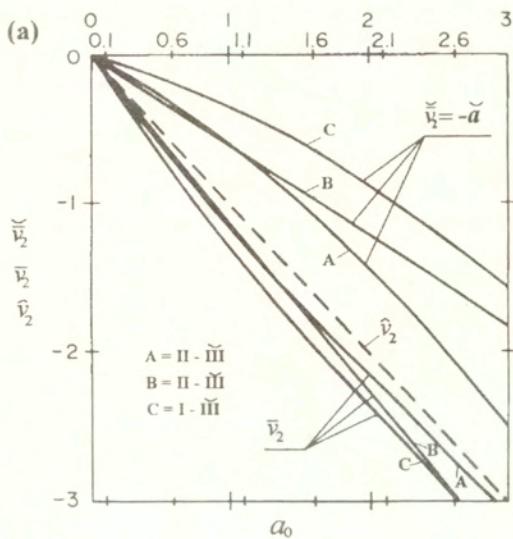
$$(4.38) \quad aV + a_0 V_0 = 0, \quad c^2 (1 + \eta (a + a_0)^2) (a + a_0) = 0.$$

$$(4.39) \quad \int_0^{\tilde{\gamma}} U(\lambda) d\lambda + a_0 V_0 = 0, \quad c^2 (1 + \eta (\tilde{\gamma} - a_0)^2) (\tilde{\gamma} - a_0) = 0.$$

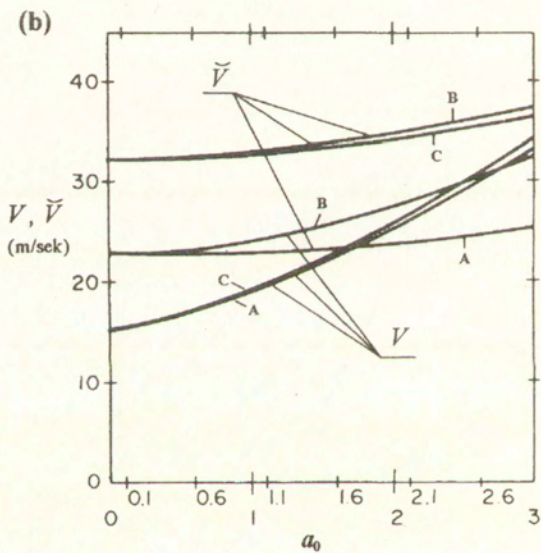
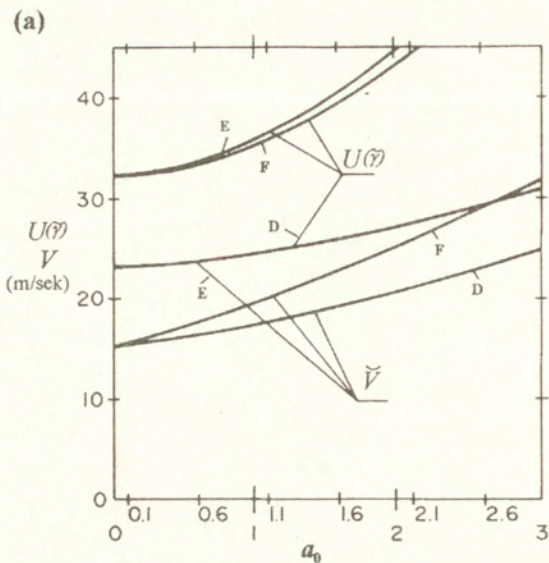
Odbicie bez transmisji nie jest więc możliwe. W przypadku, gdy półprzestrzeń  $X_2 < 0$  jest próżnią istnieje tylko fala odbita. W tym przypadku warunki ciągłości (4.16) redukują się do pojedynczego równania  $v_2(\tilde{\gamma}) = 0$ , ze składową prędkości  $u_3$  wynikającą z warunku zgodności (4.12)<sub>1</sub> i warunku początkowego (4.2)<sub>1</sub>. Przypadek taki odpowiada brzegowi swobodnemu  $X_2 = 0$ . Istnieje w tym przypadku rozwiązanie w postaci odbitej fali prostej (Duszczyk, Kosiński, Wesołowski, 1986), która propagując



się w obszarze już odkształconym powoduje jego całkowite odciążenie. Zagadnienie odbicia zostało omówione w następnym podrozdziale 4.5.



Rys. 4.4. Składowa gradientu deformacji  $v_2$  w funkcji  $\alpha_0$ , dla różnych kombinacji materiałowych: (a) A = I - II, B = II - III, C = I - III, (b) D = II - I, E = III - II, F = III - I



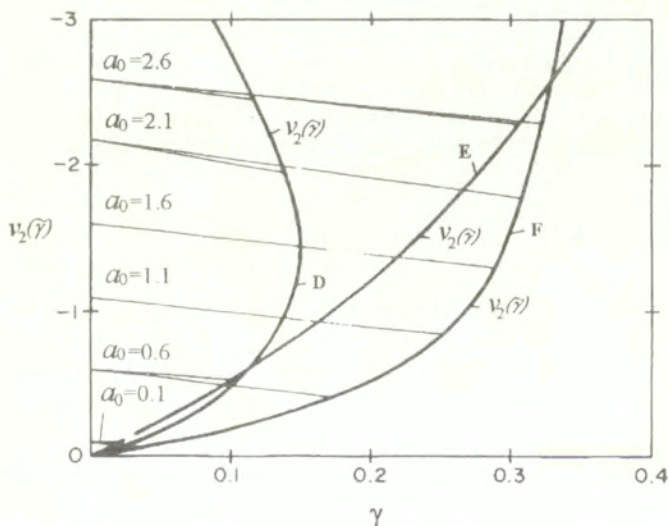
Rys.4.5. Prędkości propagacji fal odbitych i transmitowanych w funkcji  $a_0$ ;  
 (a) odbita fala prosta i transmitowana fala uderzeniowa,  
 (b) odbita i transmitowana fala uderzeniowa

#### 4.4. Uwagi końcowe

Rozwiązania numeryczne otrzymane dla kilku kombinacji materiałów gumopodobnych (dodatek 1) i różnych intensywności fali padającej potwierdzają wniosek, że fala transmitowana jest zawsze falą uderzeniową, a fala odbita jest falą uderzeniową lub prostą. Typ fali odbitej zależy od własności materiałowych dwuskładnikowego kompozytu oraz od tego w którym z materiałów propaguje się fala padająca. Dla kombinacji materiałowych *A, B i C* (rys.4.4a) fala odbita jest falą uderzeniową, a dla odwrotnych kolejności tych samych zestawień materiałów *D, E i F* falą prostą (rys.4.4b).

Z warunku ciągłości dla prędkości na brzegu  $x_2=0$  wynika pewien związek energetyczny dla intensywności i prędkości propagacji fal; padającej, transmitowanej i odbitej:  $\bar{a}\bar{V} = aV + a_0V_0$ . Obliczenia numeryczne wykazały, że człon  $aV$  jest mały w porównaniu  $a_0V_0$ . Oznacza to, że główna część energii padającej fali uderzeniowej jest użyta na formowanie się transmitowanej fali uderzeniowej. Wykresy na rys.4.4 pokazują, że zachodzi  $\bar{a} < a_0$  w przypadku odbitej fali uderzeniowej oraz  $\bar{a} > a_0$ , gdy fala odbita jest falą prostą. Intensywność odbitej fali uderzeniowej jest stosunkowo mała w porównaniu z  $a_0$ , a obszar zmienności w odbitej fali prostej jest także mały.

Wykresy prędkości propagacji dla fali odbitej i załamanej dla sześciu kombinacji materiałowych w funkcji  $a_0$  przedstawia rys.4.5. Liniowa zależność składowej  $v_2(\gamma)$  gradientu deformacji w obszarze fali prostej w funkcji jej parametru  $\gamma$  (por.(4.13)<sub>2</sub>) dla różnych wartości  $a_0 \in (0, 2.66)$ , została przedstawiona na rys.4.6. Narysowano też obwiednie  $v_2(\bar{\gamma})$  dla końcowych wartości parametru fali prostej  $\gamma$ . Dla kombinacji materiałowych *D* obszar zmienności parametru  $\gamma$  maleje gdy  $a_0$  zmienia się od  $\sim 1.6$  do 2.66.



Rys.4.6. Wartości składowej gradientu deformacji  $v_2$  w obszarze odbitej fali prostej w funkcji parametru falowego  $\gamma$ .

#### 4.5. Odbicie normalne

Przedstawiony jest przypadek, gdy istnieje tylko obszar materialny I ( $X_2 > 0$ , rys. 4.1), fala uderzeniowa padając prostopadle do jego brzegu  $X_2 = 0$  ulega odbiciu. Rozpatrywany jest brzeg swobodny, utwierdzony oraz z mieszanymi warunkami brzegowymi. Fronty wszystkich fal w konfiguracjach są równoległe do brzegu  $X_2 = 0$  oraz obowiązują dotychczasowe wzory i oznaczenia dla obszaru  $X_2 > 0$ . W tym przypadku wynikają następujące uproszczenia dla rozwiązań (Duszczyk, Kosiński, Wesołowski, 1986):

*i) mieszane warunki brzegowe:* z trzech warunków brzegowych dwa spełnione są tożsamościowo:  $u_3 = T_{R12} = 0$  (por. (4.6)). Drugie naprężenie styczne znika, gdy na brzegu  $X_2 = 0$  znika składowa  $v_2 = 0$ . Całkując pierwszą parę równań (4.12) przy uwzględnieniu warunków początkowych (4.2) oraz warunku brzegowego  $v_2 = 0$ , otrzymuje się parę równań opisującą gradient deformacji i prędkość w obszarze 2 identyczną z (4.13)<sub>1</sub>. Inny jest jedynie wynikający ze spełnienia warunku brzegowego przedział zmienności parametru  $\gamma$ .

$$(4.40) \quad u_3(\gamma) = -\int_0^\gamma U(\lambda) d\lambda - a_0 V_0, \quad v_2(\gamma) = \gamma - a_0, \quad 0 \leq \gamma \leq a_0 \Rightarrow -a_0 \leq v_2(\gamma) \leq 0.$$

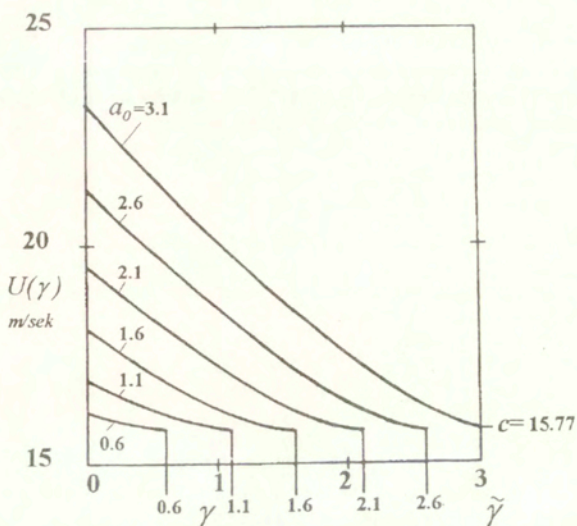
Podstawienie (4.40)<sub>2</sub> do (4.9) uzupełnia rozwiązanie. Czy może ono reprezentować falę prostą zależy od znaku stałej  $\eta$  w wyrażeniu  $U^2 = c^2(1 + 3\eta v_2^2(\gamma))$ . Stała  $\eta$  ma charakter czysto materiałowy w rozpatrywanych tu przypadkach zachodzi warunek  $\eta > 0$  (por. dodatek 1) i prędkość propagacji  $U(\gamma)$  maleje, gdy  $v_2(\gamma)$  zmienia się od  $-a_0$  (przedni front) do zera (końcowy front) fali prostej. Fronty falowe parametryzowane większymi wartościami  $v_2(\gamma)$ , propagują się z coraz mniejszymi prędkościami (por. rys. 4.7). W płaszczyźnie  $(X_2, t)$  (rys. 4.3a) odpowiednie charakterystyki tworzą rozwijający się "wachlarzyk" promieni wychodzący z początku układu współrzędnych. W tym przypadku rozwiązanie (4.9) reprezentuje falę prostą propagującą się do obszaru już zdeformowanego i odciążającą go z powrotem do stanu zerowego (nieodkształconego) jaki istniał przed propagacją fali padającej. Obszar 2 fali prostej można zapisać jako

$$(4.41) \quad ct \leq X_2 \leq c\sqrt{1 + 3\eta a_0^2} t.$$

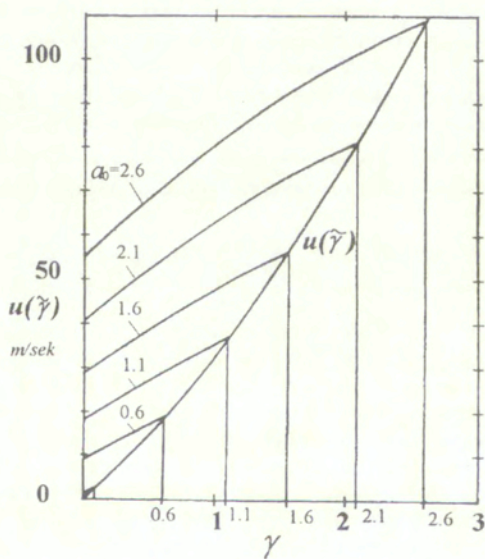
W przypadku, gdy parametr materiałowy  $\eta < 0$ , powstaje stateczna odbita fala uderzeniowa (Duszczyk, Kosiński, Wesołowski, 1986).

Na rys. 4.7 pokazano wykresy dla prędkości propagacji (por. (4.17)) w materiale I (por. dodatek 1) dla kilku wartości intensywności fali padającej. Składowa  $v_2$  gradientu deformacji jest liniową funkcją parametru  $\gamma$ .

Z bezpośredniego całkowania równania (4.40)<sub>1</sub> wynika wyrażenie dla prędkości cząstek ośrodka  $u_3(\gamma)$  (por. (4.35)) oraz (Duszczyk, Kosiński, Wesołowski, 1986)). Wyniki obliczeń przedstawione na rys. 4.8 pokazują, że wykresy dla większych intensywności bardziej się zakrzywiają. Dla małych wartości  $a_0$  krzywa  $u_3(\gamma)$  jest prawie linią prostą.



Rys. 4.7. Prędkość propagacji odbitej fali prostej  $U(\gamma)$  w funkcji parametru fali  $\gamma$



Rys. 4.8. Związek między prędkością cząstek materialu  $u_3(\gamma)$  i parametrem falowym  $\gamma$ .

ii) *brzeg utwierdzony*: cząstki materialne na brzegu obszaru  $X_2 = 0$  pozostają nieruchome, znika jedyna niezerowa składowa prędkości  $u_3 = 0$ . W tym przypadku wygodniej jest wybrać składową prędkości  $u_3$  jako parametr określający położenia frontów fal w odbitej fali prostej. Dlatego w równaniu (4.11)<sub>1</sub> należy przyjąć inną funkcję skalującą ( $f(x_{1\alpha}) = 1$ ). Zamiast pierwszej pary równań (4.12) otrzymuje się

$$(4.42) \quad u_3' = 1, \quad v_2' = -\frac{1}{U(v_2)} \Rightarrow \frac{dv_2}{du_3} = -\frac{1}{U(v_2)}.$$

Całkując z uwzględnieniem warunku brzegowego oraz warunków początkowych (4.2) otrzymuje się równania

$$(4.43) \quad u_3 = \gamma - a_0 V_0, \quad v_2 = -\int_0^\gamma U^{-1}(\lambda) d\lambda - a_0, \quad \text{dla } -a_0 V_0 \leq u_3 \leq 0.$$

Z (4.42)<sub>2</sub> wynika, że  $v_2(u_3)$  jest malejącą funkcją  $u_3$  tzn.  $v_2(0) < -a_0$ . Skoro w obszarze odbitej składowa  $v_2$  ma stałą wartość ujemną, znak pochodnej prędkości propagacji jest zgodny ze znakiem  $\eta$

$$(4.44) \quad \frac{dU(u_3)}{du_3} = \frac{c^2}{2U} 3\eta 2v_2 \frac{dv_2}{du_3} = -3c^2 \eta U^{-2} v_2.$$

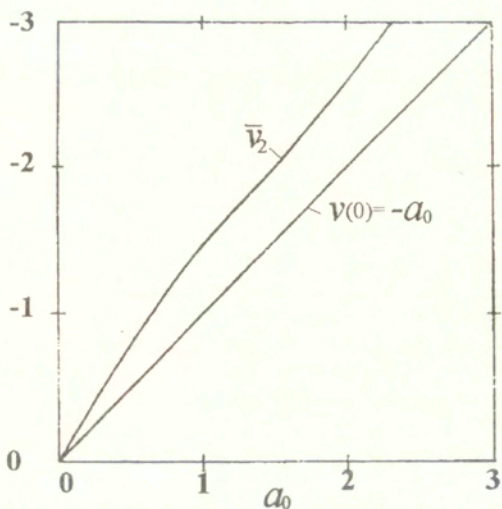
Jeżeli  $\eta > 0$  (tak jak w rozpatrywanych tu przypadkach, dodatek 1),  $U(u_3)$  jest rosnącą funkcją parametru  $u_3$  i rozwiązanie (4.9) nie może reprezentować fali prostej. Zakłada się więc, że fala odbita jest falą uderzeniową, obszar 2 (rys.4.3b). W obszarze stałego stanu 3 za frontem odbitej fali uderzeniowej składowa gradientu deformacji wynosi  $\bar{v}_2$ , natomiast jej skok na froncie 2 równy jest  $[v_2]_2 = \bar{v}_2 + a_0$ , skok prędkości wynosi  $[u_3] = -[v_2]V$  i jednocześnie  $[u_3] = a_0 V_0$ . Z porównania warunków dla skoków wynika równanie dla składowej gradientu deformacji  $\bar{v}_2$  za frontem fali:

$$(4.45) \quad -(\bar{v}_2 + a_0)V = a_0 V_0.$$

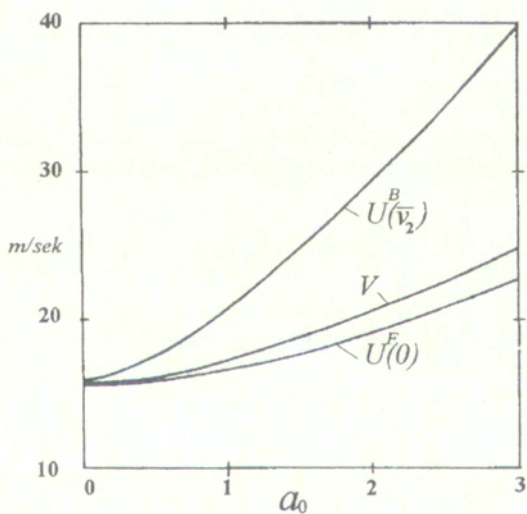
Podstawiając wartości dla prędkości propagacji (por. (4.24)) otrzymuje się równanie algebraiczne trzeciego rzędu względem  $\bar{v}_2$  ze współczynnikami zależnymi od  $a_0$ ,  $\eta$ . Równanie to rozwiązano metodą Newtona-Raphsona dla kilku wartości intensywności fali padającej. Nierówność  $v_2(0) < -a_0$  pozwala wybrać jednoznacznie rzeczywisty pierwiastek. Wyniki graficzne prezentuje rys.4.9

Dyskusja warunku stateczności odbitej fali uderzeniowej przebiega dalej dokładnie jak w przypadku odbicia-transmisji ((4.22)<sub>1</sub>-(4.27)). Fala odbita jest stateczna dla dowolnej intensywności fali padającej, inna tylko niż w przypadku odbicia-transmisji jest jedynie wartość składowej  $\bar{v}_2$  za frontem fali odbitej.

Wykresy prędkości propagacji związane z warunkiem stateczności odbitej fali uderzeniowej przedstawia rys.4.10.



Rys. 4.9. Składowa gradientu deformacji  $\bar{v}_2$  za frontem odbitej fali uderzeniowej



Rys. 4.10. Prędkości propagacji odbitej fali uderzeniowej  $V$ , oraz fal akustycznych  $U^B(\bar{v}_2)$  oraz  $U^F(0)$

iii) *brzeg swobodny*: na brzegu swobodnym  $X_2 = 0$ , znika wektor naprężenia (por. iii) w podrozdziale 3.4). Z trzech warunków dla wektora naprężenia (por. (4.6)) jeden  $T_{R12} = 0$  zachodzi tożsamościowo, drugi  $T_{R32} = 0$  jest spełniony gdy na brzegu  $X_2 = 0$  znika składowa  $v_2 = 0$  (identycznie jak w przypadku pierwszym i), a trzeci prowadzi do równości

$$(4.46) \quad T_{R22} = 0 \Rightarrow p_3 = p_0 = -2(C_1 + 2C_2 + 6C_3),$$

która jako niezależna od gradientu deformacji obowiązuje w obszarze 0 przed odbiciem oraz w obszarze 3 po odbiciu. W obszarze fali prostej funkcja  $p(\gamma)$  jest ciągła, lecz doznaje skoku, gdy obszar 2 rozdzielający obszary stałego stanu 3 i 1 jest powierzchnią nieciągłości (rys.3.8b). Aby znaleźć wartość  $p_1$  w obszarze 1 wykorzystujemy dwa pozostałe warunki dla skoków (2.5)<sub>1</sub> (z (2.5)<sub>1</sub>, dla  $i=3$  wynika wzór dla prędkości propagacji (4.25)). Warunek  $[T_{R12}] = 0$  zachodzi tożsamościowo, a warunek  $[T_{R22}] = 0$  wraz z (4.2)<sub>2</sub> pozwala obliczyć skok funkcji  $p$ . Wartość tej funkcji w obszarze stałego stanu przed frontem fali wynosi

$$(4.47) \quad p_1 = p_3 - 4C_3 a_0^2.$$

W omawianym tu przypadku obszar 2 jest opisany równaniami (4.40) (na brzegu  $X_2 = 0$  znika składowa  $v_2 = 0$ ) i gradient deformacji oraz prędkość są ciągłymi funkcjami parametru falowego  $\gamma$  w przedziale  $0 \leq \gamma \leq a_0$ . Pochodna funkcji skalarnej  $p'$  może być obliczona z równania (2.20). Równanie to zostało wyprowadzone dla dowolnego jednorodnego nieściśliwego materiału sprężystego i dowolnej deformacji. W rozważanym tu przypadku szczególnym można sprowadzić je do postaci

$$(4.48) \quad p' = \frac{\rho_R u_3^i \sigma_{33}^{22}}{U(\gamma)} = -8C_3 v_2(\gamma).$$

Bezpośrednie całkowanie tego równania przy uwzględnieniu ciągłości funkcji w obszarach 1-2-3 tj.  $p(0) = p_1$ ,  $p(\tilde{\gamma}) = p_3$  (rys.3.8a), gdzie wartości  $p_1, p_3$  wynikają z (4.46) i (4.47) prowadzi do równania

$$(4.49) \quad p(\gamma) = -4C_3 (v_2(\gamma))^2 + p_0.$$

Równanie to spełnia oba warunki ciągłości. Oznacza to, że zagadnienie odbicia dla brzegu swobodnego jest równoważne przypadkowi odbicia przy mieszanych warunkach brzegowych i ma rozwiązanie w postaci (4.40) wraz z dodatkowym równaniem (4.49) określającym ciśnienie hydrostatyczne.



## ODBICIE-ZAŁAMANIE FALI UDERZENIOWEJ W NEO-HOOKEANIE

### 5.1. Wstęp.

Zakładamy podobnie jak w rozdziale 3, że padająca fala uderzeniowa jest poprzeczną, płaską i poziomo spolaryzowaną, falą uderzeniową. Materiał w obu półprzestrzeniach  $X_2 > 0$  oraz  $X_2 < 0$  jest neo-Hookeanem o różnych własnościach sprężystych. Prędkości propagacji są stałe i zależą tylko od stałej materiałowej ośrodka. W tym przypadku rozwiązanie składa się również z pojedynczej centrycznej fali uderzeniowej, odbitej i załamanej. Amplitudy tych fal mają wartości podobne jak w przypadku nieskończenie małych fal typu SH. Zespolone wartości amplitud w liniowej teorii prowadzą do powstawania fal Stoneleya. W teorii nieliniowej podobieństwo to nie istnieje, a rozwiązania takie sugerują raczej inną niż założoną konfigurację fal odbitych i załamanych.

### 5.2. Dopuszczalne konfiguracje falowe.

W rozdziale tym obowiązują wszystkie założenia i zależności z podrozdziału 3.2 lecz potencjał sprężysty opisujący materiał w obu półprzestrzeniach (por. (3.24)) redukuje się do postaci

$$(5.1) \quad W(I_1) = \rho_R \sigma(I_1) = C(I_1 - 3), \quad \bar{W}(I_1) = \bar{\rho}_R \bar{\sigma}(I_1) = \bar{C}(I_1 - 3).$$

W tym przypadku parametr materiałowy  $\eta$  wynosi zero ( $\eta = \bar{\eta} = 0$ ), wobec czego prędkość propagacji padającej fali uderzeniowej jest stała i zależy jedynie od parametru materiałowego  $C=C_1$  (por. (3.26))

$$(5.2) \quad V_0^2 = \frac{2C}{\rho_R}$$

Prędkość propagacji fali uderzeniowej w neo-Hookeanie nie zależy od kierunku propagacji jej intensywności czy gradientu odkształcenia przed jej frontem, ma więc taki sam charakter jak propagacja fal nieskończenie małych w jednorodnym izotropowym materiale sprężystym. W warunku propagacji (3.4)<sub>1</sub> prędkość  $V_h$  punktu Q (por. rys.3.1) jest stała, składowe tensora akustycznego, ( $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{11} = 0$ ) są zależne tylko od kierunku propagacji  $N$  (por. (3.13)). Niezależne od parametru fali prostej  $\gamma$ , muszą pozostawać więc wartości własne, definiujące prędkości fali odbitej  $U(\gamma) = V_h \sin \Theta$  i załamanej  $\bar{U}(\bar{\gamma}) = V_h \sin \bar{\Theta}$ . W konsekwencji kąty odbicia  $\Theta$  i

załamania  $\bar{\Theta}$  też muszą pozostawać stałe. Przy stałej prędkości propagacji dla każdego frontu (wavelet) w obszarze fali prostej nie można zachować warunku centryczności wiązki jej frontów w punkcie Q. Rozwiązanie zagadnienia nie może mieć postaci fali prostej, i ulega modyfikacji przy założeniu, że obszar 2 (rys.3 1) jest odbitą falą uderzeniową propagującą się w kierunku  $\mathbf{N} = (\sin\Theta, -\cos\Theta, 0)$  o intensywności  $a$  której front przechodzi przez punkt Q. Analogiczne założenia i rozważania dotyczą obszaru  $\bar{2}$  o którym zakłada się, że jest załamaną falą uderzeniową. Równania ruchu (3.4) muszą być zastąpione warunkami skoków, które łączą odpowiednie wielkości w obszarach 1,3 po obu stronach powierzchni nieciągłości 2. Z (3.8) wynika stała prędkość propagacji fali odbitej, dokładnie równa prędkości fali padającej

$$(5.3) \quad V^2 = V_0'^2 = \frac{2C}{\rho_R}$$

Z (3.3)<sub>2</sub> wynika równość  $V = V_h \sin\Theta = (V_0' \sin\Theta) / \sin\Theta_0$ , a warunek  $V = V_0'$  może być spełniony jedynie dla

$$(5.4) \quad \Theta = \pi - \Theta_0$$

Obszar stałego stanu 1 jest zdefiniowany przez (3.7), (3.11). Uwzględniając (5.4) w warunkach dla skoków (2.5) na froncie fali 2, otrzymuje się w obszarze 3 stałe wartości dla składowych gradientu deformacji  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  oraz prędkości  $\bar{u}_3$ :

$$(5.5) \quad \bar{v}_1 = (a_0 + \varepsilon a) \sin\Theta_0, \quad \bar{v}_2 = (-a_0 + \varepsilon a) \cos\Theta_0, \quad \bar{u}_3 = -(a_0 + \varepsilon a) V_0'$$

gdzie  $\varepsilon = \pm 1$ , zależnie od orientacji wektora polaryzacji  $\bar{\mathbf{d}}$  odbitej fali uderzeniowej względem osi  $X_3$ .

Prędkość propagacji załamanej fali uderzeniowej wynosi  $V^2 = 2\bar{C} / \bar{\rho}_R$ . Z warunku centryczności frontów (3.3)<sub>2</sub> wynika zależność  $\bar{V} = V_h \sin\bar{\Theta} = (V_0' \sin\bar{\Theta}) / \sin\Theta_0$ , oraz warunek

$$(5.6) \quad \sin\bar{\Theta} = \frac{\bar{V}}{V_0'}$$

Uwzględniając (5.6) w warunkach dla skoków (2.5) wzdłuż frontu  $\bar{2}$  otrzymujemy stałe wartości w obszarze  $\bar{3}$

$$(5.7) \quad \bar{v}_1 = \bar{\varepsilon} \bar{a} \left( \frac{\bar{V}'}{V_0'} \right) \sin\Theta_0, \quad \bar{v}_2 = -\bar{\varepsilon} \bar{a} \sqrt{1 - \left( \frac{\bar{V}'}{V_0'} \right)^2} \sin^2\Theta_0, \quad \bar{u}_3 = -\bar{\varepsilon} \bar{a} \bar{V}'$$

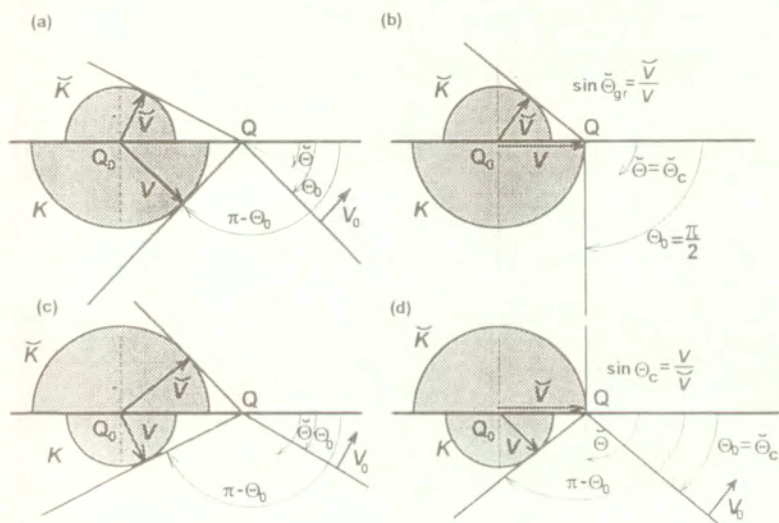
gdzie  $\bar{\varepsilon} = \pm 1$  zależnie od orientacji wektora polaryzacji  $\bar{\mathbf{d}}$  załamanej fali uderzeniowej względem osi  $X_3$ .

Żądanie aby rozwiązania równania (5.6) dla kątów  $\bar{\Theta}$  były rzeczywiste narzuca warunek na kąty padania

$$(5.8) \quad \sin\Theta_0 \leq \frac{V_0'}{\bar{V}'}$$

który w zależności od stałych materiałowych obu półprzestrzeni może ograniczać przedział dopuszczalnych kątów padania

Związki (5.4), (5.6), (5.8) mają prostą interpretację geometryczną. Prędkości  $\vec{V}$  oraz  $V=V_0$ , zależą jedynie od stałej materiałowej, a związane z nimi możliwe kierunki propagacji tylko od kąta padania. Punkty  $Q_0$  i  $Q$  oznaczają położenia punktów przecięcia frontów falowych z brzegiem odpowiednio w chwilach  $t=0$  oraz  $t=1$ . Odległość między punktami  $Q_0$  i  $Q$  równa jest  $V_h$  (por. rys. 3.1).  $\vec{K}$  i  $K$  oznaczają dwa półokręgi ze wspólnym środkiem w punkcie  $Q_0$  o promieniach równych odpowiednio  $\vec{r} = \vec{V}$ ,  $r = V$ . Prędkość  $V_h$  jest wystarczająco duża, aby punkt  $Q$  znajdował się na zewnątrz obu półokręgów  $\vec{K}$  i  $K$  (rys. 5.1). Styczne do  $\vec{K}$  i  $K$  wychodzące z punktu  $Q$  tworzą z osią poziomą odpowiednio kąty  $\vec{\Theta}$  oraz  $\Theta = \pi - \Theta_0$  (rys. 5.1a). Równania (5.4) i (5.6) są spełnione. Położenie punktu  $Q$  zmienia się ze wzrostem kąta padania tworząc jednoparametrowe rodziny stycznych, które reprezentują rodziny fal odbitych i załamanych jakie w jednostce czasu przechodzą przez punkt  $Q_0$ . Półokręgi  $\vec{K}$  i  $K$  są obwiedniami tych rodzin i są nazywane powierzchniami falowymi.



Rys. 5.1. Padające oraz odbite i załamane fale i denerżenie a)  $\vec{V} < V_0$  oraz  $0 < \Theta_0 < \pi/2$ ; b) dla  $\vec{V} < V_0$  oraz  $\Theta_0 = \pi/2$ ; c) dla  $\vec{V} > V_0$  oraz  $0 < \Theta_0 < \Theta_c$ ; d)  $\vec{V} > V_0$  oraz  $\Theta_0 = \Theta_c$

i) W przypadku  $\vec{V} < V_0$  punkt  $Q$  porusza się do  $K$ , gdy kąt  $\Theta_0$  rośnie do  $\pi/2$ . Dla  $\Theta_0 = \pi/2$  (grazing incidence) fronty fali padającej i odbitej pokrywają się, a front fali załamanej przyjmuje najbardziej strome położenie (rys. 5.1b). Kąt krytyczny nie występuje, możliwy jest zatem pełen przedział kątów padania  $\langle 0, \pi/2 \rangle$ . Graniczny kąt dla załamania wynosi  $\vec{\Theta}_{gr} = \vec{V}/V_0$  (por. (5.8)). Pokazano dalej, że dla wartości kąta

padania  $\Theta_0 = \pi/2$  fale padająca i odbita wzajemnie się redukują, a intensywność fali załamanej wynosi zero.

ii) Przy odwrotnym ustawieniu materiałów  $\bar{V} > V_0$  kąt załamania  $\bar{\Theta} > \Theta_0$  (rys. 5.1c). Punkt Q zbliża się do  $\bar{K}$  ze wzrostem kąta padania, gdy  $\Theta_0 = \Theta_c$  wystąpi "grazing refraction" (rys. 5.1d). Kąt krytyczny dla tego przypadku zgadza się z (5.8).

Z czterech warunków ciągłości na granicy obszarów 3,  $\bar{3}$  (por. (3.44) - (3.47)) w przypadku neoHookeanu pozostają dwa równania, zawierające składowe prędkości i gradientu deformacji w obu półprzestrzeniach wyrażone w funkcji  $a$  i  $\bar{a}$

$$(5.9) \quad \bar{u}_3 = \bar{u}_3 \leftrightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_1, \quad C \bar{v}_2 = \bar{C} \bar{v}_2,$$

z dodatkowym równaniem  $p_0 - \bar{p}_0 = 2(\bar{C} - C)$  (por. (3.43)) uzależniającym stałe wartości ciśnienia hydrostatycznych w obszarach przed frontem fali padającej. Równania (5.9) przy uwzględnieniu zależności (5.5), (5.7) pozwalają uzyskać rozwiązania dla amplitud  $a$  i  $\bar{a}$ :

$$(5.10) \quad \frac{\varepsilon a}{a_0} = \frac{\beta \cos \Theta_0 - \sqrt{\beta - \sin^2 \Theta_0}}{\beta \cos \Theta_0 + \sqrt{\beta - \sin^2 \Theta_0}}, \quad \frac{\bar{\varepsilon} \bar{a}}{a_0} = \frac{2\beta \sqrt{\beta} \cos \Theta_0}{\beta \cos \Theta_0 + \sqrt{\beta - \sin^2 \Theta_0}},$$

gdzie  $\beta = C/\bar{C} = V_0^2/\bar{V}^2$ . Prędkości propagacji  $V$  i  $\bar{V}$  są stałe w każdym z ośrodków, rozwiązanie spełnia więc postulat stateczności Laxa (2.7). Fronty odbitych i załamanych fal uderzeniowych są reprezentowane przez rodziny płaszczyzn (por. (2.21))

$$(5.11) \quad X_1 \sin \Theta_0 - X_2 \cos \Theta_0 - V_0 t = 0, \quad X_1 \sin \bar{\Theta}_0 - X_2 \sqrt{\beta - \sin^2 \Theta_0} - V_0 t = 0.$$

Należy także zauważyć, że równania (5.10) są zgodne z równaniami otrzymanymi dla współczynników odbicia i załamania w analogicznym zagadnieniu dla fal SH w liniowej teorii (Achenbach, 1973, str.184).

Analiza równań (5.10) prowadzi do następujących wniosków:

i) Fala padająca podlega wyłącznie ugięciu, gdy  $\alpha=0$ , odpowiednie równanie wynika z (5.10)<sub>1</sub> i ma postać:

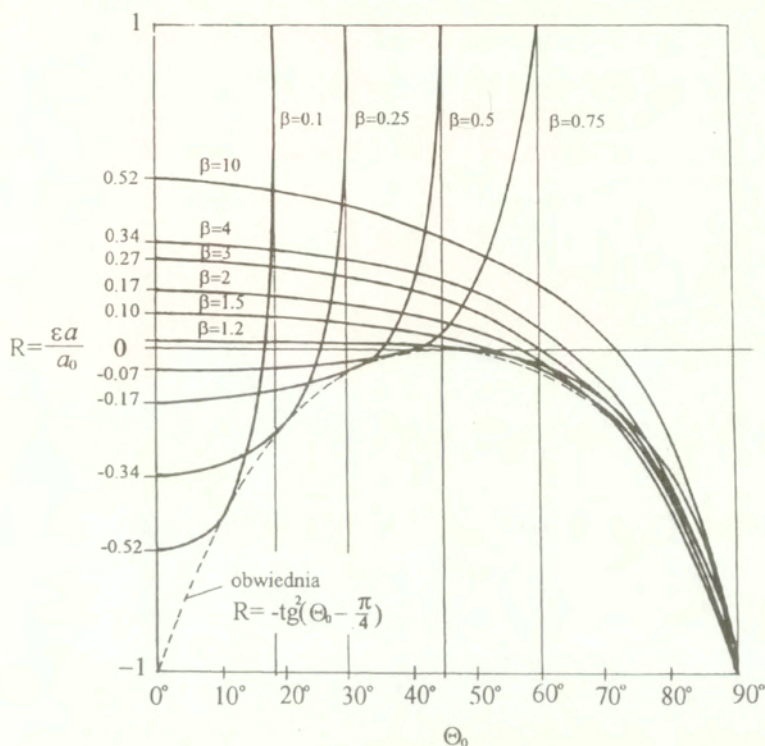
$$(5.12) \quad \beta^2 \cos^2 \Theta_0 - \beta \left( \frac{\bar{\rho}_R}{\rho_R} \right) + \sin^2 \Theta_0 = 0.$$

Okazuje się, że możliwe są kombinacje materiałowe i kąty padania dla których nie wystąpi fala odbita. Gdy  $\rho_R = \bar{\rho}_R$  oraz  $C \neq \bar{C}$ , kombinacja taka ma bardzo prostą postać (por. (5.13)<sub>1</sub>). Amplituda fali załamanej wynosi (5.13)<sub>2</sub>

$$(5.13) \quad \beta = \frac{C}{\bar{C}} = \tan^2 \bar{\Theta}_0 \Rightarrow \sin \bar{\Theta}_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1+\beta}}, \quad \frac{\bar{\varepsilon} \bar{a}}{a_0} = \frac{V_0}{\bar{V}},$$

gdzie  $\bar{\Theta}_0$  - kąt przy którym nie występuje odbicie.

ii) Intensywność fali odbitej  $a$  jest monotoniczną funkcją kąta  $\Theta_0$  gdy  $0 < \Theta_0 < \Theta_c$  wobec tego  $\varepsilon a$  zmienia znak w pobliżu zera (rys.5.2), zmieniając w ten sposób kierunek polaryzacji.



Rys.5.2. Współczynnik odbicia  $R$ .  
Związek między intensywnością fali odbitej i kątem krytycznym.

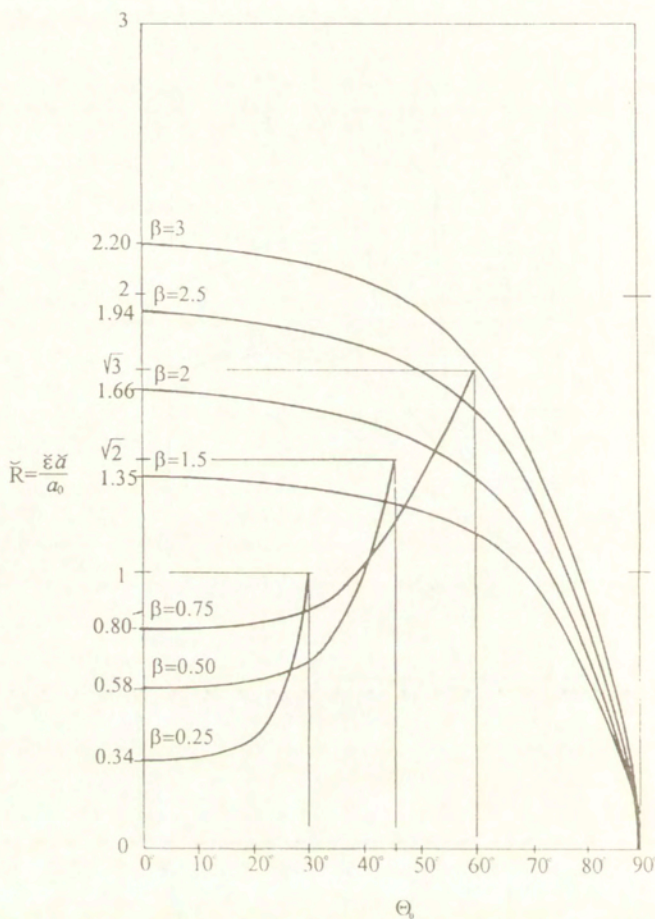
iii) Wyrażenie  $\bar{\varepsilon} \bar{a}$  jest dodatnie (por. (5.10)<sub>2</sub> oraz rys.5.3) dla wszystkich kątów  $\Theta_0 \in (0, \Theta_c)$ , stąd  $\bar{\varepsilon} = 1$ . Z równań (5.10)<sub>1,2</sub> wynika, że odbicie bez załamania nie jest możliwe.

iv) intensywności fali padającej, odbitej i załamanej pozostają w zależności (por. (4.30)<sub>1</sub>)

$$(5.14) \quad (a_0 + \varepsilon a)V_0 = \bar{a}\bar{V}$$

W przypadku, gdy front fali padającej jest prostopadły do brzegu ("grazing incidence", rys.5.1b), zachodzi równość  $a_0 = -\varepsilon a$  (por. (5.10)<sub>1</sub>), a fale padająca i

odbicia wytwarzają zerowe pole odkształceń. Bezpośrednio z (5.10)<sub>2</sub> dla  $\Theta_0 = \pi/2$  wynika  $\bar{a} = 0$ . Dla drugiego przypadku szczególnego ("grazing refraction", rys 5.1d), gdy front



Rys.5.3. Współczynnik załamania  $\tilde{R}$ .  
Związek między intensywnością fali załamanej i kątem padania

fali załamanej jest prostopadły do brzegu dla  $\Theta_0 = \Theta_c$ , intensywności fal wymszą  $a = a_0$  oraz  $\bar{a} = 2a_0(V_0/V^2)$ .

### 5.3. Wnioski i uwagi.

Odbita fala uderzeniowa o froncie określonym przez (5.11)<sub>1</sub> propaguje się w półprzestrzeni  $X_2 > 0$  ze stałą prędkością  $V = V_0$  w kierunku  $\Theta = \pi - \Theta_0$ . Intensywność oraz kierunek polaryzacji takiej fali zależą od stałych materiałowych  $C$  i  $\bar{C}$  i parametrów fali padającej  $\Theta_0$  i  $a_0$ . Równanie (5.13)<sub>1</sub> (dla  $\rho_R = \bar{\rho}_R$ ) określa kąt padania leżący w przedziale  $\Theta_0 \in (0, \Theta_c)$ , przy którym odbicie nie występuje (por. (5.8)). Dla  $C < \bar{C}$ , ( $\beta < 1$ ) współczynnik odbicia  $R = \epsilon a / a_0$  jest rosnącą funkcją kąta padania  $\Theta_0$  (rys.5.2) i jest dodatni dla  $\Theta_0 \in (\bar{\Theta}_0, \Theta_c)$ . Z tego powodu fala odbita wywołuje wzrost odkształceń gdy  $\Theta_0 \in (0, \bar{\Theta}_0)$  lub ich zmniejszenie gdy  $\Theta_0 \in (\bar{\Theta}_0, \Theta_c)$ . Dla zmienionej kolejności materiałów  $C > \bar{C}$ , ( $\beta > 1$ ), sytuacja jest odwrotna, a kąt krytyczny nie występuje ( $\Theta_c = \pi/2$ ).

Rodzina krzywych  $\mathfrak{R}$  reprezentująca współczynnik odbicia  $R = \epsilon a / a_0$  w funkcji kąta padania  $\Theta_0$ , dla różnych wartości parametru  $\beta$ , jest pokazana na rys.5.2. Krzywe tej rodziny przecinają się w pewnych punktach. Oznacza to, że padająca fala uderzeniowa ma taki sam współczynnik odbicia dla różnych kombinacji materiałowych. Jeżeli krzywa dla wartości  $\beta$  przechodzi przez punkt  $(\Theta_0, R)$ , wtedy krzywa o parametrze  $\beta_1$  (por. (5.16)<sub>1</sub>) także przechodzi przez ten punkt. Ponadto dla krzywej  $\beta_1$  zachodzi nierówność (5.16)<sub>2</sub>

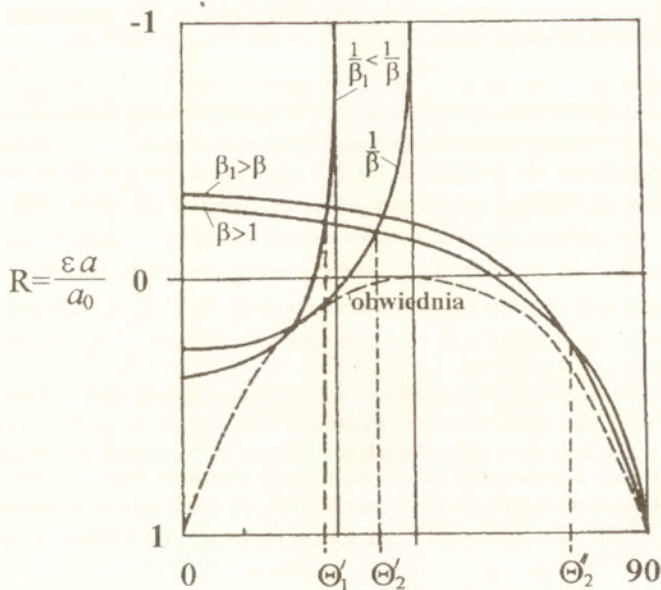
$$(5.16) \quad \beta_1 = \frac{\beta \sin^2 \Theta_0}{\beta - \sin^2 \Theta_0}, \quad \beta_1 - \sin^2 \Theta_0 = \frac{\sin^4 \Theta_0}{\beta - \sin^2 \Theta_0} > 0 .$$

warunek (5.8) jest więc spełniony i krzywa ta należy do rodziny  $\mathfrak{R}$  (por. Kosiński, Duszczyk, 1991). W przypadku trywialnym, gdy  $\beta = 1$ , współczynnik odbicia jest zerowy dla dowolnego kąta  $\Theta_0$ . Z (5.16)<sub>1</sub> wynika wtedy wartość  $\beta_1 = \tan^2 \Theta_0$ , a punktem przecięcia jest  $(\Theta_0, 0)$ .

Zakładając  $\beta_1 = 1/\beta$  (co odpowiada odwrotnemu ustawieniu materiałów) z (5.16) wynika, że krzywe  $\beta$  i  $\beta_1 = 1/\beta$  przecinają się w punkcie  $(\Theta_0, R)$ , wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(5.17) \quad \sin^2 \Theta_0 = \frac{\beta}{1 + \beta^2}$$

Równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnej wartości  $\beta > 0$ . Kąt padania w tym przypadku jest ograniczony,  $\sin \Theta_0 \leq 1/\sqrt{2}$ , a  $\Theta_0 \in (0, \pi/4)$ . Stąd dla pewnych kątów padania  $\Theta_1$  lub  $\Theta_2$  należących do przedziału  $(0, \pi/4)$  (rys.5.4), gdy kompozyt opisany jest przez współczynnik  $\beta$ , fala odbita w tym ośrodku oraz w ośrodku złożonym z tych samych materiałów lecz ustawionych w odwrotnej kolejności ( $1/\beta$ ) są identyczne.



Rys.5.4. Związek między intensywnością fali odbitej i kątem padania. Dla parametru  $\beta$  i  $\beta_1$  intensywność jest taka sama dla kątów  $\Theta_1, \Theta'_2, \Theta''_2$

Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny w których przecinają się dwie sąsiednie krzywe rodziny  $\mathfrak{R}$ ;  $\beta$  oraz  $\beta' = \beta + d\beta$ , gdy  $d\beta \rightarrow 0$  definiuje obwiednią dla rodziny  $\mathfrak{R}$  (por. Kosiński, Duszczyk, 1991)

$$(5.18) \quad R = -\text{tg}^2\left(\Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{dla} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\varepsilon a}{a_0} \right) = 0 \Rightarrow \beta = 2 \sin^2 \Theta_0$$

Ograniczenie dla parametru  $\beta$  na obwiedni wynika z (5.18)<sub>2</sub>. Krzywa  $R(\Theta_0)$  ma specyficzną własność, każdemu jej punktowi odpowiada jedna i tylko jedna kombinacja fali padającej ( $\Theta_0$ ) z własnościami materiałowymi kompozytu ( $\beta$ ). Jednocześnie na obwiedni zachodzi warunek  $\partial R / \partial \beta = 0$ . Równanie (5.18)<sub>1</sub> określa minimalną wartość współczynnika odbicia  $R = \varepsilon a / a_0$  dla stałego kąta padania i zmieniającego się parametru  $\beta$ .

Załamana fala uderzeniowa o froncie określonym przez (5.11)<sub>2</sub> propaguje się w półprzestrzeni  $X_2 < 0$  ze stałą prędkością  $\bar{V}$  w kierunku  $\bar{\Theta}$  zdefiniowanym przez (5.6). Jej intensywność określa zależność (5.10)<sub>2</sub>. Fala ta propagując się do obszaru nieodkształconego jest falą obciążającą.

Rodzinę krzywych  $\bar{\mathfrak{R}}$  przedstawiających współczynnik załamania  $\bar{R} = \bar{a} / a_0$  jako funkcję kąta padania  $\Theta_0$  dla różnych wartości parametru  $\beta$  pokazano na rys.5.3.



Krzywe przecinają się w pewnych punktach. Oznacza to, że możliwe są różne kombinacje materiałowe dla których przy określonym kącie padania  $\Theta_0$  współczynnik załamania jest taki sam. Analityczne wyrażenia dla takich kombinacji są jednak bardziej skomplikowane niż w przypadku odbicia (por. (5.16)), ponieważ kąt załamania  $\bar{\Theta}$  zależy zarówno od kąta padania  $\Theta_0$  jak też współczynnika materiałowego  $\beta$ .

Z drugiej jednak strony łatwo można zauważyć, że dla kombinacji materiałowych dających te same fale odbite, odpowiadające im fale załamane są różne. Zgodnie z (5.6) dla ustalonego  $\Theta_0$ , kąt załamania  $\bar{\Theta}$  jest monotoniczną funkcją  $\beta$  i przyjmuje różne wartości dla różnych wartości  $\beta$ . Oznacza to, że różne kombinacje materiałowe wytwarzają fale załamane w różnych kierunkach. Identyczny wniosek dla intensywności  $\bar{a}$  wynika z wyrażenia (5.14). Oznaczając przez  $R$  współczynnik odbicia, dla ustalonego kąta  $\Theta_0$  związany jednocześnie z parametrami materiałowymi  $\beta$  i  $\beta_1$  (por. 5.16) otrzymuje się zgodnie z (5.14) dwa współczynniki załamania dla odpowiednich kombinacji materiałowych:

$$(5.19) \quad (1+R)\sqrt{\beta} = \bar{R}, \quad (1+R)\sqrt{\beta_1} = \bar{R}_1 \quad \text{lub} \quad \bar{R}_1 = \bar{R}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta}}$$

Zgodnie z założeniem materiały są różne  $\beta_1 \neq \beta$ , wynika stąd  $\bar{a}_1 \neq \bar{a}$ .

W przypadku szczególnym całkowitego wewnętrznego załamania kąt załamania wynosi  $\bar{\Theta} = \pi/2 - \Theta_0$ , a intensywność  $\bar{a} = \sqrt{\beta} a_0$  (por. (5.13)<sub>2</sub>).

Innym przypadkiem szczególnym są odbite fale uderzeniowe związane z obwiednią (5.18)<sub>1</sub>. Podstawienie (5.18)<sub>2</sub> do (5.6), daje stały kąt załamania  $\bar{\Theta} = \pi/4$ . Fale załamane związane z falami odbitymi (5.18)<sub>1</sub> mają oprócz stałego kierunku propagacji  $\bar{\Theta} = \pi/4$ , także stałą intensywność  $\bar{a}$  (por. (5.10)<sub>2</sub>)

$$(5.20) \quad \bar{a} = \frac{\sqrt{2}a_0 \sin\Theta_0 \sin 2\Theta_0}{\cos^2\left(\Theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Zastosowane w pracy metody rozwiązań, bazowały na założeniu, że rozwiązania muszą być rzeczywiste. Wynikał stąd warunek dla kątów padania  $0 < \Theta_0 < \Theta_c$ . Kąt krytyczny  $\Theta_c$  zależy w tym przypadku tylko od jednego parametru materiałowego  $\beta$ . Dla  $\beta < 1$ ,  $\Theta_c < \pi/2$  oraz  $\Theta_c = \pi/2$  gdy  $\beta > 1$ . Przypadek całkowitego wewnętrznego odbicia, gdy kąt padania  $\Theta_0 > \Theta_c$  przekracza wartość dla kąta krytycznego daje rozwiązanie zespolone które nie było brane pod uwagę. W tym przypadku w liniowej teorii rozwiązanie składa się z fal infitezymalnych i fal Stoneley'a. Gdy  $\beta > 1$ , przypadek "grazing incidence" został przedstawiony na rys. 5.1b. Fala padająca i odbita wzajemnie się "wygaszają", a intensywność fali załamanej wynosi zero. Technika rozwiązania, polegająca na zastosowaniu przejścia granicznego, użyta w pracy (Goodier, Bishop, 1952), dla otrzymania w tym przypadku rozwiązania, nie ma tu zastosowania, ponieważ fale mają skończone amplitudy. Aby włączyć do rozważań również ten przypadek, należy raczej zmodyfikować przyjętą do rozważań konfigurację.

## ODBICIE UKOŚNE ORAZ NORMALNE WRAZ Z TRANSMISJĄ PODŁUŻNEJ FALI UDERZENIOWEJ W MATERIALE MURNAGHANA

### 6.1. Wstęp

Podobnie jak w rozdziałach poprzednich, zastosowano półodwrotną metodę Wrighta oraz przybliżenie izentropowe, dla rozwiązania dwóch zagadnień: odbicia ukośnej fali uderzeniowej o skończonej amplitudzie od płaskiego, utwierdzonego brzegu w przypadku dwuwymiarowym, oraz jednowymiarowego przypadku odbicia (odbicia-transmisji) w kierunku normalnym. Założono, że fala padająca jest płaską podłużną falą uderzeniową. Obszar przed frontem fali jest nieodkształcony lub poddany jednorodnej deformacji wstępnej (przypadek jednowymiarowy) i pozostaje w spoczynku. Rozważania ograniczają się do materiału sprężystego Murnaghana (por. dodatek 2).

W odróżnieniu od metod rozwiązań zastosowanych w poprzednich rozdziałach, do analizy obu zagadnień użyto zlinearyzowanych równań ruchu (por. (Toupin, Bernstein, 1961)). Małe intensywności jakie mogą osiągać fale uderzeniowe w ściśliwych materiałach hipersprężystych w pełni usprawiedliwiają takie założenie. Dla analizy zagadnienia w przypadku odbicia ukośnego (odbicia oraz odbicia-transmisji w kierunku normalnym) rozpatrzone zlinearyzowane zagadnienie początkowo-brzegowe dla brzegu utwierdzonego (dla trzech różnych typów brzegów oraz przy zachowaniu warunków ciągłości na granicy obszarów materialnych). Rozwiązanie dla równań określających położenie frontów falowych w przypadku odbicia ukośnego od brzegu utwierdzonego, uzyskano przy zastosowaniu metody perturbacyjnej, a w pozostałych przypadkach dla odbicia oraz odbicia-transmisji w kierunku normalnym przez bezpośrednie całkowanie zlinearyzowanych równań ruchu.

### 6.2. Podłużna płaska fala uderzeniowa, padająca ukośnie

Zakładamy, że płaska podłużna fala uderzeniowa propagująca się z prędkością  $V_0$ , i intensywnością  $a_0$ , pada na brzeg obszaru  $X_2=0$ . Stan równowagi dynamicznej ośrodka jest zakłócony. Razem z falą padającą powstają dodatkowe fale; odbite i załamane. Przy odpowiednim wyborze układu współrzędnych, wyrażenie (2.8) dla prędkości propagacji fali podłużnej znacznie się upraszcza. Układ współrzędnych może być tak wybrany aby normalna  $N_0$  oraz wektor amplitudy  $a_0$  miały postać (6.1):

$$(6.1) \quad N_0 = (\sin\Theta_0, -\cos\Theta_0, 0), \quad N_0 = -a_0/a_0,$$

gdzie  $a_0 = |a_0|$ .

Warunkiem koniecznym dla stabilności płaskiej podłużnej fali uderzeniowej jest równoległość wektorów  $N_0$  oraz  $a_0$ , wektory te powinny mieć ponadto kierunki przeciwnie (6.1)<sub>2</sub> (por. (Kosiński, 1981a))

Z równań (2.5) wynikają następujące zależności dla fali padającej:

$$(6.2) \quad [F_{i\alpha}] = -a_0 N_i N_\alpha, \quad [u_i] = a_0 V_0 N_i, \quad V_0^2 = -\frac{1}{\rho_R} [T_{i\alpha}] N_i N_\alpha.$$

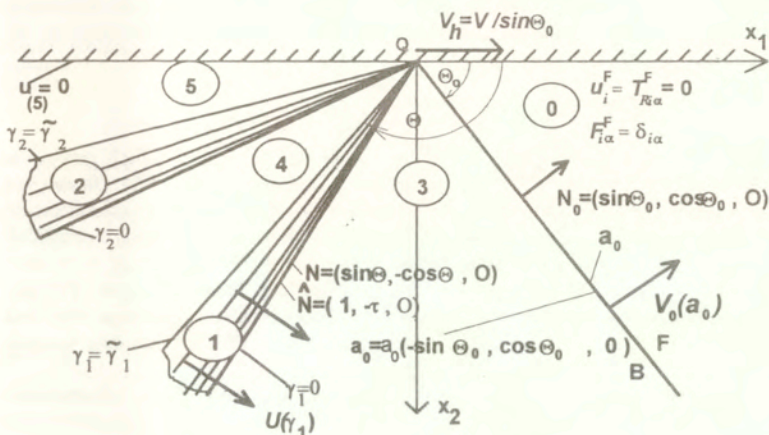


Fig. 6.1. Brzeg utwierzony. Padająca podłużna fala uderzeniowa i założona konfiguracja fal odbitych,

Obszar 3 za frontem padającej fali uderzeniowej znajduje się w płaskim stanie odkształcenia (por. 6.1), określonym przez równania

$$(6.3) \quad F_{i\alpha}^B = F_{i\alpha}^F - a_0 N_i N_\alpha, \quad u_i^B = u_i^F + a_0 V_0 N_i.$$

Jeżeli obszar 0 przed frontem fali padającej jest obszarem stałego stanu nieodkształconym  $F^F = 1$  (lub poddanym jednorodnej deformacji wstępnej  $F^F = \bar{F}$ ) i pozostającym w spoczynku, a fala propaguje się w stałym kierunku  $N_0$ , obszar 3 jest całkowicie określony przez pojedynczy parametr  $a_0$  - intensywność fali padającej

$$(6.4) \quad F_{i\alpha}^F = \delta_{i\alpha}, \quad (F_{i\alpha}^F = \bar{F}_{i\alpha}^F), \quad u_i^F = \dot{u}_i^F = T_{Ri\alpha}^F = 0, \quad (T_{Ri\alpha}^F = T_{Ri\alpha}^F(\bar{F}) = \text{const}),$$

$$(6.5) \quad F_{(3)}^B = \begin{bmatrix} 1 - a_0 \sin^2 \Theta_0 & a_0 \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 & 0 \\ a_0 \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 & 1 - a_0 \cos^2 \Theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(6.6) \quad u_{(3)}^B = (\sin \Theta_0, -\cos \Theta_0, 0) a_0 V_0 \quad \text{lub} \quad u_{(3)}^B = a_0 V_0 N_0.$$

### 6.3. Fale proste w płaskim stanie odkształcenia

Płaska fala prosta propaguje się w obszarze stałego stanu określonym przez równania (6.3) w kierunku normalnym do jej frontu (por. rys.6.1).

$$(6.7) \quad N(\gamma) = (\sin\Theta(\gamma), -\cos\Theta(\gamma), 0),$$

W płaskim stanie odkształcenia składowe  $Q_{3i} = Q_{i3}$ ,  $i = 1, 2$  tensora akustycznego (2.11) są zerowe, wobec równości  $u_3 = 0$ , wyrażenie  $Q_{33} - \rho_R U^2$  może przybierać dowolne wartości, a warunek propagacji (2.13) dla fal prostych redukuje się do równania kwadratowego względem  $U^2$ :

$$(6.8) \quad \det(Q_{ij} - \rho_R \delta_{ij} U^2) = 0 \quad i, j = 1, 2.$$

Zgodnie z metodą Wrighta (1971a) rozwiązanie dla zagadnienie odbicia przyjęto w postaci ciągu centrycznych fal prostych i obszarów stałego stanu (rys.6.1). Obowiązują założenia i wzory omówione w podrozdziale 2.2, inna tylko i zgodna z wcześniejszymi pracami ((Kosiński, 1990), (Kosiński, Duszczyk, 1993)) jest numeracja obszarów. Rozważania dotyczą zagadnienia odbicia dla obszarów znajdujących się w płaskim stanie odkształcenia, możliwe są więc tylko dwie odbite fale proste (por. (Wright, 1971a)). Każda z nich opisana jest przez pojedynczy parametr. Występują więc dwa parametry  $\gamma_1$  oraz  $\gamma_2$  i do spełnienia powinny pozostawać także tylko dwa warunki brzegowe.

Warunki propagacji i zgodności (2.24) dla płaskiego stanu odkształcenia sprowadzają się do postaci

$$(6.9) \quad (\hat{Q}_{ij} - \rho_R V_h^2 \delta_{ij}) u'_j = 0, \quad V_h F'_{i\alpha} + u'_i N_\alpha = 0 \quad i, j = 1, 2.$$

### 6.4. Analiza zagadnienia odbicia w materiale Murnaghana

Rozwiązanie zagadnienia ogranicza się do materiału nieliniowego drugiego rzędu nazywanego materiałem Murnaghana o potencjale sprężystym (D2.1) (por. dodatek 2). Zgodnie z badaniami Murnaghana (1937) funkcja  $\sigma = \sigma(I_1, I_2, I_3)$  opisująca energię sprężystą, w przypadku izotropowego, ściśliwego materiału przy występowaniu umiarkowanych odkształceń może być aproksymowana przez potencjał (D2.1).

Analiza numeryczna (por. (Kosiński, 1981a)) pokazała, że jedynie fale uderzeniowe o małych intensywnościach (rzędu  $10^{-3}$ ) mogą propagować się w takim materiale. Wydaje się więc celowe zastosowanie w tym przypadku metod perturbacyjnych dla znalezienia przybliżonego rozwiązania zagadnienia odbicia.

Materiał Murnaghana wypełnia półprzestrzeń  $X_2 > 0$ . Rozwijając składowe tensora akustycznego  $\hat{Q}$ , prędkość  $V_{hi}^2$  punktu Q na brzegu  $X_2 = 0$  oraz wektory własne  $r_i$  odpowiadające obu odbitym falom prostym, w szeregi potęgowe małego parametru  $a_0$  - intensywności fali, otrzymuje się następujące wyrażenia aproksymacyjne (ograniczono się do dwóch pierwszych wyrazów) w obszarze 3:

$$(6.10) \quad \hat{Q}_{ij} = \sigma_{\alpha\beta} \hat{N}_\alpha \hat{N}_\beta = \overset{0}{Q}_{ij} + a_0 \overset{1}{Q}_{ij}, \quad V_{hi}^2 = \overset{0}{V}_{hi}^2 + a_0 \overset{1}{V}_{hi}^2,$$

$$(6.11) \quad \mathbf{r}_i = r_i + a_0 \mathbf{r}_i^1, \quad |\mathbf{r}_i| = \left| \mathbf{r}_i^0 \right| = 1,$$

gdzie

$$(6.12) \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + \mu\tau^2 & -\tau(\lambda + \mu) & 0 \\ -\tau(\lambda + \mu) & (\lambda + 2\mu)\tau^2 + \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu(1 + \tau^2) \end{pmatrix}.$$

Niezerowe składowe tensora  $\overset{1}{\mathbf{Q}}$  wynoszą (por. (Kosiński, 1990), (Kosiński, Duszczyk, 1993)):

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \overset{1}{Q}_{11} &= -(\phi_1 + 2\phi_2 \sin^2 \Theta_0 + 2\tau\phi_2 \sin \Theta_0 + \tau^2 \phi_3), \\ \overset{1}{Q}_{12} &= \overset{1}{Q}_{21} = (1 + \tau^2)\phi_2 \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 + (\phi_1 + \mu + m)\tau, \\ \overset{1}{Q}_{22} &= -(\phi_3 + 2\tau\phi_2 \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 + (\phi_1 + 2\phi_2 \cos^2 \Theta_0)\tau^2), \\ \overset{1}{Q}_{33} &= -\phi_3 + \left(2\mu + \frac{n}{2}\right) \cos^2 \Theta_0 + \left(-\phi_3 + \left(2\mu + \frac{n}{2}\right) \sin^2 \Theta_0\right) \tau^2, \end{aligned}$$

gdzie  $\phi_1 = \lambda + 2l$ ,  $\phi_2 = \lambda + 3\mu + 2m$ ,  $\phi_3 = \lambda + 2\mu + m$ .

Składowa  $\overset{1}{Q}_{33}$  tensora akustycznego nie jest istotna przy obliczeniach, dlatego dalej będzie pomijana.

Podstawiając rozwinięcia potęgowe (6.10) i (6.11) do warunku propagacji zapisanego dla płaskiego stanu odkształcenia (6.9)<sub>1</sub> oraz przy wykorzystaniu (2.13)<sub>2</sub> otrzymamy

$$(6.14) \quad \begin{aligned} (\overset{0}{\mathbf{Q}} - \rho_R \overset{0}{V}_h^2 \mathbf{I}) \mathbf{r} &= 0, \\ (\overset{1}{\mathbf{Q}} - \rho_R \overset{1}{V}_h^2 \mathbf{I}) \mathbf{r} + (\overset{0}{\mathbf{Q}} - \rho_R \overset{0}{V}_h^2 \mathbf{I}) \mathbf{r} &= 0. \end{aligned}$$

Pierwsze z powyższych równań można łatwo rozwiązać otrzymując wartości oraz wektory własne dla aproksymacji "zerowej":

$$(6.15) \quad \begin{aligned} \overset{0}{V}_{h1}^2 &= c_L(1 + \tau^2), \quad \mathbf{r}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \frac{-\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}, 0 \right), \\ \overset{0}{V}_{h2}^2 &= c_T(1 + \tau^2), \quad \mathbf{r}_2 = \left( \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}, 0 \right), \end{aligned}$$

gdzie  $c_L = (\lambda + 2\mu) / \rho_R$  oraz  $c_T = \mu / \rho_R$  są kwadratami prędkości fali podłużnej i poprzecznej w liniowej teorii.

Wykorzystując równanie  $V_h = V_0 / \sin \Theta_0$  po podstawieniu (6.15) można znaleźć kierunki propagacji  $\Theta_i$  dla fal odbitych w aproksymacji "zerowej". Otrzymuje się dwie pary pierwiastków, lecz jedynie pierwiastki ujemne związane są z falami odbitymi (por. (3.22))

$$(6.16) \quad \tau_1^0 = \text{ctg}\Theta_1 = -\sqrt{\left(\frac{V_0}{c_L \sin\Theta_0}\right)^2 - 1}, \quad \tau_2^0 = \text{ctg}\Theta_2 = -\sqrt{\left(\frac{V_0}{c_T \sin\Theta_0}\right)^2 - 1}$$

Dla statecznej fali padającej zachodzi nierówność  $V_0 \geq c_L > c_T$ , oba rozwiązania są więc rzeczywiste dla dowolnych wartości kąta padania oraz spełniony jest warunek  $\Theta_1 < \Theta_2$ .

Aby wyznaczyć współczynnik  $V_{hi}^2$  w rozwinięciu (6.10)<sub>2</sub>, równanie (6.14)<sub>2</sub> zostaje przemnożone lewostronnie przez wektor  $\mathbf{r}_i$ . Tensor  $\mathbf{Q}$  jest symetryczny, wobec czego drugi człon w otrzymanym wyrażeniu znika, powodując zerowanie się członu pierwszego

$$(6.17) \quad \mathbf{r}_i \left( \mathbf{Q} - \rho_R V_{hi}^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{r}_i = 0, \Rightarrow \mathbf{r}_i \left( \mathbf{Q} - \rho_R V_{hi}^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{r}_i = 0$$

Poszukiwany współczynnik rozwinięcia wynosi

$$(6.18) \quad \rho_R V_{hi}^2 = \mathbf{r}_i (\mathbf{Q} \mathbf{r}_i), \quad i=1, 2 \text{ (nie sumować)}$$

Pierwszy człon wyrażenia (6.14)<sub>2</sub> jest znany, oznaczając go przez  $\mathbf{z}_i$ , (6.19)<sub>1</sub> otrzymuje się niejednorodny układ równan liniowych dla nieznanych wektorów  $\mathbf{r}_i$  (6.19)<sub>2</sub>

$$(6.19) \quad \mathbf{z}_i = \left( \mathbf{Q} - \rho_R V_{hi}^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{r}_i, \quad \left( \mathbf{Q} - \rho_R V_{hi}^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{r}_i = -\mathbf{z}_i$$

Aby go rozwiązać, wektory  $\mathbf{r}_i$  i  $\mathbf{z}_i$  zostają wyrażone przez ich liniowe kombinacje z  $\mathbf{r}_i$ :

$$(6.20) \quad \mathbf{r}_i = \alpha_{ij} \mathbf{r}_j \text{ i } \mathbf{z}_i = \beta_{ij} \mathbf{r}_j \Rightarrow \left( \mathbf{Q} - \rho_R V_{hi}^2 \mathbf{I} \right) \alpha_{ij} \mathbf{r}_j = -\beta_{ij} \mathbf{r}_j, \quad i, j=1, 2$$

Następnie pierwsze równanie (6.20) jest mnożone przez  $\mathbf{r}_2$  a drugie przez  $\mathbf{r}_1$ . Biorąc pod uwagę równość (6.21)<sub>1</sub>, przy wykorzystaniu równania (6.14)<sub>1</sub> można zapisać rozwiązanie równania (6.20)<sub>2</sub> dla  $i \neq j$  w postaci (6.21)<sub>2</sub>

$$(6.21) \quad \rho_R V_{hi}^2 = \mathbf{r}_i (\mathbf{Q} \mathbf{r}_i), \quad \rho_R \left( V_{hj}^2 - V_{hi}^2 \right) \alpha_{ij} = -\beta_{ij} \quad \text{(nie sumować)}$$

Współczynniki  $\alpha_{11}, \alpha_{22}$  są dowolne; wygodnie jest przyjąć  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ .

Współczynniki  $\beta_{ij}$  można wyznaczyć z równania (6.19)<sub>1</sub>. Po podstawieniu  $\mathbf{z}_i = \beta_{ik} \mathbf{r}_k$  i przemnożeniu otrzymanego w ten sposób równania przez  $\mathbf{r}_j$  otrzymuje się wartości współczynników  $\beta_{12}, \beta_{21}$  wymagane w równaniach (6.21)<sub>2</sub>

$$(6.22) \quad \beta_{ij} = r_j \left( \mathbf{Q} - \rho_R V_{hi}^2 \mathbf{I} \right) r_i \Rightarrow \beta_{12} = \beta_{21} = r_1 \left( \mathbf{Q} r_2 \right),$$

oraz rozwiązania dla współczynników  $\alpha_{11}, \alpha_{22}$

$$(6.23) \quad \alpha_{12} = -\alpha_{21} = \frac{r_1 \left( \mathbf{Q} r_2 \right)}{\rho_R \left( V_{h1}^2 - V_{h2}^2 \right)}$$

Ostatecznie po podstawieniu (6.23) do równania (6.20)<sub>1</sub>, a potem do (6.11)<sub>1</sub>, otrzymujemy liniową aproksymację dla wektorów własnych  $r_i$  wyrażonych przez wektory własne  $r_i$

$$(6.24) \quad r_1 = r_1 + a_0 \alpha_{12} r_2, \quad r_2 = r_2 - a_0 \alpha_{12} r_1.$$

Zachodzą ponadto równości  $r_1 \cdot r_2 = 0, \quad |r_i|^2 = 1 + a_0^2 \alpha_{12}^2 \approx 1$ .

Do tej pory wszystkie wielkości (6.10)–(6.13) były wyrażane w funkcji jeszcze do tej pory nie ustalonej wartości parametru  $\tau = \cot \Theta(\gamma)$ , określającego kierunek propagacji fali odbitej. Dla otrzymania równania określającego wartość parametru  $\tau = \cot \Theta(\gamma)$ , analogicznie jak w przypadku aproksymacji "zerowej" wykorzystany zostanie warunek związany z centrycznością frontów falowych. Należy rozważyć dwa równania

$$(6.25) \quad V_{hi}^2 + a_0 V_{hi}^2 = \frac{V_0^2}{\sin^2 \Theta_0}, \quad i = 1, 2,$$

które po podstawieniu wyrażeń (6.15), (6.16) oraz (6.12), (6.13) (por. (Kosiński, Duszczyk, 1993)) przybierają postać dwóch wielomianów względem  $\tau_i$

$$(6.26) \quad \begin{aligned} p(\tau_1) &= p(\tau_1) + a_0 p(\tau_1) = \sum_{k=0}^4 (p_k + a_0 p_k) \tau_1^k = 0, \\ q(\tau_2) &= q(\tau_2) + a_0 q(\tau_2) = \sum_{k=0}^4 (q_k + a_0 q_k) \tau_2^k = 0, \end{aligned}$$

gdzie  $\tau_i^k$  jest  $k$ -tą potęgą  $\tau_i$ , a wyrażenia  $p_k, p_k, q_k, q_k$  (por. (Kosiński, 1990) i (Kosiński, Duszczyk, 1993, str.749)) mają stałe wartości, i zależą jedynie od stałych Lamé:  $\lambda, \mu$ , stałych sprężystości drugiego rzędu:  $l, m, n$  oraz parametrów fali

padającej:  $\Theta_0, \alpha_0, V_0$ . Dla układu równań (6.26) przyjmuje się następującą postać rozwiązań  $\tau_i(a_0)$

$$(6.27) \quad \tau_i(a_0) = \tau_i^0 + \alpha_0 \tau_i^1, \quad i = 1, 2,$$

gdzie  $\tau_i = \tau_i(0)$  (por. (6.16)). Po podstawieniu równania (6.27) do (6.26)<sub>1</sub>, aproksymacja liniowa prowadzi do wyrażenia

$$(6.28) \quad p(\tau_1 + \alpha_0 \tau_1^1) = p(\tau_1^0) + p'(\tau_1^0) \alpha_0 \tau_1^1 = 0.$$

Uwzględniając wartości współczynników  $p_k^0, p_k^1, q_k^0, q_k^1$  (część z nich przybiera wartości zerowe) otrzymuje się równanie:

$$(6.29) \quad p(\tau_1^0) + (p(\tau_1^1) + \tau_1^1 p'(\tau_1^0)) \alpha_0 = 0.$$

Prim w dwóch ostatnich równaniach oznacza różniczkowanie względem parametru  $\tau_1$ . Pierwszy człon równania (6.29) wynosi zero (por. (6.15)), a z zerowania się członu drugiego wynika rozwiązanie (6.30)<sub>2</sub> dla poszukiwanego współczynnika  $\tau_1^1$

$$(6.30) \quad p(\tau_1^0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \tau_1^1 = -\frac{p(\tau_1^1)}{p'(\tau_1^0)}.$$

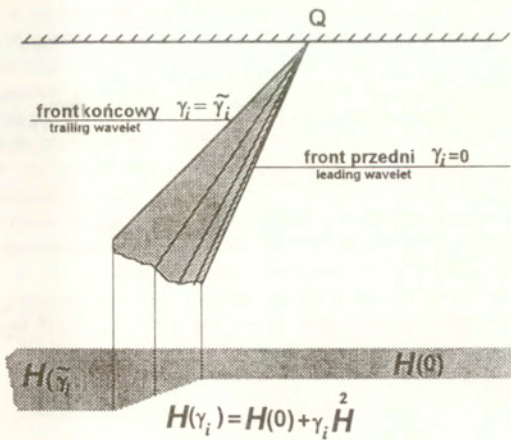
W podobny sposób można znaleźć drugi nieznaną współczynnik w równaniu (6.26)<sub>2</sub>

$$(6.31) \quad q(\tau_2^0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \tau_2^1 = -\frac{q(\tau_2^1)}{q'(\tau_2^0)}.$$

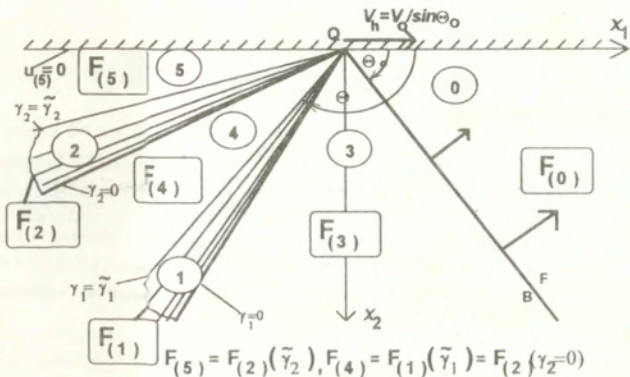
### *i) odbite fale proste*

Niech  $i$ -ta odbita fala prosta będzie określona przez parametr  $\gamma_i \in [0, \tilde{\gamma}_i]$ , gdzie  $\gamma_i = 0$  charakteryzuje przedni front fali prostej (leading wavelet), a  $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i$  określa położenie frontu końcowego (trailing wavelet). Dla małych lecz skończonych wartości  $\alpha_0$ , zachodzi  $\gamma_i = O(\alpha_0)$  (por. (6.61), (Kosiński, Duszczyk, 1993, str.758)). Według definicji i wcześniejszych założeń wszystkie wielkości charakteryzujące pole w obszarze fali prostej są ciągłymi funkcjami jej parametru  $\gamma_i$ . Zgodnie z użytą wcześniej procedurą perturbacyjną, każda wielkość jest reprezentowana przez swoją liniową aproksymację (Toupin, Bernstein, 1961). Oznaczając przez  $H(\gamma_i)$  typową wielkość pola w obszarze fali prostej, otrzymamy:  $H(\gamma_i) = H(0) + \gamma_i H_2$ , gdzie  $H(0)$  jest wartością wielkości  $H$  w obszarze przed falą, a  $H_2$  należy określić.





Rys. 6.2. Aproxymacja liniowa w obszarze fali prostej



Rys. 6.3. Aproxymacja dla gradientu deformacji w poszczególnych obszarach

$$\begin{aligned}
 & F_{(5)}(a, \gamma_1, \gamma_2) = F_{(0)} + a F_{(3)} + \gamma_1 F_{(1)} + \gamma_2 F_{(2)} \\
 & F_{(3)}(a, 0, 0) = \dots \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 (6.32) \quad & F_{(1)}(a, \gamma_1, 0) = \dots \uparrow \quad \uparrow \\
 & F_{(4)}(a, \tilde{\gamma}_1, 0) = \dots \uparrow \quad \uparrow \\
 & F_{(2)}(a, \tilde{\gamma}_1, \gamma_2) = \dots \uparrow \\
 & F_{(5)}(a, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = \dots \uparrow \\
 (6.33) \quad & u_{(5)}(a, \gamma_1, \gamma_2) = u_{(0)} + a u_{(3)} + \gamma_1 u_{(1)} + \gamma_2 u_{(2)}
 \end{aligned}$$

Obierając za funkcję pola gradient deformacji, otrzymamy zgodnie z aproksymacją liniową opisaną powyżej; dla obszarów fal prostych i w obszarach stałego stanu wyrażenia dla poszczególnych obszarów (por. (6.32)). Pierwszy wiersz tego wyrażenia podaje najbardziej ogólne rozwiązanie zależne od trzech parametrów. W dalszych wierszach strzałki pokazują granice aproksymacji, a argumenty w nawiasach po lewej stronie oznaczają zależność od parametrów oraz granice obowiązywania wyrażenia. Wskaźniki w nawiasach przy stałych członach oznaczają obszary w których te wyrażenia zostały obliczone. Parametry  $\gamma$  występują z tyldą i oznaczają końcową wartość parametru, lub bez tyldy, aproksymacja związana jest wtedy z dowolnym frontem w fali prostej. Identyczną aproksymację można zaproponować dla wektora prędkości cząstek ośrodka w poszczególnych obszarach (6.33).

Jeżeli gradient deformacji przybiera postać (6.32), tensor akustyczny, jego wartości własne i wektory własne mogą być aproksymowane do następujących postaci

$$(6.34) \quad \hat{\mathbf{Q}}(a_0, \gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{Q} + a_0 \mathbf{Q} + \gamma_1 \mathbf{Q} + \gamma_2 \mathbf{Q} ,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(\lambda, \mu, \tau), & \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(\lambda, \mu, l, m, n, \tau, a_0, \Theta_0), \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(\lambda, \mu, l, m, n, \tau, a_0, \Theta_0, \mathbf{F}'_{(1)}), \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(\lambda, \mu, l, m, n, \tau, a_0, \Theta_0, \mathbf{F}'_{(1)}, \mathbf{F}'_{(2)}) \end{aligned}$$

oznaczają składowe poszczególnych tensorów w rozwinięciu odnoszące się odpowiednio do obszaru nieodkształconego, obszaru za frontem fali padającej oraz do obszarów odbitych fal prostych. Pochodne gradientu deformacji w obszarach obu fal prostych  $\mathbf{F}'_{(1)}$ ,  $\mathbf{F}'_{(2)}$  są w tej aproksymacji stałe (por. (2.26)2).

Równanie określające wartości własne, wynika z warunku centryczności wszystkich frontów falowych

$$(6.35) \quad V_{hi}^2 = V_{hi}^2 + a_0 V_{hi}^2 + \gamma_1 V_{hi}^2 + \gamma_2 V_{hi}^2 .$$

Człony w rozwinięciu mają identyczną dla wszystkich aproksymacji postać (por. (6.21), (6.48))

$$(6.36) \quad \rho_R V_{hi}^2 = r_i(\mathbf{Q} \mathbf{r}_i), \quad R = 1, 2, 3, \quad \text{a } i = 1, 2 \text{ (nie sumować).}$$

Rozwinięcie dla wektorów własnych ma postać

$$(6.37) \quad \mathbf{r}_i(a_0, \gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{r}_i + a_0 \mathbf{r}_i + \gamma_1 \mathbf{r}_i + \gamma_2 \mathbf{r}_i .$$

Górny środkowy indeks w rozwinięciach wyżej opisanych oraz w (6.32), (6.33) ma inne znaczenie.

ii) pierwsza odbita fala prosta

Dla obszaru pierwszej odbitej fali prostej przy zastosowaniu aproksymacji opisanej powyżej, otrzymuje się następujące wyrażenia dla prędkości, gradientu deformacji oraz dla położenia frontów (por. (2.26))

$$(6.38) \quad \mathbf{u}_{(1)}(\gamma_1) = \mathbf{u}_{(3)} + \gamma_1 \mathbf{u}_{(1)}^2, \quad \mathbf{F}_{(1)}(\gamma_1) = \mathbf{F}_{(3)} + \gamma_1 \mathbf{F}_{(1)}^2, \\ \tau_1(\gamma_1) = \tau_1 + \gamma_1 \tau_1, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \tilde{\gamma}_1.$$

Położenie pierwszego frontu fali prostej określa (6.27) i (6.30)<sub>1</sub>. Podstawienie wyrażen (6.38)<sub>1,2</sub> do warunku propagacji (6.9)<sub>1</sub> prowadzi do następującego układu równań:

$$(6.39) \quad (\hat{\mathbf{Q}}(0) - \rho_R V_{h1}^2(0) \mathbf{I}) \mathbf{u}_{(1)}^2 = 0,$$

$$(6.40) \quad \mathbf{F}_{(1)}^2 = -V_{h1}^{-1} \mathbf{u}_{(1)}^2 \otimes \hat{\mathbf{N}}_{(1)},$$

gdzie  $\hat{\mathbf{Q}}(0) = \mathbf{Q} + a_0 \mathbf{Q}^1$ ,  $V_h^2(0) = V_h^2 + a_0 V_h^2$ ,  $\hat{\mathbf{N}}_{(1)} = (1, -(\tau_1 + a_0 \tau_1), 0)$ .

Rozwiązania dla wartości własnych równania (6.39), są teraz niezależne od parametru falowego i równania (2.26) można bardzo prosto rozwiązać. Szczególny wybór wartości współczynnika  $k$  w równaniu (2.26) związany jest jedynie z parametryzacją frontów falowych. Zwyczajowo przyjmuje się  $k$  jako współczynnik skalujący dla parametru falowego  $\gamma$  w postaci dowolnego skalaru lecz z przeciwnym znakiem.

Dla  $i$ -tej fali prostej otrzymuje się wyrażenia:

$$(6.41) \quad \mathbf{u}'_{(i)} = -k \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{F}'_{(i)} = k V_{hi}^{-1} \mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{N}}_i.$$

Warunki początkowe dla równań różniczkowych (6.41) opisujących pierwszą falę odbitą wynikają z wartości w obszarze stałego stanu 3 za frontem fali padającej. Całkując pierwsze równanie (6.41), ( $i=1$ ) względem  $\gamma_1$ , przy uwzględnieniu (6.38) można otrzymać

$$(6.42) \quad \mathbf{u}_{(1)}(\gamma_1) = -\gamma_1 k \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_{(3)}, \quad \mathbf{F}_{(1)}(\gamma_1) = \gamma_1 k V_{h1}^{-1} \mathbf{r}_1 \otimes \hat{\mathbf{N}}_{(1)} + \mathbf{F}_{(3)}. \\ 0 \leq \gamma_1 \leq \tilde{\gamma}_1.$$

Zakłada się, że tensor akustyczny, wartości i wektory własne w obszarze 1 mają postać:

$$(6.43) \quad \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + a_0 \mathbf{Q}^1 + \gamma_1 \mathbf{Q}^2,$$

$$(6.44) \quad V_{hi}^2 = V_{hi}^2 + a_0 V_{hi}^2 + \gamma_1 V_{hi}^2,$$

$$(6.45) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + a_0 \mathbf{r}_i + \gamma_1 \mathbf{r}_i.$$

Współczynniki rozwinięcia  $\mathbf{Q}$ ,  $V_{hi}^2$  oraz  $\mathbf{r}_i$  w tej aproksymacji oblicza się w podobny sposób jak dla aproksymacji zerowego rzędu. Niezerowe składowe  $\mathbf{Q}$  (por. (Kosiński, Duszczyk, 1993)) wynikają z równania (6.10)<sub>1</sub> po podstawieniu rozwinięcia (6.43) i (6.42)<sub>2</sub>

$$\begin{aligned}
 Q_{11}^2 &= (\phi_1 + 2\phi_2)F'_{(1)11} + \phi_1 F'_{(1)22} - 2((\mu + m)F'_{(1)21} + (\phi_2 - \mu - m)F'_{(1)12})\tau \\
 &\quad + \phi_3(F'_{(1)11} + F'_{(1)22})\tau^2, \\
 (6.46) \quad Q_{22}^2 &= \phi_3(F'_{(1)11} + F'_{(1)22}) - 2((\mu + m)F'_{(1)12} + (\phi_2 - \mu - m)F'_{(1)21})\tau \\
 &\quad + (\phi_1 F'_{(1)11} + (\phi_1 + 2\phi_2)F'_{(1)22})\tau^2, \\
 Q_{12}^2 &= Q_{21}^2 = (\phi_2 - \mu - m)F'_{(1)21} + (\mu + m)F'_{(1)12} - (\phi_1 + \mu + m)(F'_{(1)11} + F'_{(1)22})\tau \\
 &\quad + ((\phi_2 - \mu - m)F'_{(1)12} + (\mu + m)F'_{(1)21})\tau^2,
 \end{aligned}$$

W wyrażeniach (6.46) składowe  $F'_{(i)}$  wynikają z równań (6.41).

Podstawiając do równań (6.9) i (2.25)<sub>2</sub> rozwinięcia (6.43), (6.44) i (6.45) i ograniczając się do członów liniowych względem  $a_0$  i  $\gamma_1$  uzyskuje się wyrażenia dla współczynników  $V_{hi}^2$   $\mathbf{r}_i$

$$\begin{aligned}
 (6.47) \quad &\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{Q} + a_0 \mathbf{Q} \end{pmatrix} - \rho_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V_{hi}^2 + a_0 V_{hi}^2 \end{pmatrix} \mathbf{I} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{r}_i + a_0 \mathbf{r}_i \end{pmatrix} = 0, \\
 &\left( \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \mathbf{Q} - \rho_R V_{hi}^2 \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{r}_i + a_0 \mathbf{r}_i \end{pmatrix} \right) + \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{Q} + a_0 \mathbf{Q} \end{pmatrix} - \rho_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V_{hi}^2 + a_0 V_{hi}^2 \end{pmatrix} \mathbf{I} \right)^2 \mathbf{r}_i = 0.
 \end{aligned}$$

Z warunku propagacji (6.9)<sub>1</sub> wynika, że pierwsze z powyższych równań jest spełnione tożsamościowo. Powtarzając etapy obliczeń z poprzedniej aproksymacji jak przy wyprowadzaniu równań (6.17)–(6.24) i pozostawiając jedynie człony liniowe względem  $a_0$ ,  $\gamma_i$  otrzymuje się z równania (6.47)<sub>1</sub>

$$(6.48) \quad \rho_R V_{hi}^2 = \mathbf{r}_i (\mathbf{Q} \mathbf{r}_i) + 2a_0 \mathbf{r}_i (\mathbf{Q} \mathbf{r}_i), \quad (i - \text{nie sumować}),$$

$$(6.49) \quad \mathbf{r}_1 = \bar{\alpha}_{12} \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_2 = -\bar{\alpha}_{12} \mathbf{r}_1,$$

gdzie

$$(6.50) \quad \bar{\alpha}_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 (\mathbf{Q} \mathbf{r}_2)}{\rho_R \left( V_{h1}^2 - V_{h2}^2 + a_0 (V_{h1}^2 - V_{h2}^2) \right)}.$$

Drugi człon w równaniu (6.48) po podstawieniu do (6.44) jest rzędu  $O(a_0^2)$  i może być pominięty. Ostatecznie rozwinięcia (6.48) i (6.49) przybierają postać:

$$(6.51) \quad V_{hi}^2 = r_i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & Q + a_0 Q + \gamma_1 Q & 0 \end{pmatrix} r_i, \quad (i - \text{nie sumować}),$$

$$(6.52) \quad r_1 = r_1 + (a_0 \alpha_{12} + \gamma_1 \bar{\alpha}_{12}) r_2, \quad r_2 = r_2 - (a_0 \alpha_{12} + \gamma_1 \bar{\alpha}_{12}) r_1.$$

Kierunki propagacji frontów falowych w odbitej fali prostej są określone przez równanie:

$$(6.53) \quad \tau_1(a_0, \gamma_1) = \tau_1 + a_0 \tau_1 + \gamma_1 \tau_1, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \bar{\gamma}_1$$

Aby znaleźć współczynnik  $\tau_1$  korzysta się ponownie z warunku centryczności frontów falowych, uzyskując dwa równania:

$$(6.54) \quad r_i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & Q + a_0 Q + \gamma_1 Q & 0 & 0 \end{pmatrix} r_i = \frac{\rho_R V_0^2}{\sin^2 \Theta_0}, \quad (i=1,2), \quad (i - \text{nie sumować}),$$

które przy uwzględnieniu wyrażen (6.12), (6.13) i (6.46) przyjmują postać dwóch wielomianów względem  $\tau_i$ :

$$(6.55) \quad p(\tau_1) = p(\tau_1) + a_0 p(\tau_1) + \gamma_1 p(\tau_1) = \sum_{k=0}^4 (p_k + a_0 p_k + \gamma_1 p_k) \tau_1^k = 0,$$

$$q(\tau_2) = q(\tau_2) + a_0 q(\tau_2) + \gamma_1 q(\tau_2) = \sum_{k=0}^4 (q_k + a_0 q_k + \gamma_1 q_k) \tau_2^k = 0,$$

gdzie  $\tau_i^k$  jest k-tą potęgą  $\tau_i$ , stałe  $p_k, p_k, q_k, q_k$  są takie same jak w poprzedniej aproksymacji (por. (6.26)). Stałe  $p_k, q_k$  są wyrażeniami zależnymi od stałych materiałowych:  $\lambda, \mu, l, m, n$ , parametrów fali padającej:  $\alpha_0, V_0, \Theta_0$  oraz pochodnych gradientu deformacji  $F'_{(1)\alpha}$  (o stałej wartości) w obszarze fali prostej (por. (Kosiński, 1990) i (Kosiński, Duszczuk, 1993, (4.52))).

Podstawiając wyrażenie (6.53) do (6.55)<sub>1</sub> i postępując analogicznie jak w przypadku równań (6.28), (6.29) otrzymuje się rozwiązanie dla współczynnika rozwinięcia  $\tau_1$  w postaci

$$(6.56) \quad \tau_1 = - \frac{p(\tau_1(a_0, 0))}{p'(\tau_1(a_0, 0)) + a_0 p'(\tau_1(a_0, 0))}$$

Równanie (6.55)<sub>2</sub> jest związane z obszarem 2; rozwiązania:

$$(6.57) \quad \tau_2(a_0, \gamma_1) = \tau_2^0 + a_0 \tau_2^1 + \gamma_1 \tau_2^2, \quad \tau_2^2 = - \frac{q^2(\tau_2(a_0, 0))}{q'(\tau_2(a_0, 0)) + a q(\tau_2(a_0, 0))},$$

określają kierunki propagacji frontów falowych w drugiej odbitej fali prostej. Prim o dwóch ostatnich równaniach oznacza różniczkowanie względem  $\tau_2$ .

Końcowe wartości w obszarze 1, dla  $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$ , określają stałe wartości funkcji pola w obszarze 4

$$(6.58) \quad \mathbf{u}_{(4)} = \mathbf{u}_{(1)}(\tilde{\gamma}_1), \quad \mathbf{F}_{(4)} = \mathbf{F}_{(1)}(\tilde{\gamma}_1).$$

Identyczne rozważania i obliczenia można przeprowadzić dla drugiej odbitej fali prostej, wyniki zestawiono w pracach (Kosiński, 1990) i (Kosiński, Duszczyk, 1993). Punktem wyjścia są rozwinięcia podstawowych wielkości opisujących proces falowy o postaciach (6.34)-(6.37)

### iii) warunki brzegowe

Gdy fala padająca odbija się od utwierdzonego brzegu na płaszczyźnie brzegowej znikają składowe prędkości (por. rys.6.1)

$$(6.59) \quad \mathbf{u}_{(5)} = 0 \quad \text{na} \quad X_2 = 0.$$

Podstawienie do warunku (6.59) wyrażeń (6.42)<sub>1</sub>, (6.58)<sub>1</sub> oraz analogicznego związku  $\mathbf{u}_{(5)} = \mathbf{u}_{(2)}(\tilde{\gamma}_2)$  wynikającego z aproksymacji dla drugiej fali odbitej, (por. (Kosiński, Duszczyk, 1993, str.755)) prowadzi do równań:

$$(6.60) \quad \tilde{\gamma}_1 \mathbf{r}_1 + \tilde{\gamma}_2 \mathbf{r}_2 = k^{-1} \mathbf{u}_{(3)},$$

które (por.(6.6)<sub>2</sub>) łatwo rozwiązać względem  $\tilde{\gamma}_i$ :

$$(6.61) \quad \tilde{\gamma}_i = \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u}_{(3)}}{|\mathbf{r}_i|^2} k^{-1} = \mathbf{r}_i \mathbf{N}_0 k^{-1} a_0 V_0,$$

gdzie wektory własne  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  obliczone są odpowiednio w obszarze pierwszej (6.24) i drugiej (6.52) fali odbitej. Z powyższego równania wynika, że odpowiedni wybór  $k$  powoduje, że wartości parametrów  $\tilde{\gamma}_i$  i  $a_0$  mogą mieć ten sam rząd wielkości  $\tilde{\gamma}_i = O(a_0)$ .

iv) warunki propagacji dla fal prostych

Rozwiązania uzyskane dla frontów falowych w obszarze pierwszej i drugiej odbitej fali prostej, zgodnie z uwagami na str. 18, powinny spełniać następujące warunki:

$$(6.62) \quad \tau_1(a_0, \tilde{\gamma}_1) < \tau_1(a_0, 0) \quad \tau_2(a_0, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) < \tau_2(a_0, \tilde{\gamma}_1, 0)$$

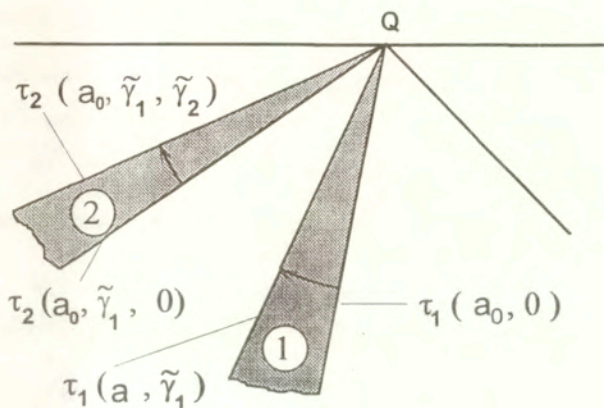


Fig. 6.4. Położenia frontów falowych

Zagadnienie sprowadza się do określenia dla jakich wartości początkowych fali padającej  $\Theta_0$  i  $a_0$ , powyższe nierówności są spełnione: (a) jednocześnie, (b) pierwsza lub druga, (c) żadna nie jest spełniona. Jeżeli zachodzi przypadek (b) rozwiązanie w postaci fali prostej powinno być zmodyfikowane przez przyjęcie w rozwiązaniu fali uderzeniowej; w przypadku (c) rozwiązanie powinno składać się z dwóch fal uderzeniowych.

v) zmodyfikowane rozwiązanie w postaci fali uderzeniowej

Jeżeli funkcja  $\tau$  rośnie gdy parametr  $\gamma$  zmienia się od zera do końcowej wartości, poruszający się "ołówki" frontów w fali prostej zbiega się do pierwszego frontu tworząc falę uderzeniową (por. rys. 6.5). Równania różniczkowe opisujące falę prostą są zastąpione warunkami dla skoków

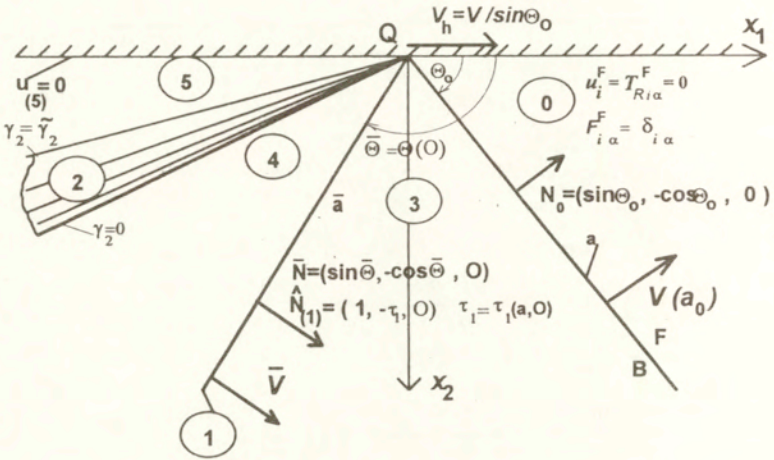
$$(6.63) \quad [u_i] = -\bar{V} \bar{a}_i, \quad [F_{i\alpha}] = -\bar{a}_i \bar{N}_\alpha,$$

gdzie jednostkowa normalna  $\bar{N} = (\sin \bar{\Theta}, -\cos \bar{\Theta}, 0)$ , wektor amplitudy  $\bar{a}$  i prędkość propagacji w kierunku normalnym  $\bar{V}$  są wielkościami które należy wyznaczyć. Zakładając, że pierwszą falę prostą należy zastąpić falą uderzeniową, zgodnie z równaniami (6.42) skoki wzdłuż frontu fali wynoszą:

$$(6.64) \quad [u_{(1)i}] = -\tilde{\gamma}_1 k r_{1i}, \quad [F_{(1)i\alpha}] = \tilde{\gamma}_1 V_h^{-1} k r_{1i} \hat{N}_{(1)\alpha}$$

Kąt odbicia fali uderzeniowej  $\bar{\Theta}$  jest równy kątowi określającemu położenie przedniego frontu w fali prostej  $\Theta(0)$  (por. rys. 6.5). Wynika stąd równość

$$(6.65) \quad \bar{N} = \sin \Theta(0) \hat{N}_{(1)}$$



Rys. 6.5. Zmodyfikowane rozwiązanie dla zagadnienia odbicia: fala uderzeniowa i fala prosta

Z równań (6.63), (6.64) wynikają następujące warunki:

$$(6.66) \quad \frac{[u_{(1)1}]}{[u_{(1)2}]} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} = \frac{r_{11}}{r_{12}}$$

oznacza to, że wektory  $\bar{a}$  i  $r_1$  są równoległe. Można więc przyjąć, że  $\bar{a} = \pm \bar{a} r_1$  gdzie  $\bar{a} = |\bar{a}|$  jest intensywnością fali odbitej. Przy przyjętych w pracy przybliżeniach odbita fala uderzeniowa jest falą *podłużną*. Dla takiej statecznej odbitej fali uderzeniowej należy wybrać  $N = -a/a$  (por. (6.1))

$$(6.67) \quad \bar{a} = -\bar{a} r_1$$

Podstawiając wyrażenia (6.65) i (6.67) do (6.63)<sub>1</sub> oraz (6.64)<sub>1</sub> otrzymuje się

$$(6.68) \quad \bar{a} = \gamma_1 V_h^{-1} k \sqrt{1 + \tau_1^2}$$

gdzie wartość  $\tau_1 = \tau_1(a_0, 0)$  wynika z równania (6.53) (por. także (6.27)), a stała  $k > 0$ .

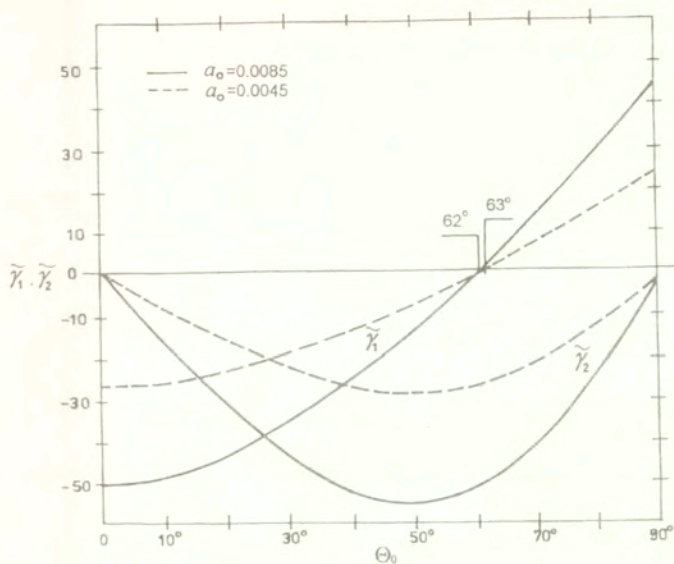


W podobny sposób można określić parametry drugiej odbitej fali uderzeniowej, która jest falą *poprzeczną*.

### 6.5. Analiza numeryczna i uwagi

Dla rozwiązań uzyskanych w poprzednich podrozdziałach przeprowadzono analizę numeryczną w przypadku stali (por. dodatek 2.) dla dwóch wartości intensywności fali padającej  $a_0=0.0085$  i  $a_0=0.0045$  (wykresy dla pierwszej wartości oznaczono linią ciągłą a dla drugiej linią przerywaną). Obliczenia bazują na wcześniejszych założeniach; fala odbija się od brzegu utwierdzonego i obowiązują zależności (6.59)-(6.61).

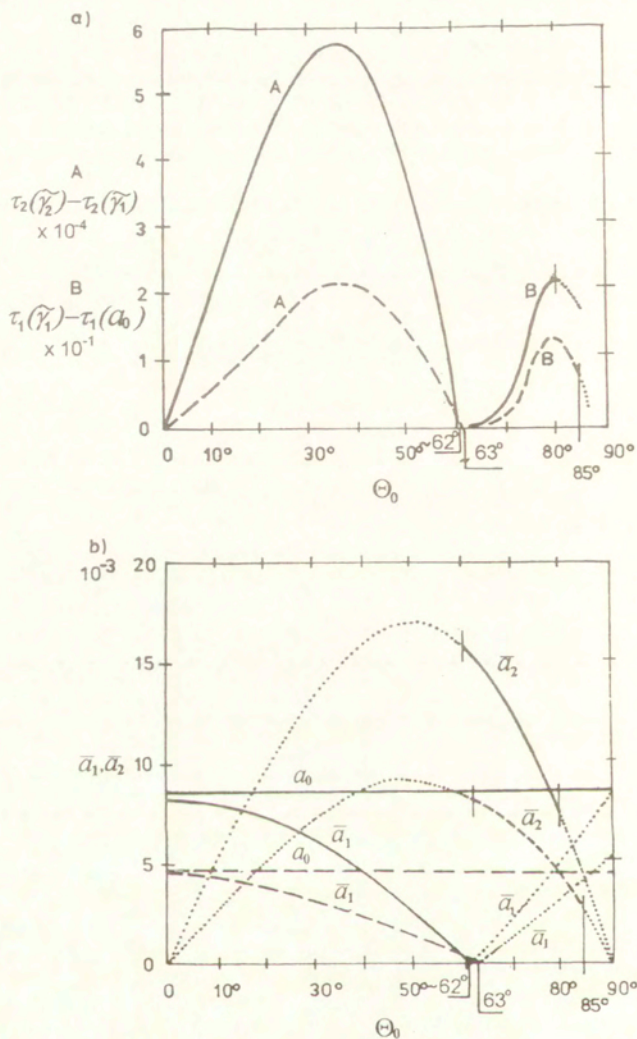
Rys.6.6 przedstawia związek między kątem padania i końcowymi wartościami parametrów fali prostej  $\tilde{\gamma}_1$ ,  $\tilde{\gamma}_2$  dla dwóch intensywności fali padającej.



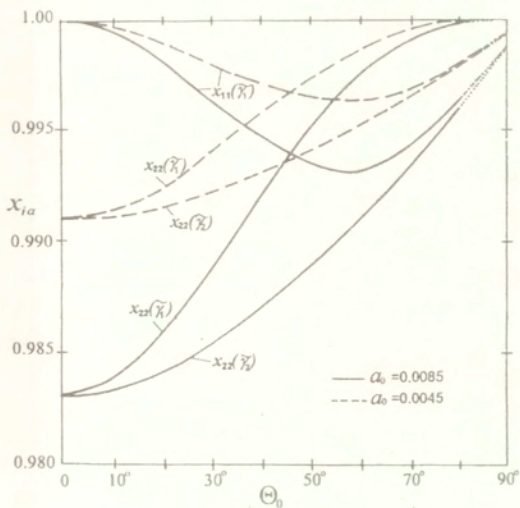
Rys.6.6. Końcowe wartości parametrów fal prostych w funkcji kąta padania

W rozpatrywanym zagadnieniu płaskim powierzchnia falowa składa się z dwóch gałęzi. Front pierwszej odbitej fali przecina pierwszą zewnętrzną powierzchnię falową przy kącie padania odpowiednio  $\Theta_0=\Theta_c=85^\circ$  dla  $a_0=0.0045$  i  $\Theta_0=\Theta_c=80^\circ$  dla  $a_0=0.0085$  (por. rys.6.7a). Rozwiązanie w założonej postaci przestaje wtedy obowiązywać. Zależnie od intensywności fali padającej, wartość parametru  $\tilde{\gamma}_1$  wynosi zero, dla kąta padania  $\Theta_0=62^\circ$  lub  $\Theta_0=63^\circ$ . Zgodnie z zależnością (6.68) intensywność fali odbitej wynosi w tym przypadku zero i pierwsza fala odbita znika. Front fali padającej i pojedynczej fali odbitej która jest w tym przypadku *falą uderzeniową* pozostają prostopadłe. Wynik ten jest zgodny z rozwiązaniem analogicznego

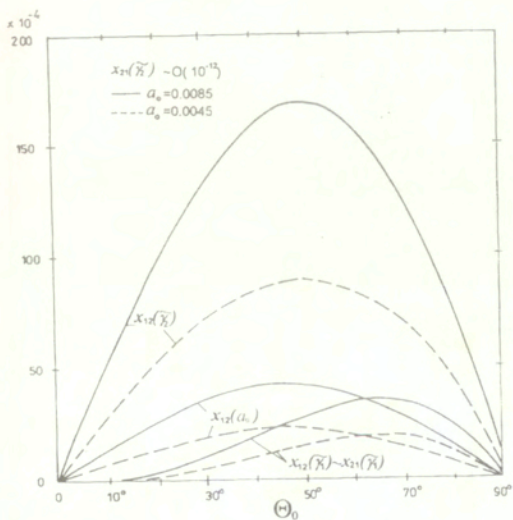
zagadnienia dla materiału harmonicznego (por. (Youngchi, Ting, 1984). Zgodnie z rys.6.10 dla intensywności  $a_0=0.0085$  i kąta padania  $\Theta_0=62^\circ$  ( $\gamma_1=0$ ) kąt odbicia dla pojedynczego frontu fali uderzeniowej wynosi  $\Theta_2=152^\circ$ .



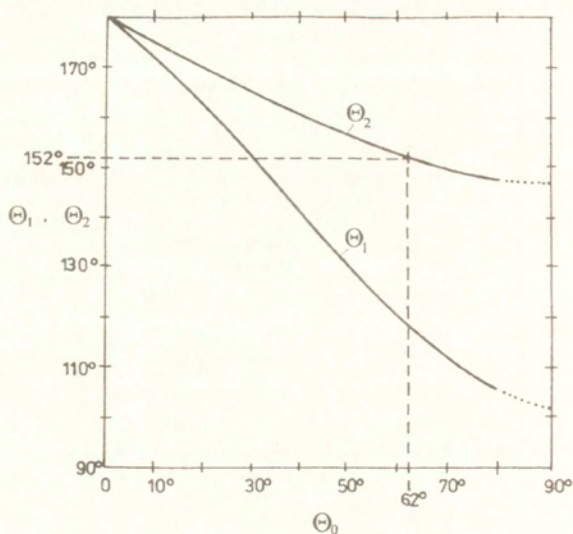
Rys.6.7. a) Rozwartość kątowego "wachlarzyka" dla odbitych fal prostych;  
b) intensywności fal odbitych w funkcji kąta padania



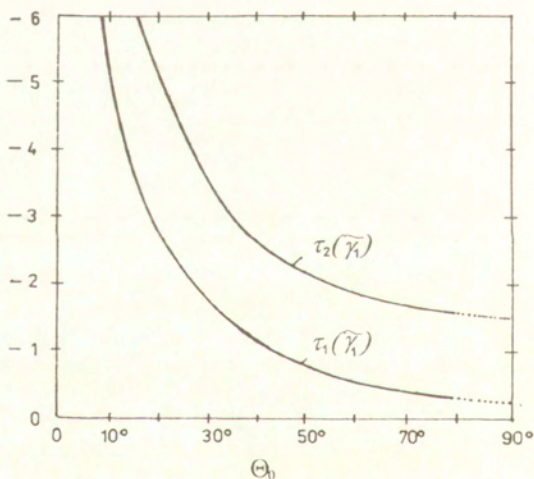
Rys. 6.8. Składowe gradientu deformacji dla końcowych wartości parametrów fal prostych jako funkcje kąta padania



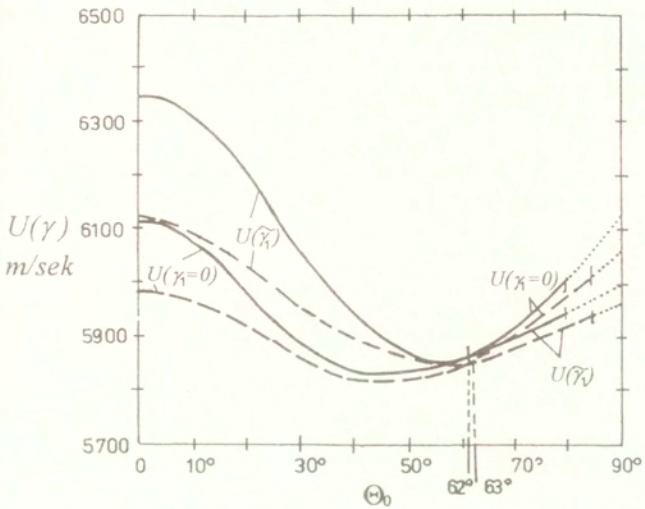
Rys. 6.9. Składowe gradientu deformacji dla końcowych wartości parametrów fal prostych jako funkcje kąta padania



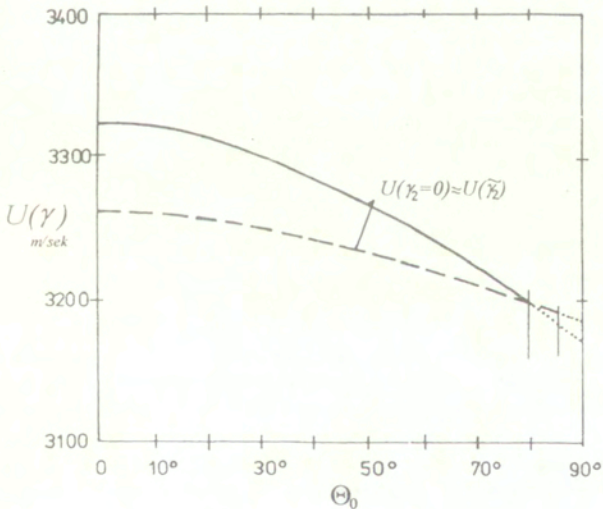
Rys. 6.10. Związek między położeniem frontów fal odbitych i kątem padania



Rys. 6.11. Szerokość obszaru między falami odbitymi w funkcji kąta padania



Rys.6.12. Prędkość propagacji  $U(\gamma)$  jako funkcja kąta padania dla pierwszej fali odbitej



Rys.6.13. Prędkość propagacji  $U(\gamma)$  jako funkcja kąta padania dla drugiej fali odbitej

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że dla małych kątów padania pierwsza fala odbita jest falą uderzeniową (rys.6.7b), a druga jest falą prostą. Gdy kąt padania rośnie, przy wartości parametru  $\gamma_1=0$ , następuje zmiana w rozwiązaniu. Pierwsza odbita fala uderzeniowa przechodzi w falę prostą i analogicznie druga odbita fala prosta przechodzi w falę uderzeniową. Rys.6.7b przedstawia wykresy dla intensywności odbitych fal uderzeniowych  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  (por. (6.68)) jako funkcji kąta padania. Krzywe zaznaczone kropkami reprezentują obszary fal prostych. W dyskutowanym tu przypadku dla żadnego kąta padania, nie można uzyskać rozwiązania złożonego z dwóch odbitych fal uderzeniowych, lub prostych. Rys.6.7a pokazuje różnice w wartościach dla funkcji cotangens dla kątów określających położenie przedniego i końcowego frontu fali prostej odpowiednio w drugiej (A) i po przejściu ( $\gamma_1=0$ ) w pierwszej (B) odbitej fali prostej. Oba wykresy przedstawiono na tym samym rysunku lecz z różnymi mnożnikami.

Rys.6.8 i rys.6.9 przedstawiają związek między składowymi gradientu deformacji i kątem padania. Z wykresów wynika, że w punkcie zamiany rozwiązań ( $\gamma_1=0$ ) przy zastosowanej aproksymacji zależność pozostaje ciągła (por. (6.63), (6.64)).

Rys.6.10 pokazuje zależność kątów odbicia  $\Theta_1, \Theta_2$  określających fronty fal odbitych (dla aproksymacji  $\tau_1(a_0), \tau_2(a_0)$ ) w zależności od kąta padania. W skali rysunku wykresy dla następnych aproksymacji pozostają niezmienione.

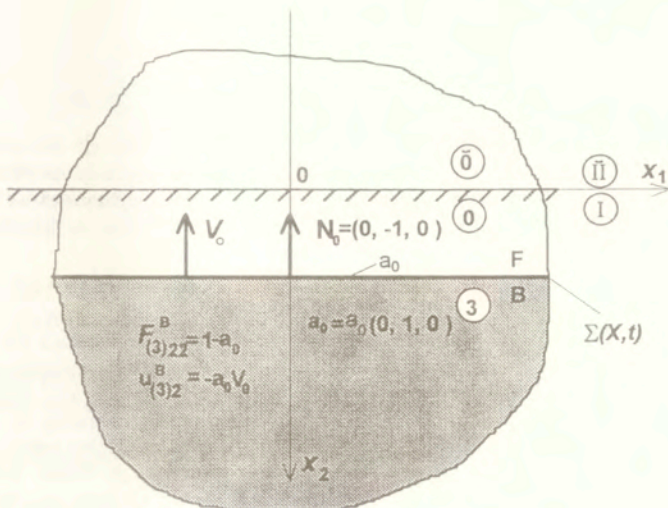
Charakterystyczna na rys.6.11 jest szerokość obszaru między dwoma falami odbitymi. Rysunek pokazuje dwie funkcje cotangens dla kątów związanych z frontami obejmującymi ten obszar.

Rysunki 6.12 i 6.13 przedstawiają wykresy prędkości dla pierwszej i drugiej fali odbitej w funkcji kąta padania. W dwóch przedziałach kąta padania  $\langle 0, 62^\circ \rangle, \langle 0, 63^\circ \rangle$  zachodzi zależność  $U(\gamma_1) > U(\gamma_1=0)$  i możliwe jest występowanie tylko fal uderzeniowych. Jeżeli kąt padania dalej rośnie powyżej kąta przejścia  $U(\gamma_1=0) > U(\gamma_1)$  "wachlarzyk" frontów w pierwszej odbitej fali prostej może się rozwijać. W przypadku drugiej fali odbitej różnice w prędkościach są tak małe, że nie mogą być przedstawione w skali rysunku (por. rys.6.13).

Różnice w wartościach parametrów opisujących proces falowy pomiędzy obszarem nieodkształconym i po propagacji fal odbitych są rzędu 2-4% zależnie od kąta padania. Składowe wektorów własnych są praktycznie takie same we wszystkich aproksymacjach.

## 6.6. Odbicie z transmisją w kierunku normalnym

Jest to szczególny jednowymiarowy przypadek omówionego wyżej dwuwymiarowego zagadnienia (por. (Kosiński, 1986)) Front podłużnej padającej fali uderzeniowej oraz fronty wszystkich fal w konfiguracji są stale równoległe do brzegu. Normalne do wszystkich frontów mają postać  $\mathbf{N} = (0, \pm 1, 0)$  i poprzednie rozważania ewidentnie się upraszczają, ponieważ w opisie zagadnienia nie występuje parametr  $\tau = \text{ctg}\Theta(\gamma)$ . Podstawiając we wzorach (6.1), (6.5) i (6.6) wartość  $\Theta_0 = 0$ , otrzymuje się następujące wyrażenia dla gradientu deformacji i prędkości cząstek w obszarze 3 za frontem fali padającej (por. rys.6.14)



Rys. 6.14. Podłużna fala uderzeniowa padająca w kierunku normalnym

$$(6.69) \quad N_0 = (0, -1, 0), \quad F_{(3)}^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_{(3)}^B = (0, -1, 0)a_0 V_0.$$

Skoku doznaje składowa  $F_{(3)22}$  gradientu deformacji i składowa  $u_{(3)2}$  prędkości. W przypadku, gdy obszar przed frontem fali padającej poddany jest jednorodnej deformacji wstępnej (por. (6.4)) wyrażenia (6.69) ulegają prostej modyfikacji.

Przyjmuje się, że w przypadku ogólnym istnieją trzy odbite fale proste (Wright, 1971a) o normalnych  $N = (0, 1, 0)$ . Z warunku propagacji (2.11)<sub>1</sub> wynika jednorodny układ równań dla  $u'_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):

$$(6.70) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{22} - U^2 & \sigma_{12}^{22} & \sigma_{13}^{22} \\ \sigma_{21}^{22} & \sigma_{22}^{22} - U^2 & \sigma_{23}^{22} \\ \sigma_{31}^{22} & \sigma_{32}^{22} & \sigma_{33}^{22} - U^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Przy założonej postaci normalnej z równań (2.26) lub (6.41) wynika, że w najbardziej ogólnym przypadku w każdym z obszarów, tylko trzy pochodne składowych gradientu deformacji mogą być różne od zera tzn.  $F'_{(i)12} \neq 0$ ,  $F'_{(i)22} \neq 0$ ,  $F'_{(i)32} \neq 0$ . Przed frontem fali padającej (obszar nieodkształcony) dwie składowe mają wartość  $x_{12} = x_{32} = 0$ , lecz przy niezerowych pochodnych składowe te (jednorodna deformacja wstępna) mogą się zmieniać w obszarze odbitej fali prostej. Zakłada się więc reprezentację gradientu deformacji w każdej odbitej fali prostej i obszarze stałego stanu w postaci

$$(6.71) \quad \mathbf{F}_{(i)} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

Wartości wszystkich składowych tensora funkcji materiałowych  $\sigma_{ik}^{22}$  dla gradientu deformacji o postaci (6.71) i dla materiału Murnaghana podano w pracy (Kosiński, 1986, str. 489). Poniżej ograniczono się tylko do wyrażenia istotnego w dalszej dyskusji

$$(6.72) \quad \sigma_{22}^{22} = 2\sigma_1 + 2\sigma_2(x_{11}^2 + x_{33}^2) + 2\sigma_3x_{11}^2x_{33}^2 + 4\sigma_{11}x_{22}^2 + 8\sigma_{12}x_{22}^2(x_{11}^2 + x_{33}^2).$$

Z warunku propagacji w postaci ogólnej (2.11)<sub>1</sub> wynikają rozwiązania dla trzech fal odbitych. W rozpatrywanym przypadku, przy deformacji (6.69)<sub>2</sub>, odkształcenia są funkcjami jednej zmiennej  $X_2$ . Zgodnie z intuicją można wnioskować, że w przypadku padającej, podłużnej fali uderzeniowej, deformacja wykazuje symetrię w każdej płaszczyźnie zawierającej oś  $X_2$ . Z tego powodu można oczekiwać tylko jednej odbitej (i jednej transmitowanej) podłużnej fali prostej lub uderzeniowej. Postać gradientu deformacji w obszarze fali odbitej redukuje się do reprezentacji zgodnej z (6.69)<sub>2</sub>. Przy tym dodatkowym uproszczeniu równania dla składowych gradientu deformacji i równania wynikające z warunków brzegowych pozostają jednak *nieliniowe*. Zagadnienie można także rozwiązać w przypadku, gdy obszar przed frontem fali poddany jest jednorodnej deformacji wstępnej (por. (Kosiński, 1986)).

Zlinearyzowane równania ruchu (Toupin, Bernstein, 1961), dla odbitych fal prostych przybierają postać (por. (6.38), (6.39), (6.40))

$$(6.73) \quad \begin{aligned} & (\mathbf{Q}(0) - \rho_R U^2(0)\mathbf{I}) \mathbf{u}_{(i)} = 0, \quad i=1, 2, 3, \\ & \mathbf{F}_{(i)} = -U^{-1}(0) \mathbf{u}_{(i)} \otimes \mathbf{N}_{(i)}, \quad F_{(i)k2} = -U^{-1}(0) u_{(i)k} = \text{const}, \quad i, k=1, 2, 3 \end{aligned}$$

( $i$  - nie sumować),

gdzie  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q} + a_0 \mathbf{Q}$ ,  $U^2(0) = U^2 + a_0 U^2$ ,  $\mathbf{N}_{(i)} = (0, 1, 0)$ .

Równania zapisano przy założeniu, że ruchem podstawowym jest ruch za frontem fali padającej (zakłada się, że zmiany gradientu deformacji i prędkości w obrębie odbitej fali prostej są bardzo małe i nie mają wpływu na ruch podstawowy). Rozwiązania dla wartości i wektorów własnych, są teraz niezależne zarówno od parametru falowego jak też kierunku. Równania (2.26)<sub>2</sub> można łatwo rozwiązać.

Warunek istnienia niezerowych rozwiązań dla  $\mathbf{u}_{(i)}$  (6.73) prowadzi do trzech wartości dla prędkości charakterystycznych i trzech związanych z nimi wektorów własnych

$$(6.74) \quad U_i^2(0) = \sigma_{ii}^{22}(0), \quad r_j = \delta_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (i - \text{nie sumować}).$$

Wybierając w (2.14) funkcję skalującą  $f(x_{i\alpha}) = -U^{-1}(0)$  po podstawieniu do równań (6.73)<sub>2</sub> otrzymuje się równania różniczkowe



$$(6.75) \quad \frac{d^2 F_{i2}}{d\gamma_i^2} = -U_i^{-1}(0), \quad \frac{d^2 u_i}{d\gamma_i^2} = 1, \quad i, = 1, 2, 3 \quad (i - \text{nie sumować}).$$

Równania te z jednorodnymi warunkami początkowymi  $F_{i2}(0) = u_i(0) = 0$ ,  $i=1, 2, 3$  (dla nieodkształconego i pozostającego w spoczynku obszaru przed frontem fali padającej) prowadzą do następujących wyników:

$$(6.76) \quad F_{i2} = F_{i2}(0) - (U_i^{-1}(0))\gamma_i, \quad u_i = u_i(0) + \gamma_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i - \text{nie sumować}$$

$$F_{22}(0) = 1 - a_0, \quad \text{pozostałe składowe } F_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

Wszystkie powyższe wyrażenia są liniowymi funkcjami parametrów falowych  $\gamma_i$ . Przedziały zmienności dla tych parametrów wynikają z warunków brzegowych.

#### *i) brzeg utwierdzony*

Na brzegu  $X_2=0$  prędkość wynosi zero. Z wyrażenia (6.76)<sub>2</sub> wynika natychmiast

$$(6.77) \quad \tilde{\gamma}_i = -u_i(0), \quad i = 1, 2, 3 \Rightarrow \tilde{\gamma}_2 = -u_2(0) \neq 0, \quad \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_3 = 0.$$

Zakładając, że obszar przed frontem fali nie pozostaje w spoczynku, końcowe wartości dla dwóch ostatnich parametrów nie wynoszą zero. Fizycznie założenie takie jest jednak zupełnie nierealistyczne. Z równań (6.76) i (6.77)<sub>1</sub> wynika, że dla fali określonej przez parametr  $\gamma_2$  rozwiązania są następujące:

$$(6.78) \quad F_{22} = F_{22}(0) - (U_2^{-1}(0))\gamma_2, \quad 0 \leq \gamma_2 \leq \tilde{\gamma}_2,$$

$$\tilde{\gamma}_2 = -u_2(0) = -(-a_0 V_0) = a_0 V_0, \quad a_0 > 0, \tilde{\gamma}_2 > 0.$$

Składowa gradientu deformacji  $F_{22}$  jest malejącą funkcją parametru  $\gamma_2$ , przy ujemnych wartościach funkcji materiałowych  $\sigma_{11} < 0$ ,  $\sigma_{12} < 0$  (por. dodatek 2) wyrażenie (6.72) jest rosnącą funkcją parametru  $\gamma_2$ . Rozwiązanie jest odbitą falą uderzeniową o parametrach  $V$  i  $a = (0, a_2, 0)$ . Skok prędkości na froncie fali wynosi

$$(6.79) \quad [u_2] = (u_2)^B - u_2(0) = -aV, \quad \Rightarrow a_0 V_0 = -aV = -a \left( V + aV + \dots \right),$$

gdzie wyrażenie dla prędkości fali odbitej rozwinięto w szereg potęgowy parametru  $a$ , a wyraz  $V$  rozwinięcia, jest prędkością fali akustycznej w tym obszarze (por. (Wesołowski, 1978)) Intensywność fali odbitej oraz deformacja w obszarze za frontem fali wynoszą

$$(6.80) \quad a_2 = -a_0 \kappa, \quad (F_{22})^B = F_{22}(0) + a_2 N_2 = F_{22}(0) - \kappa a_0,$$

gdzie  $\kappa = V_0 / (V)^{-1} < 1$  (zgodnie z kryterium Laxa), a przez  $a_2$  oznaczono drugą składową wektora  $a$ . Dla statecznej odbitej fali uderzeniowej  $\kappa < 1$  (por. Kosiński, 1986), warunek entropii jest spełniony dla fal wywołujących ściskanie materiału.

ii) brzeg swobodny

Na brzegu swobodnym powinny być spełnione warunki dla znikania wektora naprężenia (por. punkt iii) w 3.4.). Składowe naprężeń obliczane są dla gradientu deformacji o postaci (6.71) (por. Kosiński, 1986).

$$(6.81) \quad \begin{aligned} T_{R22} &= 2 \rho_R x_{22} (\sigma_1 + \sigma_2 (x_{11}^2 + x_{33}^2)^2 + \sigma_3 (x_{11}^2 + x_{33}^2)^2), \\ T_{R12} &= 2 \rho_R x_{12} (\sigma_1 + \sigma_2 I_1 + \sigma_3 I_2), \\ T_{R32} &= 2 \rho_R x_{32} (\sigma_1 + \sigma_2 I_1 + \sigma_3 I_2). \end{aligned}$$

Przy wyborze w (2.14) funkcji skalującej  $f(x_{i\alpha}) = 1$  z równan (6.73) otrzymuje się równania różniczkowe (analogiczne do (6.75)):

$$(6.82) \quad \frac{d^2 F_{i2}}{d\gamma_i^2} = -1, \quad \frac{d u_i}{d\gamma_i} = U_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (i - \text{nie sumować}).$$

Rozwiązania mają postać

$$(6.83) \quad \begin{aligned} F_{i2} &= F_{i2}(0) - \gamma_i, \quad u_i = u_i(0) + (U_i(0))\gamma_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i - \text{nie sumować} \\ F_{22}(0) &= 1 - a_0, \quad \text{pozostałe składowe } F_{ij}(0) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Warunki na brzegu  $X_2=0$ :  $T_{R12} = T_{R32} = 0$  są spełnione, gdy zerują się na nim składowe  $x_{12} = x_{32} = 0$  gradientu deformacji. Zgodnie z (6.83) wyrażenia dla składowych  $x_{12}, x_{32}$ , są liniowymi funkcjami parametrów falowych  $\gamma_i$ . Przed frontem fali obszar jest nieodkształcony, wynikają stąd wartości  $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_3 = 0$ . Przy jednorodnej deformacji wstępnej, parametry te nie są równe zero.

Składowe tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa (2.3) dla  $\mathbf{F}=\mathbf{1}$ , są równe zero. Funkcję  $T_{Ri\alpha}(\mathbf{F})$  można rozłożyć w zbieżny szereg Taylora dla  $\mathbf{F}=\mathbf{1}$ . Dla małych, lecz skończonych deformacji przy uwzględnieniu pierwszego członu otrzymamy:

$$(6.84) \quad T_{Ri\alpha}(\mathbf{F}) = T_{Ri\alpha}(\mathbf{1}) + \frac{\partial T_{Ri\alpha}}{\partial x_{k\beta}} (x_{k\beta} - \delta_{k\beta}).$$

Zakładając, że wszystkie składowe reprezentacji (6.71) mogą się zmieniać, otrzymuje się dla poszczególnych składowych wyrażenie

$$(6.85) \quad \begin{aligned} T_{Ri2} &= \sigma_{i1}^{21}(\mathbf{1})(x_{11} - 1) + \sigma_{i2}^{22}(\mathbf{1})(x_{22} - 1) + \sigma_{i3}^{23}(\mathbf{1})(x_{33} - 1) \\ &\quad + \sigma_{i1}^{22}(\mathbf{1})x_{12} + \sigma_{i3}^{22}(\mathbf{1})x_{32} \end{aligned} \quad i=1, 2, 3$$

Wartości tensora funkcji materiałowych wynoszą

$$(6.86) \quad \sigma_{22}^{22}(\mathbf{1}) = \lambda + 2\mu, \quad \sigma_{21}^{21}(\mathbf{1}) = \sigma_{23}^{23}(\mathbf{1}) = \lambda, \quad \sigma_{11}^{22}(\mathbf{1}) = \sigma_{33}^{22}(\mathbf{1}) = \mu,$$

pozostałe składowe wynoszą zero.

Podstawienie wyrażenia (6.83) do równania (6.85) dla  $i=2$  pozwala obliczyć końcową wartość parametru  $\gamma_2$  na brzegu

$$(6.87) \quad \tilde{\gamma}_2 = F_{22}(0) - 1 + \frac{F_{11}(0) + F_{33}(0) - 2}{1 + 2\mu/\lambda}.$$

Statyczna jednorodna deformacja wstępna  $\bar{\mathbf{F}}$ , przed frontem fali padającej nie może być dowolna, warunki na brzegu  $X_2=0$  muszą być także spełnione przed odbiciem tzn.  $T_{R12}(\bar{\mathbf{F}}) = T_{R32}(\bar{\mathbf{F}}) = T_{R22}(\bar{\mathbf{F}}) = 0$ . Ostatni warunek w zlinearyzowanej postaci prowadzi do zależności

$$(6.88) \quad \bar{F}_{22}(0) - 1 + \frac{\bar{F}_{11}(0) + \bar{F}_{33}(0) - 2}{1 + 2\mu/\lambda} = 0.$$

Dwie ostatnie równości, przy wartości składowej  $F_{22}(0) = \bar{F}_{22} - a_0$ , obliczonej dla deformacji wstępnej prowadzą do wyniku, który w przyjętej aproksymacji jest niezależny od jej występowania:

$$(6.89) \quad \tilde{\gamma}_2 = -a_0, \quad -a_0 \leq \gamma_2 \leq 0.$$

Uwagi dotyczące monotoniczności wyrażenia przedstawiającego prędkość propagacji, są analogiczne jak w przypadku wzoru (6.78). Fala odbita jest w tym przypadku falą prostą.

### iii) odbicie i transmisja

Na płaszczyźnie  $X_2=0$  rozgraniczającej dwa sztywno połączone materiały muszą być spełnione warunki ciągłości (3.38), (3.39). Rozwiązania wynikające z warunków propagacji dla dwóch obszarów można zapisać w postaci analogicznej do (6.74)

*fala odbita (ruch podstawowy w obszarze za frontem fali padającej):*

$$(6.90) \quad U_i^2(0) = \sigma_{ii}^{22}(0), \quad r_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (i - \text{nie sumować}),$$

*fala transmitowana (ruch podstawowy przed frontem fali transmitowanej):*

$$(6.91) \quad \bar{U}_i^2(0) = \bar{\sigma}_{ii}^{22}(0), \quad \bar{r}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (i - \text{nie sumować}).$$

Równania opisujące prędkości cząstek ośrodka w obu obszarach mają postać (por. (6.76)<sub>2</sub>)

$$(6.92) \quad u_i = u_i(0) + \gamma_i, \quad \bar{u}_i = \bar{u}_i(0) + \bar{\gamma}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jeśli obszar przed frontem fali pozostaje w spoczynku, otrzymamy  $u_i(0) = \bar{u}_i(0) = 0$ , dla wszystkich składowych z wyjątkiem składowej  $u_2(0) \neq 0$ . W warunkach ciągłości wartości funkcji obliczone są dla końcowych wartości parametrów falowych

$$(6.93) \quad \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\tilde{\gamma}}_1, \quad \tilde{\gamma}_3 = \tilde{\tilde{\gamma}}_3, \quad \tilde{\gamma}_2 + u_2(0) = \tilde{\tilde{\gamma}}_2.$$

Równania dla składowych gradientu deformacji (por. (6.76)<sub>1</sub>) mają postać

$$(6.94) \quad \begin{aligned} F_{i2} &= -(U_i^{-1}(0))\gamma_i, & \tilde{F}_{i2} &= (\tilde{U}_i^{-1}(0))\tilde{\gamma}_i, & i &= 1,3 \quad i - \text{nie sumować}, \\ F_{22} &= F_{22}(0) - (U_2^{-1}(0))\gamma_2, & \tilde{F}_{22} &= \tilde{F}_{22}(0) + (\tilde{U}_2^{-1}(0))\tilde{\gamma}_2, & i &= 2. \end{aligned}$$

Przy założonej deformacji wstępnej naprężeniowe warunki ciągłości na granicy obu materiałów można spełnić analogicznie jak w przypadku brzegu swobodnego. Dla końcowych wartości parametrów otrzymuje się następujące wartości

$$(6.95) \quad \tilde{\gamma}_2 = -a_0 \frac{\omega - \tilde{U}_2^{-1}V_0}{\tilde{U}_2^{-1} + \omega U_2^{-1}}, \quad \tilde{\tilde{\gamma}}_2 = -a_0 \omega \frac{1 + \tilde{U}_2^{-1}V_0}{\tilde{U}_2^{-1} + \omega U_2^{-1}}, \quad \alpha=2,$$

$$(6.96) \quad \mu x_{i2} = \tilde{\mu} \tilde{x}_{i2} \Rightarrow (\mu U_i^{-1} + \tilde{\mu} \tilde{U}_i^{-1})\gamma_i = 0, \quad i=1,3 \text{ nie sumować},$$

gdzie  $\omega = (\lambda + 2\mu)(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})^{-1}$ .

Z ostatniej równości dla  $i=1,3$  wynikają zerowe wartości dla dwóch końcowych parametrów  $\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\tilde{\gamma}}_2 = 0$ . Wartości parametrów określonych równaniami (6.95) zależą od własności sprężystych obu połączonych materiałów. Z (6.95)<sub>2</sub> wynika, nierówność  $\tilde{\gamma}_2 < 0$ , wobec czego funkcja  $\tilde{F}_{22}$  w (6.94), jest funkcją malejącą. Prędkość propagacji fali prostej (por. (6.72), (6.91)<sub>1</sub>), zależy od kwadratu składowej  $\tilde{F}_{22}$  i przy wartościach funkcji materiałowych  $\sigma_{11} < 0, \sigma_{12} < 0$  (por. dodatek 2) rośnie ze zmianą parametru  $\tilde{\gamma}_2$  od zera do końcowej wartości  $\tilde{\gamma}_2 < 0$  (por. Kosiński, 1986), fala transmitowana jest więc zawsze falą uderzeniową. Dla fali odbitej możliwe są następujące rozwiązania:

$$(6.97) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \tilde{U}_2^{-1}V_0 &< \omega && \text{odbita fala prosta,} \\ \text{b)} \quad \tilde{U}_2^{-1}V_0 &> \omega && \text{odbita fala uderzeniowa,} \\ \text{c)} \quad \tilde{U}_2^{-1}V_0 &= \omega && \text{infinitesimalna fala biegnąca.} \end{aligned}$$

Jednostkowe normalne i wektory amplitudy dla fal uderzeniowych mają postać

$$(6.98) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_R &= (0, 1, 0), & \tilde{\mathbf{N}}_T &= (0, -1, 0) \\ \mathbf{a} &= (0, a_2, 0), & \tilde{\mathbf{a}} &= (0, \tilde{a}_2, 0). \end{aligned}$$

Parametry fali odbitej i transmitowanej w pierwszym i drugim przypadku można obliczyć z warunków skoków (2.5) w sposób analogiczny jak wyrażenia (6.80). Otrzymuje się następujące wyniki (por. (6.94), (6.95) oraz (Kosiński, 1986, str. 498))

$$(6.99) \quad a) \quad \tilde{\gamma}_2^R = -a_0 \beta_0, \quad \bar{a}_2 = a_0 \omega (1 - U_2^{-1}(0) \beta_0),$$

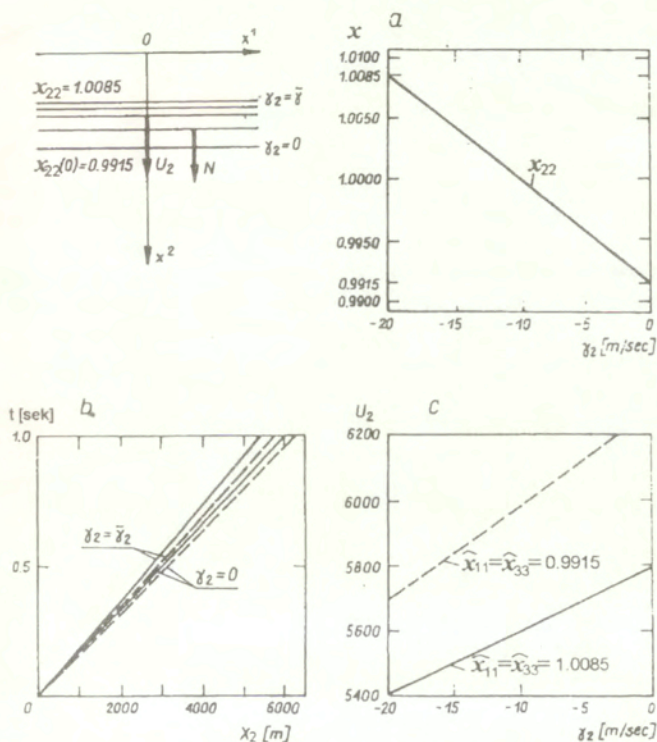
$$(\tilde{F}_{22})^B = \tilde{F}_{22}(0) - \bar{a}_2, \quad F_{22}(\tilde{\gamma}_2^R) = F_{22}(0) - U_2^{-1}(0) \tilde{\gamma}_2^R,$$

$$(6.70) \quad a_0 V_0 = a_2 V + \bar{a}_2 \tilde{V},$$

$$(6.71) \quad b) \quad a_2 = -a_0 U_2^{-1} \beta_0, \quad \bar{a}_2 = a_0 \omega (1 - U_2^{-1} \beta_0),$$

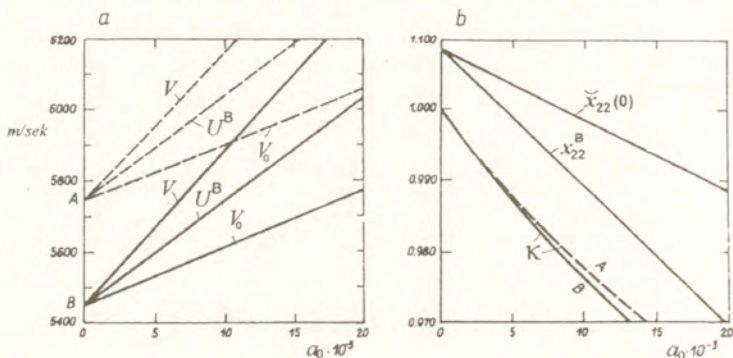
$$(\tilde{F}_{22})^B = \tilde{F}_{22}(0) - \bar{a}_2, \quad (F_{22})^B = F_{22}(0) - a_2,$$

gdzie  $\beta_0 = (\omega - V_0 \tilde{U}_2^{-1})(\tilde{U}_2^{-1} + \omega U_2^{-1})^{-1}$ ,  $a_2$  i  $\bar{a}_2$  są składowymi wektora amplitudy odbitej i transmitowanej fali uderzeniowej,  $\tilde{\gamma}_2^R$  jest końcową wartością parametru odbitej fali prostej, a  $V$  i  $\tilde{V}$ , są prędkościami propagacji odbitej i transmitowanej fali uderzeniowej.

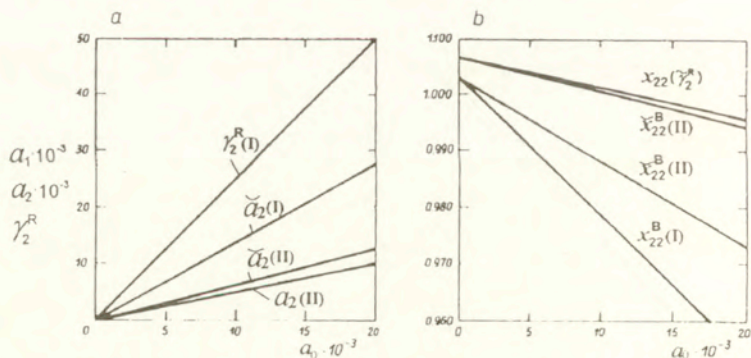


Rys. 6.15. Brzeg swobodny: odbita fala uderzeniowa: a) składowa gradientu deformacji  $x_{22}$  b) fronty falowe w odbitej fali prostej c) prędkości propagacji, jako funkcje parametru  $\gamma_2$

Dla uzyskanych rozwiązań i materiału Murnaghana przeprowadzono analizę numeryczną w przypadku aluminium i stali (por. dodatek 2). Rysunki 6.15 i 6.16 przedstawiają wyniki w przypadku odbicia, dla dwóch deformacji wstępnych w stali  $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{22} = \bar{F}_{33} = 1.0085$ ,  $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{33} = 0.9915$ ,  $\bar{F}_{22} = 1.0085$ . Wykresy dla pierwszej deformacji oznaczono linią ciągłą, a dla drugiej linią przerywaną. Rys.6.15 dotyczy odbitej fali prostej (brzeg swobodny), intensywność fali padającej zmienia się w przedziale  $\alpha_0 \in (0, 0.017)$  parametr fali prostej zmienia się w granicach  $-\alpha_0 \leq \gamma_2 \leq 0$  (por. (6.89)). Rysunki 6.15a,c przedstawiają składową gradientu deformacji i prędkość propagacji fali prostej jako funkcje parametru falowego.



Rys. 6.16. Brzeg utwierdzony: odbita fala uderzeniowa: a) prędkości propagacji padającej i odbitej fali uderzeniowej  $V_0$ ,  $V_1$  oraz prędkość fali akustycznej  $U^B$  b) gradient deformacji i parametr odbicia  $\kappa$  jako funkcje  $\alpha_0$



Rys. 6.17. Przypadek odbicia-transmisji: a) końcowa wartość parametru  $\tilde{\gamma}_2^R$  odbitej fali prostej oraz bezwzględne wartości składowych  $a_2, \tilde{a}_2$  wektora amplitudy odbitej i transmitowanej fali uderzeniowej b) gradient deformacji, jako funkcje  $\alpha_0$

Rys. 6.16 dotyczy brzegu utwierdzonego. Wykresy na rysunku 6.16a przedstawiają prędkości propagacji fali uderzeniowej: odbitej  $V_1$  i padającej  $V_0$  oraz fali akustycznej w obszarze za frontem fali padającej, w funkcji intensywności fali padającej. Rys. 6.16b pokazuje wykresy składowych gradientu deformacji oraz parametru odbicia fali  $\kappa$  w funkcji intensywności fali padającej.

Rys. 6.17 dotyczy odbicia i transmisji w aluminium i stali, deformacje wstępne wynoszą odpowiednio:  $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{22} = \bar{F}_{33} = 1.0030$ ,  $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{33} = 0.9915$ ,  $\bar{F}_{22} = 1.0068$ . Warunki ciągłości w tym przypadku statycznym są spełnione. Pod uwagę wzięto dwa przypadki: (I) fala propaguje się w stali  $\omega=2.453$  lub (II) w aluminium  $\omega=0.408$ . W obu przypadkach otrzymano inne wyniki. W przypadku (I) fala odbita jest falą prostą a w przypadku (II) falą uderzeniową. Końcowa wartość parametru fali prostej, oraz intensywności odbitej i transmitowanej fali uderzeniowej dla obu przypadków w funkcji intensywności fali padającej przedstawiono na rys. 6.17a. Rys. 6.17b przedstawia wartości składowej  $x_{22}$  gradientu deformacji za frontem odbitej lub transmitowanej fali uderzeniowej oraz dla końcowej wartości parametru w przypadku fali odbitej

## EWOLUCJA AMPLITUDY FALI UDERZENIOWEJ W PRĘCIE O ZMIENNYM PRZEKROJU

### 7.1. Wstęp

Zagadnienie ewolucji amplitudy jednowymiarowej fali uderzeniowej w przybliżeniu izentropowym było analizowane przez Fu i Scotta w wielu pracach (por. Literatura). Najważniejsze z punktu widzenia tematyki tego rozdziału są dwie prace.

Pierwsza z 1989 roku, w której rozwiązanie dla pręta o stałym przekroju uzyskano dwoma metodami: przy pomocy teorii powierzchni osobliwych wraz z metodą perturbacyjną oraz konstruując rozwiązanie w oparciu o pewne rozwiązanie pomocnicze w postaci fali prostej z jednoczesnym "dopasowaniem" fali uderzeniowej (shock fitting method, (Whitham, 1974)). Oba podejścia dają ten sam wynik.

Druga praca z 1994 roku, dotyczy pręta o wolno zmieniającym się przekroju. Rozwiązanie w postaci *modulowanej* fali prostej jest również modyfikowane przez "dopasowanie" fali uderzeniowej.

W rozdziale tym przedstawiono rozwiązanie omawianego zagadnienia przy użyciu teorii powierzchni osobliwych i metody perturbacyjnej (por. (Kosiński 1995a)). Uzyskany wynik jest inny. Przeprowadzono porównanie z rozwiązaniem uzyskanym w pracy (Fu, Scott, 1994). Z tego powodu oznaczenia są dokładnie takie same jak w obu wymienionych pracach. Przy rozpatrywaniu pręta o zmiennym przekroju pewne wyrażenia uzyskane w pracy (Fu, Scott, 1989) ulegają modyfikacji. Z tego powodu uwaga *dla zmiennego przekroju* we wzorach tego rozdziału oznacza, że wyrażenie bez oznaczonego członu jest dokładnie takie samo jak dla pręta o stałym przekroju (por. (Fu, Scott, (1989))), natomiast dodatkowy wyraz występuje w przypadku pręta o wolno zmieniającym się przekroju.

W przeciwieństwie do teorii powierzchni osobliwych która daje możliwość śledzenia ewolucji tylko lokalnie w pobliżu samej powierzchni, metoda zastosowana w obu wymienionych wyżej pracach, polegająca na "dopasowaniu" fali uderzeniowej do rozwiązania w postaci fali prostej, daje możliwość modelowania i uwzględnienia w rozwiązaniu przebiegu procesu obciążania pręta. Analiza numeryczna przeprowadzona dla materiału Murnaghana nie wykazała jednak, przy przyjętych przybliżeniach żadnych istotnych różnic w obu podejściach.

### 7.2. Równania podstawowe

Półnieskończony  *cienki* pręt o wolno zmieniającym się przekroju  $A(X)$  zajmuje obszar materialny  $X \geq 0$ . Do rozważań przyjmuje się elementarną przybliżoną teorię propagacji nieliniowych podłużnych fal uderzeniowych w pręcie. Zakłada się, że występuje tylko jednowymiarowy ruch ośrodka

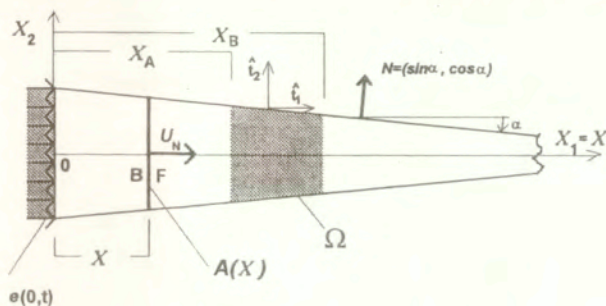


$$(7.1) \quad x = X + u(X, t), \quad e = u_X, \quad v = \dot{u},$$

gdzie  $x, X$  jest współrzędną miejsca cząstki w  $B$  i  $B_R$ , a  $u, e, v$  są odpowiednio przemieszczeniem, odkształceniem i prędkością cząstki ośrodka. Zakłada się, że tylko jedna składowa wektora przemieszczenia równoległa do osi  $X_1=X$  jest różna od zera i jest funkcją zmiennej  $X$  (miejsca cząstki w konfiguracji odniesienia).

W tej najprostszej teorii przybliżonej zakłada się, że naprężenie nominalne w przekroju poprzecznym jest wyłącznie osiowe i stałe wzdłuż przekroju tzn., że przy ruchu o postaci (7.1) płaski przekrój nie będzie podlegał paczeniu. Założenie takie dopuszcza jedynie propagację *fal płaskich*.

Wszystkie powyższe założenia, wykluczają dokładny opis propagacji fal w przecie, ponieważ nie mogą być włączone i uwzględnione ruchy w kierunku *prostopadłym* do osi  $X$ , które (przez sprzężenie reprezentowane w liniowej teorii przez współczynnik Poissona, a przez wiele innych stałych sprężystych - w teorii nieliniowej) muszą wystąpić w tym samym czasie co ruch główny w kierunku podłużnym (dylatacyjny).



Rys. 7.1 Podstawowa konfiguracja pręta

Składowe tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa związane z ruchem (2.1) wyrażają się wzorami (por. (Wesołowski, 1974, str. 37))

$$(7.2) \quad \begin{aligned} T_{R11} &= T = 2 \rho_R (1 + e) (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3), \\ T_{R22} &= T_{R33} = 2 \rho_R (\sigma_1 + \sigma_2 + (1 + e)^2 (\sigma_2 + \sigma_3)). \end{aligned}$$

Składowe styczne są zerowe

Zakłada się (por. Fu, Scott, 1989, 1994), że pręt jest cienki, a istotny główny ruch jest jednowymiarowy i naprężenia normalne  $T_{R22}=T_{R33}$  towarzyszące ruchowi głównemu mogą być pominięte. Jeśli różna od zera jest tylko składowa  $T_{R11} \neq 0$ , a przekrój jest stały  $A(X)=\text{const}$ , składowe wektora naprężenia na bocznych powierzchniach pręta znikają *tożsamościowo*  $\hat{i}_1 = \hat{i}_2 = 0$ . W przypadku pręta o wolno zmieniającym się przekroju  $A(X)$ , składowa wektora naprężenia równoległa do osi  $X$ , tzn.  $\hat{i}_1 = \hat{i} = T_{R11} N_1 = T \sin \alpha$  jest różna od zera. Składową jednostkowego wektora  $N$  prostopadłego do powierzchni bocznej (por. rys.7.1) oznaczono przez  $N_1 = \sin \alpha$ . Zakładając, że przekrój  $A(X)$  zmienia się bardzo wolno,  $\sin \alpha \approx 0$  i

warunki brzegowe na bocznych powierzchniach pręta są także spełnione w sposób przybliżony.

Równanie wyrażające bilans pędu dla obszaru  $\Omega$  (rys.7.1) w postaci całkowej prowadzi do zależności

$$(7.3) \quad \frac{d}{dt} \int_{X_A}^{X_B} \rho_R v A dX = (TA)|_{X=X_B} - (TA)|_{X=X_A},$$

gdzie  $T$  i  $\rho_R$  są odpowiednio naprężeniem nominalnym  $T_{R11}=T$  oraz gęstością w  $B_R$ . Przy przyjęciu aproksymacji izentropowej naprężenie nominalne jest funkcją jedynie odkształcenia  $e$ , a punktowa forma równania (7.3) ma postać

$$(7.4) \quad \rho_R A \dot{v} = \frac{\partial(TA)}{\partial X} \Rightarrow E e_X = \rho_R v_t - \underbrace{T \frac{d}{dX} \ln(A(X))}_{\text{dla zmiennego przekroju}}.$$

Różniczkując równanie (7.4) względem  $X$  otrzymuje się równanie

$$(7.5) \quad E e_{XX} + \tilde{E} e_X^2 = \rho_R v_{tX} - \underbrace{T \frac{d^2}{dX^2} \ln(A(X)) - E \frac{d}{dX} \ln(A(X))}_{\text{dla zmiennego przekroju}},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia  $E = \frac{\partial T(e)}{\partial e}$ ,  $\tilde{E} = \frac{\partial^2 T(e)}{\partial e^2}$ . Oba powyższe równania bez wyrazów oznaczonych *dla zmiennego przekroju* są dokładnie równaniami otrzymanymi dla stałego przekroju  $A(X)=\text{const}$  w pracy (Fu, Scott, 1989).

Zakłada się, że obszar przed frontem fali uderzeniowej jest poddany jednorodnej deformacji i pozostaje w spoczynku, oznacza to, że  $e_X^F = 0$ ,  $v^F = 0$ ,  $(T(e))^F = \text{const} \Rightarrow E^F = \tilde{E}^F = 0$ . Obliczając skoki wyrażeń (7.4) i (7.5) po obu stronach powierzchni nieciągłości otrzymuje się następujące równania

$$(7.6) \quad [E e_x] = \rho_R [v_t] - \underbrace{\rho_R U_N^2 [e] \frac{d(\ln A(X))}{dx}}_{\text{dla zmiennego przekroju}}.$$

$$(7.7) \quad [E e_{xx}] + [\tilde{E} e_x^2] = \rho_R [v_{tx}] - \underbrace{[E e_x] \frac{d(\ln A(X))}{dx} - \rho_R U_N^2 [e] \frac{d^2}{dX^2} (\ln(A(X)))}_{\text{dla zmiennego przekroju}}.$$

W zagadnieniu propagacji jednowymiarowych fal uderzeniowych bardzo istotne są kinematyczne warunki zgodności (Chen, 1971), (Fu, Scott, 1989). W przypadku jednowymiarowej propagacji fal warunek taki dla każdej funkcji  $f(X,t)$  opisującej pole na powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X,t)$  ma postać:

$$(7.8) \quad \frac{d}{dt}[f] = [\dot{f}] + U_N [f_X], \quad \frac{d}{dt} = U_N \frac{d}{dX}$$

Pochodna przestrzenna  $d/dX$  związana z położeniem frontu fali uderzeniowej  $\Sigma(X,t)$  oraz pochodna przemieszczeniowa  $d/dt$  pozostają w związku (7.8)<sub>2</sub>,  $U_N$  jest prędkością fali uderzeniowej w kierunku normalnym.

Zastępując  $f(X,t)$  w (7.8)<sub>1</sub> po kolei przez:  $u, v, i, u_X$  otrzymuje się, po wielokrotnym użyciu (7.8)<sub>1</sub> wartości dla wszystkich skoków ( $[v], [v_t], [v_{tX}]$ ) istotnych w równaniach (7.6), (7.7). Ostatecznie procedura prowadzi do układu dwóch sprzężonych równań różniczkowych dla amplitudy fali uderzeniowej  $[e]$  i dla amplitud towarzyszących jej nieciągłości wyższych rzędów  $[e_X]$  and  $[e_{XX}]$

$$(7.9) \quad 2\rho_R U_N^2 \frac{d[e]}{dX} + \rho_R U_N [e] \frac{dU_N}{dX} + (E^B - \rho_R U_N^2) [e_X] + \underbrace{\rho_R U_N^2 [e] \frac{d}{dX} \ln A(X)}_{\text{dla zmiennego przekroju}} = 0,$$

$$(7.10) \quad 2\rho_R U_N^2 \frac{d[e]}{dX} + \tilde{E}^B [e_X]^2 + \rho_R U_N [e] \frac{dU_N}{dX} - \rho_R U_N^2 \frac{d^2[e]}{dX^2} - \rho_R U_N \frac{dU_N}{dX} \frac{d[e]}{dX} + (E^B - \rho_R U_N^2) [e_{XX}] + \underbrace{E^B [e_X] \frac{d}{dX} \ln A(X) + \rho_R U_N^2 [e] \frac{d^2}{dX^2} \ln A(X)}_{\text{dla zmiennego przekroju}} = 0.$$

### 7.3. Równania amplitudy fali w przecie o wolno zmieniającym się przekroju.

Rozwijając wyrażenia dla skoków  $[e]$ ,  $[e_X]$  oraz  $[e_{XX}]$  w szeregi potęgowe małego bezwymiarowego parametru  $\varepsilon$  początkowej wartości amplitudy fali, otrzymuje się przybliżenia (por. (Fu, Scott, 1989))

$$(7.11) \quad \begin{aligned} [e] &= \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots, \\ [e_X] &= Z_0 + \varepsilon Z_1 + \dots, \\ [e_{XX}] &= W_0 + \varepsilon W_1 + \dots, \end{aligned}$$

Podstawiając rozwinięcia (7.11) do równań (7.9) i (7.10) oraz obliczając współczynniki przy jednakowych potęgach parametru  $\varepsilon$ , otrzymuje się dla potęg ( $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon$ ) następujący układ równań różniczkowych

$$\frac{dZ_0}{dX} + \frac{1}{2}c_1Z_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2}Z_0 \frac{d}{dX} \ln A(X)}_{\text{dla zmiennego przekroju}} = 0,$$

(7.12)

$$\frac{dY_1}{dX} + \frac{1}{4}c_1Y_1Z_0 + \underbrace{\frac{1}{2}Y_1 \frac{d}{dX} \ln A(X)}_{\text{dla zmiennego przekroju}} = 0,$$

gdzie  $c_1 = \tilde{E}^F / E^F$  oraz

$$(7.13) \quad [e]_{X=0} = h, [e_X]_{X=0} = k \Rightarrow Z_0(0) = k, \varepsilon Y_1(0) = h$$

Równanie różniczkowe opisujące zmiany amplitudy nieciągłości drugiego rzędu  $[e_X]$ , towarzyszącej fali uderzeniowej  $[e]$ , jest znanym w tym przypadku równaniem Bernoulliego dla funkcji  $Z_0(X)$  (por. Jeffrey, 1982)

$$(7.14) \quad \frac{dZ_0}{dX} + f(X)Z_0^2 + g(X)Z_0 = 0,$$

które ma rozwiązanie w postaci

$$(7.15) \quad Z_0(X) = k \left[ 1 + \frac{c_1 k}{2} \sqrt{\frac{A(X)}{A(0)}} \int_0^X \sqrt{\frac{A(0)}{A(X)}} dX \right]^{-1}$$

W drugim równaniu układu (7.12) można rozdzielić zmienne

$$(7.16) \quad \frac{dY_1}{dX} + \left[ \frac{1}{4}c_1Z_0(X) + \frac{1}{2} \frac{d}{dX} \ln A(X) \right] Y_1 = 0$$

i uzyskać rozwiązanie dla funkcji  $[e] = \varepsilon Y_1(X)$  w postaci

$$(7.17) \quad [e] = Y_1 \varepsilon = h \sqrt{\frac{A(0)}{A(X)}} \left\{ \exp \left[ - \frac{c_1 k}{4} \int_0^X \frac{dX}{1 + \frac{c_1 k}{2} \sqrt{\frac{A(X)}{A(0)}} \int_0^X \sqrt{\frac{A(0)}{A(X)}} dX} \right] \right\}$$

Otrzymane rozwiązanie (7.17) (por. (Kosiński, 1995a)) jest inne niż rozwiązanie uzyskane przez Fu i Scott'a (1994), przy użyciu metody polegającej na "wpasowaniu" fali uderzeniowej w rozwiązanie pomocnicze uzyskane przy pomocy metody

modulowanych fal prostych. Dla przypadku, gdy  $A(X)=A(0)=const$  oba powyższe rozwiązania sprowadzają się dokładnie do rozwiązań z pracy (Fu, Scott, 1989).

#### 7.4. Przypadki szczególne. Porównanie wyników

Dla znanej funkcji  $A(X)$  opisującej zmianę przekroju poprzecznego pręta równanie (7.17) można całkować numerycznie. Proste przypadki szczególne prowadzą do rozwiązań w postaci zamkniętej. Rozwiązanie takie można otrzymać dla następującego przypadku

$$(7.18) \quad A(\hat{X}) = \frac{A(0)}{(1 + \beta\hat{X})^2}, \quad \hat{X} = \frac{X}{X_0},$$

gdzie  $\hat{X}$  oznacza bezwymiarową długość, a  $X_0 = 1$  m,  $\beta$  jest liczbą rzeczywistą dodatnią która charakteryzuje tempo zmian pola przekroju poprzecznego. Podstawiając (7.18) do (7.17) i całkując dwukrotnie otrzymuje się rozwiązanie

$$(7.19) \quad [e] = Y_1 \varepsilon = h \frac{(1 + \beta\hat{X})}{\sqrt{1 + (\beta + \frac{c_1 k X_0}{2})\hat{X} + \frac{\beta}{2} \frac{c_1 k X_0}{2} \hat{X}^2}} \left( \frac{1 + \frac{\beta q \hat{X}}{(p+q-1)}}{1 + \frac{\beta q \hat{X}}{(p+q+1)}} \right)^{\frac{p}{2}},$$

gdzie

$$(7.20) \quad p = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{c_1 k X_0}{2}\right)^2}}, \quad q = \frac{\left(\frac{c_1 k X_0}{2}\right)}{\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{c_1 k X_0}{2}\right)^2}}.$$

Drugi człon w rozwiązaniu (7.19) z potęgą  $p/2$  wynika bezpośrednio z całki

$$(7.21) \quad \int_0^{\hat{X}} \frac{d\hat{X}}{4 + (4\beta + 2c_1 k X_0)\hat{X} + \beta c_1 k X_0 \hat{X}^2}, \quad \Delta = b^2 - 4ac = 16\beta^2 + (2c_1 k X_0)^2 > 0.$$

W przypadku, gdy  $\Delta > 0$  istnieje tylko jedno rozwiązanie (por. (Dwight, 1961))

Rozwiązanie tego samego przypadku (7.18) przy zastosowaniu metody zaproponowanej przez Fu i Scotta, (1994) oraz przy założeniu najprostszego trójkątnego impulsu początkowego prowadzi do wyniku

$$(7.22) \quad [e] = h \sqrt{\frac{1 + \beta \hat{X}}{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} \hat{X} + \underbrace{\frac{c_1 k X_0 \beta}{2} \hat{X}^2}_{\text{"wpasowana" fala uderzeniowa}}}}$$

Ostatnie dwa rozwiązania (7.19) i (7.22) są równoważne w dwóch przypadkach: 1) dla krótkich odcinków propagacji fali i dowolnej wartości parametru  $\beta$ , (metoda powierzchni osobliwych nadaje się dobrze do lokalnego opisu ewolucji) 2) dla długich odcinków propagacji oraz  $\beta \ll 1$  (por. rys.7.5). W przypadku stałego przekroju poprzecznego, metoda perturbacyjna oraz metoda modulowanych fal prostych z "dopasowaniem" fali uderzeniowej (dla trójkątnego profilu) dają ten sam wynik:

$$(7.23) \quad [e] = \frac{h}{\sqrt{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} \hat{X}}}$$

Można również uzyskać rozwiązanie w postaci zamkniętej dla wyrażenia (7.17), gdy przekrój poprzeczny zwiększa się zgodnie z równaniem

$$(7.24) \quad A(\hat{X}) = A(0)(1 + \beta \hat{X})^4$$

Bezpośrednie podstawienie funkcji (7.24) do rozwiązania (7.17) prowadzi do wyniku

$$(7.25) \quad [e] = Y_1 \varepsilon = \frac{h}{(1 + \beta \hat{X})^2} \exp \left\{ -\frac{c_1 k}{4} \left( \int_0^{\hat{X}} \frac{d\hat{X}}{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} (1 + \beta \hat{X}) \hat{X}} \right) \right\}$$

Przyjmując w rozwiązaniu (7.25) wartość stałej  $\beta=0$  można przez całkowanie otrzymać rezultat (7.23), lecz po całkowaniu rozwiązania (7.25) i obliczeniu granicy dla otrzymanego w ten sposób wyrażenia, gdy  $\beta \rightarrow 0$  wyniki są różne. Dodatkowo należy zwrócić uwagę na fakt, że wyrażenie  $c_1 k X_0 / 2$  jest dodatnie (por.7.42). Wyznacznik  $\Delta$  dla całki w wyrażeniu (7.25) może zmieniać znak, wynikają stąd trzy sytuacje (por. (Dwight, 1961)):

$$(7.26) \quad (i) \quad \Delta = b^2 - 4ac = \left( \frac{c_1 k X_0}{2} \right)^2 - 4\beta \frac{c_1 k X_0}{2} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{4} \frac{c_1 k X_0}{2}$$

z rozwiązaniem

$$(7.27) \quad [e] = Y_1 \varepsilon = \frac{h}{(1 + \beta \hat{X})^2} \exp \left( \frac{1}{2\beta \hat{X} + 1} - 1 \right),$$

$$(7.28) \quad (\text{ii}) \quad \Delta > 0 \Rightarrow \frac{c_1 k X_0}{2} > 4\beta,$$

daje wynik

$$(7.29) \quad [e] = Y_1 \varepsilon = \frac{h}{(1 + \beta \hat{X})^2} \left( \sqrt{\frac{2\beta \hat{X} + 1 + \psi}{2\beta \hat{X} + 1 - \psi} \cdot \frac{1 - \psi}{1 + \psi}} \right)^\psi,$$

$$\text{gdzie } \psi = \sqrt{1 - \frac{4\beta}{c_1 k X_0}}.$$

Ostatni przypadek związany jest z warunkiem

$$(7.30) \quad (\text{iii}) \quad \Delta < 0 \Rightarrow \frac{c_1 k X_0}{2} < 4\beta,$$

a odpowiadające mu rozwiązanie ma postać:

$$(7.31) \quad [e] = Y_1 \varepsilon = \frac{h}{(1 + \beta \hat{X})^2} \exp \left( -\frac{1}{\sqrt{-\psi}} \left( \arctg \frac{2\beta \hat{X} + 1}{\sqrt{-\psi}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{-\psi}} \right) \right)$$

Stosując metodę Fu i Scotta (1994) (dla początkowego trójkątnego profilu fali) otrzymuje się w przypadku (7.24) tylko jedno rozwiązanie (które obowiązuje we wszystkich trzech wymienionych wyżej przypadkach)

$$(7.32) \quad [e] = \frac{h}{(1 + \beta \hat{X})^2} \sqrt{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} \cdot \frac{\hat{X}}{(1 + \beta \hat{X})}}$$

Trzy otrzymane powyżej dla wzrastającego przekroju rozwiązania (7.27), (7.29) i (7.31) mają jakościowo inny charakter niż rozwiązania dla przekroju malejącego tzn.

$$(7.33) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \frac{h}{(1 + \beta \hat{X})^2} \exp \left\{ -\frac{c_1 k}{4} \int_0^{\hat{X}} \frac{d\hat{X}}{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} (1 + \beta \hat{X}) \hat{X}} \right\} \right\} \neq$$

$$\left( \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{h}{(1 + \beta \hat{X})^2} \right) \exp \left\{ -\frac{c_1 k}{4} \int_0^{\hat{X}} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} (1 + \beta \hat{X}) \hat{X}} \right) d\hat{X} \right\}$$

Prawa strona powyższej równości oraz rozwiązanie (7.32) mają tą samą granicę:

$$(7.34) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{h}{(1 + \beta \hat{X})^2 \sqrt{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} \cdot \frac{\hat{X}}{(1 + \beta \hat{X})}}} = \frac{h}{\sqrt{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} \hat{X}}}$$

Lewa strona nierówności (7.33) ma *inną granicę* równą we wszystkich trzech przypadkach  $h$ .

Poniższa równość która jest spełniona w przypadku rozwiązań dla omawianych zagadnień, uzyskanych zgodnie z metodą zaproponowaną w pracy (Fu, Scott, 1994) oraz dla rozwiązania perturbacyjnego w przypadku (7.18), nie jest spełniona dla wzrastającego przekroju przy warunku (7.24).

$$(7.35) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{\hat{X}} f(\hat{X}, \beta) d\hat{X} = \int_0^{\hat{X}} \lim_{\beta \rightarrow 0} f(\hat{X}, \beta) d\hat{X}$$

## 7.5. Analiza numeryczna

Analizę zagadnienia ograniczono do materiału nieliniowego *drugiego rzędu* nazywanego materiałem Murnaghana (por. dodatek 2). Obszar przed frontem fali jest nieodkształcony i pozostaje w spoczynku. Analiza numeryczna (Kosiński, 1981a) pokazała, że jedynie fale uderzeniowe o małych intensywnościach (rzędu  $10^{-2}$  -  $10^{-3}$ ) mogą propagować się w takim materiale.

Gradient deformacji dla jednowymiarowego ruchu (7.1) ma postać

$$(7.36) \quad F_{i\alpha} = \begin{bmatrix} 1+e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Składowe tensora funkcji materiałowych  $\sigma_{ik}^{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{ikl}^{\alpha\beta\gamma}$ , istotne w dalszych obliczeniach mają postać (por. (Kosiński, 1981a))

$$(7.37) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{11} &= 2\sigma_1 + 4\sigma_2 + 2\sigma_3 + 4\sigma_{11}(1+e)^2 + 16\sigma_{12}(1+e)^2, \\ \sigma_{111}^{111} &= 8\sigma_{111}(1+e)^3 + 12\sigma_{11}(1+e) + 48\sigma_{12}(1+e), \end{aligned}$$

lub po podstawieniu stałych materiałowych

$$(7.38) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{11} &= (\lambda + 2\mu)[(1+3e) + 2\chi e], \\ \sigma_{111}^{111} &= (\lambda + 2\mu)[2\chi(1+6e) + 3(1+e)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(7.39) \quad \chi = \frac{l+2m}{\lambda+2\mu}, \quad c_1 = \frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\sigma_{111}^{111}}{\sigma_{11}^{11}} = \frac{2\chi(1+6e) + 3(1+e)}{(1+3e) + 2\chi e}$$



Rozwiązania dla zmian amplitudy uzyskane w poprzednim podrozdziale zostały przeanalizowane numerycznie w przypadku stali oraz dla początkowej intensywności fali padającej  $h \ll 1$ . Stałe sprężystości pierwszego i drugiego rzędu (por. (Fukuoka, Toda, 1977)) zestawiono w dodatku 2. Stałe sprężyste zdefiniowane przez (7.39) wynoszą

$$(7.40) \quad \chi = -6.3 < 0 \text{ and } c_1 \cong -9,6 < 0.$$

Ze spełnienia warunku entropii wynika, że jedynym dopuszczalnym kierunkiem dla wektora amplitudy jest  $a = [e] = (-h, 0, 0)$  (Kosiński, 1981a). Początkową amplitudę dla nieciągłości drugiego rzędu  $[e_x]$  można obliczyć znając wektor amplitudy  $[e] = (-h, 0, 0)$  (por. (Fu, Scott, 1994))

$$(7.41) \quad k = \frac{hX_0}{\bar{U}_N T} \cong \frac{-21 \cdot 10^7}{T} \text{ [sek] },$$

gdzie  $h = 0.0125$ ,  $\bar{U}_N = \sqrt{\frac{E^F}{\rho_R}} = 5852 \frac{m}{sek}$  jest prędkością akustyczną w jednorodnie odkształconym obszarze przed frontem fali uderzeniowej (por. rys.7.1), a  $T$  [sek] jest czasem trwania impulsu początkowego. Dla materiału Murnaghana wartość współczynnika (7.42) poniżej, jest zawsze dodatnia

$$(7.42) \quad \frac{c_1 k X_0}{2} = \frac{1.05 \cdot 10^{-5}}{T}.$$

Szczegółową analizę numeryczną przedstawiono w pracy (Kosiński, 1995a). Stałe dobrano w ten sposób, aby spełnić warunki dla uzyskania rozwiązania metodą *modulowanych* fal prostych tzn. zmiany impulsu na brzegu pręta są dużo szybsze niż zmiany przekroju poprzecznego. Przekrój zmienia się więc bardzo wolno i jego zmiany w granicach długości impulsu są pomijalne.

Rys.7.2 prezentuje plany warstwiczne dla względnej amplitudy  $[e]/h$  i zmniejszającego się przekroju, obliczone dwoma metodami dla odległości  $\hat{X} \in <0, 20>$  przy czasie trwania impulsu wejściowego  $T = 10^{-5}$  sek. Współczynnik charakteryzujący zmniejszanie się przekroju waha się w granicach  $\beta \in <0, 2>$ .

Warstwice poza obszarem początkowym przebiegają praktycznie *poziomo i równolegle*. Oznacza to, że amplituda szybko osiąga swoją graniczną wartość. Z planów warstwicznych wynika, że wartość amplitudy pozostaje w przybliżeniu stała w całym obszarze propagacji dla wartości parametru  $\beta$  w pobliżu  $\beta \approx 0.5$ . Zgodnie z rozwiązaniami wynikającymi z obu metod, dla wartości  $\beta > \beta \approx 0.5$  amplituda rośnie, a dla wartości  $\beta < \beta \approx 0.5$ , maleje. Możliwe jest w tym przypadku takie modelowanie przekroju pręta, aby mogła być zachowana stała wejściowa wartość amplitudy.

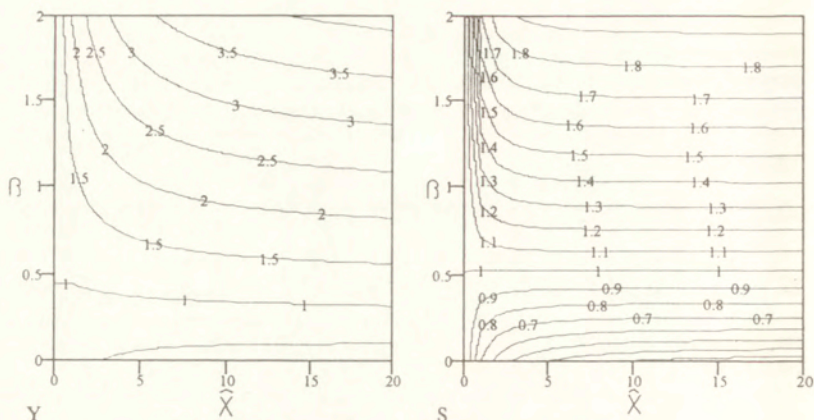


Fig. 7.2. Przekrój malejący. Plany warstwowe dla  $[e]/h$ , (7.22)-Y oraz dla (7.19)-S,  $T=10^{-5}$ ,  $\hat{X}=20$

W przypadku zwiększającego się przekroju, możliwe są trzy rozwiązania. Dwa z nich przedstawiono graficznie. Rys. 7.3 odnosi się do przypadku gdy  $\Delta > 0$ , a rys. 7.4 pokazuje wyniki, gdy  $\Delta < 0$ . Wyniki uzyskane z obu metod zestawiono obok siebie. Można zauważyć dobrą zgodność. Warstwy są w tym przypadku raczej pionowe i równoległe oraz przebiegają w wąskim obszarze. Wartości wskazują na gwałtowne zanikanie impulsu w obu przypadkach niezależnie od wartości  $\beta$ . Nie ma w tym przypadku możliwości doboru wartości  $\beta$  dla zachowania początkowej amplitudy fali.

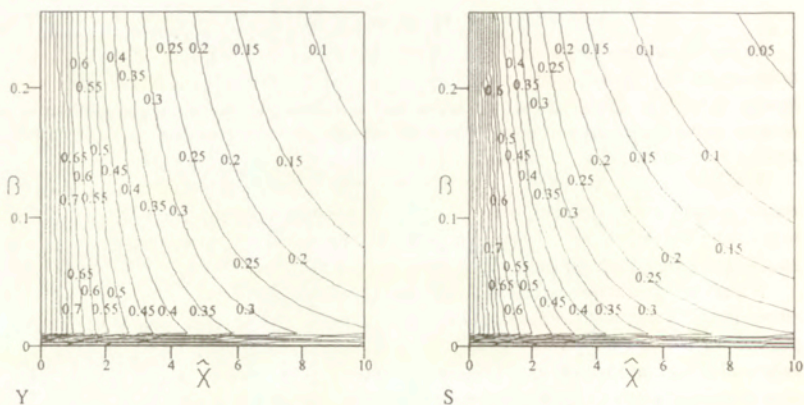


Fig. 7.3. Przekrój rosnący,  $\Delta > 0$ ,  $T=10^{-5}$   
Plany warstwowe dla  $[e]/h$ , (7.29)-Y oraz dla (7.32)-S

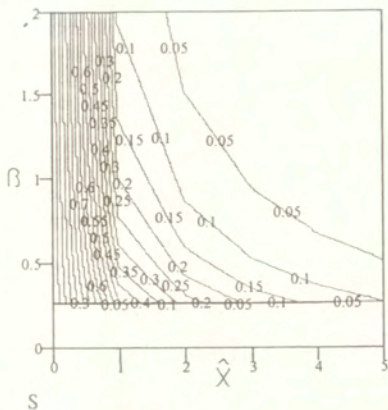
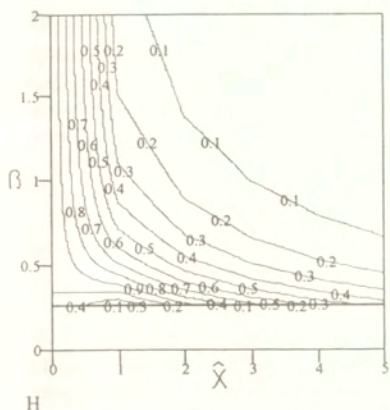


Fig. 7.4. Przekrój rosnący,  $\Delta < 0$ ,  $T = 10^{-5}$   
 Plany warstwowe dla  $[e]/h$ , (7.31)-H oraz dla (7.32)-S

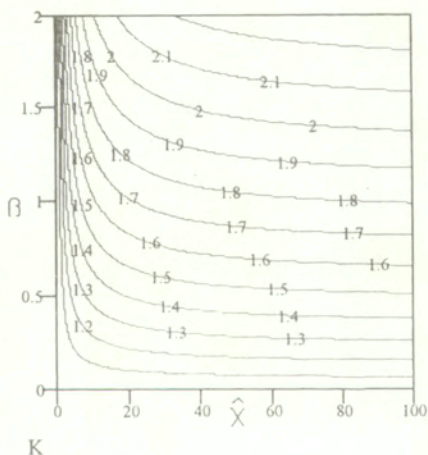


Fig. 7.5. Przekrój malejący, ( $T = 10^{-5}$ ). Porównanie wyników z obu metod,  
 przedstawiono iloraz wartości amplitud uzyskanych z obu metod  $[e]_{(7.19)}/[e]_{(7.22)}$ ,

Rys.7.5 ilustruje porównanie obu metod w przypadku malejącego przekroju. Przedstawiono iloraz wartości amplitud uzyskanych z obu metod  $[e]_{(7.19)}/[e]_{(7.22)}$  jako funkcję parametru  $\beta$  i odległości  $\hat{X}$ . Dla wartości  $\frac{c_1 k X_0}{2\beta} \geq 10$ , (dolny obszar rysunku) rozwiązania (7.19) i (7.22) różnią się bardzo mało w całym obszarze propagacji.

## EWOLUCJA AMPLITUDY FALI UDERZENIOWEJ W WARSTWIE

### 8.1. Wstęp

Warstwa jako prosta struktura sprężysta może być taktowana jako obiekt jednowymiarowy, lecz jej skończone wymiary poprzeczne mają także wpływ przy propagacji fal sprężystych. Teoria jednowymiarowa z pojedynczym skalarnym wewnętrznym parametrem może być użyta do modelowania procesu propagacji fal podłużnych w warstwie (Wright, 1981). Parametr wewnętrzny związany jest z symetrycznym ruchem poprzecznym warstwy.

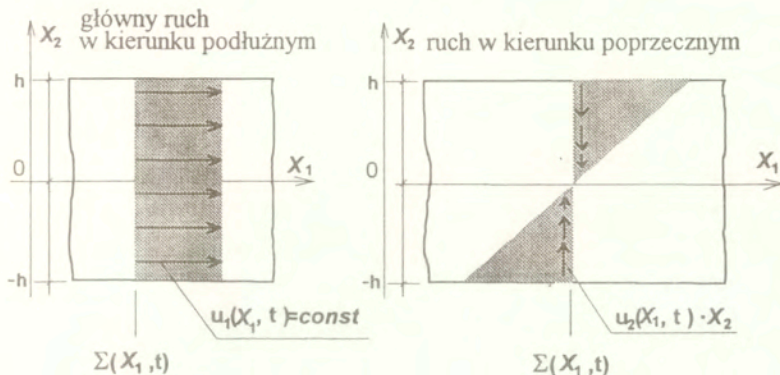
Zasadniczą trudnością jaka występuje przy opisie procesu propagacji fal w falowodzie jest dopasowanie funkcji opisujących proces falowy w rozwiązaniu przybliżonym do równań ruchu przy spełnieniu warunków brzegowych. W rozdziale tym zaproponowano pewną metodę dla *przybliżonego* rozwiązania zagadnienia propagacji fali uderzeniowej w warstwie hipersprężystej, polegającą na uśrednieniu równań ruchu w przekroju poprzecznym warstwy (por. (Wright, 1981)) przy założeniu, że rzeczywiste nieuśrednione wielkości spełniają równania ruchu i warunki brzegowe, a następnie zastosowanie tak otrzymanych równań do opisu procesów falowych po obu stronach powierzchni nieciągłości (teoria powierzchni osobliwych). Otrzymane w ten sposób wielkości uśrednione które występują w równaniach są jednak *jednowymiarowe* i nie mogą, przy założonym do pierwszej aproksymacji prostym, w miarę realistycznym ruchu uwzględniającym kierunek poprzeczny, spełnić warunków brzegowych. W przekroju czołowym warstwy warunki brzegowe są spełnione dokładnie. Do rozwiązania równań zastosowano metodę perturbacyjną używając jako parametru początkowej wartości amplitudy fali.

### 8.2. Symetryczny ruch warstwy sprężystej

Podłużna fala uderzeniowa propaguje się w półnieskończonej warstwie hipersprężystej w kierunku osi  $X_1$  w obszarze materialnym  $X_1 > 0$  (por. (rys.8.3)). Na powierzchni czołowej warstwy  $X_1 = 0$  zadane są warunki brzegowe dla odkształceń (por. Fu, Scott, 1989). Dla rozwiązania zagadnienia wprowadzono *podstawowe* założenie, że ruch o postaci (8.1) odbywa się bez przykładania dodatkowych sił kontaktowych na bocznych płaszczyznach warstwy  $X_2 = \pm h$  (por. dyskusja w pracy (Coleman, Newman, 1990, str. 45) oraz (Wright, 1981)). Opis ruchu w warstwie sprężystej za frontem fali uderzeniowej przyjęto w następującej postaci

$$(8.1) \quad x_1 = X_1 + u_1(X_1, t), \quad x_2 = X_2 + f(X_2)u_2(X_1, t), \quad x_3 = X_3,$$

gdzie:  $f(X_2)$  jest daną, specjalnie wybraną funkcją  $f \in C^1((-h, h) \rightarrow \mathbb{R})$  (nieparzystą, dla ruchów symetrycznych w kierunku poprzecznym)  $u_k \in C^3((0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R})$   $k = 1, 2, \dots$ . Funkcja  $f(X_2)$ , po przemnożeniu i złożeniu z funkcją  $u_2(X_1, t)$ , służy do opisu ruchu w kierunku poprzecznym warstwy. Zakładamy w tym rozdziale najprostszą postać funkcji  $f(X_2) = X_2$ , używaną dalej do modelowania poprzecznego ruchu warstwy.



Rys. 8.1. Podstawowe ruchy warstwy

Przemieszczenia  $U_1, U_2$ , odkształcenia  $e_1, e_2$  i prędkości cząstek ośrodka  $v_1, v_2$  w obu kierunkach wynoszą

$$(8.2) \quad \begin{aligned} U_1 &= x_1 - X_1 = u_1(X_1, t), & U_2 &= x_2 - X_2 = X_2 u_2(X_1, t), \\ \dot{x}_1 &= v_1 = \dot{u}_1(X_1, t), & \dot{x}_2 &= v_2 = X_2 \dot{u}_2(X_1, t) & e_1 &= u_{1,1}, & e_2 &= u_{2,1} \end{aligned}$$

Gradient deformacji  $x_{i\alpha}$  dla założonego ruchu (8.1) oraz dla funkcji  $f(X_2) = X_2$  ma postać

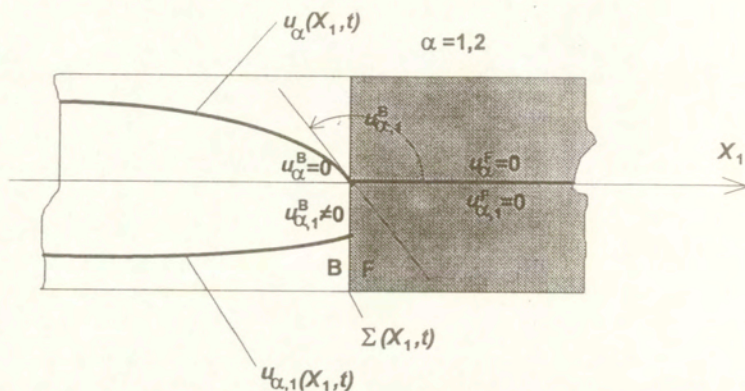
$$(8.3) \quad [x_{i\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1}(X_1, t) & 0 & 0 \\ X_2 u_{2,1}(X_1, t) & 1 + u_2(X_1, t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obszar materialny  $F$  przed propagującą się falą nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$  jest nieodkształcony i pozostaje w spoczynku, w obszarze  $B$  za jej frontem, występuje płaski stan odkształcenia (por. (8.1)). Skoki obu przemieszczeń  $U_1$  i  $U_2$  na powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$  wynoszą zero. Z powodu ciągłości zerowe pozostają także skoki obu funkcji  $u_1(X_1, t), u_2(X_1, t)$

$$(8.4) \quad [U_1] = 0 \Rightarrow [u_1] = 0, \quad [U_2] = 0 \Rightarrow [u_2] = 0.$$

Zakładamy, że obie pochodne  $u_{1,1}, u_{2,1}$  mogą doznawać skoku na powierzchni  $\Sigma(X_1, t)$  (por. rys.8.2). Gradient deformacji po obu stronach powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$  ma postać

$$(8.5) \quad [x_{i\alpha}]^B = \begin{bmatrix} 1+u_{1,1}(X_1, t) & 0 & 0 \\ X_2 u_{2,1}(X_1, t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [x_{i\alpha}]^F = \delta_{i\alpha}$$



Rys.8.2. Funkcje  $u_\alpha$  i ich pierwsze pochodne

### 8.3. Uśrednione równania ruchu

Równania ruchu  $T_{Ri\alpha,\alpha} = \rho_R \ddot{u}_i$  dla gradientu deformacji (8.1) redukują się do układu równań dla płaskiego stanu odkształcenia

$$(8.6) \quad \begin{aligned} T_{R11,1} + T_{R12,2} &= \rho_R \ddot{u}_1, \\ T_{R21,1} + T_{R22,2} &= \rho_R X_2 \ddot{u}_2, \\ T_{R33,3} &= 0 \text{ (spełnione tożsamość ciowo)}. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe na górnej i dolnej płaszczyźnie warstwy mają postać

$$(8.7) \quad \left. \begin{aligned} t_i = T_{Ri\alpha} K_\alpha = 0, \\ K_\alpha = (0,1,0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_{R12} = T_{R22} = 0 \text{ dla } X_2 = \pm h$$

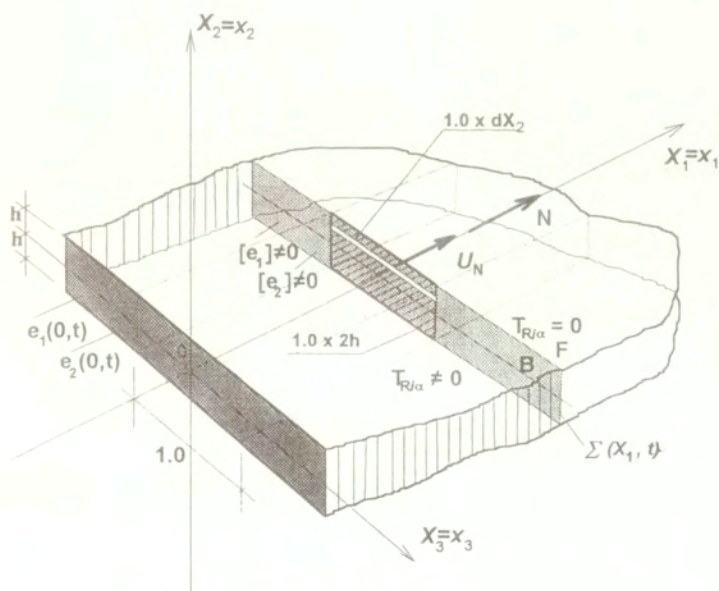
Trzeci warunek  $T_{R32} = 0$ , dla płaskiego stanu odkształcenia jest spełniony tożsamościowo.

Dla układu równań ruchu (8.6)<sub>1,2</sub> stosuje się procedurę opisaną przez Wrighta (1981), polegającą na ich uśrednieniu wzdłuż przekroju poprzecznego  $A$  warstwy (por. rys. 8.3)). Zakłada się również, że dla założonej postaci ruchu (8.1) na płaszczyznach bocznych  $X_2 = \pm h$  spełnione są warunki brzegowe (8.7). Pierwsze równanie (8.6)<sub>1</sub> jest uśredniane bezpośrednio, a drugie (8.6)<sub>2</sub> z powodu założonej antysymetrii ruchu i antysymetrii występujących w nim wielkości jest najpierw mnożone przez  $X_2$ . Oba równania są uśredniane w przekroju  $A$  warstwy, prostopadłym do osi  $X_1$  i o jednostkowej długości w kierunku osi  $X_3$ , ( $A = 1.0 \times 2h$ ) (por. rys. 8.3).

Całkowanie uśrednionych równań ruchu (8.6), przy spełnieniu na płaszczyznach bocznych warunków (8.7),  $T_{R22}|_{-h}^h = T_{R12}|_{-h}^h = 0$  prowadzi do wyniku

$$(8.8) \quad \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_{R11} dX_2 \right) = \rho_R \ddot{u}_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{1}{2h} \int_{-h}^h X_2 T_{R21} dX_2 \right) - \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_{R22} = \rho_R \ddot{u}_2 \frac{h^2}{3}.$$



Rys.8.3. Propagacja fali uderzeniowej w warstwie

Powyższy układ równań jest równoważny układowi równań Eulera-Lagrange'a, który dla dwóch niezależnych funkcji  $u_1(X_1, t)$ ,  $u_2(X_1, t)$  ma postać

$$(8.9) \quad \begin{aligned} u_1(X_1, t) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{A}}{\partial \dot{u}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\mathcal{A}}{\partial u_{1,1}} \right) - \frac{\mathcal{A}}{\partial u_1} = 0, \\ u_2(X_1, t) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{A}}{\partial \dot{u}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\mathcal{A}}{\partial u_{2,1}} \right) - \frac{\mathcal{A}}{\partial u_2} = 0, \end{aligned}$$

gdzie  $L = K - W(e_1, e_2, u_2)$  jest funkcją Lagrange'a,  $K$  - oznacza energię kinetyczną, a  $W$  - energię sprężystą zależną od obu odkształceń  $e_1, e_2$  oraz przemieszczenia  $u_2$ .

Po przekształceniach (por. (Wright, 1981)) równania (8.9) przybiorą postać :

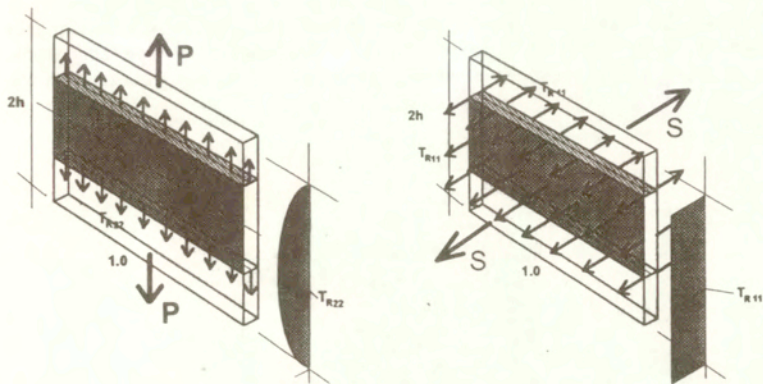
$$(8.10) \quad S' = \rho_1 \ddot{u}_1, \quad Q' - P = \rho_2 \ddot{u}_2,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia  $S = \frac{\partial W}{\partial u_{1,1}}$ ,  $Q = \frac{\partial W}{\partial u_{2,1}}$ ,  $P = \frac{\partial W}{\partial u_2}$ . W rozdziale tym różniczkowanie względem  $X_1$  oznaczono primem.

Z porównania równań LAGRANGE'a i równań ruchu w uśrednionej postaci otrzymuje się następujące związki między naprężeniami, wartościami średnimi oraz gęstościami

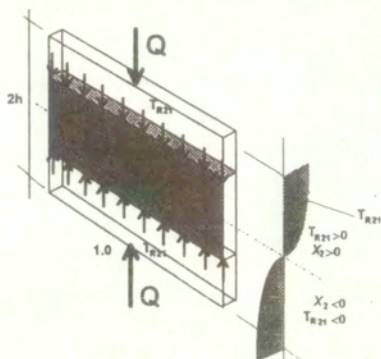
$$(8.11) \quad \begin{aligned} S &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_{R11} dX_2, \quad Q = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h X_2 T_{R21} dX_2, \quad P = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_{R22} dX_2, \\ \rho_1 &= \rho_R, \quad \rho_2 = \rho_R \frac{h^2}{3}. \end{aligned}$$





$$P = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_{R22} dX_2,$$

$$S = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_{R11} dX_2,$$

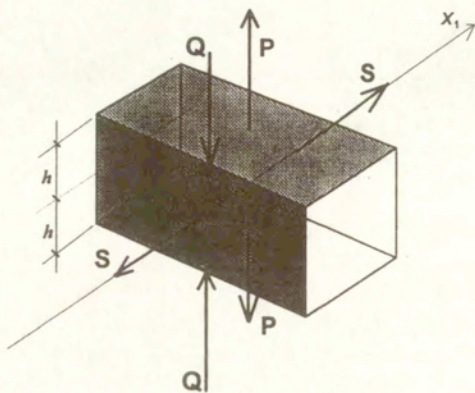


$$Q = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h X_2 T_{R21} dX_2,$$

Rys.8.4. Wartości średnie występujące w równaniach ruchu

Rys.8.4 przedstawia składowe naprężenia oraz ich uśrednione wartości na grubość warstwy

Uśrednienie naprężeń przy założonej postaci ruchu (8.1), wprowadza następujący układ sił P, Q, S. Każda z tych wielkości zależy tylko od dwóch zmiennych; współrzędnej  $X_1$  i wewnętrznego skalarnego parametru  $h$  - połowy grubości warstwy.



Rys.8.5. Równowazny uśredniony układ sił

#### 8.4. Zastosowanie uśrednionych równań ruchu do zagadnienia propagacji fal uderzeniowych

Dla zagadnienia propagacji jednowymiarowych fal uderzeniowych bardzo istotne są kinematyczne warunki zgodności (por. rozdz.7, (7.8))

$$(8.12) \quad \frac{d}{dt}[f] = [\dot{f}] + U_N[f_X], \quad \frac{d}{dt} = U_N \frac{d}{dX}$$

Zastępując  $f(X_1, t)$  po kolei przez:  $u_1, \dot{u}_p$  i  $\ddot{u}_p$  i wielokrotnie używając warunku (8.12)<sub>1</sub> otrzymuje się związki użyteczne przy przekształcaniu równań ruchu (por. rozdz.7).

$$(8.13) \quad [\dot{u}_p] = -U_N[e_p], \quad p = 1, 2 \quad ,$$

$$(8.14) \quad \rho_R[\ddot{u}_p] = \rho_R \left( U_N^2[e_{p,1}] - 2U_N^2 \frac{d[e_p]}{dX_1} - U_N[e_p] \frac{dU_N}{dX_1} \right), \quad p = 1, 2 \quad ,$$

$$(8.15) \quad \rho_R [\tilde{u}'_p] = \rho_R \left( U_N^2 [e_{p,11}] - 2U_N^2 \frac{d[e_{p,1}]}{dX_1} - U_N [e_{p,1}] \frac{dU_N}{dX_1} + \right. \\ \left. + U_N^2 \frac{d^2[e_p]}{dX_1^2} + U_N \frac{dU_N}{dX_1} \frac{d[e_p]}{dX_1} \right), \quad p=1, 2$$

Prędkość propagacji  $U_N$  (przy założeniu, że tylko dwie składowe gradientu deformacji doznają skoku wzdłuż  $\Sigma(X_1, t)$   $[x_{11}] \neq 0, [x_{21}] \neq 0$ ) wynika bezpośrednio z wyrażenia (2.8) (por. dodatek 3)

$$(8.16) \quad U_N^2 = \frac{[T_{R11}][x_{11}] + [T_{R21}][x_{21}]}{[x_{11}]^2 + [x_{21}]^2}$$

Wartość skoku entropii  $[\eta]$  wynika z równań bilansu na powierzchni nieciągłości (por. (Wesołowski, (1978) oraz dodatek 3). Zachodzą równości

$$(8.17) \quad 2\rho_R U_N [\sigma] + [T_{Ri\alpha}][\dot{x}_i] N_\alpha = -2(T_{Ri\alpha})^F N_\alpha [\dot{x}_i], \\ (T_{Ri\alpha})^F = 0 \Rightarrow [\sigma] = \frac{[T_{Ri\alpha}]}{2\rho_R} [x_{i\alpha}].$$

Dla statecznych fal uderzeniowych  $[\eta] > 0$ . Jest to równoważna forma warunku stateczności Laxa (2.7).

Na powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$  nieciągłości rzędu pierwszego i wyższych są zależne i tworzą sprzężony układ równań. Różniczkując uśrednione równania ruchu (8.10) względem  $X_1$ , otrzymuje się dwa dodatkowe niezależne równania dla pochodnych wyższych rzędów. Równania ruchu jak i równania otrzymane przez ich różniczkowanie, spełnione są po obu stronach powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$

$$(8.18) \quad S' = \rho_1 \tilde{u}'_1, \quad Q' - P = \rho_2 \tilde{u}'_2, \\ S'' = \rho_1 \tilde{u}''_1, \quad Q'' - P' = \rho_2 \tilde{u}''_2.$$

Obliczając skoki powyższych czterech równań na powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$  otrzymuje się podstawowy układ równań do analizy fal uderzeniowych w warstwie

$$(8.19) \quad [S'] = \rho_1 [\tilde{u}'_1], \quad [Q'] - [P] = \rho_2 [\tilde{u}'_2], \\ [S''] = \rho_1 [\tilde{u}''_1], \quad [Q''] - [P'] = \rho_2 [\tilde{u}''_2].$$

Podstawienie warunków zgodności (8.13)-(8.15) dla skoków prawych stron równań, prowadzi do sprzężonego układu równań ewolucji dla amplitudy fali uderzeniowej i amplitud towarzyszących jej nieciągłości wyższych rzędów.

## 8.5. Propagacja nieciągłości w cienkiej warstwie sprężystej.

Analiza zagadnienia ogranicza się do materiału nieliniowego Murnaghana (por. dodatek 2).

Na powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$ , wszystkie funkcje zależą tylko od jednej zmiennej  $X_1$  (określającej położenie frontu fali), gradient deformacji ma postać (8.5). Rozwiązanie zagadnienia poszukiwane jest przy pomocy metody perturbacyjnej (intensywności fal  $\ll 1$ ). Dla skoków nieciągłości zastosowano rozwinięcia w postaci (por. rozdz. 7):

$$(8.20) \quad \begin{aligned} [e_1] &= \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots, & [e_{1,1}] &= Z_0 + \varepsilon Z_1 + \dots, & [e_{1,11}] &= W_0 + \varepsilon W_1 + \dots, \\ [e_2] &= \varepsilon \hat{Y}_1 + \varepsilon^2 \hat{Y}_2 + \dots, & [e_{2,1}] &= \hat{Z}_0 + \varepsilon \hat{Z}_1 + \dots, & [e_{2,11}] &= \hat{W}_0 + \varepsilon \hat{W}_1 + \dots, \end{aligned}$$

gdzie  $\varepsilon$  jest małym bezwymiarowym parametrem perturbacyjnym, za który może być przyjęta początkowa wartość intensywności fali uderzeniowej. Zakłada się następujące warunki brzegowe; dla głównego podłużnego ruchu jak w rozdziale 7, a dla ruchu poprzecznego jednorodne warunki brzegowe:

$$(8.21) \quad \begin{aligned} [e_1] \Big|_{X_1=0} &= h \Rightarrow \varepsilon Y_1(0) \approx h, & [e_{1,1}] \Big|_{X_1=0} &= k \Rightarrow Z_0(0) \approx k, \\ [e_2] \Big|_{X_1=0} &= 0 \Rightarrow \varepsilon \hat{Y}_1(0) \approx 0, & [e_{2,1}] \Big|_{X_1=0} &= 0 \Rightarrow \hat{Z}_0(0) \approx 0 \end{aligned}$$

Podstawiając rozwinięcia (8.20) do podstawowego układu równań (8.19) otrzymuje się niesprężony (z ruchem poprzecznym) układ równań dla funkcji związanych z ruchem podłużnym. Porównanie współczynników przy jednakowych potęgach  $\varepsilon$  prowadzi do układu równań

$$(8.22) \quad \begin{aligned} \varepsilon^1 &\Rightarrow \frac{1}{4} c_1 Y_1(X_1) Z_0(X_1) + \frac{dY(X_1)}{dX_1} = 0, \\ \varepsilon^0 &\Rightarrow \frac{1}{2} c_1 Z_0^2(X_1) + \frac{dZ_0(X_1)}{dX_1} = 0, \end{aligned}$$

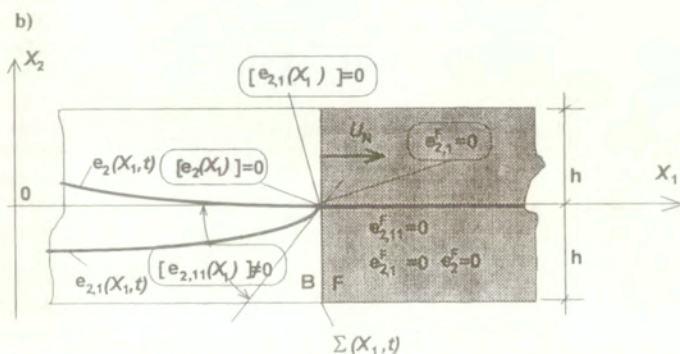
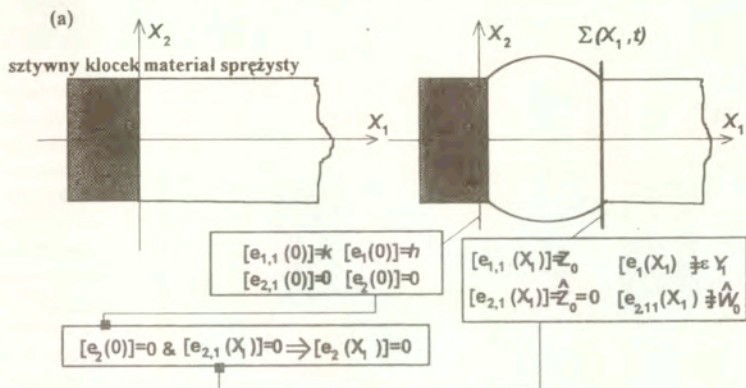
$$\text{gdzie } c_1 = \frac{(3\lambda + 6\mu + 2l + 4m)}{(\lambda + 2\mu)}$$

Są to dokładnie równania i rozwiązania otrzymane przez Fu i Scotta (1989) przy zastosowaniu najprostszej teorii propagacji fal nieliniowych w cienkim jednorodnym pręcie o stałym przekroju (por. rozdz. 7). Dla aproksymacji izentropowej warunek entropii jest spełniony i propagująca się fala uderzeniowa pozostaje *stateczna*.

Dla ruchu poprzecznego równania są częściowo sprzężone z ruchem podłużnym. Dwa pierwsze człony rozwinięcia mają postać

$$(8.23) \quad \begin{aligned} [e_{2,1}] &\approx \hat{Z}_0 = 0, \\ [e_{2,11}] &\approx \hat{W}_0(X_1) = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{3}{h^2} Z_0(X_1) = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{3}{h^2} \frac{k}{1 + \frac{c_1 k X_0}{2} X_1} \end{aligned}$$

Ośrodek przed frontem fali jest nieodkształcony i pozostaje w spoczynku, zachodzą równości:  $e_2^F = e_{2,1}^F = 0 \Rightarrow [e_{2,1}] = e_{2,1}^B$ . Z drugiej strony zgodnie z zastosowaną metodą perturbacyjną skok pochodnej funkcji  $e_{2,1}$  na powierzchni  $\Sigma(X_1, t)$  jest zerowy tj.  $[e_{2,1}] \approx \hat{Z}_0 = 0$ . Wynika stąd, że na powierzchni nieciągłości (gdzie wszystkie funkcje zależą tylko od jednej pojedynczej współrzędnej  $X_1$ ) funkcja  $[e_2]$  jest niezmienna,  $[e_2] \approx \varepsilon \hat{Y}_1(0) = \varepsilon \hat{Y}_1(X_1) = const$ .



Rys.8.6. Nieciągłość trzeciego rzędu  $[e_{2,11}]$  związana z ruchem poprzecznym, towarzysząca głównej nieciągłości pierwszego rzędu związanej z ruchem podłużnym

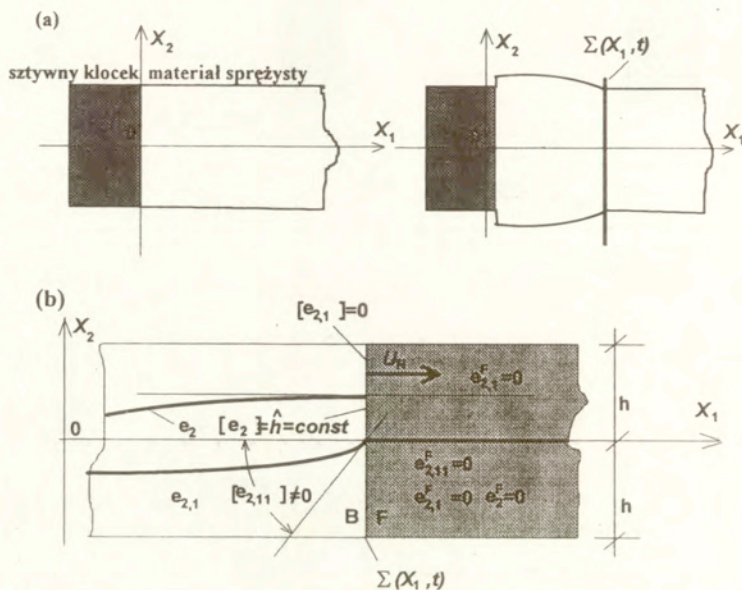
Warunki brzegowe oraz rozwiązania przedstawione zostały na rys.8.6a,b. Sztywny klocek doskonale połączony z czołową powierzchnią warstwy, może poruszać się tylko w kierunku poziomym. Ruch poprzeczny przekroju czołowego jest wyeliminowany. Podłużnej fali uderzeniowej towarzyszy jedynie nieciągłość trzeciego rzędu  $[e_{2,11}]$ , która powoduje, że po stronie B frontu fali nachylenie wykresu funkcji

$e_{2,1}$  nie wynosi zero, jak w przypadku funkcji  $e_2$ , dla której pochodna po obu stronach frontu musi w przyjętym przybliżeniu pozostawać zerowa.

Załóżmy teraz, że warunki brzegowe dla ruchu podłużnego (8.21)<sub>1,2</sub> pozostają niezmiennicze i początkowej podłużnej nieciągłości pierwszego rzędu  $h$  (por. rys.8.7) towarzyszy nieciągłość pierwszego rzędu w kierunku poprzecznym  $\hat{h}$  tzn.

$$(8.24) \quad [e_2]_{X_1=0} = \hat{h} \Rightarrow \varepsilon \hat{V}_1(0) \approx \hat{h}, \quad [e_{2,1}]_{X_1=0} = 0 \Rightarrow \hat{Z}_0(0) \approx 0$$

Jeżeli fala jest inicjowana tylko przez podłużne obciążenie związek pomiędzy początkowymi intensywnościami fal uderzeniowych w warunkach brzegowych wynika z warunku  $T_{R21}|_{X_1=0} = T_{R21}(\hat{h}, h) = 0$  (por. dodatek 3).



Rys.8.7 Stała nieciągłość pierwszego rzędu  $[e_2] = \hat{h} = \text{const}$  wraz z nieciągłością trzeciego rzędu  $[e_{2,11}]$  wywołane ruchem poprzecznym sprzężonym z głównym ruchem podłużnym

Model dla takich warunków brzegowych przedstawia rys.8.7a. Między sztywnym klockiem i powierzchnią czołową warstwy zakłada się brak tarcia. Ruch materiału warstwy w kierunku poprzecznym nie jest skrępowany. Podłużnej fali uderzeniowej towarzyszy fala uderzeniowa w kierunku poprzecznym o stałej intensywności oraz nieciągłość trzeciego rzędu (por. rys.8.7).

## Podsumowanie

W pracy rozpatrzono szczegółowo dwa zagadnienia związane z propagacją fali uderzeniowej: odbicia (odbicia-załamania) w kierunku normalnym i ukośnym oraz zagadnienie ewolucji amplitudy w nieliniowym materiale sprężystym. Rozwiązano szereg zagadnień w oparciu o znane lub zmodyfikowane metody.

Metoda Wrighta (1971a) daje możliwości uzyskania rozwiązań dla pierwszego zagadnienia w najprostszych stacjonarnych przypadkach. Fronty fal pozostają płaszczyznami i zbiegają się w jednym punkcie (lub są równoległe), a liczba parametrów określających fale w konfiguracji musi zgadzać się z liczbą warunków brzegowych. W ten sposób można rozwiązać tylko niewielką klasę zagadnień. Istotne są też ograniczenia wynikające ze związków konstytutywnych (por. rozdz.3). Przedstawione w pracy konfiguracje falowe, zostały przeniesione z gazodynamiki lub liniowej teorii sprężystości. Elementem którego najbardziej brakuje w rozwiązaniach jest *fala powierzchniowa* w przypadku nieliniowym. Niestety nie można tu zastosować rozwiązania znanego z liniowej teorii. Reid, (1972) proponuje zmodyfikowanie rozwiązań (zaczernpnie również z gazodynamiki) polegające na założeniu, że wspólny punkt przecięcia frontów falowych jest odrywany od brzegu powstaje dodatkowa fala (Mach steam). Do tej pory nie uzyskano jednak żadnych rozwiązań przy tej modyfikacji.

Najprostszym uogólnieniem otrzymanych w pracy jednowymiarowych rozwiązań (odbicie, odbicie-transmisja) są *nieciągłe* warunki brzegowe, np. dla półpłaszczyzny  $X_2 > 0$  utwierdzenie, a dla drugiej części brzeg swobodny. Jak wygląda wtedy granica obszarów dla rozwiązań? Zagadnienie to było rozpatrywane w gazodynamice (Hunter, Keller, 1984), uzyskane rezultaty mają bardzo prostą postać. Inną sprawą jest porównanie otrzymanych rezultatów z wynikami prac dotyczących jednowymiarowych kompozytów w liniowej teorii (por. Wesołowski, 1978, 1991, 1994, 1995). Istnieje jednak pewna różnica różnica opisu, utrudniająca takie porównanie. W teorii liniowej w sposób naturalny pojawia się jako parametr grubość warstwy.

Fale w materiałach ściśliwych osiągają małe intensywności, efektywne wydaje się więc stosowanie metod perturbacyjnych z intensywnością fali padającej jako małym parametrem. Istotne są zwłaszcza ułatwienia dla dwuwymiarowego przypadku odbicia w materiale Murhaghana.

Podstawową trudnością dla uzyskania równań ewolucji fali uderzeniowej jest sprzężenie nieciągłości różnych rzędów. W rezultacie otrzymuje się nieskończony układ równań różniczkowych. Stosując metodę perturbacyjną, czy metodę tzw. "wpasowywania" fali uderzeniowej w falę prostą Fu i Scott (1989, 1994) uzyskali szereg wyników. Metoda perturbacyjna zwłaszcza w odniesieniu do materiałów ściśliwych (gdym intensywności fal są małe i usprawiedliwione jest zastosowanie takiej metody) pozwala na uzyskanie niesprężonych układów równań.

Wykorzystując metodę Wrighta (1981) polegającą na wprowadzeniu uśrednionych równań ruchu (Nunziato, Walsh, 1977, 1978) w których pojawia się wewnętrzny skalarny parametr, można próbować modyfikować jednowymiarowe teorie propagacji fal. Rozpatrując *główny ruch podłużny* z uwzględnieniem *pobocznego ruchu* w kierunku poprzecznym, uzyskuje się niesprężony układ równań dla funkcji związanych z ruchem podłużnym jak w jednowymiarowej teorii. Dodatkowe rozwiązanie dla ruchu poprzecznego wynika ze sprzężenia równań.

## LITERATURA

- ACHENBACH, J.D., (1973), *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Comp.
- BAILEY, P.B., CHEN, P.J., (1985), Evolutionary behaviour of induced discontinuities behind one dimensional shock waves in nonlinear elastic materials, *J.Elasticity*, **15**, 257-269.
- BAMPI, F., ZORDAN, C., (1988), Oblique Incidence of waves on a boundary, *Acta Mechanica*, **71**, 137-143.
- BLAND, D.R., (1969), *Nonlinear Dynamic Elasticity*, Blaisdell Publ. Comp. (tłumaczenie rosyjskie Mir, 1972)
- BRAUN, M., (1977), Nonlinear progressive waves in elastic materials, *Rheol. Acta* **16**, 146-154.
- BRAUN, M., (1990), Strain-induced anisotropy in elastic wave propagation, *Proc. IUTAM Symp. Elastic Wave Propagation and Ultrasonic Evaluation*, Univ. of Colorado, Boulder July 30 - August 3, 1989, North-Holland.
- CHEN, P.J., (1971), One dimensional shock waves in elastic non-conductors, *ARMA*, **43**, 350-362.
- COLEMAN, B.D., (1983), Necking and drawing in polymeric fibers under tension, *ARMA*, **83**, 115-137.
- COLEMAN, B.D., NEWMAN, D.C., (1988), On the rheology of cold drawing. I. Elastic materials, *J.Polym.Sci., Part B: Polymer Physics*, **26**, 1801-1822.
- COLEMAN, B.D., NEWMAN, D.C., (1990), On waves in slender elastic rods, *ARMA*, **109**, 39-61.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K.O., (1948), *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer Verlag.
- DUSZCZYK, B., WESOŁOWSKI, Z., KOSINSKI, S., (1984), Shock reflection patterns in rubber-like material, *Archives of Mechanics*, **36**, 587-602.
- DUSZCZYK, B., KOSINSKI, S., WESOŁOWSKI, Z., (1985), Reflection of oblique shock waves in incompressible elastic solids, *J.Austr.Math.Soc. ser. B* **27**, 31-47.
- DUSZCZYK, B., KOSINSKI, S., WESOŁOWSKI, Z., (1986), Normal shock reflection in rubber-like elastic material, *Archives of Mechanics*, **38**, 675-688.
- DUSZCZYK, B., KOSINSKI, S., (1989), Waves generated by incident shock in neo-Hookean material, *Bond Univ. Working Paper, Australia*, No. **89-3-014**, Nov.1989.



DUVAUT, M.G., (1967), Phénomènes de réflexion, réfraction, intersection d'ondes planes uniformes dans des Ondes dans matériaux élastiques non lineare, *C.R.Acad.Sci. Paris* vol.264, Serie A, 883-886.

DUVAUT, M.G., (1968), Ondes dans les matériaux de type harmonique. Réflexion oblique d'une onde de choc plane longitudinale sur une paroi fixe, *C.R.Acad.Sci. Paris* vol.266, Serie A, 246-249.

DIEULESAINT, E., ROYER, D., (1974), *Ondes élastiques dans les solides*, Masson et Cie, (tłumaczenie rosyjskie, Nauka, 1982).

DWIGHT, H.B., (1961), *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, Macmilan, New York.

ERINGEN, A.C., ŞUHUBI, E.S., (1974), *Elastodynamics (Finite Motions)*, vol . II , Academic Press, New York-London.

FU, Y.B., SCOTT, N.H., (1989), The evolution law of one-dimensional weak nonlinear shock waves in elastic non-conductors, *Q.Jl Mech. Appl. Math.*, **42**, 23-39.

FU, Y.B., SCOTT, N.H., (1994), Propagation of simple waves and shock waves in a rod of slowly varying cross-sectional area, *Int.J.Engng Sci.*, **32**, (1), 35-44.

FUKUOKA, H., TODA, H., (1977), Preliminary experiment on acousto-elasticity for stress analysis, *Archives of Mechanics.*, **29**, (5),

GOODIER, J.N., BISHOP, R.E., (1952), A note on critical reflections of elastic waves at free surfaces, *J.Appl.Phys.*, **23**, 124-126.

HERRMANN, K.P., WESOŁOWSKI, Z., (1995), Discontinuity waves in a periodic layered medium, *ZAMM*, **75**, (9), 699-706.

HUNTER, J., KELLER, J.B., (1984), Weak shock diffraction, *Wave Motion*, **6**, 79-89.

ISHIHARA, A., HASHITSUME, N., TATIBANA, M. (1952), Statistical theory of rubber-like elasticity, *J.Appl. Phys.*, **23**, 308-312.

JEFFREY A., (1982), Acceleration wave propagation in hyperelastic rods of variable cross-section, *Wave Motion*, **4**, 173-180.

JOHN, F., (1960), Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type, *Comm. Pure Appl. Math.* **13**, 239-296.

JOHN, F., (1966), Plane elastic waves of finite amplitude. Hadamard materials and harmonic materials, *Comm. Pure Appl. Math.* **19**, 309-341.

KOSINSKI, S., (1981a), Fala silnej nieciągłości w odkształconym wstępnie izotropowym materiale sprężystym, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, **19**, 545-562.

KOSINSKI, S., (1981b), *Fale silnej nieciągłości w wybranych nieliniowych materiałach sprężystych*, praca doktorska, IPPT.

KOSINSKI, S., (1986), Normal reflection and transmission of plane shock waves in nonlinear elastic material, *Engineering Transactions*, **34**, 483-502.

KOSINSKI, S., (1989), Normal reflection-transmission of shock waves on a plane interface between two rubber-like media, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, **24**, 310-319, Vieweg 1989, Eds.: J. Ballmann, and R. Jeltsch. (*Proc. Second. Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Aachen, 14-18 March 1988*).

KOSINSKI, S., DUSZCZYK, B., (1989), Normal shock reflection-transmission in rubber-like elastic material, *J. Austr. Math. Soc. ser. B* **31**, 29-47.

KOSINSKI, S., (1990), Odbicie-załamanie, dyfrakcja i oddziaływanie fal silnej nieciągłości w nieliniowym materiale sprężystym. *Rap. Politechnika Łódzka, Polska, Grant z Min. Edukacji Narodowej*, grudzień 1990, Nr I-103/K-61/0181/8/90-B, (po polsku, nieopublikowany).

KOSINSKI, S., DUSZCZYK, B., (1991), Reflection and refraction of shock waves in neo-Hookean material, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, **29**, 247-263.

KOSINSKI, S., (1993), Reflexion und Brechung einer Stoßwelle in gummiähnlichen Stoffen, *Wykład wygłoszony w czasie wizyty w Universität-G-H Duisburg, Fachgebiet Mechanik, październik 1993*, (po niemiecku, nieopublikowany).

KOSINSKI, S., DUSZCZYK, B., (1993), Reflection of oblique shock waves in Murnaghan material, *Archives of Mechanics* **45**, (6), 739-766.

KOSINSKI, S., (1995a), Transport equation for shock strength in hyperelastic rods, *Engineering Transactions*, **43**, (1-2), 205-224.

KOSINSKI, S., (1995b), Waves generated by an incident shock in a peculiar hyperelastic material. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* **33**, (3), 551-576.

KOSINSKI, S., (1996), Evolution law for shock strength in simple elastic structures. Proc. IFIP Conf. "Modelling and Optimization of Distributed Parameter Systems with Application to Engineering", Warsaw 17-25 July '95, Chapman & Hall, (przyjęta do druku)

KOSINSKI, W., (1981), *Wstęp do teorii osobliwości pola i analizy fal*, PWN Warszawa - Poznań

LAX, P. (1957), Hyperbolic systems of conservation laws II, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**, 537-566.

- MURNAGHAN, F.D., (1937), Finite deformation of an elastic solids, *Amer. J.Math.*, **59**, 235-260.
- v.NEUMANN, J., (wyd. TAUB, A.H.,1963), *John von Neumann, Collected Works*, vol. VI, Pergamon Press.
- NUNZIATO, J.W., WALSH, E.K., (1977), On the influence of void compaction and material non-uniformity on the propagation of one-dimensional acceleration waves in granular materials. *ARMA*, **64**, , 299-316.
- NUNZIATO, J.W., WALSH, E.K., (1978), One-dimensional shock waves in uniformly distributed granular materials, *Int.J.Solids Struct.*, **14**, 681-689.
- REID, S.R., (1972), The influence of non-linearity upon the reflection of finite amplitude shock waves in elastodynamics, *Quart.J.Mech and Appl.Math.*, **25**, 185-206.
- THOMAS, T.Y., (1961), *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press.
- TOUPIN,R.A., BERNSTEIN, B., (1961), Sound waves in deformed perfectly elastic materials, acoustoelastic effect, *J. Acoust.Soc.Amer.*, **33**, 216-225.
- TRUESDELL, C., (1961), General and exact theory of waves in finite elastic strain., *ARMA*, **8**, , 263-296.
- TRUESDELL, C. , NOLL, W. (1965), *The non-linear field theories of mechanics. Encyclopedia of Physics*, vol.III/3, Springer Verlag 1965.
- USER'S GUIDE "Mathcad 5.0+ for Windows", Math Soft Inc., 1994.
- VARLEY, E. (1965), Simple waves in general elastic materials. *ARMA*, **20**, 309-328.
- WESOŁOWSKI, Z., (1974), *Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa.
- WESOŁOWSKI, Z., (1978), Strong discontinuity wave in initially strained elastic medium, *Archives of Mechanics*, **30**, 309-322.
- WESOŁOWSKI, Z., (1989), *Akustyka ciała sprężystego*, PWN, Warszawa-Poznań.
- WESOŁOWSKI, Z., BÜRGER, W., (1977), Shock waves in incompressible elastic solids, *Rheol. Acta*, **16**, 155-160.
- WESOŁOWSKI, Z., (1987), Symmetry of dynamic properties of a set of elastic layers, *Archives of Mechanics*, **39**, 261-267
- WESOŁOWSKI, Z., (1991), On the dynamics of the transition region between two homogeneous materials, *J.Tech.Phys.*, **32**, 293-312.

WESOŁOWSKI, Z., (1994), Wave reflection on a continuous transition zone between two homogeneous materials, *Acta Mechanica*, **105**, 119-131.

WESOŁOWSKI, Z., (1995), Optimisation of the transition zone between two homogeneous elastic materials, *Acta Mechanica*, **108**, 133-141.

WHITHAM, G.B., (1974), *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons

WHITWORTH, A.M., (1982), Simple in constrained elastic materials, *Q.Jl Mech. Appl. Math.*, **35**, 461-484.

WRIGHT, T.W. (1971a), Reflection of oblique shock waves in elastic solids. *Internat. J. Solids and Structures*, **7**, 161-181.

WRIGHT, T.W. (1971b), Uniqueness of shock reflection patterns in elastic solids. *ARMA*, **42**, 115-127.

WRIGHT, T.W., (1981), Nonlinear waves in rods, in *Proceedings of the IUTAM Symposium on Finite Elasticity, Lehigh Univ, August 10-15, 1980* (ed. D.E. Carlson and R.T. Shield), 423-443, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague/Boston/London

YONGCHI, L., TING, T.C.T., (1984), Simple waves and shock waves generated by an incident shock wave in two-dimensional hyperelastic materials, *J. Appl. Mech.*, **55**, 586-594.

ZAHORSKI, S. (1959), A form of elastic potential for rubber-like materials, *Archives of Mechanics*, **5**, 613-617.

ZAHORSKI, S. (1962), Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy, *Engineering Transactions*, **10**, (1), 193-207.

ZHIJING, T., TING, T.C.T., YONGCHI, L., (1989), Two-dimensional stress analysis in incompressible elastic solids, *Appl. Math. Mech.*, **10**, (8), 701-712, (English edition).

### Dodatek 1. Materiał gumopodobny

Potencjał sprężysty (Isihara, Hashitsume, Tatibana, 1952), (Zahorski, 1959)

$$(D1.1) \quad W(I_1, I_2) = \rho_R(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1^2 - 9),$$

gdzie  $I_1 = B_{ii}$ ,  $I_2 = (B_{ii} - B_{ij}B_{ij})/2$ , są niezmiennikami lewego tensora odkształcenia Cauchy-Greena  $\mathbf{B}$ . Wartości stałych  $C_1, C_2, C_3$ , zostały podane w pracy (Zahorski, 1962).

Do obliczeń prędkości istotne są też inne stałe

$$(D1.2) \quad c^2 = 2(C_1 + C_2 + 6C_3) / \rho_R, \quad \eta = 4C_3 / (\rho_R c^2)$$

Poniżej zestawiono stałe sprężystości dla trzech gatunków gumy.

Tabela D1

Stałe sprężyste dla trzech gatunków gumy kG/cm <sup>2</sup>	MATERIAŁ		
	I	II	III
$C_1$	0.64	2.14	3.52
$C_2$	0.09	0.13	0.00
$C_3$	0.07	0.04	0.23
$\eta$	2.3	5.02	9.8
$c^2$	0.122	0.0318	0.0938

## Dodatek 2. Materiał Murnaghana. Stałe sprężyste.

Potencjał sprężysty dla nieliniowego materiału Murnaghana:

$$(D2.1) \quad \rho_R \sigma = \frac{1+2m}{24} (I_1-3)^3 + \frac{\lambda+2\mu+4m}{8} (I_1-3)^2 + \frac{8\mu+n}{8} (I_1-3) - \frac{m}{4} (I_1-3)(I_2-3) - \frac{4\mu+n}{8} (I_2-3) + \frac{n}{8} (I_3-1)$$

gdzie  $I_1=B_{ii}$ ,  $I_2=(B_{ii}B_{jj}-B_{ij}B_{ji})/2$ ,  $I_3=\det(B_{ij})$  są niezmiennikami lewego tensora odkształcenia CAUCHY-GREENA,  $\mathbf{B}$ ,  $\lambda$  oraz  $\mu$  są stałymi Lamé, natomiast  $l$ ,  $m$ ,  $n$  są stałymi sprężystości drugiego rzędu. Pochodne potencjału sprężystego względem niezmienników wynoszą:

$$(D2.2) \quad \sigma_i = \frac{\partial \sigma}{\partial I_i}, \quad \sigma_{ik} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial I_i \partial I_k}, \quad \sigma_{ikl} = \frac{\partial^3 \sigma}{\partial I_i \partial I_k \partial I_l}$$

$$(D2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{l+2m}{8} (I_1-3)^2 + \frac{\lambda+2\mu+4m}{4} (I_1-3) + \frac{8\mu+n}{8} - \frac{m}{4} (I_2-3), \\ \sigma_2 &= -\frac{m}{4} (I_1-3) - \frac{4\mu+n}{8}, \quad \sigma_3 = \frac{n}{8}, \\ \sigma_{11} &= \frac{l+2m}{4} (I_1-3) + \frac{\lambda+2\mu+4m}{4}, \quad \sigma_{12} = -\frac{m}{4}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{111} = \frac{l+2m}{4}$$

Poniżej zestawiono w tabeli stałe sprężystości wyrażone w  $\text{kg/cm}^2$  dla stali i aluminium. Wartości te otrzymamy po przeliczeniu stałych z  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  (por. (Fukuoka, Toda, 1977)) na stałe  $l, m, n$  (por. Kosiński (1981a,b)).

Tabela D2.

Metal	$\mu \cdot 10^{-6}$	$\lambda \cdot 10^{-6}$	$m \cdot 10^{-6}$	$n \cdot 10^{-6}$	$l \cdot 10^{-6}$
stal	0.821±	1.11±	-6.36±	-7.08±	-4.61±
	0.005	0.01	0.56	0.32	0.85
aluminium	0.276±	0.57±	-4.01±	-4.08±	-3.11±
	0,001	0.02	1.38	1.36	1.25

**Dodatek 3. Prędkości jednowymiarowych fal uderzeniowych  
i warunki entropii w materiale Murnaghana<sup>2</sup>**

Wyrażenie dla prędkości propagacji powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$  wynika z zasady zachowania pędu dla powierzchni nieciągłości (por. Wesołowski, 1978)

$$(D3.1) \quad [T_{Ri\alpha}] N_\alpha N_\beta = \rho_R U_N^2 [x_{i\beta}] .$$

Gradient deformacji w obszarze przed frontem fali ma postać  $(x_{i\alpha})^F = \delta_{i\alpha}$ , po drugiej stronie powierzchni nieciągłości natomiast :

$$(D3.2) \quad [x_{i\alpha}]^\beta = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1}(X_1, t) & 0 & 0 \\ X_2 \cdot u_{2,1}(X_1, t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Na powierzchni nieciągłości  $\Sigma(X_1, t)$  skoku doznają jedynie składowe gradientu deformacji  $x_{11}, x_{21}$ . Wykorzystując bilans pędu (D3.1) oraz biorąc pod uwagę, że  $N = [1, 0, 0]$  otrzymamy:

$$(D3.3) \quad [T_{Ri1}] = \rho_R U_N^2 [x_{i1}] \quad i = 1, 2 ,$$

$$(D3.4) \quad U_N^2 = \frac{[T_{R11}][x_{11}] + [T_{R21}][x_{21}]}{[x_{11}]^2 + [x_{21}]^2} ,$$

$$(D3.5) \quad \rho_R U_N^2 = [T_{R11}] \frac{[e_1]}{[e_1]^2 + [X_2^2 e_2^2]^2} + [T_{R21}] \frac{[X_2^2 e_2^2]}{[e_1]^2 + [X_2^2 e_2^2]^2} .$$

W przypadku propagacji w warstwie o grubości  $2h$ , (por. rozdz. 8) można dokonać w wyrażeniu (D3.5) uśrednienia

$$(D3.6) \quad \rho_R U_N^2 = [T_{R11}] \frac{[e_1]}{[e_1]^2 + \frac{h^2}{3} [e_2^2]^2} + [T_{R21}] \frac{\frac{h^2}{3} [e_2^2]}{[e_1]^2 + \frac{h^2}{3} [e_2^2]^2} .$$

Naprężenia na  $\Sigma(X_1, t)$  po stronie B dla gradientu (D3.2) wynoszą:

$$(D3.7) \quad T_{R11} = 2(1 + e_1) \left( \frac{l + 2m}{8} (e_1^4 + 2e_1^3) + \frac{l + 2\mu + 2l + 4m}{4} e_1^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} e_1 + \right. \\ \left. + \frac{l + 2m}{4} e_1 (e_1 + 2) X_2^2 e_2^2 + \frac{l + 2m}{4} X_2^4 e_2^4 + \frac{l + 2 + m}{4} X_2^2 e_2^2 \right) ,$$

<sup>2</sup> oznaczenia zgodne z rozdziałami 7 i 8.

$$(D3.7) \text{ cd. } T_{R21} = 2X_2e_2 \left( \frac{l+2m}{8} (2e_1 + e_1^2)^2 + \frac{l+2m}{4} (2e_1 + e_1^2) X_2^2 e_2^2 + \frac{l+2m}{8} X_2^4 e_2^4 + \right. \\ \left. + \frac{l+2\mu+m}{4} (2e_1 + e_1^2) + \frac{l+2\mu+2m}{4} X_2^2 e_2^2 + \frac{\mu}{2} \right)$$

W przypadku gdy  $x_{22}=X_2e_2=0$  wyrażenia (D3.7)<sub>1</sub> przybierają postać:

$$(D3.8) \quad T_{R11} = 2(1+e_1)(e_1+2)e_1 \left( \frac{l+2m}{8} e_1(e_1+2) + \frac{\lambda+2\mu}{4} \right).$$

Natomiast gdy  $[x_{11}]=e_1=0$ , wyrażenie (D3.7)<sub>2</sub> wynosi

$$(D3.9) \quad T_{R21} = 2X_2e_2 \left( \frac{l+2m}{8} X_2^4 e_2^4 + \frac{l+2\mu+2m}{4} X_2^2 e_2^2 + \frac{\mu}{2} \right).$$

Dla pełnej postaci gradientu deformacji (D3.2) prędkość powierzchni nieciągłości wynosi

$$(D3.11) \quad U_N^2 = \frac{1}{\rho_R([e_1]^2 + X_2[e_2]^2)} \left( 2(1+e_1) \left( \frac{l+2m}{8} (e_1^4 + 2e_1^3) e_1 + \frac{\lambda+2\mu+l+4m}{4} e_1^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda+2\mu}{2} e_1^2 + \frac{l+2m}{4} e_1^2 (e_1+2) X_2^2 e_2^2 + \frac{l+2m}{4} X_2^4 e_2^4 e_1 + \frac{\lambda+2\mu+m}{4} X_2^2 e_2^2 e_1 \right) + \right. \\ \left. + 2X_2e_2 \left( \frac{l+2m}{8} (2e_1 + e_1^2) X_2e_2 + \frac{l+2m}{4} (2e_1 + e_1^2) X_2^3 e_2^3 + \frac{l+2m}{8} X_2^5 e_2^5 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda+2\mu+m}{4} (2e_1 + e_1^2) X_2e_2 + \frac{l+2m}{4} X_2^3 e_2^3 + \frac{\mu}{2} X_2e_2 \right) \right)$$

Dla materiału liniowego fizycznie (przy uwzględnieniu jedynie stałych Lamé) wyrażenie dla prędkości znacznie się upraszcza

(D3.12)

$$U_N^2 = \frac{1}{\rho_R([e_1]^2 + X_2[e_2]^2)} \left( 2(1+e_1) \left( \frac{\lambda+2\mu}{4} e_1^3 + \frac{\lambda+2\mu}{2} e_1^2 + \frac{\lambda+2\mu}{4} X_2^2 e_2^2 e_1 \right) + \right. \\ \left. + 2X_2e_2 \left( \frac{\lambda+2\mu}{4} (2e_1 + e_1^2) X_2e_2 + \frac{\lambda+2\mu}{4} X_2^3 e_2^3 + \frac{\mu}{2} X_2e_2 \right) \right)$$

Ostatecznie otrzymuje się

$$(D3.13) \quad \rho_R U_N^2 = \frac{1}{[e_1]^2 + X_2^2 [e_2]^2} \left( (\lambda+2\mu) e_1^2 + \frac{3}{2} (\lambda+2\mu) e_1^3 + \right. \\ \left. \frac{3}{2} (\lambda+2\mu) X_2^2 e_2^2 e_1 + \mu X_2^2 e_2^2 + \dots \right)$$



$$(D3.14) \quad \rho_R U_N^2 = \left( (\lambda + 2\mu) \frac{[e_1]^2}{[e_1]^2 + X_2^2[e_2]^2} + \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) \frac{[e_1]^2}{[e_1]^2 + X_2^2[e_2]^2} [e_1] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) \frac{X_2^2[e_2]^2}{[e_1]^2 + X_2^2[e_2]^2} [e_1] + \mu \frac{X_2^2[e_2]^2}{[e_1]^2 + X_2^2[e_2]^2} + \dots \right)$$

$$(D3.15) \quad \rho_R U_N^2 = \left( (\lambda + 2\mu) \sin^2 \Phi + \mu \cos^2 \Phi + \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu)[e_1] + \dots \right),$$

gdzie

$$(D3.16) \quad \sin^2 \Phi = \frac{[e_1]^2}{[e_1]^2 + X_2^2[e_2]^2}, \quad \cos^2 \Phi = \frac{X_2^2[e_2]^2}{[e_1]^2 + X_2^2[e_2]^2}$$

Zgodnie z zależnością (D3.2) można w przekroju dokonać uśrednienia, ostatnie wyrażenia sprowadzają się do postaci

$$(D3.17) \quad \sin^2 \Phi = \frac{[e_1]^2}{[e_1]^2 + \frac{h^2}{3}[e_2]^2}, \quad \cos^2 \Phi = \frac{\frac{h^2}{3}[e_2]^2}{[e_1]^2 + \frac{h^2}{3}[e_2]^2}$$

• **Fala poprzeczna.** Przy założeniu, że jedynie  $[x_{21}] \neq 0$ , wyrażenie dla prędkości upraszcza się

$$(D3.18) \quad \rho_R U_N^2 = \frac{[T_{R21}]}{X_2[e_2]} = \\ = \frac{2X_2[e_2]}{X_2[e_2]} \left( \frac{\mu}{2} + \frac{\lambda + 2\mu + 2m}{4} X_2^2[e_2]^2 + \frac{l + 2m}{8} X_2^4[e_2]^4 \right),$$

$$(D3.19) \quad \rho_R U_N^2 = \frac{[T_{R21}]}{X_2[e_2]} = \left( \mu + \frac{\lambda + 2\mu + 2m}{2} X_2^2[e_2]^2 + \frac{l + 2m}{4} X_2^4[e_2]^4 \right),$$

lub analogiczne wyrażenie w wersji uśrednionej

$$(D3.20) \quad \rho_R U_N^2 = \frac{[T_{R21}]}{\frac{h^2}{3}[e_2]} = \left( \mu + \frac{\lambda + 2\mu + 2m}{2} \frac{h^2}{3}[e_2]^2 + \frac{l + 2m}{4} \frac{h^4}{5}[e_2]^4 \right),$$

Propagacja takiej fali uderzeniowej jest możliwa tylko w przypadku gdy spełniony jest warunek entropii. Podstawą obliczeń jest zależność wynikająca z prawa zachowania pędu i energii (por. (Wesołowski, 1979, (18.18))

$$(D3.21) \quad 2\rho_R U_N[\sigma] + [T_{Ra}] [\dot{x}_i] N_\alpha = -2[T_{Ra}]^F N_\alpha [\dot{x}_i],$$

$$(D3.22) \quad (T_{R1\alpha})^F = 0 \Rightarrow [\sigma] = \frac{[T_{R1\alpha}]}{2\rho_R} [x_{i\alpha}],$$

$$(D3.23) \quad \rho_R[\sigma] = \rho_R T_0 S + \left( \frac{\mu}{2} X_2^2 [e_2]^2 + \frac{\lambda + 2\mu + 2m}{8} X_2^4 [e_2]^4 + \frac{l + 2m}{24} X_2^6 [e_2]^6 \right),$$

$$(D3.24) \quad [T_{R21}] = 2X_2 [e_2] \left( \frac{l + 2m}{8} X_2^4 [e_2]^4 + \frac{\lambda + 2\mu + 2m}{4} X_2^2 [e_2]^2 + \frac{\mu}{2} \right).$$

Podstawiając ostatnie dwie równości do (D3.22) otrzymuje się dla skoku entropii wyrażenie

$$(D3.25) \quad S = [\eta] = \frac{\lambda + 2\mu + 2m}{8\rho_R T_0} X_2^4 [e_2]^4 + \frac{l + 2m}{12\rho_R T_0} X_2^6 [e_2]^6.$$

Przy ograniczeniu się do pierwszego członu, nierówność ma postać

$$(D3.26) \quad [\eta] > 0 \Rightarrow (\lambda + 2\mu + 2m) > 0.$$

Powyższy związek wprowadza pewne ograniczenia dla materiałów w których może propagować się fala uderzeniowa. Pierwsze dwie stałe są dodatnie, trzecia ujemna, nierówność nie jest spełniona np. dla stali lecz spełniona jest dla polistyrenu i mosiądzu. Propagacja poprzecznej fali uderzeniowej w stali możliwa jest jedynie przy założeniu, że rozpatrywane zagadnienie jest liniowe fizycznie ( $m=l=n=0$ ) i nieliniowe geometrycznie. Tylko wówczas zostaje zachowany warunek entropii. Przy ograniczeniu się do członów drugiego rzędu wyrażenie dla prędkości (D3.18) spełnia warunek *stateczności fali*.

• **Fala podłużna.** Zakłada się, że różna od zera jest jedynie składowa  $[x_{11}]$  gradientu deformacji

$$(D3.27) \quad [T_{R11}] = 2(1 + [e_1])(2 + [e_1])[e_1] \left( \frac{l + 2m}{8} (2 + [e_1])[e_1] + \frac{\lambda + 2\mu}{4} \right),$$

$$(3D.28) \quad \rho_R U_N^2 = \frac{[T_{R11}]}{[e_1]} = 2(1 + [e_1])(2 + [e_1]) \left( \frac{l + 2m}{8} (2 + [e_1])[e_1] + \frac{\lambda + 2\mu}{4} \right),$$

$$(3D.29) \quad \rho_R U_N^2 = \lambda + 2\mu + \frac{3\lambda + 6\mu + 2l + 4m}{2} [e_1] + \frac{\lambda + 2\mu + 4l + 8m}{2} [e_1]^2$$

Wyrażenie dla energii przybiera postać

$$(3D.30) \quad \begin{aligned} \rho_R[\sigma] &= \\ &= \rho_R T_0 S + \frac{l+2m}{24} [e_1]^3 (2+[e_1])^3 + \frac{\lambda+2\mu}{8} (2[e_1]+[e_1]^2)^2 \end{aligned}$$

Podstawienie do (3D.22) pozwala obliczyć skok entropii

$$(3D.31) \quad S = [\eta] = \frac{3\lambda+6\mu+2l+4m}{12\rho_R T_0} [e_1]^3 + \frac{\lambda+2\mu+4l+8m}{8\rho_R T_0} [e_1]^4,$$

$$(3D.32) \quad [\eta] > 0 \Rightarrow (3\lambda+6\mu+2l+4m)[e_1]^3 > 0$$

Ostatnia nierówność dopuszcza propagację ściskających fal uderzeniowych w stali oraz rozciągających w mosiądzu.

## SPIS TREŚCI

<b>Streszczenie</b>	.....	<b>3</b>
<b>Rozdział 1. Wprowadzenie</b>	.....	<b>6</b>
	1.1. Przedmowa	6
	1.2. Wstęp	7
<b>Rozdział 2. Równania podstawowe</b>	.....	<b>11</b>
	2.1. Podstawowe równania ruchu kontinuum i warunki propagacji fal	11
	2.2. Półodwrotna metoda Wrighta	15
<b>Rozdział 3. Odbicie-załamanie ukośnej fali uderzeniowej w materiale nieściśliwym</b>	.....	<b>19</b>
	3.1. Wstęp	19
	3.2. Fala padająca ukośnie jej parametry i możliwe konfiguracje fal odbitych	19
	3.3. Związki konstytutywne i prędkości propagacji fal	23
	3.4. Warunki brzegowe i warunki ciągłości	24
	3.5. Odbite ukośne fale uderzeniowe	27
	3.6. Kąt krytyczny dla padającej fali uderzeniowej	31
	3.7. Analiza numeryczna i uwagi	34
<b>Rozdział 4. Odbicie-transmisja fali padającej w kierunku normalnym w materiale nieściśliwym</b>	.....	<b>39</b>
	4.1. Fala padająca i jej parametry	39
	4.2. Konfiguracje falowe związane z odbiciem-transmisją fali uderzeniowej	40
	4.3. Analiza numeryczna i możliwe przypadki fal tworzących konfiguracje	46
	4.4. Uwagi końcowe	51
	4.5. Odbicie normalne	52
<b>Rozdział 5. Odbicie załamanie fali uderzeniowej w neoHookeanie</b>	.....	<b>57</b>
	5.1. Wstęp	57
	5.2. Dopuszczalne konfiguracje falowe	57
	5.3. Wnioski i uwagi	63

<b>Rozdział 6. Odbicie ukośne oraz normalne wraz z transmisją podłużnej fali uderzeniowej w materiale ściśliwym .....</b>	<b>66</b>
6.1. Wstęp .....	66
6.2. Podłużna płaska fala uderzeniowa, padająca ukośnie ....	66
6.3. Fale proste w płaskim stanie odkształcenia .....	68
6.4. Analiza zagadnienia odbicia w materiale Murnaghana....	68
6.5. Analiza numeryczna i uwagi .....	81
6.6. Odbicie z transmisją w kierunku normalnym.....	86
<b>Rozdział 7. Ewolucja amplitudy fali uderzeniowej w pręcie o zmiennym przekroju .....</b>	<b>96</b>
7.1. Wstęp .....	96
7.2. Równania podstawowe .....	96
7.3. Równanie amplitudy fali w pręcie o wolno zmieniającym się przekroju .....	99
7.4. Przypadki szczególne. Porównanie wyników .....	101
7.5. Analiza numeryczna .....	104
<b>Rozdział 8. Ewolucja amplitudy fali uderzeniowej w warstwie .....</b>	<b>108</b>
8.1. Wstęp .....	108
8.2. Symetryczny ruch warstwy sprężystej .....	108
8.3. Uśrednione równania ruchu .....	110
8.4. Zastosowanie uśrednionych równań ruchu do zagadnienia propagacji fal uderzeniowych .....	114
8.5. Propagacja nieciągłości w cienkiej warstwie sprężystej ....	116
<b>Podsumowanie .....</b>	<b>119</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>120</b>
<b>Dodatki .....</b>	<b>125</b>
Dodatek 1. Materiał gumopodobny .....	125
Dodatek 2. Materiał Murnaghana. Stałe sprężyste. ....	126
Dodatek 3. Prędkości jednowymiarowych fal uderzeniowych i warunki entropii w materiale Murnaghana .....	127

