Archives of Mechanics • Archiwum Mechaniki Stosowanej • 30, 1, pp. 3–15, Warszawa 1978

Sur une méthode de résolution du deuxième problème aux limites

P. S. THEOCARIS et G. J. TSAMASPHYROS (ATHENES)

DANS un récent article nous avions développé une nouvelle méthode, à l'aide de laquelle nous avons pu réduire le deuxième problème aux limites à une équation integrale singulière. Dans le présent article en utilisant un prolongement analytique different mais un processus analogue nous fournirons la solution du même problème sous la forme d'une équation intégrale reguliére de Fredholm analogue à celle de Muskhelishvili [1].

W ostatnim artykule przedstawiliśmy pewną nową metodę, na podstawie której udało nam się zredukować drugie zagadnienie graniczne do osobliwego równania całkowego. W niniejszej pracy, wykorzystując odmienne przedłużenie analityczne, lecz analogiczną procedurę, podajemy rozwiązanie tego samego zagadnienia w postaci regularnego równania całkowego Fredholma, analogicznego do równania Muskhelishviliego [1].

В последней статье мы представили некоторый новый метод, опираясь на который удалось нам свести вторую предельную задачу к сингулярному интегральному уравнению. В настоящей работе, используя другое аналитическое продолжение, но аналогичную процедуру, приводим решение этой самой задачи в виде регулярного интегрального уравнения Фредгольма, аналогичного уравнению Мусхелишвили [1].

1. Introduction

LA SOLUTION générale du deuxiéme problème aux limites de l'élasticité plane a été fournie, dès 1940, par D. SHERMAN [1], sous forme d'une équation intégrale de Fredholm. Plusieurs auteurs ont repris et ont amelioré les résultats de SHERMAN [2, 3]. Malgré tout, les inconvénients de la formulation initiale de Sherman subsistent. Ces inconvénients sont:

i) Les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont definies à l'aide des formules assez arbitraires en fonction d'une distribution $\omega(t)$ qui' n'a aucune signification physique.

ii) L'unicité a été demontrée en introduisant des quantités arbitraires qui n'ont aucun rapport avec le probléme posé.

iii) La méthode n'est pas valable dans le cas des milieux fissurés.

Avec notre travail précédent [4] nous avons pu apporter remède à tous ces inconvénients. Dans le présent article nous présentons une solution qui conserve les avantages de notre récent travail et en plus elle aboutit cette fois à une équation intégrale regulière.

2. Rappel d'équations de l'élasticité pour les domaines multiplement connexes

Soit un milieu élastique et isotrope qui occupe le domaine multiplement connexe S^+ limité par les contours du Jordan L_j $\big(j = 1, 2, \ldots, m, (m+1)\big)$, dont le dernier contient tous les autres (Fig. 1).

Nous supposons que les courbes L_j ne s'intèrsectent pas et que la courbure est une fonction Hölder contunue de la longueur s de l'arc.

On definit maintenant par:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_m + L_{m+1}$$

le contour total du S^+ et on designe par S_j les régions finies, bornées par L_j ($j = 1, 2, \dots, m$) et par S_{m+1} la région infinie extérieure de L_{m+1}. En utilisant la formulation de Muskhelisbvili par deux potentielles complexes $\varphi^*(z)$ et $\psi^*(z)$ ($z = x+iy$), qui sont en général

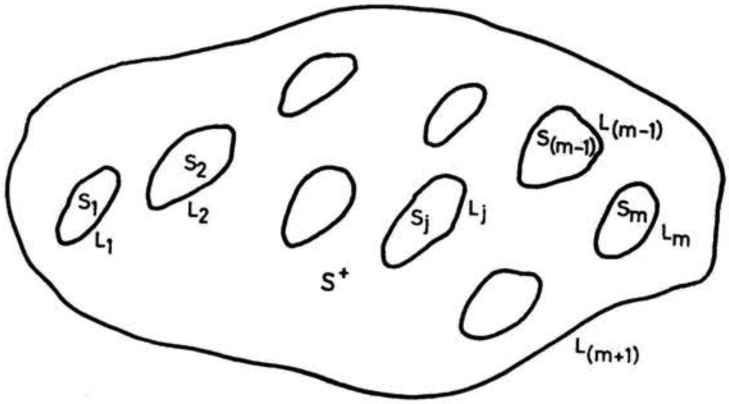

FIG. 1.

des fonctions analytiques et multiformes, nous pouvons exprimer les composantes cartesiennes des déplacements à l'aide de la formule:

$$2\mu\{u(x, y)+iv(x, y)\} = \varkappa\overset{*}{\varphi}(z)-z\overline{\overset{*}{\varphi}'(z)}-\overline{\overset{*}{\psi}(z)} \tag{2.1}$$

où $\varkappa = (3-4\nu)$ dans les cas des déformations planes et $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ dans le cas des contraintes planes. Si maintenant on note par σ_{nn} et σ_{ns} respectivement les composantes normales et tangentielles des forces par unité de surface appliquées sur un point B de la limite L, on peut écrire:

$$\sigma_{nn}+i\sigma_{ns} = \overset{*}{\varphi}'(t)+\overline{\overset{*}{\varphi}'(t)}+\{t\overline{\overset{*}{\varphi}''(t)}+\overline{\overset{*}{\psi}'(t)}\}\frac{\overline{dt}}{ds}\Big/\frac{dt}{ds} \tag{2.2}$$

où t est la coordonée complexe du point B. Si on note par (X_n, Y_n) la résultante des forces appliquées à un arc AB nous pouvons écrire,

$$i(X_n+iY_n)+\text{const} = i\int_{AB}(\sigma_{xn}+i\sigma_{yn})ds+\varphi(t_A) \tag{2.3}$$

$$+t_A\overline{\overset{*}{\varphi}'(t_A)}+\overline{\psi(t_A)} = \varphi(t)+t\overline{\overset{*}{\varphi}'(t)}+\overline{\overset{*}{\psi}(t)}$$

où $(\sigma_{xn}ds, \sigma_{yn}ds)$ est la force appliquée sur l'élément ds.

Les fonctions $\overset{*}{\varphi}(z)$ et $\overset{*}{\psi}(z)$ sont des fonctions analytiques et en général sont des fonctions multiformes.

Selon Muskhelishvili on peut mettre les potentielles complexes $\overset{*}{\varphi}(z)$ et $\overset{*}{\psi}(z)$ sous la forme:

$$\overset{*}{\varphi}(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\log(z-z_k)+\varphi(z), \tag{2.4}$$

(2.5) $$\dot{\psi}(z) = \frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{m} (X_k - iY_k)\log(z-z_k) + \psi(z)$$

où (X_k, Y_k) est la résultante des forces appliquées sur L_k, z_k est la coordonnée complexe d'un point quelconque dans S_k et $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sont des fonctions holomorphes de z définies dans S^+.

Soit une fonction continue $f(t)$, définie sur L, et telle que $df/ds = f'(t)\,dt/ds$ soit une fonction H-continue (où $f'(t) = df(t)/dt$).

On admet maintenant que la quantité $f'(t)$ répresente les tractions $(\sigma_{nn}+i\sigma_{ns})$ appliquées sur L. On a donc:

(2.6) $$\int_L (f(t)\overline{dt} + \overline{f(t)}dt) = 0$$

c'est à dire les moments par rapport à l'origine des forces appliquées sur L sont nuls. Nos méthodes se basent à un prolongement analytique de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ dans la région S^- complémentaire de S^+.

Nous pouvons définir ce prolongement de deux manières:

i) En supposant que la région S^- est remplié de la même matière que la région S^+ et que S^- est solicité de façon qu'il y aura continuité du champ des contraintes dans le plan entier. Par contre il y aura discontinuité de deplacement le long de L.

ii) En supposant que la région S^- est en repos. À l'aide d'un des ces deux prolongements ou peut formuler la solution du problème, soit en utilisant la rélation (2.3) (équation des forces), soit la relation (2.2) (équation des contraintes).

On obtient ainsi quatre formulations et par conséquent quatre solutions.

On va exposer ici les deux méthodes de résolution basées au deuxième type de prolongement. Le premier type de prolongement a fait l'objet d'une récente publication [4].

3. Premiére méthode basée sur l'équation complexe des forces

Nous allons présenter la méthode dans le cas d'un milieu fini (c'est à dire L_{m+1} existe) multiplement connexe non fissuré. Pour les milieux multiplement connexes infinis la méthode est tout à faît analogue. Aussi il n'y a pas aucun problème à l'application de la méthode dans le cas des milieux fissurés solicité d'un part et de l'autre de la fissure par la même distribution des contraintes; on fait quelques suggestions pour ces cas dans le paragraphe 5.

Dans ce cas là du milieu fini non fissuré les conditions aux limités en tenant compte de (2.6) prennent la forme:

(3.1) $$\dot{\varphi}^+(t) + t\overline{\dot{\varphi}'^+(t)} + \overline{\dot{\psi}^+(t)} = f(t) + c_j \quad \text{pour} \quad t \in L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m+1).$$

Nous avons ajouté le signe + pour noter que $\dot{\varphi}^+(t)$ et $\dot{\psi}^+(t)$ sont les valeurs limites de $\dot{\varphi}^+(z)$ et $\dot{\psi}^+(z)$ pour z tenant vers un point $t \in L$, par l'interieur de S^+.

En tenant de (2.4) et (2.5) on peut écrire (3.1) sous la forme:

(3.2) $$\varphi^+(t) + t\overline{\varphi'^+(t)} + \overline{\psi^+(t)} = p(t) + c_j \quad \text{pour} \quad t \in L_j$$

où

$$(3.3)\qquad p(t) = f(t)+\frac{t}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}\frac{X_j-iY_j}{\bar{t}-\bar{z}_j}+\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\,\{\log(t-z_k)-\varkappa\log(\bar{t}-\bar{z}_k)\},\ t\in L_j,$$
$$j = 1, 2, \ldots, (m+1)$$

avec $c_{m+1} = 0$.

Ainsi le problème se voit simplifié étant donné que $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont maintenant des fonctions holomorphes de z, $(z \in S^+)$.

Nous effectuons maintenant un prolongement analytique des potentielles complexes $\varphi^+(z)$ et $\psi^+(z)$ dans le domaine S^- de manière que $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ soient la solution du $2^{\text{ème}}$ problème aux limites en absence des forces extérieures. Donc, nous aurons:

$$(3.4)\qquad \varphi^-(t)+t\overline{\varphi'^-(t)}+\overline{\psi'^-(t)} = 0 \quad \text{pour} \quad t\in L.$$

Nous avons ainsi défini dans le plan entier les fonctions holomorphes $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ qui s'annulent à l'infini, et qui présentent à travers de L des discontinuités.

Nous remplaçons maintenant les relations (3.6) et (3.7) par leur différences. Nous aurons donc:

$$(3.5)\qquad \{\varphi^+(t)-\varphi^-(t)\}+t\{\overline{\varphi'^+(t)}-\overline{\varphi'^-(t)}\}+\{\overline{\psi^+(t)}-\overline{\psi^-(t)}\}$$
$$= f(t)+\frac{t}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k-iY_k}{\bar{t}-\bar{z}_k}+\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\{\log(t-z_k)$$
$$-\varkappa\log(\bar{t}-\bar{z}_k)\}+c_j \quad \text{pour} \quad t\in L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, (m+1)).$$

Nous supposons à présent que le long de L existe une discontinuité des déplacement égale à $g(t)/2\mu$. On peut noter par conséquent:

$$(3.6)\qquad \{u^+(t)+iv^+(t)\}-\{u^-(t)+iv^-(t)\} = g(t)/2\mu$$

où $u(z)+iv(z)$ est le déplacement complex du point z. On peut ecrire cette dernière relation en utilisant la formule (2.1) comme suit:

$$(3.7)\qquad \varkappa\{\varphi^+(t)-\varphi^-(t)\}-t\{\overline{\varphi'^+(t)}-\overline{\varphi'^-(t)}\}-\{\overline{\psi^+(t)}-\overline{\psi^-(t)}\}$$
$$= g(t)-\frac{t}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k-iY_k}{\bar{t}-\bar{z}_k}+\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\,\varkappa\log(t-z_k)\,(\bar{t}-\bar{z}_k),$$
$$\forall\ t\in L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m+1).$$

En ajoutant membre par membre les relations (3.5) et (3.7) nous obtenons:

$$(3.8)\qquad \{\varphi^+(t)-\varphi^-(t)\} = \omega(t)+\frac{c_j}{(1+\varkappa)} \quad \text{pour} \quad t\in L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, (m+1))$$

où

$$(3.9)\qquad \omega(t) = \frac{f(t)+g(t)}{\varkappa+1}+\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\log(t-z_k).$$

En supposant que $\omega(t)$ est H-continue nous obtenous:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} + \frac{C(z)}{\varkappa+1}, \tag{3.10}$$

$$C(z) = \begin{cases} -c_j + c_{(m+1)} & \text{pour} \quad z \in S_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ c_{(m+1)} & \text{pour} \quad z \in (S^+ + S_1 + S_2 + \ldots + S_m). \end{cases} \tag{3.11}$$

A l'aide de l'équation (3.5) ou (3.7) nous obtenons, en tenant compte aussi de la relation (3.8), la formule suivante:

$$\begin{aligned} \{\psi^+(t) - \psi^-(t)\} = \overline{f(t)} - \overline{\{\omega(t) + \bar{t}\omega'(t)\}} + \frac{t}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k + iY_k}{t - z_k} + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \\ + \sum_{k=1}^{m}(X_k - iY_k)\{\log(\bar{t} - \bar{z}_k) - \varkappa\log(t - z_k)\} + \frac{\varkappa c_j}{\varkappa+1}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Donc:

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t}\omega'(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{p(t)}\,dt}{t-z} + \varkappa C(z). \tag{3.13}$$

Nous avons ainsi exprimé $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ en fonction de $\omega(t)$. Mais il est bien connu que les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ ne sont pas uniquement déterminées. Si $\varphi^-(z)$, $\psi^-(z)$ sont des solutions du problème dans la région bornée S_j, les fonctions $\varphi^-(z) + i\varepsilon_j z + d_j$, $\psi^-(z) - d_j$ (où d_j est une constante complexe et ε_j est une constante réele) le sont aussi. Nous avons donc le droit de choisir arbitrairement ces constantes. Nous choisissons d_j de manière que $\varphi^-(z)$ soit nulle aux points $z_1^1, z_2^1, \ldots, z_m^1, z_{(m+1)}^1$ où $z_j^1 (j = 1, 2, 3, \ldots, (m+1))$ est un point quelconque de S_j. Comme tels points on choisie les points z_j. Ce choix des constantes nous fournit:

$$-2\pi i \frac{c_{m+1}}{\varkappa+1} = \int\limits_L \frac{\omega(t)}{t}\,dt \tag{3.14}$$

et

$$2\pi i \frac{c_j}{\varkappa+1} = \int\limits_L \frac{\omega(t)}{t - z_j}\,dt - \int\limits_L \frac{\omega(t)}{t}\,dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.15}$$

Nous choisissons maintenant la rotation b_j du point $z_j \in S_j$ $\big(j = 1, 2, \ldots, m, (m+1)\big)$ égale à zéro. Pour que cette condition soit toujours verifiée par l'équation intégrale que nous allons formuler, nous supposons que nous appliquons à chaque point z_j un couple d'intensité b_j égale à;

$$b_j = \frac{(1+\varkappa)}{2\mu}\,\frac{[\varphi'(z_j) - \overline{\varphi'(z_j)}]}{2i}. \tag{3.16}$$

Nous pouvons écrire cette dernière équation comme suit:

$$b_j = -\frac{(1+\varkappa)}{4\mu}\,\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{(t - z_j)^2} + \int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)\,dt}}{(\bar{t} - \bar{z}_j)^2}\right\}. \tag{3.17}$$

Dans ces relations nous avons admis $z_{m+1} = O+iO$ et comme il est de notre droit nous choisissons l'origine sur $L_{(m+1)}$. Ce choix de l'origine nous donne:

$$c_{m+1} = 0. \tag{3.18}$$

L'application de ce couple sur chaque S_j n'affect par le problème initialement posé. En effet la relation (3.4) prend maintenant la forme:

$$\varphi^-(t)+t\overline{\varphi'^-(t)}+\overline{\psi^-(t)} = \frac{b_j}{2\pi i(\bar{t}-\bar{z}_j)}. \tag{3.19}$$

On multiplie cette derniére équation par dt, et sa conjuguée complexe par dt, on intégre leur somme sur chaque L_j séparément, et nous obtenons les relations:

$$b_j = 0 \quad \big(j = 1, 2, \ldots, (m+1)\big). \tag{3.20}$$

Mais, d'après les conditions imposées à $\varphi^-(z)$ il est bien évident qu'on a partout dans S_j:

$$\varphi^-(z) = 0, \quad z \in S_j. \tag{3.21}$$

Cette relation nous conduit à la conclusion évidente que $(\omega(t)+c_j/(\varkappa+1))$ n'est que la valeur limite de $\varphi^+(z)$ pour $z \to L^+$, c'est à dire que:

$$\omega(t)+c_j/(\varkappa+1) = \varphi^+(t). \tag{3.22}$$

Ayant ainsi défini $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ en fonction de $\omega(t)$ nous pouvons formuler, en utilisant la relation (3.6), l'équation intégrale qui fournit la solution du problème. On aura:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{t_0}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega'(t)}\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}+t\overline{\omega'(t)}\,dt}{\bar{t}-\bar{t}_0} = \frac{p(t_0)}{2} \tag{3.23}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)\overline{dt}}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{b_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}+c_j \quad \text{pour} \quad t \in L_j \quad \big(j = 1, 2, \ldots, (m+1)\big).$$

Nous pouvons écrire cette dernière équation sous la forme équivalente:

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{2\int_L \frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt - \int_L \omega(t)d\log\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \int_L \overline{\omega(t)}d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right\} = \frac{p(t_0)}{2} \tag{3.24}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)\overline{dt}}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{b_k}{\bar{t}-\bar{z}_k}+c_j \quad \text{pour} \quad t \in L_j \quad \big(j = 1, 2, \ldots\ (m+1)\big).$$

En tenant compte du fait que $\varphi^-(z) \equiv 0$ et de la relation (3.22) nous pouvons écrire aussi la dernière équation comme suit:

$$\varphi(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)d\log\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} = \frac{p(t_0)}{2} \tag{3.25}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)\overline{dt}}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{b_k}{\bar{t}-\bar{z}_k}+c_j \quad \text{pour} \quad t \in L_j \quad \big(j = 1, 2, \ldots, (m+1)\big).$$

Cette dernière équation (3.25) n'est que l'équation fournie par MUSKHELISHVILI [1] mais à l'aide d'un autre proçessus de démonstration. La seule différence demeure à la définition des constantes b_j et c_j. Notre processus présente l'avantage qu'il reste valable pour les milieux fissurées comme nous allons le demontrer dans un cas particulier mais aussi pour la méthode qui va suivre et qui sera basée à l'équation des contraintes. Il faut aussi noter que à l'aide du processus utilisé ici nous avons pu obtenir l'expression de la valeur limite $\varphi(t)$ sur la bord L à l'aide des contraintes et déformations sur ce même bord (relation (3.8)). Nous avons encore introduit d'une manière naturelle les constantes b_j que nous les avons exprimées ainsi que les constantes c_j à l'aide de la distribution $\omega(t)$.

Il est nécessaire, maintenant de prouver l'unicité, de la solution. Pour ce faire on multiplie d'abord l'équation (3.25) par $\overline{dt_0}$, l'équation conjuguée complexe par dt_0 et on prend l'intégrale de leur somme sur L. On obtient:

$$2b_{(m+1)} = \int\limits_L \{f(t_0)\overline{dt_0}+\overline{f(t_0)}dt_0\}. \tag{3.26}$$

En tenant compte de la relation (2.6) on trouve:

$$b_{(m+1)} = 0 \rightarrow \int\limits_L \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt+\int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}^2}\,\overline{dt} = 0. \tag{3.27}$$

Nous supposons à présent que l'origine se trouve sur $L_{(m+1)}$. Nous concluons donc que:

$$c_{m+1} = 0. \tag{3.28}$$

Mais selon MUSKHELISHVILI [5] pour prouver l'unicité, il suffit de démontrer que l'équation homogène n'accepte que la solution nulle.

En effet l'équation homogène, obtenue par l'équation (3.24) équivalente à la relation (3.25), est aussi équivalente au problème aux limites suivants:

$$\varphi_0(t_0)+t_0\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\varphi_0(t_0)} = c_j^0 \quad \text{pour} \quad t_0 \in L_j \quad (j=1,2,\ldots,(m+1)) \tag{3.29}$$

où φ_0 et ψ_0 sont les solution du 2ème problème aux limites en absence des forces exterieures. Par conséquent:

$$\varphi_0(z) = i\varepsilon z+c. \tag{3.30}$$

Et en utilisant la relation (3.28) on conclue que:

$$\psi_0(z) = -c \tag{3.31}$$

et que:

$$c_j^0 = 0 \quad (j=1,2,\ldots,(m+1)). \tag{3.32}$$

Nous avons donc:

$$i\varepsilon z+c = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_0(t)dt}{t-z}, \tag{3.33}$$

$$-c = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega_0(t)}+\bar{t}\,\omega_0'(t)}{t-z}\,dt\,\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^0}{z-z_j}. \tag{3.34}$$

Nous introduisons maintenant les fonctions:

$$\varphi_1(t) = \omega_0(t) - i\varepsilon t - c, \tag{3.35}$$

$$\psi_1(t) = -\overline{\omega_0(t)} - \bar{t}\omega_0(t) + \bar{c} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^0}{t-z_j}. \tag{3.36}$$

Mais, d'après les relations (3.33) et (3.34) on trouve que pour tous $z \in S^+$ nous avons:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t)}{t-z}\,dt = 0, \tag{3.37}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi_1(t)}{t-z}\,dt = 0. \tag{3.38}$$

Par conséquent les quantités $\varphi_1(t)$ et $\psi_1(t)$ sont les valeurs limites des fonctions holomorphes dans les regions $S_1, S_2, \ldots, S_{m+1}$, qui verifient les équations:

$$\varphi_1(\infty) = \psi_1(\infty) = 0. \tag{3.39}$$

En substituant dans la rélation (3.27), pour $\omega(t)$ l'expression de $\omega_0(t)$, obtenue par la formule (3.35), et en tenant compte les proprietés precitées de $\varphi_1(t)$, nous pouvons conclure facilement que:

$$\varepsilon = 0. \tag{3.40}$$

En éliminant $\omega_0(t)$ par les équations (3.35) et (3.36) on trouve:

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^0}{\bar{t}-\bar{z}_j}. \tag{3.41}$$

On multiplie la relation (3.41) par $\overline{dt}$ et sa conjuquée complexe par dt et on intégre le long de L_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Leur somme donne:

$$b_j^0 = 0. \tag{3.42}$$

La relation (3.41) devient:

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 0 \quad \text{pour} \quad t \in L_j \quad \big(j = 1, 2, \ldots, (m+1)\big). \tag{3.43}$$

Par conséquent $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ est la solution du deuxième problème fondemental pour les régions S_j $\big(j = 1, 2, \ldots, (m+1)\big)$ en absence des forces extérieures. En appliquant de nouveau le théorème d'unicité nous obtenons:

$$\varphi_1(z) = \psi_1(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z \in S_{m+1} \tag{3.44}$$

et

$$\varphi_1(z) = i\varepsilon_j z + c_j, \quad \psi_1(z) = -\bar{c}_j \quad \text{pour} \quad z \in S_j, \quad j = 1, 2, \ldots m. \tag{3.45}$$

De plus, en tenant compte des relations (3.35), (3.36) et (3.42) nous avons:

$$\omega_0(t) = c \quad \text{pour} \quad t \in L_{m+1}, \tag{3.46}$$

$$\omega_0(t) = i\varepsilon_j t + c_j + c \quad \text{pour} \quad t \in L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.47}$$

En combinant les rélations (3.32) et (3.14), (3.15) et les rélations (3.42) et (3.17), on obtient facilement que:

$$\omega_0(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in L \tag{3.48}$$

ce que demontre l'unicité de la solution.

4. Deuxième méthode basée sur l'équation des contraintes

Nous considerons toujours le problème d'un milieu non fissuré. Dans ce cas les conditions aux limites sont de la forme:

$$\mathring{\varphi}'^{+}(t)+\overline{\mathring{\varphi}'^{+}(t)}+\{t\overline{\mathring{\varphi}''^{+}(t)}+\overline{\mathring{\psi}'^{+}(t)}\}\frac{\overline{dt}}{ds}\Big/\frac{dt}{ds} = f'(t) \quad \text{for} \quad t \in L. \tag{4.1}$$

On peut écrire aussi la derniére relation (4.1), si on tient compte des relations (2.4) et (2.5), comme suit:

$$\varphi'^{+}(t)+\overline{\varphi'^{+}(t)}+\{t\overline{\varphi''(t)}+\overline{\mathring{\psi}'^{+}(t)}\}\frac{\overline{dt}}{ds}\Big/\frac{dt}{ds} = p'(t) \tag{4.2}$$

où

$$p'(t) = f'(t)+\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{(X_k-iY_k)}{(\bar{t}-\bar{z}_k)}+\frac{(X_k-iY_k)}{(t-z_k)}\right)\right. \tag{4.3}$$

$$\left.-\left[t\sum_{k=1}^{m}\frac{(X_k+iY_k)}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^2}+\varkappa\sum_{k=1}^{m}\frac{(X_k-iY_k)}{(\bar{t}-\bar{z}_k)}\right]\frac{\overline{dt}}{ds}\Big/\frac{dt}{ds}\right\} \quad \text{pour} \quad t \in L.$$

On définit maintenant $\mathring{\varphi}^{-}(z)$ et $\mathring{\psi}^{-}(z)$ dans S^{-} de la même manière que précédemment. On peut écrire donc les conditions aux limites sous la forme:

$$\varphi'^{-}(t)+\overline{\varphi'^{-}(t)}+\{t\overline{\varphi''^{-}(t)}+\overline{\psi'^{-}(t)}\}\frac{\overline{dt}}{ds}\Big/\frac{dt}{ds} = 0 \quad \text{pour} \quad t \in L \tag{4.4}$$

étant donné que:

$$\mathring{\varphi}^{-}(t) = \varphi^{-}(t) \quad \text{et} \quad \mathring{\psi}^{-}(t) = \psi^{-}(t).$$

On remplace l'équation (4.4) par sa difference à partir de la relation (4.2):

$$\{\varphi'^{+}(t)-\varphi'^{-}(t)\}+\{\overline{\varphi'^{+}(t)}-\overline{\varphi'^{-}(t)}\}+\{\overline{t(\varphi''^{+}(t)}-\overline{\varphi''^{-}(t))} \tag{4.5}$$

$$+\overline{(\psi'^{+}(t)}-\overline{\psi'^{-}(t))}\}\frac{\overline{dt}}{ds}\Big/\frac{dt}{ds} = p'(t).$$

On suppose à present que la discontinuité des déplacements entre les deux milieux S^{+} et S^{-} est donée comme une fonction de la longueur de l'arc S. C'est à dire on a:

$$\{u^{+}(t)+iv^{+}(t)\}-\{u^{-}(t)+iv(t)\} = g(s)/2\mu. \tag{4.6}$$

On dérive donc par rapport à s la formule (3.7) et on obtient:

$$(4.7)\quad \varkappa\{\varphi'^{+}(t)-\varphi'^{-}(t)\}\frac{dt}{ds}-\{\overline{\varphi'^{+}(t)}-\overline{\varphi'(t)}\}\frac{\overline{dt}}{ds}-\{t(\overline{\varphi''^{+}(t)}-\overline{\varphi''^{-}(t)})$$

$$+(\overline{\psi'^{+}(t)}-\overline{\psi'^{-}(t)})\}\frac{\overline{dt}}{ds}=g'(t)-\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{X_k-iY_k}{\bar{t}-\bar{z}_k}-\varkappa\frac{X_k+iY_k}{t-z_k}\right)\frac{dt}{ds}\right.$$

$$\left.+\left\{t\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k-iY_k}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^2}+\varkappa\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k+iY_k}{\bar{t}-\bar{z}_k}\right\}\frac{\overline{dt}}{ds}\right\}\quad \text{pour}\quad t\in L.$$

On multiplie l'équation (4.5) par dt/ds et on l'ajoute à l'équation (4.7). On a:

$$(4.8)\qquad \{\varphi'^{+}(t)-\varphi'^{-}(t)\}\frac{dt}{ds}=\omega'(s)\quad \text{pour}\quad t\in L$$

où:

$$(4.9)\qquad \omega'(s)=\frac{f'(t)\dfrac{dt}{ds}+g'(s)}{\varkappa+1}+\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k+iY_k}{t-z_k}\frac{dt}{ds}.$$

Nous pouvons par conséquent ecrire:

$$(4.10)\qquad \varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega'(s)ds}{t-z}$$

cette dernière relation n'est que la derivée de la relation (3.9).

En utilisant les relations (4.5) et (4.9) nous obtenons:

$$(4.11)\quad \{\psi'^{+}(t)-\psi'^{-}(t)\}\frac{dt}{ds}=-\left\{\overline{\omega'(s)}+\omega'(s)\frac{\overline{dt}}{ds}\bigg/\frac{dt}{ds}+\bar{t}\omega''(t)\frac{\overline{dt}}{ds}\right\}+\overline{p'(t)}\frac{dt}{ds}.$$

D'où:

$$(4.12)\quad \psi'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega'(s)}+\omega'(s)\dfrac{\overline{dt}}{ds}\bigg/\dfrac{dt}{ds}+\bar{t}\omega''(t)\dfrac{\overline{dt}}{ds}}{t-z}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{p'(t)}\dfrac{\overline{dt}}{ds}}{t-z}ds$$

cette relation est la derivée de la relation (3.17).

L'équation intégrale qui fournie la solution du problème prend la forme:

$$(4.13)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\frac{\omega'(s)}{t-t_0}-\frac{\overline{\omega'(s)}}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right)ds+\left\{-\frac{t_0}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega''(t)}}{\bar{t}-\bar{t}_0}\overline{dt}+\int_L\frac{\omega'(s)ds}{\bar{t}-\bar{t}_0}+\int_L\frac{\overline{\omega'(t)}\overline{dt}}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right.$$

$$\left.+\int_L\frac{t\overline{\omega''(t)}\overline{dt}}{\bar{t}-\bar{t}_0}+\frac{1}{2}p'(t_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p'(t)\dfrac{dt}{ds}}{\bar{t}-\bar{t}_0}ds-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m+1}\frac{b_j}{(\bar{t}_0-\bar{z}_j)^2}\right\}\frac{\overline{dt_0}}{ds}\bigg/\frac{dt_0}{ds}=p'(t_0).$$

Cette dernière équation intégrale, après quelques simples manipulations, prend la forme:

$$(4.14)\qquad 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega'(s)}{t-t_0}\,ds\right\} - \frac{e^{-2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}\int_L \frac{\omega'(s)(\bar t-\bar t_0)+\overline{\omega'(s)}\,(t-t_0)}{(\bar t-\bar t_0)^2}\,ds + \frac{e^{-2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}$$

$$\times\sum_{z=1}^{m+1}\frac{b_j}{(\bar t_0-\bar z_0)^2} = p'(t_0)\left(1+\frac{e^{-2i\vartheta(t_0)}}{2}\right) - \frac{e^{-2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}\int_L \frac{p'(s)\,ds}{\bar t-\bar t_0}$$

où:

$$(4.15)\qquad \frac{dt_0}{ds}\bigg/\frac{d\bar t_0}{ds} = -e^{2i\vartheta(t_0)}.$$

$\vartheta(t_0)$ étant l'angle definie par le vecteur normal sur la limite orienté vers l'extérieur du domaine et l'axe des x.

En tenant compte des relations (3.14) et (3.15) nous pouvons écrire aussi l'équation integrale (4.14) comme suit:

$$(4.16)\qquad 2\,\mathrm{Re}\{\varphi'(t_0)\} - \frac{e^{-2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(s)\,(\bar t-\bar t_0)+\overline{\varphi'(s)}\,(t-t_0)}{(\bar t-\bar t_0)^2}\,ds + \frac{e^{-2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m+1}\frac{b_j}{(\bar t-\bar z_j)^2}$$

$$= p'(t_0)\,(1+e^{-2i\vartheta(t_0)}) - \frac{e^{-2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}\int \frac{p'(s)\,ds}{\bar t-\bar t_0}.$$

Si on met:

$$(4.17)\qquad \varphi'(s) = \varphi_1'(s) - i\varphi_2'(s)$$

nous pouvons écrire la relation (4.16) sous la forme:

$$(4.18)\qquad 2\varphi_1'(t_0) + \frac{e^{2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}\int_L \frac{(x-x_0)\varphi_1'(s)-(y-y_0)\varphi_2'(s)}{(t-t_0)^2}\,ds - \frac{e^{+2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m+1}\frac{b_j}{(t_0-z_j)^2}$$

$$= \overline{p'(t_0)}\left(1+\frac{e^{2i\vartheta(t_0)}}{2}\right) + \frac{e^{2i\vartheta(t_0)}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p'(s)}\,ds}{t-t_0}.$$

On constate facilement que l'équation (4.16) est la derivée première par rapport à s de l'équation (3.25). Si on refait une intégration par rapport à s de l'équation (4.16) et en utilisant le même raisonnement avec celui utilisé pour démontrer l'unicité de la formule (3.25), on trouve que la solution de l'équation homogène integrée est:

$$(4.19)\qquad \varphi_0(t) = c_k \quad \text{pour} \quad t\in S_k.$$

Il est donc évident que $\varphi_0'(s)$, c'est à dire la solution de l'équation homogène (4.16), est identiquement nulle. Cela prouve l'unicité de la solution trouvée. Ici il faut noter le grand rôle joué par les intensités $b_j\,(j = 1, 2, \ldots, (m+1))$ dans la démonstration de l'unicité de la solution.

5. Rèmarques

Si on met:

$$X_j + iY_j \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{5.1}$$

l'équation (4.14), ou l'équation (3.24), mais en remplaçant $p'(t)$ par $2f(t)$, résoud aussi le problème d'un milieu fissuré dont chaque bord de la fissure est solicité par la même distribution de contraintes $f'(t)$. Dans ce cas le bord $L_j (j = 1, 2, \ldots, k$ avec $k \leqslant m)$ répresente la ligne non fermée de chacune des k fissures. Donc les termes b_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ ne subsistent plus. Il devient évident que la démonstration de l'unicité se complique. Mais le problème des milieux fissurés, dans le cas général ferra l'objet d'une prochaine publication et nous aurons l'occasion d'en discuter le problème d'unicité de sa solution.

Dans le cas d'un milieu infini, il faut modifier légèrement les formules (2.4) et (2.5) en mettant à la place de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ les valeurs:

$$\varphi(z) = \Gamma z + \varphi_0(z), \tag{5.2}$$

$$\psi(z) = \Gamma' z + \psi_0(z), \tag{5.3}$$

où $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ sont des fonctions holomorphes dans S^+ (les points infinis inclus), Γ et Γ' ayant la signification suivante:

$$\Gamma = B + iC, \tag{5.4}$$

$$\Gamma' = B' + iC = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}, \tag{5.5}$$

$$B = \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \tag{5.6}$$

$$C = \frac{2\mu\omega_\infty}{1+\varkappa}, \tag{5.7}$$

où:

i) N_1, N_2 sont les contraintes principales à l'infini.

ii) α est l'angle de la direction de N_1 et de l'axe Ox.

iii) ω_∞ est la rotation du point à l'infini.

Pour le reste la démonstration suit la même chemin.

6. Conclusions

Dans le présent article nous avons proposé une nouvelle méthode de résolution des problèmes aux limites de l'élasticité plane. Plus particulièrement nous avons appliqué cette méthode pour resoudre le deuxième problème aux limites. Nous avons ainsi reduit le problème à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm pareille à celle fournie par MUSKHELISHVILI [1]. En effet, nous avons fournit deux equations intégrales, mais la deuxième, qui n'est pas deduite par Muskhelishvili, n'est pas entierement indépendante de la première. Toutes les deux, comme nous l'avons demontré, acceptent une solution unique.

Le point essentiel de notre méthode est que nous pouvons étendre son domaine d'application à tous les autres problèmes aux limites et aux milieux fissurés. En plus l'introduction et la definition des termes b_j et c_j ($j = 1, 2, \ldots, (m+1)$), nécessaires, pour la démonstration de l'unicité de la solution, est faite d'une manière naturelle et ces termes conservent une signification physique simple.

Il faut aussi noter le grand avantage du point de vue application numérique que présented les équations (4.14) et (4.18), car toutes les intégrations sont effectuées par rapport à la variable reélle s c.à.d la longueur de l'arc.

Bibliographie

1. N. I. MUSKHELISHVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, P. Nordhoff, Groninger 1965.
2. G. F. MANDJAVIDZE, P. M. M., 15, 279, 1951.
3. A. D. FINE and E. N. NILSON, J. Match. Mech., **16**, 2, 155, 1966.
4. P. S. THEOCARIS and G. TSAMASFYROS, *Letters in applied and engineering sciences*, **3**, 167, 1975.
5. N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular integral equations*, Wolters — Nordhoff.

CHAIRE DE MÉCANIQUE THÉRIQUE ET APPLIQUÉE
ECOLE POLYTECHNIQUE D'ATHÈNES, GREECE.

Received August 7, 1975.