

## Étude des schémas thermomécaniques à mémoire discrète Bases physiques et formalisme du schéma d'hystérésis pure

P. GUELIN (GRENOBLE), W. K. NOWACKI (WARSZAWA), P. PEGON (ISPRA)

ON INDIQUE d'abord les principaux éléments de géométrie différentielle utiles pour formaliser le comportement des continus et en particulier celui de solide élastoplastique isotrope isotherme à hystérésis pure (sans écrouissage): le concept de mémoire discrète apparaît alors comme nécessairement sous-jacent dans les notions de déformations et de contrainte de Cauchy. La forme des schémas d'hystérésis pure est précisée et on illustre leurs propriétés en montrant qu'ils respectent les principes de causalité et de détermination sans pour autant conduire à des systèmes réductibles aux systèmes dynamiques classiques.

Podano elementy geometrii różniczkowej tworzące formalizm naturalny schematu termomechanicznego o pamięci dyskretnej „czystej” histerezy sprężystoplastycznej, bez wzmocnienia izotropowego i izotermicznego. Badanie tensorów odkształcenia i naprężenia Cauchy'ego pozwala na wyodrębnienie pochodzenia klasycznych trudności w zakresie konstytutywnego obiektywnego formułowania histerezy sprężystoplastycznej. Podano możliwość zastosowania schematu w zakresie problemów jednorodnych i problemów propagacji fal.

Приведены элементы дифференциальной геометрии, образующие натуральный формализм термомеханической схемы с дискретной памятью упругопластического „чистого гистерезиса”, изотропного и изотермического, без упрочнения. Исследование тензоров деформации и напряжения Коши позволяет выделить трудности, классического происхождения, в области определяющего объективного формулирования упругопластического гистерезиса. Приведена возможность применения схемы в области однородных задач и задач распространения волн.

### Notations

- $(0, e_\alpha)$  repère absolu orthonormé ( $\alpha = 1, 2, 3$ ),  
 $t$  temps absolu,
- ou  $\partial/\partial t$  dérivation partielle par rapport à  $t$ ,  
 $M$  particule matérielle,
- $OP(M, 0)$  vecteur position de  $M$ , dans  $(0, e_\alpha)$ , à  $t = 0$ ,
- $Op(M, t)$  vecteur position de  $M$ , dans  $(0, e_\alpha)$ , à  $t > 0$ ,
- $Z^\alpha(M, 0)$  composantes de  $OP$  dans  $(0, e_\alpha)$ ,
- $\zeta^\alpha(M, t)$  composantes de  $Op$  dans  $(0, e_\alpha)$ ,
- $V(M, t)$  vecteur vitesse de  $M$ , défini dans  $((0, e_\alpha)$  ( $V^\alpha e_\alpha = \partial z^\alpha / \partial t = \partial Op / \partial t$ ),
- $\gamma(M, t)$  vecteur accélération de  $M$ , défini dans  $(0, e_\alpha)$ :  $\gamma = \sqrt{g} \gamma$ ,  
 $x^i$  coordonnées matérielles entraînés (pour  $M$  donné, les  $x^i$  sont constants),  
 $\partial/\partial x^i$  dérivation partielle par rapport à  $x^i$ ,
- $G_i, g_i$  vecteurs de base initiaux ( $t = 0$ ) et actuel ( $t > 0$ ) du champ des repères entraînés notés  $(M, g_i, g_j)$ ,
- $v^i, v_i$  composantes de  $V$  exprimé dans  $(M, g_i, g_j)$ ,
- $\mathcal{G}$  tenseur métrique,
- $g_{ij}$  composantes covariantes de  $\mathcal{G}$ ,
- $g$  déterminant des  $g_{ij} = g_i \cdot g_j$  (le point note ici le produit scalaire),

- $\nabla_{\mathbf{k}}$  symbole de la dérivation covariante,  
 $\Gamma_{ij}^{\mathbf{k}}$  symbole de Christoffel ( $\partial g_j / \partial x^i = \Gamma_{ij}^{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}$ ),  
 $\nabla_j v^{\mathbf{k}}$  tenseur vitesse de transformation ( $\partial g_j / \partial t = \nabla_j v^{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}$ ),  
 $D$  tenseur vitesse de déformation ( $(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) / 2$ );  $\zeta = D^{\mathbf{k}}_{\mathbf{k}}$ ,  
 $R$  tenseur vitesse de rotation ( $(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) / 2$ ),  
 $\mathcal{L}_v^{\bullet}, \mathcal{L}_{v^{\bullet}}, \mathcal{L}_v^{\circ}, \mathcal{L}_{v^{\circ}}$  symboles de dérivation de Lie dans la direction  $\mathbf{V}$ ,  
 $J_v$  symbole de dérivation de Zaremba — Jaumann,  
 $\mathbf{v}$  vecteur normal (relatif de poids  $-1$ ),  
 $\mathbf{N}$  vecteur normal (absolu) unitaire associé à  $\mathbf{v}$  ( $N_i \sqrt{h} = v_i \sqrt{g}$ ),  
 $\varepsilon$  alternateur de poids  $\pm 1$ ,  
 $\theta$  tenseur absolu de Cauchy,  
 $\sigma$  tenseur relatif de Cauchy de poids 1 associé à  $\theta$  ( $\sigma^{\mathbf{k}i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mathbf{k}j\ell} \theta_{ij}{}^{\ell}$ ),  
 $\overset{i}{\mathcal{R}}$  tenseur de Cauchy transporté de  $t_{\mathbf{R}}$  à  $t$ ,  
 $\Delta_{\mathbf{R}}^i \varepsilon$  tenseur d'Almansi-Euler des variations de  $\mathcal{E}$  sur  $[t_{\mathbf{R}}, t]$ ,  
 $\overset{i}{\mathbf{R}} \sigma$  tenseur de contrainte de Cauchy transporté de  $t_{\mathbf{R}}$  à  $t$ ,  
 $\Delta_{\mathbf{R}}^i \sigma$  tenseur fondamental des variations de  $\sigma$  sur  $[t_{\mathbf{R}}, t]$ ,  
 $\rho$  masse spécifique ( $\mathcal{E} = \rho \sqrt{g} = \text{cste}$ ),  
 $\mathcal{P}_{\text{int}}, P_{\text{int}}, p_{\text{int}}$  puissances des efforts intérieurs par unité d'étendue, de volume, de masse:  
 $P = \mathcal{P} / \sqrt{g}$ ;  $p = \mathcal{P} / \rho \sqrt{g} = P / \rho$ ,  
 $II, P_{\text{rev}}, p_{\text{rev}}$  puissance reversible,  
 $\phi$  dissipation intrinsèque ( $-\mathcal{P}_{\text{int}} - \pi$ ),  
 $\mathcal{E}, E, e$  énergie interne ( $\mathcal{E} = E \sqrt{g} = \rho e \sqrt{g}$ ; poids de  $\mathcal{E} = 1$ ),  
 $\mathcal{Q}, Q, q$  chaleur (flux:  $\mathbf{I} = \sqrt{g} \mathbf{J}$ ),  
 $\mathcal{X}, K, k$  énergie cinétique,  
 $\lambda, \mu$  scalaires relatifs associés aux paramètres de Lamé  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  par  $\lambda = \tilde{\lambda} \sqrt{g}$ ;  $\mu = \tilde{\mu} \sqrt{g}$ ,  
 $S_0$  scalaire relatif associé à une limite en cisaillement  $\tilde{S}_0$  par  $S_0 = \tilde{S}_0 \sqrt{g}$ ,  
 $\delta, \mathbf{1}$  symbole de Kronecker, tenseur unité,  
 $\stackrel{\text{def}}{=}$  égalité de définition,  
 $\stackrel{\text{ymb}}{=}$  égalité symbolique (correspondance),  
 $v$  élément du corps qui occupe la fermeture  $\mathcal{C} \cup \partial \mathcal{C}$  de  $E_3$ ,

## Remarques introductives

DURANT les trois dernières décades le développement des techniques de mesures macroscopiques et microscopiques a permis l'accumulation d'un ensemble impressionnant de résultats expérimentaux suggérant que le phénomène d'hystérésis est tout aussi universel que le phénomène de propagation d'ondes et que les phénomènes d'irréversibilité classiques du type de diffusion et de viscosité.

Par ailleurs les capacités unificatrices de la Thermodynamique des Processus Irreversibles, les réussites des schémas à formalismes dynamique ou hamiltonien, les succès des méthodes de l'analyse limite et ceux des schémas de plasticité parfaite laissent encore intactes les problèmes essentiels de la thermomécanique de l'hystérésis.

Il est donc devenu raisonnable d'envisager de définir des lignes de recherche clairement marquées par la volonté d'étudier le statut du concept de mémoire discrète, concept qui semble devoir être essentiel dès lors que les graphes d'hystérésis se caractérisent

non seulement par des propriétés de restauration et de symétrie mais aussi par des discontinuités.

Une ligne de recherche de ce genre peut, par exemple, être précisée en imposant les contraintes suivantes aux schémas proposés:

- 1) compatibilité avec l'ensemble des phénomènes d'hystérésis,
- 2) prise en compte des situations où le rôle de la mémoire discrète est manifeste,
- 3) traitement thermomécanique et non simplement mécanique,
- 4) usage possible mais non nécessaire de la notion de réversibilité,
- 5) possibilité d'extension au cas à température variable, au cas anisotrope et aux cas des divers écrouissages.

En mécanique des continus à comportement solide l'esprit de ce programme très contraignant peut être respecté en prenant comme point de départ heuristique de la réflexion la situation physique simple représentée par des modèles symboliques simples constitués de ressorts et de frotteurs.

Ces modèles suggèrent en effet une thermomécanique caractérisée par une expression très particulière de la puissance réversible  $\Pi$  et de la dissipation intrinsèque  $\Phi$  associée à  $\Pi$  par les relations classiques:

$$-\mathcal{P}_{int} = \Pi + \Phi, \quad \mathcal{P}_{ext} = \dot{\mathcal{X}} + \Pi + \Phi \quad (\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}),$$

où  $\mathcal{P}_{ext}$  désigne la puissance des efforts extérieurs. Plus précisément,  $\Pi$  apparaît comme le produit de la vitesse de déformation  $D$  par une contrainte de référence  ${}^R\sigma$  qui est une fonctionnelle constante par morceaux <sup>(1)</sup>. Dans le système de coordonnées  $x^i (i = 1, 2, 3)$  matérielles entraînés par le corps on a:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad \frac{\partial}{\partial t} ds^2 = D_{ij} dx^i dx^j$$

et

$$\Pi = {}^R\sigma_j^i \mathcal{D}_i^j, \quad \Phi = (\sigma_j^i - {}^R\sigma_j^i) \mathcal{D}_i^j.$$

Du fait de la présence de la fonctionnelle  ${}^R\sigma$  ces expressions marquent une rupture radicale avec la thermodynamique classique dont est exclu le concept de mémoire discrète. D'autre part, l'équation essentielle est une relation semblable à celle de Gibbs, valant pour l'irréversibilité d'hystérésis, de forme à mémoire discrète d'affixes privilégiés de l'évolution:

$$\partial \mathcal{E} / \partial t \stackrel{det}{=} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \Pi; \quad \mathcal{L}_v {}^R\sigma \stackrel{symb}{=} 0 \quad (\phi = \mathcal{F} + (-\dot{\mathcal{Q}})),$$

où  $\mathcal{F}$  note la part du taux  $\phi$  dissipée sous forme non calorifique. Bien entendu, cette relation implique la définition d'un critère de création et d'un algorithme de gestion de ces affixes. Il est moins intuitif de distinguer immédiatement qu'elle implique aussi l'existence d'un unique état initial non restrictif qui est thermomécaniquement neutre et restaurable par un processus de cyclage d'un type bien défini.

Ce travail, qui prolonge [1, 2], montre les modalités d'expression et le rôle essentiel du concept de mémoire discrète à travers les éléments du formalisme de la géométrie diffé-

<sup>(1)</sup> au sens de  $\mathcal{L}_v {}^R\sigma = 0$  si  $\mathcal{L}_v$  note une dérivation de Lie-Ślebodziński-van Dantzig-Schouten-van Kampen dans la direction de la vitesse (cf. [3] et [6]).

rentielle (cf. [4] à [7] utile en mécanique du continu. On renonce donc à rendre l'exposé autonome (cf. [8] à [20] pour une introduction à la thermomécanique et aux aspects numériques et expérimentaux associés) et on concentre l'attention sur les points suivants: liens entre le concept de mémoire discrète et le processus de *comparaison* par bi-tenseur non localisés (au sens de B. S. de Witt); application aux tenseurs de déformation et de contrainte (§ 2); introduction à l'étude des schémas thermomécanique simples d'hystérésis pure (§ 3); illustration en problèmes homogènes sur le thème de la causalité.

## 1. Processus de transport convectif, mémoire discrète et taux objectif

### 1.1. Définition de la position et de la vitesse du point matériel

L'espace Euclidien usuel  $E_3$  est rapporté à un repère fixe orthonormé  $(0, \mathbf{e}_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Le corps occupe un domaine de  $E_3$  formé par le sous-ensemble ouvert  $\mathcal{C}$  et sa frontière  $\partial\mathcal{C}$  assez régulière pour permettre l'application du théorème de la divergence (cf. [21]) à la fermeture  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \partial\mathcal{C}$ .

Le repère  $(0, \mathbf{e}_\alpha)$  est à la fois le seul repère fixe et le seul repère orthonormé nécessaire pour la suite de l'analyse. C'est dans ce repère que le principe fondamental de la dynamique est défini.

La vitesse du point matériel  $M$  est définie dans  $(0, \mathbf{e}_\alpha)$  par:

$$(1.1) \quad \mathbf{V}(M, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{Op}(M, t)}{\partial t} = \frac{\partial \zeta^\alpha(M, t)}{\partial t} \mathbf{e}_\alpha.$$

### 1.2. Définition du champ des repères convectés et expression de la vitesse dans ces repères

Si  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) note un système de coordonnées entrainées par le corps, la configuration initiale est définie par le choix des trois fonctions  $Z^\alpha(x^K)$  et:

$$(1.2) \quad \mathbf{g}_i(M(x^K), t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i} \mathbf{Op}(M(x^K), t), \quad \mathbf{V} = v^i \mathbf{g}_i.$$

Le trajet de  $M$  dans  $(0, \mathbf{e}_\alpha)$  durant  $dt$  est

$$d\mathbf{Op}|_{M \text{ cst}} = d\zeta^\alpha|_{M \text{ cst}} \mathbf{e}_\alpha = dt v^i \mathbf{g}_i = dt V^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{V} dt.$$

### 1.3. Continuité du processus de convection des repères $(M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$ au voisinage d'un instant mémorable d'un continu à hystérésis

i) On considère un continu dont le comportement présente le phénomène d'*hystérésis*. En un sens physique et selon un critère définis (cf. [11]) la sollicitation d'un point matériel  $M$  peut *s'inverser*. L'apparition, à l'instant noté  $t_R$ , d'un tel processus d'inversion est un événement mémorable de l'évolution car divers champs physiquement significatifs subissent alors des *discontinuités*. Compte tenu du rôle que joue le champ de repères convectés il est essentiel de préciser le comportement des vecteurs de base  $\mathbf{g}_i$  au voisinage des instants mémorables  $t_R$ .

ii) Suivant (1.2) on pose:

$$\mathbf{Op}_R \stackrel{\text{def}}{=} \zeta^\alpha(M(x^K), t_R) \mathbf{e}_\alpha = \zeta_R^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad R\mathbf{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbf{Op}_R / \partial x^i.$$

iii) L'hypothèse de continuité s'énonce: pour un continu à hystérésis, les  $\mathbf{g}_i$  sont continus au voisinage d'un instant d'inversion  $t_R$ .

On note:

$$(1.3) \quad R_+ \mathbf{g}_i = R\mathbf{g}_i(M(x^K), t_{R+}) = R\mathbf{g}_i(M(x^K), t_{R-}) = R_- \mathbf{g}_i.$$

La condition (1.3) n'est mise en jeu que si  $t_R$  existe et au voisinage de  $t_R$  seulement. Elle n'est donc pas équivalente à une hypothèse d'inexistence d'onde de choc. Cependant cette condition pourrait éventuellement restreindre le domaine d'application de l'analyse ultérieure si des résultats expérimentaux démontraient l'universalité de certains phénomènes d'onde de choc dans les continus à hystérésis.

Faute de théories plus raffinées, l'usage de (1.3) peut être adopté provisoirement et dans un esprit de simplification méthodique. Une telle démarche a déjà été adoptée lorsque l'on a supposé la régularité suffisante de la frontière  $\partial \mathcal{C}$  du corps.

**1.4. Le tenseur fondamental et la longueur de l'élément naturel**

Le tenseur fondamental est:

$$(1.4) \quad \mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \delta^i_j \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \\ = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \delta^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = Rg_{ij} R\mathbf{g}^i \otimes R\mathbf{g}^j = Rg^{ij} R\mathbf{g}_i \otimes R\mathbf{g}_j = \delta^i_j R\mathbf{g}_i \otimes R\mathbf{g}^j.$$

La longueur  $ds$  de l'élément matériel infinitésimal est:

$$ds^2(M, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \zeta^K}{\partial x^i} \frac{\partial \zeta^K}{\partial x^j} dx^i dx^j = g_{ij}(M, t) dx^i dx^j.$$

**1.5. Transport convectif et mémorisation discrète de la jauge  $ds(M, t_R)$**

On sait que la notion de déformation entre 2 instants  $t_1$  et  $t_2$  peut être introduite à partir de la *comparaison* du  $ds^2(M, t_2)$  précédent et du  $ds^2(M, t_1)$  associé. Il n'est semble-t-il jamais souligné que cette *comparaison* entre 2 états à  $t_1$  et  $t_2 > t_1$ , selon:

$$ds(2)^2 - ds(1)^2 = (g_{ij}(t_2) - g_{ij}(t_1)) dx^i dx^j = 2\Delta_1^2 \varepsilon_{ij} dx^i dx^j$$

est basée sur l'invariance par transport:

$$(1.5) \quad \mathcal{L}_v ds(x^k, t_1)^2 = 0$$

du champ de jauge  $ds(M, t_1)$ . Cette invariance (1.5) implique la non-séparabilité temporelle et n'implique pas d'actions à distance instantanées: la notion de déformation est donc fondée sur une condition (1.5) d'existence de mémoire discrète d'un champ de jauge.

**1.6. Dérivation extrinsèque et intrinsèque à temps ou à point matériel fixé.**

Les variations extrinsèques incluent celles dues aux vecteurs de base et les variations intrinsèques excluent les variations dues aux bases.

i) Pour un tenseur relatif  $\mathcal{A}$  de type  $(r, s)$  et de poids  $w$ , on a :

$$\begin{aligned}
 D_x \mathcal{A} &= dx^K \nabla_K \mathcal{A}, \\
 (1.6)_1 \quad \mathbf{g}^K \nabla_K \mathcal{A} &= \nabla_K \mathcal{A}^{i_1 \dots j_1 \dots} \mathbf{g}^K \otimes \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{j_s}, \\
 D_x \mathcal{A}^{i_1 \dots j_1 \dots} |_{t=\text{est}} &\stackrel{\text{def}}{=} dx^K \nabla_K \mathcal{A}^{i_1 \dots j_1 \dots} \stackrel{\text{def}}{=} dx^K \frac{\partial \mathcal{A}^{i_1 \dots}}{\partial x^K} |_{j_1 \dots} \\
 &\quad + \sum_{\alpha=1}^r dx^K \Gamma_{mK}^{i_\alpha} \mathcal{A}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} m \dots i_r j_1 \dots j_s} - \sum_{\beta=1}^s dx^K \Gamma_{j\beta K}^m \mathcal{A}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{\beta-1} m \dots j_s} \\
 &\quad - w dx^K \Gamma_{Km}^m \mathcal{A}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}.
 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 (1.6)_2 \quad \mathbf{g}^K \nabla_K (\mathcal{A}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{j_s}) \\
 = \mathbf{g}^K \left[ \frac{\partial \mathcal{A}^{i_1 \dots j_1 \dots}}{\partial x^K} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{j_s} \right. \\
 + \sum \mathcal{A}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^K} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{j_s} \\
 + \sum \mathcal{A}^{i_1 \dots j_1 \dots m \dots j_s} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial \mathbf{g}^m}{\partial x^K} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{j_s} \\
 \left. - w \mathcal{A}^{i_1 \dots j_1 \dots} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{g}^{j_s} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^K} \right]
 \end{aligned}$$

L'expression des composantes  $D_x \mathcal{A}^{i_1 \dots j_1 \dots}$  est bien de la forme :

$$(1.6)_3 \quad \mathbf{g}^K \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^K} \Big|_{\text{extr}} = \mathbf{g}^K \left[ \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial x^K} \Big|_{\text{intr}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \mathcal{A}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^K} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \right].$$

ii) On sait que, malgré de profondes différences mathématiques, la forme précédente se „conserve” dans la dérivation à  $M$  fixé, en ce sens que :

$$(1.6)_4 \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\text{extr}} = \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial t} \Big|_{\text{intr}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \mathcal{A}^{ij} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j).$$

Soit une variété différentiable  $V_3$  rapportée au système de coordonnées  $\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3$  et munie du champ de vecteurs de composantes  $\bar{U}^i$  ( $\bar{y}^k$ ). Les quantités

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} |_{\text{intr}} &= \mathcal{L}_{\bar{U}} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = \bar{U}^K \frac{\partial \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots}}{\partial \bar{y}^K} - \left[ \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial \bar{U}^{i_\alpha}}{\partial \bar{y}^m} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} m \dots i_r j_1 \dots j_s} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \bar{U}^m}{\partial \bar{y}^{j\beta}} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{\beta-1} m \dots j_s} - w \frac{\partial \bar{U}^m}{\partial \bar{y}^m} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \right] = \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} |_{\text{extr}} - [\dots]
 \end{aligned}$$

sont les composantes d'un tenseur. Ce résultat est évident si la variété  $V_3$  est munie d'une connexion. Si  $S$  et  $K$  notent respectivement la torsion et la courbure, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} &= \bar{U}^K \bar{\nabla}_K \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} - \sum_{\alpha=1}^r (\bar{\nabla}_m \bar{U}^\alpha - \bar{U}^K \bar{S}_{Km}^\alpha) \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots m \dots i_r j_1 \dots j_s} \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^s (\bar{\nabla}_{j\beta} \bar{U}^m - \bar{U}^K \bar{S}_{Kj\beta}^m) \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots m \dots j_s} + w \bar{\nabla}_m \bar{U}^m \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} \end{aligned}$$

et l'on note que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{U}^i &= 0, \\ \mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{\Gamma}_{ij}^K &= \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_i \bar{U}^K + \bar{\nabla}_r (\bar{U}^r \bar{S}_{ij}^K) + \bar{U}^r \bar{K}_{ijr}^K \end{aligned}$$

et que  $\mathcal{L}_U$  est un opérateur de dérivation puisque:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_U(A+B) &= \mathcal{L}_U A + \mathcal{L}_U B, \\ \mathcal{L}_U(AB) &= (\mathcal{L}_U A)B + A(\mathcal{L}_U B). \end{aligned}$$

De plus, si la connexion est symétrique, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{v}} \sqrt{\bar{g}} &= \bar{\nabla}_m \bar{U}^m \sqrt{\bar{g}}, \\ \mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{g}_{ij} &= \bar{\nabla}_j \bar{U}_i + \bar{\nabla}_i \bar{U}_j, \quad \mathcal{L}_{\bar{v}} ds^2 = \mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{g}_{ij} d\bar{y}^i d\bar{y}^j, \\ \mathcal{L}_{\bar{v}} \delta^i_j &\equiv 0 \\ \mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{g}^{ij} &= -(\bar{\nabla}^j \bar{U}^i + \bar{\nabla}^i \bar{U}^j). \end{aligned}$$

On remarque à nouveau que l'on obtient 3 tenseurs différents en prenant la dérivée de chacune des représentations de  $\bar{\mathcal{G}}$ . On note aussi que l'on obtient un tenseur en prenant la dérivée des  $\bar{\Gamma}$  qui ne sont pas des composantes de tenseurs. Si  $K$  et  $S$  sont nuls on a

$$\mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{\Gamma}_{ij}^K = \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_i \bar{U}^K.$$

Enfin:

$$\begin{aligned} \bar{U}^K \bar{\nabla}_K \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} &= \mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} + \sum_1^r \bar{\nabla}_m \bar{U}^{ij} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots m \dots i_r j_1 \dots j_r} \\ &\quad - \sum_1^s \bar{\nabla}_{j\beta} \bar{U}^m \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots m \dots j_s} - w \bar{\nabla}_m \bar{U}^m \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots}. \end{aligned}$$

On constate que ce formalisme est comparable à celui de (1.6)<sub>4</sub>. On sait cependant que l'analogie formelle avec (1.6)<sub>3</sub> dissimule des différences de nature fondamentale.

iii) Si l'on se place dans  $E_4$  produit de  $E_3(\bar{y}^k)$  et de  $E_1(t)$  et que l'on remplace  $\bar{U}$  par  $\bar{U}1$  de composantes  $(\bar{U}^1, \bar{U}^2, \bar{U}^3, 1)$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots}|_{\text{extr}} &= \bar{U}1^K \bar{\nabla}_K \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} = \bar{U}^K \bar{\nabla}_K \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} \\ &= \left[ \mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} \right] + \left[ \sum_1^r \bar{\nabla}_m \bar{U}^\alpha \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots m \dots j_1 \dots} \right. \\ &\quad \left. - \sum_1^s \bar{\nabla}_{j\beta} \bar{U}^m \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots m \dots j_s} - w \bar{\nabla}_m \bar{U}^m \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots} \right] \\ &= [\mathcal{L}_{\bar{v}1} \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots}] + [\dots] = \bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots j_1 \dots}|_{\text{intr}} + [\dots]. \end{aligned}$$

iv) Ce résultat permet de distinguer l'origine de l'opérateur de dérivation „convectée” parfois utilisé en mécanique des continus et souvent appelé dérivée de Oldroyd (1950). En remplaçant  $\overline{U\mathbb{I}}$  par  $\overline{V\mathbb{I}}$  on a en effet:

$$\mathcal{L}_{\overline{V\mathbb{I}}} \overline{\mathcal{A}}^{i\dots j\dots} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathcal{A}}^{i\dots j\dots} + \overline{v}^K \overline{\nabla}_K \overline{\mathcal{A}}^{i\dots j\dots} \right] - \left[ \sum_{\alpha=1}^r \overline{\nabla}_m \overline{v}^{i\alpha} \overline{\mathcal{A}}^{i\dots m\dots j\dots} - \sum_{\beta=1}^s \overline{\nabla}_{j\beta} \overline{v}^m \overline{\mathcal{A}}^{i\dots j\dots m\dots} - w \overline{\nabla}_m \overline{v}^m \overline{\mathcal{A}}^{i\dots j\dots} \right]$$

où le produit contracté  $\overline{V\mathbb{I}} \cdot \overline{\nabla} \overline{\mathcal{A}}$  est souvent appelé dérivée matérielle. Il est en général sous entendu que cette dérivation est eulérienne et associée aux coordonnées  $\overline{y}^k$ . On distingue le rôle de la vitesse de déformation et de la vitesse de rotation en écrivant:

$$\mathcal{L}_{V\mathbb{I}} \mathcal{A}^{i\dots j\dots} = \mathcal{A}^{i\dots j\dots}|_{\text{extr}} - \left[ \sum_1^r \overline{D}_m^{i\alpha} \overline{\mathcal{A}}^{i\dots m\dots j\dots} - \sum_1^s \overline{D}_{j\beta}^m \overline{\mathcal{A}}^{i\dots j\dots m\dots} - w \overline{D}_K^K \overline{\mathcal{A}}^{i\dots j\dots} + \sum_1^r \overline{R}_m^{i\alpha} \overline{\mathcal{A}}^{i\dots m\dots j\dots} - \sum_1^s \overline{R}_{j\beta}^m \overline{\mathcal{A}}^{i\dots j\dots m\dots} \right].$$

v) Il est enfin utile de considérer le cas où les  $\overline{y}^k$  sont remplacés par les  $x^k$ . Le générateur infinitésimal  $V\mathbb{I}$  a pour composantes 0, 0, 0, 1 et:

$$\mathcal{L}_{V\mathbb{I}} \stackrel{\text{symb}}{=} \frac{\partial}{\partial t}.$$

On notera:

$$(1.7) \quad \mathcal{L}_{\overline{V}} \dots \mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}^{i\dots j\dots} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \mathbf{g}^{j_s}.$$

Cette écriture correspond bien à la définition de la dérivée de Lie comprise comme résultat d'un passage à la limite lors du transport infinitésimal dans la direction du générateur infinitésimal.

La dérivation (1.7) est l'unique dérivation objective fondamentale.

Un champ à dérivée de Lie nulle est un champ de jauge invariante par transport: la mémoire de ce champ est parfaite et n'implique pas *a priori* d'effets à distance instantanés.

On obtient l'analogue de (1.6)<sub>2</sub> sous la forme:

$$(1.8) \quad \mathcal{A}|_{\text{extr}} = \mathcal{A}|_{\text{intr}} + \mathcal{A}^{i\dots j\dots} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^{j_1} \dots \mathbf{g}^{j_s}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}^{i_1\dots i_r j_1\dots j_s} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \mathbf{g}^{j_s} + \sum_{\alpha=1}^r \mathcal{A}^{i_1\dots i_{\alpha-1} m\dots i_r j_1\dots j_s} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial t} \dots \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \mathbf{g}^{j_s}$$



$$\begin{aligned}
 & - \sum_1^s \mathcal{A}^{i\dots i_r j_1\dots m\dots j_s} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \frac{\partial \mathbf{g}^m}{\partial t} \dots \mathbf{g}^{j_s} \\
 & - w \mathcal{A}^{i\dots i_r j_1\dots j_s} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \dots \mathbf{g}_{i_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \dots \mathbf{g}^{j_s} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

vi) Soit par exemple:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathcal{A}^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \mathcal{A}_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j = \mathcal{A}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j.$$

On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A} &= \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial t} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad \text{dans } (M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j), \\
 \mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A} &= \frac{\partial \mathcal{A}^i_j}{\partial t} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad \text{dans } (M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j), \\
 \mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A} &= \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{A}_i^j}{\partial t} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \quad \text{dans } (M, \mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j), \\
 \mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A} &= \frac{\partial \mathcal{A}_{ij}}{\partial t} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad \text{dans } (M, \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j).
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right|_{\text{extr}} &= \mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A} + (\nabla_K v^i A^{Kj} + A^{iK} \nabla_K v^j) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j - w \mathcal{A} D_K^K \\
 &= \mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A} + (\nabla_K v^i A^{Kj} - A^i_K \nabla_j v^K) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j - w \mathcal{A} D_K^K \\
 &= \mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A} + (-\nabla_i v^K A_{Kj} + A_i^K \nabla_K v^j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j - w \mathcal{A} D_K^K \\
 &= \mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A} + (-\nabla_i v^K A_{Kj} - A_{iK} \nabla_j v^K) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j - w \mathcal{A} D_K^K.
 \end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées  $\bar{y}^k$  on a

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{A}}^{ij}}{\partial t} + \bar{v}^K \bar{\nabla}_K \bar{\mathcal{A}}^{ij} = \mathcal{L}_{\dot{v}} \bar{\mathcal{A}}^{ij} + (\bar{\nabla}_K \bar{v}^i \bar{A}^{Kj} + \bar{A}^{iK} \bar{\nabla}_K \bar{v}^j) - w \bar{\mathcal{A}} D_K^K$$

et les autres relations analogues. Il est également intéressant d'écrire

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{A}}^{ij}}{\partial t} + \bar{v}^K \bar{\nabla}_K \bar{\mathcal{A}}^{ij} = J_{\bar{v}} \bar{\mathcal{A}}^{ij} + (R_K^i \bar{\mathcal{A}}^{Kj} + \bar{\mathcal{A}}^{iK} R_K^j)$$

où

$$J_{\bar{v}} \bar{\mathcal{A}}^{ij} = \mathcal{L}_{\dot{v}} \bar{\mathcal{A}}^{ij} + \bar{D}_K^i \bar{\mathcal{A}}^{Kj} + \bar{\mathcal{A}}^{iK} D_K^j - w \bar{\mathcal{A}}^{ij} D_K^K$$

note la dérivée de Zaremba-Jaumann (généralisée par TRUESDELL et TOUPIN — 1960). Si les coordonnées  $\bar{y}^k$  sont les coordonnées  $\zeta^\alpha$  on obtient d'abord (2):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{\alpha\beta} &= (\mathcal{L}_{\dot{v}} \mathcal{A}_{\alpha\beta} + D_{K\alpha} \mathcal{A}_{K\beta} + \mathcal{A}_{\alpha K} D_{K\beta} - w \mathcal{A}_{\alpha\beta} D_{KK}) + R_{K\alpha} \mathcal{A}_{K\beta} + \mathcal{A}_{\alpha K} R_{K\beta} \\
 &= J_{\bar{v}} \mathcal{A} + (-R_{\alpha K} \mathcal{A}_{K\beta} + \mathcal{A}_{\alpha K} R_{K\beta}),
 \end{aligned}$$

(2) Le concept d'objectivité étant essentiel au niveau des définitions, il est particulièrement ambigu d'utiliser le même mot pour désigner des termes qui apparaissent lors de simples expressions de (1.7) dans d'autres repères que les repères propres  $(M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j)$  (cf. [22] et [23]).

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}}_{\alpha\beta} &= (\mathcal{L}_{v..} \mathcal{A}_{\alpha\beta} - D_{\alpha K} \mathcal{A}_{K\beta} - \mathcal{A}_{\alpha K} D_{\beta K} - w \mathcal{A}_{\alpha\beta} D_{KK}) - R_{\alpha K} \mathcal{A}_{K\beta} - \mathcal{A}_{\alpha K} R_{\beta K} \\ &= J_v \mathcal{A} + (-R_{\alpha K} \mathcal{A}_{K\beta} + \mathcal{A}_{\alpha K} R_{\beta K}) \end{aligned}$$

et

$$J_w \mathcal{A} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{v..} \mathcal{A} + \mathcal{L}_{v..} \mathcal{A}) - w \mathcal{A} D_{KK},$$

$$J_v \mathcal{G} = \frac{1}{2} (-2D + 2D) = 0.$$

On obtient ensuite (cas mixtes):

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}}_{\alpha\beta} &= (\mathcal{L}_{v..} \mathcal{A}_{\alpha\beta} + D_{K\alpha} \mathcal{A}_{K\beta} - \mathcal{A}_{\alpha K} D_{\beta K} - w \mathcal{A}_{\alpha\beta} D_{KK}) + R_{K\alpha} \mathcal{A}_{K\beta} - \mathcal{A}_{\alpha K} R_{\beta K} \\ &= J_v \mathcal{A} + (-R_{\alpha K} \mathcal{A}_{K\beta} + \mathcal{A}_{\alpha K} R_{\beta K}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}}_{\alpha\beta} &= (\mathcal{L}_{v..} \mathcal{A} - D_{\alpha K} \mathcal{A}_{K\beta} + \mathcal{A}_{\alpha K} D_{K\beta} - w \mathcal{A}_{\alpha\beta} D_{KK}) + (-R_{\alpha K} \mathcal{A}_{K\beta} + \mathcal{A}_{\alpha K} R_{\beta K}) \\ &= J_v \mathcal{A} + (-R_{\alpha K} \mathcal{A}_{K\beta} + \mathcal{A}_{\alpha K} R_{\beta K}), \end{aligned}$$

et

$$J_v \mathcal{A} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{v..} \mathcal{A} + \mathcal{L}_{v..} \mathcal{A}) - w \mathcal{A} D_{KK},$$

$$J_v \mathcal{G} = \frac{1}{2} (0+0) = 0.$$

## 2. Le concept de mémoire discrète est sous-jacent dans les notions de déformation et de contrainte

### 2.1. Le tenseur de déformation et le concept de mémoire discrète

i) A l'aide de (1.4) on obtient:

$$\mathcal{G}(t_1) = g_{ij}(x^K, t_1) g^i(x^K, t_1) \otimes g^j(x^K, t_1)$$

au temps  $t_1$  et

$$\mathcal{G}(t_2) = g_{ij}(x^K, t_2) g^i(x^K, t_2) \otimes g^j(x^K, t_2)$$

au temps  $t_2 > t_1$ .

ii) Le tenseur de Cauchy, transporté de  $t_1$  à  $t_2$ , est

$$(2.1) \quad {}_1^2 \mathcal{G} = g_{ij}(x^K, t_1) g^i(x^K, t_2) \otimes g^j(x^K, t_2).$$

Le tenseur de déformation est

$$\Delta_1^2 \varepsilon(x^K) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\mathcal{G}(2) - {}_1^2 \mathcal{G})$$

et, par conséquent

$$(2.2) \quad \Delta_1^2 \varepsilon(x^K) = \frac{1}{2} (g_{ij}(x^K, t_2) - g_{ij}(x^K, t_1)) g^i(x^K, t_2) \otimes g^j(x^K, t_2)$$

On obtient

$$(2.3) \quad ds(2)^2 - ds(1)^2 = 2\Delta_1^2 \varepsilon_{ij} dx^i dx^j$$

et le premier observable fondamental est

$$(2.4) \quad \Delta_1^2 a = \frac{ds(2)}{ds(1)} - 1.$$

La relation (2.3) permet d'effectuer au temps  $t_2$  la comparaison des longueurs  $ds(1)$  et  $ds(2)$  d'un arc materiel élémentaire aux temps  $t_1$  et  $t_2$ . Ce processus de *comparaison* implique une invariance entre  $t_1$  et  $t_2$ . Au temps  $t_2$  l'état à  $t_1$  n'existe plus au sens usuel: accorder un sens physique à (2.2) et (2.3) revient à supposer qu'il subsiste significativement au temps  $t_2$  une information (ici  ${}^2_1\mathcal{G}$ ) relative à l'instant  $t_1$ . En d'autres termes, à  $t > t_1$ , l'état à  $t_1$  qui n'existe plus au sens usuel (associé à  $\mathcal{G}(t_1)$ ) existe encore sous la forme d'une mémorisation de l'information discrète  ${}^1_1\mathcal{G}$  transportée intacte, car on a

$$(2.5) \quad \mathcal{L}_{v..,1}\mathcal{G} = 0; \quad \mathcal{L}_{v..,R}\mathcal{G} = 0, \quad \mathcal{L}_v ds(t_R)^2 = 0$$

expression de l'invariance qui permet la comparaison recherchée (à l'aide de  $\Delta_1^t \varepsilon$ ). Ainsi (2.5) est une condition d'existence de mémoire discrète.

De plus, l'état au temps  $t$  existe non seulement au sens usuel (associé à  $\mathcal{G}(t)$ ) mais aussi sous la forme d'une mémorisation de l'information discrète  ${}^1_1\mathcal{G}$ , champ de jauge transporté intacte de  $t_1$  à  $t$ .

On note que l'interprétation du rapport usuel

$$\Delta_0^t \varepsilon = \frac{1(t) - 1(0)}{1(0)}$$

exige la mémorisation de  $1(0)$  entre les instants 0 et  $t$ .

Finalement la notion de déformation implique l'hypothèse selon laquelle la matière est support de mémoire car si tel n'était pas le cas l'enregistrement de  $1(0)$  (ou de  $\mathcal{G}(t_1)$ ) serait vide de sens physique à  $t > t_1$  et le tenseur transporté  ${}^1_1\mathcal{G}$  serait également dénué de sens physique. Bien entendu, parler de déformation „actuelle” et la noter  $\varepsilon(t)$  est au sens strict mécaniquement absurde et à tout le moins une source de contresens physiques.

Le tenseur de Cauchy  ${}^R_1\mathcal{G}$  permet d'introduire à la fois le concept de propagation et le concept de mémoire discrète, marquant ainsi les liens étroits et la séparation radicale de la mécanique classique et de la mécanique des continus.

iii) Une étude plus complète du tenseur  $\Delta_1^t \varepsilon$  peut inclure l'étude des conditions de transport des directions principales

## 2.2. Le tenseur de contrainte et le concept de mémoire discrète

Le phénomène d'irréversibilité par hystérésis est un phénomène physique très général (processus de filtration, thermomécanique des solides, électromagnétisme, optique "non linéaire"). Dans la mesure où ce phénomène d'hystérésis implique généralement de façon nette la restauration périodique des propriétés physiques, un processus de comparaison est nécessaire pour définir un schéma constitutif. En conséquence, une invariance doit être définie pour décrire l'évolution le long de chaque branche de cycle fermé.

Pour satisfaire cette condition il suffit d'introduire à nouveau le concept de mémoire discrète en ce qui concerne le tenseur de Cauchy de contrainte comme cela a déjà été fait à propos du tenseur de Cauchy de déformation. Le concept de mémoire discrète

s'exprime alors comme un transport de  $\sigma(t_R)$  jusqu'à l'instant actuel. Nous allons préciser la formulation de ce processus.

En ce qui concerne  $\mathcal{G}$  on a vu que la définition *covariante* du transport est naturelle (cf. (2.5)).

S'agissant de  $\sigma$ , la définition naturelle d'une condition constitutive d'existence de mémoire discrète relève d'un choix entre les 4 possibilités associées à  $\mathcal{L}_{v..}$ ,  $\mathcal{L}_{v..}^*$ ,  $\mathcal{L}_{v..}^*$ ,  $\mathcal{L}_{v..}^*$  et déjà notées par (1.9).

Si l'on utilise la méthode de VAN DANTZIG [3] il subsiste un problème de choix basé sur:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{v..}^* \dot{\sigma} &= 0 & \text{pour} & \quad \dot{\sigma}(x^K, t) = \sigma_{,j}^i(x^K, t_R) \mathbf{g}_i(x^K, t) \otimes \mathbf{g}_j(x^K, t), \\ \mathcal{L}_{v..}^* \dot{\sigma} &= 0 & \text{pour} & \quad \dot{\sigma}(x^K, t) = \sigma_{j,i}^i(x^K, t_R) \mathbf{g}^j(x^K, t) \otimes \mathbf{g}_i(x^K, t). \end{aligned}$$

La méthode de van DANTZIG implique en effet que:

les schémas constitutifs sont définis dans  $(M, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j)$ , où les composantes de  $\mathcal{G}$  sont  $\delta^i_j$ , où:

$$(2.7) \quad \mathcal{L}_{v..}^* \mathcal{G} = \mathcal{L}_{v..}^* \mathcal{G} = 0$$

et où l'objectivité est assurée par définition (repères entraînés et indépendance vis-à-vis du choix de la métrique).

Pour assurer la symétrie de  $\sigma$  on est conduit à poser: Le tenseur  $\sigma$  symétrique est défini implicitement par intégration convenable de deux taux strictement objectifs et absolument relativistes

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_j^i}{\partial t} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad \text{et} \quad \frac{\partial \dot{\sigma}_i^j}{\partial t} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \quad (3)$$

possédant des propriétés formelles de symétrie résultant de leurs définitions constitutives (formellement) "équivalentes" (vis-à-vis des paramètres caractéristiques  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $S_0$  par exemple), de sorte que

$$(2.8)_1 \quad \begin{aligned} 2\sigma &= \dot{\sigma}_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j + \dot{\sigma}_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j, & \frac{\partial \dot{\sigma}_j^i}{\partial t} &= \frac{\partial \dot{\sigma}_i^j}{\partial t}, \\ \frac{\partial \dot{\sigma}_j^i}{\partial t} &= \lambda \zeta \delta^i_j + \dots, \\ \frac{\partial \dot{\sigma}_i^j}{\partial t} &= \lambda \zeta \delta_i^j + \dots. \end{aligned}$$

La transposition:

$$\dot{\sigma}_j^i(t_R) = \dot{\sigma}_i^j(t_R)$$

joue, ici encore, un rôle essentiel pour définir

$$(2.8)_2 \quad 2 \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_j^i(t_R) \mathbf{g}_i(t) \otimes \mathbf{g}^j(t) + \dot{\sigma}_i^j(t_R) \mathbf{g}^i(t) \otimes \mathbf{g}_j(t)$$

et le tenseur symétrique

$$(2.8)_3 \quad \begin{aligned} 2 \Delta \dot{\sigma} &= (\dot{\sigma}_{,j}^i - \dot{\sigma}_{,i}^j) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j + (\dot{\sigma}_{j,i}^i - \dot{\sigma}_{i,j}^j) \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_i \\ &= \Delta \dot{\sigma}_{,j}^i (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j + \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_i) = \Delta \dot{\sigma}_{j,i}^i (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j + \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_i). \end{aligned}$$

(3) dans le cas anisotrope les vecteurs caractéristiques remplacent les bases  $\mathbf{g}_i$ .

Avec un schéma constitutif très simple

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{1}{\sigma}_{\mathbf{K}}^i = \lambda \zeta \delta_{\mathbf{K}}^i + 2\mu D_{\mathbf{K}}^i, \quad \frac{\partial}{\partial t} \overset{2}{\sigma}_{\mathbf{K}}^i = \lambda \zeta \delta_{\mathbf{K}}^i + 2\mu D_{\mathbf{K}}^i$$

mais d'intérêt restreint sur le plan physique, on obtient les équations du mouvement:

$$\rho \sqrt{g} \left[ \frac{\partial^2 v^i}{\partial t^2} + \frac{\partial v^{\mathbf{K}}}{\partial t} \nabla_{\mathbf{K}} v^i + v^{\mathbf{K}} \nabla_{\mathbf{K}} \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} \right) + v^{\mathbf{K}} v^l \nabla_l \nabla_{\mathbf{K}} v^i \right] = (\lambda + \mu) g^{ij} \nabla_j \nabla_{\mathbf{K}} v^{\mathbf{K}} + (\mu g^{\mathbf{K}j} + \sigma^{\mathbf{K}j}) \nabla_j \nabla_{\mathbf{K}} v^i - \frac{1}{4} [g^{il} \nabla_j \sigma^{j\mathbf{K}} + g^{i\mathbf{K}} \nabla_j \sigma^{jl} + g^{j\mathbf{K}} \nabla_j \sigma^{li} + g^{jl} \nabla_j \sigma^{\mathbf{K}i}] (\nabla_l v_{\mathbf{K}} + \nabla_{\mathbf{K}} v_l) - \frac{1}{4} [g^{il} \sigma^{j\mathbf{K}} + g^{i\mathbf{K}} \sigma^{jl} + g^{j\mathbf{K}} \sigma^{li} + g^{jl} \sigma^{\mathbf{K}i}] (\nabla_j \nabla_l v_{\mathbf{K}} + \nabla_j \nabla_{\mathbf{K}} v_l)$$

où l'on note que la double dérivation figure non seulement avec les facteurs classiques  $(\lambda + \mu)g^{ij}$  et  $\mu g^{\mathbf{K}j}$  mais aussi avec les facteurs  $\sigma^{\mathbf{K}j}$  et somme de  $g\sigma$  (cf. [2] en ce qui concerne l'étude des vitesses de propagation). Ces équations du mouvement peuvent être obtenues avec d'autres choix. Un exemple de choix intéressant consiste à définir encore le transport de  $\mathcal{G}$  covariant mais à remplacer le transport de mixte de  $\sigma$  par celui contravariant et à remplacer la définition mixte de l'équation différentielle multivoque par une définition covariante (cf. [24]):

$$\mathcal{L}_{v..} \overset{1}{\mathcal{G}} \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad \mathcal{L}_{v..} \overset{1}{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} 0, \\ \mathcal{L}_{v..} \Delta_{\mathbf{R}}^i \sigma + \Delta_{\mathbf{R}}^i \sigma \stackrel{\text{symb}}{=} \mathcal{L}_{v..} \Delta_{\mathbf{R}}^i \varepsilon + \Delta_{\mathbf{R}}^i \varepsilon$$

de sorte que:

$$(2.9) \quad \mathcal{L}_{v..} \overset{1}{\mathcal{G}} \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad \mathcal{L}_{v..} \overset{1}{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} 0, \\ \mathcal{L}_{v..} \Delta_{\mathbf{R}}^i \sigma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_0 g_{ij} + a_{00} \Delta_{\mathbf{R}}^i \varepsilon_{ij} + a_1 D_{ij} + a_2 \Delta_{\mathbf{R}}^i \sigma_{ij}.$$

L'étude de ces schémas de Zaremba (cf. [1]) est d'un grand intérêt heuristique pour guider les recherches en matière de comportement des continus réels (cf. [24]).

### 3. La forme des schémas syndéomiques de la thermomécanique d'hystérésis pure

i) L'analyse de ces schémas est utile dans la mesure où les propriétés des matériaux réels peuvent être envisagées comme le résultat de la superposition et de l'interaction de 3 genres de processus: celui d'hystérésis pure toujours irréversible et périodiquement restaurable, celui d'érouissage toujours irréversible et non périodiquement restaurable, celui réversible. En conséquence:

$$(3.1) \quad \phi = \phi_a + \phi_e + 0$$

et si l'on suppose:

$$(3.2) \quad \Pi = \Pi_a + 0 + \Pi_{\text{rev}} = \overset{1}{\sigma}_{a_j}^i D^j_i + 0 + \sigma_{\text{rev},j}^i D^j_i$$

on est conduit à envisager  $\sigma$  sous la forme d'une somme:

$$(3.3) \quad \sigma = \sigma_a + \sigma_e + \sigma_{\text{rev}}, \quad \mathcal{L}_v \sigma \stackrel{\text{symb}}{=} \mathcal{L}_v \sigma_a + \mathcal{L}_v \sigma_e + \mathcal{L}_v \sigma_{\text{rev}}.$$

ii) On s'intéresse exclusivement à  $\sigma_a$ : l'indice  $a$  est donc omis. Les principes de conservations sont:

$$(3.4) \quad \rho \sqrt{g} = \text{cste}, \quad \nabla_j \sigma^{ji} + \mathcal{F}^i = \rho \gamma^i \text{ (ou bien: } P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = \dot{K} \quad \forall v \in \mathcal{C}),$$

$$\dot{\mathcal{E}} = \sigma^{ij} D_{jt} + \dot{\mathcal{Q}}_{ii} - \nabla_j J^j + \dot{\mathcal{E}}_{\text{ee}}, \quad (*)$$

ceux de quasi-réversibilité sont;

$$(3.5) \quad \Pi = \dot{K} \sigma \cdot D; \quad \phi = -\mathcal{P}_{\text{int}} - \Pi$$

et la relation de Gibbs modifiée est

$$(3.6) \quad \dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{J}} + \Pi$$

où  $\dot{\mathcal{J}}$  note la dissipation intrinsèque reçue par l'élément  $v$  sous une autre forme que celle calorifique (cf. [11]).

iii) Le schéma est la réunion (syndéomie) de 4 conditions universelles (1, 3, 4, 5) et d'une définition thermomécanique constitutive. Il est commode de noter immédiatement que la condition 1 est celle d'existence de mémoire discrète et que les conditions 3 et 4 sont celles qui définissent le processus de mémorisation discrète envisagé comme traduction d'une rétroaction entre le continu et la sollicitation. Le formalisme est par exemple:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 1) \quad & \mathcal{L}_{v..R} \dot{\mathcal{G}} = 0, \quad \mathcal{L}_v^{\dots} \dot{K} \sigma = 0; \\ 2) \quad & \mathcal{L}_{v..} \Delta_R^i \sigma = f_{..}(\Delta_R^i \varepsilon, D, \Delta_R^i \sigma, \omega), \\ & \partial \mathcal{E} / \partial t = \frac{1}{\omega} ((\omega - 1) \sigma + \dot{K} \sigma)^{ij} D_{ij} + \frac{1}{\omega} \Delta \varepsilon_{ij} \mathcal{L}_v^{\dots} \sigma^{ij}, \\ & -\partial \mathcal{Q}_{ii} / \partial t = \frac{1}{\omega} \Delta_R^i \sigma^{ij} D_{ij} - \frac{1}{\omega} \Delta \varepsilon_{ij} \mathcal{L}_v^{\dots} \sigma^{ij}; \\ 3) \quad & \delta W < 0 \quad \forall t \in ]t_I, t_I + dt]; \\ 4) \quad & \mathcal{A}[dW; \{\dot{K} \bar{W}\}] \Rightarrow [\omega, \dot{K} \sigma; \{\dot{K} \bar{W}\}, \{\dot{K} \sigma\}]; \\ 5) \quad & \Delta_0^+ \varepsilon = \Delta_0^+ \sigma = \sigma(0) = 0, \\ & \mathcal{J}(0) = \bar{W}(0_+) = 0, \quad \bar{W}(0) = \infty, \quad \omega(0) = 1 \end{aligned}$$

où l'algorithme  $\mathcal{A}$  est défini ci-dessous et où la fonctionnelle d'aide  $\bar{W}$  est définie par:

$$(3.8) \quad \bar{W} = 2W/\omega^2, \quad dW = \phi dt, \quad W(t_{I+}) = 0$$

sur la base du principe de restauration (cf. [11]):

*Le continu d'hystérésis pure doit être considéré comme un système thermodynamique ouvert vis-à-vis d'une grandeur de désordre I: à chaque inversion le continu reçoit un flux infini d'entropie négative qui compense exactement le désordre créé durant la branche précédente. La restauration des propriétés à droite de l'inversion est associée à ce flux.*

En conséquence, la schématisation syndéomique implique l'existence d'un état initial

(\*) ii pour interne intrinsèque, ee pour externe extrinsèque.

remarquable unique restaurable. Une telle caractéristique marque à nouveau une rupture avec la dynamique classique (cf. [34]).

iv) La définition de  $\mathcal{A}$  peut être brièvement présentée comme suit.

Soit  $\{M^t W\}_n$  ( $n \geq 1$ ) la suite des  $n$  valeurs de  $\bar{W}$  encore mémorisées à l'instant  $t$ . Cette suite est ordonnée par valeurs non croissantes de  $\bar{W}$ . On a :

$$\{M^t \bar{W}\}_n = \{\infty, \bar{W}(t_0), \bar{W}(t_1), \dots, \bar{W}(t_k)\}_n = \{\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_n\}_n$$

$$\bar{W}_1 \geq \bar{W}_2 \geq \dots \bar{W}_n; \quad t > t_k.$$

Soit  $\{M^t \sigma\}_n$  la suite des  $n$  contraintes d'inversion encore mémorisées. Cette suite est ordonnées par valeur croissante du temps et  $R^t \sigma$  est son dernier élément :

$$\{M^t \sigma\}_n = \{0, \sigma(t_0), \dots, R^t \sigma\}_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}_n, \quad R^t \sigma = \sigma_n.$$

L'algorithme distingue 4 situations: inversion, monotonie, coïncidence, coïncidence avec le niveau de  $\bar{W}$  a la première inversion. On a donc :

$$(3.9) \quad \text{SI } (\delta \bar{W}(t)) \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \mathcal{A}_I, \\ \geq 0 \Rightarrow \text{SI } (W(t) - W_n) \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \mathcal{A}_m, \\ > 0 \Rightarrow \text{SI } (W(t) - W_2) \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \mathcal{A}_c, \\ > 0 & \Rightarrow \mathcal{A}_{c0}, \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

convention:  $k = 0 \quad \forall t \in ]0, t_0], \quad (W_2 = W(t_0))$

avec :

$$\mathcal{A}_I \Rightarrow \begin{cases} \omega = 2, & k = k+1; & \alpha = 1 & (k \geq 0), \\ \{M^t \sigma\}_n \Rightarrow \{\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma(t)\}_{n+1}, & \{M^t \bar{W}\}_n \Rightarrow \{M^t \bar{W}\}_{n+1}, \\ n = n+1, & R^t \sigma = \sigma_n (= \sigma(t)), \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_m \stackrel{\text{symb}}{=} 1,$$

$$\mathcal{A}_c \Rightarrow \begin{cases} \omega = 2, & k = k, & \alpha = \alpha+1 & (\alpha \geq 1), \\ \{M^t \sigma\}_n \Rightarrow \{M^t \sigma\}_{n-2}, & \{M^t \bar{W}\}_n \Rightarrow \{M^t \bar{W}\}_{n-2}, \\ n = n-2, & R^t \sigma = \sigma_n, \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{c0} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 1, & k = k, & \alpha = \alpha+1, \\ \{M^t \sigma\}_1 = \{0\}, & \{M^t \bar{W}\}_1 = \{\infty\}, \\ n = 1, & R^t \sigma = \sigma_n (= 0). \end{cases}$$

v) Comme le critère d'inversion s'étend facilement au cas tensoriel, il s'agit à présent de montrer que l'algorithme dont l'étude vient d'être esquissée convient aux cas tensoriels. En d'autres termes on obtiendra une axiomatique unique si le traitement du cas tensoriel est lui aussi basé, pour l'essentiel, sur un processus de comparaison des niveaux de  $\bar{W}$ .

Il n'est pas restrictif de se placer dans un plan déviatoire ( $I_\sigma = \text{cste}$ ). Il existe, dans ce plan, des lignes iso- $\bar{W}$ , ou lignes neutres (cf. [1]). Ces lignes peuvent être des cercles ou arcs cercles (cf. Fig. 1).

Le cas des trajets à phase constante peut être étudié analytiquement lorsque le formalisme est simple et les conclusions obtenues restent valables pour les études à caractère nécessairement numérique. Il reste donc à traiter le cas des trajets cycliques à phase variable.

vi) *La méthode est thermomécanique* <sup>(5)</sup>. D'une part, on considère la famille des lignes iso- $\bar{W}$  associée au point d'inversion  $A$  et la famille de lignes orthogonales correspondante (Fig. 1). D'autre part on considère le trajet  $AB_1BB_2C$  comme une suite de trajets infinitésimaux alternativement neutres et à taux  $dW/dl$  maximum ( $dl$  note l'élément de ligne  $\sqrt{dQ^2 + Q^2 d\varphi^2}$  dans la représentation polaire usuelle, ici réduite à  $Q$  et  $\varphi$ ). Enfin, on fait l'hypothèse *heuristique* la plus simple, à savoir:

$$2Q_{\text{limite}} = \int_{\widehat{bb'}} dl = 2(\sqrt{2} S_{\text{limite}}),$$

ce qui défini  $\sqrt{2} S_{\text{limite}}$  comme la demi longueur de l'arc  $\widehat{bb'}$  de la ligne orthogonale passant par le point  $B(Q, \varphi)$  et intérieure au critère (cf. Fig. 1).

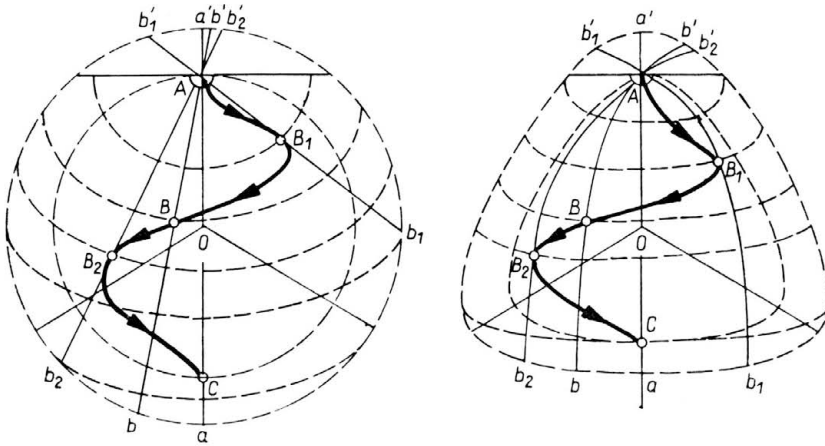


FIG. 1.

En ce qui concerne les niveaux de  $\bar{W}$  les variations le long de  $AB_1BB_2C$  et le long de  $AOC$  sont égales: on est ramené à une situation plus simple (cf. [34] pour une étude plus détaillée).

#### 4. Le schéma syndéomique d'hystérésis pure respecte les principes de causalité et de détermination

i) L'étude d'un cas particulier simple mais typique permet de montrer que l'application du voisinage d'un point de l'espace des causes dans un voisinage d'un point de l'espace des effets n'est pas un homeomorphisme et que cette caractéristique des schémas de l'hystérésis est parfaitement conforme aux principes de causalité et de détermination tout

<sup>(5)</sup> pour un exemple de méthode non thermomécanique voir le travail de GHABOUSSI et MOMEN [27], travail relatif aux milieux pulvérulents. En ce qui concerne les métaux il est intéressant de noter combien les possibilités opératoires du concept de mémoire discrète ont déjà été largement utilisées (cf. par exemple NEALE et NAZLI [28]) et retiennent l'attention des spécialistes par le biais de diverses procédures de „mise en mémoire” et „réinitialisations” (cf. par exemple CERNOCKY et KREML [29]).



en étant radicalement incompatible avec l'acception la plus étroite, classique (à la Painlevé) et dogmatique du principe de déterminisme <sup>(6)</sup>.

L'analyse implique la considération de problèmes homogènes. Elle présente donc un intérêt heuristique en matière d'étude des schémas constitutifs proposés.

ii) Les hypothèses physiques essentielles sont les suivantes. Les cinématiques envisagées sont du type (cf. [1] et [24]):

$$(4.1) \quad z^1(x^k, t) = Z^1(x^k), \quad z^2 = Z^2 + 2\tau(t) \cdot Z^3, \quad z^3 = Z^3(1+k(t))$$

qui convient à l'étude d'expériences du genre "boîte" de Roscoe. On notera que le choix des coordonnées  $x^k$  est simplement l'identité de  $x^k$  et  $Z^k$ . D'autre part, la condition initiale des intégrations est toujours la nullité de  $k(0)$ ,  $\tau(0)$  et  $\sigma(0)$  et les composantes  $\sigma^{33}(t)$  (noté  $\sigma_3$ ) et  $\sigma^{23}(t)$  (noté  $\sigma_4$ ) sont spécifiées par leur taux ( $\forall t > 0$ ). Enfin, le formalisme différentiel multivoque (envisagé au § 2.2, eq. 2.8 et 2.9) fait seulement intervenir les paramètres  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $S_0$  (cf. notations) et correspond à un comportement élastoplastique simple du genre d'hystérésis "pure" (sans écrouissage).

iii) A partir des équations constitutives on obtient un système de la forme:

$$(4.2) \quad \dot{\sigma}_n = A_n \dot{k} + B_n \dot{\tau} \quad (n = 1, 4)$$

qui donne immédiatement la forme normale:

$$(4.3) \quad [\dot{E}_n] = [C_{nm}] \cdot [\dot{S}_m] \quad (m = 1, 2)$$

où  $\dot{E}$  note le vecteur des effets ( $\dot{k}$ ,  $\dot{\tau}$ ,  $\dot{\sigma}_1$ ,  $\dot{\sigma}_2$ );  $S$  le vecteur des causes ( $\dot{\sigma}_3$ ,  $\dot{\sigma}_4$ );  $C$  des fonctions de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $S_0$ ,  $1+k$ ,  $\sigma_n$ .

iv) Compte tenu du but poursuivi ici, on envisage seulement une étude "locale", c'est-à-dire que l'on se borne à l'étude de la correspondance entre un voisinage de l'espace des causes (centré sur  $S$ ) et le voisinage du point  $E$  associé dans l'espace des effets. Il s'agit donc de procéder à une série d'intégrations pour lesquelles le trajet  $OSS_\alpha$  est spécifié de telle sorte que le trajet final rectiligne  $SS_\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ) soit petit relativement au trajet préliminaire  $OS$  lui-même rectiligne par morceaux (cf. fig. 2). La représentation des

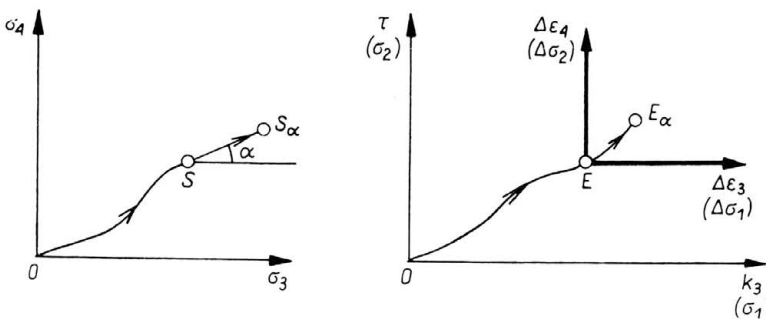
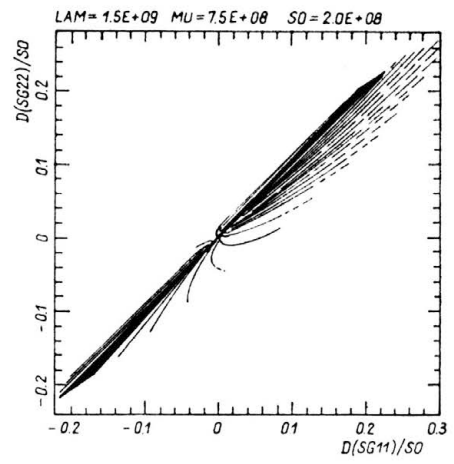
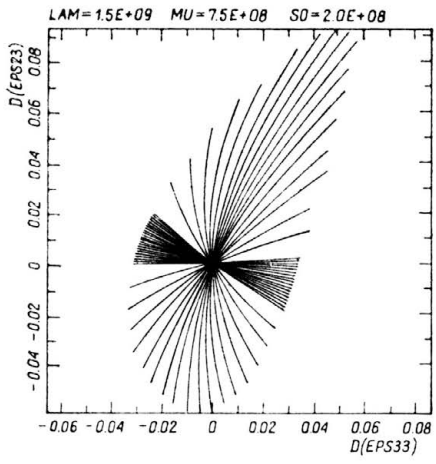
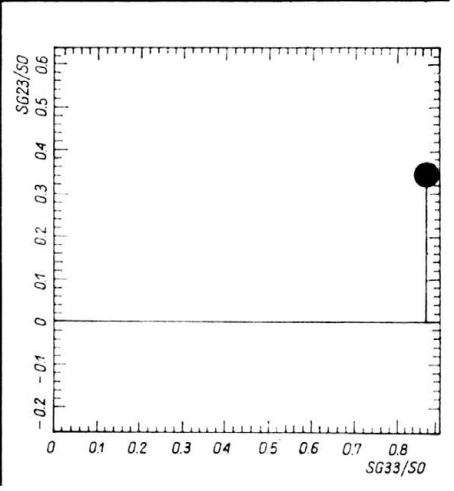
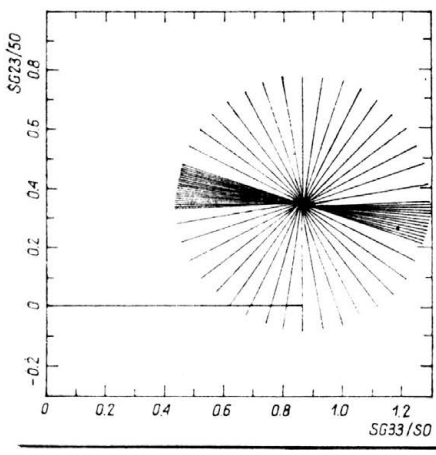


FIG. 2.

<sup>(6)</sup> selon VOGEL [30] il est utile de distinguer les trois principes: une relation entre 2 phénomènes est causale si ceux ci ne peuvent faire l'objet d'une observation simultanée -si l'on rencontre  $S$  (cause) alors  $E$  (effet) s'ensuit; le principe de détermination est: il suffit de connaître un certain nombre de causes pour pouvoir déterminer les effets; le principe de déterminisme classique est: les schémas définitifs sont Dynamiques classiques - la connaissance de l'état actuel donne accès à la connaissance de toute l'évolution. Voir aussi [31] et [32].



a



b

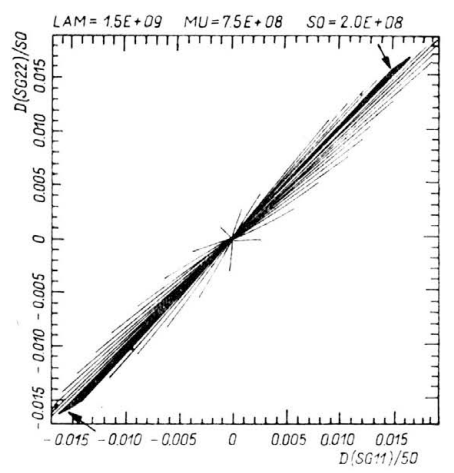
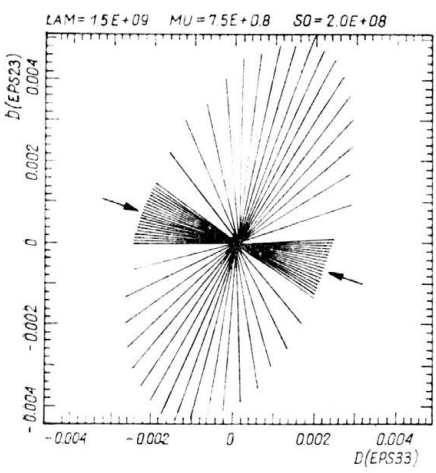


FIG. 3.

effets au voisinage de  $E$  est commode si l'on utilise deux sous-espaces  $E(\sigma)$  et  $E(\varepsilon)$  dont les coordonnées sont  $\Delta\sigma_k = \sigma_k(S_\alpha) - \sigma_k(S)$ ;  $k = 1, 2$ , d'une part et:  $\Delta\varepsilon_4 = \tau(S_\alpha) - \tau(S)$ ;  $\Delta\varepsilon_3 = k(S_\alpha) - k(S) + \dots$  d'autre part. Les variations  $\Delta\sigma_k$  sont normées par  $S_0$ .

v) Le résultat des intégrations est le suivant (cf [24]): il existe toujours une discontinuité, d'ailleurs plus marquée lorsque le trajet  $OS$  est irrotationnel; un voisinage de  $S$  s'applique dans  $E$  selon deux voisinages *tangents*; lorsque  $SS_\alpha$  tend vers 0, l'amplitude de la discontinuité tend vers 0 plus vite que  $SS_\alpha$ .<sup>(7)</sup> Les illustrations concernent le cas où le trajet  $OS$  est rotationnel et les trajets  $SS$  respectivement comparables <sup>(7)</sup> (cf. fig 3a) et petits (cf. fig. 3b) relativement au trajet  $OS$ .

vi) A l'existence de „coins” infiniment minces dans les voisinages  $E(\sigma)$  et  $E(\varepsilon)$  est associée, dans  $E$ , une inaccessibilité mathématique dénuée de conséquences physiques. En effet, on peut toujours trouver un voisinage assez petit de  $S$  pour que l'amplitude de la discontinuité soit sans effets opératoires discernables, compte tenu de la précision des moyens expérimentaux et numériques.

Le schéma est strictement conforme aux principes de causalité et de détermination mais ne conduit bien entendu pas à des systèmes dynamiques *réductibles* aux schémas dynamiques classiques. (cf. [30]). D'autre part, le schéma est strictement conforme à l'*esprit* du principe du déterminisme (cf. [32]).

**Conclusion**

Ce travail ne contient qu'un bref examen des bases physiques des schémas syndéomiques de l'hystérésis pure isotherme. D'autres travaux, de nature plus numérique ou expérimentale ont été réalisés (cf. par exemple [20] dans ce même journal et aussi [26]). L'exploration approfondie de la „théorie” actuelle exige de toute façon encore un travail assez considérable <sup>(8)</sup>. De plus, l'accès à une description unifiée dépend essentiellement de l'exécution du cinquième point de notre programme, mentionné dans l'introduction. C'est à ce prix que les efforts déployés pour analyser les processus d'échanges stables entre l'ordre, la chaleur et la dissipation intrinsèque, pourront être envisagés comme un début de contribution à une théorie des continus.

Pour l'instant le résultat principal est:

$$\Pi = {}^t_R\sigma^i{}_j D^j{}_i; \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J} + \Pi; \quad \Phi = \Delta^t_R\sigma^i{}_j D^j{}_i.$$

Ce résultat justifie que soit à nouveau présenté ici un formalisme dont les éléments essentiels (tels que (2.2), (2.7), (2.8), (2.9)) furent introduits ou suggérés durant le second tiers du siècle.

<sup>(7)</sup> on note qu'il faut mettre en jeu des états de contrainte proche du critère ou effectuer de longs trajets pour rendre la discontinuité visible sur les tracés (cf. fig. 3 b où l'on a pris soin de repérer les discontinuités).

<sup>(8)</sup> L'étude des divers comportements limites possibles en hystérésis pure, ou bien l'étude des non-newtoniens et aussi l'examen du cas réversible sont autant d'exemples de tels travaux d'exploration. D'autres exemples sont relatifs, en hystérésis pure (cf. [24]), aux aspects thermomécaniques, à la stabilité et aux propagation des ondes [2]. Sur le plan expérimental, il reste peu commode d'obtenir des résultats en grandes déformations cycliques pour des chemins quelconques de sollicitation [18, 26].

## Remerciements

Ce travail a été soutenu financièrement par le Centre National de la Recherche Scientifique (sous contrat G.R.E.C.O. „Grandes Déformations et Endommagement”), par la Direction Générale de la Recherche Scientifique et Technique (sous contrat G.I.S. „Rupture à chaud”) et par la Commission des Communautés Européennes (par une bourse de Doctorat d’Etat accordée à l’un des auteurs).

## References

1. P. GUELIN, *Notes on the Cauchy tensors  $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \mathop{\text{R}}_{\mathbf{g}_i}$  and  $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \mathop{\text{R}}_{\sigma^j}$  expressing the discrete memory concept*, “The Summer School on Two Phase Medium Mechanics”, 57–132, ed. E. DEMBICKI, Gdańsk 1983.
2. P. GUELIN et W. K. NOWACKI, *Remarques sur les ondes d’accélération dans un continu élastoplastique avec hystérésis*, Arch. Mech., **36**, 1, 1984.
3. D. VAN DANTZIG, *The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **30**, 421–427, 1934.
4. L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Masson et Cie, Paris 1936.
5. A. LICHNEROWICZ, *Elements de calcul tensoriel*, Armand Colin, Paris 1950.
6. J. A. SCHOUTEN, *RICCI-Calculus*, Springer 1954.
7. A. J. MC CONNELL, *Applications of tensor analysis*, Dover 1957.
8. J. M. BOISSERIE et P. GUELIN, *Remarks on the tensorial formulation of constitutive laws describing mechanical hysteresis*, Proc. 4th Intl. Conf. S.M. i. R.T., L1/9, 1977.
9. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, *Order, heat, intrinsic dissipation and inelastic analysis*, Proc. 5th Intl. Conf. S.M. I.R.T., L1/6, 1979.
10. J. M. BOISSERIE et P. GUELIN, *A discrete memory type description of some ratchet and shape memory effects*, Proc. 6th Intl. Conf. S.M. i. R.T., L3/5, 1981.
11. P. GUELIN, *Remarques sur l’hysteresis mécanique*, J. de Méc. Théorique, **19**, 2, 217–247, 1981.
12. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, J. M. TERRIEZ et B. WACK, *Applications of an hereditary constitutive law of discrete memory type*, Trans. A.S.M.E., J.E.M.T., **105**, 155–161, 1983.
13. P. GUELIN, J. H. BOISSERIE, *The heat supply trap lying at the origin of thermo-inelastic analysis*, Res. Mechanica Letters, **2**, 13–17, 198.
14. B. WACK, J. M. TERRIEZ et P. GUELIN, *A hereditary type, discrete memory, constitutive equation with applications to simple geometries*, Acta Mechanica, **50**, 9–37, 1983.
15. M. N. ELLEUCH, S. HAN et B. WACK, *Experimental verification of a discrete memory constitutive model for 316 stainless steel*, Proc. 7th Intl. Conf. S.M.i.R.T., L10/3, 1983.
16. D. FAVIER, *Contribution à l’étude et à l’identification d’une loi de comportement à structure héréditaire: le cas de l’acier à palier*, Thèse, Grenoble 1981.
17. P. PEGON, *Contribution à l’étude de deux classes de problèmes en grandes déformations: flambage dynamique et formulation de problèmes aux limites*, Thèse, Grenoble 1983.
18. S. HAN, *Le comportement d’hystérésis des solides et sa description par un schéma à mémoire discrète: le cas des aciers inoxydables*, Thèse, Grenoble 1985.
19. P. PEGON, J. P. HALLEUX et J. DONEA, *A discussion of stress rates and their application in finite plasticity*, NUMETA, **85**, Swansea, U.K. 1985.
20. P. PEGON, P. GUELIN, *Etude des schémas thermomécaniques à mémoire discrète: problèmes aux limites en grandes déformations élastoplastiques*, Arch. Mech., **37**, 4–5, 1985,
21. O. D. KELLOG, *Foundations of potential theory*, Springer 1967.
22. Z. H. GUO, *Time derivatives of tensor fields*, Arch. Mech., **15**, 1, 1963.
23. A. I. MURDOCH, *On material frame-indifference*, Arch. Rat. Mech. Anal., **83**, 2, 1983.

24. P. GUELIN, P. PEGON, *Finite strain plasticity: a discrete memory scheme and the associated numerical implementations*, Proc. 8th Intl. Conf. S.M.I.R.T., L5/7, 1985.
25. D. FAVIER, P. GUELIN, *Identification of a discrete memory constitutive scheme for mild steel type materials*, Proc. 8th Intl. Conf. S.M.I.R.T., L1/8, 1985.
26. S. HAN, B. WACK, *Discrete memory type description of strain hardening and softening with applications to stainless steels*, Res Mechanica, à paraître.
27. J. GHABOUSSI, H. MOMEN, *Modeling and analysis of cyclic behavior of sands*, Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, 299-300, Swansea 1980.
28. K. W. NEALE, Z. NAZLI, *Analysis of elastic-plastic plates and shells under cyclic loading*, Trans. ASME, 100, 344-349, 1978.
29. E. P. CERNOCKY, E. KREMPL, *A theory of thermoviscoplasticity for uniaxial mechanical and thermal loading*, J. de Mécanique Appliquée, 5, 3, 293-321, 1981.
30. T. VOGEL, *Théorie des systèmes évolutifs*, Gauthier-Villars, Paris.
31. F. FER, *L'irréversibilité, fondement de la stabilité du monde physique*, Gauthier-Villars, Paris 1977.
32. K. POPPER (Sir), *L'Univers irresolu*, Hermann, Paris 1984.
33. J. E. MARDSEN, T. J. R. HUGHES, *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1983.
34. D. FAVIER, P. GUELIN, P. PEGON, *Schémas thermomechaniques de l'hystérésis et résultats récents en grandes déformations élastoplastiques*, Numéro Spécial des Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, 1986.

INSTITUT DE MÉCANIQUE DE GRENOBLE, GRENOBLE, FRANCE  
and  
POLISH ACADEMY OF SCIENCES  
INSTITUTE OF FUNDAMENTAL TECHNOLOGICAL RESEARCH.

Received November 22, 1984.