

## Aerodynamique stationnaire linéarisée II (supersonique)

D. HOMENTCOVSCHI (BUCAREST)

CE TRAVAIL est la continuation du travail [1]. Les équations en distributions de la mécanique des fluides sont utilisées pour l'étude de l'écoulement stationnaire supersonique d'un fluide compressible en présence d'un corps mince. L'appareil mathématique de la théorie des distributions qu'on utilise, conduit à l'équation intégrale (4.12) dont la solution permet le calcul direct de la portance. Pour les ailes sans bords de fuite subsoniques la solution du problème est donnée par la relation (4.15). Dans le cas de la présence des bords de fuite subsoniques l'équation (4.12) conduit de façon naturelle à l'utilisation de la condition Kutta-Joukowski sur ces bords. Le cas où le bord d'attaque supersonique de l'aile se réduit à un point, est abordé dans la section 4.2. Dans ce cas la solution de l'équation intégrale (4.12) est plus difficile et dans ce travail on déduit une équation intégrale régulière de la deuxième espèce pour la détermination de la fonction  $N(a, b)$ . Dans la section finale on considère le cas du corps conique. Si le bord d'attaque supersonique de l'aile ne se réduit pas à un point, la solution du problème s'obtient sous forme explicite (4.24), (4.25) en appliquant quelques formules obtenues antérieurement, d'où résulte aussi le caractère conique de l'écoulement. On étudie ensuite l'écoulement conique dans le cas où le bord d'attaque supersonique de l'aile est ponctuel.

Praca niniejsza jest kontynuacją pracy [1]. Użyto równań mechaniki płynów zapisanych w postaci dystrybucyjnej, aby zbadać stacjonarny naddźwiękowy przepływ cieczy ściśliwej w obecności cienkiego ciała. Używany aparat matematyczny teorii dystrybucji prowadzi do równania całkowego (4.12), którego rozwiązanie pozwala na bezpośrednie obliczanie siły nośnej. Dla płatów bez poddźwiękowej krawędzi spływu rozwiązanie problemu jest dane przez związki (4.15). W przypadku istnienia poddźwiękowych krawędzi spływu równanie (4.12) prowadzi w sposób naturalny do użycia warunku Kutty-Żukowskiego na tych krawędziach. Przypadek, gdy naddźwiękowa krawędź natarcia płata redukuje się do punktu jest rozważany w rozdziale 4.2. W tym przypadku rozwiązanie równania całkowego jest trudniejsze i w tej pracy wyprowadza się regularne równanie całkowe drugiego rodzaju do określenia funkcji  $N(a, b)$ . W ostatnim rozdziale rozważa się przypadek ciała stożkowego. Jeśli naddźwiękowa krawędź natarcia nie redukuje się do punktu, rozwiązanie problemu otrzymuje się w jawnej postaci (4.24), (4.25) stosując kilka wzorów otrzymanych uprzednio, skąd również wynika stożkowy charakter przepływu. Bada się także przepływ stożkowy w przypadku, gdy naddźwiękowa krawędź natarcia jest punktowa.

Настоящая работа является продолжением работы [1]. Используются уравнения механики жидкостей, записанные в дистрибутивном виде, чтобы исследовать стационарное сверхзвуковое течение сжимаемой жидкости в присутствии тонкого тела. Использованный математический аппарат теории дистрибуций приводит к интегральному уравнению (4.12), решение которого позволяет непосредственно вычислить подъемную силу. Для плоскостей без дозвукового ребра схода решение проблемы дается зависимостью (4.15). В случае существования дозвуковых ребер схода уравнение (4.12) приводит естественным образом к использованию условия Кутты-Жуковского на этих ребрах. Случай, когда сверхзвуковое ребро атаки плоскости сводится к точке, рассматривается в главе 4.2. В этом случае решение интегрального уравнения более трудно и в данной работе выводится регулярное интегральное уравнение второго рода для определения функции  $N(a, b)$ . В последней главе обсуждается случай конического тела. Если сверхзвуковое ребро атаки не сводится к точке, решение проблемы получается в явном виде (4.24), (4.25), применяя несколько формул полученных раньше, отсюда тоже следует конический характер течения. Исследуется тоже коническое течение в случае, когда сверхзвуковое ребро атаки является точечным.

#### 4. Etude du régime supersonique

##### 4.1. Cas général

DANS le cas où  $M > 1$  nous allons effectuer les changements de variables suivants dans le système (2.13)–(2.16) de [1]:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x &= x', & \beta y &= y', & \beta z &= z', \\ \beta u &= u', & v &= v', & w &= w', & p &= p', \end{aligned}$$

où  $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ .

Avec les nouvelles variables  $x, y, z, u, v, w, p$  le système (2.13)–(2.16) devient:

$$(4.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon \beta^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z),$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} = n(x, y) \theta(x, y) \delta(z),$$

$$(4.5) \quad -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\varepsilon M^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z).$$

Dans le système ci-dessus nous avons remplacé  $l(x, y/\beta)$  par  $\beta l(x, y)$ .

Soit la transformée de Fourier par rapport aux variables  $x, y, z$ , du système (4.2)–(4.5). Avec les notations:

$$U(k_1, k_2, k_3) = \mathcal{F}[u(x, y, z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z) e^{-i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dx dy dz$$

et de façon analogue

$$V(k_1, k_2, k_3) = \mathcal{F}[v(x, y, z)],$$

$$W(k_1, k_2, k_3) = \mathcal{F}[w(x, y, z)], \quad P(k_1, k_2, k_3) = \mathcal{F}[p(x, y, z)]$$

le système ci-dessus devient sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} ik_1 & 0 & 0 & ik_1 \\ 0 & ik_1 & 0 & ik_2 \\ 0 & 0 & ik_1 & ik_3 \\ -ik_1 & ik_2 & ik_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}[\varepsilon \beta^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z)] \\ 0 \\ \mathcal{F}[n(x, y) \theta(x, y) \delta(z)] \\ \mathcal{F}[-\varepsilon M^2 l(x, y) \theta(x, y) \delta(z)] \end{bmatrix}.$$

La solution de ce système s'écrit également sous forme matricielle:

$$(4.6) \quad \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^2 + k_1^2}{ik_1 k^2} & \frac{ik_2}{k^2} & \frac{ik_3}{k^2} & -\frac{ik_1}{k^2} \\ -\frac{ik_2}{k^2} & \frac{k^2 - k_2^2}{ik_1 k^2} & \frac{ik_2 \cdot ik_3}{ik_1 k^2} & -\frac{ik_2}{k^2} \\ -\frac{ik_3}{k^2} & \frac{ik_2 \cdot ik_3}{ik_1 k^2} & \frac{k^2 - k_3^2}{ik_1 k^2} & -\frac{ik_3}{k^2} \\ \frac{ik_1}{k^2} & -\frac{ik_2}{k^2} & -\frac{ik_3}{k^2} & \frac{ik_1}{k^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{F}[\varepsilon \beta^2 l \theta \delta(z)] \\ 0 \\ \mathcal{F}[n \theta \delta(z)] \\ \mathcal{F}[-\varepsilon M^2 l \delta(z)] \end{bmatrix}$$

où  $k^2 = -k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ .

Si les fonctions  $l(x, y)$  et  $n(x, y)$  sont connues, la transformée de Fourier inverse du système (4.6) conduit à la détermination du champ de vitesse et du champ de pression.

Pour la solution du problème direct nous allons utiliser la condition aux limites cinématique écrite sous forme linéarisée:

$$(4.7) \quad w(x, y, \pm 0) = \varepsilon \tilde{f}_x^\pm(x, y), \quad (x, y) \in D$$

où  $z = \varepsilon \tilde{f}^+(x, y)$  est l'équation de la surface supérieure de l'aile et  $z = \varepsilon \tilde{f}^-(x, y)$  l'équation de la surface inférieure (après avoir effectué les changements de variables).

La composante  $w(x, y, z)$  de la perturbation de la vitesse s'écrit:

$$(4.8) \quad w(x, y, z) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_D l(\xi, \eta) \frac{\theta(x-\xi-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2-[(y-\eta)^2+z^2]}} d\xi d\eta \\ + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{2\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \left\{ \int_{-\infty}^{x-\xi} \frac{\theta(t-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2})}{\sqrt{t^2-[(y-\eta)^2+z^2]}} dt \right\} d\xi d\eta,$$

les intégrales de (4.8) étant considérées en valeur principale au sens de Hadamard.

Considérant dans (4.8) la limite pour  $z \rightarrow \pm 0$ , nous avons:

$$(4.9) \quad w(x, y, \mp 0) = \mp \frac{\varepsilon l(x, y)}{2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{2\pi} \iint_D n(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{x-\xi} \frac{\theta(t-|y-\eta|)}{\sqrt{t^2-(y-\eta)^2}} dt.$$

Des relations (4.7) et (4.9), nous tirons:

$$(4.10) \quad l(x, y) = \tilde{f}_x^-(x, y) - \tilde{f}_x^+(x, y),$$

$$(4.11) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{2\pi} \iint_D n(\xi, \eta) \left\{ \int_{-\infty}^{x-\xi} \frac{\theta(t-|y-\eta|)}{\sqrt{t^2-(y-\eta)^2}} dt \right\} d\xi d\eta \\ = \tilde{f}_x^+(x, y) + \tilde{f}_x^-(x, y) \equiv F(x, y).$$

La relation (4.10) fournit la solution du problème dans le cas de l'aile symétrique. Pour l'aile sans épaisseur, il faut résoudre l'équation intégrale singulière (4.11).

Nous introduisons, à la place de la fonction  $n(x, y)$ , une nouvelle fonction inconnue, définie par la relation:

$$N(x, y) = \int_{-\infty}^x n(\xi, y) d\xi.$$

L'équation intégrale à laquelle doit satisfaire la fonction  $N(x, y)$  s'obtient à partir de (4.11) à l'aide d'une intégration par parties:

$$(4.12) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_D N(\xi, \eta) \frac{\theta(x-\xi-|y-\eta|)}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} d\xi d\eta \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \oint_C N(\xi, \eta) \theta(x-\xi-|y-\eta|) \ln \frac{|x-\xi+\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}|}{|y-\eta|} d\eta \right\} = F(x, y) \\ \text{avec } (x, y) \in D$$

où  $C$  représente la frontière du domaine  $D$ . Puisque sur le bord d'attaque de l'aile, nous avons  $N(x, y) \equiv 0$ , l'intégrale curviligne de (4.12) s'étend sur le restant de la frontière du domaine  $D$ . L'équation (4.12) représente l'équation intégrale du problème. La fonction  $N(x, y)$  étant déterminée, le saut de pression sur la surface de l'aile  $n(x, y)$  s'obtient ensuite par dérivation. D'autre part, la portance qui s'exerce sur l'aile est déterminée après une intégration par rapport à la variable  $y$ . Il faut également remarquer que, lors de la déduction de cette équation intégrale, aucune restriction n'a par été faite quant à la forme du domaine  $D$ ; par conséquent, la fonction  $N(x, y)$  est la solution de l'équation (4.12) valable pour un domaine d'une forme quelconque.

Soient dans l'équation intégrale (4.12) les changements de variables:

$$\begin{aligned} x-y &= a, & \xi-\eta &= \alpha, \\ x+y &= b, & \xi+\eta &= \beta, \end{aligned}$$

$a, b$  étant les coordonnées caractéristiques dans le plan  $z = 0$ .

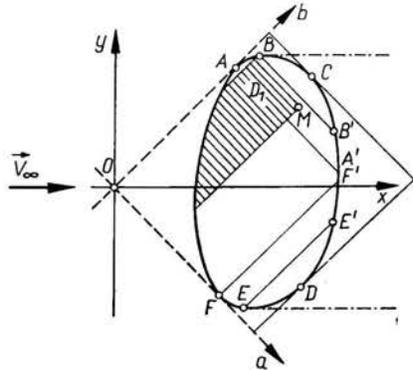


FIG. 1.

(Fig. 1. On suppose l'origine du système d'axes  $Oxyz$  choisie au point  $O$  de la figure). De l'équation (4.12), nous tirons:

$$\begin{aligned} (4.13) \quad \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_D \int N(\alpha, \beta) \frac{\theta(a-\alpha)}{\sqrt{a-\alpha}} \frac{\theta(b-\beta)}{\sqrt{b-\beta}} d\alpha d\beta \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \oint_c N(\alpha, \beta) \theta(a-\alpha) \theta(b-\beta) \ln \frac{\sqrt{a-\alpha} + \sqrt{b-\beta}}{|\sqrt{a-\alpha} - \sqrt{b-\beta}|} d(\beta-\alpha) \right\} = F(a, b) \end{aligned}$$

ou bien, après avoir effectué les dérivations:

$$\begin{aligned} (4.14) \quad \frac{1}{4\pi} \int_D \int N(\alpha, \beta) \frac{\theta(a-\alpha)}{(a-\alpha)^{3/2}} \frac{\theta(b-\beta)}{(b-\beta)^{3/2}} d\alpha d\beta \\ + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial a} \oint_{EDCB} N(\alpha, \beta) \theta(a-\alpha) \theta(b-\beta) \frac{\sqrt{a-\alpha}}{\sqrt{b-\beta}} \frac{d(\beta-\alpha)}{(a-\alpha) - (b-\beta)} = F(a, b). \end{aligned}$$

Si le point  $M(a, b)$  se trouve à l'intérieur du domaine borné par la courbe  $ABB'E'EFA$ , l'intégrale curviligne de l'équation (4.14) disparaît. La solution de l'équation qui résulte s'écrit alors sous la forme [2]:

$$(4.15) \quad N(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_{D_1} \int \frac{F(a', b')}{\sqrt{(a-a')(b-b')}} da' db'.$$

Soit maintenant le point  $M(a, b)$  à l'intérieur du domaine borné par la courbe  $BCB'B$ , région qui représente la partie de l'aile situé dans la zone d'influence du bord de fuite subsonique  $BC$ . L'intégrale curviligne intervenant dans la relation (4.14) est supposée connue pour l'instant. Appliquant la formule (4.15), nous arrivons à la relation:

$$N(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_{D_1} \int \frac{F(a', b')}{\sqrt{(a-a')(b-b')}} da' db' + \frac{1}{\pi^2} \int_{D_1} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial a'} \int_{BCDE} N(\alpha, \beta) \theta(a'-\alpha) \theta(b'-\beta) \frac{\sqrt{a'-\alpha}}{\sqrt{b'-\beta}} \frac{d(\beta-\alpha)}{(a'-\alpha)-(b'-\beta)} \right\} \frac{da' db'}{\sqrt{(a-a')(b-b')}}.$$

Après la transformation du dernier terme de l'équation intégrale ci-dessus, nous obtenons la relation:

$$(4.16) \quad N(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_{D_1} \int \frac{F(a', b') da' db'}{\sqrt{(a-a')(b-b')}} - \frac{1}{\pi} \sqrt{a-A(b)} \int_{b_1}^b \frac{N(\beta)}{\sqrt{\beta-b+A(b)-A(\beta)}} \frac{[1-A'(\beta)] d\beta}{\beta-b+a-A(\beta)}.$$

Dans (4.16)  $a = A(b)$  représente l'équation de l'arc  $FABC$ ;  $(A(b_1), b_1)$ , les coordonnées du point  $B$ , et  $N(b) \equiv N(A(b), b)$ , la restriction de la fonction  $N$  à l'arc  $ABC$ .

Considérons dans (4.16) la limite  $a \rightarrow A(b)$ ; la limite du dernier terme du second membre est  $N(b)$ . L'intégrale sur  $D_1$  tendant vers zéro pour  $a \rightarrow A(b)$  la relation (4.16) devient une identité. Autrement dit, pour toute fonction  $N(b)$  dans la relation (4.16), la fonction  $N(a, b)$ , obtenue sera une solution de l'équation intégrale (4.14). Nous avons par conséquent une indétermination similaire à celle que l'on rencontre dans l'écolement subsonique. Cette indétermination surgit uniquement dans les régions  $BCB'B$  et  $EDE'E$  définissant les zones d'influence des bords de fuite subsoniques. Nous pouvons déterminer la fonction  $N(b)$  en imposant une condition du type Kutta-Joukowski. Précisément, nous allons imposer que le saut de pression soit fini sur le bord de fuite subsonique. (Puisque sur la surface de l'aile, nous avons  $u(x, y) = n(x, y)$  il vient que cette composante de la vitesse sera finie sur les bords de fuite subsoniques).

De (4.16), nous obtenons:

$$(4.17) \quad n(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial a} + \frac{\partial N}{\partial b} = \left( \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) \frac{1}{\pi} \int_{D_1} \int \frac{F(a', b') da' db'}{\sqrt{(a-a')(b-b')}} - \left( \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) \frac{1}{\pi} \sqrt{a-A(b)} \int_{b_1}^b \frac{N(\beta)}{\sqrt{\beta-b+A(b)-A(\beta)}} \frac{[1-A'(\beta)] d\beta}{\beta-b+a-A(\beta)}.$$

Notons par  $\varepsilon_1 = a - A(b)$  et par  $b = B(a)$  l'équation de l'arc  $AFED$ . Pour  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  nous avons:

$$(4.18) \quad n(x, y) = \frac{1 - A'(b)}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{B(A(b))}^b \frac{F(A(b), b')}{\sqrt{b - b'}} db' + \int_{b - A(b)}^{b_1 - A(b_1)} \frac{N_1'(t)}{\sqrt{t - b + A(b)}} dt \right\} + O(\varepsilon_1^0)$$

où nous avons remplacé  $N(b)$  par  $N_1(b - A(b))$ .

Afin que le saut de pression conserve une valeur finie sur le bord de fuite subsonique  $BC$  de l'aile, le terme entre accolades de l'expression (4.18) doit être nul ce qui fournit:

$$(4.19) \quad \int_t^{t_1} \frac{N_1'(t)}{\sqrt{t - \sigma}} d\sigma = -G(t).$$

La fonction  $G(t)$  est obtenue à partir du premier terme entre accolades par un changement de variable  $t = b - A(b)$  ( $t_1 = b_1 - A(b_1)$ ). La solution de l'équation (4.19) satisfaisant à la condition  $N_1(b_1 - A(b_1)) = N(b_1) = 0$  s'écrit:

$$N_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_t^{t_1} \frac{G(\sigma)}{\sqrt{\sigma - t}} d\sigma.$$

La fonction  $N(\beta)$  s'obtient finalement sous la forme:

$$(4.20) \quad N(b) = \frac{1}{\pi} \int_b^{b_1} \left\{ \int_{B(A(\beta))}^{\beta} \frac{F(A(\beta), b')}{\sqrt{\beta - b'}} db' \right\} \frac{[1 - A'(\beta)] d\beta}{\sqrt{\beta - b + A(b) - A(\beta)}}.$$

Supposons maintenant que les domaines d'influence des bords de fuite subsoniques se coupent à l'intérieur du domaine  $D$  (Fig. 2). Dans la région d'influence commune, nous avons:

$$(4.21) \quad N(a, b) = \frac{1}{\pi} \iint_{D_2} \frac{F(a', b') da' db'}{\sqrt{(a - a')(b - b')}} - \frac{1}{\pi} \int_{b_1}^b \frac{N(\beta)}{\sqrt{\beta - b + A(b) - A(\beta)}} \frac{[1 - A'(\beta)] d\beta}{\beta - b + a - A(\beta)} - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^a \frac{N(\alpha)}{\sqrt{\alpha - a + B(a) - B(\alpha)}} \frac{[1 - B'(\alpha)] d\alpha}{\alpha - a + b - B(\alpha)}$$

où  $N(a) = N(a, B(a))$  est la valeur de la fonction  $N(a, b)$  sur le bord de fuite subsonique  $ED$  et  $(a_1, B(a_1))$ , les coordonnées du point  $E$ .

La fonction  $N(a)$  peut être explicitée de façon similaire à la fonction  $N(b)$  écrite ci-dessus.

De cette manière, le problème peut être résolu pour une aile quelconque, les difficultés de calcul se réduisant à quelques quadratures. Les solutions obtenues coïncident, dans les cas particuliers, avec les solutions données dans [3, 4].

4.2. Cas de l'aile à bord d'attaque supersonique ponctuel

A la suite des considérations que nous venons de faire ci-dessus, nous excluons le cas où le bord d'attaque supersonique  $AF$  de l'aile est réduit à un point. Dans ce cas l'expression (4.15) ne constitue plus une solution de l'équation (4.14); le problème doit être abordé par une voie différente.

Considérons l'aile de la figure 3, où les équations des courbes  $OB$  of  $OF$  sont respectivement  $a = A(b)$  et  $b = B(a)$ . Nous supposons que les valeurs de la fonction  $N(a, b)$  dans le domaine  $D_1$  sont connues. L'équation intégrale (4.14) devient:

$$(4.22) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{D-D_1} \int N(\alpha, \beta) \frac{\theta(a-\alpha)}{(a-\alpha)^{3/2}} \frac{\theta(b-\beta)}{(b-\beta)^{3/2}} d\alpha d\beta = F(a, b) - \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \int N(\alpha, \beta) \frac{d\alpha}{(a-\alpha)^{3/2}} \frac{d\beta}{(b-\beta)^{3/2}}$$

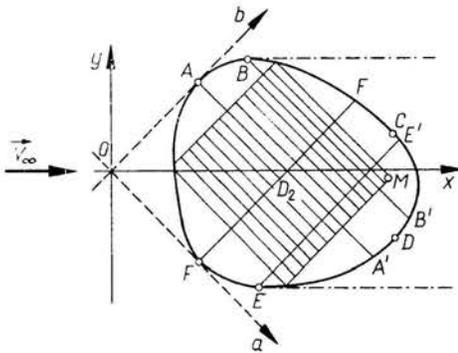


FIG. 2.

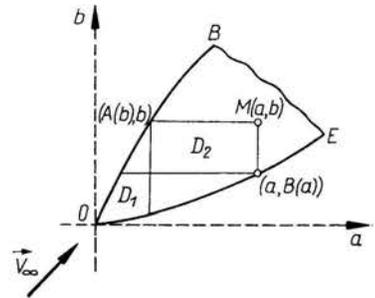


FIG. 3.

Cette équation peut être résolue par la technique précédente qui nous conduit au résultat:

$$N(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_{D_2} \int \frac{F(a', b')}{\sqrt{(a-a')(b-b')}} da' db' - \frac{1}{4\pi^2} \int_{D_2} \int \frac{da' db'}{\sqrt{(a-a')(b-b')}} \int_{D_1} \int \frac{N(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{(a-\alpha)^{3/2} (b-\beta)^{3/2}}$$

Après la transformation du dernier terme, la relation finale s'écrit:

$$(4.23) \quad N(a, b) + \frac{1}{\pi^2} \sqrt{[a-A(b)][b-B(a)]} \int_{D_1} \int \frac{N(\alpha, \beta)}{\sqrt{[A(b)-\alpha][B(a)-\beta]}} \frac{d\alpha d\beta}{(a-\alpha)(b-\beta)} = \frac{1}{\pi} \int_{D_2} \int \frac{F(a', b')}{\sqrt{(a-a')(b-b')}} da' db'$$

Cette relation (4.23) constitue une équation intégrale régulière de seconde espèce pour la détermination de la fonction  $N(a, b)$ . Un exemple concernant la solution d'un problème à écoulements coniques par la méthode des approximations successives, utilisant l'équation intégrale (4.23) est donné dans [5].

## 4.3. Ecoulements coniques

Nous allons considérer par la suite le cas où le domaine  $D$  est limité par deux demi-droites qui se coupent en 0. La surface de l'aile est une surface conique d'équation:

$$\tilde{f}(x, y) = yg\left(\frac{x}{y}\right).$$

Dans ce cas, la fonction  $F(a, b)$  est:

$$F(a, b) = F\left(\frac{b}{a}\right).$$

Pour commencer, nous allons aborder le cas de l'aile avec des bords d'attaque supersoniques (fig. 4).

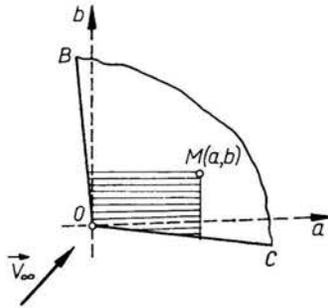


FIG. 4.

Soient  $b = m_1 a$  et  $b = m_2 a$  les équations des bords  $AC$  et  $AB$  respectivement. La fonction  $N(a, b)$  sera déterminée à l'aide de la relation (4.15), où la variable  $b$  est remplacée par une nouvelle variable  $m = b/a$ .

$$(4.24) \quad N(a, ma) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{m_2} F(\mu) \left\{ \frac{m+\mu}{2\mu\sqrt{\mu}} \ln \frac{\sqrt{m}+\sqrt{\mu}}{|\sqrt{\mu}-\sqrt{m}|} - \frac{\sqrt{m}}{\mu} \right\} d\mu \\ + \frac{a}{\pi} \int_{m_1}^{\infty} F(\mu) \left\{ \frac{m+\mu}{2\mu\sqrt{\mu}} \ln \frac{\sqrt{m}+\sqrt{\mu}}{|\sqrt{\mu}-\sqrt{m}|} - \frac{\sqrt{m}}{\mu} \right\} d\mu.$$

De la relation (4.24), il résulte que la fonction  $n(x, y)$  est constante sur chaque demi-droite issue de l'origine; l'écoulement est donc conique.

Si le bord  $AC$  est un bord d'attaque supersonique et  $AB$ , un bord (d'attaque ou de fuite) subsonique, la solution s'obtient de la relation (4.21) en particulierisant. Nous obtenons:

$$(4.25) \quad N(a, ma) = \frac{a}{\pi} \int_{m_1}^{m_2} F(\mu) \left\{ \frac{m+\mu}{\mu\sqrt{\mu}} \ln \frac{\sqrt{m_2}\sqrt{m-\mu}}{|\sqrt{\mu}\sqrt{m_2-m}-\sqrt{m}\sqrt{m_2-\mu}|} \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{m(m_2-m)(m_2-\mu)}{\mu m_2^2}} \right\} d\mu + \frac{a}{\pi} \left\{ \frac{\sqrt{m}}{m_2} \sqrt{m_2-m} - \frac{1-m}{\sqrt{1-m_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{m}\sqrt{1-m_2}}{\sqrt{m_2-m}} \right\} T.$$

Dans la relation (4.25),  $T = 0$  lorsque  $AB$  est un bord d'attaque subsonique et

$$T = \int_{m_1}^{m_2} \frac{F(t) dt}{\sqrt{m_2 - t}}$$

dans le cas du bord de fuite subsonique. Dans ce cas aussi, il résulte de la relation (4.21) que l'écoulement a un caractère conique. Lorsque les deux bords d'attaque de l'aile sont subsoniques, le problème s'intègre dans les discussions du paragraphe 4.2. Le problème des écoulements coniques peut être abordée par une méthode différente.

Supposons que la fonction  $N(a, ma)$  ait la forme:

$$N(a, ma) = aN(m).$$

De l'équation (4.15) il vient:

$$(4.26) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{m_1}^{m_2} \frac{N(\mu)}{\mu\sqrt{\mu}} \left\{ \ln \frac{\sqrt{m} + \sqrt{\mu}}{|\sqrt{m} - \sqrt{\mu}|} - 2\sqrt{\mu m} \frac{\mu + m}{(\mu - m)^2} \right\} d\mu = F(m),$$

$$m_1 < m < m_2.$$

Cette relation constitue l'équation intégrale du problème. Soit:

$$(4.27) \quad H(m) = \frac{1}{\pi} \int_{m_1}^{m_2} \frac{N(\mu)}{\mu\sqrt{\mu}} \ln \frac{\sqrt{m} + \sqrt{\mu}}{|\sqrt{m} - \sqrt{\mu}|} d\mu.$$

Nous avons:

$$\frac{1}{\pi} \int_{m_1}^{m_2} \frac{N(\mu)}{\mu\sqrt{\mu}} \frac{\sqrt{\mu}}{m} \frac{d\mu}{(\mu - m)^2} = H''(m) - \frac{1}{2m} H'(m).$$

Par conséquent, il résulte de la relation (4.26) que la fonction  $H(m)$  est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$m^2 H''(m) + m H'(m) - \frac{1}{4} H(m) = -F(m).$$

La solution générale de cette équation différentielle est:

$$(4.28) \quad \frac{1}{\pi} \int_{m_1}^{m_2} \frac{N(\mu)}{\mu\sqrt{\mu}} \ln \frac{\sqrt{m} + \sqrt{\mu}}{|\sqrt{m} - \sqrt{\mu}|} d\mu = -F_1(m) + 2c_1 \sqrt{m} - \frac{2c_2}{\sqrt{m}}.$$

$F_1(m)$  désigne une solution particulière de l'équation différentielle.

La relation (4.28) constitue une équation intégrale pour la détermination de la fonction  $N(m)$ . Nous allons transformer cette équation en opérant le changement de variables  $m = t^2$ ,  $\mu = \sigma^2$ ,  $m_1 = t_1^2$ ,  $m_2 = t_2^2$

$$(4.29) \quad \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{N(\sigma^2)}{\sigma^2} \ln \frac{|t - \sigma|}{t + \sigma} d\sigma = \frac{1}{2} F_1(t^2) - c_1 t + \frac{c_2}{t}.$$

L'équation (4.29) a été considérée dans [6]. Dans le cas qui nous préoccupe, la solution de cette équation est :

$$(4.30) \quad N(m) = -\frac{m}{\pi} \sqrt{(m_2-m)(m-m_1)} \left\{ k \int_0^{m_1} \frac{1}{\sqrt{\mu} \sqrt{(m_1-\mu)(m_2-\mu)}} \frac{d\mu}{m-\mu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{m_1}^{m_2} \frac{F_1(\mu)}{\sqrt{\mu} \sqrt{(m_2-\mu)(\mu-m_1)}} \frac{d\mu}{m-\mu} + \frac{c_2}{m\sqrt{m_1 m_2}} \right\} \\ - \frac{2}{\pi} m^2 \frac{d}{dm} \left[ \sqrt{(m_2-m)(m-m_1)} \left\{ k \int_0^{m_1} \frac{1}{\sqrt{\mu} \sqrt{(m_1-\mu)(m_2-\mu)}} \frac{d\mu}{m-\mu} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{m_1}^{m_2} \frac{F_1(\mu)}{\sqrt{\mu} \sqrt{(m_2-\mu)(\mu-m_1)}} \frac{d\mu}{m-\mu} + \frac{c_2}{m\sqrt{m_1 m_2}} \right\} \right].$$

La constante  $k$  est déterminée par la relation :

$$k \frac{1}{\sqrt{m_2}} K \left( \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) = -\frac{1}{2} \int_{m_1}^{m_2} \frac{F_1(\mu) d\mu}{\sqrt{\mu} \sqrt{(m_2-\mu)(\mu-m_1)}} + c_1 \pi - \frac{c_2 \pi}{\sqrt{m_1 m_2}}.$$

Les conditions qui imposent que la fonction  $N(m)$  soit bornée pour  $m = m_1$  et  $m = m_2$ , permettent de déterminer les constantes  $c_1$  et  $c_2$ . Elles sont équivalentes à la condition d'annulation du terme entre accolades de la relation (4.30) pour  $m = m_1$  et  $m = m_2$ . La solution obtenue est d'une forme assez compliquée, nous allons indiquer par la suite une méthode de résolution différente pour l'équation (4.28). En dérivant cette équation nous obtenons l'équation intégrale :

$$(4.31) \quad \frac{1}{\pi} \int_{m_1}^{m_2} \frac{N(\mu)}{\mu} \frac{d\mu}{\mu-m} = -\sqrt{m} F_1'(m) + c_1 + \frac{c_2}{m}.$$

La solution de cette équation intégrale est présentée sous la forme [7]:

$$(4.32) \quad N(m) = m \sqrt{(m_2-m)(m-m_1)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{m_1}^{m_2} -\frac{\sqrt{\mu} F_1'(\mu)}{\sqrt{(m_2-\mu)(\mu-m_1)}} \frac{d\mu}{\mu-m} - \frac{c_2}{m\sqrt{m_1 m_2}} \right\}.$$

Cette expression contient la constante  $c_2$  que l'on peut déterminer soit par la méthode indiquée précédemment, soit en rapportant l'expression (4.32) de  $N(m)$  dans l'équation intégrale (4.26).

Dans le cas où  $AB$  est un bord de fuite subsonique l'équation (4.26) contient également un terme avec  $N(m_2)$  en facteur. Le fait que la pression doit conserver une valeur finie sur le bord de fuite subsonique (condition de Kutta-Joukowski) permet de déterminer ce terme. Les mêmes procédés permettent d'étudier également les écoulements coniques d'ordre supérieur, les difficultés qui surviennent se référant uniquement au calcul.

**References**

1. D. HOMENTCOVSCHI, *Aérodynamique stationnaire linéarisée I (subsonique)*, Archives of Mechanics, **27**, 2, 325-341, 1975.
2. D. HOMENTCOVSCHI, *Considerations on an integral equation*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. Roumanie, **17**, 65, 193-197, 1973.
3. G. N. WARD, *Supersonic flow past thin wings I, General theory*, Quart. Mech. and Appl. Math., **2**, 136-152, 1949.
4. Э. А. Красильщикова, *Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва 1952.
5. M. A. HEASLET, H. LOMAX, *Supersonic and transonic small perturbation theory*, in: *General Theory of High Speed Aerodynamics*, Ed. by W. R. SEARS, London, Oxford University Press, 1955.
6. D. HOMENTCOVSCHI, *On an integral equation*, Glasgow Mathematical Journ., **15**, 95-98, 1974.
7. C. JACOB, *Introduction mathématique a la mécanique des fluides*, Bucarest-Paris 1959.

FACULTY OF ELECTROTECHNICS,  
POLYTECHNIC INSTITUTE OF BUCAREST.

Received October 1, 1975.