

3.5. — mechanika kompozytów

Czesław Woźniak
Małgorzata Woźniak

MODELOWANIE W DYNAMICE KOMPOZYTÓW.

TEORIA I ZASTOSOWANIA

25/1995

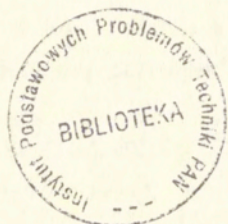
P. 269 a



WARSZAWA 1995

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 maja 1995 r.



56584



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark. wyd. 8,00 Ark. druk. 10,0

Oddano do drukarni w sierpniu 1995 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o. .

Warszawa, ul. Jasna 1

Czesław Woźniak

Ośrodek Mechaniki IPPT PAN

Małgorzata Woźniak

Politechnika Łódzka

MODELOWANIE W DYNAMICE KOMPOZYTÓW. TEORIA I ZASTOSOWANIA

Przedstawiona monografia jest syntezą badań, prowadzonych w latach 1993 - 1995, dotyczących dynamiki materiałów i konstrukcji o strukturze periodycznej, ze szczególnym uwzględnieniem problemów mikrodynamiki. Główne osiągnięcie to sformułowanie nowej ogólnej metody modelowania kompozytów, opisującej wpływ wielkości mikrostruktury (efekt skali) na dynamikę ciała. Opracowanie zawiera przegląd i analizę teorii różnych materiałowych i geometrycznych struktur periodycznych wraz z zastosowaniami. Podane przykłady wykazują celowość korzystania z zaproponowanych metod modelowania do rozwiązywania zadań o znaczeniu inżynierskim. Zasadniczą część monografii poprzedzono Wstępem, w którym dokonano pewnej klasyfikacji dotychczasowych podejść do dynamiki kompozytów periodycznych, podano motywację podjętych badań oraz ich zakres i cel. Ogólne wnioski sformułowano na końcu poszczególnych rozdziałów i podsumowano w Zakończeniu, gdzie również wskazano na kierunki kontynuacji rozwijanych metod i dalsze możliwości ich zastosowań.

Większość wyników omówionych w monografii uzyskano w ramach realizacji projektu badawczego KBN nr 3 3310 92 03 pt. "Mikrodynamika materiałów kompozytowych" z udziałem Eugeniusza Barona (Politechnika Śląska), Iwony Cieleckiej, Jarosława Jędrysiaka, Sylwestra Koniecznego, Bohdana Michalaka i Małgorzaty Woźniak (Politechnika Łódzka), Krystyny Mazur-Śniady

(Politechnika Wrocławska), Grzegorza Mielczarka (WAT), Stanisława Matysiaka, Wiesława Nagórko, Moniki Wągrowskiej i Ewarysta Wierzbickiego (Uniwersytet Warszawski) oraz Czesława Woźniaka (IPPT PAN). Oryginalne prace wymienionych autorów, stanowiące podstawę tego opracowania, oraz publikacje ściśle związane z omawianymi nowymi metodami modelowania kompozytów, zestawiono w wykazie literatury podstawowej i cytowano w tekście podając numer publikacji. Pozostałe pozycje literatury problemu przytaczano wymieniając nazwisko autora i rok wydania publikacji.

SPIS TREŚCI

Wstęp	7
Podstawowe oznaczenia	15
1. Podstawy makromodelowania	18
1.1 Mikromechanika	18
1.2 Pojęcia pomocnicze	21
1.3 Podstawowe hipotezy	23
1.4 Procedura makromodelowania	25
1.5 Modele z efektem skali	28
1.6 Modele lokalne	32
1.7 Uwagi końcowe	34
2. Zagadnienia liniowej sprężystości	36
2.1 Fale i drgania	36
2.2 Naprężenia cieplne	40
2.3 Wnioski	42
3. Kompozyty lepkosprężyste	43
3.1 Podstawowe równania	43
3.2 Przypadek szczególny: laminaty	45
3.3 Przykład	47
3.4 Wnioski	49
4. Termosprężystość kompozytów	51
4.1 Podstawowe równania	52
4.2 Modele lokalne	57
4.3 Przewodnictwo cieplne	58
4.4 Przykład	59
4.5 Wnioski	61
5. Zagadnienia nieliniowe	62
5.1 Podstawowe pojęcia i założenia	62
5.2 Teoria skończonych odkształceń sprężystych	64
5.3 Podejście alternatywne	68
5.4 Nieliniowa teoria małych odkształceń	70
5.5 Modele lokalne	73
5.6 Odkształcenia skończone kompozytów niesprężystych	74
5.7 Przykłady	76

6.	Mikrouszkodzenia w kompozytach warstwowych	83
6.1	Podstawowe założenia	83
6.2	Procedura makromodelowania	86
6.3	Modele z efektem skali	88
6.4	Modele lokalne	89
6.5	Stany deformacji i swobodna granica	90
6.6	Zastosowania	91
6.7	Wnioski	95
7.	Makromodelowanie w teorii płyt Reissnera	96
7.1	Podstawowe pojęcia	96
7.2	Procedura makromodelowania	99
7.3	Makromodele z efektem skali	103
7.4	Makromodele lokalne	106
7.5	Zastosowania	107
7.6	Wnioski	110
8.	Makromodelowanie w teorii płyt Kirchhoffa	110
8.1	Procedura makromodelowania	110
8.2	Makromodele z efektem skali	113
8.3	Makromodele lokalne	114
8.4	Zastosowania	115
8.5	Wnioski	119
9.	Powłoki faliste	119
9.1	Podstawowe pojęcia	119
9.2	Procedura makromodelowania	122
9.3	Makromodele z efektem skali	124
9.4	Makromodele lokalne	125
9.5	Uwagi końcowe	127
10.	Struktury siatkowe	128
10.1	Pojęcia wstępne	129
10.2	Opis dyskretny	130
10.3	Podstawy modelowania	132
10.4	Procedura makromodelowania	135
10.5	Makromodele z efektem skali	136
10.6	Makromodele lokalne	139
10.7	Przykłady	141
10.8	Wnioski	143
	Zakończenie	144
	Literatura cytowana w tekście	147

W S T Ę P

Materiał kompozytowy jest tworzywem złożonym z dwóch lub kilku składników, którego własności użytkowe (zwane także globalnymi) różnią się zasadniczo od własności składników. Fakt ten jest podstawą podziału mechaniki kompozytów na mikromechanikę, w ramach której rozpatrujemy odkształcenia i interakcje poszczególnych składników kompozytu, oraz makromechanikę, gdzie uwzględniamy wyłącznie globalne własności kompozytu jako nowego tworzywa. Własności te możemy albo określić bezpośrednio na drodze eksperymentalnej lub też otrzymywać za pomocą procedur analitycznych, biorąc za punkt wyjścia własności składników i sposób ich wzajemnego usytuowania oraz powiązania w kompozycie. Tym samym wyróżniamy odpowiednio podejścia fenomenologiczne i strukturalne do makromechaniki. W dalszym ciągu ograniczymy uwagę do podejść strukturalnych. Ograniczymy się także do rozpatrywania kompozytów mikroperiodycznych tj. kompozytów, które można umownie podzielić na bardzo wiele małych, powtarzających się komórek o identycznej budowie. W ramach podejść strukturalnych do makromechaniki, własności globalne takiego kompozytu można uzyskać przez analizę struktury materiałowej i geometrycznej tylko jednej typowej komórki, nazywanej zwykle elementem reprezentatywnym. Zauważmy, że wprowadzone powyżej pojęcie własności globalnych odwołuje się raczej do pewnych intuicji inżynierskich niż do aparatu pojęciowego mechaniki. Celem uściślenia tego pojęcia, równania makromechaniki uzyskane na podstawie określonego podejścia strukturalnego nazwiemy (matematycznym) makromodelem kompozytu a samo podejście - makromodelowaniem ⁽¹⁾.

Własności globalne kompozytu będziemy utożsamiać z pewnymi modułami lub funkcjonalami charakteryzującymi aktualnie rozpatrywany makromodel. Tym samym w ramach różnych podejść strukturalnych własności globalne kompozytu mogą być różnie formułowane.

Zasadniczym tematem tego opracowania jest nowa metoda modelowania kompozytów o strukturze mikro-periodycznej, prowadząca do makromodeli dogodnych w zastosowaniu do analizy procesów niestacjonarnych a w szczególności do zagadnień dynamicznych. Dążąc do umotywowania podjętych badań przedstawimy najpierw główne współczesne trendy w zakresie modelowania kompozytów periodycznych. W tym celu dokonamy dwóch niezależnych klasyfikacji metod modelowania. Pierwsza z nich to podział na:

(i) Metody ogólne, które nie narzucają żadnych a priori ograniczeń na strukturę geometryczną elementu reprezentatywnego (tj. na sposób rozkładu poszczególnych składników),

(ii) Metody specjalne, których zakres zastosowania ogranicza się do pewnej szczególnej klasy kompozytów, np. kompozytów warstwowych (laminatów), kompozytów zbrojonych długimi lub krótkimi włóknami o danym przekroju lub też kompozytów z periodycznym rozkładem inkluzji (wtrąceń) lub pustek określonego kształtu.

(1) Dla uproszczenia nazewnictwa będziemy także używać terminów "model" i "modelowanie" zamiast odpowiednio "makromodel" i "makromodelowanie". Podobnie przymiotnik "mikroperiodyczny" będziemy zastępować słowem "periodyczny".

Zarówno metody ogólne jak i specjalne są z reguły formułowane dla pewnych klas materiałów (liniowo-sprężystych, lepko-sprężystych etc.), przy ograniczeniach narzucanych na wielkość deformacji (teorie zlinearyzowanych odkształceń), oraz przy założeniu ciągłości przemieszczeń na powierzchniach kontaktu między składnikami. W praktyce tak metody ogólne jak i specjalne znajdują zastosowanie do badania kompozytów o ściśle określonej geometrii (laminaty, kompozyty włókniste, kompozyty z inkluzjami szczególnego kształtu).

Główny nurt badań współczesnej mechaniki kompozytów, będąc motywowany bardziej aplikacyjnym niż poznawczym aspektem tej tematyki, koncentruje się na rozwoju metod specjalnych tj. na analizie struktur materiałowych mających szczególne znaczenie w praktyce inżynierskiej. Literatura problemu jest bardzo obszerna i dlatego ograniczymy się tylko do wymienienia kilku podstawowych podręczników i monografii z tego zakresu, takich jak R. Jones, 1980, J. Aboudi, 1991, R.M. Christensen, 1979, czy też 12-tomowe opracowanie pod redakcją A. N. Guzja, 1993; w cytowanych pozycjach znajdują się także bogate przeglądy bibliograficzne. W dalszym ciągu tej pracy metodami specjalnymi modelowania nie będziemy się zajmować.

Podstawą metod ogólnych makromodelowania kompozytów są procedury uśrednienia. Fizyczną przesłankę tych procedur stanowi fakt, że wielkość elementu reprezentatywnego materiału kompozytowego jest zaniedbywanie mała w porównaniu z wielkością rozpatrywanego ciała (elementu konstrukcji) utworzonego z tego materiału. Tym samym w roważaniach dotyczących makromodelowania pojawia się w naturalny sposób pojęcie małego parametru, charakteryzującego pewien wybrany wymiar długości elementu reprezentatywnego. Jednocześnie mamy do czynienia z dwoma układami współrzędnych materialnych, z których jeden określa położenie punktu materialnego w elemencie reprezentatywnym (mikrowspółrzędne) drugi natomiast dotyczy globalnego opisu ciała w ramach makromodelu (makrowspółrzędne). Istnienie dwóch rodzajów współrzędnych o różnych skalach wielkości umożliwia wprowadzenie pewnych rozwinięć dwuskalowych dla poszukiwanych pól kinematycznych a w następstwie dokonania uśrednień po obszarze elementu reprezentatywnego, prowadzących do równań, w których nie występują mikrowspółrzędne, tj. do makromodelu kompozytu.

Wspomniane rozwinięcia dwuskalowe są często przedstawiane w postaci szeregów podług potęg małego parametru, z którym formalnie

dążymy do zera. Eliminacja mikrowspółrzędnych wymaga tutaj rozwiązania pewnych zagadnień brzegowych dla elementu reprezentatywnego (tzw zagadnień "na komórce"). Otrzymane makromodele nazywamy wtedy asymptotycznymi. Podejście takie, było omawiane np. w monografiach A. Bensoussana, J.L. Lionsa i G. Papanicolaou, 1987, E. Sanchez -Palencii i A.Zaoui, 1985, N.S.Bakhvalova i G.P. Panasenko, 1984, gdzie również znaleźć można bogatą literaturę tego problemu. Alternatywne podejścia stosujące różne rodzaje uśrednień lecz nie wykorzystujące bezpośrednio metod asymptotycznych, można znaleźć w monografii S.Nemata -Nassera i M.Hori, 1993, czy też w serii opracowań dotyczących tzw. metody parametrów mikrolokalnych, zapoczątkowanej pracami C. Woźniaka i S.J.Matysiaka, 1987,(przegląd literatury z tego zakresu został podany w opracowaniu C. Woźniaka, 1995). Na tej drodze unikamy trudności związanych z rozwiązywaniem zagadnień brzegowych dla elementu reprezentatywnego (zagadnień " na komórce"). W przypadku materiałów z pamięcią, zagadnienie "na komórce" obejmuje nie tylko problem brzegowy lecz także początkowy. Konieczność rozwiązywania tych problemów zmniejsza użyteczność ścisłych metod asymptotycznych w zastosowaniach inżynierskich teorii.

Przedstawione powyżej ogólne metody modelowania kompozytów biorą jako punkt wyjścia równania mikromechaniki kompozytu a podstawowymi niewiadomymi w równaniach makromodeli są pewne uśrednione pola przemieszczeń (lub uśrednione pola niemechaniczne, takie jak np. pole temperatury). Inne ogólne sposoby podejścia do formułowania równań makromechaniki, w których także nie stosujemy metod asymptotycznych, wykorzystują koncepcję ośrodka ciągłego ze strukturą wewnętrzną, podaną m. innymi w pracach A.E.Greena i P.M. Naghadięgo, 1965, A.C. Eringen a i E.S.Suhubięga, 1964, oraz C. Woźniaka,1969. Odpowiednie makromodele periodycznego kompozytu, otrzymane w wyniku uśredniania, nazwiemy modelami mikrostrukturalnymi, a podstawowymi niewiadomymi kinematycznymi są nie

tylko pola przemieszczeń lecz także pewne dodatkowe stopnie swobody.

Drugą klasyfikację metod modelowania można przeprowadzić dzieląc makromodele kompozytów na:

- a/ Modele lokalne, w których postać relacji makromodelu jest niezależna od wymiarów długości elementu reprezentatywnego,
- b/ Modele z efektem skali, opisujące wpływ wielkości elementu reprezentatywnego na własności globalne kompozytu.

Ogólna idea modeli lokalnych polega na zastąpieniu ciała o strukturze mikroperiodycznej pewnym równoważnym ciałem jednorodnym, przy czym równoważność ta oznacza, że własności globalne kompozytu periodycznego są określone stałymi modułami (lub funkcjonalami nie zależnymi od wyboru cząstki ciała) determinującymi własności pewnego jednorodnego ośrodka ciągłego. W przypadku ciała sprężystego moduły te nazywamy modułami efektywnymi a odpowiednie metody makromodelowania - metodami modułów efektywnych. Do określenia modułów efektywnych mogą służyć zarówno podejścia asymptotyczne jak i wymieniona wyżej metoda parametrów mikrolokalnych a także przybliżone metody wyznaczania tych modułów, omówione w cytowanej już monografii S. Nemat-Nasser i M. Hori, 1993. Istotną rolę odgrywa tu fakt, że wielkości modułów efektywnych mogą być w wielu przypadkach oceniane zarówno z góry jak i z dołu.

Przykładem modeli z efektem skali są modele mikrostrukturalne. Zgodnie ze wspomnianą już koncepcją ośrodka ciągłego z wewnętrzną strukturą mamy tu do czynienia z opisem kinematyki ciała, którego cząstkom materialnym przyporządkowujemy nie tylko położenie w przestrzeni (w każdej ustalonej chwili) lecz także pewną kinematyczną strukturę, opisaną niezależnymi dodatkowymi stopniami swobody tej cząstki. Liczba niezależnych pól kinematycznych jest tu większa

od liczby składowych stanu przemieszczenia. Pola te zależą od makrospórządnych i czasu, stanowiąc współczynniki pewnych rozwinięć dwuskalowych za pomocą których opisujemy ruch poszczególnych powtarzalnych elementów periodycznego kompozytu. Częstka ośrodka ciągłego z mikrostrukturą (stanowiącego model kompozytu) nie reprezentuje więc punktu materialnego lecz powtarzający się materialny element objętościowy (komórkę) kompozytu. Podstawowe równania modeli mikrostrukturalnych otrzymuje się najczęściej drogą uśrednienia z zasady stacjonarności działania; dla kompozytów utworzonych z materiałów sprężystych otrzymujemy na tej drodze układ n równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu (typu hyperbolicznego), gdzie n jest liczbą niezależnych stopni swobody cząstki ośrodka ciągłego z mikrostrukturą, stanowiącego makromodel rozpatrywanego kompozytu mikro-periodycznego. Tym samym w zagadnieniach brzegowych zachodzi konieczność sformułowania na brzegu ciała n warunków dla niezależnych pól kinematycznych, gdzie $n > 3$. Ponieważ przybrzeżne cienkie warstwy materiału kompozytowego są często jednorodne, przeto w aspekcie zastosowań teorii brak jest fizycznych podstaw do formułowania warunków brzegowych dla dodatkowych stopni swobody. Dlatego też modele mikrostrukturalne są wykorzystywane zwłaszcza do badania drgań i fal w nieograniczonych ośrodkach o strukturze periodycznej, gdzie nie występuje konieczność specyfikacji warunków brzegowych. Należy zaznaczyć, że modele z efektem skali mogą być także formułowane w ramach metod asymptotycznych przy wykorzystaniu wyższych przybliżeń; procedura taka, z uwagi na znaczne trudności formalne, nie jest jednak stosowana.

Tematykę tego opracowania stanowią ogólne podstawy i wybrane problemy dynamiki materiałów i konstrukcji kompozytowych o strukturze mikroperiodycznej. Główna uwaga będzie skoncentrowana na ogólnych metodach makromodelowania, umożliwiającących badanie efektów mikrodynamicznych. Tym samym w pierwszym rzędzie rozważane będą

modele z efektem skali, gdyż mikrodynamika kompozytu jest ściśle związana z wpływem wielkości elementu reprezentatywnego na ruch ciała. Na podstawie wyników zawartych w (79)-(82), (88) oraz ich szerokiego uogólnienia podanego w (83), zostanie przedstawiona nowa ogólna metoda makromodelowania, uwzględniająca efekty skali. Idea tej metody korzysta z dwóch założeń. Pierwszym z nich jest heurystyczna hipoteza, że mikroperiodyczna niejednorodność materiału kompozytowego wywołuje szczególny rodzaj zaburzeń pola przemieszczenia, które mogą być superponowane na uśredniony ruch ciała. Jednocześnie zakładamy, że wielkości powstałych zaburzeń są określone za pomocą dodatkowych pól kinematycznych które, podobnie jak i uśrednione przemieszczenia (makroprzemieszczenia), zależą tylko od makrowspółrzędnych i czasu. Pola takie będziemy nazywać makropolami (polami makroskopowymi). Drugie założenie ma charakter formalnego przybliżenia, w ramach którego pomijamy przyrosty wartości makropól w obrębie podstawowego elementu kompozytu (komórki periodyczności) w porównaniu z wartościami tych makropól. Cechą charakterystyczną otrzymanych makromodeli kompozytu jest niezależność dodatkowych pól kinematycznych od warunków brzegowych; tym samym pola te nazwiemy makroparametrami wewnętrznymi, tj. zależnymi tylko od warunków początkowych, wynika stąd:

- (i) Możliwość formułowania warunków brzegowych analogicznie jak w klasycznej mechanice ciała stałego, co uwalnia rozważania od trudności typowych dla modeli mikrostrukturalnych,
- (ii) Prostota równań proponowanych modeli (w porównaniu z modelami mikrostrukturalnymi), w których (dla kompozytu sprężystego) mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi cząstkowymi tylko dla makroprzemieszczeń, natomiast makroparametry wewnętrzne wyznaczamy z równań różniczkowych zwykłych, zawierających tylko pochodne czasowe.

Stosowane w tej pracy makromodele kompozytów i konstrukcji o strukturze mikroperiodycznej nazwiemy modelami z makroparametrami wewnętrznymi⁽¹⁾. Stanowią one pewne uogólnienie modeli z parametrami mikrolokalnymi, których przegląd wraz z literaturą problemu można znaleźć w cytowanym już opracowaniu C. Woźniaka 1995. Główną tezą pracy jest, że w wielu procesach niestacjonarnych wpływ wielkości mikrostruktury (tj. wymiarów długości elementu reprezentatywnego) na globalne własności elementu kompozytowego jest istotny i nie może być pomijany. Tym samym stosowanie makromodeli lokalnych w zagadnieniach brzegowo- początkowych dynamiki kompozytów może prowadzić do fizycznie niepoprawnych wyników. Teza ta uzasadnia konieczność stosowania w tych zagadnieniach modeli z efektem skali a w szczególności proponowanych modeli z makroparametrami wewnętrznymi, które z uwagi na swoją względną prostotę są dogodne do analizy problemów o znaczeniu inżynierskim.

Opracowanie składa się z dziesięciu rozdziałów, przy czym w rozdziale pierwszym, na przykładzie kompozytów liniowo - sprężystych, omówiono szczegółowo metodę makromodelowania, prowadzącą do modeli z makroparametrami wewnętrznymi. W trzech kolejnych rozdziałach omówiono liniowe problemy sprężystości oraz termosprężystości. Modele dla zagadnień nieliniowych przedstawiono w rozdziale piątym. Niektóre problemy kompozytów warstwowych z imperfekcjami poddano analizie w rozdziale szóstym. Cztery ostatnie rozdziały dotyczą makromodelowania płyt, powłok i konstrukcji siatkowych o strukturach mikroperiodycznych, w których także zastosowano modele z

(1) W terminologii angielskiej stosowano określenie "refined models", por. (79).

makroparametrami wewnętrznymi. Wnioski wynikające z przedstawionych w pracy rozważań sformułowano w zakończeniu. Celem opracowania jest danie Czytelnikowi metody badania różnych zagadnień dynamiki kompozytów. Efektywność tej metody potwierdzają zamieszczone w opracowaniu przykłady zastosowań.

P O D S T A W O W E O Z N A C Z E N I A

Wskaźniki i, j, k, \dots przebiegają ciąg $1, 2, 3$ i odnoszą się do prostokątnych współrzędnych kartezjańskich w przestrzeni miejsc (przestrzeni fizycznej); punkty tej przestrzeni oznaczono przez $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ itp. Współrzedną czasową oznaczono literą t przyjmując, że (x_1, x_2, x_3, t) są współrzędnymi inercyjnymi w czasoprzestrzeni Galileusza. Wskaźniki $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ także przebiegają ciąg $1, 2, 3$ lecz dotyczą współrzędnych punktów materialnych ciała w jego konfiguracji odniesienia; punkty te oznaczono przez $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)$, $\mathbf{Z} = (Z^1, Z^2, Z^3)$ etc. W zagadnieniach dwuwymiarowych będziemy korzystać z układu współrzędnych x_1, x_2 ; wskaźniki odnoszące się do tego układu współrzędnych oznaczamy literami $K, L, M \dots$; przebiegają one ciąg $1, 2$. Wprowadzamy również nietensorowe wskaźniki A, B, \dots oraz a, b, \dots , przebiegające odpowiednio ciągi $1, \dots, N$ oraz $1, \dots, n$. Konwencja sumacyjna (sumowanie podług dwukrotnie występującego wskaźnika) dotyczy wszystkich wyżej wymienionych wskaźników, jeżeli w tekście pracy nie zaznaczono inaczej.

Element reprezentatywny dowolnej trójwymiarowej struktury periodycznej przyjęto w postaci $V := (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2) \times (-l_3/2, l_3/2)$. Dla całkownej funkcji V -periodycznej $f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ zmiennych x_i , $i=1, 2, 3$ (tj. funkcji o okresach l_i w kierunkach osi x_i), gdzie \mathbf{a} jest dowolnym wektorem, stosowano operator uśrednienia $\langle \cdot \rangle$ dany przez

$$\langle f \rangle(\mathbf{a}) := \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \int_V f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) dv(\mathbf{x}),$$

gdzie $dv(x) := dx_1 dx_2 dx_3$. W ramach teorii skończonych odkształceń, element reprezentatywny oznaczono przez V_R , gdzie wskaźnik R wskazuje na odniesienie danego obiektu do konfiguracji odniesienia (ang. "reference configuration"). Oznaczenie dla operatora uśrednienia V_R -periodycznej funkcji $f(Z, \alpha)$ zmiennych Z^α ma wtedy postać

$$\langle f \rangle(\alpha) := \frac{1}{4l_2 l_3 V_R} \int f(Z, \alpha) dv(Z),$$

gdzie $dV(Z) := dZ^1 dZ^2 dZ^3$. Dalsze podobne operatory uśredniania wprowadzono w tekście pracy. Gdy periodyczna funkcja f nie zależy od parametru α , to jej wartość średnia jest stała i oznaczamy ją przez $\langle f \rangle$.

Funkcje odnoszące się do opisu kompozytu w ramach mikromechaniki oznaczano małymi literami, natomiast dużymi literami - gdy jest to opis w ramach makromechaniki. Pochodne cząstkowe oznaczono przecinkiem poprzedzającym wskaźnik, pochodne podług czasu - przez umieszczenie kropki nad symbolem funkcji. Symetryzację tensora podług pary wybranych wskaźników przeprowadzono przez ujęcie tych wskaźników w nawias okrągły, antysymetryzację - przez ujmowanie ich w nawias prostokątny. Przez $\partial\Omega$ oznaczono brzeg obszaru Ω oraz przez $\bar{\Omega}$ - jego domknięcie (tj. obszar Ω wraz z brzegiem $\partial\Omega$). Ponadto przez $V(x)$ oznaczono przesunięcie o wektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ elementu reprezentatywnego V o środka w punkcie $x = 0$: $V(x) := x + V$. Podobnie użyto definicji $V_R(x) := X + V_R$, gdy element reprezentatywny V_R przesuwamy o wektor X . Każdy z obszarów $V(x)$, $V_R(x)$, który jest jednocześnie zawarty w obszarze zajęтым przez kompozyt, nazwiemy celą (lub komórką periodyczności). Odległość punktów x, z oznaczamy przez $\|x - z\|$, gdzie $\|x - z\|^2 = \delta_{ij}(x_i - z_i)(x_j - z_j)$. $O(\epsilon)$, $\epsilon > 0$, jest wielkością rzędu ϵ tj. funkcją argumentu ϵ taką, że dla $\epsilon \rightarrow 0$ zachodzi $O(\epsilon) \rightarrow 0$, oraz $O(\epsilon)/\epsilon$ nie dąży wraz z ϵ do zera. Podobnie przez $O(1)$ oznaczymy funkcje,

które zależą od pewnego parametru ϵ , $\epsilon > 0$, lecz nie dążą wraz z ϵ do zera; specyfikacja parametru ϵ zależy od kontekstu pracy. Relacje $f \in O(\epsilon)$ lub $f \in O(1)$, w których f jest funkcją argumentu ϵ , stwierdzają, że funkcja ta ma jedną z powyżej omówionych własności. Pozostałe oznaczenia wprowadzono sukcesywnie w tekście a odstępstwa od wprowadzonych tutaj oznaczeń, zaznaczano w obrębie poszczególnych podrozdziałów.

1. PODSTAWY MAKROMODELOWANIA

W rozdziale tym, na przykładzie materiałów liniowo-sprężystych, przedstawiono ogólną metodę makromodelowania kompozytów o mikro-periodycznej strukturze. Metoda ta, z pewnymi modyfikacjami, będzie zastosowana do modelowania innych rodzajów materiałów a także konstrukcji kompozytowych, w dalszych rozdziałach książki. Przedstawione tu podejście do makromechaniki jest pewnym uogólnieniem wyników zawartych w pracach (79,80,88).

1.1 MIKROMECHANIKA

Przedmiotem rozważań jest kompozyt o strukturze periodycznej, utworzony z doskonale powiązanych wzajemnie (tj. bez rys bądź szczelin) liniowo-sprężystych składników. Oznaczmy przez Ω obszar w przestrzeni fizycznej zajęty przez kompozyt w stanie naturalnym. Załóżmy, że $V = (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2) \times (-l_3/2, l_3/2)$ jest elementem reprezentatywnym tego kompozytu. Oznaczając ponadto przez L minimalny charakterystyczny wymiar długości obszaru Ω oraz przyjmując $l = \sqrt{(l_1)^2 + (l_2)^2 + (l_3)^2}$ jako parametr mikrostruktury rozpatrywanego periodycznego kompozytu, zdefiniujemy iloraz $\lambda = l/L$. Traktując λ jako wielkość zaniedbywalnie małą w porównaniu z liczbą 1, $\lambda \ll 1$, ograniczymy dalej rozważania do kompozytów o strukturze mikroperiodycznej, tj. w której wielkość elementu reprezentatywnego jest pomijalnie mała w porównaniu z wielkością całego ciała. W przypadku struktur mikroperiodycznych

możemy wyróżnić dwa sposoby opisu mechaniki kompozytów: mikromechanikę, którą będziemy tu utożsamiać z opisem kompozytu jako sprężystego ciała niejednorodnego, oraz makromechanikę, w ramach której traktujemy kompozyt jako tworzywo o pewnych nowych (globalnych) własnościach, całkowicie różnych od własności poszczególnych składników. Przedstawiona poniżej procedura makromodelowania polega, mówiąc poglądowo, na wyprowadzeniu równań makromechaniki z równań mikromechaniki. Celowość stosowania tego rodzaju postępowania uzasadnimy na końcu podrozdziału a rozważania ograniczymy narazie do materiałów liniowo- sprężystych.

Jak już powyżej zaznaczono, równania mikromechaniki kompozytu to równania liniowej teorii sprężystości ciała niejednorodnego o periodycznej strukturze materiałowej; strukturę taką nazywamy dalej V - periodyczną. Oznaczamy przez s_{ij} , e_{ij} , u_i , v , b_i , p_i , ρ kolejno: naprężenia, odkształcenia, przemieszczenia, przyrost temperatury, siły masowe, siły zewnętrzne brzegowe oraz gęstość masy rozpatrywanego ciała. Zakładamy, że s_{ij} , e_{ij} , u_i , v są (dość znacznie regularnymi) funkcjami zmiennych $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in [t_0, t_f)$, b_i są stałymi, p_i są funkcjami argumentów $x \in \partial\Omega$, $t \in [t_0, t_f)$ oraz ρ jest funkcją $x \in \Omega$.

Funkcje s_{ij} , e_{ij} , ρ mogą doznawać nieciągłości na powierzchniach w Ω rozdzielających składniki kompozytu. Jako podstawowe równania mikromechaniki przyjmujemy:

(i) Równania konstytutywne

$$(1.1) \quad s_{ij} = a_{ijkl} e_{kl} + b_{ij} v,$$

w których a_{ijkl} , b_{ij} są tensorami modułów sprężystości, spełniającymi znane warunki symetrii i eliptyczności,

(ii) Równania geometryczne

$$(1.2) \quad e_{ij} = u_{(i,j)},$$

przy stosowaniu których zakładamy, że gradienty przemieszczenia są małe wobec jedności (ich iloczyny i wyższe potęgi pomijamy względem jedności),

(iii) Więzy kinematyczne w postaci warunków narzuconych na pole

przemieszczenia u_i , wynikających np. z nieściśliwości bądź nierozciągłości poszczególnych składników kompozytu a także z hipotez ograniczających rozważania tylko do pewnej klasy ruchów ciała,

(i v) Równania ruchu w słabej postaci

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta u_i dv + \int_{\Omega} s_{ij} \delta e_{ij} dv = \int \rho_i \delta u_i da + \int \rho b_i \delta u_i dv,$$

która winna być spełniona dla każdego $\rho \delta e_{ij} = \delta u_{(i,j)}$ i każdego (dostatecznie regularnego) pola testującego δu_i określonego na $\bar{\Omega}$ i zgodnego z więzami kinematycznymi. Wprowadzony do rozważań warunek (1.3) nazywany jest zwykle zasadą prac przygotowanych i przy braku więzów kinematycznych ma być spełniony dla dowolnych przemieszczeń przygotowanych δu_i . Prowadzi to do równań ruchu

$$(*) \quad \rho \ddot{u}_i - s_{ij,j} - \rho b_i = 0,$$

spełnionych w częściach obszaru Ω zajętych przez poszczególne składniki kompozytu, do warunków ciągłości

$$(**) \quad [s_{ij}] n_j = 0$$

na powierzchniach rozdzielających te składniki (n_j jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni nieciągłości oraz $[s_{ij}]$ - skolem tensora naprężenia na tak zorientowanej powierzchni) i do naturalnych warunków brzegowych

$$(***) \quad s_{ij} n_j - \rho_i = 0$$

na brzegu $\partial\Omega$, w których n_j jest wektorem jednostkowym zewnętrze normalnym do brzegu.

Dla kompozytów periodycznych pola tensorowe a_{ijk} , b_{ij} w (1.1) oraz gęstość masy ρ w (1.3) są V -periodycznymi, silnie oscylującymi funkcjami, przyjmującymi stałe wartości w częściach obszaru Ω zajętych przez dany składnik kompozytu. Fakt ten sprawia, że równania mikromechaniki przyjęte w postaci (1.1), (1.2), (*), (**), (***) nie stanowią dogodnego narzędzia analitycznego do rozwiązywania problemów mechaniki kompozytów. Tym samym równania mikromechaniki stanowią jedynie punkt wyjścia przedstawionej dalej procedury makromodelowania. Z uwagi na konieczność wprowadzenia więzów kinematycznych

w trakcie tej procedury, będziemy dalej korzystać z równań (1.1), (1.2) oraz ze słabej postaci równań ruchu (1.3).

1.2 POJĘCIA POMOCNICZE

Obecnie wprowadzimy dwa pojęcia pomocnicze, które będą pełnić istotną rolę zarówno w samej metodzie makromodelowania jak i w otrzymanych równaniach makromechaniki.

Pierwsze z tych pojęć jest związane z założeniem, że w ramach makromechaniki nie będziemy rozpatrywać zupełnie dowolnych rozkładów przemieszczeń lecz takie tylko, które w obrębie poszczególnych komórek kompozytu z wystarczającą dokładnością można aproksymować kombinacjami liniowymi pewnych danych liniowo - niezależnych funkcji. Z pośród tych funkcji wyróżniamy tzw. funkcje mikrokształtu, które będą postulowane niezależnie w każdym szczególnym problemie. Ich sens fizyczny jest zbliżony do znaczenia jakie pełnią funkcje kształtu w znanej metodzie elementów skończonych. Funkcje mikrokształtu oznaczymy przez $h^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$, zakładając, że są one ciągle i mają kawałkami ciągle pierwsze pochodne, są liniowo niezależne oraz V -periodyczne (a tym samym zależne od parametru mikrostruktury \mathcal{L}). Ponadto przyjmujemy, że:

- (i) Średnie wartości funkcji h^A na komórce są równe zero: $\langle h^A \rangle = 0$,
- (ii) Wartości $h^A(x)$ jako funkcje argumentu \mathcal{L} dążą do zera gdy $\mathcal{L} \rightarrow 0$ tj. $h^A(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$ dla każdego x ,
- (iii) Wartości gradientów $h^A_{,i}(x)$ jako funkcje argumentu \mathcal{L} są ograniczone i nie dążą do zera gdy $\mathcal{L} \rightarrow 0$, to jest $h^A_{,i}(x) \in \mathcal{O}(1)$ dla każdego x .

Przejście graniczne $\mathcal{L} \rightarrow 0$ należy rozumieć jako związane ze zmianą wyłącznie wielkości elementu reprezentatywnego, bez zmiany jego kształtu (gdy $\mathcal{L} \rightarrow 0$ to ilorazy l_i / \mathcal{L} nie ulegają zmianie).

Prostym przykładem funkcji mikrokształtu jest np. funkcja

$$h(x) = \mathcal{L} \sin(2n_1 \pi x_1 / l_1) \sin(2n_2 \pi x_2 / l_2) \sin(2n_3 \pi x_3 / l_3),$$

gdzie n_1, n_2, n_3 są całkowitymi liczbami różnymi od zera. Funkcje h^A można również przyjmować dyskretyzując element reprezentatywny w ten sposób, by były spełnione warunki (i) - (iii)

Drugie pojęcie pomocnicze to pojęcie funkcji, za pomocą których można opisać poszukiwane pola występujące w równaniach makromechaniki kompozytu. Biorąc pod uwagę naturalne wymaganie, by równania te były dogodne do przeprowadzenia obliczeń numerycznych, występujące w nich niewiadome pola oraz ich pochodne nie mogą doznawać znaczących oscylacji w obrębie poszczególnych komórek kompozytu.

Tym samym będziemy wymagać, by rozpatrywane funkcje, określone na obszarze Ω , były w przybliżeniu stałe w obrębie dowolnej komórki $V(x)$ zawartej w Ω , $V(x) \subset \Omega$. Funkcje spełniające ten warunek nazwiemy makrofunkcjami. Celem dokładnego zdefiniowania tego pojęcia oznaczymy przez ϵ_F dokładność numeryczną, z którą wyznaczamy wartości liczbowe $F(x)$ funkcji rzeczywistej F określonej na Ω . Zakładamy milcząco, że funkcja ta może zależeć także od współrzędnej czasowej t . Jeżeli dla każdej pary argumentów x, z należących do Ω takich, że $\|x - z\| < l$ (tj. należących do tej samej komórki periodyczności), zachodzi warunek $|F(x) - F(z)| < \epsilon_F$, wtedy F nazwiemy makrofunkcją. Jeżeli funkcja F jest ciągła wraz z pochodnymi a warunki podobnej postaci zachodzą także dla wszystkich jej pochodnych (wraz z pochodnymi czasowymi, gdy F jest zależną od argumentu t), to F nazwiemy regularną makrofunkcją. Celem określenia makrofunkcji regularnej należy przyjąć, że wraz z dokładnością numeryczną ϵ_F samej funkcji, znane są także dokładności numeryczne $\epsilon_{F_1}, \epsilon_{F_2}$ etc. odnoszące się do wszystkich pochodnych funkcji F . Pojęcie regularnej makrofunkcji określonej na Ω można oczywiście wprowadzić tylko wtedy, gdy jest dany element reprezentatywny V , określający w Ω strukturę periodyczną, oraz dokładności numeryczne dotyczące samej funkcji oraz jej pochodnych.

Na zakończenie tego podrozdziału przedstawimy dwie pomocnicze formuły, związane z wprowadzonymi pojęciami.

Niech $f(x, F(x))$ będzie funkcją złożoną, ciągłą względem obu argumentów, V -periodyczną względem pierwszego argumentu, w której F jest makrofunkcją określoną na Ω . Aproxymujmy obszar Ω sumą $UV(x)$, $x \in \Lambda$, wzajemnie rozłącznych komórek $V(x)$, gdzie Λ jest siatką punktów w Ω taką, że $V(x) \subset \Omega$ dla każdego $x \in \Lambda$. Zgodnie z powyższymi założeniami, otrzymujemy

$$\int_{\Omega} f(x, F(x)) dv(x) = \sum_{x \in \Lambda} \int_{V(x)} f(z, F(z)) dv(z) + O(\lambda),$$

$$\int_{V(x)} f(z, F(z)) dv(z) = \int_{V(x)} f(z, F(x)) dv(z) + O(\epsilon_F),$$

$$\sum_{x \in \Lambda} \int_{V(x)} f(z, F(x)) dv(z) = \int_{\Omega} \langle f \rangle (F(x)) dv(x) + O(\lambda),$$

co prowadzi do

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} f(x, F(x)) dv(x) = \int_{\Omega} \langle f \rangle (F(x)) dv(x) + O(\lambda) + O(\epsilon_F).$$

Łatwo także zauważyć, że z uwagi na $h^A(x) \in O(\lambda)$, $\lambda F_{,i}^A(x) \in O(\epsilon_F)$, mamy także $h^A(x) F_{,i}(x) \in O(\epsilon_F)$ a tym samym

$$(1.5) \quad (h^A F)_{,i}(x) = h^A_{,i}(x) F(x) + O(\epsilon_F).$$

Z formuł (1.4), (1.5) będziemy korzystać w trakcie procedury makromodelowania. Wielkości λ , ϵ_F , gdzie F jest dowolną makrofunkcją, zgodnie z ich znaczeniem, tu i dalej pełnią rolę pewnych małych parametrów.

1.3 PODSTAWOWE HIPOTEZY

Podstawą proponowanej metody modelowania są dwie hipotezy, które sformułowane zostaną przy wykorzystaniu pojęć makrofunkcji oraz funkcji mikrokształtu, wprowadzonych w podrozdziale 1.2. Pierwsza z tych hipotez dotyczy kinematyki kompozytu. Ma ona sens heurystyczny przyjmując, że mikroperiodyczna niejednorodność materiału wywołuje zaburzenia pola przemieszczenia, które można:

(i) w każdym szczególnym problemie aproxymować z dostateczną dokładnością sumą postaci $h^A(x) V_i^A(x, t)$ gdzie h^A , $A=1, \dots, N$, jest postulowanym układem liniowo niezależnych funkcji mikrokształtu

oraz $V_i^A(\cdot, t)$ są nieznanymi regularnymi makrofunkcjami

(ii) superponować na pewien "niezaburzony" ruch kompozytu tj. ruch określony regularnymi makrofunkcjami

Pola $U_i(\cdot, t)$ nazwiemy makroprzemieszczeniami, natomiast dodatkowe niewiadome pola $V_i^A(\cdot, t)$ dogodnie nazwać makromarametrami wewnętrznymi (znaczenie określenia "wewnętrzny" zostanie wyjaśnione w podrozdziale 1.5). Funkcje U_i, V_i^A będą pełnić rolę podstawowych niewiadomych kinematycznych w ramach poszczególnych makromodeli kompozytu.

Podsumowując powyższe uwagi, pierwszą z wprowadzonych hipotez nazwiemy hipotezą makrolokalizacji, gdyż wyraża ona podstawowe niewiadome mikromechaniki (w rozważanym przypadku pole przemieszczenia u_i) przez pewne regularne makrofunkcje, będące podstawowymi niewiadomymi w ramach makromechaniki.

Hipoteza Makrolokalizacji. Pola przemieszczeń dla mikroperiodycznego kompozytu można przedstawić w postaci

$$(1.6) \quad u_i(x, t) = U_i(x, t) + h^A(x) V_i^A(x, t),$$

w której h^A jest postulowanym układem liniowo-niezależnych funkcji mikrokształtu oraz $U_i(\cdot, t), V_i^A(\cdot, t)$ są dowolnymi regularnymi makrofunkcjami.

Hipoteza makrolokalizacji w postaci (1.6) jest hipotezą kinematyczną; bardziej ogólne warianty tej hipotezy zostaną wprowadzone w rozdziałach 3 i 4 . Konsekwencją hipotezy makrolokalizacji jest przyjęcie funkcji testowych δu_i w równaniu (1.3) jako

$$(1.7) \quad \delta u_i(x) = \delta U_i(x) + h^A(x) \delta V_i^A(x),$$

gdzie $\delta U_i, \delta V_i^A$ są dowolnymi regularnymi makrofunkcjami. Tym samym zakładamy, zgodnie z końcową uwagą w podrozdziale (1.1), że równania ruchu (1.3) winny być spełnione dla każdego δu_i przyjętego w postaci (1.7)

Druga hipoteza jest również ściśle związana z pojęciem makrofunkcji oraz bierze pod uwagę mikroperiodyczność struktury materiałowej kompozytu. Tym samym ϵ_F oraz λ pełnią rolę pewnych małych parametrów. Wielkość rzędu ϵ_F w trakcie procedury makromode-

lowania będziemy pomijać, jako niewielkie względem wartości $F(x)$ dowolnej makrofunkcji F , podobnie będziemy pomijać wielkości rzędu λ . Konsekwencją formalną tego stwierdzenia jest poniższa hipoteza.

Hipoteza makromodelowania. W ramach procedury makromodelowania, dla dowolnej makrofunkcji F będą pomijane wielkości ϵ_F wobec $F(x)$ oraz λ wobec 1 . Tym samym będą zaniedbywane:

- (i) wielkości $O(\lambda), O(\epsilon_F)$ w formułach postaci (1.4),
- (ii) wielkości $O(\epsilon_F)$ w formułach postaci (1.5).

Z uwagi na (1.6) i (1.5) gradienty przemieszczenia wynoszą

$$u_{i,j} = U_{i,j} + h^A_{,j} V^A_i + O(\epsilon_V),$$

co zgodnie z hipotezą makromodelowania pozwala na zdefiniowanie pola odkształceń e_{ij} wzorem

$$(1.8) \quad e_{ij} = E_{ij} + h^A_{,i} V^A_j, \quad ,$$

w którym składowe E_{ij} są dane przez

$$(1.9) \quad E_{ij} = U_{(i,j)}, \quad ,$$

i będą nazywane makroodkształceniami. Podobnie w (1.3) przyjmiemy

$$(1.10) \quad \delta e_{ij} = \delta U_{(i,j)} + h^A_{,i} \delta V^A_j .$$

Uwaga. Zgodnie z treścią hipotezy makromodelowania wielkości $O(\epsilon_F)$ pomijamy jako niewielkie wobec wartości $F(x)$, tj. tylko w wyrażeniach postaci $F(x) + O(\epsilon_F)$; tym samym wprowadzone przybliżenie nie ma charakteru asymptotycznego.

1.4 PROCEDURA MAKROMODELOWANIA

Procedura makromodelowania, która winna nas doprowadzić do równań makromechaniki kompozytu, polega na:

- (i) podstawieniu prawych stron (1.2) do (1.1) a następnie podstawieniu otrzymanych wyrażeń dla S_{ij} do równań ruchu (1.5)
- (ii) podstawieniu do otrzymanej w (i) słabej postaci równań

ruchu prawych stron (1.6),(1.7),(1.8) i (1.10), zgodnie z hipotezami makrolokalizacji i makromodelowania,

(iii) przekształceniu w otrzymanym równaniu całek objętościowych w sposób określony formułą (1.4) i pominięciu wielkości $\bar{\sigma}(\lambda)$, $\bar{\sigma}(\epsilon_F)$, zgodnie z hipotezą makromodelowania.

Celem uproszczenia rozważań założymy dalej, że pole przyrostu temperatury $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(x, t)$ można aproksymować wyrażeniem

$$(1.11) \quad \bar{\vartheta}(x, t) = \Theta(x, t) + h^A(x) \bar{\Phi}^A(x, t),$$

mającym postać analogiczną do równania (1.6), w którym Θ , $\bar{\Phi}^A$ są makrofunkcjami. Pole Θ nazwiemy makrotemperaturą natomiast funkcje $\bar{\Phi}^A$ opisują wielkości mikroscylacji pola temperatury, również wynikające z mikroperiodycznego charakteru własności kompozytu. W rozważaniach tego rozdziału funkcje Θ , $\bar{\Phi}^A$ będziemy traktować jako dane.

Nie przytaczając dosyć żmudnych lecz prostych przekształceń realizujących procedurę (i) - (iii), przytoczymy od razu końcowy wynik. Celem uzyskania możliwie zwartej postaci równań makromodelu, wprowadzimy do rozważań pola S_{ij} , H_i^A , dane przez

$$(1.12) \quad \begin{aligned} S_{ij} &= \langle a_{ijkl} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijkl} h^A_{,l} \rangle V_k^A + \langle b_{ij} \rangle \Theta + \langle b_{ij} h^A \rangle \bar{\Phi}^A, \\ H_i^A &= \langle a_{ijkl} h^A_{,j} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijkl} h^A_{,ij} h^B_{,l} \rangle V_k^B + \langle b_{ij} h^A_{,j} \rangle \Theta + \\ &\quad + \langle b_{ij} h^A_{,j} h^B \rangle \bar{\Phi}^B. \end{aligned}$$

Interpretację pól przedstawimy na końcu podrozdziału. Korzystając z (1.11) można wykazać, że rezultatem procedury (i) - (iii) jest warunek

$$(1.13) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} [\langle \rho \rangle \dot{U}_i + \langle \rho h^A \rangle \dot{V}_i^A] \delta U_i + [\langle \rho h^A \rangle \dot{U}_i + \langle \rho h^A h^B \rangle \dot{V}_i^B] \delta V_i^A \delta v + \\ &+ \int_{\Omega} (S_{ij} \delta E_{ij} + H_i^A \delta V_i^A) dv = \int_{\Omega} (\langle \rho \rangle b_i \delta U_i + \langle \rho h^A \rangle b_i \delta V_i^A) dv + \\ &+ \int_{\partial \Omega} p_i \delta u_i da, \end{aligned}$$

w którym $\delta E_{ij} = \delta U_{(i,j)}$ oraz który winien być spełniony dla dowolnych makro-funkcji testujących $\delta U_i, \delta V_i^A$. Zgodnie z przyjętymi założeniami, pod całkami objętościowymi w (1.13) występują wyłącznie makrofunkcje. Ponadto własności sprężyste kompozytu są określone uśrednionymi stałymi modułami występującymi w (1.12) (pole przyrostu temperatury ϑ traktujemy jako znane), natomiast własności bezwładne - uśrednionymi stałymi modułami w warunku (1.13). Tym samym równanie (1.13) wraz z oznaczeniami (1.9) i (1.12), dla każdego danego układu funkcji mikrokształtu H^A , $A=1, \dots, N$, reprezentuje pewien makromodel rozpatrywanego kompozytu. Podstawowymi niewiadomymi są tu makroprzemieszczenia U_i oraz makroparametry wewnętrzne V_i^A .

Oznaczmy przez Ω^0 zbiór punktów $x \in \Omega$ takich, że $V(x) \subset \Omega$. Zbiór ten nazwiemy makrownętrzem obszaru Ω dla rozpatrywanej mikro-periodycznej struktury kompozytu, określonej elementem reprezentatywnym V . Łatwo zauważyć korzystając z (1.1), (1.8), że dla każdego $x \in \Omega^0$ zachodzi

$$S_{ij}(x,t) = \langle s_{ij} \rangle(x,t), \quad H_i^A(x,t) = \langle s_{ij} h_i^A \rangle(x,t).$$

Wzory powyższe dają prostą interpretację pól S_{ij}, H_i^A , które nazwiemy odpowiednio: makronaprężeniami oraz makrosiłami wewnętrznymi. Zauważmy także, że z uwagi na warunek $\lambda \ll 1$ (tj. z uwagi na mikro-periodyczność struktury kompozytu), obszar Ω^0 różni się od obszaru Ω tylko bardzo cienką warstwą przybrzegową $\Omega \setminus \Omega^0$, nazwaną dalej makrobrzegiem kompozytu. Dla każdego $x \in \Omega^0$ otrzymamy, zgodnie z (1.8), wartość uśrednioną w $V(x)$ energii sprężystej w postaci

$$\frac{1}{2} \langle s_{ij} e_{ij} \rangle = \frac{1}{2} (S_{ij} E_{ij} + H_i^A V_i^A),$$

co po podstawieniu prawych stron (1.12) i pominięciu wyrazów z polami temperatury, prowadzi do formy kwadratowej w zmiennych E_{ij}, V_i^A . Zgodnie z fizycznym charakterem modelu, forma ta winna być dodatnio określona, co prowadzi do dodatkowych ograniczeń dla funkcji mikrokształtu.

1.5. MODELE Z EFEKTEM SKALI

Podstawiając $\delta E_{ij} = \delta U_{(i,j)}$, do (1.12), zgodnie z twierdzeniem o divergencji dokonując przekształcenia

$$\int_{\Omega} S_{ij} \delta U_{i,j} dv = \int_{\partial\Omega} S_{ij} n_j \delta U_i da - \int_{\Omega} S_{ij,j} \delta U_i dv,$$

oraz zakładając niezależność pól δU_i , $\delta \dot{V}_i^A$, na podstawie lematu duBois - Reymonda (ograniczenie δU_i , $\delta \dot{V}_i^A$ do klasy makrofunkcji nie odgrywa tu istotnej roli) otrzymamy z (1.13) następujące równania

$$(1.14) \quad \begin{aligned} S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i - \langle \rho h^A \rangle \ddot{V}_i^A + \langle \rho \rangle b_i &= 0, \\ \langle \rho h^A h^B \rangle \ddot{V}_i^B + \langle \rho h^A \rangle \ddot{U}_i + H_i^A - \langle \rho h^A \rangle b_i &= 0. \end{aligned}$$

Układ równań (1.9), (1.12), (1.14), zawierający prócz stałych współczynników tylko poszukiwane makrofunkcje, reprezentuje pewną makromechanicę kompozytu. Równania (1.14) nazwiemy równaniami ruchu otrzymanego makromodelu kompozytu. Dogodnie także nazwać równania (1.12) - równaniami konstytutywnymi tego makromodelu a równania (1.9) równaniami geometrycznymi. Stałe moduły w równaniach ruchu (1.14) określają bowiem, w ramach przyjętego makromodelu, uśrednione własności inercyjne kompozytu, natomiast stałe moduły w równaniach konstytutywnych reprezentują odpowiednio uśrednione własności materiałowe. Każdy makromodel danego (liniowo-sprężystego) kompozytu jest więc jednoznacznie wyznaczony układem funkcji mikrokształtu $h^A, A=1, \dots, N$, występujących w hipotezie makrolokalizacji (1.6). Tym samym ten sam kompozyt może być w ramach makromechaniki rozpatrywany w ramach różnych makromodeli. Niejednoznaczność ta jest dosyć typowa dla problemów modelowania w mechanice, gdzie mamy do czynienia z różnymi teoriami (modelami) płyt, powłok czy prętów oraz z różnymi przybliżeniami dyskretyzującymi ośrodek ciągły (np. w ramach metody elementów skończonych). Wybór i liczba funkcji mikrokształtu, mające wpływ na wartości oraz liczbę modułów w równaniach (1.12), (1.14) zależą od struktury elementu reprezentatywnego oraz stopnia szczegółowości opisu przemieszczeń (1.6) oraz odkształceń (1.8) w ramach makromodelu. Należy zaznaczyć, że w zagadnieniach dynamiki (np.

przy analizie drgań) badane są często tylko pewne szczególne klasy zaburzeń pola przemieszczenia $u_i(\cdot, t)$, wywołane niejednorodnością materiału, określane odpowiednim doбором funkcji mikrokształtu h^A . Pewna swoboda tego doboru daje także możliwość ewentualnego stosowania w mechanice kompozytów metod typu adaptacyjnego. Postępowanie takie wymaga wyznaczenia niewiadomych U_i, V_i^A w ramach pewnego makromodelu kompozytu, wyznaczenia pól u_i, s_{ij} przy wykorzystaniu formuł (1.6), (1.8) i (1.1) a następnie określenia wartości lewych stronach równań (*), (**), (***) mikromechaniki, podanych w podrozdziale 1.1, jako pewnych residuów (z reguły różnych od zera) charakteryzujących stopień przybliżenia makromodelu. Residua te wskazują na możliwy kierunek modyfikacji liczby i postaci funkcji mikrokształtu, prowadząc do kolejnego "ulepszonoego" makromodelu kompozytu. Podejścia adaptacyjne są stosowane w procedurach numerycznych metody elementów skończonych; zastosowanie ich w makromechanice kompozytów jest sprawą otwartą.

Przejdźmy teraz do omówienia formalnej struktury równań makromodelu (1.9), (1.12), (1.14).

Po pierwsze zauważmy, że uśrednione moduły inercyjne $\langle \rho h^A h^B \rangle, \langle \rho h^A \rangle$ zależą od parametru mikrostruktury l , w przeciwieństwie od uśrednionych modułów sprężystość występujących w równaniach konstytutywnych (1.12), których wielkość nie zależy od l . Fakt ten wynika z postulowanych w podrozdziale 1.2 własności funkcji mikrokształtu. W szczególności zachodzi $\langle \rho h^A h^B \rangle \in O(l^2), \langle \rho h^A \rangle \in O(l)$. Tym samym otrzymane równania makromechaniki reprezentują pewien makromodel z efektem skali, tj. makromodel opisujący wpływ wielkości elementu reprezentatywnego na własności kompozytu. Celem uwidocznienia tego nader istotnego stwierdzenia zdefiniujemy funkcje $g^A := l^{-1} h^A$, będące funkcjami parametru l rzędu $O(1)$. Wtedy równania (1.14) przyjmą równoważną postać

$$(1.15) \quad \begin{aligned} s_{ij} s_j - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i - l \langle \rho g^A \rangle \ddot{V}_i^A + \langle \rho \rangle b_i &= 0, \\ l^2 \langle \rho g^A g^B \rangle \ddot{V}_i^B + l \langle \rho g^A \rangle \ddot{U}_i + H_i^A - l \langle \rho g^A \rangle b_i &= 0, \end{aligned}$$

lecz zależną w sposób wyraźny od parametru mikrostruktury l ,
gdz $\langle \rho \rangle \in O(1)$, $\langle \rho g^A \rangle \in O(1)$, $\langle \rho g_j^A \rangle \in O(1)$. Podobnie (1.12) przyjmiemy
w postaci

$$(1.16) \quad \begin{aligned} S_{ij} &= \langle a_{ijk} \rangle E_k + \langle a_{ijk} h_{ij}^A \rangle V_k^A + \langle b_{ij} \rangle \Theta + l \langle b_{ij} g^A \rangle \Phi^A, \\ H_i^A &= \langle a_{ijk} h_{ij}^A \rangle E_k + \langle a_{ijk} h_{ij}^A h_{ij}^B \rangle V_k^B + \langle b_{ij} h_{ij}^A \rangle \Theta + l \langle b_{ij} h_{ij}^A g^B \rangle \Phi^B. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu będziemy korzystać z równań ruchu w postaci (1.15) oraz z równań konstytutywnych (1.16), w których wszystkie uśrednione moduły jako funkcje parametru mikrostruktury l są wielkościami rzędu $O(1)$ a parametr mikrostruktury występuje w wyraźnej postaci. Zakładamy, że równania (1.9), (1.15) i (1.16) makromodelu winny być spełnione dla każdego $x \in \Omega$ oraz $t \in (t_0, t_f)$; w szczególności przedział czasowy (t_0, t_f) przyjmować będziemy jako $(-\infty, \infty)$ lub $(0, \infty)$.

Po drugie, podstawiając pewne strony (1.9) do (1.16) a następnie otrzymane wyrażenia na S_{ij} , H_i^A do (1.15), otrzymamy układ równań różniczkowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach, zawierający 3 równania cząstkowe dla U_i oraz 3N równań zwyczajnych dla V_i^A . Przy formułowaniu zagadnień brzegowo-początkowych dla otrzymanego układu równań należy więc wprowadzić 3 warunki brzegowe oraz 6 warunków początkowych dla pola wektorowego o składowych U_i oraz 6N warunków początkowych dla N pól wektorowych o składowych V_i^A . Charakterystyczną cechą otrzymanego modelu jest więc niezależność dodatkowych niewiadomych V_i^A od warunków brzegowych; z tego też powodu makro funkcje V_i^A nazwano makroparametrami wewnętrznymi.

Możliwość opisywania efektu skali w ramach modelu danego równaniami (1.9), (1.15) i (1.16), oraz formułowanie warunków brzegowych dla kompozytu w postaci analogicznej jak w mechanice ciała stałego (np. przez określenie wartości makroprzemieszczeń U_i na brzegu $\partial\Omega$) to cechy otrzymanego makromodelu, mające istotne znaczenie w zastosowaniach inżynierskich teorii. Należy pamiętać, że rozwiązania zagadnień brzegowych dla równań (1.9), (1.15), (1.16) mają sens fizyczny tylko gdy $U_i, V_i^A, S_{ij}, H_i^A, E_{ij}$ są makrofunkcjami.

Dla ciała jednorodnego zachodzi

$$\langle \rho h^A \rangle = \rho \langle h^A \rangle = 0, \quad \langle a_{ijkl} h^A_{,l} \rangle = a_{ijkl} \langle h^A_{,l} \rangle = 0, \quad \langle b_{ij} h^A_{,j} \rangle = b_{ij} \langle h^A_{,j} \rangle = 0.$$

W tym przypadku dla parametrów wewnętrznych V_i^A otrzymamy z (1.15) i (1.16) układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$L^{\alpha} \rho \langle g^A g^B \rangle \dot{V}_i^B + a_{ijkl} \langle h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle V_k^B = -L^{\alpha} b_{ij} \langle h^A_{,j} g^B \rangle \Phi^B,$$

który przy jednorodnych warunkach początkowych $V_i^A(x, t_0) = 0, \dot{V}_i^A(x, t_0) = 0$ oraz gdy $\bar{\Phi}^B = 0$, prowadzi do zerowych rozwiązań $V_i^A = 0$ dla każdego $t \in (t_0, t_f)$. Tym samym zaburzenie $h^A V_i^A$ pola przemieszczenia u_i , wprowadzone hipotezą makrolokalizacji (1.6), mogą być wywołane co najmniej jednym z pośród następujących czynników:

- (i) mikroperiodyczną niejednorodnością kompozytu,
 - (ii) mikrooscylacjami pola temperatury,
 - (iii) mikrozaburzeniami pola przemieszczenia w chwili początkowej,
- z których istotną rolę, w ramach makromodelowania, odgrywa tylko czynnik pierwszy. Fakt ten zaznaczyliśmy już w podrozdziale 1.3 uprzedzając przedstawione tu wnioski.

Zauważyliśmy, że spełnienie równań (1.12), (1.14) doprowadza warunek (1.13) do postaci

$$\int_{\partial \Omega} (S_{ij} n_j \delta U_i - p_i \delta u_i) da = 0.$$

Oznaczmy przez $P_i(x, t)$ funkcje określone na poszczególnych częściach brzegu $\partial \Omega$ i spełniające tam warunki analogiczne do warunków spełnianych przez makrofunkcje w obszarze Ω . Załóżmy ponadto, że $p_i = P_i + \sigma_i$, gdzie σ_i są oscylacjami zewnętrznych sił brzegowych, mających wypadkowe równe zero w obszarach $\partial \Omega \cap V(x), x \in \partial \Omega$. Korzystając z (1.10)₂ oraz biorąc pod uwagę, że $h^A(x) \in O(L)$, całkowy warunek brzegowy, z dokładnością do wyrazów rzędu $O(L)$, prowadzi do

$$(1.17) \quad S_{ij} n_j - P_i = 0.$$

Zależność powyższą nazwiemy naturalnym warunkiem brzegowym makromechaniki a występujące w nim wielkości P_i -makrosiłami brzegowymi. Warunek (1.17) został otrzymany, w przeciwieństwie do równań makro-

mechaniki (1.9),(1.15) i (1.16), na drodze asymptotycznej tj. z zastosowaniem formalnego przejścia granicznego $l \rightarrow 0$. Wynika to z faktu, że zarówno w obszarze makrobrzegu $\Omega \setminus \Omega^o$ jak i na samym brzegu $\partial\Omega$ kompozyt traci periodyczną strukturę a tym samym także parametr mikrostruktury l traci tam swoje znaczenie.

Na zakończenie tego rozdziału nadmienimy, że omawiane równania makromechaniki liniowo- sprężystych kompozytów otrzymano w (88) korzystając z zasady stacjonarności działania, natomiast w (46) wykazano, że można je także uzyskać bez korzystania z jakiegokolwiek zasady wariacyjnej.

1.6 MODELE LOKALNE

Modele lokalne najłatwiej uzyskać bezpośrednio z makromodeli omówionych w podrozdziale 1.5 przez czysto formalne pominięcie w (1.5) i (1.16) wyrazów rzędu $O(l)$, $O(l^2)$. Tym samym odpowiednie równania modelowe obejmują równania geometryczne w niezmienionej postaci (1.9), równania ruchu

$$(1.18) \quad S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i + \rho b_i = 0, \quad H_i^A = 0,$$

oraz równania konstytutywne

$$(1.19) \quad S_{ij} = \langle a_{ijkl} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijkl} h^A_{,l} \rangle V_k^A + \langle b_{ij} \rangle \Theta,$$

$$H_i^A = \langle a_{ijkl} h^A_{,j} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijkl} h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle V_k^B + \langle b_{ij} h^A_{,j} \rangle \Theta.$$

Z (1.19) wynika, że w ramach stosowalności modeli lokalnych nie jesteśmy w stanie badać nie tylko efektu skali (co jest zgodne z definicją modelu lokalnego) lecz także wpływu mikrooscytacji pola temperatury na zachowanie się kompozytu. Ponieważ transformacja liniowa określona macierzą $3N \times 3N$, daną przez $\langle a_{ijkl} h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle$ jest nieosobliwa (wynika to z warunku dodatniej określoności uśrednionej energii sprężystej, por. końcową część podrozdziału 1.4) przeto oznaczając przez C_{ik}^{AB} współczynniki transformacji odwrotnej

$$C_{ik}^{AB} \langle a_{kmnl} h^B_{,m} h^C_{,n} \rangle = \delta^{AC} \delta_{il},$$

z warunku $H_i^A = 0$ wyznaczmy parametry wewnętrzne V_i^A jako liniowe funkcje E_{kl} , Θ :

$$(1.20) \quad V_i^A = -C_{ij}^{AB} \langle a_{jklm} h_{,k}^B \rangle E_{Lm} - C_{ij}^{AB} \langle b_{jk} h_{,k}^B \rangle \Theta.$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do pierwszego z równań (1.19) oraz definiując nowe moduły

$$(1.21) \quad \begin{aligned} A_{ijkl} &:= \langle a_{ijkl} \rangle - \langle a_{ijmn} h_{,n}^A \rangle C_{mp}^{AB} \langle a_{klpr} h_{,r}^B \rangle, \\ B_{ij} &:= \langle b_{ij} \rangle - \langle a_{ijmn} h_{,n}^A \rangle C_{mp}^{AB} \langle b_{pr} h_{,r}^B \rangle, \end{aligned}$$

otrzymamy równania konstytutywne modelu lokalnego

$$(1.22) \quad S_{ij} = A_{ijkl} E_{kl} + B_{ij} \Theta,$$

które należy rozpatrywać łącznie z równaniami geometrycznymi

$$(1.23) \quad E_{ij} = U_{(i,j)},$$

oraz z pierwszym z równań ruchu (1.18) tj. z równaniem

$$(1.24) \quad S_{ij;j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i + \langle \rho \rangle b_i = 0.$$

Układ (1.22)-(1.24) sprowadza się do trzech równań różniczkowych cząstkowych 2-go rzędu typu hyperbolicznego dla trzech składowych makroprzemieszczenia U_i . Makroparametry wewnętrzne są teraz określone wzorami (1.20) a naturalne warunki brzegowe makromechaniki pozostawiamy w postaci (1.17). Łatwo zauważyć, że równania (1.22)-(1.24) z formalnego punktu widzenia, mają postać analogiczną do równań liniowej teorii sprężystości dla pewnego ciała jednorodnego o stałej gęstości masy, utworzonego z materiału jednorodnego o modułach A_{ijkl} , B_{ij} . Tym samym otrzymany model lokalny jest reprezentowany równoważnym ciałem jednorodnym, którego koncepcja jest dobrze znana w literaturze problemu, por. np. Nemat-Nasser i Hori, 1993. W przeciwieństwie do modeli otrzymanych na drodze homogenizacji asymptotycznej, por. np. Bensoussan, Lions i Papanicolaou, 1978, Bakhvalov i Panasenko, 1984, w których efektywne moduły sprężystości wyznacza się przez rozwiązanie pewnego zagadnienia brzegowego dla elementu reprezentatywnego (zwanego zagadnieniem "na komórce"), w tutaj przedstawionym podejściu moduły A_{ijkl} , B_{ij} są bezpośrednio

określone formułami (1.21) a ich wyznaczenie wymaga rozwiązania układu $3N$ równań algebraicznych liniowych dla makroparametrów V_i^A . Postać modułów A_{ijkl} , B_{ij} zależy od wyboru funkcji mikroształtu a traktować je możemy jako pewną aproksymację modułów efektywnych uzyskanych w ramach homogenizacji asymptotycznej, por. (30). W dalszym ciągu moduły zdefiniowane wzorem (1.21) będziemy także nazywać efektywnymi.

Zauważmy, że dla zagadnień quasistatycznych (tj. w których pomijamy człony inercyjne w równaniach ruchu) oraz przy pominięciu wpływu sił masowych oraz mikrooscylacji pola temperatury (przyjmując $b_i = 0$ oraz $\mathcal{E}^A = 0$), równania modeli z efektem skali mają tę samą postać jak równania modeli lokalnych. Tym samym efekty skali mogą być wywołane dynamicznym charakterem zagadnienia, mikrooscylacjami pola temperatury oraz siłami masowymi. Celowość równoczesnego korzystania z lokalnych i nie lokalnych makromodeli (przy wspólnym wyborze funkcji mikroształtu) wynika z konieczności jakościowej i ilościowej oceny efektu skali w analizowanym problemie.

Modele lokalne, otrzymane tutaj jako przybliżenia asymptotyczne (dla $\mathcal{L} \rightarrow 0$) modeli z efektem skali, mogą zostać otrzymane także drogą bezpośredniego makromodelowania. W tym celu utrzymujemy w mocy hipotezę makrolokalizacji oraz zastępujemy hipotezę makromodelowania formalnym przejściem granicznym z parametrem mikrostruktury do zera. W takim ujęciu metoda modelowania była stosowana w całym szeregu opracowań jako tzw. metoda parametrów mikrolokalnych, odpowiadających wprowadzonym tu makroparametrom wewnętrznym. Wymienić tu należy prace (42,68) dotyczące podstaw metody oraz prace (4,5,7-25, 27,31-42, 47,53-59,61) z zakresu jej zastosowań i możliwych uogólnień.

1.7 UWAGI KONCOWE

W rozdziale tym, na przykładzie równań liniowej teorii sprężystości, omówiono nową metodę makromodelowania kompozytów mikroperiodycznych, którą można nazwać metodą makroparametrów wewnętrznych

Abstrakcyjny wykład metody (tj. bez interpretacji fizycznej wprowadzanych obiektów matematycznych) można znaleźć w (83) natomiast przedstawione tu postępowanie jest pewnym uogólnieniem rozważań podanych w (79). Przedstawioną tu metodę makromodelowania będziemy adaptować do innych rodzajów materiałów kompozytowych a także do konstrukcji o mikroperiodycznej strukturze, jednakże ogólna idea metody w zasadzie nie ulegnie zmianie a konieczne modyfikacje dotyczyć będą jedynie szczegółów. W związku z tym będziemy się dalej odwoływać do uwag i komentarzy zawartych w tym rozdziale pracy.

2. ZAGADNIENIA LINIOWEJ SPRĘŻYSTOŚCI

W tym rozdziale omówimy kilka zagadnień liniowej sprężystości kompozytów, ilustrujących pewne zastosowania równań makromechaniki, wyprowadzonych w rozdziale pierwszym. Wykorzystano tu wyniki zawarte w pracach (29, 45, 46, 89).

2.1 FALE I DRGANIA

Zagadnienia drgań i propagacji fal w liniowo-sprężystych kompozytach zbrojonych periodycznie rozłożonymi włóknami będą tu rozważane jako zagadnienia płaskie, niezależne od argumentu x_3 . W tym celu założymy, że osie włókien są prostopadłe do osi x_3 , a drgania zachodzą w płaszczyźnie Ox_1x_2 . Element reprezentatywny jest tu więc elementem płaskim, który przyjmiemy w postaci

$$V = (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2).$$

Tym samym założymy, że w równaniach (1.9), (1.15), (1.16) modelu kompozytu z makroparametrami wewnętrznymi, wskaźniki i, j, k przebiegają ciąg $1, 2$. Ponadto przyjmiemy, że proste $x_1=0, x_2=0$ są osiami symetrii sprężystej elementu reprezentatywnego V , którego część środkową zajmuje przekrój włókna a pozostałą część - przekrój przez materiał matrycy. Korzystając z wyników przedstawionych w (45) rozpatrywać będziemy propagację fali poprzecznej, rozchodzącej się w kierunku osi x_1 . W ramach pierwszego przybliżenia hipotezę makrolokalizacji (1.6) przyjmiemy w postaci

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= h^2(x^2, x^1) V_1^2(x_1, t), \\ u_2(x_1, x_2, t) &= U_2(x^1, t) + h^1(x^1, x^2) V_2^1(x_1, t), \end{aligned}$$

wprowadzając tylko dwie funkcje mikrokształtu h^1, h^2 , nieparzyste względem pierwszego argumentu; analityczna postać tych funkcji zależy od kształtu przekroju włókna a jej przykłady podano w (29, 45). Zakładając izotropowość matrycy i zbrojenia oraz pomijając siły masowe i wpływ pola temperatury można wykazać, że równania (1.9), (1.15), (1.16)

redukują się do następującego układu równań dla U_2, V_2^1, V_1^2 :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tilde{Q} \ddot{U}_2 - \tilde{\mu} U_{2,11} - \mu_1 V_{2,1}^1 - \mu_2 V_{1,1}^2 &= 0, \\ l^2 \tilde{Q}_{11} \ddot{V}_2^1 + \mu_{11} V_2^1 + \mu_{12} V_1^2 + \mu_1 U_{2,1} &= 0, \\ l^2 \tilde{Q}_{22} \ddot{V}_1^2 + \mu_{22} V_1^2 + \mu_{12} V_2^1 + \mu_2 U_{2,1} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{Q}, \tilde{\mu}, \dots, \mu_{12}, \mu_2$ są stałymi, (45). Postulując rozwiązanie tego układu równań w postaci

$$U_2 = A \cos(\omega t - kx), \quad V_2^1 = B_1 \sin(\omega t - kx), \quad V_1^2 = B_2 \sin(\omega t - kx),$$

otrzymamy jednorodny układ równań liniowych dla stałych A, B_1, B_2 . Ponieważ A, B_1, B_2 nie są jednocześnie równe zero, przeto po przyrównaniu do zera wyznacznika tego układu, otrzymamy równanie dyspersji jako związek między liczbą falową $k = 2\pi/L$ a częstością drgań $\omega = 2\pi/T$. Oznaczając ponadto $q := kl, \Omega := \omega l$, równanie dyspersji napiszemy w postaci

$$(2.2) \quad \Omega^6 - (\tilde{\alpha} q^2 + \alpha) \Omega^4 + (\tilde{\beta} q^2 + \beta) \Omega^2 - \gamma k^2 = 0,$$

gdzie stałe $\tilde{\alpha}, \alpha, \beta, \tilde{\beta}, \gamma$ są określone przez współczynniki układu równań (2.1) i niezależne od parametru mikrostruktury l .

Równania (2.1) a tym samym warunek (2.2) mają sens fizyczny tylko gdy U_2, V_2^1, V_1^2 są makrofunkcjami (dla każdej chwili t). Sytuacja taka zachodzi tylko gdy bezwymiarowa liczba falowa $q = 2\pi l/L$ jest mała wobec jedności. W równaniu dyspersji argument q można więc traktować jako mały parametr. Na tej drodze otrzymano w (29,45) formuły dla częstości drgań $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ w postaci

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (\omega_1)^2 &= \alpha_1 k^2 [1 - j_1 (kl)^2], \\ (\omega_2)^2 &= \frac{\alpha_2}{j_2^2} + j_2 k^2, \\ (\omega_3)^2 &= \frac{\alpha_3}{j_3^2} + j_3 k^2, \end{aligned}$$

gdzie pominięto wielkości $O(q^4)$ oraz gdzie α_1, \dots, j_3 są stałymi

niezależnymi od l ; postać tych stałych można znaleźć w cytowanych pracach. Zaletą przedstawionego tu podejścia jest możliwość uzyskania zamkniętych wyrażeń analitycznych (2.3) dla częstości drgań nie wymagających złożonych obliczeń numerycznych, związanych z rozwiązywaniem zagadnienia brzegowego "na komórcie", por. np. Tolf, 1983.

Założmy, podobnie jak powyżej, że płaszczyzny $x_i = \text{const.}$ są płaszczyznami symetrii dla struktury materiałowej elementu reprezentatywnego. Funkcje mikroształtu h^A może wtedy postulować w postaci spełniającej warunek $\langle \rho h^A \rangle = 0$. Przy pominięciu wpływu sił masowych oraz pola temperatury, równania (1.9), (1.15), (1.16) prowadzą wtedy do układu postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\langle a_{ijkl} \rangle U_{k,lj} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i + \langle a_{ijkl} h^A_{,k} \rangle V_{l,j}^A = 0, \\ &l^2 \langle \rho g^A g^B \rangle \ddot{V}_i^B + \langle a_{ijkl} h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle V_k^B + \langle a_{ijkl} h^A_{,j} \rangle U_{k,l} = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że rozwiązanie układu (2.4) można przyjąć w postaci $U_i = 0$, $V_i^A = V_i^A(t)$, gdzie makroparametry wewnętrzne V_i^A spełniają równania różniczkowe zwyczajne

$$(2.5) \quad l^2 \langle \rho g^A g^B \rangle \ddot{V}_i^B + \langle a_{ijkl} h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle V_k^B = 0,$$

a hipoteza makrolokalizacji (1.6) prowadzi do rozkładów przemieszczeń $u_i(x,t) = h^A(x) V_i^A(t)$, które nazwano mikroprzemieszczeniami. Przyjmijmy rozwiązania układu (2.5) w postaci $V_i^A = C_i^A \cos(\omega t)$, gdzie C_i^A są stałymi a ω jest częstością mikrodrgań. Warunek nietrywialności tych rozwiązań ma postać

$$(2.6) \quad \det (\langle a_{ijkl} h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle - \omega^2 l^2 \langle \rho g^A g^B \rangle \delta_{ik}) = 0,$$

gdzie $\det(\cdot)$ jest wyznacznikiem macierzy $3N \times 3N$. Ograniczając się do przypadku, w którym mikroprzemieszczenia są niezależne od x_2, x_3 , tj. kładąc $u_i = h^A(x_1) V_i^A(t)$, oznaczmy przez $k := 2n\pi/l_1$, $n=1,2,\dots$ liczby falowe mikrodrgań, kładąc $h^A(x_1) = k^{-1} \cos(Akx_1)$, $A=1,2,\dots,N$. Zakładając, że płaszczyzny $x_q = \text{const.}$ są płaszczyznami symetrii sprężystej wszystkich składników kompozytu i oznaczając (nie sumować podług i !)

$$G_i^{AB}(k) := AB \langle a_{i111} \sin(Akx_1) \sin(Bkx_1) \rangle, \quad \rho^{AB}(k) := \langle \rho \cos(Akx_1) \cos(Bkx_1) \rangle$$

otrzymamy z (2.6) relację postaci

$$(2.7) \quad \det [C_i^{AB}(k) - (\omega/k)^2 \rho^{AB}(k)] = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

dla $k = 2\pi/l_1, 4\pi/l_1, \dots$, przy czym $\det[\cdot]$ jest wyznacznikiem macierzy $N \times N$. Powyższa formuła jest relacją między liczbą falową k a częstością mikrodrgań ω , tj. reprezentuje związek dyspersyjny dla fal podłużnych (gdy $i=1$) oraz fal poprzecznych (gdy $i=2, 3$). Analizę numeryczną tego problemu przeprowadzono w (16), gdzie podano wykresy krzywych dyspersji.

Z pośród kompozytów o periodycznej strukturze szczególną rolę odgrywają laminaty. Element reprezentatywny jest tu jednowymiarowy, tj. można zredukować go do odcinka $(-l/2, l/2)$ osi prostopadłej do płaszczyzn rozdzielających laminy. Zakładając, że jest to oś x_1 , przyjmujemy $h^A = h^A(x_1)$. Gdy ponadto mamy do czynienia z laminatem dwuskładnikowym, w którym część $(-a/2, a/2)$, $a < l$, elementu reprezentatywnego zajmuje jeden materiał a pozostałą część - drugi materiał (a oraz $l-a$ są więc grubościami lamin), to w ramach modelowania można wprowadzić tylko jedną funkcję mikroształtu

$h = h^1(x_1)$. Funkcję tę przyjmujemy jako liniową w obszarach zajmowanych przez poszczególne laminy oraz spełniającą warunki $h^1(a/2) = l$, $h^1(-a/2) = -l$, tj. przyjmującą wartości $\pm l$ na płaszczyznach rozdzielających laminy.

Zagadnienie rozchodzenia się fal w dwuskładnikowym laminacie było badane w pracy (37) przy wykorzystaniu równań postaci (2.4). Ponieważ znane są ścisłe rozwiązania tego problemu, tj. wynikające z równań mikromechaniki, przeto w cytowanej pracy porównano otrzymane na podstawie (2.4) wartości prędkości fazowych z odpowiednimi wartościami otrzymanymi z rozwiązań ścisłych. Uzyskane wyniki prowadzą do wniosku, że w ramach zakresu stosowalności równań (2.4) tj. przy założeniu, że U_i, V_i^A są makrofunkcjami, omawiana tu metoda makroparametrów wewnętrznych daje praktyczne te same wyniki co rozwiązanie ścisłe.

Korzystając z wyników otrzymanych w (29, 37, 45) dotyczących analizy fal i drgań, w których długość fali jest znacznie większa od parametru mikrostruktury kompozytu, łatwo zauważyć, że efekty dyspersyjne (wynikające z efektu skali) są niewielkie i mogą pod względem ilościowym być pomijane. Tym samym do analizy odpowiednich zagadnień możemy stosować model lokalny, otrzymany z równań (2.4) przez formalne pominięcie wyrazów $l^2 \langle \rho g^A g^B \rangle \ddot{V}_i^B$. W ramach modelu lokalnego, zamiast pierwszego z równań wzoru (2.3), otrzymujemy $(\omega_1)^2 = \alpha_1 (k_1)^2$, co okazuje się wystarczającą dobrym przybliżeniem. Jednakże wyższe częstotliwości drgań ω_2, ω_3 , wyznaczone formułą (2.3), nie mogą zostać otrzymane na podstawie modelu lokalnego. Również zagadnienia mikrodrgań kompozytu periodycznego, które można analizować na podstawie równań (2.5) i przy założeniu $U_i = 0$, wymagają stosowania modeli z efektem skali.

2.2 NAPRĘŻENIA CIEPLNE

Zagadnienia naprężeń cieplnych były rozpatrywane w pracy (89) zarówno w ramach liniowej jak i nieliniowej teorii sprężystości. Tutaj ograniczymy się do zbadania naprężeń cieplnych w laminacie dwuskładnikowym, poddanym działaniu pola temperatury, które jest opisane jedną makrofunkcją Θ , por. (1.11) Zgodnie z założeniami dotyczącymi opisu laminatu, podanymi w podrozdziale 2.1, wprowadzamy do rozważań jedną mikrofunkcję kształtu $h = h^1(x_1)$. Równania (1.9), (1.15), (1.16), po pominięciu wyrazów zawierających siły masowe i oscylacje temperatury Φ oraz po oznaczeniu $V_i := V_i^1$, $g := h^1/l$, prowadzą do

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \langle a_{ijkl} \rangle U_{k,jl} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i - \langle a_{ij1k} \rangle h_{,1} V_{l,j} + \langle b_{ij} \rangle \Theta_{,j} &= 0, \\ l^2 \langle \rho g^2 \rangle \ddot{V}_i + \langle a_{i1k1} \rangle (h_{,1})^2 V_k + \langle a_{i1k1} \rangle h_{,1} U_{k,l} + \langle b_{i1} \rangle h_{,1} \Theta &= 0. \end{aligned}$$

Założmy, że równania (2.8) mają być spełnione w obszarze Ω i dla

każdej chwili $t > 0$. Przyjmijmy jednorodne warunki brzegowe oraz początkowe:

$$U_i(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0;$$

$$U_i(x, 0) = 0, \quad \dot{U}_i(x, 0) = 0, \quad V_{i1}(x, 0) = 0, \quad \dot{V}_{i1}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Zakładając izotropię materiału lamin oraz oznaczając

$$C := \langle a_{ijmn}(h_{,1})^2 \rangle, \quad G := \langle b_{ij}(h_{,1}) \rangle, \quad \kappa^2 := C \langle \rho g^2 \rangle^{-2} \lambda^{-2},$$

dla przypadku $\Theta = \Theta_0 = \text{const.}$ otrzymamy rozwiązanie powyższego zagadnienia brzegowego w prostej postaci

$$U_i = 0, \quad V_1 = -GC^{-1}[1 - \cos(\kappa t)]\Theta_0, \quad V_2 = V_3 = 0.$$

Makronapężenia cieplne, wyliczone z pierwszego z równań (1.16), są równe

$$(2.9) \quad S_{ij} = \{ \langle b_{ij} \rangle - GC^{-1} \langle a_{ijmn} h_{,1} \rangle [1 - \cos(\kappa t)] \} \Theta_0,$$

co przy założonej symetrii materiałowej prowadzi do $S_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Bardziej ogólną postać rozwiązania, w której Θ jest funkcją czasu, podano w pracy (B9).

Rozwiązanie (2.9) zostało uzyskane w ramach modelu z makroparametrami wewnętrznymi, opisującego efekty skali, tj. przy wykorzystaniu równań (1.9), (1.15), (1.16). W ramach modelu lokalnego, (teorii parametrów mikrolokalnych), danego równaniami (1.22), (1.23), (1.24), zamiast (2.8) otrzymamy układ równań

$$(2.10) \quad A_{ijkl} U_{k,jl} - \langle \rho \rangle \dot{U}_i + B_{ij} \Theta_{,j} = 0,$$

który dla jednorodnych warunków brzegowych i początkowych oraz przy założeniu $\Theta = \Theta_0 = \text{const.}$ prowadzi do rozwiązania $U_i = 0$. Makronapężenia cieplne, zgodnie z (1.22), są wtedy równe

$$(2.11) \quad S_{ij} = B_{ij} \Theta_0.$$

Zauważmy, że dla ciał jednorodnych, na podstawie (1.21), otrzymujemy $B_{ij} = b_{ij}$ (gdyż $\langle a_{ijmn} h^A_{,h} \rangle = a_{ijmn} \langle h^A_{,n} \rangle = 0$, $\langle b_{ij} \rangle = b_{ij}$), a tym samym zarówno (2.9) jak i (2.11) redukuje się do postaci

$S_{ij} = b_{ij} \Theta_0$, co wobec $S_{ij} = \langle s_{ij} \rangle = s_{ij}$ prowadzi do $s_{ij} = b_{ij} \Theta_0$.
 Powyższy prosty przykład prowadzi jednakże do bardziej ogólnych

wniosków, które przedstawiamy w następującym podrozdziale.

2.3 WNIOSKI

Porównując rozwiązania (2.9), (2.11) łatwo zauważyć, że w ramach zadania omawianego w poprzednim podrozdziale, model lokalny kompozytu nie stanowi fizycznie uzasadnionego przybliżenia modelu z efektem skali. Model lokalny, reprezentujący między innymi znaną metodę modułów efektywnych a także koncepcję równoważnego ciała jednorodnego (por. Wstęp), nie jest w stanie opisać oscylacji naprężeń w czasie, wywołanych równomiernym ogrzaniem ciała o strukturze niejednorodnej. Zauważmy także, że dla zagadnień quasistacjonarnych (pomijamy siły inercyjne) równania (2.8), (2.10) są równoważne. Dosyć elementarny przykład zastosowania modelu z makroparametrami wewnętrznymi, przedstawiony w podrozdziale 2.2, prowadzi więc do następujących wniosków:

(i) zagadnienia naprężeń cieplnych w kompozytach, nawet dla stałego w czasie pola temperatury, należy rozpatrywać w ramach dynamiki materiałów kompozytowych,

(ii) zagadnienia te należy rozpatrywać z uwzględnieniem efektów skali, tj. wpływu wielkości elementu reprezentatywnego na odpowiedź kompozytu,

(iii) modele z makroparametrami wewnętrznymi, zwłaszcza dzięki względnej prostocie odpowiednich równań, są dogodnym narzędziem analizy tych zagadnień.

Uzupełniając powyższe wnioski uwagami zawartymi na końcu podrozdziału 2.1 łatwo wskazać na celowość stosowania metod makromodelowania, przedstawionych w sposób dosyć formalny w rozdziale 1, do badania różnych zagadnień szczególnych makromechaniki kompozytów.

3. KOMPOZYTY LEPKOSPREŻYSTE

Korzystając z metody makromodelowania przedstawionej w rozdz.1, wyprowadzimy, w ramach teorii liniowej, podstawowe równania dla kompozytów periodycznych utworzonych z materiałów liniowo - lepko-sprężystych. Przykład zastosowania otrzymanych równań wykaże konieczność posługiwania się modelami opisującymi efekty skali. Rozdział ten opracowano na podstawie wylików uzyskanych w pracach (60, 80).

3.1 PODSTAWOWE RÓWNANIA

Wyprowadzenie równań liniowej makromechaniki kompozytów lepko-sprężystych, w ramach procedury zastosowanej w rozdziale 1 do kompozytów sprężystych, sprowadza się jedynie do zastąpienia równania konstytutywnego (1.1) odpowiednim równaniem konstytutywnym materiału lepko-sprężystego. W tym celu wprowadzimy do rozważań materiał Voigta, przyjmując

$$(3.1) \quad s_{ij} = a_{ijkl} e_{kl} + d_{ijkl} \dot{e}_{kl} ,$$

gdzie $a_{ijkl} = a_{ijkl}(x)$, $d_{ijkl} = d_{ijkl}(x)$ są V -periodycznymi funkcjami (stałymi dla każdego składnika kompozytu), reprezentującymi rozkłady modułów sprężystości i lepkości w kompozycie. Dla uproszczenia rozważań pomineliśmy w (3.1) wyrazy zależne od przyrostu temperatury (występujące w (1.1)) zakładając, że rozpatrywany proces jest izotermiczny. Łatwo zauważyć, że w ramach założeń przyjętych w rozdziale 1, zastąpienie równań (1.1) równaniami (3.1) nie ma wpływu na postać równań ruchu makromechaniki (1.14) bądź (1.15), natomiast zamiast równań (1.12) otrzymamy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{S}_{ij} &= \langle a_{ijkl} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijkl} h^A_{,l} \rangle V_k^A + \langle d_{ijkl} \rangle \dot{E}_{kl} + \\ &\quad + \langle d_{ijkl} h^A_{,l} \rangle \dot{V}_k^A , \\ H_i^A &= \langle a_{ijkl} h^A_{,j} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijkl} h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle V_k^B + \langle d_{ijkl} h^A_{,j} \rangle \dot{E}_{kl} + \\ &\quad + \langle d_{ijkl} h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle \dot{V}_k^B \end{aligned}$$

Powyższe równania można formalnie otrzymać podstawiając prawe strony równań konstytutywnych mikromechaniki (3.1) do wyrażeń dla S_{ij}, H_i^A podanych na końcu podrozdziału 1.4. Makromechanikę liniowo - lepkosprężystego kompozytu o periodycznej strukturze opisują więc równania ruchu (1.14) lub (1.15),^o równania geometryczne (1.9) oraz równania konstytutywne (3.2). Zagadnienia brzegowo - początkowe formułujemy tu analogicznie jak w przypadku liniowej sprężystości kompozytów, co omówiono w podrozdziale 1.5. Reprezentowany tu makromodel kompozytu uwzględnia oczywiście efekt skali (gdyż równania ruchu (1.15) zależą explicite od parametru mikrostruktury \mathcal{L}) a wnioski z dyskusji przeprowadzonej w podrozdziale 1.5 pozostają nadal aktualne. Bardziej ogólną postać równań konstytutywnych makromechaniki lepkosprężystych materiałów kompozytowych podano w (81).

Dla modelu lokalnego rozpatrywanych kompozytów obowiązują równania (1.9), (1.10) i (3.2), sprowadzające się do

$$S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i + \langle \rho \rangle b_i = 0,$$

$$(3.3) \quad S_{ij} = \langle a_{ijkl} \rangle E_{kl} + \langle \dot{a}_{ijkl} h_{,l}^A \rangle V_k^A + \langle d_{ijkl} \rangle \dot{E}_{kl} + \langle d_{ijkl} h_{,l}^A \rangle \dot{V}_k^A,$$

$$E_{ij} = U_{(i,j)},$$

oraz do poniższych równań ewolucyjnych dla makroparametrów wewnętrznych V_k^A :

$$(3.4) \quad \langle d_{ijkl} h_{,j}^A h_{,l}^B \rangle \dot{V}_k^B + \langle a_{ijkl} h_{,j}^A h_{,l}^B \rangle V_k^B = \\ = - \langle a_{ijkl} h_{,j}^A \rangle E_{kl} - \langle d_{ijkl} h_{,j}^A \rangle \dot{E}_{kl}.$$

W przeciwieństwie do modelu lokalnego kompozytów liniowo - sprężystych nie zachodzi tu więc możliwość wyrugowania z układu równań makroparametrów wewnętrznych i wprowadzenia modułów efektywnych wzorami postaci (1.21), tj. w sposób zbliżony do podanego w podrozdziale 1.6. Tym samym celem sformułowanie zagadnienia

brzegowo - początkowego w ramach modelu lokalnego wymagane są nie tylko 3 warunki brzegowe i 6 warunków początkowych dla 3 makroprzemieszczeń U_i , lecz także jest wymagana znajomość 3N warunków początkowych dla 3N makroparametrów wewnętrznych V_i^A .

3.2 PRZYPADEK SZCZEGÓLNY: LAMINATY

Rozpatrzmy laminat dwuskładnikowy, oznaczając przez l', l'' grubość sąsiadujących lamin i kładąc $l = l' + l''$. Wprowadzimy tylko jedną funkcję kształtu $h = h^i(x_j)$ gdzie oś x_j jest normalna do równoległych płaszczyzn rozdzielających laminy. Tym samym wprowadzamy do rozważań trzy makroparametry wewnętrzne $V_i := V_i^A$. Załóżmy ponadto, że funkcja $h(x_j)$ jest liniowa w obrębie każdej z lamin a na kolejnych płaszczyznach interlaminarnych przyjmuje wartości $\pm 1/3$. Otrzymamy wtedy $\langle \rho(h)^2 \rangle = l^2 \langle \rho \rangle$, $\langle \rho h \rangle = 0$ a równania ruchu (1.14) prowadzą do

$$(3.5) \quad \begin{aligned} S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i + \langle \rho \rangle b_i &= 0, \\ l^2 \langle \rho \rangle \ddot{V}_i + H_i &= 0. \end{aligned}$$

Jednocześnie równania konstytutywne (3.2) przyjmują postać

$$(3.6) \quad \begin{aligned} S_{ij} &= \langle a_{ijkl} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijk1} h_{,1} \rangle V_k + \langle d_{ijkl} \rangle \dot{E}_{kl} + \langle d_{ijk1} h_{,1} \rangle \dot{V}_k, \\ H_i &= \langle a_{i1kl} h_{,1} \rangle E_{kl} + \langle a_{i1k1} (h_{,1})^2 \rangle V_k + \langle d_{i1kl} h_{,1} \rangle \dot{E}_{kl} + \\ &\quad + \langle d_{i1k1} (h_{,1})^2 \rangle \dot{V}_k, \end{aligned}$$

przy czym jak poprzednio $E_{kl} = U_{(k,l)}$. Załóżmy, że składniki laminatu (laminy) są jednorodne i izotropowe. Oznaczając przez λ, μ moduły Lamé oraz przez η moduł lepkości, mamy

$$\begin{aligned} a_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ d_{ijkl} &= 2\eta (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}), \end{aligned}$$

przy czym λ, μ, η przybierają odpowiednio wartości λ', μ', η' oraz λ'', μ'', η'' w sąsiadujących laminach. Niech ponadto $h_{21} = -\ell/3\ell'$ w laminach wyróżnionych znakiem "prim" oraz $h_{11} = \ell/3\ell''$ w laminach wyróżnionych znakiem "bis". Oznaczając

$$\langle \xi \rangle := \frac{\ell'}{\ell} \xi' + \frac{\ell''}{\ell} \xi'', \quad [\xi] := \xi'' - \xi', \quad \{ \xi \} := \frac{\ell \xi'}{\ell'} + \frac{\ell \xi''}{\ell''},$$

gdzie ξ przebiega zbiór λ, μ, η , można przedstawić równania konstytutywne (3.6) w postaci (wskaźnik M przyjmuje wartości 2,3, nie sumować podług M !):

$$S_{11} = 2\langle \mu \rangle E_{11} + \langle \lambda \rangle E_{ii} - 2[\lambda + 2\mu] V_1 + \frac{2}{3}\langle \eta \rangle \dot{E}_{ii} - \frac{8}{3}[\eta] \dot{V}_1,$$

$$(3.7) \quad S_{1M} = S_{M1} = 2\langle \mu \rangle E_{1M} - 2[\mu] V_M + 2\langle \eta \rangle \dot{E}_{1M} - 2[\eta] \dot{V}_M,$$

$$S_{MM} = 2\langle \mu \rangle E_{MM} + \langle \lambda \rangle E_{ii} - 2[\lambda] V_1 + 2\langle \eta \rangle \dot{E}_{MM} - \frac{2}{3}\langle \eta \rangle \dot{E}_{ii} + \frac{4}{3}[\eta] \dot{V}_1,$$

$$S_{23} = S_{32} = 2\langle \mu \rangle E_{23} + 2\langle \eta \rangle \dot{E}_{23},$$

$$H_1 = 4\{\lambda + 2\mu\} V_1 + \frac{16}{3}\{\eta\} \dot{V}_1 - 2[\lambda + 2\mu] E_{11} - 2[\lambda] E_{MM} - 4[\eta] \dot{E}_{11} - \frac{4}{3}[\eta] \dot{E}_{ii},$$

$$H_M = 4\{\mu\} V_M + 4\{\eta\} \dot{V}_M - 4[\mu] E_{1M} - 4[\eta] \dot{E}_{1M}.$$

Podstawiając prawe strony równań (3.7) do (3.6) oraz biorąc pod

uwagę, że zgodnie z (1.9) $E_{ij} = U_{(i,j)}$, otrzymamy układ równań przemieszczeniowych dla rozpatrywanych lepkosprężystych laminatów.

3.3 PRZYKŁAD

Rozpatrzmy lepkosprężysty dwuskładnikowy laminat, który w stanie nieodkształconym zajmuje obszar $\Omega := (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$ oraz jest poddany jednoosiowemu rozciągnięciu wyłącznie w kierunku osi x_1 o wartość δ . Zgodnie z założeniami podanymi w podrozdziale 1.2 przyjmujemy, że grubość $l = L'_1 L''$ dwóch sąsiednich lamin jest niewielka wobec wymiaru L_1 obszaru Ω . Ponadto iloraz δ/l ma być pomijalnie mały wobec 1, co umożliwia stosowanie równań teorii liniowej.

Podstawowy układ równań przyjmujemy w postaci wskazanej na końcu poprzedniego podrozdziału a warunkami brzegowymi (tylko dla makroprzemieszczeń U_i) będą:

$$U_1 = 0 \text{ dla } x_1 = 0, \quad U_1 = \delta \text{ dla } x_1 = L_1,$$

$$U_i = 0 \text{ dla } x \in \partial\Omega.$$

Warunki początkowe niech mają postać:

$$U_1(x, 0) = \delta x_1 / L_1, \quad \dot{U}_1(x, 0) = 0,$$

$$U_M(x, 0) = 0, \quad \dot{U}_M(x, 0) = 0, \quad M = 2, 3,$$

$$V_i(x, 0) = 0, \quad \dot{V}_i(x, 0) = 0.$$

Łatwo wykazać, że rozwiązaniem przedstawionego tu zagadnienia brzegowo - początkowego jest

$$(3.8) \quad U_1 = \delta L_1^{-1} x_1, \quad U_M = 0, \quad V_i = V(t), \quad V_M = 0, \quad M = 2, 3,$$

gdzie funkcja $V(t)$ spełnia równanie

$$L\langle \rho \rangle \ddot{V}(t) - \frac{16}{3} \langle \eta \rangle \dot{V}(t) + 4 \{ \lambda + 2\mu \} V(t) = 2 [\lambda + 2\mu] \delta L_1^{-1}$$

oraz warunki początkowe $V(0) = 0$, $\dot{V}(0) = 0$.

Zdefiniujemy bezwymiarowy dodatni parametr ξ oraz stałe b, c

$$\xi := \frac{9}{16} \langle \rho \rangle L^2 \frac{\{ \lambda + 2\mu \}}{\{ \eta \}^2}, \quad b := \frac{3 \{ \lambda + 2\mu \}}{\{ \eta \}}, \quad c := \frac{9}{8} \frac{\{ \lambda + 2\mu \} [\lambda + 2\mu] \delta}{\{ \eta \}^2 L_1}$$

pisząc ostatnie równanie jako

$$(3.9) \quad \xi \ddot{V}(t) - b \dot{V}(t) + \frac{1}{4} b^2 V(t) = c.$$

Postać rozwiązania równania (3.9) zależy od wartości parametru ξ .

Oznaczając dodatkowo

$$\alpha_1 := \{ \eta \} \frac{16 + 3\sqrt{1-\xi}}{2\langle \rho \rangle L^2}, \quad \alpha_2 := \{ \eta \} \frac{16 - 3\sqrt{1-\xi}}{2\langle \rho \rangle L^2},$$

$$\alpha := \frac{8\{ \eta \}}{3\langle \rho \rangle L^2}, \quad \beta := \frac{\{ \eta \} \sqrt{1-\xi}}{2\langle \rho \rangle L^2}, \quad \gamma := \frac{[\lambda + 2\mu] \delta}{2 \{ \lambda + 2\mu \} L_1}$$

otrzymamy kolejno:

$$(3.10) \quad V(t) = -\gamma \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \exp(-\alpha_1 t) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \exp(-\alpha_2 t) - 1 \right] \quad \text{dla } 0 < \xi < 1,$$

$$V(t) = -\gamma \left[\exp(-\alpha t) + \alpha t \exp(-\alpha t) - 1 \right] \quad \text{dla } \xi = 1,$$

$$V(t) = -\gamma \left[\exp(-\alpha t) \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin \beta t - 1 \right] \quad \text{dla } \xi > 1.$$

Makronaprężenia można teraz wyznaczyć z pierwszego ze wzorów (3.2), korzystając z (3.8) i (3.10). Otrzymamy wtedy $S_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ oraz

(i) dla $0 < \xi < 1$:

$$S_{11} = C + E_1^1 \exp(-\alpha_1 t) + E_2^1 \exp(-\alpha_2 t),$$

$$S_{22} = S_{33} = D + F_1^2 \exp(-\alpha_1 t) + F_2^2 \exp(-\alpha_2 t),$$

(ii) dla $\zeta = 1$:

$$S_{11} = C + E_1^2 \exp(-\alpha t) + E_2^2 t \exp(-\alpha t),$$

(3.11)

$$S_{22} = S_{33} = D + F_1^2 \exp(-\alpha t) + F_2^2 t \exp(-\alpha t),$$

(iii) dla $\zeta > 1$:

$$S_{11} = C + E_1^3 \exp(-\alpha t) \cos \beta t + E_2^3 \exp(-\alpha t) \sin \beta t,$$

$$S_{22} = S_{33} = D + F_1^3 \exp(-\alpha t) \cos \beta t + F_2^3 \exp(-\alpha t) \sin \beta t,$$

gdzie C, E_1^i, \dots, F_2^3 są stałymi zależnymi od uśrednionych modułów materiałowych, odkształcenia względnego δL_1^{-1} oraz parametru mikrostruktury ℓ , wyrażenia analityczne dla tych stałych podano w (81).

3.4 WNIOSKI

Zbadajmy teraz jaki jest wpływ efektu skali na stan naprężenia elementu kompozytowego rozważanego w poprzednim podrozdziale. W tym celu oprócz równań (3.11), do wyznaczenia makronaprężeń w laminacie rozpatrywanym poprzednio wykorzystamy także model lokalny (równania (3.3), (3.4)), przy tych samych warunkach brzegowych i początkowych dla makroprzemieszczeń. Dla makroparametru wewnętrznego V_q przyjmujemy jednak, zgodnie z rzędem równania (3.4) tylko jeden warunek początkowy: $V_q = D$ dla $t=0$. Rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia brzegowo-początkowego, jak łatwo sprawdzić, można przyjąć w postaci

$$(3.12) \quad U_1 = \delta L_1^{-1} x_1, \quad U_M = 0, \quad V_1 = V(t), \quad V_M = 0, \quad M=2,3,$$

gdzie funkcja $V(t)$ spełnia równanie

$$\dot{V}(t) - \frac{3}{4} \frac{[\lambda + 2\mu]}{[\eta]} V(t) + \frac{3}{8} \frac{[\lambda + 2\mu]}{[\eta]} \frac{\sigma}{L_1} = 0.$$

Otrzymamy wtedy (por. oznaczenia w podrozdziale 3.3)

$$(3.13) \quad V(t) = \gamma [1 - \exp(-\alpha t)] ,$$

a makronaprężenia uzyskane na podstawie modelu lokalnego są równe

$$(3.14) \quad \begin{aligned} S_{11} &= C + N \exp(-\gamma t) , \\ S_{22} = S_{33} &= D + M \exp(-\gamma t) , \quad S_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j, \end{aligned}$$

gdzie M i N są stałymi zależnymi od uśrednionych modułów materiałowych i odkształcenia względnego δL_0^{-L} , lecz nie zależą od parametru mikrostruktury L ; wyrażenia analityczne dla M i N podano w (81).

Porównanie rozwiązań (3.8),(3.10),(3.11) uzyskanych w ramach modelu kompozytu z makroparametrami wewnętrznymi odpowiednio z rozwiązaniami (3.12), (3.13), (3.14) tego samego problemu fizycznego lecz w ramach modelu lokalnego, prowadzi do wniosków o dość ogólnym charakterze, tj. dotyczących dowolnych kompozytów lepkosprężystych a mianowicie:

(i) W procesach niestacjonarnych pomijanie wpływu efektu skali na stan naprężenia (makronaprężenia) w kopozycie może prowadzić do zupełnie błędnych wyników, tak pod względem ilościowym jak i jakościowym.

(ii) Badanie ewolucji kompozytu (zmian makronaprężeń w czasie) nie może być w przypadku ogólnym prowadzone w ramach przybliżenia quasistacjonarnego tj. z pominięciem członów mikroinercyjnych.

(iii) Modele lokalne, a więc także modele homogenizacji asymptotycznej, nie są w stanie opisać mikro- oscylacji pola naprężenia w czasie, wywołanych mikro- niejednorodnościami kompozytu.

(iv) Proponowany model z makroparametrami wewnętrznymi, uwzględniający efekt skali, może stanowić stosunkowo proste narzędzie do analizy różnych zagadnień szczególnych dla kompozytów lepkosprężystych.

Należy dodatkowo zaznaczyć, że znane w literaturze metody asymptotyczne, por. np. Bakhvalov i Panasenko, 1984, nie tylko zaniedbują wpływ wielkości mikrostruktury na stan naprężenia w kompozycie lepkosprężystym lecz także wymagają przeprowadzenia dość złożonych obliczeń celem sformułowania podstawowych równań makromodelu. Z trudnościami tego rodzaju nie spotykamy się korzystając z proponowanego modelu z makroparametrami wewnętrznymi, gdy specyfikacja równań konstytutywnych (3.2) wymaga jedynie wyznaczenia występujących w nich średnich. Jest to jednakże związane z uprzednim przyjęciem funkcji mikrokształtu h^A określających pod względem jakościowym klasę rozpatrywanych zaburzeń pola przemieszczenia, wywołanych mikroniejednorodnością periodycznego kompozytu, por. podrozdziały 1.2 i 1.3 .

4. TERMOSPREŻYSTOŚĆ KOMPozyTÓW

W tym rozdziale uogólnimy rozważania przeprowadzone w rozdziale pierwszym na zagadnienia liniowej termosprężystości. Sformułowana zostanie także teoria przewodnictwa cieplnego, która wraz z równaniami liniowo-sprężystego makromodelu kompozytu, podanymi w podrozdziale 1.5 (uwzględniającymi pole temperatury), reprezentuje liniową teorię naprężeń cieplnych. Podobnie jak poprzednio zostanie wykazane, że dla procesów dynamicznych wpływ efektu skali na stan makronaprężeń nie może być zaniedbywany a przedstawiona tu metoda makromodelowania stanowi dogodne narzędzie badawcze w termosprężystości kompozytów. Uzyskane rezultaty wykorzystują w zakresie dynamicznej termosprężystości, wyniki uzyskane w (85). Informacje dotyczące wyznaczenia pola temperatury w sztywnym przewodniku można znaleźć w pracy C. Woźniaka, Z.F. Baczyńskiego i M. Woźniak, 1995.

4.1 PODSTAWOWE RÓWNANIA

Prócz oznaczeń wprowadzonych w podrozdziale 1.1, oznaczymy dodatkowo przez c , q_i , ϵ , α , q odpowiednio ciepło właściwe, strumień ciepła, energię właściwą, wewnętrzne źródła ciepła (na jednostkę objętości) oraz brzegowe źródła ciepła (na jednostkę pola powierzchni). Mikromechanika termosprężystego periodycznego kompozytu jest opisywana znanymi w literaturze równaniami dla ciała niejednorodnego i anizotropowego. Są to:

(i) Równania konstytutywne

$$(4.1) \quad \begin{aligned} s_{ij} &= a_{ijkl} e_{kl} + b_{ij} v^c, \\ q_i &= k_{ij} v^c_{,j}, \\ \epsilon &= \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + b_{ij} e_{ij} v^c + \frac{1}{2} c v^{c^2}, \end{aligned}$$

w których a_{ijkl} , b_{ij} są, jak w rozdziale 1, tensorami modułów sprężystości oraz k_{ij} jest symetrycznym tensorem przewodnictwa cieplnego,

(ii) Równania geometryczne

$$(4.2) \quad e_{ij} = u_{(i,j)},$$

obowiązujące w ramach teorii liniowych,

(iii) Więzy kinematyczne dla pola przemieszczenia u_i oraz więzy termiczne dla pola temperatury v^c , które ograniczają rozważania tylko do pewnych klas ruchów ciała i rozkładów temperatury (równania tych więzów podamy poniżej),

(iv) Równania ruchu i równanie bilansu energii w słabej postaci

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta u_i dv + \int_{\Omega} s_{ij} \delta e_{ij} dv &= \int_{\partial\Omega} \rho_i \delta u_i da + \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i dv, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon \delta v^c dv + \int_{\Omega} q_i \delta v^c_{,i} dv &= \int_{\partial\Omega} q \delta v^c da + \int_{\Omega} (\alpha + s_{ij} \dot{e}_{ij}) \delta v^c dv, \end{aligned}$$

która winna być spełniona w $\bar{\Omega}$ dla każdego $\delta u_i, \delta e_{ij} = \delta u_{(i,j)}, \delta \dot{v}^c$ zgodnego z więzami (iii). Przy braku więzów termicznych drugie z równań (4.3) ma być spełnione dla dowolnej (dostatecznie regularnej) funkcji testującej i jest ono równoważne równaniu przewodnictwa cieplnego w znanej postaci

$$(*) \quad q_{i,j} = \dot{E} + s_{ij} \dot{e}_{ij} + \alpha$$

oraz warunkom ciągłości na powierzchniach rozdzielających składniki kompozytu

$$(**) \quad [q_i] n_i = 0$$

wraz z naturalnymi warunkami brzegowymi na $\partial\Omega$

$$(***) \quad q_i n_i = q,$$

gdzie n_i są składowymi wektora jednostkowego zewnętrznie normalnego do brzegu $\partial\Omega$ (w naturalnych warunkach brzegowych) bądź orientującego powierzchnie rozdzielające składniki (w warunkach ciągłości)

Zarówno gęstość masy ρ w (4.3) jak i moduły $a_{ijk}, b_{ij}, k_{ij}, c$ w (4.1) są funkcjami V-periodycznymi, przyjmującymi stałe wartości w częściach obszaru Ω zajętych przez poszczególne składniki kompozytu. Zgodnie z uwagami końcowymi podrozdziału 1.1, równania (4.1)-(4.3) stanowią punkt wyjściowy procedury makromodelowania, która będzie realizowana podobnie jak w rozdziale pierwszym.

Podstawą makromodelowania jest specyfikacja więzów kinematycznych wraz z więzami termicznymi, dana jako pewne rozszerzenie więzów (1.5) na pole temperatury. Podobnie jak w rozdziale pierwszym specyfikację tą wyrazimy w postaci następującej heurystycznej hipotezy.

H i p o t e z a m a k r o l o k a l i z a c j i. Pola przemieszczeń oraz pola temperatury $u_i(\cdot, t), \dot{v}^c(\cdot, t)$ dla mikroperiodycznego kompozytu poszukujemy w postaci

$$(4.4) \quad \begin{aligned} u_i(x, t) &= U_i(x, t) + h^A(x) V_i^A(x, t), \\ \psi(x, t) &= \Theta(x, t) + h^A(x) \Phi^A(x, t), \end{aligned}$$

w której h^A są postulowanymi w każdym problemie funkcjami mikrokształtu oraz U_i , V_i^A , Θ , Φ^A są dowolnymi regularnymi makrofunkcjami.

Podobnie jak w rozdziale pierwszym, sumy $h^A V_i^A$, $h^A \Phi^A$ przedstawiają zaburzenia odpowiednio pola przemieszczeń i pola temperatury wywołane mikroniejednorodnością materiału kompozytowego. Należy zaznaczyć, że w (4.4) pole Θ jak i pola Φ^A są niewiadomymi, w przeciwieństwie do identycznie oznaczonych pól we wzorze (1.11), które w rozdziale pierwszym były traktowane jako dane.

Zgodnie z (4.4) podstawowymi niewiadomymi formułowanego makromodelu będą nie tylko makroprzemieszczenia U_i oraz kinematyczne makroparametry wewnętrzne V_i^A lecz także pola Θ i Φ^A , zwane odpowiednio makrotemperaturą oraz termicznymi makroparametrami wewnętrznymi.

Konsekwencją hipotezy makrolokalizacji w postaci (4.4) jest przyjęcie funkcji testowych δu_i , $\delta \psi$ występujących w równaniach (4.3) jako

$$\delta u_i = \delta U_i + h^A \delta V_i^A, \quad \delta \psi = \delta \Theta + h^A \delta \Phi^A,$$

gdzie δU_i , δV_i^A , $\delta \Theta$, $\delta \Phi^A$ są dowolnymi regularnymi makrofunkcjami. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że funkcje te są niezależne.

Hipotezę (4.4) rozpatrujemy wspólnie z hipotezą makromodelowania, przedstawioną w podrozdziale 1.3. Procedura makromodelowania przebiega analogicznie jak w rozdziale pierwszym a jej końcowym efektem są poniższe równania reprezentujące makromodele liniowo - termosprężystego kompozytu z efektem skali. Są to:

(i) Równania ruchu

$$(4.5) \quad \begin{aligned} S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i - \langle \rho h^A \rangle \ddot{V}_i^A + \langle \rho \rangle b_i &= 0, \\ \langle \rho h^A h^B \rangle \ddot{V}_i^B + \langle \rho h^A \rangle \ddot{U}_i + H_i^A - \langle \rho h^A \rangle b_i &= 0, \end{aligned}$$

mające formalnie tą samą postać jak równania (1.14),

(ii) Równania makrobilansu energii

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \langle c \rangle \dot{\Theta} - Q_{i,i} + \langle b_{ij} \rangle \dot{E}_{ij} + \langle b_{ij} h^A_{,j} \rangle \dot{V}_i^A &= \langle \alpha \rangle, \\ \langle \rho h^A h^B \rangle \dot{\Phi}^B + \langle b_{ij} h^B_{,j} h^A \rangle \dot{V}_i^B + G^A &= 0, \end{aligned}$$

w których Q_i nazwiemy makrostrumieniem ciepła oraz G^A - wewnętrznymi makroprzepływami ciepła; wielkości te są określone poniżej równaniami konstytutywnymi (4.8),

(iii) Równania geometryczne w znanej już postaci

$$(4.7) \quad E_{ij} = U_{(i,j)},$$

(iv) Równania konstytutywne

$$(4.8) \quad \begin{aligned} S_{ij} &= \langle a_{ijkl} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijkl} h^A_{,l} \rangle V_k^A + \langle b_{ij} \rangle \Theta + \langle b_{ij} h^A \rangle \Phi^A, \\ H_i^A &= \langle a_{ijkl} h^A_{,j} \rangle E_{kl} + \langle a_{ijkl} h^A_{,j} h^B_{,l} \rangle V_k^B + \langle b_{ij} h^A_{,j} \rangle \Theta + \langle b_{ij} h^A_{,j} h^B \rangle \Phi^B, \\ Q_i &= \langle k_{ij} \rangle \Theta_{,j} + \langle k_{ij} h^A_{,j} \rangle \Phi^A, \\ G^A &= \langle k_{ij} h^A_{,j} \rangle \Theta_{,j} + \langle k_{ij} h^A_{,i} h^B_{,j} \rangle \Phi^B. \end{aligned}$$

Wyrazy zależne od b_{ij} w równaniach (4.6) opisują sprzężenie pola temperatury z polem odkształceń; pominięcie wpływu tego sprzężenia umożliwia traktowanie zagadnienia rozkładu temperatury w sposób

niezależny od zagadnień dynamiki kompozytu. Łatwo zauważyć, że równania ruchu (4.5), równania geometryczne (4.7) oraz dwa pierwsze równania konstytutywne (4.8) mają identyczną postać jak odpowiednio równania wyprowadzone w pierwszym rozdziale. Podstawiając prawe strony równań (4.8) do (4.5), (4.6) oraz uwzględniając (4.7), otrzymamy układ 4 równań różniczkowych cząstkowych dla U_i ,

(H) sprzężonych z układem 4N równań różniczkowych zwyczajnych dla makroparametrów wewnętrznych $V_i^A, \bar{\varphi}^A$. Ponadto łatwo wykazać, że dla każdego $x \in \Omega^0$ zachodzi

$$Q_i(x, t) = \langle q_i \rangle(x, t), \quad G^A(x, t) = \langle q_i h^A_{,i} \rangle(x, t),$$

co daje interpretację pól Q_i, G^A .

Interpretacja ta dotyczy tylko punktów makrownętrza Ω^0 obszaru Ω zajętego przez kompozyt w stanie niedoksztalczonym (por. uwagi na końcu podrozdziału 1.4) mimo, że pola Q_i, G^A są, zgodnie z (4.8), określone w całym obszarze Ω .

Wprowadzając funkcje $g^A := h^A l^{-L}$, podobnie jak w podrozdziale 1.5, równania (4.5), (4.6) sprowadzamy do postaci zależnej w sposób wyraźny od parametru mikrostruktury l (por. uwagi przed równaniem (1.15)):

$$(4.9) \quad \begin{aligned} S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i - l \langle \rho g^A \rangle \ddot{V}_i^A + \langle \rho \rangle b_i &= 0, \\ l^2 \langle \rho g^A g^B \rangle \ddot{V}_i^B + l \langle \rho g^A \rangle \ddot{U}_i + H_i^A - l \langle \rho g^A \rangle b_i &= 0, \\ \langle c \rangle \dot{\bar{\varphi}}^A - Q_{i,i} + \langle b_{ij} \rangle \dot{E}_{ij} + \langle b_{ij} h^A_{,j} \rangle \dot{V}_i^A = \langle \alpha \rangle, \\ l^2 \langle \rho g^A g^B \rangle \dot{\bar{\varphi}}^B + l \langle b_{ij} h^B_{,j} g^A \rangle \dot{V}_i^B + G^A &= 0. \end{aligned}$$

Rozpatrywane równania opisują więc makromodel z efektem skali. Dyskusja formalnej struktury otrzymanych równań przebiega podobnie jak dyskusja równań dla U_i, V_i^A przeprowadzona w podrozdziale 1.5 a rozwiązania zagadnień brzegowo-początkowych w ramach otrzymanych makromodeli mają sens fizyczny tylko gdy $U_i, V_i^A, \bar{\varphi}^A, G^A$

są regularnymi makrofunkcjami.

4.2 MODELE LOKALNE

Pomijając w (4.9) wyrazy zależne od parametru l , tj. przyjmując, że zachowanie kompozytu nie zależy od skali elementu reprezentatywnego, otrzymamy równania modelu lokalnego. Postępując podobnie jak w podrozdziale 1.6 możemy wtedy niewiadome V_i^A oraz $\bar{\mathcal{F}}^A$ wyrugować z układu równań. Korzystamy ztu z faktu, że macierz $N \times N$ o wyrazach $\langle k_{ij} h^A, i h^B, j \rangle$ jest nieosobliwa. Oznaczając przez C^{AB} elementy macierzy odwrotnej do macierzy elementów $\langle k_{ij} h^A, i h^B, j \rangle$

$$C^{AB} \langle k_{ij} h^B, i h^C, j \rangle = \delta^{AC}$$

oraz kładąc

$$(4.10) \quad \begin{aligned} K_{ij} &:= \langle k_{ij} \rangle - \langle k_{ik} h^A, i \rangle C^{AB} \langle k_{jm} h^B, m \rangle, \\ G &:= \langle c \rangle - \langle b_{ij} h^A, j \rangle C^{AB} \langle b_{kl} h^B, l \rangle, \end{aligned}$$

gdzie wielkości C_{ik}^{AB} zostały określone w podrozdziale 1.6, otrzymamy równania konstytutywne makromodelu lokalnego

$$(4.11) \quad \begin{aligned} S_{ij} &= A_{ijkl} E_{kl} + B_{ij} \otimes, \\ Q_i &= K_{ij} \otimes_j \end{aligned}$$

stanowiące rozszerzenie równań (1.22) na zagadnienia liniowej termosprężystości. Prócz modułów efektywnych (1.21) pojawiają się tutaj nowe moduły efektywne K_{ij} zdefiniowane przez pierwsze z równań (4.10). Równania (4.11) należy rozpatrywać wraz z równaniami ruchu i makrobilansu energii w postaci

$$(4.12) \quad S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i + \langle \rho \rangle b_i = 0,$$

$$C^{\ominus} - Q_{i,i} + B_{ij} \dot{E}_{ij} = \langle \alpha \rangle,$$

która wynika z wyrugowania parametrów V_i^A , Φ^A z równań (4.9). Otrzymany tutaj makromodel lokalny periodycznego kompozytu, dany równaniami (4.11), (4.12) i (4.7), stanowi pewne uogólnienie modelu lokalnego omówionego w podrozdziale 1.6. Łatwo zauważyć, że równania (4.12), (4.11) mają postać formalnie podobną do znanych równań liniowej termosprężystości materiału jednorodnego. Tym samym modelem lokalnym kompozytu termosprężystego o mikroperiodycznej strukturze jest pewien "hipotetyczny" materiał jednorodny o własnościach określonych modułami efektywnymi A_{ijkl} , B_{ij} , K_{ij} oraz stałymi $\langle \alpha \rangle$, C^{\ominus} .

4.3 PRZEWODNICTWO CIEPLNE

Pomijając wpływ prędkości odkształcenia kompozytu na postać bilansu energii, tj. pomijając człon $S_{ij} \dot{E}_{ij}$ w drugim z równań bilansu (4.3), po przeprowadzeniu procedury makromodelowania otrzymamy zamiast równań (4.6) uproszczone równania postaci

$$(4.13) \quad \langle c \rangle \dot{\Theta} - Q_{i,i} = \langle \alpha \rangle,$$

$$\langle c h^A h^B \rangle \dot{\Phi}^B + G^A = 0,$$

w których wstępują wyłącznie pola charakteryzujące rozkład temperatury. Podstawiając następnie do (4.13) prawe strony dwóch ostatnich równań konstytutywnych (4,8) dochodzimy do układu N+1 równań dla makrotemperatury Θ oraz termicznych makroparametrów wewnętrznych Φ^A

$$(4.14) \quad \langle c \rangle \dot{\Theta} - \langle k_{ij} \rangle \Theta_{,ij} - \langle k_{ij} h^A_{,j} \rangle \Phi^B_{,i} = \langle \alpha \rangle,$$

$$\langle c h^A h^B \rangle \dot{\Phi}^B + \langle k_{ij} h^A_{,i} h^B_{,j} \rangle \Phi^B + \langle k_{ij} h^A_{,j} \rangle \Theta_{,ij} = 0.$$

Równania (4.14) opisują makromodel przewodnictwa cieplnego w kompozycie mikroperiodycznym; ponieważ $\langle ch^A h^B \rangle = \ell^2 \langle cg^A g^B \rangle$, przeto jest to model uwzględniający efekt skali. Pomińcie tego faktu poprzez formalne pominięcie w (4.14) wyrazu $\langle ch^A h^B \rangle$ zależnego od parametru mikrostruktury ℓ , umożliwia wyrugowanie z (4.14) makroparametrów $\bar{\Phi}^A$, co sprowadza te równania do postaci

$$(4.15) \quad \langle c \rangle \textcircled{4} - K_{ij} \textcircled{4}, ij = 0,$$

w której K_{ij} jest zdefiniowane pierwszym ze wzorów (4.10). Równanie (4.15) reprezentuje model lokalny teorii przewodnictwa cieplnego a pod względem formalnym jest analogiczne do równania przewodnictwa cieplnego w jednorodnym sztywnym ośrodku.

Równania (4.14) należy rozpatrywać łącznie z warunkiem brzegowym dla makrotemperatury $\textcircled{4}$ oraz warunkami początkowymi dla $\textcircled{4}$ i $\bar{\Phi}^A$. Cechą charakterystyczną rozpatrywanego modelu jest niezależność dodatkowych niewiadomych $\bar{\Phi}^A$ od warunków brzegowych. Mamy więc do czynienia z makromodelem dogodnym w zastosowaniach teorii, gdyż warunki brzegowe mają tu postać analogiczną do spotykanej w klasycznej teorii przewodnictwa cieplnego a forma równań (4.14) jest stosunkowo prosta (parametry wewnętrzne $\bar{\Phi}^A$ spełniają równania różniczkowe zwyczajne). Należy pamiętać, że rozwiązania zagadnień brzegowo-początkowych dla równań (4.14) oraz (4.15) mają sens fizyczny tylko gdy $\textcircled{4}$, $\bar{\Phi}^A$ są regularnymi makrofunkcjami.

4.4 PRZYKŁAD

Podobnie jak w dwóch poprzednich rozdziałach pracy dokonajmy porównania rezultatów wynikających ze stosowania w zagadnieniach termosprężystości modelu z efektem skali (równania (4.5) - (4.8)) i modelu lokalnego (równania (4.7), (4.11), (4.12)), w którym

posługujemy się modułami efektywnymi. W tym celu rozpatrzmy laminat utworzony z dwóch jednorodnych ortotropowych składników. Niech osie x_i wyznaczają główne kierunki ortotropi oraz oś x_3 będzie normalna do płaszczyzn rozdzielających sąsiednie laminy. Podobnie jak w podrozdziale 3.3 wprowadzimy jedną funkcję mikrokształtu $h = h^1(x_3)$ a tym samym cztery makroparametry wewnętrzne $V_i = V_i^1(x, t)$, $\Phi = \Phi^1(x, t)$, $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$. Przyjmijmy jednorodne warunki brzegowe dla makroprzemieszczeń oraz izolację cieplną na brzegu kładąc

$$(4.16) \quad U_i(x, t) = 0, \quad Q_i(x, t) \eta_i(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Załóżmy także jednorodne warunki początkowe dla makroprzemieszczeń i makroparametrów wewnętrznych wraz z równomiernym (znanym) rozkładem temperatury w chwili początkowej

$$(4.17) \quad U_i(x, 0) = 0, \quad V_i(x, 0) = 0, \quad \Theta(x, 0) = \Theta_0, \quad \Phi(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Łatwo sprawdzić, że zagadnienie brzegowo-początkowe dane równaniami (4.5) - (4.8) (redukującymi się teraz do ośmiu równań dla U_i , Θ , V_i , Φ) oraz warunkami (4.16), (4.17), ma rozwiązanie postaci

$$(4.18) \quad \begin{aligned} U_i &= 0, \quad V_2 = V_3 = \Phi = 0, \\ \Theta &= \Theta_0 K \left(1 - \frac{\langle b_{11} h_{,1} \rangle^2}{\langle c \rangle \langle a_{1111} (h_{,1})^2 \rangle} \cos \omega t \right), \\ V_1 &= -\Theta_0 K \frac{\langle b_{11} h_{,1} \rangle}{\langle a_{1111} (h_{,1})^2 \rangle} (1 - \cos \omega t), \end{aligned}$$

w całym obszarze Ω i dla każdego $t \geq 0$, przy czym stałe K oraz ω są określone przez

$$K := \frac{\langle c \rangle \langle a_{1111} (h_{,1})^2 \rangle}{\langle c \rangle \langle a_{1111} (h_{,1})^2 \rangle - \langle b_{11} h_{,1} \rangle^2},$$

$$\omega^2 := \frac{\langle c \rangle \langle a_{111} \langle h_{11} \rangle^2 \rangle - \langle b_{11} h_{11} \rangle^2}{\langle \rho h^2 \rangle \langle c \rangle}.$$

Ten sam problem fizyczny w ramach modelu lokalnego jest opisany równaniami (4.11), (4.12), (4.7) (redukującymi się do czterech równań dla U_i, Θ), warunkami brzegowymi (4.16) oraz warunkami początkowymi: $U_i(x, 0) = 0, \Theta(x, 0) = \Theta_0, x \in \Omega$. Rozwiązania zagadnienia brzegowo - początkowego daje

$$(4.19) \quad U_i = 0, \quad \Theta = \Theta_0$$

w całym obszarze Ω i dla każdego $t \geq 0$. Jest to oczywiście elementarne rozwiązanie zagadnienia termosprężystości dla jednorodnego ciała izolowanego termicznie na unieruchomionym brzegu, poddanego w chwili początkowej równomiernemu ogrzaniu.

4.5 WNIOSKI

Z wyrażenia dla makrotemperatury Θ danego wzorem (4.18) wynika, że niejednorodność kompozytu wraz ze sprzężeniem pola temperatury z polem odkształceń prowadzi do oscylacji w czasie pola makrotemperatury. Fakt ten nie jest opisany przez model lokalny termosprężystego kompozytu, gdyż zgodnie z (4.19) pole makrotemperatury otrzymane w ramach tego modelu jest stałe nie tylko w obszarze zajęty przez ciało lecz także w czasie. Zauważmy także, że dla ośrodka jednorodnego mamy $\langle b_{11} h_{11} \rangle = b_{11} \langle h_{11} \rangle = 0$ a wyrażenie (4.18) dla makrotemperatury daje $\Theta = \Theta_0$ dla każdego $t \geq 0$. Tym samym procesy niestacjonarna (niekoniecznie dynamiczne lecz także quasistatyczne, tj. pomijające siły inercyjne) w materiałach kompozytowych o mikroperiodycznej strukturze należy rozpatrywać z uwzględnieniem wpływu wielkości mikrostruktury na przebieg procesu. Wpływ ten opisuje model termosprężystego kompozytu z efektem skali, dany równaniem (4.5) - (4.8). Podobny wniosek dotyczy także zagadnień niestacjonarnych przewodnictwa cieplnego, do badania których można wykorzystać równania (4.14).

5. ZAGADNIENIA NIELINIOWE

W rozdziale tym sformułujemy najpierw makromodele kompozytów poddanych dowolnym skończonym odkształceniom. Uzyskane równania stanowią podstawę do otrzymania modeli wiotkich elementów kompozytowych (takich jak pręty lub płyty), które mogą doznawać skończonych przemieszczeń i obrotów przy małych wartościach względnych wydłużeń. Rozpatrywane będą przede wszystkim materiały sprężyste, a następnie uogólnimy rozważania na kompozyty utworzone z materiałów prostych i materiałów typu różniczkowego. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach książki, uwagę koncentrujemy na modelach z efektem skali. Modele lokalne zostaną otrzymane jako formalne przybliżenia asymptotyczne modeli z efektem skali, będąc wynikiem pomijania wielkości rzędu parametru mikrostruktury. Rozdział ten podsumowuje wyniki prac (62,63,65,82) jak również wykorzystuje rezultaty prowadzonych obecnie badań, por. Wierzbicki 1995.

5.1 PODSTAWOWE POJECIA I ZAŁOŻENIA

Oznaczmy przez Ω_R obszar zajęty przez sprężysty kompozyt w znanej konfiguracji odniesienia. Załóżmy, że w konfiguracji odniesienia kompozyt ma strukturę periodyczną, przy czym

$$V_R := (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2) \times (-l_3/2, l_3/2)$$

jest elementem reprezentatywnym tej struktury. Niech $x_i = P_i(X)$, $X \in \Omega_R$, określa pewną znaną wyróżnioną konfigurację rozpatrywanego ciała (w szczególnym przypadku możemy przyjmując $x_i = \delta_{i\alpha} X^\alpha$), którą nazwiemy konfiguracją początkową. W tym rozdziale $u_i = u_i(X, t)$, $X \in \Omega_R$, będzie przemieszczeniem w chwili t punktu o współrzędnych materialnych $X = (X^\alpha)$, mierzonym od wprowadzonej powyżej konfiguracji początkowej do konfiguracji w chwili t , nazywanej aktualną. Tym samym $x_i = P_i(X) + u_i(X, t)$, $X \in \Omega_R$, są współrzędnymi położenia w chwili t (w konfiguracji aktualnej) cząstki materialnej o współrzędnych X . Podobnie jak poprzednio oznaczamy przez $l := \sqrt{(l_1)^2 + (l_2)^2 + (l_3)^2}$ parametr mikrostruktury

kompozytu, przez L - minimalny wymiar charakterystyczny obszaru Ω_R oraz kładąc $\lambda := L/L$, przyjmujemy $\lambda \ll 1$, ograniczając rozważania do kompozytów mikroperiodycznych. Równaniami mikromechaniki kompozytu, wyrażonymi we współrzędnych materialnych $X = (X^\alpha) \in \Omega_R$, są znane równania nieliniowej teorii sprężystości ośrodka niejednorodnego, a mianowicie:

(i) równania konstytutywne

$$(5.1) \quad S_R^{i\alpha} = \frac{\partial \bar{\sigma}_R}{\partial u_{i,\alpha}}$$

gdzie $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_R(X, \nabla P(X) + \nabla u)$ jest funkcją energii odkształcenia (gęstością energii na jednostkę objętości obszaru Ω_R) oraz $S_R^{i\alpha}$ - pierwszym tensorem naprężenia Pioli - Kirchhoffa; tu i dalej $\nabla P, \nabla u$ są macierzami o składowych $P_{i,\alpha}, u_{i,\alpha}$.

(ii) więzy kinematyczne jako warunki wyznaczające pewną klasę pól przemieszczenia, dopuszczalnych w rozpatrywanym problemie,

(iii) równania ruchu w słabej postaci

$$(5.2) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \dot{u}_i \delta u_i dv_R + \int_{\Omega_R} S_R^{i\alpha} \delta u_{i,\alpha} dv_R = \int_{\partial \Omega_R} p_{Ri} \delta u_i da_R + \int_{\Omega_R} \rho_R b_i \delta u_i dv_R,$$

które winny być spełnione dla każdego pola przemieszczenia przygotowanego δu_i (funkcji testowej)) zgodnego z więzami kinematycznymi. Gdy więzy kinematyczne ograniczają tylko przemieszczenia punktów brzegowych ciała, to z powyżej podanej słabej postaci równań ruchu wynikają równania różniczkowe ruchu

$$(*) \quad S_{Ri}^{\alpha,\alpha} - \rho_R \ddot{u}_i + \rho_R b_i = 0,$$

które winny być spełnione w obszarze Ω_R poza powierzchniami rozdzielającymi składniki kompozytu.

Funkcje $\rho_R(X), \bar{\sigma}_R(X, \nabla p)$ są V_R -periodycznymi funkcjami argumentu X , przyjmującymi stałe wartości w częściach obszaru Ω_R

zajmowanych przez poszczególne składniki kompozytu. Funkcje te doznają więc skoku jedynie na powierzchniach rozdzielających składniki. Silnie oscylujący charakter funkcji σ_R, ϵ_R uniemożliwia zastosowanie równań mikromechaniki (5.1), (5.2) do analizy numerycznej problemów dotyczących kompozytów o strukturze mikroperiodycznej, stanowiących przedmiot rozważań tej książki. Tym samym równania (5.1), (5.2) będą stanowić tylko punkt wyjścia do formułowania równań makromodelu kompozytu. Idea procedury makromodelowania jest tu w pełni analogiczna do omówionej w rozdziale pierwszym. W tym celu wprowadzamy liniowo-niezależny układ funkcji mikrokształtu $h^A(X)$, $A=1, \dots, N$, oraz przyjmujemy szczególną postać więzów kinematycznych, daną hipotezą makrolokalizacji (1.6). Konsekwencją tej hipotezy jest przyjęcie funkcji testowych δu_i w (5.2) zgodnie z (1.7). Ponadto przyjmujemy hipotezę makromodelowania w niezmienionej postaci zakładając, że dla dowolnej makrofunkcji $F(\cdot)$ określonej na Ω_R (F może także zależeć od czasu), wielkości $O(\epsilon_F)$ pomijamy wobec wartości $F(X)$, $X \in \Omega_R$. Ponadto przy przekształcaniu całek w (5.2) pomijamy wielkości $O(\epsilon)$. Dokładne omówienie obu hipotez oraz ich fizyczne uzasadnienie podano w podrozdziałach 1.2, 1.3. Zakładać dalej będziemy, że gradienty $P_{i,\alpha}$ początkowej konfiguracji ciała są znanymi makrofunkcjami argumentu $X \in \Omega_R$.

5.2 TEORIA SKONCZONYCH ODKSZTAŁCEN SPRĘŻYSTYCH

Równania reprezentujące makromodel kompozytu sprężystego, uwzględniający odkształcenia skończone, otrzymamy podstawiając prawe strony (5.1) do (5.2), korzystając z hipotezy makrolokalizacji (1.6) oraz zależności (1.7), a następnie przekształcając całki w (5.2) zgodnie ze schematem (1.4) i hipotezą makromodelowania. Po uwzględnieniu (1.5) i wprowadzeniu uśrednionej funkcji energii odkształcenia (z pominięciem wielkości $O(\epsilon_V)$ jako małych wobec V_i^A) zgodnie z

$$(5.3) \quad \langle \sigma_R \rangle(X, \nabla U, V^A) = \langle \sigma_R(Z, \nabla U + \nabla h^A(Z) V^A) \rangle, \quad Z \in V_R.$$

oraz po wykonaniu szeregu przekształceń, których tu nie przytaczamy, otrzymamy równania ruchu makromodelu postaci

$$(5.4) \quad \begin{aligned} S_{Ri}^{\alpha} \langle \rho_R \rangle \ddot{U}_i - \langle \rho_R h^A \rangle \dot{V}_i^A + \langle \rho_R \rangle b_i &= 0, \\ \langle \rho_R h^A h^B \rangle \ddot{V}_i^B + \langle \rho_R h^A \rangle \dot{U}_i + H_{Ri}^A - \langle \rho_R h^A \rangle b_i &= 0, \end{aligned}$$

w których

$$(5.5) \quad S_{Ri}^{\alpha} = \frac{\partial \langle \sigma_R \rangle}{\partial U_{i,\alpha}}, \quad H_{Ri}^A = \frac{\partial \langle \sigma_R \rangle}{\partial V_i^A},$$

nazywamy odpowiednio pierwszym tensorem makronapężenia Pioli - Kirchhoffa oraz siłami mikro-dynamicznymi (względem konfiguracji odniesienia). Można jednocześnie wykazać, że dla każdego $X \in \Omega_R^o$, gdzie $\Omega_R^o := \{X \in \Omega_R : V_R(X) \subset \Omega_R\}$, zachodzi

$S_{Ri}^{\alpha}(X,t) = \langle S_{Ri}^{\alpha}(X,t) \rangle$, $H_{Ri}^A(X,t) = \langle S_{Ri}^{\alpha} h_{i,\alpha}^A \rangle(X,t)$, przy czym uśrednienia dokonujemy po komórce $V_R(X)$, zgodnie z hipotezą makromodelowania przyjmując, że

$$S_{Ri}^{\alpha}(X+Z,t) = \frac{\partial}{\partial U_{i,\alpha}} \sigma_R(X+Z, \nabla P(X) + \nabla U(X,t) + \nabla h^A(X+Z) V^A(X,t)), \quad Z \in V_R.$$

Tym samym postać równań ruchu (5.4) nie zależy od własności materiałów (składników) kompozytu, które interweniują tylko w (5.5) będąc jednoznacznie określone uśrednioną energią odkształcenia (5.3) dla każdego $X \in \Omega_R$. Równania (5.5) nazwiemy równaniami konstytutywnymi otrzymanego makromodelu. Równania (5.4) (5.5) prowadzą do układu trzech równań różniczkowych cząstkowych (dla makroprzemieszczeń U_i) oraz 3N równań różniczkowych zwyczajnych (dla makroparametrów wewnętrznych V_i^A):

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle \sigma_R \rangle}{\partial U_{i,\alpha} \partial U_{j,\beta}} U_{j,\alpha\beta} - \langle \rho_R \rangle \ddot{U}_i + \frac{\partial^2 \langle \sigma_R \rangle}{\partial U_{i,\alpha} \partial V_j^A} V_{j,\alpha}^A + \frac{\partial^2 \langle \sigma_R \rangle}{\partial U_{i,\alpha} \partial V_i^A} \langle \rho_R h^A \rangle \dot{V}_i^A + \langle \rho_R \rangle b_i &= 0, \\ \langle \rho_R h^A h^B \rangle \ddot{V}_i^B + \frac{\partial \langle \sigma_R \rangle}{\partial V_i^A} + \langle \rho_R h^A \rangle \dot{U}_i - \langle \rho_R h^A \rangle b_i &= 0. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe i początkowe formułujemy w sposób podobny jak

dla zagadnień liniowych.

Ponieważ $\langle \sigma_R \rangle = \langle \hat{\sigma}_R \rangle(X, \nabla U, V^A)$, to jest $\langle \hat{\sigma}_R \rangle$ może zależeć od $X \in \Omega_R$, przeto równania (5.6) w ogólnym przypadku nie są równaniami o stałych współczynnikach. Jednakże $\langle \hat{\sigma}_R \rangle$ jako funkcję argumentu $X \in \Omega_R$, zgodnie z (5.3), można także traktować jako makrofunkcję, gdyż jej wartości w obszarach $V_R(X)$, $X \in \Omega_R^0$, są w przybliżeniu stałe. Tym samym mamy do czynienia z pewnym makromodelem kompozytu.

Zgodnie ze znanymi warunkami niezmienniczości, funkcję $\hat{\sigma}_R(X, \nabla P + \nabla U)$ można zawsze przedstawić w postaci $\pi_R(X, e)$, gdzie

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (p_{i,\alpha} p_{i,\beta} - G_{\alpha\beta}), \quad G_{\alpha\beta} = P_{i,\alpha} P_{i,\beta},$$

$$p_i = P_i + u_i.$$

Po uwzględnieniu (1.6), przyjęciu gradientów przemieszczenia, zgodnie z hipotezą makromodelowania (pomijamy $h^A V_{i,\alpha}^A \in \mathcal{O}(\varepsilon_V)$ wobec $h^A, \alpha V_i^A$) oraz wprowadzeniu oznaczeń

$$(5.7) \quad \begin{aligned} E_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (P_{i,\alpha}^C U_{i,\beta} + P_{i,\beta}^C U_{i,\alpha}) + \frac{1}{2} U_{i,\alpha}^C U_{i,\beta}, \\ V_\alpha^A &:= V_i^A (P_{i,\alpha}^C + U_{i,\alpha}^C), \\ V^{AB} &:= V_i^A V_j^B \delta^{ij}, \end{aligned}$$

przyjmujemy (z dokładnością do pominiętych członów $\mathcal{O}(\varepsilon_V)$), że

$$e_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + h^A_{i,\alpha} V_\beta^A + h^A_{i,\alpha} h^B_{i,\beta} V^{AB}.$$

Kładąc

$$(5.8) \quad \Pi(X, E, V^A, V^{AB}) := \langle \pi_R(X, E + \text{sym}(\nabla h^A(X) V^B) + \nabla h^A(X) \otimes \nabla h^B(X) V^{AB}) \rangle_{\langle \hat{\sigma}_R \rangle},$$

gdzie $\text{sym}(\nabla h^A V^A)$ jest macierzą symetryczną o składowych $h^A_{i,\alpha} V_\beta^A$, otrzymamy drugą postać równań konstytutywnych (5.5):

$$(5.9) \quad \begin{aligned} S_{Ri}^\alpha &= \langle \hat{\sigma}_R \rangle \left[\frac{\partial \Pi}{\partial E_{\alpha\beta}} (P_{i,\beta} + U_{i,\beta}) + \frac{\partial \Pi}{\partial V_\alpha^A} V_i^A \right], \\ H_{Ri}^A &= \langle \hat{\sigma}_R \rangle \left(\frac{\partial \Pi}{\partial V_\alpha^A} P_{i,\alpha} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial V^{AB}} V_i^B \right). \end{aligned}$$

W powyższych równaniach ruchu i równaniach konstytutywnych mamy do czynienia z gęstościami $\langle \rho_R \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_R \rangle$ itd. względem konfiguracji odniesienia. Doprowadźmy teraz makromodel sprężystego kompozytu, poddanego skończonym odkształceniom, do postaci w której występują gęstości odnoszące się do aktualnej makrokonfiguracji kompozytu, tj. konfiguracji danej odwzorowaniem

$x_i = P_i(X) + U_i(X, t)$, $X \in \Omega_R$. W tym celu oznaczmy przez Z^α_i elementy macierzy odwrotnej do $P_{i,\alpha} + U_{i,\alpha}$:

$$Z^\alpha_i (P^i_{,\beta} + U^i_{,\beta}) = \delta^\alpha_\beta,$$

oraz położmy

$$C_{\alpha\beta}^i := (P^i_{,\alpha} + U^i_{,\alpha})(P^i_{,\beta} + U^i_{,\beta}) = G_{\alpha\beta}^i + 2E_{\alpha\beta}^i, \quad J^i := \sqrt{\det C_{\alpha\beta}^i},$$

$$\mu := J^{-1} \langle \rho_R \rangle, \quad \mu^A := J^{-1} \langle \rho_R h^A \rangle, \quad \mu^{AB} := J^{-1} \langle \rho_R h^A h^B \rangle,$$

$$V^{A\alpha} := C^{\alpha\beta} V^A_\beta,$$

gdzie $C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$ oraz $C_{\alpha\beta}$ nazwiemy składowymi tensora makrometryki odkształconego kompozytu. Definiując wielkości

$$S^{\alpha\beta} := J^{-1} S_{Ri}^{\alpha\beta} Z^\beta_i, \quad H^{A\alpha} := J^{-1} H_{Ri}^A Z^\alpha_i,$$

otrzymamy na podstawie (5.9) poniższe równania konstytutywne dla $S^{\alpha\beta}$, $H^{A\alpha}$:

$$S^{\alpha\beta} = \mu \left(\frac{\partial \Pi}{\partial E_{\alpha\beta}^i} + \frac{\partial \Pi}{\partial V_{i\alpha}^A} V^{A\beta} \right),$$

(5.10)

$$H^{A\alpha} = \mu \left(\frac{\partial \Pi}{\partial V_\alpha^A} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial V^{AB}} V^{B\alpha} \right).$$

Równania ruchu (5.4) możemy jednocześnie przekształcić do postaci zawierającej wprowadzone tu wielkości $S^{\alpha\beta}$, $H^{A\alpha}$, które nazwiemy odpowiednio konwekcyjnym tensorem makronapężenia oraz konwekcyjnymi siłami mikrodynamicznymi. Pomijając standardowe przekształcenia i oznaczając linią pionową pochodną kowariantną pola tensorowego w makrometryce $C_{\alpha\beta}$, otrzymamy

$$(5.11) \quad \begin{aligned} S^{\alpha\beta} / \beta - (\mu \ddot{U}_i + \mu^A \ddot{V}_i^A) Z_i^\alpha + \mu b_i Z_i^\alpha &= 0, \\ \mu^{AB} \ddot{V}_i^B + \mu^A \ddot{U}_i + H^{A\alpha} (P_{i,\alpha} + U_{i,\alpha}) - \mu^A b_i &= 0. \end{aligned}$$

Równania (5.7), (5.10), (5.11) reprezentują makromodel sprężystego kompozytu, w którym wszystkie gęstości są odniesione do aktualnej makrokonfiguracji tego kompozytu. Zarówno potencjał Π w (5.10) jak i wielkości μ, μ^A, μ^{AB} w (5.11) są makrofunkcjami, podobnie jak i gradienty $P_{i,\alpha}, Z_i^\alpha$.

5.3 PODEJSCIE ALTERNATYWNE

Dotychczasowe podejście do formułowania równań makromechaniki, zarówno w zakresie liniowym jak i nieliniowym, polegało na traktowaniu hipotezy makrolokalizacji jako szczególnego rodzaju więzów kinematycznych. Konsekwencją tego podejścia jest wykorzystanie słabej postaci równań ruchu (1.3) lub (5.2), w której funkcje testujące δu_i są zgodne z przyjętymi więzami. Podobną metodę makromodelowania zastosowano w rozdziale 4, wprowadzając wraz z więzami dla pola przemieszczenia także więzy dla pola temperatury. W tym podrozdziale przedstawimy alternatywną metodę makromodelowania kompozytów, prowadzącą jednakże do identycznych wyników. Korzystamy tu z podejścia zaproponowanego w ramach teorii nieliniowej przez Wierzbickiego, 1995, oraz zastosowanego w pracy (46) do zagadnień liniowych.

Podstawę makromodelowania, podobnie jak poprzednio, stanowią: hipoteza makrolokalizacji (1.6) oraz hipoteza makromodelowania, omówione w podrozdziałach 1.2 oraz 1.3, które w niezmienionej postaci wykorzystano w tym rozdziale do modelowania zagadnień nieliniowej teorii sprężystości. Hipoteza makrolokalizacji, wprowadzającą więzy kinematyczne (1.6), powoduje, że równania różniczkowe ruchu (oznaczone przez *) w podrozdziale 5.1) nie są spełnione. Tym samym

$$S_{Ri}^{\alpha}{}_{,\alpha} - \rho_R \ddot{u}_i + \rho_R b_i = \tau_i, \quad ,$$

gdzie $\tau_i = \tau_i(X, t)$ są pewnymi nieznanymi residuami, określonymi w Ω_R za wyjątkiem powierzchni rozdzielających składniki kompozytu. Celem otrzymania równań makromodelu założymy dodatkowo, że dla każdej chwili t oraz każdego $X \in \Omega_R^o$ zachodzi

$$\langle \tau_i \rangle(X, t) = 0, \quad \langle \tau_i h^A \rangle(X, t) = 0,$$

dla każdej funkcji mikroształtu h^A występującej w (6.1). Tym samym, zgodnie z (5.1), otrzymujemy

$$(5.12) \quad \left\langle \left(\frac{\partial \delta_R}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} - \varrho_R \ddot{u}_i + \varrho_R b_i \right\rangle(X, t) = 0,$$

$$\left\langle \left[\left(\frac{\partial \delta_R}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} - \varrho_R \ddot{u}_i + \varrho_R b_i \right] h^A \right\rangle(X, t) = 0, \quad X \in \Omega_R^o.$$

Można wykazać, że hipoteza makrolokalizacji (1.6), hipoteza makromodelowania oraz warunki (5.12) prowadzą do otrzymanego uprzednio makromodelu rozpatrywanego kompozytu. Podstawiając do pierwszego z tych warunków $\delta_R = \delta_R(X, \nabla P + \nabla U + \nabla h^A V^A)$, po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\left\langle \left(\frac{\partial \delta_R}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \right\rangle(X, t) = \left\langle \left(\frac{\partial \delta_R}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \right\rangle(X, t) = \left(\frac{\partial \langle \delta_R \rangle}{\partial u_{i,\alpha}}(X, t) + \bar{\sigma}(\varepsilon_{vu}) + \bar{\sigma}(\varepsilon_v) \right)_{,\alpha},$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial \delta_R}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} h^A \right\rangle(X, t) = \left\langle \left(\frac{\partial \delta_R}{\partial u_{i,\alpha}} h^A \right)_{,\alpha} \right\rangle(X, t) - \left\langle \frac{\partial \delta_R}{\partial u_{i,\alpha}} h^A \right\rangle(X, t) = - \frac{\partial \langle \delta_R \rangle}{\partial V_i^A}(X, t) + \bar{\sigma}(\varepsilon_{vu}) + \bar{\sigma}(\varepsilon_v)$$

dla każdego $X \in \Omega_R^o$. Pomijając wyrazy $\bar{\sigma}(\varepsilon_{vu})$, $\bar{\sigma}(\varepsilon_v)$ wobec występujących w powyższych równaniach wartości ∇U , ∇^A (zgodnie z hipotezą makromodelowania), po wykorzystaniu (1.6) otrzymamy z (5.12) układ równań postaci (5.6) lecz spełniony tylko w makro wnętrzu Ω_R^o obszaru Ω_R (tj. dla każdego $X \in \Omega_R^o$).

Zauważmy, że zgodnie z (5.3) lewe strony równań (5.6) są dobrze określone także dla każdego punktu obszaru makrobrzegu, tj. dla $X \in \Omega_R \setminus \Omega_R^o$, gdyż uśrednienia $\langle \delta_R \rangle$ są przeprowadzane podług argumentu \mathcal{Z} dla którego funkcja $\delta_R(\mathcal{Z}, \nabla U(X, t) + \nabla h^A(\mathcal{Z}) V^A(X, t))$ jest V_R -periodyczna. Korzystając ponownie z hipotezy makro-

modelowania, postulującej pomijalność parametru λ wobec 1 (tj. prowadzącej do pomijania pola obszaru makrobrzegu $\Omega_R \setminus \Omega_R^o$ wobec pola obszaru Ω_R), przyjmujemy, że otrzymane równania mają być spełnione nie tylko w Ω_R^o lecz dla każdego $X \in \Omega_R$, podobnie jak otrzymane uprzednio równania (5.6). Tym samym przedstawione tu alternatywne podejście do formułowania makromodeli z parametrami wewnętrznymi, korzystające nie ze słabej postaci równań ruchu (5.2) lecz z warunków (5.12), prowadzi do identycznego rezultatu.

5.4 NIELINIOWA TEORIA MAŁYCH ODKSZTAŁCEN

W zagadnieniach inżynierskich mamy często do czynienia z wiotkimi elementami kompozytowymi (takimi jak pręty, płyty lub powłoki), które mogą doznawać skończonych przemieszczeń i obrotów przy zachowaniu małych odkształceń. W sytuacjach takich energia odkształcenia może być przyjęta w postaci

$$\bar{\sigma}_R = \frac{1}{2} a_R^{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{Z}, X) e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} + c_R^{\alpha\beta}(\mathbf{Z}, X) e_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{Z} = X,$$

w której $a_R^{\alpha\beta\gamma\delta}(\cdot), c_R^{\alpha\beta}(\cdot)$ są znanymi dla każdego kompozytu V_R -periodycznymi funkcjami argumentu \mathbf{Z} oraz makrofunkcjami argumentu $X \in \Omega_R$. Składowe tensora odkształcenia Greena $e_{\alpha\beta}$ zostały zdefiniowane w podrozdziale 5.2. Niezależnymi miarami makroodkształcenia są teraz $E_{\alpha\beta}, V_\alpha^A$, które zgodnie z (5.7) są określone poniższymi równaniami geometrycznymi

$$(5.13) \quad E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (P_{i,\alpha}^i U_{i,\beta} + P_{i,\beta}^i U_{i,\alpha}) + \frac{1}{2} U_{i,\alpha} U_{i,\beta}, \\ V_\alpha^A = V_i^A (P_{i,\alpha}^i + U_{i,\alpha}^i).$$

Uznacząc

$$(5.14) \quad A_R^{\alpha\beta\gamma\delta}(X) := \langle a_R^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle(X), \quad B_R^{A\alpha\beta} := \langle a_R^{\gamma\delta\alpha\beta} h_{i,\gamma}^A h_{i,\delta}^B \rangle(X), \\ C_R^{AB\alpha\beta}(X) := \langle a_R^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{i,\gamma}^A h_{i,\delta}^B \rangle(X), \\ F_R^{\alpha\beta}(X) := \langle c_R^{\alpha\beta} \rangle(X), \quad G_R^{A\alpha}(X) := \langle c_R^{\alpha\beta} h_{i,\beta}^A \rangle(X).$$

otrzymamy

$$\langle \mathcal{O}_R \rangle = \frac{1}{2} A_R^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} E_{\alpha\beta} + B_R^{\alpha\gamma\beta} V_\gamma^A E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} C_R^{AB\alpha\beta} V_\alpha^A V_\beta^B + F_R^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + G_R^{A\alpha} V_\alpha^A.$$

Definiując pochodne $S_R^{\alpha\beta} := \partial \langle \mathcal{O}_R \rangle / \partial E_{\alpha\beta}$, $H_R^{A\alpha} := \partial \langle \mathcal{O}_R \rangle / \partial V_\alpha^A$, przyjmiemy równania konstytutywne makromodelu w postaci

$$(5.15) \quad \begin{aligned} S_R^{\alpha\beta} &= A_R^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + B_R^{\alpha\gamma\beta} V_\gamma^A + F_R^{\alpha\beta}, \\ H_R^{A\alpha} &= B_R^{A\alpha\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + C_R^{AB\alpha\gamma} V_\gamma^B + G_R^{A\alpha}, \end{aligned}$$

przy czym

$$S_{Ri}^{\alpha\beta} = S_R^{\alpha\beta}(P_{i,\alpha} + U_{i,\beta}), \quad H_{Ri}^A = H_R^{A\alpha}(P_{i,\alpha} + U_{i,\alpha}).$$

Tym samym równania ruchu (5.4) prowadzą do

$$(5.16) \quad \begin{aligned} [S_R^{\alpha\beta}(P_{i,\beta} + U_{i,\beta})]_{,\alpha} - \langle \mathcal{Q}_R \rangle \ddot{U}_i - \langle \mathcal{Q}_R^A \rangle \ddot{V}_i^A + \langle \mathcal{Q}_R \rangle b_i &= 0, \\ \langle \mathcal{Q}_R^A \rangle \ddot{V}_i^A + \langle \mathcal{Q}_R^A \rangle \ddot{U}_i + H_R^{A\alpha}(P_{i,\alpha} + U_{i,\alpha}) + \langle \mathcal{Q}_R^A \rangle b_i &= 0. \end{aligned}$$

Równania ruchu (5.16), równania konstytutywne (5.15) oraz równania geometryczne (5.13) reprezentują makromodel sprężystego kompozytu poddanego małym odkształceniom (względem makrokonfiguracji danej przez $x_i = P_i(X)$, $X \in \Omega_R$) lecz skończonym przemieszczeniom i obrotom. W równaniach (5.15) wielkości $S_R^{\alpha\beta}$, $H_R^{A\alpha}$ nazwiemy odpowiednio drugim tensorem makronapężenia Pioli-Kirchhoffa oraz składowymi materialnymikrosił dynamicznych przy czym $F_R^{\alpha\beta}$, $G_R^{A\alpha}$ są ich wartościami w konfiguracji początkowej. Podstawiając prawe strony równań geometrycznych (5.13) do równań konstytutywnych (5.15) a następnie otrzymane wyrażenia dla $S_R^{\alpha\beta}$, $H_R^{A\alpha}$ do równań ruchu (5.16) otrzymamy układ złożony z 3 równań różniczkowych cząstkowych dla makroprzemieszczeń U_i oraz

3N równań różniczkowych zwyczajnych dla parametrów wewnętrznych V_i .

Wprowadzając oznaczenia

$$S^{\alpha\beta} := J^{-1} S_R^{\alpha\beta}, \quad H^{A\alpha} := J^{-1} H_R^{A\alpha},$$

gdzie jak poprzednio $J = \det(P_{i,\alpha} + U_{i,\alpha})$ oraz (por. (5.14))

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta} := J^{-1} \langle a_R^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, \quad B^A\gamma^{\alpha\beta} := J^{-1} \langle a_R^{\gamma\delta\alpha\beta} h^A_{,\delta} \rangle,$$

$$(5.17) \quad C^{AB\alpha\beta} := J^{-1} \langle a_R^{\alpha\gamma\beta\delta} h^A_{,\gamma} h^B_{,\delta} \rangle,$$

$$F^{\alpha\beta} := J^{-1} \langle c_R^{\alpha\beta} \rangle, \quad G^{A\alpha} := J^{-1} \langle c_R^{\alpha\beta} h^A_{,\beta} \rangle,$$

otrzymamy równania konstytutywne dla $S^{\alpha\beta}$ i $H^{A\alpha}$ postaci

$$(5.18) \quad S^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + B^A\gamma^{\alpha\beta} V_{\gamma}^A + F^{\alpha\beta},$$

$$H^{A\alpha} = B^A\alpha\beta\gamma E_{\beta\gamma} + C^{AB\alpha\beta} V_{\beta}^B + G^{A\alpha}.$$

Wielkości $S^{\alpha\beta}$ i $H^{A\alpha}$ nazwiemy odpowiednio konwekcyjnym tensorem makronapężenia oraz konwekcyjnymi siłami mikrodynamicznymi, przy czym $F^{\alpha\beta}$, $H^{A\alpha}$ są ich wartościami w konfiguracji początkowej. Równania (5.18) razem z równaniami ruchu (5.17) oraz równaniami geometrycznymi (5.13) tworzą układ równań w którym, w przeciwieństwie od poprzednio otrzymanego układu (5.13), (5.15), (5.16), wszystkie wielkości odnoszą się do aktualnej konfiguracji kompozytu. Oznaczmy przez $G_{\alpha\beta} = P_{i,\alpha} P_{i,\beta}$ tensor metryczny rozpatrywanego ciała w konfiguracji nieodkształcanej. Wobec $C_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + 2E_{\alpha\beta}$ i założenia, że odkształcenia określone przez $E_{\alpha\beta}$ są małe, możemy w (5.17) przyjąć $J = |\det C_{\alpha\beta}| \cong |\det G_{\alpha\beta}| = \det(P_{i,\alpha})$ oraz w równaniach ruchu (5.17) interpretować pochodną kowariantną jako liczoną w znanej makrometryce $G_{\alpha\beta}$ nieodkształconego kompozytu. Tym samym nieliniowość rozpatrywanego sformułowania teorii małych

odkształceń występuje tylko w równaniach geometrycznych (5.13). Zauważmy, że gdy konfiguracja początkowa pokrywa się z konfiguracją odniesienia, tj. gdy $P_i(X) = \delta_{i\alpha} X^\alpha$ wtedy $J = \det(P_{i,\alpha}) = 1$ a moduły sprężystości w równaniach (5.15) i (5.18) są stałymi.

5.5 MODELE LOKALNE

Makromodele kompozytów przedstawione w podrozdziałach 5.2 oraz 5.4 uwzględniają efekt skali. Efekt ten opisują człony mikroinercyjne w równaniach ruchu a także występujące tam średnie $\langle \rho_R h^A \rangle b_i$. Przejście do modeli lokalnych jest fizycznie uzasadnione w tych wszystkich zagadnieniach, w których na poszukiwane rozwiązanie badanego problemu (na makroskopową reakcję kompozytu) wpływ wielkości mikrostruktury może zostać pominięty. Sytuacja taka ma miejsce np. przy badaniu rozchodzenia się fal, których długość jest daleko większa od parametru mikrostruktury l . Formalne przejście do modeli lokalnych polega więc na pomijaniu w otrzymanych równaniach ruchu makromodelu wyrazów rzędu $O(l)$ i $O(l^2)$. Tym samym z równań (5.4), z uwagi na $\langle \rho_R h^A \rangle \in O(l)$, $\langle \rho_R h^A h^B \rangle \in O(l^2)$, uzyskamy

$$(5.19) \quad S_{Ri}^\alpha - \langle \rho_R \rangle \ddot{U}_i + \langle \rho_R \rangle b_i = 0, \quad H_{Ri}^A = 0,$$

gdzie S_{Ri}^α oraz H_{Ri}^A są określone równaniami (5.5). Alternatywna postać modelu lokalnego wynika z (5.11), gdzie wobec $\mu^A \in O(l)$, $\mu^{AB} \in O(l^2)$ mamy

$$(5.20) \quad S^{\alpha\beta} / \beta - \mu \ddot{U}_i Z^\alpha_i + \mu b_i Z^\alpha_i = 0, \quad H^{A\alpha} = 0,$$

przy czym obowiązują tu równania konstytutywne (5.10). Model lokalny nieliniowej teorii małych odkształceń jest opisywany równaniami (5.20) (lecz pochodna kowariantna jest tu określona w znanej metryce $G_{\alpha\beta} = P^i_{,\alpha} P_{i,\beta}$ konfiguracji początkowej), natomiast równania konstytutywne należy przyjąć w postaci (5.18).

W tym przypadku parametry wewnętrzne V_α^A można wyrugować z (5.18)

korzystając z warunku $H^{A\alpha} = 0$. Postępowanie to prowadzi do teorii modułów efektywnych, mających teraz postać

$$A_{\text{eff}}^{\alpha\beta\gamma\delta} := A^{\alpha\beta\gamma\delta} - B^{A\mu\nu\beta} D_{\mu\nu}^{AB} B^{\beta\gamma\delta},$$

$$F_{\text{eff}}^{\alpha\beta} := F^{\alpha\beta} - B^{A\mu\nu\beta} D_{\mu\nu}^{AB} G^{\beta\gamma},$$

w której $D_{\mu\nu}^{AB}$ są wyznaczone z warunków

$$D_{\alpha\beta}^{AB} G^{\beta\gamma\delta} = \delta_{\alpha}^{AC} \delta_{\beta}^{\delta},$$

a równania konstytutywne (5.18) sprowadzają się do

$$(5.21) \quad S^{\alpha\beta} = A_{\text{eff}}^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + F_{\text{eff}}^{\alpha\beta}.$$

Tym samym równania (5.20), (5.21) wraz z równaniem geometrycznym

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (P_{,\alpha}^i U_{i,\beta} + P_{,\beta}^i U_{i,\alpha}) + \frac{1}{2} U_{i,\alpha} U_{i,\beta}$$

opisują lokalny model kompozytu sprężystego, poddanego małym odkształceniom (względem konfiguracji początkowej $x_i = P_i(X)$, $X \in \mathcal{D}_R$) lecz dużym obrotom i przemieszczeniom.

5.6 ODKSZTAŁCENIA SKONCZONE KOMPOZYTÓW NIESPREŻYSTYCH

Założmy teraz, że składniki kompozytu można opisać równaniami konstytutywnymi materiałów prostych. Zamiast (5.1) otrzymamy wtedy

$$(5.22) \quad S_{Ri}^{\alpha}(X,t) = \tilde{S}_{Ri}^{\alpha}(Z, \nabla P(X) + \nabla u(X,t-s)), \quad Z = X,$$

$s \geq 0$

gdzie $\tilde{S}_{Ri}^{\alpha}(\cdot)$ jest funkcjonałem konstytutywnym, będąc jednocześnie \tilde{V}_R - periodyczną funkcją argumentu Z . Zgodnie z hipotezą makrolokalizacji możemy zdefiniować nowy funkcjonał konstytutywny, kładąc

$$\hat{S}_{Ri}^{\alpha}(Z, X, \nabla U(X,t-s), \nabla^A U(X,t-s)) := \tilde{S}_{Ri}^{\alpha}(Z, \nabla P(X) + \nabla U(X,t-s) + \nabla^A U(X,t-s)),$$

$s \geq 0$

gdzie $\hat{S}_{Ri}^{\alpha}(\cdot)$ jest V_R - periodyczną funkcją argumentu Z . Procedura makromodelowania przebiega tak samo jak dla kompozytów sprężystych, przeto nie będziemy jej tu ponownie omawiać. Dokonując uśrednień \hat{S}_{Ri}^{α} oraz $\hat{S}_{Ri}^{\alpha} h_{,\alpha}^A$ podług $Z \in V_R$, otrzymamy zamiast (5.5) równania konstytutywne postaci

$$(5.23) \quad \begin{aligned} S_{Ri}^{\alpha}(X,t) &= \langle \hat{S}_{Ri}^{\alpha} \rangle(X, \nabla U(X,t-s), V^A(X,t-s)), \\ H_{Ri}^A(X,t) &= \langle \hat{S}_{Ri}^{\alpha} h_{,\alpha}^A \rangle(X, \nabla U(X,t-s), V^A(X,t-s)). \end{aligned}$$

Tym samym składowe tensora makronapężenia S_{Ri}^{α} oraz sił mikrodynamicznych H_{Ri}^A w chwili t zależą od historii gradientu makroprzemieszczenia ∇U oraz od historii makroparametrów wewnętrznych V^A aż do chwili t . Równania (5.23) należy rozpatrywać łącznie z równaniami ruchu (5.4); powyższy układ równań reprezentuje (jak zwykle dla każdego przyjętego a priori układu funkcji mikrokształtu h^A) pewien makromodel rozpatrywanego kompozytu. Dla materiałów typu różniczkowego zamiast (5.22) otrzymamy

$$(5.24) \quad S_{Ri}^{\alpha}(X,t) = \tilde{S}_{Ri}^{\alpha}(Z, \nabla P(X) + \nabla U(X,t), \nabla \dot{U}(X,t), \dots, \nabla \dot{U}^{(n)}(X,t)), \quad Z = X,$$

gdzie $\nabla \dot{U}^{(n)}$ oznacza n -tą pochodną czasową gradientu przemieszczenia, natomiast \tilde{S}_{Ri}^{α} jest funkcją podanych tu argumentów, w tym V_R -periodyczną funkcją argumentu Z kładąc

$$\begin{aligned} \hat{S}_{Ri}^{\alpha}(Z, X, \nabla U(X,t), \nabla \dot{U}(X,t), \dots, \nabla \dot{U}^{(n)}(X,t), V^A(X,t), \dot{V}^A(X,t), \dots, \dot{V}^A^{(n)}(X,t)) := \\ = \tilde{S}_{Ri}^{\alpha}(Z, \nabla P(X) + \nabla U(X,t) + \nabla h^A(Z) V^A(X,t), \nabla \dot{U}(X,t) + \nabla h^A(Z) \dot{V}^A(X,t), \dots, \nabla \dot{U}^{(n)}(X,t) + \nabla h^A(Z) \dot{V}^A^{(n)}(X,t)), \end{aligned}$$

otrzymamy równania konstytutywne makromodelu w postaci

$$(5.25) \quad \begin{aligned} S_{Ri}^{\alpha}(X,t) &= \langle \hat{S}_{Ri}^{\alpha} \rangle(X, \nabla U, \nabla \dot{U}, \dots, \nabla \dot{U}^{(n)}, V^A, \dot{V}^A, \dots, \dot{V}^A^{(n)}), \\ H_{Ri}^A(X,t) &= \langle \hat{S}_{Ri}^{\alpha} h_{,\alpha}^A \rangle(X, V^A, \dot{V}^A, \dots, \dot{V}^A^{(n)}, \nabla U, \nabla \dot{U}, \dots, \nabla \dot{U}^{(n)}), \end{aligned}$$

gdzie $\nabla U = \nabla U(X,t)$, $V^A = V^A(X,t)$. Równania (5.25) wraz z rów-

nianiami ruchu (5.4) reprezentują makromodel kompozytów utworzonych z materiałów typu różniczkowego. Powyższe makromodele uwzględniają efekt skali.

Przechodząc do modeli lokalnych dysponujemy równaniami ruchu (5.19), przy czym makroparametry wewnętrzne są określone warunkami $H_R^A = 0$. Dla materiału typu różniczkowego otrzymujemy więc model lokalny reprezentowany układem równań

$$\begin{aligned} S_{Ri}^{\alpha}{}_{,\alpha} - \langle \rho_R \rangle \ddot{U}_i + \langle \rho_R \rangle b_i &= 0, \\ \langle \hat{S}_{Ri}^{\alpha} b_{i,\alpha}^A \rangle (X, V^A, \dot{V}^A, \dots, \overset{(n)}{V}^A, \nabla U, \nabla \dot{U}, \dots, \nabla \overset{(n)}{U}) &= 0, \\ S_{Ri}^{\alpha} &= \langle \hat{S}_{Ri}^{\alpha} \rangle (X, \nabla U, \nabla \dot{U}, \dots, \nabla \overset{(n)}{U}, V^A, \dot{V}^A, \dots, \overset{(n)}{V}^A). \end{aligned}$$

Można wykazać, że po linearyzacji i przyjęciu $N=1$ oraz $P_{i,\mu} = \delta_{i\mu}^{\alpha}$, powyższe równania prowadzą do makromodelu kompozytu lepkosprężystego, dyskutowanego w rozdziale 3.

Przedstawiony tu sposób formułowania makromodeli kompozytów niesprężystych w przypadku materiałów prostych sprowadza się więc do formalnego stosowania procedury makromodelowania omówionej w rozdziale 1. Podane tu ogólne schematy równań konstytutywnych (5.23) i (5.22) mogą stanowić punkt wyjścia do analizy różnych szczególnych przypadków. Zagadnienia takie stanowią otwarty dotychczas problem dynamiki kompozytów.

5.7 PRZYKŁADY

Rozdział ten zakończymy przykładami zastosowania otrzymanego makromodelu do badania propagacji fal i stateczności w kompozycie poddanym dużym odkształceniom sprężystym. W tym celu wykorzystamy równania (5.6), które po wprowadzeniu oznaczeń

$$(5.26) \quad \begin{aligned} A_R^{i\alpha j\beta} &:= \frac{\partial^2 \langle \sigma_R \rangle}{\partial U_{i,\alpha} \partial U_{j,\beta}}, & B_R^{Aji\alpha} &:= \frac{\partial^2 \langle \sigma_R \rangle}{\partial U_{i,\alpha} \partial V_j^A}, \\ H_R^{Ai} &:= \frac{\partial \langle \sigma_R \rangle}{\partial V_i^A}, & D_R^i &:= \frac{\partial^2 \langle \sigma_R \rangle}{\partial U_{i,\alpha} \partial X^\alpha}, \end{aligned}$$

przyjmą postać

$$A_R^{i\alpha j\beta} U_{j,\alpha\beta} + B_R^{Aij\alpha} V_{j,\alpha}^A - \langle \rho_R \rangle \ddot{U}_i - \langle \rho_R h^A \rangle \ddot{V}_i^A + D_R^i + \langle \rho_R \rangle b_i = 0,$$

$$(5.27) \quad \langle \rho_R h^A h^B \rangle \ddot{V}_i^B + \langle \rho_R h^A \rangle \ddot{U}_i + H_{Ri}^A - \langle \rho_R h^A \rangle b_i = 0.$$

Współczynniki (5.26) równań (5.27) są znanymi w każdym problemie funkcjami ciągłymi argumentów X^α , $U_{i,\alpha}$, V_i^A . Tym samym (5.27) przedstawia układ 3 quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych 2-go rzędu dla makroprzemieszczeń U_i sprzężony z układem 3N różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu dla makroparametrów wewnętrznych V_i^A . Z uwagi na zależność współczynników (5.26) od argumentu X w sposób wyraźny, równania (5.27) pod względem formalnym opisują pewien ośrodek sprężysty makroniejednorodny. Zgodnie z uwagami przedstawionymi w podrozdziale 5.1, makroniejednorodność ta ma charakter niefizyczny gdyż jest spowodowana tylko zależnością postaci funkcji \mathcal{G}_R od wyboru konfiguracji początkowej $x_i = P_i(X)$, por. (5.3). Gdyż konfiguracja początkowa pokrywa się z konfiguracją odniesienia, tj. gdy $P_i(X) = \delta_{i\alpha} X^\alpha$, wtedy $\langle \mathcal{G}_R \rangle = \langle \mathcal{G}_R \rangle(\nu U, V^A)$ a tym samym makromodel kompozytu jest reprezentowany równaniami (5,27), w których $D_R^i = 0$ oraz współczynniki (5.26) nie należą explicite od X .

Poniżej rozpatrzmy zagadnienie propagacji fali w ośrodku określonym równaniami (5.25). Rozważania ograniczymy do fali słabej nieciągłości (tj. fali przyspieszenia, w której występują nieciągłości tylko drugich lub wyższych pochodnych pola makroprzemieszczenia), opisywanej poprzez ruch pewnej gładkiej powierzchni nieciągłości S_R^t w \mathcal{D}_R . Powierzchnia ta niech będzie zorientowana polem wektorów jednostkowych $N_\alpha(\cdot)$. Oznaczmy przez $f(\cdot)$ pole ciągłe, określone na \mathcal{D}_R dla każdej chwili t , $t \in \mathbb{R}$, mające ciągłe pierwsze pochodne czasowe oraz materialne pochodne

ciągłe aż do rzędu $n-1$ włącznie. Jak wiadomo, na powierzchni nieciągłości S_R^t zachodzą warunki zgodności postaci

$$(5.28) \quad \llbracket \ddot{f}_{,\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\ddot{f}} \rrbracket (X,t) = v_R^2 a_f N_{\alpha_1} \dots N_{\alpha_n} ,$$

gdzie $\llbracket \cdot \rrbracket$ oznacza skok zgodny z orientacją powierzchni S_R^t , wielkość v_R^2 jest tu kwadratem prędkości propagującej się powierzchni S_R^t oraz a_f jest amplitudą skoku pola f na S_R^t .

Zauważmy najpierw, że na podstawie (1.8), i (1.9), tj w ramach przyjętej metody makromodelowania, wartości gradientów pola przemieszczenia $u_{i,\alpha}(X,t)$ można zastąpić wielkościami $u_{i\alpha}(X,t)$, gdzie

$$u_{i\alpha} := U_{i,\alpha} + h^A_{,\alpha} V_i^A .$$

Jest to zgodne z pomijaniem wyrazów $\mathcal{O}(\varepsilon_\nu)$ wobec wartości $V_i^A(X,t)$. Tym samym założmy, że nieciągłości drugich pochodnych pola $u_i(\cdot)$ są w ramach makromodelu opisane przez nieciągłości drugich pochodnych pola makroprzemieszczenia $U_i(\cdot)$ oraz nieciągłości pierwszych pochodnych pola makroparametrów wewnętrznych $V_i^A(\cdot)$. Tym samym makrofalą (makropowierzchnią) słabej nieciągłości 2-go rzędu nazwiemy powierzchnię S_R^t w \mathcal{D}_R , na której funkcje U_i , V_i^A oraz pierwsze pochodne \dot{U}_i, \dot{V}_i^A , $U_{i,\alpha}$ są ciągłe, natomiast drugie pochodne $U_{i,\alpha\beta}$, $\dot{U}_{i,\alpha}$, \dot{U}_i oraz pierwsze pochodne $V_{i,\alpha}^A$ doznają skoku. Biorąc skoki nieciągłości na S_R^t obu stron (5.27), otrzymamy

$$(5.29) \quad \begin{aligned} A_R^{i\alpha j\beta} \llbracket U_{j,\alpha\beta} \rrbracket - \langle e_R \rangle \llbracket \dot{U}_i \rrbracket - \langle e_R h^A \rangle \llbracket \dot{V}_i^A \rrbracket + B_R^{Aij\alpha} \llbracket V_{j,\alpha}^A \rrbracket = 0, \\ \langle e_R h^A h^B \rangle \llbracket \ddot{V}_i^B \rrbracket + \langle e_R h^A \rangle \llbracket \ddot{U}_i \rrbracket = 0. \end{aligned}$$

Z (5.29) wynika, że gdy dla pewnej funkcji makroształtu h^A zachodzi $\langle e_R h^A \rangle \neq 0$, to nieciągłości na S_R^t mogą doznawać drugie pochodne \ddot{V}_i^A ; w przeciwnym przypadku pochodne te są ciągłe na S_R^t . Ograniczmy się do drugiego z tych przypadków zakładając, że $\langle e_R h^A \rangle = 0$ dla $A=1, \dots, N$. Parametry V_i^A

oraz ich wszystkie pochodne czasowe są wtedy ciągłe na S_R^t .
Zróżniczkujemy drugie z równań (5.27) podług X^α . Oznaczając dodatkowo

$$C_R^{ABij} := \frac{\partial^2 \langle \epsilon_R \rangle}{\partial V_i^A \partial V_j^B}, \quad E_{R\alpha}^{Ai} := \frac{\partial^2 \langle \epsilon_R \rangle}{\partial V_i^A \partial X^\alpha},$$

otrzymamy

$$(5.30) \quad \begin{aligned} A_R^{i\alpha j\beta} U_{j,\alpha\beta} - \langle \epsilon_R \rangle \ddot{U}_i + B_R^{Aij\beta} V_{j,\beta}^A + D_R^i + \langle \epsilon_R \rangle b_i &= 0, \\ C_R^{ABij} V_{j,\alpha}^B + \langle \epsilon_R h^A h^B \rangle \ddot{V}_{i,\alpha}^B + B_R^{Aij\beta} U_{j,\beta\alpha} + E_{R\alpha}^{Ai} &= 0. \end{aligned}$$

Tworząc skoki na S_R^t lewych stron równań (5.30) i korzystając z warunków zgodności (5.28), po wprowadzeniu oznaczeń

$$A_R^{ij} := A_R^{i\alpha j\beta} N_\alpha N_\beta, \quad B_R^{Aij} := B_R^{Aij\beta} N_\beta,$$

oraz funkcji $g^A := l^{-2} h^A$, dochodzimy do układu równań dla amplitud a_i, a_j^B :

$$\begin{aligned} (A_R^{ij} - \langle \epsilon_R \rangle v_R^t \delta^{ij}) a_j + B_R^{Bij} a_j^B &= 0, \\ (C_R^{ABij} + l^2 \langle \epsilon_R g^A g^B \rangle v_R^t \delta^{ij}) N_\alpha a_j^B + B_R^{Aij} N_\alpha a_j &= 0, \end{aligned}$$

którego postać zależy w sposób wyraźny od parametru mikrostruktury l . Definiując następujące 3×3 macierze

$$A_R := [A_R^{ij}], \quad B_R^A := [B_R^{Aij}], \quad C_R^{AB} := [C_R^{ABij}], \quad \mathbb{1} := [\delta^{ij}],$$

otrzymany powyżej układ równań dla wektorów amplitudy $a := (a_i)$, $a^A := (a_i^A)$, z uwagi na dowolność wektora N_α , przyjmuje postać

$$(5.31) \quad \begin{aligned} (A_R - \langle \epsilon_R \rangle v_R^t \mathbb{1}) a + B_R^B a^B &= 0, \\ (C_R^{AB} + l^2 \langle \epsilon_R g^A g^B \rangle v_R^t \mathbb{1}) a^B + B_R^A a &= 0. \end{aligned}$$

Niech $C_R^{AB} \mathbb{D}^{BC} = \delta^{AC}$, gdzie δ^{AC} jest elementem macierzy o blokach 3×3 , takiej, że $\delta^{AC} = \mathbb{1}$ dla $A=C$ oraz $\delta^{AC} = 0$

dla $A \neq C$. Traktując formalnie l^2 jako mały parametr łatwo sprawdzić, że transformacja odwrotna do transformacji liniowej $\mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$, danej macierzą o blokach $Q_R^{AB} + l^2 \langle \varrho_R \rangle g^A g^B \rangle \mathbb{1} v_R^2$ jest określona przez macierz $3N \times 3N$ o blokach 3×3 postaci

$$D^{BC} - l^2 v_R^L D^{BD} \langle \varrho_R \rangle g^D g^E \rangle D^{EC} + o(l^2).$$

Tym samym drugie z równań (5.31) prowadzi do następującego wyrażenia dla wektorów amplitud a^B

$$a^B = - (D^{BC} - l^2 v_R^L D^{BD} \langle \varrho_R \rangle g^D g^E \rangle D^{EC}) B_R^C a + o(l^2),$$

co po podstawieniu do pierwszego z tych równań daje

$$[(A_R - B_R^B D^{BC} B_R^C) - \langle \varrho_R \rangle \mathbb{1} - l^2 B_R^B D^{BD} \langle \varrho_R \rangle g^D g^E \rangle D^{EC} B_R^C] v_R^L + o(l^2)] a = 0.$$

Oznaczając

$$Q_R^{ij} := A_R^{ij} - B_R^{Bik} D^{BCKL} B_R^{CLj},$$

(5.32)

$$M_R^{ij} := B_R^{Bik} D^{BDKL} \langle \varrho_R \rangle g^D g^E \rangle D^{ECLM} B^{CMj} \langle \varrho_R \rangle^{-1},$$

otrzymamy więc dla amplitudy a_i układ równań liniowych

$$[Q_R^{ij} - \langle \varrho_R \rangle (\delta^{ij} - l^2 M_R^{ij})] v_R^L + o(l^2)] a_j = 0.$$

Pomijając wielkości $o(l^2)$ jako niewielkie wobec $\langle \varrho_R \rangle v_R^L$, otrzymujemy warunek

$$(3.33) \quad \det [Q_R^{ij} - \langle \varrho_R \rangle (\delta^{ij} - l^2 M_R^{ij})] v_R^L = 0,$$

który nazwiemy warunkiem propagacji (przybliżonym) makrofali słabej nieciągłości w rozpatrywanym kompozycie sprężystym. Jak już zaznaczyliśmy, otrzymany rezultat ma sens tylko gdy $\langle \varrho_R h^A \rangle = 0$ dla $A = 1, \dots, N$. Zgodnie z założeniem, że parametr mikrostruktury l jest traktowany tutaj jako mały parametr, przyjmujemy w (3.33), że macierz o składowych $\delta^{ij} - l^2 M_R^{ij}$ jest dodatnio określona.

Tensor o składowych Q_R^{ij} nazwiemy tensorem makro-akustycznym. Tym samym prędkości propagacji v_R^L makrofali słabej nieciągłości są uogólnionymi wartościami własnymi tensora makro-akustycznego.

Rozpatrując zagadnienie propagacji w ramach modelu lokalnego

należy w równaniach (5.30) pominąć wyrazy $\langle \rho_R h^A h^B \rangle \ddot{V}_{i,\alpha}^B$.
Zamiast (5.33) otrzymamy wtedy

$$(5.34) \quad \det [Q_R^{ij} - \langle \rho_R \rangle v_R^L \delta^{ij}] = 0,$$

tj. $\langle \rho_R \rangle v_R^L$ są wartościami własnymi tensora makro - akustycznego.

Przejdźmy teraz do analizy stateczności sprężystego kompozytu, poddanego pewnemu skończonemu odkształceniu $U_i = U_i(X)$, $V_i^A = V_i^A(X)$, $X \in Q_R$. Jak poprzednio, przyjmujemy $\langle \rho_R h^A \rangle = 0$ dla $A = 1, \dots, N$, pominiemy w (5.27) siły masowe b_i i założymy dla uproszczenia, że $\langle \rho_R \rangle$ nie zależy od X . Układ równań dla U_i , V_i^A wynika z (5.26) i (5.27)

$$A_R^{i\omega j\beta} U_{j,\omega\beta} + B_R^{Aji\alpha} V_{j,\alpha}^A = 0, \quad H_R^{Ai} = 0,$$

i winien być rozpatrywany łącznie z warunkami brzegowymi dla makroprzemieszczeń U_i . Makroparametry wewnętrzne V_i^A są tu określone algebraicznymi warunkami $H_R^{Ai} = 0$ a rozwiązania $U_i(X)$, $V_i^A(X)$ zagadnienia brzegowego zależą od obciążeń na brzegu ciała.

Podstawimy do (5.27) na miejsce U_i , V_i^A wyrażenia $U_i + \varepsilon U_i(X,t)$, $V_i^A + \varepsilon V_i^A(X,t)$, w których ε jest małym parametrem oraz U_i , V_i^A są funkcjami określającymi pewien mały ruch, superponowany na dane skończone odkształcenie. Równania (5.27) po zlinearyzowaniu względem ε prowadzą wtedy do

$$A_R^{i\omega j\beta} U_{j,\omega\beta} - \langle \rho_R \rangle \ddot{U}_i + B_R^{Aji\alpha} V_{j,\alpha}^A = 0,$$

$$\langle \rho_R h^A h^B \rangle \ddot{V}_i^B + C_R^{ABij} V_j^B + B_R^{Aji\alpha} U_{j,\alpha} = 0.$$

Stosując znaną metodę analizy stateczności, położymy

$$(5.35) \quad U_i = \bar{U}_i(X) e^{\omega t}, \quad V_i^A = \bar{V}_i^A(X) e^{\omega t},$$

gdzie $\omega = \alpha + i\beta$ jest pewną zespoloną częścią drgań. Wobec $g^A = \ell^{-1} h^A$, otrzymamy wtedy

$$(5.36) \quad A_R^{i\alpha j\beta} \bar{U}_{j,\alpha\beta} + B_R^{Aij\alpha} \bar{V}_{j,\alpha} - \langle \varrho_R \rangle \omega^2 \bar{U}_i = 0,$$

$$(C_R^{ABij} + l^2 \langle \varrho_R g^A g^B \rangle \delta^{ij} \omega^2) \bar{V}_j^B + B_R^{Aij\beta} \bar{U}_{j,\beta} = 0.$$

Oznaczmy

$$G^{ABij} := D^{ADik} \langle \varrho_R g^D g^E \rangle D^{EBkj} \langle \varrho_R \rangle^{-1},$$

gdzie D^{Bij} są elementami macierzy $D^{AB} = [D^{ABij}]$, których definicję podano po wzorze (5.31). Z drugiego równania (5.35) otrzymamy

$$\bar{V}_i^A = - (D^{ABij} - l^2 \langle \varrho_R \rangle \omega^2 G^{ABij}) B_R^{Bjk\beta} \bar{U}_{k,\beta} + o(l^2).$$

Pomijając wielkości $o(l^2)$ możemy teraz wyrugować z (5.36) funkcje \bar{V}_i^A . Kładąc

$$N_R^{i\alpha j\beta} := A_R^{i\alpha j\beta} - B_R^{Aik\alpha} D^{ABkl} B_R^{Blij\beta},$$

dochodzimy ostatecznie do równań

$$(5.37) \quad N_R^{i\alpha j\beta} \bar{U}_{j,\alpha\beta} - B_R^{Aik\alpha} (D^{ABkl} B_R^{Blij\beta})_{,\beta} \bar{U}_{j,\alpha} =$$

$$= \langle \varrho_R \rangle \omega^2 [\bar{U}_i + l^2 B_R^{Aij\alpha} (G^{ABjk} B_R^{Bkl\beta} \bar{U}_{l,\beta})_{,\alpha}].$$

Ponieważ $e^{at} = e^{at(\cos\beta t + i\sin\beta t)}$, przeto dla $t \rightarrow \infty$ superponowany ruch (5.35) zanika gdy $\alpha < 0$. Rozpatrując równanie (5.37) dla funkcji \bar{U}_i określonych na Ω_R oraz spełniających jednorodne warunki brzegowe na $\partial\Omega_R$ otrzymamy rozwiązania niezerowe tylko dla pewnych wartości $\omega = \alpha + \beta i$. Utrata stateczności zachodzi gdy α przechodzi od wartości ujemnych do dodatnich wraz z ciągłą zmianą obciążeń brzegowych. Analiza stateczności na podstawie równań (5.37) wymaga więc uprzednio wyznaczenia pól $U_i = U_i(X)$, $V_i^A = V_i^A(X)$, $X \in \Omega_R$, zależnych od obciążeń ciała, gdyż współczynniki w tych równaniach są znanymi funkcjami $U_{i,\alpha}(X)$ oraz $V_i^A(X)$. W ramach modelu lokalnego prawa strona równań

(5.37) redukuje się do wyrazu $\langle \epsilon_R \rangle \omega^2 \bar{U}_i$. Metoda badania stateczności kompozytu na podstawie (5.37) przebiega analogicznie jak w problemach teorii sprężystości dużych odkształceń, w związku z czym nie będziemy jej tu omawiać.

6. MIKROUSZKODZENIA W KOMPOZYTACH WARSTWOWYCH

Dotychczasowe rozważania dotyczyły materiałów kompozytowych traktowanych w ramach mikromechaniki - jako niejednorodne ośrodki ciągłe. Tym samym nie była uwzględniona możliwość występowania nieciągłości pola przemieszczeń wskutek istnienia szczelin wywołanych imperfekcjami wykonawczymi lub uszkodzeniami materiału w trakcie jego eksploatacji. Zagadnieniu szczelin, zwłaszcza w materiałach sprężystych, jest poświęcona obszerna literatura; w przypadku kompozytów warstwowych należy tu wymienić prace (7, 8, 9, 15, 16, 17, 19, 23, 24, 25) w których problemy szczelin są analizowane w ramach modelu kompozytu z parametrami mikrolokalnymi, por. Wstęp. Jest to model lokalny, którego zakres zastosowań ogranicza się najczęściej do analizy procesów stacjonarnych lub quasistacjonarnych. W tym rozdziale zostanie przedstawiony pewien model nielokalny, tj. uwzględniający wpływ wielkości elementu reprezentatywnego na dynamikę periodycznego kompozytu, uwzględniający występowanie w kompozycie warstwowym imperfekcji wykonawczych w postaci szczelin międzywarstwowych o wymiarach niewielkich w porównaniu z grubościami warstw. Imperfekcje te nazwiemy dalej mikrouszkodzeniami. Wykorzystane zostaną tu wyniki prac (85, 92, 93).

6.1 PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Przedmiotem analizy jest liniowo- sprężysty kompozyt o per-

iodycznej strukturze warstwowej laminatu. Celem uproszczenia formalnej strony rozważań ograniczamy się do kompozytów dwuskładnikowych, w których płaszczyzny równoległe do płaszczyzn rozdzielających składniki nieodkształconego laminatu (laminy) są płaszczyznami symetrii sprężytej. Zakładamy, że sąsiadujące laminy nie są połączone z sobą w sposób idealny, lecz mamy do czynienia z pewnym stochastycznym rozkładem mikroszczelin między laminami tj. szczelin, których wymiary są bardzo niewielkie w porównaniu z grubościami lamin. Jak już powyżej wspomniano, szczeliny te mogą mieć albo charakter pewnych imperfekcji początkowych, wynikających w procesie powstawania laminatu, lub też być wynikiem działania czynników zewnętrznych. Przedstawiony poniżej model nie będzie natomiast opisywać powstawania i ewolucji tych mikrouszkodzeń, związanych z procesem delaminacji kompozytu, por. (49, 50, 51, 52, 71, 72).

Opis laminatu z mikrouszkodzeniami może być formułowany na trzech poziomach ogólności: mikro-, mezo- i makro- mechaniki. Na poziomie mikro- mechaniki rozpatrujemy możliwości występowania nieciągłości pola przemieszczenia w obrębie poszczególnych mikroszczelin. Z uwagi na niewielkie wymiary poszczególnych mikroszczelin (wobec grubości lamin) możemy następnie wprowadzić do rozważań pewną uśrednioną gęstość χ rozkładu tych mikroszczelin przyjmując $\chi \in [0, 1)$, gdzie dla $\chi \rightarrow 1$ dążymy do całkowitej delaminacji kompozytu oraz przypadek $\chi = 0$ odpowiada kompozytowi bez mikrouszkodzeń. Korzystając z pojęcia gęstości mikroszczelin, rozpatrujemy zagadnienie w pewien uśredniony sposób, przy czym uśrednienia przeprowadza się w obszarach o wymiarach daleko mniejszych od grubości lamin, a uśrednione pole przemieszczenia nazywamy mezo- przemieszczeniami. Relacje w których występują mezo- przemieszczenia nazwiemy mezomechaniką. Przejście od mikromechaniki laminatu z uszkodzeniami do jego mezomechaniki zostało omówione w (93) i nie będziemy się nim tu zajmować. Tym samym punktem wyjścia rozważań będą podane w

(93) równania mezomechaniki laminatu a ich celem - równania makromechaniki uwzględniające efekt skali.

W dalszym ciągu korzystać będziemy z prostokątnego układu współrzędnych kartezjańskich $Ox_1x_2x_3$ przyjmując, że oś x_3 jest prostopadła do płaszczyzn rozdzielających laminy w nieodkształconym kompozycie. Wskaźniki α, β, \dots przyjmować będą wartości 1, 2, odnoszące się do układu współrzędnych Ox_1x_2 . Oznaczmy ponadto przez η , $\eta \in [0, \chi]$, średnią gęstość otwartych mikroszczelin; szczeliny takie nie przenoszą (na poziomie mikromechaniki) sił normalnych i stycznych do płaszczyzn rozdzielających laminy. Tensory modułów sprężystości $a_{ijkl} = a_{ijkl}(x_3)$ są teraz periodycznymi funkcjami argumentu x_3 , mającymi okres l równy grubości dwóch sąsiadujących z sobą lamin. Wielkość l jest teraz parametrem mikrostruktury, małym w porównaniu z wymiarami długości obszaru Ω . Równania konstytutywne mezomechaniki, zgodnie z (93, 94), przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad s_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta} + (1-\eta) a_{\alpha\beta 33} e_{33}, \\
 s_{33} &= (1-\eta)(a_{3333} e_{33} + a_{33\alpha\beta} e_{\alpha\beta}), \\
 s_{\alpha 3} &= 2(1-\xi) a_{\alpha 2\beta 3} e_{\beta 3},
 \end{aligned}$$

w której ξ jest parametrem charakteryzującym wpływ tarcia na mikroszczelinach na wielkość sił tnących przenoszonych przez te szczeliny, przy czym dalej ograniczymy się do dwóch skrajnych przypadków:

- (i) dla $\xi = \chi$ mikroszczeliny nie przenoszą żadnych sił tnących,
- (ii) dla $\xi = \eta$ mikroszczeliny nie przenoszą sił tnących tylko gdy są one otwarte, natomiast zamknięte mikroszczeliny są w stanie przenosić dowolne siły tnące. Równania konstytutywne (1.6) należy rozpatrywać łącznie z równaniami geometrycznymi (1.2)

oraz równaniami ruchu (1.3) i więzami kinematycznymi, przy czym występujące w (1.2) i (1.3) pole wektora przemieszczenia $u_i = u_i(x, t)$, należy teraz interpretować jako pole mezo- przemieszczenia, ciągle w Ω . Powyżej wymienione równania mezomechaniki nie stanowią zamkniętego układu równań gdyż występujący w (6.1) parametr η nie jest dany z góry a tym samym pole $\eta = \eta(x, t)$ stanowi dodatkową niewiadomą. W związku z tym musimy także dysponować dodatkową relacją konstytutywną. Zgodnie z fizycznym sensem zagadnienia przyjmujemy ją w postaci warunków:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} & \text{(i) gdy } e_{33} > 0 \text{ to } \eta = \chi, \\ & \text{(ii) gdy } e_{33} < 0 \text{ to } \eta = 0 \\ & \text{(iii) gdy } e_{33} = 0 \text{ to } \eta \in [0, \chi], \end{aligned}$$

które winny być spełnione dla każdego punktu obszaru Ω należącego do zbioru równoległych płaszczyzn rozdzielających poszczególne laminy. Warunki (6.2) należy rozpatrywać łącznie z (6.1) przyjmując w tych ostatnich bądź $\xi = \chi$ bądź $\xi = \eta$. Jednocześnie zakładamy, że uśredniona gęstość mikroszczelin χ jest znana, a dla uproszczenia rozważań będziemy ją dalej traktować jako stałą w Ω i niezależną od czasu. Tym samym χ jest pewnym parametrem imperfekcji, określającym "niedokładności" we wzajemnym powiązaniu (sklejeniu) sąsiadujących z sobą lamin.

Wymienione powyżej równania mezomechaniki kompozytów warstwowych z mikrouszkodzeniami stanowią punkt wyjścia do sformułowania równań makromodelu.

6.2 PROCEDURA MAKROMODELOWANIA

Procedura makromodelowania przebiega analogicznie jak postępowanie omówione w rozdziale pierwszym tej książki. Oznaczmy przez l' , l'' grubości sąsiadujących z sobą lamin; tym samym otrzymamy $l = l' + l''$. Dla rozpatrywanych laminatów wprowadzimy tylko jedną funkcję mikrokształtu $h = h(x_3)$. Element reprezentatywny przyjmujemy w postaci odcinka $(0, l)$ osi x_3 , przy

czym odcinki $(0, l')$ oraz (l', l) niech należą do poszczególnych składników kompozytu. Funkcję $h(x_3)$ specyfikujemy kładąc $h(0) = h(l) = \sqrt{3}l$, $h(l') = -\sqrt{3}l$ oraz zakładając, że jest ona liniowa w $(0, l')$ i (l', l) ; z uwagi na warunek periodyczności $h(x_3 + l) = h(x_3)$ funkcja ta jest określona i ciągła dla każdego x_3 . Hipoteza makrolokalizacji dla dwuskładnikowego kompozytu warstwowego (laminatu) przyjmuje więc postać

$$(6.3) \quad u_i(x, t) = U_i(x, t) + h(x_3) V_i(x, t),$$

co stanowi przypadek szczególny równania (1.6). Tok postępowania przy przejściu od równań (6.1), (1.2), (1.3), będących wraz z warunkami (6.2) równaniami mezomechaniki laminatów z mikrouszkodzeniami, do makromodeli tych laminatów, jest zgodny ze stosowaną już metodyką, polegającą na traktowaniu (6.3) jako pewnych więzów kinematycznych, uzasadniających zastosowanie hipotezy makromodelowania, por. podrozdział 1.3. Operator uśrednienia ma teraz postać

$$\langle f \rangle := \frac{1}{l} \int_0^l f(x_3) dx_3,$$

gdzie $f(\cdot)$ jest całkowaną periodyczną funkcją argumentu x_3 o okresie l . Równania makromodelu można otrzymać bezpośrednio z równań (1.9), (1.12) i (1.14) biorąc pod uwagę postać (6.1) równań konstytutywnych, wprowadzając do rozważań tylko jedną funkcję mikrokształtu $h(x_3)$ i trzy makroparametry wewnętrzne V_i , oraz biorąc operator uśrednienia po odcinku $(0, l)$ osi x_3 , zgodnie z powyższym wzorem. Celem otrzymania uśrednionej postaci warunków konstytutywnych (6.2) zauważmy, że

$$e_{33} = u_{3,3} = E_{33} + h_{,3} V_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_V), \quad E_{33} := U_{3,3},$$

$$\langle e_{33} \rangle = E_{33} + \mathcal{O}(\varepsilon_E) + \mathcal{O}(\varepsilon_V),$$

co zgodnie z hipotezą makromodelowania pozwala na przybliżenie $\langle e_{33} \rangle$ przez E_{33} . Tym samym w ramach makromechaniki mamy warunki

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \text{(i) gdy } E_{33} > 0 \text{ to } \eta &= \chi, \\ \text{(ii) gdy } E_{33} < 0 \text{ to } \eta &= 0, \end{aligned}$$

(iii) gdy $E_{33} = 0$ to $\eta \in [0, \frac{1}{2}]$.

Związłą postać relacji (6.4) podamy w następnym podrozdziale.

Zauważmy także, że dla przyjętej funkcji mikrokształtu mamy

$$\langle \rho h h \rangle = \langle \rho \rangle \langle h \rangle \quad \text{oraz} \quad \langle \rho h \rangle = 0.$$

6.3 MODELE Z EFEKTEM SKALI

Podstawowe równania makromodelu, wynikające z powyżej naszkicowanej procedury makromodelowania, przedstawimy w postaci równań ruchu

$$(6.5) \quad \begin{aligned} S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i + \langle \rho \rangle b_i &= 0, \\ l^2 \langle \rho \rangle \ddot{V}_i + H_i &= 0, \end{aligned}$$

równań geometrycznych dla makroodkształceń E_{ij} w niezmienniczej postaci (1.9), którą tu ponownie przytaczamy

$$E_{ij} = U_{(i,j)}$$

oraz równań konstytutywnych dla makronaprężeń S_{ij}

$$(6.6) \quad \begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= \langle a_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle E_{\gamma\delta} + (1-\eta) (\langle a_{\alpha\beta\beta\beta} \rangle E_{33} + \langle a_{\alpha\beta\beta\beta} h_{,3} \rangle V_3), \\ S_{33} &= (1-\eta) (\langle a_{3333} \rangle E_{33} + \langle a_{33\alpha\beta} \rangle E_{\alpha\beta} + \langle a_{3333} h_{,3} \rangle V_3), \\ S_{\alpha 3} &= (1-\xi) (2 \langle a_{\alpha 3\beta\beta} \rangle E_{\beta\beta} + \langle a_{\alpha 3\beta\beta} h_{,3} \rangle V_3) \end{aligned}$$

wraz z równaniami konstytutywnymi dla sił mikrodynamicznych H_i

$$(6.7) \quad \begin{aligned} H_\alpha &= (1-\xi) (\langle a_{\alpha 3\beta\beta} (h_{,3})^2 \rangle V_\beta + 2 \langle a_{\alpha 3\beta\beta} h_{,3} \rangle E_{\beta\beta}), \\ H_3 &= (1-\eta) (\langle a_{3333} (h_{,3})^2 \rangle V_3 + \langle a_{3333} h_{,3} \rangle E_{33} + \langle a_{33\alpha\beta} h_{,3} \rangle E_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

które należy rozpatrywać łącznie z warunkami (6.4). Te ostatnie można napisać w związanej postaci, wprowadzając funkcję rzeczywistą argumentu $E \in \mathbb{R}$, zdefiniowaną przez:

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0 & \text{gd}y \quad E \leq 0, \\ \neq E & \text{gd}y \quad E > 0. \end{cases}$$

Funkcja φ jest funkcją wypukłą; oznaczając przez $\partial\varphi(E)$ jej subróżniczkę w punkcie E , warunki (6.4) są równoważne

warunkowi

$$(6.8) \quad \eta \in \partial\varphi(E_{33}),$$

reprezentującemu relację konstytutywną dla średniej gęstości otwartych mikroszczelin $\eta = \eta(x, t)$. Podstawiając prawą stronę (6.8) do równań (6.6), (6.7) oraz przyjmując uprzednio $\xi = \chi$ bądź $\xi = \eta$, otrzymamy relacje konstytutywne dla S_{ij} oraz H_i . Łatwo zauważyć, że gdy $E_{33} = 0$ to wielkości makroprężen stycznych $S_{\alpha 3}$ oraz składowe H_α sił mikrodynamicznych nie są jednoznacznie określone.

Relacje (6.5) - (6.8) wraz z (1.9) stanowią (po przyjęciu $\xi = \chi$ bądź $\xi = \eta$) makromodel rozpatrywanego laminatu z międzywarstwowymi mikrouszkodzeniami o stałej średniej gęstości χ . Podstawowymi niewiadomymi są tu makroprzemieszczenia U_i oraz makroparametry wewnętrzne V_i , gdyż wielkości S_{ij} , H_i , η , E_{ij} można wyrugować z powyżej wymienionego układu równań. Z uwagi na występowanie wyrazu zawierającego l^2 w równaniach ruchu (6.5) mamy do czynienia z modelem uwzględniającym efekt skali. Warunki brzegowe i początkowe formułujemy analogicznie jak dla kompozytów liniowo-sprężystych, por. podrozdział 1.5.

6.4 MODELE LOKALNE

Modele lokalne otrzymamy przez formalne przyjęcie w równaniach (6.5) przejścia asymptotycznego $l \rightarrow 0$. Otrzymane w ten sposób warunki $H_i = 0$, oznaczające znikanie sił mikrodynamicznych, umożliwiają wyznaczenie z równań (6.7) makroparametrów wewnętrznych V_i jako funkcji E_{ij} . W tym celu należy zauważyć, że macierz 2×2 o wyrazach $\langle a_{\alpha 3 \beta 3}(h, s)^2 \rangle$ występująca w (6.7) jest nieosobliwa oraz współczynnik $\langle a_{3333}(h, s)^2 \rangle$ jest zawsze dodatni, co można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Oznaczmy przez $G_{\alpha \beta}$ wyrazy macierzy odwrotnej do macierzy o wyrazach $\langle a_{\alpha 3 \beta 3}(h, s)^2 \rangle$. Po wprowadzeniu poniższych modułów

$$A_{\alpha\beta\beta\beta} := \langle a_{\alpha\beta\beta\beta} \rangle - \langle a_{\alpha\beta\beta\beta} h_{1,3} \rangle G_{\beta\delta} \langle a_{\alpha\beta\beta\beta} h_{1,3} \rangle ,$$

$$A_{\alpha\beta\beta\beta} := \langle a_{\alpha\beta\beta\beta} \rangle - \langle a_{\alpha\beta\beta\beta} h_{1,3} \rangle \langle a_{\beta\beta\beta\beta} (h_{1,3})^2 \rangle^{-1} \langle a_{\beta\beta\beta\beta} h_{1,3} \rangle ,$$

$$A_{\alpha\beta\beta\delta} := - \langle a_{\alpha\beta\beta\delta} h_{1,3} \rangle \langle a_{\beta\beta\beta\beta} (h_{1,3})^2 \rangle^{-1} \langle a_{\beta\beta\beta\delta} \rangle ,$$

$$A_{\beta\beta\beta\beta} := \langle a_{\beta\beta\beta\beta} \rangle - \langle a_{\beta\beta\beta\beta} h_{1,3} \rangle \langle a_{\beta\beta\beta\beta} (h_{1,3})^2 \rangle^{-1} ,$$

otrzymamy równania konstytutywne dla makronaprężeń w postaci

$$(6.9) \quad \begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= \langle a_{\alpha\beta\beta\delta} \rangle E_{\beta\delta} + (1-\eta)(A_{\alpha\beta\beta\beta} E_{\beta\beta} + A_{\alpha\beta\beta\delta} E_{\beta\delta}) , \\ S_{\beta\beta} &= (1-\eta)(A_{\beta\beta\beta\beta} E_{\beta\beta} + A_{\beta\beta\beta\delta} E_{\beta\delta}) , \\ S_{\alpha\beta} &= \xi(1-\xi)A_{\alpha\beta\beta\beta} E_{\beta\beta} , \end{aligned}$$

w których, jak poprzednio, należy przyjąć bądź $\xi = \chi$ bądź $\xi = \eta$. Relacje konstytutywne (6.8), (6.9) wraz z równaniami geometrycznymi (1.9) i równaniami ruchu

$$(6.10) \quad S_{ij,j} - \langle \rho \rangle \ddot{U}_i + \langle \rho \rangle b_i = 0$$

reprezentują model lokalny kompozytu warstwowego laminatu z mikrouszkodzeniami międzywarstwowymi o średniej gęstości χ . Podstawowymi niewiadomymi są makroprzemieszczenia U_i . Warunki brzegowe i początkowe formułujemy analogicznie jak do modelu lokalnego kompozytów liniowo - sprężystych, por. podrozdział 1.6.

6.5 STANY DEFORMACJI I SWOBODNA GRANICA

Występowanie mikrouszkodzeń międzywarstwowymi w laminacie wprowadza do relacji konstytutywnych dodatkowe niewiadome pole η określone na Ω dla każdej chwili t . Z uwagi na warunek (6.8) pole to nie jest jednoznacznie określone stanem deformacji ośrodka. W związku z tym dla każdego $(x, t) \in \Omega \times (t_0, t_f)$,

gdzie (t_0, t_f) jest przedziałem czasu w którym badamy ruch ciała, możemy wyróżnić trzy stany deformacji opisane warunkami (6.4). Oznaczający

$$(6.11) \quad \begin{aligned} P_E &:= \{ (x, t) : E_{33}(x, t) > 0 \}, \\ P_C &:= \{ (x, t) : E_{33}(x, t) < 0 \}, \\ I &:= \{ (x, t) : E_{33}(x, t) = 0 \}, \end{aligned}$$

nazwiemy: P_E - stanem otwarcia mikroszczelin, P_C - stanem zamknięcia mikroszczelin, I - stanem pośrednim (część szczelin jest otwarta a część zamknięta). Jeżeli dla prawie każdej chwili t z przedziału (t_0, t_f) warunek $E_{33}(x, t) = 0$ zachodzi tylko na pewnych powierzchniach w Ω , to rozpatrywane zagadnienie należy do klasy tzw. problemów ze swobodną granicą. Granicę tę stanowi zbiór I . W problemach ze swobodną granicą stan pośredni I ma miejsce tylko na pewnych hiperpowierzchniach w obszarze $\Omega \times (t_0, t_f)$ czasoprzestrzeni, rozdzielających podobszary w których zachodzi stan P_E od podobszarów w których mamy do czynienia ze stanem P_C . Jeżeli jednakże stan pośredni I zachodzi w pewnym podobszarze czasoprzestrzennego obszaru $\Omega \times (t_0, t_f)$ to tym samym swobodna granica nie istnieje a rozpatrywane zagadnienie nie jest poprawnie sformułowane w ramach przedstawionego w tym rozdziale makromodelu.

6.6 ZASTOSOWANIA

Makromodel laminatu z mikrouszkodzeniami międzywarstwowymi, przedstawiony w podrozdziale 6.3, zastosujemy teraz do analizy drgań swobodnych. Zakładamy, że obszar Ω pokrywa się z całą przestrzenią, laminy są izotropowe i jednorodne, oraz rozpatrujemy drgania podłużne w kierunku osi x_3 , prostopadłej do płaszczyzn rozdzielających laminy. W tym przypadku

$$u_3(x, t) = U_3(x_3, t) + h(x_3) V_3(x_3, t), \quad u_1 = u_2 = 0.$$

Oznaczając przez ρ', E' oraz ρ'', E'' gęstości masy i moduły sprężysto-

tości materiału lamin o grubościach odpowiednio l' , l'' , otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle a_{3333} \rangle &= \frac{l'}{L} E' + \frac{l''}{L} E'' , & \langle \varphi \rangle &= \frac{l'}{L} \varphi' + \frac{l''}{L} \varphi'' , \\ \langle a_{3333} h_{1,3} \rangle &= 2\sqrt{3} (E'' - E') , & \langle a_{3333} (h_{1,3})^2 \rangle &= 12 \left(\frac{l'}{L} E' + \frac{l''}{L} E'' \right) . \end{aligned}$$

Oznaczając ponadto

$$\tilde{E} := \langle a_{3333} \rangle , \quad \tilde{\varphi} := \langle \varphi \rangle , \quad [E] := \langle a_{3333} h_{1,3} \rangle , \quad \hat{E} := \langle a_{3333} (h_{1,3})^2 \rangle ,$$

na podstawie relacji (6.5) - (6.8) i (1.9), po przyjęciu $\xi = \eta$ otrzymamy poniższy układ równań dla U_3, V_3 :

$$(6.12) \quad \begin{aligned} [1 - 2\varphi(U_{3,3})] (\tilde{E} U_{3,3} + [E] V_{3,3}) - \tilde{\varphi} \ddot{U}_3 &= 0 , \\ [1 - 2\varphi(U_{3,3})] (\hat{E} V_3 + [E] U_{3,3}) + l^2 \tilde{\varphi} \ddot{V}_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Korzystając z (6.11) oznaczmy także

$$(6.13) \quad \begin{aligned} P_E &:= \{ (x_3, t) \in \mathbb{R}^2 : U_{3,3}(x_3, t) > 0 \} , \\ P_C &:= \{ (x_3, t) \in \mathbb{R}^2 : U_{3,3}(x_3, t) < 0 \} . \end{aligned}$$

Celem sformułowania rozwiązań układu (6.12) oznaczmy przez

$\phi(x_3, \alpha)$, $x_3 \in \mathbb{R}$, funkcje periodyczne ciągle o okresie L , wyróżnione stałą α przyjmującą wartości $-1, +1$. Niech ponadto $K_C := \pi/L_C, K_E := \pi/L_E$ gdzie L_C, L_E są liczbami dodatnimi spełniającymi warunek $L_C + L_E = L$, oraz niech

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \phi(x_3, 1) &= \begin{cases} \cos(K_C x_3) & \text{gd}y \quad x_3 \in [0, L_C] , \\ -\cos[K_C(x_3 - L_C)] & \text{gd}y \quad x_3 \in [L_C, L] \end{cases} \\ \phi(x_3, -1) &= \begin{cases} \cos(K_E x_3) & \text{gd}y \quad x_3 \in [0, L_E] , \\ -\cos[K_E(x_3 - L_E)] & \text{gd}y \quad x_3 \in [L_E, L] . \end{cases} \end{aligned}$$

Z uwagi na periodyczność funkcji $\phi(\cdot, \alpha)$, $\alpha = \pm 1$, związki (6.12) określają te funkcje dla każdego $x_3 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że $\phi(\cdot, \alpha)$ są makro - funkcjami; tym samym $L \gg l$ a wielkość $\lambda := l/L$ będziemy traktować jako mały parametr, $\lambda \ll 1$. Wprowadzimy ponadto do rozważań funkcje

$$(6.15) \quad \begin{aligned} F_U(t) &:= A_U \sin(\Omega t) + a_U \sin(\omega t), \\ F_V(t) &:= A_V \sin(\Omega t) + a_V \sin(\omega t), \end{aligned}$$

gdzie symbolem Ω oznaczamy w tym podrozdziale liczbę dodatnią, przy czym $\Omega/\omega \in \mathcal{O}(\lambda)$ oraz A_U, a_U, A_V, a_V są stałymi. Korzystając z (6.14) i (6.15) łatwo sprawdzić, że istnieje rozwiązanie układu równań (6.12) w postaci

$$(6.16) \quad \begin{aligned} U_3(x_3, t) &= F_U(t) \phi(x_3, \operatorname{sgn} F_U(t)), \\ V_3(x_3, t) &= F_V(t) \phi(x_3, \operatorname{sgn} F_V(t)), \end{aligned}$$

gdzie w (6.15) przyjmiemy

$$(6.17) \quad \omega = \begin{cases} \omega_E & \text{gdy } (x_3, t) \in \mathcal{P}_E, \\ \omega_C & \text{gdy } (x_3, t) \in \mathcal{P}_C, \end{cases}$$

zgodnie z definicjami (6.13). Stałe dodatnie ω_E, ω_C nazwiemy częstościami mikrodrgań odpowiednio w stanach $\mathcal{P}_E, \mathcal{P}_C$, natomiast Ω nazwiemy częstością makrodrgań. Podobnie stałe dodatnie $K_E = \pi/L_E, K_C = \pi/L_C$ dogodnie nazwać liczbami falowymi odpowiednio dla stanów $\mathcal{P}_E, \mathcal{P}_C$. Zgodnie z sensem fizycznym rozwiązania (6.16), stałe A_U, A_V nazwiemy amplitudami makro- drgań natomiast stałe a_U, a_V - amplitudami mikrodrgań. Podstawiając prawe strony (6.16) do równań (6.12) otrzymamy układy liniowych równań algebraicznych dla amplitud w obszarach $\mathcal{P}_E, \mathcal{P}_C$ na płaszczyźnie punktów $(x_3, t) \in \mathbb{R}^2$, zdefiniowanych przez (6.13). Zgodność tych równań dla amplitud $A_U,$

A_V prowadzi do warunku, który po oznaczeniu

$$\zeta := \frac{\sqrt{3}}{6} (E'' - E') \left(\frac{1}{L'} E' + \frac{1}{L''} E'' \right)^{-1}$$

i wykorzystaniu faktu, że λ jest małym parametrem, ma postać

$$(6.18) \quad K_C^2 - \zeta^2 K_C^4 L^2 \lambda^2 + O(\lambda^4) = (1-\gamma) [K_E^2 - \zeta^2 K_E^4 L^2 \lambda^2 + O(\lambda^4)] .$$

Równanie (6.18) określa zależność pomiędzy liczbami falowymi K_C, K_E odpowiednio dla stanów P_C, P_E . Tym samym jest to zależność między szerokością $L_C = \pi/K_C$ pasm stanu P_C a szerokością $L_E = \pi/K_E$ pasm stanu P_E , mierzonych wzdłuż osi x_3 w przestrzeni fizycznej. Po spełnieniu równania zgodności (6.18), z warunku istnienia niezerowych wartości amplitud A_U, A_V , otrzymamy równanie, które po oznaczeniu

$$E_C := \left(\frac{L'}{L E'} + \frac{L''}{L E''} \right)^{-1}$$

jest określone w sposób asymptotyczny przez

$$(6.19) \quad \Omega^2 = \frac{E_C}{\rho} K_C^2 [1 - \zeta^2 K_C^2 L^2 \lambda^2 + O(\lambda^4)] .$$

Powyższy warunek nazwiemy równaniem makrodispersji (w postaci asymptotycznej). Wprowadzony tu moduł E_C można nazwać modulem efektywnym sprężystości podłużnej w stanie P_C rozpatrywanego laminatu z mikrouszkodzeniami. Warunki istnienia niezerowych wartości amplitud a_U, a_V prowadzą do równań

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \omega_C^2 &= \frac{\hat{E}}{\rho} \frac{1}{L^2} [1 + \zeta^2 K_C^2 L^2 \lambda^2 + O(\lambda^4)] , \\ \omega_E^2 &= (1-\gamma) \frac{\hat{E}}{\rho} \frac{1}{L^2} [1 + \zeta^2 K_C^2 L^2 \lambda^2 + O(\lambda^4)] , \end{aligned}$$

które nazwiemy równaniami mikrodispersji (w postaci asymptotycznej). Przy spełnieniu równań (6.19), (6.20) otrzymamy poniższe związki pomiędzy amplitudami

$$(6.21) \quad A_V = -\zeta A_U + O(\lambda^2)\zeta, \quad a_U = \zeta K_C^2 L^2 \lambda^2 a_V + O(\lambda^4)\zeta .$$

Ze związków tych wynika, że dla ośrodka jednorodnego, wobec $E' = E''$ a tym samym $\xi = 0$, zachodzi $A_V = a_U = 0$. Przechodząc do modelu lokalnego otrzymamy zamiast (6.18) i (6.19) związki postaci

$$(6.22) \quad L_E = \frac{\sqrt{1-\chi}}{1+\sqrt{1-\chi}} L, \quad L_C = \frac{1}{1+\sqrt{1-\chi}} L,$$

$$\Omega = (1 + \sqrt{1-\chi}) \sqrt{\frac{E_C}{\rho}} \frac{\pi}{L},$$

nie otrzymując natomiast odpowiedników równań (6.20), które w pierwszym przybliżeniu dają

$$(6.23) \quad \omega_E^2 = (1-\chi) \omega_C^2 = (1-\chi) \frac{E}{\rho} \frac{1}{L^2}.$$

Powyższe wyniki dla szczególnego przypadku ośrodka jednorodnego z mikrouszkodzeniami w płaszczyznach $x_3 = \text{const.}$ otrzymano w pracy (93).

6.7 WNIOSKI

Zagadnienie drgań własnych laminatu z mikrouszkodzeniami, w przypadku drgań podłużnych rozpatrywanych powyżej, prowadzi do zagadnienia ze swobodną granicą. W przedziałach czasowych $(2n\pi/\Omega, (2n+1)\pi/\Omega)$ granica ta jest wyznaczona płaszczyznami $x_3 = mL$, $x_3 = L_C + mL$, gdzie m, n są dowolnymi liczbami całkowitymi, natomiast w przedziałach czasowych $(n\pi/\Omega, (n+1)\pi/\Omega)$ - płaszczyznami $x_3 = mL, x_3 = L_E + mL$. Oprócz ustalonych części swobodnej granicy mamy tu także do czynienia z jej częściami zmiennymi w czasie, które dla $t = n\pi/\Omega, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, zmieniają oscylująco swoje położenie od $x_3 = L_C + mL$ do $x_3 = L_E + mL$ i odwrotnie. Z przedstawionego w poprzednim podrozdziale przykładu wynika, że zaproponowany makromodel kompozytów warstwowych z mikrouszkodzeniami może być efektywnie zastosowany do analizy zagadnień szczególnych. Łatwo zauważyć, że zależności (6.22) otrzymane w ramach modelu lokalnego są asymptotycznymi przybliżeniami otrzymanymi z równań

(6.18) i (6.19) przez formalne przejście graniczne $l \rightarrow 0$. W ramach makromodelu lokalnego nie otrzymujemy natomiast równań mikrodyspersji (6.20), prowadzących w pierwszym przybliżeniu do związków (6.22). Jak zaznaczono w podrozdziale 6.5, nie wszystkie zagadnienia formułowane przy posługiwaniu się równaniami (6.5) - (6.8) i (1.9) sprowadzają się do problemów ze swobodną granicą. Problem taki nie występuje np. przy analizie drgań poprzecznych, dla których $u_1 = u_3 = 0$ oraz $u_2 = U_2(x_3, t) + h(x_3) \zeta_2(x_3, t)$, co łatwo stwierdzić bezpośrednim rachunkiem (uwaga powyższe dotyczy tylko przypadku $\xi = \eta$ gdyż dla $\xi \neq \eta$ zagadnienie drgań poprzecznych ma rozwiązanie elementarne).

7. MAKROMODELOWANIE W TEORII PŁYTY REISSNERA

Dotychczasowe rozważania zwarte w tym opracowaniu dotyczyły makromodelowania materiałów kompozytowych o strukturze periodycznej. Niemniej jednak, ogólna idea zaproponowanej w rozdziale pierwszym oraz rozwijanej w dalszych rozdziałach metody formułowania makromodeli uwzględniających efekt skali, może także znaleźć zastosowanie do opisu innych materialnych struktur periodycznych. W tym i następnym rozdziale przedmiotem rozważań będą płyty cienkie, które mają strukturę periodyczną w kierunkach równoległych do jej płaszczyzny środkowej. Strukturę taką nazwiemy płaską. Rozważania dotyczyć będą dwuwymiarowych teorii płyt sprężystych o periodycznie zmiennej grubości, periodycznej niejednorodności w płaszczyźnie płyty lub periodycznego rozkładu obciążeń inercyjnych. Rozdział ten wykorzystuje wyniki pracy (1), uogólniającej założenia teorii płyt Reissnera.

7.1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Wprowadzając, podobnie jak w poprzednich rozdziałach, kartezjański układ współrzędnych prostokątnych $Ox_1x_2x_3$, przyjmujemy

że płaszczyzna środkowa płyty nieodkształconej zajmuje obszar Π na płaszczyźnie Ox_1x_2 , przy czym $x_3 = \pm h(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Pi$, są powierzchniami ograniczającymi obszar płyty. Tym samym $2h(x_1, x_2)$ jest grubością płyty, której wielkość ekstremalna jest z założenia niewielką w porównaniu z minimalnym wymiarem charakterystycznym L . Obszar Ω przestrzeni fizycznej parametryzowanej układem $Ox_1x_2x_3$ zajęty przez nieodkształconą płytę, jest więc dany przez

$$\Omega := \{ (x_1, x_2, x_3) : -h(x_1, x_2) < x_3 < h(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Pi \}.$$

Oznaczając $\Delta := (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2)$ jako prostokąt na płaszczyźnie Ox_1x_2 przyjmujemy, że $h(x_1, x_2)$ jest funkcją Δ -periodyczną. Kładąc $l := \sqrt{(l_1)^2 + (l_2)^2}$ oraz $\lambda := l/L$, przyjmujemy $\lambda \ll 1$, nazywając l parametrem mikrostruktury płyty. W dalszym ciągu tego rozdziału przez $x = (x_1, x_2)$ oznaczamy punkty na płaszczyźnie Ox_1x_2 (a nie punkty przestrzeni $Ox_1x_2x_3$ jak w poprzednich rozdziałach), przyjmując operator uśrednienia w postaci

$$\langle f \rangle := \frac{1}{l_1 l_2} \int_{\Delta} f(x) da, \quad da := dx_1 dx_2,$$

gdzie $f(\cdot)$ jest dowolną całkowaną funkcją Δ -periodyczną. Zakładamy dalej, że własności materiałowe i inercyjne płyty są opisane funkcjami Δ -periodycznymi zmiennej $x = (x_1, x_2)$ oraz parzystymi funkcjami odległości z dowolnego punktu materialnego płyty od płaszczyzny środkowej nieodkształconej płyty. Ponadto dla każdego punktu płyty (x_1, x_2, z) , w którym są określone jej wartości materiałowe, przyjmujemy, że płaszczyzna $z = \text{const.}$ jest płaszczyzną symetrii sprężystej. Zakładamy, że obciążenia powierzchni $x_3 = \pm h(x)$ ograniczających obszar płyty oraz stałe siły masowe są skierowane wzdłuż osi x_3 , oznaczając je odpowiednio przez:

$$p^+ = p^+(x, t), \quad p^- = p^-(x, t), \quad x \in \Pi, \quad b = \text{const.}$$

W dalszym ciągu tego rozdziału wprowadzamy dodatkowo wskaźniki α, β, \dots przebiegające ciąg 1.2 i odnoszące się do katezjańskiego układu współrzędnych Ox_1x_2 (obowiązująca konwencja sumacyjna wobec α, β, \dots).

Punktem wyjścia rozważań są równania liniowej teorii sprężystości

płyt, które przy przyjętych założeniach obejmują:

(i) związki między odkształceniami i przemieszczeniami

$$(7.1) \quad e_{ij} = u_{(i,j)} ,$$

(ii) relacje konstytutywne dla płaskiego stanu naprężenia, które w ramach teorii płyt typu Kirchhoffa przyjmujemy w postaci

$$(7.2) \quad s_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta} ,$$

gdzie $d_{\alpha\beta\gamma\delta} := a_{\alpha\beta\gamma\delta} - a_{\alpha\beta 33} a_{\gamma\delta 33} (a_{3333})^{-1}$, natomiast dla teorii płyt typu Reissnera są określone równaniami

$$(7.3) \quad s_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta} , \quad s_{\alpha 3} = 2a_{\alpha 1\beta 3} e_{\beta 3} .$$

W obu tych przypadkach zachodzi $s_{33} = 0$.

(iii) więzy kinematyczne wyrażające pole przemieszczeń $u_i(x, z, t)$ przez pewne pola zależne tylko od zmiennych $x = (x_1, x_2) \in \Pi$ oraz czasu t ; postać tych więzów dla płyt periodycznych zostanie zaproponowana w następujących podrozdziałach,

(iv) równania ruchu w słabej postaci

$$(7.4) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Pi} \rho \dot{u}_i \delta u_i dz da + \int_{\Pi} (s_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + 2s_{\alpha 3} \delta e_{\alpha 3}) dz da = \\ = \int_{\Pi} [p^+ \delta u_3(x, h) + p^- \delta u_3(x, -h)] da + b \int_{\Pi} \rho \delta u_3 dz da ,$$

w której $\delta e_{ij} = \delta u_{(i,j)}$, oraz p^+ , p^- są obciążeniami na powierzchniach ograniczających $\alpha_3 = \pm h(x)$, $x \in \Pi$, natomiast b jest stałą siłą masową. Równania powyższe winny być spełnione dla dowolnej funkcji testowej δu_i zgodnej z więzami kinematycznymi i przyjmującej dla każdego $x \in \partial \Pi$ wartości zerowe.

Dla rozpatrywanej klasy płyt funkcje $d_{\alpha\beta\gamma\delta} = d_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, z)$, $a_{\alpha 3\beta 3} = a_{\alpha 3\beta 3}(x, z)$ są Δ -periodycznymi funkcjami argumentu x

oraz parzystymi funkcjami zmiennej $z \in (-h, h)$. Pole $\rho(\cdot)$ charakteryzować może w (7.4) nie tylko gęstość masy materiału płyty lecz także masę związaną z możliwym przyłożeniem do płyty pewnych obciążeń inercyjnych. W tym opracowaniu nie będziemy się natomiast zajmować płytami o strukturze periodycznej w kierunku osi x_3 (płytami laminatowymi), rozszerzone modele takich płyt omówiono w pracy (26).

Z uwagi na postulowany warunek $\lambda \ll 1$, określający pewną mikroperiodyczność struktury płyty (w płaszczyźnie Ox_1x_2), w równaniach (7.2), (7.3), (7.4) mamy do czynienia z silnie oscylującymi funkcjami $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $a_{\alpha\beta\gamma}$ argumentu $x \in (x_1, x_2)$. Przyjęcie więzów kinematycznych (iii) w postaci znanych warunków prowadzących do dwuwymiarowych teorii płyt Kirchhoffa lub Reissnera nie zmienia periodycznego charakteru współczynników równań, gdyż pojawiające się w tych teoriach średnie po grubości płyty z wymienionych powyżej funkcji pozostają nadal funkcjami silnie oscylującymi argumentu $x \in \Pi$. W związku z tym równania (7.1), (7.4) będziemy dalej traktować tylko jako punkt wyjścia do budowy makromodelu płyty, stanowiącego podstawę do rozwiązywania zagadnień dynamiki. W przeciwieństwie jednak do znanych w literaturze metod homogenizacji asymptotycznej płyt, por. np. prace Duvaut i Metellusa, 1976, Caillerie, 1984, Kohna i Vogeliusa, 1984, uwzględniać będziemy wpływ efektu skali na dynamikę płyty, formując teorie płyt z makroparametrami wewnętrznymi. Teorie takie sformułujemy w tym rozdziale dla przybliżeń typu Reissnera, zastępując występujące w tych teoriach hipotezy kinematyczne przez odpowiednie hipotezy makrolokalizacji.

7.2 PROCEDURA MAKROMODELOWANIA

Celem sformułowania hipotez modelowych wprowadzamy do rozważań układ funkcji mikrokształtu $h^A(\cdot)$, $A=1, \dots, N$, które mają te same własności co funkcje mikrokształtu zdefiniowane w pod-

rozdziale 1.2 lecz są teraz określone na płaszczyźnie Ox_1x_2 będąc Δ - periodycznymi funkcjami argumentu $x = (x_1, x_2)$. Podobnie jak w wymienionym podrozdziale wprowadzimy pojęcie makrofunkcji, które jednak w tym i następnym rozdziale dotyczyć będzie makrofunkcji określonych na obszarze Π płaszczyzny Ox_1x_2 przy powyżej wprowadzonym parametrze mikrostruktury l . Formuła (1.5) pozostaje nadal w mocy dla makrofunkcji F oraz funkcji mikrokształtu h^A jako funkcji argumentu $x = (x_1, x_2)$, natomiast formuła (1.4) sprowadza się do postaci zawierającej całki po Π , przy nowym znaczeniu operatora uśrednienia $\langle \cdot \rangle$, który został zdefiniowany na początku tego podrozdziału. Postępując podobnie jak w podrozdziale 1.3, sformułujemy dwie wiodące hipotezy. Pierwsza z nich ujmuje we wspólnym schemacie założenie kinematyczne prowadzące do 2D - modelu płyt typu Reissnera wraz z postulatem makrolokalizacji.

Hipoteza Makrolokalizacji (typu Reissnera). Pola przemieszczeń dla płyty o płaskiej strukturze periodycznej poszukujemy w postaci

$$(7.5) \quad \begin{aligned} u_\alpha(x, z, t) &= z [\Theta_\alpha(x, t) + h^A(x) \Phi_\alpha^A(x, t)], \\ u_3(x, z, t) &= W(x, t) + h^A(x) V^A(x, t), \end{aligned}$$

gdzie $h^A(\cdot)$, $A=1, \dots, N$, jest postulowanym w każdym problemie układem funkcji mikrokształtu oraz $\Theta_\alpha(\cdot, t)$, $\Phi_\alpha^A(\cdot, t)$, $W(\cdot, t)$, $V^A(\cdot, t)$ są dla każdego t dowolnymi regularnymi makrofunkcjami określonymi na obszarze Π .

Łatwo zauważyć, że równania (7.5) stanowią pewne uogólnienie znanej hipotezy kinematycznej Reissnera, zawierając oprócz ugięć $W(x, t)$ i kątów obrotu $\Theta_\alpha(x, t)$ także dodatkowe niewiadome pola $\Phi_\alpha^A(x, t)$, $V^A(x, t)$. Sumy $h^A \Phi_\alpha^A$ oraz $h^A V^A$ charakteryzują zaburzenia pola przemieszczenia wywołane Δ -periodyczną strukturą materiału lub obciążenia płyty. Związki (7.5) będziemy dalej traktować jako pewną szczególną postać więzów kinematycznych.

Zgodnie z tym stwierdzeniem, funkcje testowe δu_i w słabej postaci równań ruchu (7.4) przyjmiemy w postaci

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \delta u_{\alpha}(x, z) &= z [\delta \Theta_{\alpha}(x) + h^A(x) \delta \Phi_{\alpha}^A(x)], \\ \delta u_3(x, z) &= \delta W(x) + h^A(x) \delta V^A(x), \end{aligned}$$

gdzie $\delta \Theta_{\alpha}$, $\delta \Phi_{\alpha}^A$, δW , δV^A są dowolnymi regularnymi makrofunkcjami określonymi na Π . Druga hipoteza ma ten sam sens co odpowiednia hipoteza sformułowana w podrozdziale 1.3, tj. wykorzystuje ona w trakcie modelowania własności makrofunkcji występujących w (7.5) oraz mikroperiodyczny charakter struktury płyty.

Hipoteza Makromodelowania. W ramach procedury makromodelowania, dla każdej makrofunkcji F , wielkości rzędu jej dokładności numerycznej ε_F będą pomijane wobec wartości $F(x)$, $x \in \Pi$. Podobnie wielkości rzędu λ będą pomijane wobec 1.

Zgodnie z hipotezą makromodelowania, w poniższych formułach (por. (1.4) i (1.5):

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \int_{\Pi} f(x, F(x)) da(x) &= \int_{\Pi} \langle f \rangle(F(x)) da(x) + \mathcal{O}(\lambda) + \mathcal{O}(\varepsilon_F), \\ (h^A F)_{,\alpha}(x) &= h^A_{,\alpha}(x) F(x) + \mathcal{O}(\varepsilon_F), \end{aligned}$$

w trakcie makromodelowania będą pomijane wielkości $\mathcal{O}(\varepsilon_F)$, $\mathcal{O}(\lambda)$. Podobnie jak w podrozdziale 1.3 należy zaznaczyć, że metoda makromodelowania korzystająca z powyższej hipotezy nie ma charakteru asymptotycznego, gdyż wielkości $\mathcal{O}(\varepsilon_F)$ pomijamy jako niewielkie tylko wobec wartości makrofunkcji F .

Procedura makromodelowania płyt typu Reissnera polega na:

- (i) podstawieniu prawych stron (7.1) do (7.3) a następnie podstawieniu otrzymanych wyrażeń na s_{ij} do równań ruchu (7.4),
- (ii) wykorzystaniu hipotezy makrolokalizacji, tj. podstawieniu do otrzymanej słabej postaci równań ruchu prawych stron (7.5) i (7.6),

(iii) dokonaniu w tak uzyskanej postaci równań ruchu całkowań podług argumentu $z \in (-h(x), h(x))$ i sprowadzeniu tych równań do postaci niezależnej od tego argumentu,

(iv) przeprowadzeniu uśrednień zgodnie z pierwszą z formuł (7.7),

(v) wykorzystaniu hipotezy makromodelowania, tj. pominięciu w formułach postaci (7.7) wyrazów $\mathcal{O}(\varepsilon_F)$ i $\mathcal{O}(\lambda)$, gdzie F należy do zbioru makrofunkcji występujących po prawych stronach równań (7.5) i (7.6),

Otrzymany na tej drodze relacja reprezentuje pewien makromodel typu Reissnera mikroperiodycznej płyty. Każdy taki makromodel jest jednoznacznie określony układem N funkcji mikrokształtu h^A ; w zależności od liczby N i postaci tych funkcji można wprowadzać bardziej lub mniej dokładne makromodele danej płyty. Nie przytaczając żmudnych przekształceń podanej powyżej procedury, ograniczymy się do podania końcowej relacji. W tym celu oznaczymy

$$\mu := \int_{-h}^h \varrho dz, \quad j := \int_{-h}^h z^2 \varrho dz, \\ g_{\alpha\beta\gamma\delta} := \int_{-h}^h z^2 d_{\alpha\beta\gamma\delta} dz, \quad c_{\alpha\beta} := \int_{-h}^h a_{\alpha\beta} dz,$$

gdzie $\mu, j, g_{\alpha\beta\gamma\delta}, c_{\alpha\beta}$ są znanymi funkcjami Δ -periodycznymi. Ponadto wprowadzimy do rozważań makrofunkcje $M_{\alpha\beta}, Q_{\alpha}, M_{\alpha}^A, Q^A$, dane równaniami

$$(7.8) \quad \begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle_{\mathcal{C}_{\beta,\delta}}^{\mathcal{C}_{\gamma,\delta}} + \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} h^A_{,\gamma} \rangle \Phi_{\delta}^A, \\ Q_{\alpha} &= \langle c_{\alpha\beta} \rangle_{\mathcal{C}_{\beta}}^{\mathcal{C}_{\beta}} + W_{\beta\alpha} + \langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\beta} \rangle V^A, \\ M_{\alpha}^A &= \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} h^A_{,\beta} \rangle_{\mathcal{C}_{\beta,\delta}}^{\mathcal{C}_{\gamma,\delta}} + \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} h^A_{,\beta} h^B_{,\delta} \rangle \Phi_{\gamma}^B, \\ Q^A &= \langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\alpha} \rangle_{\mathcal{C}_{\beta}}^{\mathcal{C}_{\beta}} + W_{\beta\alpha} + \langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\alpha} h^B_{,\beta} \rangle \Phi_{\gamma}^B. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez Π^0 makrowęzłowe obszary Π , kładąc $\Pi^0 = \{x \in \Pi : \Delta(x) \subset \Pi\}$, gdzie $\Delta(x) := x + \Delta$. Można wykazać, że $M_{\alpha\beta}$ oraz Q_α są dla każdego $x \in \Pi^0$ uśrednionymi po $\Delta(x)$ wielkościami momentów i sił tnących w płycie. Tym samym równania (7.8) będą interpretowane jako równania konstytutywne makromodelu płyt typu Reissnera. Założmy następnie, że gęstość zewnętrznych obciążeń (przypadająca na jednostkę powierzchni pola obszaru Π) da się przedstawić w postaci sumy $p+f$, gdzie p jest makrofunkcją określoną na Π (lub w poszczególnych podobszarach Π) oraz f jest funkcją Δ -periodyczną taką, że $\langle f \rangle = 0$. Obciążenia określone funkcją f nazwiemy obciążeniami oscylującymi. Korzystając z (7.8), końcowy rezultat procedury makromodelowania (i) - (V) da się przedstawić w postaci warunku

$$(7.9) \quad \int_{\Pi} [M_{\alpha\beta} \delta Q_{\alpha\beta} + Q_\alpha (\delta Q_\alpha + \delta W_{,\alpha}) + \langle j \rangle \dot{\Theta}_\alpha + \langle j h^A \rangle \dot{\Phi}_\alpha^A] \delta Q_\alpha + \\ + \langle u \rangle \ddot{W} + \langle u h^A \rangle \ddot{V}^A] \delta W + (M_\alpha^A + \langle j h^A h^B \rangle \dot{\Phi}_\alpha^B + \langle j h^A \rangle \dot{\Theta}_\alpha) \delta \Phi_\alpha^A + \\ + (Q^A + \langle u h^A h^B \rangle \ddot{V}^B + \langle u h^A \rangle \ddot{W}) \delta V^A] da = \int_{\Pi} (p \delta W + \langle f h^A \rangle \delta V^A) da,$$

który winien być spełniony dla funkcji testowych δQ_α , δW , $\delta \Phi_\alpha^A$, δV^A , przyjmujących na $\partial \Pi$ wartości zerowe. Powyższy warunek nazwiemy słabą postacią równań ruchu rozpatrywanego makromodelu płyty typu Reissnera.

7.3 MAKROMODELE Z EFEKTEM SKALI

Łatwo zauważyć, że uśrednione moduły inercyjne $\langle u h^A \rangle$, $\langle j h^A \rangle$, $\langle u h^A h^B \rangle$, $\langle j h^A h^B \rangle$ oraz uśrednione obciążenia $\langle f h^A \rangle$ zależą od parametru mikrostruktury \mathcal{L} , w przeciwieństwie od uśrednionych modułów sprężystości występujących w równaniach konstytutywnych (2.8). Celem eksponowania tego istotnego faktu, podobnie jak w podrozdziale 1.5, wprowadzimy funkcje $g^A := \mathcal{L}^{-1} h^A$, będące funkcjami parametru \mathcal{L} rzędu $O(1)$ (por. str. 16-17). Przy założeniu niezależności funkcji testowych w (7.9), otrzy-

mamy poniższe równania

$$\begin{aligned}
 (7.10) \quad & M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - \langle j \rangle \ddot{\Theta}_\alpha - L \langle j g^A \rangle \ddot{\Phi}_\alpha^A = 0, \\
 & Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{W} - L \langle \mu g^A \rangle \ddot{V}^A + p = 0, \\
 & L^2 \langle j g^A g^B \rangle \ddot{\Phi}_\alpha^B + L \langle j g^A \rangle \ddot{\Theta}_\alpha + M_\alpha^A = 0, \\
 & L^2 \langle \mu g^A g^B \rangle \ddot{V}^B + L \langle \mu g^A \rangle \ddot{W} + Q^A = L \langle f g^A \rangle.
 \end{aligned}$$

Równania ruchu (7.10) i równania konstytutywne (7.8) reprezentują, dla każdego wyboru funkcji mikrokształtu, pewien makromodel rozpatrywanej płyty o płaskiej strukturze periodycznej. Z uwagi na występowanie w (7.10) parametru mikrostruktury L , jest to makromodel opisujący efekt skali. Podstawiając prawe strony (7.8) do (7.10) otrzymamy układ 3 równań różniczkowych cząstkowych dla makrougięcia W oraz makroobrotów Θ_α sprzężony z układem 3N równań różniczkowych zwyczajnych dla makroparametrów wewnętrznych V^A, Φ_α^A .

W zagadnieniach inżynierskich z reguły pomijamy wpływ inercji obrotowej j na dynamikę płyty; tym samym w równaniach (7.10) pomijamy uśrednienia zawierające j . Przybliżenie to prowadzi do warunku $M_\alpha^A = 0$, na podstawie którego można wyrugować z równań makroparametry wewnętrzne Φ_α^A . Oznaczając przez $D_{\alpha\beta}^{AB}$ składowe transformacji liniowej odwrotnej do nieosobliwej transformacji liniowej wyznaczonej przez $\langle g_{\alpha\beta} \delta^A_{\gamma\delta} h^A_{,\gamma} h^B_{,\delta} \rangle$,

$$D_{\alpha\beta}^{AB} \langle g_{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} h^B_{,\gamma} h^C_{,\delta} \rangle = \delta_{\alpha\gamma} \delta^{AC},$$

otrzymamy

$$\Phi_\alpha^A = - D_{\alpha\beta}^{AB} \langle g_{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} h^B_{,\delta} \rangle \Theta_{\mu,\nu},$$

co po oznaczeniu

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} := \langle g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \rangle - \langle g_{\alpha\beta} g_{\gamma\mu} h^A_{,\mu} \rangle D_{\nu\delta}^{AB} \langle g_{\delta\epsilon} g_{\epsilon\sigma} h^B_{,\sigma} \rangle$$

prowadzi do równań konstytutywnych

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta} &= G_{\alpha\beta\gamma\delta} \Theta_{\gamma,\delta} \quad , \\
 Q_{\alpha} &= \langle c_{\alpha\beta} \rangle (\Theta_{\beta} + W_{,\beta}) + \langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\beta} \rangle V^A, \\
 Q^A &= \langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\alpha} \rangle (\Theta_{\beta} + W_{,\beta}) + \langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\alpha} h^B_{,\beta} \rangle V^B.
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

Dla uproszczenia formalnej struktury równań założymy dalej, że wszystkie funkcje mikrokształtu spełniają warunek $\langle h^A \rangle = 0$. Po pominięciu wyrazów opisujących inercję obrotową, równania (7.10) zredukują się wtedy do postaci

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} &= 0, \\
 Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{W} + p &= 0, \\
 l^2 \langle \mu g^A g^B \rangle \ddot{V}^B + Q^A &= l \langle f g^A \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{7.12}$$

Równania (7.11), (7.12) reprezentują uproszczony makromodel rozpatrywanych płyt; efekt skali jest uwzględniony występowaniem modułów mikroinercyjnych $l^2 \langle \mu g^A g^B \rangle$ oraz obciążeń oscylacyjnych f w ostatnim z równań ruchu (7.12). Podstawowymi niewiadomymi są: makrougięcia W , makroobroty Θ_{α} oraz makroparametry wewnętrzne V^A . Te ostatnie są więc opisywane układem równań różniczkowych zwyczajnych.

$$(7.13) \quad l^2 \langle \mu g^A g^B \rangle \ddot{V}^B + \langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\alpha} h^B_{,\beta} \rangle V^B = - \langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\alpha} \rangle (\Theta_{\beta} + W_{,\beta}) + l \langle f g^A \rangle.$$

Przy braku obciążeń oscylacyjnych dla płyt o stałej grubości i o modułach ścinania $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ niezależnych od $x = (x_1, x_2)$, wobec $\langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\alpha} \rangle = c_{\alpha\beta} \langle h^A_{,\alpha} \rangle = 0$ oraz przy jednorodnych warunkach początkowych $V^A(x, 0) = 0$, $\dot{V}^A(x, 0) = 0$, $x \in \Gamma$, układ (7.13) ma rozwiązanie trywialne $V^A = 0$.

Układy równań (7.8), (7.10) oraz (7.11), (7.12) należy rozpatrywać łącznie z warunkami brzegowymi i początkowymi dla W, Θ_{α} a także warunkami początkowymi dla makroparametrów wewnętrznych

występujących w tych układach. Pod względem formalnym warunki dla W i Θ_α mają tę samą postać jak w teorii płyt Reissnera. Rozwiązania odpowiednich zagadnień brzegowo - początkowych mają sens fizyczny tylko gdy W , Θ_α , V^A , \dot{F}_α^A są regularnymi makro-funkcjami.

7.4 MAKROMODELE LOKALNE

Przejsie od przedstawionych tu modeli płyt uwzględniających efekt skali do modeli lokalnych sprowadza się do pominięcia w równaniu (7.13) wyrazów zawierających moduły mikroinercyjne oraz obciążenia oscylacyjne. Oznaczając przez D^{AB} elementy macierzy $N \times N$ odwrotnej do nieosobliwej macierzy o wyrazach $\langle c_{\alpha\beta} h^A_{,\alpha} h^B_{,\beta} \rangle$, tj. kładąc

$$D^{AB} \langle c_{\alpha\beta} h^B_{,\alpha} h^C_{,\beta} \rangle = \delta^{AC},$$

otrzymamy wtedy

$$V^A = -D^{AB} \langle c_{\alpha\beta} h^B_{,\alpha} \rangle (\Theta_\beta + W_{,\beta}),$$

co po oznaczeniu

$$C_{\alpha\beta} := \langle c_{\alpha\beta} \rangle - \langle c_{\alpha\gamma} h^A_{,\gamma} \rangle D^{AB} \langle c_{\beta\delta} h^B_{,\delta} \rangle$$

prowadzi do równań konstytutywnych postaci

$$M_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta\gamma\delta} \Theta_{\gamma,\delta}, \quad (7.14)$$

$$Q_\alpha = C_{\alpha\beta} (\Theta_\beta + W_{,\beta}).$$

Równania powyższe wraz z równaniami ruchu redukującymi się (po pominięciu inercji obrotowej) do postaci

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0, \quad (7.15)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{W} + p = 0,$$

reprezentują (dla danych funkcji mikrokształtu) pewien model lokalny płyty typu Reissnera. Występujące w (7.14) wielkości $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C_{\alpha\beta}$ są modułami efektywnymi dla tego modelu. Otrzymane w wyniku formalnego przejścia granicznego $l \rightarrow 0$ przybliżenie asymptotyczne nie opisuje wpływu wielkości parametru mikrostruktury na dynamikę płyty. Zauważmy, że dla procesów quasistacjonarnych oraz przy braku obciążeń oscylacyjnych, modele z parametrami wewnętrznymi (z efektem skali) sprowadzają się do modeli lokalnych.

7.5 ZASTOSOWANIA

Zastosujemy otrzymane wyniki do badania zginania walcowego płyty prostokątnej podpartej przegubowo na brzegach $x_1 = 0$, $x_1 = L$, która ma strukturę periodyczną tylko w kierunku osi x_1 . Dla uproszczenia rozważań wprowadzimy tylko jedną funkcję mikrokształtu $h^1 = h^1(x_1)$ o okresie l , która może być przyjęta w postaci $h^1(x_1) = l \sin(2\pi x_1 / l)$. Element reprezentatywny redukuje się teraz do pasma $x_1 \in (-l/2, l/2)$; przyjmując, że $x_1 = 0$ jest środkiem symetrii materiałowej i bezwładnościowej tego pasma, otrzymamy $\langle \mu h^1 \rangle = 0$, $\langle j h^1 \rangle = 0$. Oznaczmy

$$G := \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, \quad G^1 := \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} h^1_{,\alpha} \rangle, \quad G^{11} := \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} (h^1_{,\alpha})^2 \rangle,$$

$$C := \langle c_{\alpha\beta} \rangle, \quad C^1 := \langle c_{\alpha\beta} h^1_{,\alpha} \rangle, \quad C^{11} := \langle c_{\alpha\beta} (h^1_{,\alpha})^2 \rangle,$$

$$j^{11} := \langle j (g^1)^2 \rangle, \quad \mu^{11} := \langle \mu (g^1)^2 \rangle,$$

gdzie $g^1 = \sin(2\pi x_1 / l)$. Kładąc ponadto

$$\Theta := \Theta_1, \quad \Phi := \Phi_1^1, \quad V := V^1,$$

po podstawieniu prawych stron równań (7.8) do (7.10) i pominięciu obciążeń oscylacyjnych, dla zginania walcowego otrzy-

mamy poniższy układ równań

$$\begin{aligned}
 C\ddot{\Theta}_{,11} + G^1\ddot{\Phi}_{,1} - C(\Theta + W_{,1}) - C^1V - \langle j \rangle \ddot{\Theta} &= 0, \\
 C(W_{,11} + \Theta_{,1}) + C^1V_{,1} - \langle \mu \rangle \ddot{W} + p &= 0, \\
 I^2 j^{11} \ddot{\Phi} + G^{11}\ddot{\Phi} + G^1\Theta_{,1} &= 0, \\
 I^2 \mu^{11} \ddot{W} + C^{11}W + C^1(\Theta + W_{,1}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{7.16}$$

Niech $p = p_0 \sin kx_1 \cos \omega t$, $k := 2\pi/L$, gdzie $p_0 \neq 0$ jest daną amplitudą obciążenia. W przypadku tym, rozwiązań równań (7.16) będziemy poszukiwać w postaci

$$\begin{aligned}
 W &= W_0 \sin kx_1 \cos \omega t, & \Theta &= \Theta_0 \cos kx_1 \cos \omega t, \\
 V &= V_0 \cos kx_1 \cos \omega t, & \Phi &= \Phi_0 \sin kx_1 \cos \omega t,
 \end{aligned}$$

gdzie $W_0, \Theta_0, V_0, \Phi_0$ są stałymi. Podstawiając przyjęte rozwiązanie do równań (7.16), otrzymamy dla wymienionych tu stałych układ 4 liniowych równań algebraicznych. Rugując z tych równań V_0, Φ_0 oraz oznaczając

$$C_\omega := C - \frac{(C^1)^2}{C^{11} - I^2 \mu^{11} \omega^2}, \quad G_\omega := G - \frac{(G^1)^2}{G^{11} - I^2 j^{11} \omega^2}$$

otrzymamy następujący układ równań dla stałych W_0, Θ_0

$$\begin{aligned}
 (7.17) \quad & \begin{bmatrix} k^2 C_\omega - \langle \mu \rangle \omega^2 & k C_\omega \\ k C_\omega & C_\omega - k^2 G_\omega - \langle j \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $D(\omega, k)$ wyznacznik występującej tu macierzy. Równanie $D(\lambda, k) = 0$ określa więc wartości częstości rezonansowych λ rozpatrywanej płyty. Przyjmując dodatkowe oznaczenia

$$C_0 := C - \frac{(C')^2}{C''} , \quad G_0 := G - \frac{(G')^2}{G''} ,$$

$$E := [C_0(\langle j \rangle k^2 + \langle \mu \rangle) + G_0 \langle \mu \rangle k^2]^2 - 4C_0 G_0 \langle \mu \rangle \langle j \rangle k^4 ,$$

gdzie zawsze $E > 0$, po przeprowadzeniu odpowiednich wyliczeń i traktowaniu l jako małego parametru, otrzymamy następujące wartości $\lambda = \lambda_L$ dolnych częstości rezonansowych:

$$(7.18) \quad \lambda_L^2 = \frac{1}{2\langle \mu \rangle \langle j \rangle} [C_0(\langle j \rangle k^2 + \langle \mu \rangle) + G_0 \langle \mu \rangle k^2 \mp \sqrt{E}] + O(l^2).$$

Dla górnych częstości rezonansowych $\lambda = \lambda_H$ otrzymamy natomiast

$$(7.19) \quad (\lambda_H')^2 = \frac{C''}{l^2 \mu''} + \frac{(C')^2}{C''} (\langle j \rangle k^2 + \langle \mu \rangle) + O(l^2),$$

$$(\lambda_H'')^2 = \frac{G''}{l^2 j''} + \frac{(G')^2}{G''} \langle \mu \rangle k^2 + O(l^2).$$

Otrzymane wyniki (7.18), (7.19) uwzględniają wpływ efektu skali na dynamikę płyty. Rozważmy teraz analogiczny problem w ramach modeli lokalnego. W równaniach (7.16) należy wtedy pominąć wyrazy zawierające parametr mikrostruktury l a przedstawione powyżej postępowanie zamiast do układu równań (7.17) prowadzi do układu

$$(7.20) \quad \begin{bmatrix} k^2 C_0 - \langle \mu \rangle \omega^2 & k C_0 \\ k C_0 & C_0 - k^2 G_0 - \langle j \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Oznaczając przez $D_0(\omega, k)$ wyznacznik macierzy układu (7.20), z warunku $D_0(\lambda, k) = 0$ otrzymujemy wartości częstości rezonansowych λ w postaci

$$(7.21) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2\langle \mu \rangle \langle j \rangle} [C_0(\langle j \rangle k^2 + \langle \mu \rangle) + G_0 \langle \mu \rangle \pm \sqrt{E}] .$$

Otrzymany rezultat pomija wpływ efektu skali na dynamikę płyty.

7.6 WNIOSKI

Porównując rozwiązania uzyskane w poprzednim rozdziale sformułujemy następujące wnioski:

(i) Kwadraty częstości rezonansowych λ^* otrzymane w ramach modelu lokalnego, dane wzorem (7.21), są przybliżeniami rzędu $\mathcal{O}(L^2)$ kwadratów dolnych częstości rezonansowych λ_L uzyskanych na podstawie modelu z efektem skali i określonych formułą (7.18).

(ii) Górne częstości rezonansowe λ_H , określone formułami (7.19), nie mogą zostać otrzymane w ramach modelu lokalnego.

(iii) Wpływ efektu skali na dynamikę płyty o strukturze periodycznej należy uwzględniać przy badaniu wszystkich częstości drgań.

Powyższe wnioski wskazują na celowość posługiwania się zaproponowanym w tym rozdziale modelem płyt z makroparametrami wewnętrznymi przy badaniu zagadnień dynamicznych.

8. MAKROMODELOWANIE W TEORII PŁYT KIRCHHOFFA

Makromodelowanie w ramach teorii płyt Kirchhoffa przebiega nieco inaczej niż w teorii płyt Kirchhoffa; fakt ten jest związany z koniecznością wprowadzenia funkcji mikrokształtu o nieco innych własnościach niż w dotychczasowych rozważaniach. W rozdziale niniejszym wykorzystano podejście przedstawione w pracy (6).

8.1 PROCEDURA MAKROMODELOWANIA

Punktem wyjścia rozważań są równania (7.1), (7.2) i (7.4) wraz z hipotezą makromodelowania w postaci podanej w podrozdziale 7.2 oraz hipotezą makrolokalizacji, która zostanie

poniżej sformułowana. W tym celu wprowadzimy układ liniowo - niezależnych Δ -periodycznych funkcji $k^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$ (zależnych od parametru mikrostruktury l), które są ciągle, mają kawałkami ciągle pierwsze i drugie pochodne oraz spełniają następujące warunki:

(i) Średnie wartości funkcji k^A na komórce Δ znikają: $\langle k^A \rangle = 0$.

(ii) Dla każdego $x = (x_1, x_2)$ zachodzi $k^A(x) \in O(l^2)$, $k^A_{,\alpha}(x) \in O(l)$.

(iii) Wartości drugich pochodnych $k^A_{,\alpha\beta}(x)$ jako funkcje parametru mikrostruktury l są ograniczone i nie dążą do zera gdy $l \rightarrow 0$, $k^A_{,\alpha\beta}(x) \in O(1)$.

Funkcje $k^A(\cdot)$ nazwiemy również funkcjami mikrokształtu (drugiego rzędu); różnią się one pod względem formalnym od funkcji mikrokształtu $h^A(\cdot)$, wprowadzonych w poprzednim rozdziale, warunkami (ii), (iii), natomiast ich sens fizyczny jest identyczny jak sens funkcji $h^A(\cdot)$, tj. charakteryzują one pod względem jakościowym postać zaburzeń ruchu płyty wywołanych mikroperiodycznością jej struktury. Hipotezę makrokalizacji przyjmujemy teraz w postaci stanowiącej pewne uogólnienie hipotezy kinematycznej teorii płyt Kirchhoffa.

Hipoteza Makrolokalizacji (typu Kirchhoffa). Pola przemieszczeń dla płyty o płaskiej strukturze periodycznej poszukujemy w postaci

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(x, z, t) &= -z [W(x, t) + k^A(x) V^A(x, t)],_{\alpha} \\ (8.1) \quad u_3(x, z, t) &= W(x, t) + k^A(x) V^A(x, t), \end{aligned}$$

gdzie $k^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$, jest postulowanym w każdym problemie układem funkcji mikrokształtu oraz $W(\cdot, t)$, $V^A(\cdot, t)$ są dla każdego t dowolnymi regularnymi makrofunkcjami określo-

nymi na obszarze Π .

Występujące w (8.1) sumy $k^A V^A$ charakteryzują zaburzenia pola ugięcia płyty (w ramach teorii Kirchhoffa) wywołane Δ - periodyczną strukturą materiału lub obciążenia płyty. Traktując (8.1) jako pewne więzy kinematyczne, przyjmiemy funkcje testowe δu_α w słabej postaci równań ruchu (7.4), jako

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \delta u_\alpha(x, z) &= -z [\delta W(x) + k^A(x) \delta V^A(x)]_{,\alpha} \\ \delta u_3(x, z) &= \delta W(x) + k^A(x) \delta V^A(x), \end{aligned}$$

gdzie $\delta W, \delta V^A$ są dowolnymi regularnymi makrofunkcjami określonymi na Π . Procedura makromodelowania przebiega analogicznie do podanej w poprzednim rozdziale; jedynie zamiast równań (7.3), (7.5), (7.6) korzystamy odpowiednio z równań (7.2), (8.1), (8.2). Zgodnie z hipotezą makromodelowania podaną w podrozdziale 7.2 oraz z własnościami tu wprowadzonych funkcji mikrokształtu, zamiast z drugiego z równań (7.7) będziemy dalej korzystać z formuły

$$(k^A F)_{,\alpha}(x) = k^A_{,\alpha\beta}(x) F(x) + \tilde{\sigma}(\epsilon_F),$$

jednocześnie zaniedbując wyrazy $\tilde{\sigma}(\epsilon_F)$ wobec wartości $F(x)$ makrofunkcji F . Dla uproszczenia rozważań pominiemy dalej wpływ inercji obrotowej na dynamikę płyty. Otrzymana w ten sposób relacja, po wprowadzeniu makrofunkcji $M_{\alpha\beta}, M^A$ danych przez równania konstytutywne (por. oznaczenia w podrozdziałach (7.1) i (7.2):

$$(8.3) \quad \begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle W_{,\gamma\delta} + \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} k^A_{,\gamma\delta} \rangle V^A, \\ M^A &= \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} k^A_{,\alpha\beta} k^B_{,\gamma\delta} \rangle V^B + \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} k^A_{,\gamma\delta} \rangle W_{,\alpha\beta}, \end{aligned}$$

przyjmuje postać warunku

$$(8.4) \quad \int_{\Pi} [M_{\alpha\beta} \delta W_{,\alpha\beta} + M^A \delta V^A + \langle \mu \rangle \ddot{W} + \langle \mu k^A \rangle \ddot{V}^A] \delta W + \\ + \langle \mu k^A k^B \rangle \ddot{V}^B + \langle \mu k^A \rangle \ddot{W} \delta V^A] da = \int_{\Pi} (p \delta W + \langle f k^A \rangle \delta V^A) da$$

spełnionego dla funkcji testowych δW , δV^A przyjmujących na $\partial\Pi$ wartości zerowe. Warunek (8.4) nazwiemy słabą postacią równań ruchu makromodelu płyty typu Kirchhoffa.

8.2 MAKROMODELE Z EFEKTEM SKALI

Celem przedstawienia w sposób wyraźny zależności postaci równań ruchu od parametru mikrostruktury l wprowadzimy funkcje $m^A := l^{-2} k^A$. Traktując wartości $m^A(x)$ jako funkcje parametru l mamy: $m^A(x) \in \mathcal{O}(1)$. Zakładając, że warunek (8.4) zachodzi dla dowolnych funkcji testowych, otrzymamy równania ruchu

$$(8.5) \quad M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + \langle \mu \rangle \ddot{W} + l^2 \langle \mu m^A \rangle \ddot{V}^A = p, \\ l^4 \langle \mu m^A m^B \rangle \ddot{V}^B + l^2 \langle \mu m^A \rangle \ddot{W} + M^A = l^2 \langle f m^A \rangle,$$

które wraz z równaniami konstytutywnymi przedstawiają pewien makromodel płyty. Każdy taki makromodel jest określony daną płaską strukturą periodyczną tej płyty oraz postulowanym układem funkcji mikrokształtu. Interpretacja fizyczna wielkości $M_{\alpha\beta}$ jest taka sama jak w rozdziale 7. Wszystkie uśrednione moduły w (8.3), (8.5) jako funkcje parametru l są rzędu $\mathcal{O}(1)$; tym samym efekt skali jest ujęty występowaniem w (8.5) tego parametru w sposób wyraźny. Podstawiając prawe strony równań (8.3) do (8.5) otrzymamy równanie różniczkowe cząstkowe dla makro-

ugięcia W sprzężone z układem N równań różniczkowych zwyczajnych dla makroparametrów wewnętrznych V^A . Równania te należy rozpatrywać łącznie z dwoma warunkami brzegowymi dla makrougięcia W oraz $2(N+1)$ warunkami początkowymi dla W, V^A . Rozwiązania poszczególnych zagadnień mają sens fizyczny tylko gdy W, V^A są regularnymi makrofunkcjami.

8.3 MAKROMODELE LOKALNE

Stosując formalnie przejście graniczne $l \rightarrow 0$ otrzymamy z drugiego równania (8.5) warunek $M^A = 0$, który po wprowadzeniu macierzy $N \times N$ o wyrazach E^{AB} spełniają warunki

$$E^{AB} \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} k^B_{,\alpha\beta} k^C_{,\gamma\delta} \rangle = \delta^{AC},$$

prowadzi do

$$V^A = - E^{AB} \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} k^B_{,\gamma\delta} \rangle W_{,\alpha\beta}.$$

Po oznaczeniu

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} := \langle g_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle - \langle g_{\alpha\beta\mu\nu} k^A_{,\mu\nu} \rangle E^{AB} \langle g_{\gamma\delta\pi\rho} k^B_{,\pi\rho} \rangle,$$

równanie konstytutywne (8.3) redukują się teraz do postaci

$$(8.6) \quad M_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\gamma\delta},$$

natomiast równania ruchu (8.5) dają

$$(8.7) \quad M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + \langle \rho \rangle \ddot{W} = \rho.$$

łatwo zauważyć, że równania (8.6), (8.7) pod względem formalnym mają postać analogiczną jak równania płyty teorii Kirchhoffa. Reprezentują one makromodel lokalny płyty Kirchhoffa o płaskiej periodycznej strukturze. Wielkości $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ w (8.6) nazywamy sztywnościami efektywnymi płyty. Dla procesów quasistacjonarnych

oraz przy braku obciążeń oscylacyjnych model lokalny jest identyczny z modelem opisującym efekt skali. Tym samym efekty skali są wywołane dynamicznym charakterem procesu oraz możliwością wystąpienia obciążeń oscylacyjnych.

8.4 ZASTOSOWANIA

Zastosujemy otrzymane równania do analizy płyt jednorodnych, izotropowych o Δ -periodycznie zmiennej grubości. W tym przypadku

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta} = B [(1-\nu)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \nu\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}], \quad B := \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

gdzie $h(\cdot)$ jest funkcją Δ -periodyczną oraz E, ν są: modulem sprężystości podłużnej i współczynnikiem Poissona materiału płyty. Podstawiając prawe strony równań (8.3) do równań ruchu (8.5), po wprowadzeniu oznaczeń

$$D_{\alpha\beta}^A := \langle (1-\nu)Bk_{,\alpha\beta}^A + \nu Bk_{,\beta\gamma}^A \delta_{\alpha\beta} \rangle,$$

$$D := \langle (1-\nu)Bk_{,\alpha\beta}^A k_{,\alpha\beta}^A + \nu Bk_{,\alpha\alpha}^A k_{,\beta\beta}^A \rangle$$

otrzymamy układ równań dla makrougięcia $W(x, t)$ i makroparametrów wewnętrznych $V^A(x, t)$:

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \langle B \rangle W_{,\alpha\alpha\beta\beta} + D_{\alpha\beta}^A V_{,\alpha\beta}^A + \langle \epsilon_1 \rangle \ddot{W} + L^2 \langle \mu m^A \rangle \ddot{V}^A &= p, \\ L^4 \langle \mu m^A m^B \rangle \ddot{V}^B + L^2 \langle \mu m^A \rangle \ddot{W} + D^{AB} V^B + D_{\alpha\beta}^A W_{,\alpha\beta} &= L^2 \langle f m^A \rangle. \end{aligned}$$

Układ (8.8) reprezentuje makromodel izotropowej płyty Kirchhoffa uwzględniający efekt skali. Podstawiając prawe strony równań (8.6) do (8.7) otrzymamy natomiast równanie dla makrougięcia

$$(8.9) \quad B_{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\alpha\beta\gamma\delta} + \langle \epsilon_1 \rangle \ddot{W} = p,$$

przedstawiając makromodel lokalny tej płyty.

Celem porównania rozwiązań uzyskanych przy stosowaniu równań (8.8) z rozwiązaniami w ramach modelu lokalnego danego równaniem (8.9), rozpatrzmy drgania izotropowej i jednorodnej płyty prostokątnej swobodnie podpartej na wszystkich brzegach. Przyjmijemy tutaj $\Pi = (0, l_1) \times (0, l_2)$ oraz wprowadzimy jedną funkcję mikroształtu $m = m(x_1, x_2)$. Zakładając, że grubość płyty $h = h(x_1, x_2)$ jako funkcja Δ -periodyczna (a więc określona dla prawie każdego punktu płaszczyzny Ox_1x_2) jest parzystą funkcją argumentów x_1, x_2 oraz $m(x_1, x_2)$ jest funkcją nieparzystą, otrzymamy $\langle \mu m \rangle = 0$. Funkcję mikroształtu można tu przyjąć w postaci $m = l^2 \sin(2\pi x_1 / l_1) \sin(2\pi x_2 / l_2)$ przy czym, jak poprzednio, mamy $\Delta = (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2)$ oraz $L = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$. Obciążenie zewnętrzne niech będzie dane przez $p = p_0 \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos \omega t$, gdzie $k_\alpha := 2\pi / l_\alpha$ oraz p_0 jest stałą, $p_0 \neq 0$; tym samym pomijamy obciążenia oscylacyjne, kładąc $f = 0$ w równaniach (8.8). Oznaczając ponad to $j := \langle \mu m^2 \rangle$, $V := V^1$, $D_{\alpha\beta} := D_{\alpha\beta}^1$, $D := D^1$, równania te sprowadzimy teraz do postaci

$$(8.10) \quad \langle B \rangle W_{,\alpha\alpha\beta\beta} + D_{\alpha\beta} V_{,\alpha\beta} + \langle \mu \rangle \ddot{W} = p,$$

$$L^4 j \ddot{V} + DV + D_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} = 0,$$

w której $D_{12} = D_{21} = 0$. Rozwiązania równań (8.10), spełniającego warunki brzegowe płyty swobodnie podpartej, poszukiwać będziemy w postaci

$$W = A_W \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos \omega t,$$

$$V = A_V \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos \omega t,$$

gdzie A_W, A_V są amplitudami drgań, $A_W A_V = 0$. Podstawiając powyższe rozwiązanie do (8.12) oraz uwzględniając przyjęte po-

przednio wyrażenie dla obciążenia p , otrzymamy układ dwóch algebraicznych równań liniowych dla A_w, A_v :

$$(8.11) \quad \begin{bmatrix} \langle B \rangle (k_1 + k_2)^2 - \langle \mu \rangle \omega^2 & -(D_{11} k_1^2 + D_{22} k_2^2) \\ -(D_{11} k_1^2 + D_{22} k_2^2) & D - L^4 j \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_w \\ A_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczając

$$(8.12) \quad (\lambda_{1,2})^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{D}{L^4 j} + \frac{\langle B \rangle}{\langle \mu \rangle} (k_1^2 + k_2^2)^2 \mp \sqrt{\left[\frac{D}{L^4 j} - \frac{\langle B \rangle}{\langle \mu \rangle} (k_1^2 + k_2^2)^2 \right]^2 + 4 \frac{(D_{11} k_1^2 + D_{22} k_2^2)^2}{L^4 j \langle \mu \rangle}} \right],$$

rozwiązanie układu równań przyjmuje postać

$$(8.13) \quad \begin{aligned} A_w &= \frac{p_0 (D - L^4 j \omega^2)}{L^4 \langle \mu \rangle j (\omega^2 - \lambda_1^2) (\omega^2 - \lambda_2^2)}, \\ A_v &= \frac{p_0 (D_{11} k_1^2 + D_{22} k_2^2)}{L^4 \langle \mu \rangle j (\omega^2 - \lambda_1^2) (\omega^2 - \lambda_2^2)}. \end{aligned}$$

Wielkości λ_1, λ_2 określone wzorem (8.12) są odpowiednio dolną i górną częstotścią drgań własnych rozpatrywanej płyty. Zostały one wyznaczone przy posługiwaniu się makromodelem płyty Kirchhoffa, uwzględniającym efekt skali.

W ramach modelu lokalnego dysponujemy równaniem (8.9) w którym obecnie sztywności efektywne wynoszą

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle B \rangle \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \frac{1}{D} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta},$$

oraz obciążenie p przyjmujemy jak poprzednio. Rozwiązań tego równania poszukujemy w postaci

$$W = A_w \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos \omega t,$$

co po podstawieniu do (8.9) oraz oznaczeniu

$$(8.14) \quad \lambda^2 := \frac{\langle B \rangle}{\langle \mu \rangle} (k_1^2 + k_2^2)^2 - \frac{(\mathcal{D}_{11} k_1^2 + \mathcal{D}_{22} k_2^2)^2}{\langle \mu \rangle D},$$

proceedzi do poniższego wyrażenia dla amplitudy drgań

$$(8.15) \quad A_W = \frac{p_0}{\langle \mu \rangle (\lambda^2 - \omega^2)}.$$

Tym samym wzór (8.14) definiuje częstość drgań własnych tej samej płyty co poprzednio, lecz badanej przy zastosowaniu modelu lokalnego.

Celem porównania otrzymanych rozwiązań (8.12) i (8.14) oznaczmy

$$\alpha := \frac{\langle B \rangle}{\langle \mu \rangle} (k_1^2 + k_2^2)^2, \quad \gamma := \frac{(\mathcal{D}_{11} k_1^2 + \mathcal{D}_{22} k_2^2)^2}{\langle \mu \rangle}.$$

Formułę (8.12) można wtedy przedstawić w postaci

$$(\lambda_{1,2})^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{D}{l^4 j} - \frac{D}{l^4 j} \sqrt{1 + \frac{2l^4}{D} \left(\frac{\gamma}{D} - \alpha \right) j + l^8 \frac{\alpha^2 j^2}{D^2} + \alpha} \right],$$

co po rozwinięciu występującego tu pierwiastka kwadratowego w szereg potęgowy podług małego parametru $\varepsilon := l^4$ prowadzi dla $\lambda = \lambda_1$ do prostego wyrażenia

$$\lambda_1 = \alpha - \frac{\delta}{D} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami, wzór (8.14) daje

$$\lambda^2 = \alpha - \frac{\gamma}{D}.$$

Tym samym otrzymamy poniższy prosty związek pomiędzy częstościami drgań własnych płyty

$$(8.16) \quad \lambda_1^2 = \lambda^2 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

gdzie parametr $\varepsilon = \ell^4$ charakteryzuje wielkość mikrostruktury (elementu reprezentatywnego) rozpatrywanej płyty.

8.5 WNIOSKI

Wynikające z przedstawionego powyżej przykładu wnioski są w pełni analogiczne do wniosków sformułowanych na końcu poprzedniego rozdziału. Z zależności (8.16) wynika bowiem, że dolne części drgań własnych płyty, liczone w ramach makromodelu lokalnego, są asymptotycznym przybliżeniem (w wyniku formalnego przejścia z parametrem mikrostruktury do zera) wyrażenia uzyskanego przy stosowaniu modelu z efektem skali. Natomiast górne częstotliwości drgań własnych płyty mogą zostać wyznaczone wyłącznie przy posługiwaniu się modelem uwzględniającym efekt skali. Tym samym model ten stanowi właściwe narzędzie do analizy mikrodynamiki płyt o płaskiej strukturze periodycznej.

9. POWŁOKI FALISTE

Przedmiotem rozważań w tym rozdziale będą powłoki cienkie, w których geometria powierzchni środkowej jest opisana funkcjami periodycznymi. Powłoki tego rodzaju nazwiemy falistymi, zakładając dalej, że długości pofałdowań są bardzo niewielkie w porównaniu z minimalnym wymiarem charakterystycznym rzutu powierzchni środkowej na płaszczyznę przecinającą wszystkie pofałdowania. Mamy tu więc do czynienia ze strukturą mikroperiodyczną, do opisu której będzie zaproponowana metoda makromodelowania, wykorzystująca ogólną ideę formułowania modeli z makroparametrami wewnętrznymi. Rezultaty tego rozdziału są oparte na pracy (44).

9.1 PODSTAWOWE POJĘCIA

Oznaczmy przez Γ obszar na płaszczyźnie Ox_1x_2 oraz

przez Δ -prostokąt na tej płaszczyźnie,

$$\Delta := (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2),$$

którego wymiary są pomijalnie małe wobec minimalnego wymiaru charakterystycznego L obszaru Π . Kładąc $l := \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ i $\lambda := l/L$, mamy więc $\lambda \ll 1$. Załóżmy, że powierzchnia środkowa rozpatrywanej powłoki jest gładka i może być jednoznacznie opisana przedstawieniem parametrycznym $x_3 = z(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Pi$, gdzie $z(\cdot)$ jest funkcją Δ -periodyczną. Tym samym współrzędne kartezjańskie x_1, x_2 pełnić będą jednocześnie rolę parametrów powierzchni środkowej powłoki. Wskaźniki α, β, \dots przebiegające ciąg 1,2, odnoszą się dalej do współrzędnych x_1, x_2 punktów $x = (x_1, x_2)$ obszaru Π , natomiast, jak poprzednio, wskaźniki i, j, \dots przebiegają ciąg 1,2,3 odnosząc się do prostokątnego układu współrzędnych $Ox_1x_2x_3$ w przestrzeni fizycznej. Zakładamy, że grubość rozpatrywanej powłoki jest stała, będąc niewielka zarówno wobec minimalnego promienia krzywizny powierzchni środkowej powłoki jak i wymiaru l komórki periodyczności Δ , który (podobnie jak w rozdziałach 7 i 8) nazwiemy parametrem mikrostruktury.

Oznaczmy przez e_i wersory bazy układu $Ox_1x_2x_3$. Kładąc $r^1 := x_1$, $r^2 := x_2$, $r^3 := z(x_1, x_2)$, powierzchnię środkową przedstawimy w postaci $x^i = r^i(x)$, $x \in \Pi$. Oznaczając

$$g_\alpha^i := r^i_{,\alpha}, \quad a_\alpha := g_\alpha^i e_i, \quad n := \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|},$$

otrzymamy dla pierwszego i drugiego tensora metrycznego powierzchni środkowej oraz tensora Ricci'ego i symboli Christoffela znane formuły

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta, \quad b_{\alpha\beta} = n \cdot a_{\alpha,\beta}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = (a_\alpha \times a_\beta) \cdot n, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = a^\alpha \cdot a_{\beta,\gamma},$$

kładąc jednocześnie $a := \det a_{\alpha\beta}$. Oznaczmy następnie przez $u = u^i(x, t) e_i$ wektor przemieszczenia, przez $p = p^i(x, t) e_i$ -wektor gęstości obciążenia oraz przez ρ - gęstość masy powłoki; gęstości te są odniesione do jednostki pola powierzchni środkowej

powłoki. Tu i dalej $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Pi$.

Rozważania ograniczymy do liniowo- sprężystych jednorodnych i izotropowych powłok cienkich. Mechanikę powłok będziemy opisywać w ramach założeń liniowej teorii powłok cienkich Kirchhoffa - Love'a, lecz przyjmując jako podstawowe niewiadome składowe $u^i(\boldsymbol{x}, t)$ wektora przemieszczenia, odniesione do kartezjańskiego układu współrzędnych $Ox_1x_2x_3$. Równaniami takiego sformułowania teorii są:

(i) równania geometryczne

$$(9.1) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^i u_{i,\beta} \quad , \quad \kappa_{\alpha\beta} = n^i (u_{i,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} u_{i,\gamma\delta}) ,$$

w których $\varepsilon_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}$ są składowymi stanu odkształcenia,

(ii) równania konstytutywne

$$(9.2) \quad n^{\alpha\beta} = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} \quad , \quad m^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \quad ,$$

gdzie $n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}$ są składowymi stanu napięcia oraz gdzie

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} := a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} - \nu \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\delta} \quad , \quad D := \frac{E\delta}{1-\nu^2} \quad , \quad B := \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \quad ,$$

przy czym δ jest grubością powłoki oraz E, ν - stałymi materiałowymi,

(iii) równania ruchu w słabej postaci

$$(9.3) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Pi} \rho u^i \dot{u}_i \bar{t}_a \, dx_1 dx_2 + \int_{\Pi} (n^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}) \bar{t}_a \, dx_1 dx_2 = \int_{\Pi} \rho^i \dot{u}_i \bar{t}_a \, dx_1 dx_2$$

gdzie

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^i \delta u_{i,\beta} \quad , \quad \delta \kappa_{\alpha\beta} = n^i (\delta u_{i,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \delta u_{i,\gamma\delta}) \quad ,$$

która winna być spełniona dla dowolnych funkcji testowych $\delta u_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Pi$, zgodnych z dodatkowo postulowanymi więzami kinematycznymi oraz przyjmujących na $\partial\Pi$ wartości zerowe.

Występujące w powyższych równaniach funkcje $g_{\alpha\beta}^i, n^i, \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}, H^{\alpha\beta\gamma\delta}, \bar{t}_a$ są określonymi w obszarze Π płaszczyzny Ox_1x_2 funkcjami Δ - periodycznymi argumentu $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Z uwagi na założoną po-

przednio niewielkość maksymalnego wymiaru L prostokąta Δ wobec wymiaru charakterystycznego L obszaru Π , $\lambda = L/L \ll 1$, w równaniach (9.1) - (9.3) mamy do czynienia z silnie oscylującymi współczynnikami. Uniemożliwia to w większości przypadków bezpośrednie wykorzystanie podanych równań do analizy poszczególnych zagadnień, stanowiąc tym samym motywację formułowania odpowiednich makromodeli. Tym samym równania (9.1) - (9.3) stanowiąc będą jedynie punkt wyjścia procedury makromodelowania.

9.2 PROCEDURA MAKROMODELOWANIA

Zastosowana tu metoda makromodelowania wykorzystuje pojęcie funkcji mikrokształtu $k^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$, omówione w podrozdziale 8.1 oraz hipotezę makromodelowania, sformułowaną w podrozdziale 7.2. Równania (9.1) - (9.3) będziemy rozpatrywać wraz z szczególną postacią więzów kinematycznych, które wprowadzamy postulując poniższą hipotezę kinematyczną.

Hipoteza Makrolokalizacji. Pola przemieszczeń opisujące deformacje powierzchni środkowej rozpatrywanej powłoki falistej poszukujemy w postaci

$$(9.4) \quad u_i(x, t) = U_i(x, t) + k^A(x) V_i^A(x, t),$$

gdzie $k^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$, jest postulowanym w każdym problemie układem funkcji mikrokształtu oraz $U_i(\cdot, t)$, $V_i^A(\cdot, t)$, dla każdego t , są dowolnymi regularnymi makrofunkcjami określonymi w obszarze Π płaszczyzny Ox_1x_2 .

Występujące w (9.4) sumy $k^A V_i^A$ opisują teraz zaburzenie pola przemieszczenia wywołane Δ -periodyczną falistą strukturą powłoki. Zgodnie z (9.4), funkcje testowe w równaniach ruchu (9.3) przyjmujemy w postaci

$$(9.5) \quad \delta u_i(x) = \delta U_i(x) + k^A(x) \delta V_i^A(x),$$

gdzie δU_i , δV_i^A są dowolnymi regularnymi makrofunkcjami określonymi na Π . Procedura makromodelowania przebiega podobnie jak w przypadku omówionym w podrozdziale 7.2. Tym samym, po podstawieniu prawych stron (9.2) do (9.3) i uwzględnieniu (9.1), wykorzystujemy (9.4) i (9.5) a następnie dokonujemy przekształceń i uproszczeń zgodnie z hipotezą makromodelowania; korzystamy tutaj z pierwszej z formuł (7.7) oraz z równości

$$(k^A F)_{,\alpha} = k^A_{,\alpha} F + \delta(\epsilon_F), \quad (k^A F)_{,\alpha\beta} = k^A_{,\alpha\beta} F + \delta(\epsilon_{\alpha\beta F}) + \delta(\epsilon_F),$$

gdzie $F(\cdot)$ jest dowolną regularną makrofunkcją. Z uwagi na dość złożoną postać równań teorii powłok (9.1) - (9.3), sama procedura wymaga wykonania dużej liczby formalnych przekształceń. Celem uzyskania zwięzłości końcowej postaci wyników będziemy dalej korzystać z zapisu wektorowego. Korzystając z operatora uśrednienia wprowadzonego w podrozdziale 7.1, zdefiniujemy następujące 3×3 macierze

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\alpha\beta} &:= \mathbb{D} \langle H^{\alpha\delta\beta\gamma} \tilde{t}_\alpha a_\delta \otimes a_\gamma \rangle, \quad \mathbb{D}^\beta := \mathbb{D} \langle H^{\alpha\delta\beta\gamma} \Gamma_{\alpha\delta}^\lambda \tilde{t}_\alpha a_\lambda \otimes a_\gamma \rangle, \\ \mathbb{D}^A &:= \mathbb{D} \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \tilde{t}_\alpha k^A_{,\delta} a_\gamma \otimes a_\lambda \rangle, \quad \mathbb{D}^{A\alpha} := \mathbb{D} \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{t}_\alpha k^A_{,\delta} a_\gamma \otimes a_\beta \rangle, \\ \mathbb{D}^{AB} &:= \mathbb{D} \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{t}_\alpha k^A_{,\gamma} k^B_{,\delta} a_\alpha \otimes a_\beta \rangle, \end{aligned}$$

(9.6)

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} &:= \mathbb{B} \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{t}_\alpha n \otimes n \rangle, \quad \mathbb{B}^{\alpha\beta\gamma} := \mathbb{B} \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \Gamma_{\gamma\delta}^\lambda \tilde{t}_\alpha n \otimes n \rangle, \\ \mathbb{B}^{\alpha\beta} &:= \mathbb{B} \langle H^{\gamma\delta\mu\nu} \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta \tilde{t}_\alpha n \otimes n \rangle, \\ \mathbb{B}^{A\alpha\beta} &:= \mathbb{B} \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{t}_\alpha k^A_{,\delta} n \otimes n \rangle, \quad \mathbb{B}^{A\alpha} := \mathbb{B} \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \tilde{t}_\alpha k^A_{,\mu} n \otimes n \rangle, \\ \mathbb{B}^{AB} &:= \mathbb{B} \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{t}_\alpha k^A_{,\gamma} k^B_{,\delta} n \otimes n \rangle. \end{aligned}$$

Każda z macierzy (9.6) określa pewną transformację liniową $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, którą oznaczymy przez $\mathbb{A}[\cdot]$. Korzystając z takich transformacji wprowadzimy pola wektorowe

$$N^\alpha = D^{\alpha\beta} U_{,\beta} + D^{B\alpha} V^B,$$

$$N^A = D^{A\beta} U_{,\beta} + D^{AB} V^B,$$

$$N = D^\beta U_{,\beta} + D^B V^B,$$

(9.7)

$$M^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\gamma\delta} U_{,\gamma\delta} + B^{\alpha\beta\gamma} U_{,\gamma} + B^{B\alpha\beta} V^B,$$

$$M^\alpha = B^{\alpha\gamma\delta} U_{,\gamma\delta} + B^{\alpha\gamma} U_{,\gamma} + B^{B\alpha} V^B,$$

$$M^A = B^{A\gamma\delta} U_{,\gamma\delta} + B^{A\gamma} U_{,\gamma} + B^{AB} V^B.$$

Oznaczmy dodatkowo

$$\tilde{q} := q \bar{a}, \quad f^i := p^i \langle \bar{a} \rangle.$$

Procedura makromodelowania prowadzi wtedy do warunku

$$(9.8) \quad \int_{\Pi} [M^{\alpha\beta} \cdot \delta U_{,\alpha\beta} + (M^\alpha + N^\alpha) \cdot \delta U_{,\alpha} + N \cdot \delta U + (M^A + N^A) \cdot \delta V^A] dx_1 dx_2 + \\ + \frac{d}{dt} \int_{\Pi} (\langle \tilde{q} \rangle \dot{U} + \langle \tilde{q} k^A k^B \rangle V^B \cdot \delta V^A) dx_1 dx_2 = \int_{\Pi} f \cdot \delta U dx_1 dx_2,$$

który winien być spełniony dla funkcji testowych δU , δV^A , przyjmujących na $\partial\Pi$ wartości zerowe.

9.3 MAKROMODELE Z EFEKTEM SKALI

W równaniach (9.7) oraz w warunkach (9.8) występują wyłącznie makrofunkcje; własności materiałowe oraz geometria powłoki falistej jest określona stałymi (9.6) oraz własności inercyjne (z uwzględnieniem geometrii powłoki) są dane stałymi $\langle \tilde{q} \rangle$, $\langle \tilde{q} k^A k^B \rangle$. Tym samym mamy do czynienia z pewnym makromodelem powłoki falistej, przy czym (9.8) jest słąbą postacią równań ruchu. Nie wprowadzając dodatkowych ograniczeń dla makroprzemieszczeń U i makroparametrów wewnętrznych V^A , na podstawie (9.8) otrzymamy równania ruchu

w postaci

$$(9.9) \quad \begin{aligned} M^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - (M^\alpha + N^\alpha)_{,\alpha} + N + \langle \tilde{\rho} \rangle \ddot{U} &= f, \\ \langle \tilde{\rho} k^A k^B \rangle \ddot{V}^B + N^A + M^A &= 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z oznaczeniem $m^A = l^{-2} k^A$, wprowadzonym w podrozdziale 8.2, w równaniach (9.9) zachodzi $\langle \tilde{\rho} k^A k^B \rangle = l^4 \langle \tilde{\rho} m^A m^B \rangle$; tym samym mamy do czynienia z makromodelem uwzględniającym efekt skali. Parametr mikrostruktury l pojawi się w sposób wyraźny w drugim z równań (9.9). Zauważmy ponadto, że wobec $k^A_{,\alpha}(x) \in \mathcal{O}(l)$, parametr ten występuje także w definicjach (9.6), gdyż $\mathcal{D}^{\alpha\alpha}, \mathcal{D}^A, \mathcal{D}^{AB}$ są wielkościami rzędu $\mathcal{O}(l)$. Każdy z rozpatrywanych modeli zależy od wyboru funkcji mikrokształtu; wybór ten jest związany np. z badanym w danym problemie charakterem mikrodrgań rozpatrywanej powłoki falistej.

Podstawiając prawe strony (9.7) do równań ruchu (9.9) otrzymamy układ 3 równań różniczkowych cząstkowych dla makroprzemieszczeń $U_i(x, t)$ sprzężony z układem $3N$ równań różniczkowych zwyczajnych dla makroparametrów wewnętrznych $V_i^A(x, t)$, $A=1, \dots, N$. Warunki brzegowe mają pod względem formalnym postać analogiczną do warunków brzegowych w teorii płyt Kirchhoffa, bowiem równania dla makroprzemieszczeń są równaniami rzędu czwartego względem współrzędnych $x = (x_1, x_2)$. Tym samym makromodelem powłoki falistej jest pewna hipotetyczna struktura płaska, reprezentowana pewnym uogólnieniem modelu płyty typu Kirchhoffa. Rozwiązania zagadnień otrzymane przy stosowaniu równań (9.7), (9.9) mają sens fizyczny tylko gdy $U_i(\cdot, t)$, $V_i^A(\cdot, t)$ są, dla każdej chwili t , dostatecznie regularnymi makrofunkcjami.

9.4 MAKROMODELE LOKALNE

Makromodele te otrzymamy pomijając w równaniach (9.7), (9.9) wielkości rzędu $\mathcal{O}(l)$. Tym samym drugie z równań (9.9) redukuje się do $N^A + M^A = 0$, a z uwagi na pominięcie w (9.7) wyrazów

zawierających $\mathbb{D}^{A\alpha}$, \mathbb{D}^A , \mathbb{D}^{AB} , otrzymamy

$$N^\alpha = \mathbb{D}^{\alpha\beta} U_{,\beta}, \quad N = \mathbb{D}^\beta U_{,\beta},$$

oraz tożsamość $N^A \equiv 0$. Wynika stąd $M^A = 0$, co prowadzi do

$$\mathbb{B}^{AB} V^B + \mathbb{B}^{A\gamma\delta} U_{,\gamma\delta} + \mathbb{B}^{A\gamma} U_{,\gamma} = 0.$$

Można wykazać, że transformacja liniowa $\mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ dana przez macierz o blokach \mathbb{B}^{AB} jest odwracalna. Oznaczając przez K^{AB} bloki 3×3 macierzy $3N \times 3N$ wyznaczającej transformację odwrotną, otrzymamy

$$V^A = -K^{AB} (\mathbb{B}^{A\gamma\delta} U_{,\gamma\delta} + \mathbb{B}^{A\gamma} U_{,\gamma}).$$

Tym samym makroparametry wewnętrzne można wyrugować z równań konstytutywnych (9.7). Definiując poniższe sztywności efektywne

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{B}}^{\alpha\beta\gamma\delta} &:= \mathbb{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathbb{B}^{A\alpha\beta} K^{AB} \mathbb{B}^{B\gamma\delta}, \\ \tilde{\mathbb{B}}^{\alpha\beta\gamma} &:= \mathbb{B}^{\alpha\beta\gamma} - \mathbb{B}^{A\alpha\beta} K^{AB} \mathbb{B}^{B\gamma}, \\ \tilde{\mathbb{B}}^{\alpha\beta} &:= \mathbb{B}^{\alpha\beta} - \mathbb{B}^{A\alpha} K^{AB} \mathbb{B}^{B\beta}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

otrzymamy relacje konstytutywne postaci

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \tilde{\mathbb{B}}^{\alpha\beta\gamma\delta} U_{,\gamma\delta} + \tilde{\mathbb{B}}^{\alpha\beta\gamma} U_{,\gamma}, \\ M^\alpha &= \tilde{\mathbb{B}}^{\alpha\gamma\delta} U_{,\gamma\delta} + \tilde{\mathbb{B}}^{\alpha\gamma} U_{,\gamma}, \\ N^\alpha &= \mathbb{D}^{\alpha\beta} U_{,\beta}, \quad N = \mathbb{D}^\beta U_{,\beta}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Powyższe relacje należy rozpatrywać łącznie z równaniami ruchu redukującymi się teraz do postaci

$$M^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - (M^\alpha + N^\alpha)_{,\alpha} + N + \langle \tilde{\rho} \rangle \ddot{U} = f. \quad (9.12)$$

Równania (9.11), (9.12) reprezentują (dla każdego wyboru funkcji mikroształtu) lokalny makromodel powłoki falistej. Podstawowymi niewiadomymi są tu pola makroprzemieszczenia

$U_i(-, t)$, określone na Π dla każdej chwili t .

9.5 UWAGI KOŃCOWE

Zauważmy, że dla zagadnień quasistacjonarnych makromodel z efektem skali nie redukuje się do makromodelu lokalnego (por. rozdziały 7 i 8), gdyż dla powłok falistych parametr mikrostruktury występuje także w równaniach konstytutywnych (9.7), gdzie $\mathbb{D}^{A\alpha}$, \mathbb{D}^A , \mathbb{D}^{AB} są wielkościami rzędu $\mathcal{O}(l)$. Sytuacja jest tu więc inna niż w przypadku makromodeli płyt a także makromodeli materiałów kompozytowych. Dla zagadnień quasistacjonarnych, rozpatrywanych z uwzględnieniem efektu skali, drugie z równań ruchu (9.9) redukuje się do postaci $N^A + M^A = 0$. Efekt ten umożliwi eliminację z podstawowego układu równań makroparametrów wewnętrznych za pomocą równań

$$(\mathbb{B}^{AB} + \mathbb{D}^{AB})\mathbb{V}^B = -\mathbb{B}^{Ar\delta}U_{,r\delta} - (\mathbb{B}^{Ar} + \mathbb{D}^{Ar})U_{,r},$$

gdź transformacja liniowa $\mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ określona macierzą $3N \times 3N$ o blokach $\mathbb{B}^{AB} + \mathbb{D}^{AB}$ jest odwracalna. Tym samym w problemach quasistacjonarnych można również wprowadzić pewne sztywności efektywne w relacjach konstytutywnych, wyrażając $M^{\alpha\beta}$, M^α , N^α , N jako liniowe funkcje $U_{,r\delta}$, $U_{,r}$. Sztywności te będą jednak zależeć od parametru mikrostruktury, w przeciwieństwie do sztywności efektywnych określonych przez (9.10).

W pracy (44) przeprowadzono analizę drgań swobodnych powłoki falistej w ramach modelu lokalnego i modelu z efektem skali. Ogólne wnioski wynikające z tej analizy mają charakter zbliżony do wniosków sformułowanych na końcu rozdziałów 7 i 8, w związku z czym nie będziemy ich tu przytaczać. Otrzymane w tym rozdziale wyniki makromodelowania stanowią obecnie podstawę do badania różnych zagadnień szczególnych. Warto zauważyć, że mimo dużej złożoności budowy rozpatrywanych falistych periodycznych struktur powłokowych, otrzymane równania

makromodeli mają względnie prostą postać, zbliżoną do postaci równań teorii płyt, w których zagadnienie tarczowe jest sprzężone z zagadnieniem zginania płyty.

10. STRUKTURY SIATKOWE

Wiele gęstych i regularnych układów dyskretnych, zwłaszcza złożonych z dużej liczby powtarzających się elementów materialnych, może być badane przy posługiwaniu się równaniami pewnego hipotetycznego dwu- lub trójwymiarowego ośrodka ciągłego. Ośrodek taki nosi zwykle nazwę modelu ciągłego odpowiedniego układu dyskretnego. W szczególności model ciągle regularnych i wieloelementowych konstrukcji prętowych, takich jak kratownice przestrzenne, ruszty, tarcze i płyty siatkowe, były tematem szeregu opracowań. Przegląd i omówienie polskich prac z tej dziedziny do roku 1970, można znaleźć w monografii C. Woźniaka, 1970. Formułowanie i badanie ciągłych modeli siatek o strukturze periodycznej metodami homogenizacji asymptotycznej podano w pracy Cioranescu i Saint J. Paulin, 1991. Zastosowane w cytowanych pracach sposoby modelowania dotyczą jednak siatek o stosunkowo prostej budowie a otrzymane modele ciągle nie uwzględniają wpływu wielkości powtarzającego się elementu konstrukcji siatkowej na własności dynamiczne całego układu (efekt skali). W tym rozdziale zostanie wprowadzony i zastosowany model ciągły układów prętowych, periodycznych, o dowolnej budowie typowego (powtarzalnego) elementu strukturalnego; model ten będzie ponadto uwzględniać efekt skali. Ograniczymy rozważania do układów typu przestrzennych lub płaskich kratownic o masach skupionych w węzłach. Przedstawione tu wyniki zostały podane na podstawie pracy (3).

10.1 POJĘCIA WSTĘPNE

Przez Ω oznaczymy obszar w przestrzeni fizycznej, parametryzowanej prostokątnym układem kartezjańskim $Ox_1x_2x_3$, w którym znajduje się rozpatrywana przestrzenna konstrukcja siatkowa. Niech $V := (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2) \times (-l_3/2, l_3/2)$ będzie częścią obszaru Ω , w której występuje wyróżniony, powtarzający się element konstrukcyjny. Zakładamy jednocześnie, że wielkość $l := \sqrt{(l_1)^2 + (l_2)^2 + (l_3)^2}$ jest niewielka w porównaniu z minimalnym wymiarem charakterystycznym L obszaru Ω , tj. $l/L \ll 1$. Przyjmujemy, że obszar Ω można podzielić na skończoną liczbę rozłącznych prostopadłościanów $V(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \Lambda$, gdzie Λ jest zbiorem punktów w Ω będących środkami geometrycznymi tych prostopadłościanów (zgodnie z dotychczasowymi oznaczeniami zachodzi $V(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + V$). Tym samym

$$\Lambda := \{ \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \Omega : z_i = l_i/2 + m l_i, m = 0, \pm 1, \dots \}.$$

Element konstrukcyjny zawarty w domknięciu \bar{V} obszaru V nazwiemy elementem reprezentatywnym i założymy, że składa się on z n przegubowych węzłów N_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$, połączonych liniowo-sprężystymi prętami R_α , $\alpha = 1, 2, \dots, \mu$. Zakładamy, że wszystkie pręty są jednorodne i izotropowe. Poszczególnym węzłom przyporządkowujemy masy skupione m_α . Węzłom znajdującym się na brzegu obszaru przyporządkowujemy masy m_α w ten sposób, by element ten był elementem powtarzalnym konstrukcji, tj. by cała konstrukcja miała strukturę V -periodyczną (periodyczność ta może być jednak zakłócona w podobszarach $V(\mathbf{z})$ przylegających do brzegu obszaru Ω). Z uwagi na warunek $l \ll L$, gdzie $\lambda := l/L$, strukturę taką nazwiemy mikroperiodyczną oraz l nazwiemy parametrem mikrostruktury.

Każdy z prętów R_α orientujemy wektorem jednostkowym \mathbf{t}^α skierowanym wzdłuż jego osi. Ponadto przez $\mathbf{t}^{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$, oznaczamy wektor jednostkowy zaczepiony w węźle N_α i orientujący zewnątrznie skrajny przekrój pręta R_α przy tym węźle.

Tym samym $t^{\alpha a} = t^{\alpha}$ lub $t^{\alpha a} = -t^{\alpha}$. Ponadto, gdy węzeł N_{α} nie znajduje się na jednym z końców pręta R_{α} to przyjmujemy $t^{\alpha a} = 0$ (tj. wszystkie składowe $t_i^{\alpha a}$ wektora $t^{\alpha a}$ są równe zero). Niech l_{α} , F_{α} , E_{α} oznacza kolejno długość, przekrój poprzeczny oraz moduł Younga materiału dla pręta R_{α} . Oznaczać ponadto będziemy $k_{\alpha} := F_{\alpha} E_{\alpha} l_{\alpha}$. W dalszym ciągu stosujemy konwencję sumacyjną także podług wskaźników a, b , przebiegających ciąg $1, \dots, n$, tj. numerujący węzły elementu reprezentatywnego konstrukcji. Konwencji sumacyjnej nie stosujemy natomiast do wskaźnika α , numerującego pręty. Przez $E_{\mathbf{z}}$ wyróżnimy element powtarzalny konstrukcji zajmujący domknięcie $\bar{V}(\mathbf{z})$ obszaru $V(\mathbf{z})$, przy czym tu i dalej przyjmujemy $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$. Zauważmy, że węzeł znajdujących się na brzegu dwóch sąsiadujących z sobą obszarów $V(\mathbf{z}')$, $V(\mathbf{z}'')$ jest wyróżniany dwukrotnie, raz jako pewien węzeł N_a elementu $E_{\mathbf{z}'}$, drugi raz jako pewien węzeł N_b elementu $E_{\mathbf{z}''}$. Tym samym masa zaczepiona do tego węzła wynosi $m_a + m_b$, zgodnie z uwagami dotyczącymi wyróżniania w konstrukcji elementu reprezentatywnego (por. podrozdział 10.1). Tym samym dowolny węzeł konstrukcji (za wyjątkiem węzłów znajdujących się na brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω) jest jednoznacznie wyróżniony punktem $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$ (określającym element $E_{\mathbf{z}}$ do którego węzeł ten należy) oraz numerem a tego węzła.

10.2 OPIS DYSKRETNY

Oznaczmy przez $u_i^{a_i}(\mathbf{z}, t)$, składowe wektora przemieszczenia w chwili t , węzła N_{α} należącego do elementu strukturalnego $E_{\mathbf{z}}$. Odształcenie względne pręta R_{α} w tym elemencie, oznaczone przez $e_{\alpha}(\mathbf{z}, t)$, jest wtedy dane wzorem

$$(10.1) \quad e_{\alpha}(\mathbf{z}, t) = t_i^{\alpha a} u_i^{a_i}(\mathbf{z}, t) l_{\alpha}^{-1},$$

natomiast siła osiowa w pręcie wynosi

$$(10.2) \quad s_{\alpha}(z, t) = k_{\alpha} e_{\alpha}(z, t) .$$

Niech $p^a_i(z, t)$ będzie siłą skupioną zaczepioną w węźle N_a elementu strukturalnego \bar{E}_z - oraz przez (nie sumować podług α !)

$$v^a_i(z, t) := m_a \dot{u}^a_i(z, t)$$

oznaczymy pęd przyporządkowany temu węźlowi w chwili t . Należy pamiętać, że gdy rozpatrywany węzeł należy jednocześnie do dwóch sąsiadujących z sobą powtarzalnych elementów konstrukcji, to siłę skupioną $p^a_i(z, t)$ należy przyporządkować tylko węźlowi należącemu do jednego z tych elementów. Korzystając z powyższych oznaczeń, równania ruchu rozpatrywanej konstrukcji siatkowej dogodnie napisać w postaci warunku

$$(10.3) \quad \sum_{z \in \Lambda} \sum_{\alpha=1}^m s_{\alpha}(z, t) \delta e_{\alpha}(z) + \frac{d}{dt} \sum_{z \in \Lambda} v^a_i(z, t) \delta u^a_i(z) = \\ = \sum_{z \in \Lambda} p^a_i(z, t) \delta u^a_i(z) , \quad \delta e_{\alpha}(z) := t_i^{\alpha a} \delta u^a_i(z),$$

który winien być spełniony dla każdego układu przemieszczeń wirtualnych $\delta u^a_i(z)$, $z \in \Lambda$, $a=1, \dots, n$, węzłów konstrukcji siatkowej. Przemieszczenia wirtualne mają być zgodne z więzami kinematycznymi narzuconymi na ruch węzłów konstrukcji.

Równania (10.1) - (10.3) reprezentują dyskretny opis rozpatrywanej mikroperiodycznej konstrukcji siatkowej. Zakładamy, że konstrukcja ta nie jest układem kinematycznym zmiennym, tj. dla danych warunków początkowych i dowolnych obciążeń $p^a_i(z, t)$, $z \in \Lambda$, problem określony powyższymi równaniami ma jednoznaczne rozwiązanie. Niemniej jednak, z uwagi na złożoną bardzo dużą liczbę węzłów w układzie, rozwiązywanie zagadnień dynamiki w ramach opisu dyskretnego prowadzi do znacznych trudności rachunkowych. Fakt ten stanowi motywację

formułowania modeli ciągłych rozważanych konstrukcji siatkowych.

10.3 PODSTAWY MODELOWANIA

Celem przejścia od równań (10.1) - (10.3) do równań pewnego hipotetycznego ośrodka ciągłego, stanowiącego model ciągły (makromodel) rozpatrywanych siatkowych struktur mikro-periodycznych, korzystamy z pojęcia regularnej makrofunkcji. Zamiast funkcji mikrokształtu stosowanych przy makromodelowaniu niejednorodnego ośrodka ciągłego, wprowadzimy do rozważań macierz $n \times N$ o wyrazach h^{aA} , spełniającą warunki

$$(10.4) \quad m^a h^{aA} = 0, \quad h^{aA} \in \mathcal{O}(l), \quad A=1, \dots, N, \quad a=1, \dots, n,$$

taką, że wyrażenia postaci $h^{aA} F_i^A(\cdot, t)$, gdzie $F_i^A(\cdot)$ są dowolnymi regularnymi funkcjami zależnymi od czasu, opisują możliwe oscylacje ruchu w obrębie dowolnego ustalonego elementu strukturalnego E_z . Z drugiego z równań (10.4) wynika, że wielkości tych oscylacji dążą do zera gdy parametr mikrostruktury l dąży do zera. Macierz o wyrazach h^{aA} nazwiemy macierzą mikrokształtu a jej wybór zależy od budowy elementu strukturalnego oraz od jakościowego charakteru przewidywanych oscylacji ruchu w obrębie elementów strukturalnych. W przeciwieństwie od sytuacji spotykanych przy mikromodelowaniu ruchu ośrodka ciągłego za pomocą funkcji mikrokształtu, wprowadzoną tu macierz mikrokształtu można tak dobrać (przy odpowiednio dużej wartości N) by opisać wszystkie możliwe mikrooscylacje ruchu w obrębie elementu strukturalnego.

Ograniczymy dalsze rozważania do problemów, w których istnieją makrofunkcje (określone na Ω lub na kilku podobszarach obszaru Ω) $\tilde{\rho}^a_i(\cdot, t)$, których wartości w punktach $z \in \mathcal{A}$ dla każdej chwili t aproksymują z wystarczającą

dokładnością wartości $p^{\alpha}_i(\mathbf{z}, t)$ (za wyjątkiem niektórych skrajnych węzłów, tj. leżących na $\partial\Omega$). Oznacza to, mówiąc poglądowo, że sąsiadujące z sobą elementy strukturalne $E_{\mathbf{z}}$, są obciążone w podobny sposób. Obciążenia takie nazwiemy makro-obciążeniami. Przyjmijmy jednocześnie, że węzły leżące na pewnej części Σ^T brzegu $\partial\Omega$ są unieruchomione. Przy powyższych założeniach będziemy postulować następującą hipotezę kinematyczną, wyznaczającą klasę ruchów będących przedmiotem rozważań dynamiki konstrukcji siatkowej.

H i p o t e z a M a k r o l o k a l i z a c j i. Przemieszczeń węzłów mikroperiodycznej konstrukcji siatkowej, poddanej działaniu makroobciążeń, poszukujemy w postaci

$$(10.5) \quad u^{\alpha}_i(\mathbf{z}, t) = U_i(x, t) + h^{aA} V_i^A(x, t), \quad \mathbf{z} \in \Lambda,$$

w której h^{aA} jest postulowaną w każdym problemie macierzą mikrokształtu, $U_i(\cdot, t), V_i^A(\cdot, t)$ są regularnymi makrofunkcjami określonymi na Ω oraz x jest wektorem położenia węzła N_a w elemencie strukturalnym $E_{\mathbf{z}}$.

Funkcje U_i, V_i^A stanowią nowe niewiadome opisujące kinematykę rozpatrywanej konstrukcji siatkowej; podobnie jak poprzednio nazwiemy je odpowiednio makroprzemieszczeniami i makroparametrami wewnętrznymi. Hipoteza (10.5) oznacza, że ruch mikroperiodycznej struktury siatkowej obciążonej w pewien regularny sposób można przewidywać w postaci makroruchu (określonego makroprzemieszczeniami) na który zostały nałożone mikrooscylacje, których kształt opisuje macierz mikrokształtu h^{aA} a wielkość-makroparametry wewnętrzne. Przyjmijmy jednocześnie, że na części Σ^T brzegu $\partial\Omega$ zachodzi

$U_i = 0$ dla każdej chwili t . Zauważmy, że z uwagi na drugą z warunków (10.4), przyjęty w ten sposób opis unieruchomienia węzłów układu leżących na Σ^T jest określony z dokładnością do wielkości $O(l)$. Przybliżenie tego rodzaju jest

typowe dla przyjmowanej w całym opracowaniu metodyki makromodelowania struktur periodycznych i wynika z faktu, że dla punktów obszaru Ω należących do makrobrzegu równania modelu tracą swój sens fizyczny (por. podrozdział 1.4).

Zgodnie z hipotezą makrolokalizacji, traktowaną jako postulat istnienia pewnych więzów kinematycznych ograniczających ruch węzłów konstrukcji siatkowej, przyjmujemy, że warunek (10.3) zachodzi dla

$$(10.6) \quad \delta u_i^a(\mathbf{x}) = \delta U_i(\mathbf{x}) + h^{aA} \delta V_i^A(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Lambda,$$

gdzie $\delta U_i(\cdot)$, $\delta V_i^A(\cdot)$ są regularnymi makrofunkcjami oraz \mathbf{x} jest wektorem położenia węzła N_α w elemencie strukturalnym E_α . Przyjmujemy ponadto $\delta U_i(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \Sigma$. Prócz hipotezy makrolokalizacji będziemy korzystać z hipotezy makromodelowania, którą przyjmujemy w postaci podobnej jak w rozdziale 7.

H i p o t e z a M a k r o m o d e l o w a n i a. W ramach procedury makromodelowania, dla każdej makrofunkcji F , wielkości rzędu jej dokładności numerycznej ε_F będą pomijane wobec wartości $F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, oraz wielkości rzędu λ będą pomijane wobec 1.

Znaczenie fizyczne powyższej hipotezy, jak już zaznaczono w poprzednich rozdziałach, jest związane z pojęciem makrofunkcji oraz mikroperiodycznością rozpatrywanej struktury siatkowej. Oznaczając $|V| = l_1 l_2 l_3$, dla dowolnej ciągłej makrofunkcji $F(\cdot)$ określonej na Ω , mamy

$$(10.7) \quad \sum_{\mathbf{z} \in \Lambda} F(\mathbf{z}) |V| = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}) dv + \mathcal{O}(\varepsilon_F) + \mathcal{O}(\lambda),$$

gdzie $dv = dx_1 dx_2 dx_3$. Zgodnie z hipotezą makromodelowania, w (10.7) będziemy pomijać wyrazy $\mathcal{O}(\varepsilon_F)$, $\mathcal{O}(\lambda)$.

10.4 PROCEDURA MAKROMODELOWANIA

Procedura makromodelowania polega na wykorzystaniu równań (10.1) - (10.3) oraz (10.5), (10.6) celem sformułowania słabej postaci równań ruchu dla makroprzemieszczeń U_i oraz parametrów wewnętrznych V_i^A . Na podstawie (10.5), odkształcenia względne (10.1) przyjmą postać

$$e_\alpha(\mathbf{z}, t) = t_i^\alpha t_j^\alpha U_{i,j}(\mathbf{z}, t) + t_i^{\alpha a} h^{aA} V_i^A(\mathbf{z}, t) l_\alpha^{-1} + \delta(\varepsilon_{vU}) + \delta(\varepsilon_v),$$

gdzie $\varepsilon_{vU}, \varepsilon_v$ są dokładnościami numerycznymi odpowiednio makrofunkcji $U_{i,j}, V_i^A$. Zgodnie z hipotezą makromodelowania, wyrazy $\delta(\varepsilon_{vU}), \delta(\varepsilon_v)$ możemy pominąć. Oznaczmy

$$(10.8) \quad \begin{aligned} \rho &:= \frac{1}{|V|} \sum_{a=1}^n m_a, & \rho^{AB} &:= \frac{1}{|V|} \sum_{a=1}^n m_a h^{aA} h^{aB} l_\alpha^{-2}, \\ A_{ijkl} &:= \frac{1}{|V|} \sum_{\alpha=1}^n k_\alpha t_i^\alpha t_j^\alpha t_k^\alpha t_l^\alpha, \\ B_{ijk}^A &:= \frac{1}{|V|} \sum_{\alpha=1}^n k_\alpha t_i^\alpha t_j^\alpha t_k^{\alpha a} h^{aA} l_\alpha^{-1}, \\ C_{ij}^{AB} &:= \frac{1}{|V|} \sum_{\alpha=1}^n k_\alpha t_i^{\alpha a} t_j^{\alpha b} h^{aA} h^{bB} l_\alpha^{-2}, \end{aligned}$$

oraz zdefiniujmy makrofunkcje

$$(10.9) \quad p_i(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{|V|} \sum_{a=1}^n \tilde{p}_i^a(\mathbf{x}, t), \quad \tau_i^A(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{|V|} \sum_{a=1}^n \tilde{p}_i^a(\mathbf{x}, t) h^{aA} l_\alpha^{-1},$$

określone na Ω dla każdej chwili t . Wprowadźmy ponadto tensor symetryczny E_{ij} o składowych

$$(10.10) \quad E_{ij} = U_{(i,j)},$$

krórego nazywać będziemy tensorem makroodkształcenia. Stosując te oznaczenia oraz korzystając z (10.7), po zastosowaniu (10.4) i hipotezy makromodelowania, po wprowadzeniu pól

$$(10.11) \quad S_{ij} = A_{ijkl} E_{kl} + B_{ijk}^A V_k^A,$$

$$H_i^A = C_{ij}^{AB} V_j^B + B_{kl}^A E_{kl} ,$$

otrzymamy ostatecznie warunek

$$(10.12) \quad \int_{\Omega} (S_{ij} \delta E_{ij} + H_i^A \delta V_i^A) dv + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho \dot{U}_i \delta U_i + l^2 \rho^{AB} \dot{V}_i^B \delta V_i^A) dv = \\ = \int_{\Omega} (\rho_i \delta U_i + l r_i^A \delta V_i^A) dv , \quad \delta E_{ij} = \delta U_{(i,j)} ,$$

który winien być spełniony dla wszystkich funkcji testowych $\delta U_i, \delta V_i^A$ takich, że $\delta U_i = 0$ na $\bar{\Sigma}$. Równania (10.10) - (10.12) reprezentują ciągły model rozpatrywanej mikroperiodycznej struktury siatkowej.

10.5 MAKROMODELE Z EFEKTEM SKALI

Nie wprowadzając dodatkowych więzów dla makroprzemieszczeń, z warunku (10.12) otrzymamy w Ω równania

$$(10.13) \quad S_{ij,j} - \rho \ddot{U}_i + p_i = 0 , \\ l^2 \rho^{AB} \ddot{V}_i^B + H_i^A - l r_i^A = 0 ,$$

oraz na części brzegu $\partial\Omega \setminus \bar{\Sigma}$ naturalne warunki brzegowe

$$(10.14) \quad S_{ij} n_j = 0 ,$$

gdzie n_j jest wektorem jednostkowym normalnym zewnątrz do $\partial\Omega$. Na pozostałej części brzegu $\partial\Omega$ tj. na $\bar{\Sigma}$, zachodzi $U_i = 0$. Sformułowanie bardziej złożonej postaci warunków brzegowych nie przedstawia trudności; w szczególności zamiast (10.14) możemy przyjąć

$$(10.15) \quad S_{ij} n_j = f_i ,$$

gdzie f_i jest funkcją określającą w sposób uśredniony obciążenie węzłów siatki usytuowanych na części $\partial\Omega \setminus \bar{\Sigma}$ brzegu obszaru Ω .

Równania (10.10) -(10.13) nazwiemy odpowiednio równaniami geometrycznymi, równaniami konstytutywnymi i równaniami ruchu makromodelu mikroperiodycznej struktury siatkowej. Symetryczny tensor o składowych S_{ij} pełni tu rolę tensora makronaprężeń formalnie wprowadzonego ośrodka ciągłego (zajmującego w stanie nieodkształconym obszar Ω przestrzeni fizycznej). Ponieważ z (10.13)₂ wynika, że $H_i^A(x,t) \in D(L)$, przeto H_i^A nazwiemy siłami mikrostrukturalnymi, gdy ich wielkości zależą od parametru mikrostruktury L . Własności inercyjne i materiałowe uzyskanego na drodze makromodelowania ośrodka ciągłego są określone stałymi (10.8); z formalnego punktu widzenia ośrodek ten można więc nazwać makrojednorodnym. Ponadto zarówno stałe (10.8) jak i wielkości (10.9) charakteryzujące obciążenia nie zależą od parametru mikrostruktury, który występuje w postaci wyraźnej tylko w drugim z równań ruchu (10.13). Tym samym otrzymany ciągły model rozpatrywanej dyskretnej struktury punktów materialnych jest makromodelem opisującym efekt skali, tj. wpływ wielkości elementu strukturalnego na ruch układu.

Równania (10.10) -(10.13), po wyrugowaniu E_{ij} , S_{ij} , H_i^A , prowadzą do układu 3 równań różniczkowych cząstkowych 2-go rzędu dla makroprzemieszczeń U_i , sprzężonego z układem 3N równań różniczkowych zwyczajnych dla makroparametrów wewnętrznych V_i^A :

$$(10.16) \quad \begin{aligned} A_{ijkl} U_{k,lj} + B_{ijk}^A V_{kj}^A - \rho \ddot{U}_i + p_i &= 0, \\ l_2 \rho^{AB} \ddot{V}_i^B + C_{ij}^{AB} V_j^B + B_{jki}^A U_{j,k} - l r_i^A &= 0. \end{aligned}$$

W poszczególnych problemach układ (10.16) należy rozpatrywać łącznie z trzema warunkami brzegowymi dla makroprzemieszczeń U_i oraz z $6(N+1)$ warunkami początkowymi dla U_i , V_i^A . Niewiadome pola V_i^A zależą więc tylko od warunków początkowych,

co uzasadnia nadaną im nazwę makroparametrów wewnętrznych, jako zmiennych nie zależnych od warunków brzegowych. Zachodzi tu więc pełna analogia z nazewnictwem wprowadzonym w poprzednich rozdziałach. Przykłady warunków brzegowych dla U_i podano już na początku tego rozdziału.

Przy założeniu geometrycznej niezmienności badanej konstrukcji siatkowej można wykazać, że forma kwadratowa

$$(10.17) \quad \sigma = \frac{1}{2} A_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + B_{ijk} E_{ij} V_k^A + \frac{1}{2} C_{ij}^{AB} V_i^A V_j^B$$

jest dodatnio określona. Forma ta reprezentuje energię sprężystą makromodelu. Możliwe są jednak przypadki struktur siatkowych dla których $B_{ijk}^A = 0$. W przypadkach tych równania makromodelu rozdzielają się na układ równań dla makroprzemieszczeń U_i postaci

$$(10.18) \quad \begin{aligned} S_{ij,j} - \rho \ddot{U}_i + p_i &= 0, \\ S_{ij} &= A_{ijkl} E_{kl}, \\ E_{kl} &= U_{(k,l)}, \end{aligned}$$

oraz na niezależny układ równań dla makroparametrów wewnętrznych

$$(10.19) \quad l^2 \rho^{AB} \ddot{V}_i^B + C_{ij}^{AB} V_j^B = l r_i^A.$$

W przypadku gdy $r_i^A = 0$, to dla jednorodnych warunków początkowych $V_i^A(x,0) = 0$, $\dot{V}_i^A(x,0) = 0$, $x \in \Omega$, otrzymamy $V_i^A = 0$. Rozpatrywaną mikroperiodyczną strukturę siatkową, dla której $B_{ijk}^A = 0$, nazwiemy strukturą jednorodną; ciągły model odpowiedniej konstrukcji jest opisywany układem równań (10.18), który ma pod względem formalnym taką samą postać jak układ równań liniowej teorii sprężystości ciał jednorodnych i anizotropnych

powych. Modele ciągle jednorodnych konstrukcji siatkowych (kratownicowych) były niezależnie rozpatrywane w cyklu prac zebranych w monografii C. Woźniaka, 1970. Dla modeli takich zagadnienie efektu skali jest opisane niezależnym układem równań (10.19). Oznacza to, że dla jednorodnych struktur siatkowych ruch mikrooscylacyjny $h^{\alpha A} V_i^A(x, t)$ jest niezależny od makroruchu, określonego makroprzemieszczeniami $U_i(x, t)$. Rozwiązania i analizę różnych zagadnień szczególnych dla jednorodnych struktur siatkowych, przeprowadzoną na podstawie równań (10.18), można znaleźć w cytowanej powyżej monografii.

10.6 MAKROMODELE LOKALNE

Formalne przejście graniczne $l \rightarrow 0$ w równaniach (10.13) prowadzi do warunku $H_i^A = 0$ tj. do znikania sił mikrostrukturalnych. Z punktu widzenia mechaniki jest to równoznaczne z zaniedbaniem efektu skali na ruch rozpatrywanej mikroperiodycznej struktury siatkowej, a tym samym otrzymany model ciągły nazwiemy makromodelem lokalnym. Warunek $H_i^A = 0$, zgodnie z (10.11)₂, pozwala na wyrugowanie z układu równań makroparametrów wewnętrznych V_i^A . Z uwagi na dodatnią określoność formy kwadratowej (10.17) istnieje bowiem jednoznacznie określona wielkość o składowych D_{ij}^{AB} spełniających równania

$$D_{ij}^{AB} C_{jk}^{BC} = \delta_{ik} \delta^{AC},$$

co prowadzi do otrzymania z układu równań (10.11)₂ dla $H_i^A = 0$, rozwiązań postaci

$$V_i^A = - D_{ij}^{AB} B_{klj}^B E_{kl}$$

Po oznaczeniu

$$(19.20) \quad \tilde{A}_{ijkl} := A_{ijkl} - B_{ijm}^A D_{mn}^{AB} B_{kl}^B$$

pierwsze z równań (10.11) przyjmuje postać

$$(10.21) \quad S_{ij} = \tilde{A}_{ijkl} E_{kl} .$$

Równanie to wraz z równaniem ruchu

$$(10.22) \quad S_{ij,j} - \rho \ddot{U}_i + \rho p_i = 0$$

oraz równaniem geometrycznym (10.10), reprezentuje makromodel lokalny mikroperiodycznej konstrukcji siatkowej (typu kratownicy). Wielkości zdefiniowane wzorem (10.20) nazwiemy modułami efektywnymi. Dla jednorodnych struktur siatkowych, w sensie definicji podanej na końcu podrozdziału 10.4, mamy równość $\tilde{A}_{ijkl} = A_{ijkl}$. Łatwo zauważyć, że równania reprezentujące makromodel lokalny mają tę samą postać jak równania liniowej teorii sprężystości ciał jednorodnych i anizotropowych.

Przy badaniu poszczególnych problemów, równania (10.10), (10.21) i (10.22) należy rozpatrywać łącznie z warunkami brzegowymi oraz początkowymi dla makroprzemieszczeń.

Należy pamiętać, że rozwiązania zagadnień dotyczących rozpatrywanych struktur siatkowych tak w ramach makromodeli z efektem skali jak i makromodeli lokalnych mają sens fizyczny, tylko gdy pola $U_i(\cdot, t)$, $V_i^A(\cdot, t)$ są, dla każdej chwili t , dostatecznie regularnymi makrofunkcjami.

Dotychczasowe rozważania były prowadzone przy założeniu, że Ω jest obszarem trójwymiarowej przestrzeni parametryzowanej układem $Ox_1x_2x_3$. Niemniej jednak, wszystkie otrzymane rezultaty dotyczą również płaskich mikroperiodycznych struktur siatkowych; należy jedynie przyjąć, że Ω jest obszarem na płaszczyźnie Ox_1x_2 oraz wskaźniki i, j, k, \dots przebiegają ciąg 1, 2. Tym samym należy także założyć, że $x = (x_1, x_2)$ jest punktem płaszczyzny Ox_1x_2 .

10.7 PRZYKŁADY

Jako przykład rozpatrzmy problem drgań własnych (bądź podobny problem rozchodzenia się fali podłużnej) w strukturze siatkowej. Dla uproszczenia przyjmiemy kolumnową postać macierzy mikrokształtu kładąc $h^a = h^{a1}$ oraz $V_i = V_i^1$. Założmy ponadto, że płaszczyzny $x_i = \text{const.}$ są płaszczyznami symetrii sprężystej makromodelu, o własnościach sprężystych określonych współczynnikami formy kwadratowej (10.17). Dla fali rozchodzącej się w kierunku osi x_1 , przy nieobecności sił zewnętrznych, otrzymamy wtedy z (10.16) układ równań postaci

$$(10.23) \quad \begin{aligned} \rho \ddot{U}_1(x_1, t) - A_{1111} U_{1,11}(x_1, t) - B_{111} V_{1,1}(x_1, t) &= 0, \\ l^2 \rho^{11} \ddot{V}_1(x_1, t) + C_{11} V_1(x_1, t) + B_{111} U_{1,1}(x_1, t) &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu (10.23) przyjmujemy w postaci

$$(10.24) \quad U_1 = K_U \sin kx_1 \cos \omega t, \quad V_1 = K_V \cos kx_1 \cos \omega t,$$

gdzie K_U, K_V są dowolnymi stałymi, $K_U K_V \neq 0$, oraz $k := 2\pi/L$, gdzie L jest długością fali. Kładąc

$$A := A_{1111}, \quad B := B_{111}, \quad C := C_{11}, \quad \xi := \rho^{11}/\rho,$$

po podstawieniu prawych stron (10.24) do (10.23) otrzymujemy warunek

$$(10.25) \quad \begin{vmatrix} Ak^2 - \rho\omega^2 & kB \\ kB & C - l^2 \xi \rho \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Zauważmy, że rozwiązania układu (10.23) mają sens fizyczny tylko gdy $U_1(\cdot, t), V_1(\cdot, t)$ są makrofunkcjami dla każdej chwili t . W przypadku rozwiązań (10.24) zachodzi to, gdy $kl/L \ll 1$ a tym samym także $kl \ll 1$. Tym samym kl możemy traktować jako mały parametr.

Oznaczmy

$$D := \sqrt{AC - B^2} ,$$

przy czym z dodatniej określoności formy kwadratowej (10.17) wynika, że zawsze $AC - B^2 > 0$. Dla częstości drgań własnych ω otrzymamy wtedy z warunku (10.25) następujące wyrażenia asymptotyczne

$$(10.26) \quad \omega_L^2 = \frac{D^2}{\rho C} k^2 \left[1 - \mathcal{E} \left(\frac{B}{C} \right)^2 (kl)^2 \right] + \mathcal{O}((kl)^4) ,$$

$$\omega_H^2 = \frac{C}{l^2 \rho \mathcal{E}} + \frac{B^2}{\rho C} k^2 \left[1 + \mathcal{E} \left(\frac{D}{C} \right)^2 (kl)^2 \right] + \mathcal{O}((kl)^4) .$$

Z równań (10.26) wynika, że wpływ dyspersji dla niższych częstości drgań własnych ω_L jest związany z efektem skali.

Dla jednorodnych struktur siatkowych wyrażenia opisujące częstość drgań własnych (jak łatwo wykazać podstawiając $B=0$ do (10.25)) mają postać

$$(10.27) \quad \omega_L^2 = \frac{A}{\rho} k^2 , \quad \omega_H^2 = \frac{C}{l^2 \rho \mathcal{E}} .$$

W przypadku niższych częstości drgań nie występuje tu efekt dyspersji, co jest zgodne z sensem pojęcia "konstrukcja jednorodna", traktowanego w odniesieniu do proponowanego makromodelu tej konstrukcji.

Rozpatrując ten sam problem w ramach makromodelu lokalnego, zamiast równań (10.23) otrzymamy

$$\rho \ddot{U}_1(x_1, t) - \tilde{A}_{1111} U_{1,11}(x_1, t) = 0 ,$$

gdzie zgodnie z (10.20) oraz założoną symetrią sprężystą makromodelu mamy

$$\tilde{A}_{1111} = A_{1111} - \frac{(B_{11})^2}{C_{11}} .$$

Podstawiając do (10.27) rozwiązanie postaci $U_1 = K_0 \sin kx_1 \cos \omega t$, $K_0 \neq 0$, otrzymamy dla częstości drgań własnych wyrażenie

$$\omega^2 = \frac{\tilde{A}_{III}}{\rho} k^2,$$

kótre przy przyjętych poprzednio oznaczeniach ma postać

$$(10.28) \quad \omega^2 = \frac{D^2}{\rho C} k^2,$$

a więc stanowi asymptotyczne przybliżenie pierwszej z formuł (10.23).

10.8 WNIOSKI

Wynikające z powyższego przykładu wnioski są zbliżone do wniosków sformułowanych w zakończeniach poprzednich rozdziałów pracy. Przede wszystkim, na uwagę zasługuje możliwość otrzymania prostych wyrażeń analitycznych (10.26) dla częstości drgań własnych mikroperiodycznej konstrukcji siatkowej; wyrażenia te dotyczą całej klasy rozpatrywanych w pracy struktur. Własności materiałowe i geometria tych struktur, w ramach proponowanego makromodelu, są opisane modułami zdefiniowanymi wzorami (10.8). Porównując relacje (10.26) i (10.28) łatwo zauważyć, że model lokalny nie opisuje wprawdzie efektu dyspersyjnego lecz prowadzi do dobrego przybliżenia asymptotycznego dla niższej częstości drgań własnych ω_L . W ramach modelu lokalnego nie można natomiast wyznaczyć wyższych częstości drgań własnych ω_H , które są tu określone wzorem (10.26)₂. Należy zaznaczyć, że celem uproszczenia formalnych rachunków, w przedstawionym przykładzie wprowadzono do analizy jednokolumnową macierz mikrokształtu a tym samym tylko jeden makroparametr wewnętrzny. Bardziej wszechstronna analiza, odnosząca się zwłaszcza do konstrukcji o złożonej budowie elementu strukturalnego, wymaga stosowania większej liczby makroparametrów wewnętrznych do opisu mikrodynamiki konstrukcji siatkowych. Zauważmy także, że przedstawiona tu metoda formułowania ciągłych modeli

periodycznych konstrukcji siatkowych umożliwiła wyróżnienie klasy struktur jednorodnych. Dla częstości drgań własnych takich struktur otrzymano proste formuły (10.27). W przypadku tym niższe częstości drgań własnych są równe częstościom drgań własnych otrzymanych w ramach makromodelu lokalnego.

Z A K O Ń C Z E N I E

Przedstawiona w tej monografii synteza prac (1,3,6,29,37, 43 - 46,60,62,63,65,79-93), dotyczących nowego pojęcia do zagadnień dynamiki struktur periodycznych, pozwala na sformułowanie pewnych ogólnych konkluzji.

Po pierwsze, proponowana metoda makromodelowania kompozytów ma dość uniwersalny charakter. Została ona zastosowana do formułowania modeli obliczeniowych zarówno w zakresie zagadnień liniowych jak i nieliniowych, w tym również do opisu odkształceń skończonych. Wprawdzie większość rozdziałów dotyczy materiałów sprężystych, jednak samą metodę modelowania można także zastosować do niesprężystych materiałów prostych, co pokazano w rozdziale 3 oraz 5.6. Uogólnienie rozważań na pola niemechaniczne jest również możliwe, na co wskazuje podejście do problemów termosprężystości kompozytów omówione w rozdziale 4. Ponad to zaproponowaną metodę wykorzystano nie tylko do modelowania materiałów kompozytowych lecz także do analizy elementów konstrukcyjnych o periodycznej budowie, takich jak niejednorodne płyty oraz powłoki periodycznie pofalowane, jak również do formułowania modeli ciągłych struktur dyskretnych. Spotykane w literaturze metody modelowania kompozytów nie mają tak szerokiego zasięgu.

Po drugie, otrzymane modele struktur periodycznych opisują efekt skali, tj. wpływ wielkości elementu reprezentatywnego struktury na ruch układu. Efekt ten, odgrywa istotną rolę w wielu zagadnieniach dynamiki co wykazano wprowadzając

równoległe modele asymptotyczne (nazwane także lokalnymi) i przeprowadzając analizę porównawczą wyników uzyskiwanych w ramach obu modeli. Warto tu zaznaczyć, że większość modeli kompozytów periodycznych znanych w literaturze to modele typu asymptotycznego, pomijające omawiany efekt.

Po trzecie, równania reprezentujące poszczególne makromodely mogą być efektywnie zastosowane do analizy zagadnień inżynierskich, stanowiąc punkt wyjścia do obliczeń numerycznych. Stwierdzenie to jest ściśle związane z wprowadzoną nader istotną koncepcją makroparametrów wewnętrznych, jako dodatkowych niewiadomych opisujących mikrodynamikę badanych materiałów i elementów konstrukcji. Parametry te spełniają układ równań różniczkowych zwyczajnych, tj. są niezależne od warunków brzegowych, mają jasną interpretację fizyczną, a dla procesów quasistacjonarnych mogą być zwykle wyeliminowane z układu równań, co prowadzi do znanej koncepcji modułów efektywnych. W związku z tym omawiane modele dynamiki struktur mikroperiodycznych można nazwać modelami z makroparametrami wewnętrznymi. Z punktu widzenia zastosowań teorii główną cechą koncepcji makroparametrów wewnętrznych jest jednak możliwość opisu dynamiki kompozytów (z uwzględnieniem efektu skali) w stosunkowo prostej analitycznej postaci. Sytuacja taka nie zachodzi w przypadku znanych w literaturze modeli, opisujących efekt skali za pomocą ośrodków ciągłych z dodatkowymi stopniami swobody.

Po czwarte, formułowanie równań makromodeli kompozytów i struktur periodycznych w poszczególnych problemach nie przedstawia trudności analitycznych. Sprowadza się ono tylko do wyznaczania pewnej liczby stałych opisujących makrowłasności struktury ciała i nie wymaga np. rozwiązywania zagadnień brzegowych lub brzegowo- początkowych na komórce kompozytu, co jest typowe dla wielu znanych w literaturze modeli asymptotycznych. Z drugiej jednakże strony, formu-

łowanie makromodeli zagadnień dynamiki w ramach proponowanych procedur zawiera elementy heurystyki, wymagając specyfikacji pewnej klasy zaburzeń ruchu, które wprowadzany model ma opisywać. Jest to związane z koniecznością postulowania tzw. funkcji mikrokształtu (lub macierzy mikrokształtu w układach dyskretnych), opisujących te zaburzenia od strony jakościowej. Mówiąc ogólnie, w ramach proponowanej mikrodynamiki kompozytów opisujemy to co przewidujemy. Zastosowania inżynierskie modeli z makroparametrami wewnętrznymi obejmują problemy dynamiki i badanie procesów niestacjonarnych w materiałach niesprężystych. W ramach zagadnień statyki modele te redukują się bowiem do tzw. modeli z parametrami mikrolokalnymi, które były omawiane i stosowane między innymi w pracach (4,5,7-27, 30-42,47-59,61,64,66-78), tj. mają już dosyć bogatą literaturę. Makroparametry wewnętrzne dają możliwość analizy kompozytów i konstrukcji periodycznych uwzględniającej wpływ mikrostruktury (jako struktury elementu reprezentatywnego) na dynamikę całego ciała, na co wskazują przykłady zastosowań teorii podane w tym opracowaniu. Warto zauważyć , że omawiana metoda ma charakter adaptacyjny (w sensie np. adaptacyjnych metod elementów skończonych) tj. może być formułowana na różnym poziomie dokładności opisu zjawiska. Jest to realizowane przez wprowadzanie większej lub mniejszej liczby postulowanych funkcji mikrokształtu, prowadząc do modeli z większą lub mniejszą liczbą makroparametrów wewnętrznych. Wprowadzenie pojęcia makrofunkcji wraz z związaną z tym pojęciem dokładnością numeryczną, umożliwia, po rozwiązaniu problemu, ocenić jego dokładność i ewentualnie przeprowadzić modyfikację stosowanego modelu kompozytu. Ten aspekt proponowanego podejścia nie był jednak dotychczas badany i stanowi jedną z możliwości rozwoju teorii i jej zastosowań inżynierskich. Z pośród prowadzonych obecnie badań, które nie

zostały wymienione w przedstawionym tu opracowaniu monograficznym, należy wymienić prace nad dynamiką powłok falistych o małej wyniosłości, zagadnieniami dynamiki dużych ugięć i stateczności płyt o strukturze periodycznej a także modelowanie dynamiki płyt siatkowych oraz struktur dyskretnych w których występują elementy (pręty) także zginane i skręcane. Otwartymi problemami są: rozszerzenie zakresu stosowalności modeli z makroparametrami wewnętrznymi na struktury zbliżone do periodycznych oraz na materiały kompozytowe nie proste, zwłaszcza sprężysto-plastyczne a także z tym związane uogólnienie rozważań na problemy termodynamiki. Problemy te stanowią perspektywę dalszych badań, przy czym efektywność koncepcji makroparametrów wewnętrznych w dynamice struktur periodycznych, wykazana w tym opracowaniu, daje nadzieję na uzyskanie wyników przydatnych w zakresie teorii i zastosowań inżynierskich.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE *)

A. LITERATURA PODSTAWOWA

1. BARON E., WOŹNIAK, C., On the micro-dynamics of composite plates, Arch. Appl. Mech., 65, 1995 w druku.
2. BIELSKI W. and MATYSIAK S.J. Surface waves in a periodic two-layered elastic half-space, Acta Mech., 91, 1992, 45-55
3. CIELECKA I., On the continuum the dynamic behaviour of certain composite lattice-type structures, J.Theor. Appl.Mech., 33, 1955, 351-360.

*) Literatura podstawowa obejmuje tylko pozycje ściśle związane z metodami stosowanymi w niniejszej monografii, w tym te prace z zakresu dynamiki kompozytów, które stanowią podstawę opracowania. Pozostałe pozycje, na które powoływano się w tekście, podano w literaturze uzupełniającej. Wykaz ten jest daleki od bogatej bibliografii mechaniki kompozytów, którą można znaleźć w cytowanych opracowaniach monograficznych.

4. JAKUBOWSKA M.E. and MATYSIAK S.J. , Propagation of plane harmonic waves in periodic multilayered elastic composites, *Studia Geotechnica and Mechanica* 9, 1978, 17-25.
5. JEVTUSENKO A.A., KACZYŃSKI A., and MATYSIAK S.J., Stresses in a layered elastic composite with inclusion (w języku rosyjskim), *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, złożona do publikacji.
6. JĘDRYSIAK J. and WOŹNIAK C. , On the elastodynamics of thin microperiodic plates, *J. Theor. Appl. Mech.*, 33, 1995, 337-350.
7. KACZYŃSKI A. , Stress intensity factors for an interface crack in a periodic two-layered composite under the action of heat sources, *Int. J. Fract.*, 62, 1993, 183-202.
8. KACZYŃSKI A. , On the three-dimensional interface crack problems in periodic two-layered composites, *Int.J.Fract.*, 62, 1993, 283-306.
9. KACZYŃSKI A. , Three -dimensional thermoelastic problems of interface cracks in periodic two-layered composites, *Eng. Fract. Mech.*, 48, 1994, 783-800.
10. KACZYŃSKI A. and MATYSIAK S.J., The influence of microlocal effects on singular stress concentrations in periodic two -layered elastic composites, *Bull. Pol. Ac.: Tech. Sci.*, 35, 1987, 371-382
11. KACZYŃSKI A. and MATYSIAK S.J., Complex potentials in two-dimensional problems of periodically layered elastic composites, *J. Theor. Appl. Mech.* , 25, 1987, 635 -643
12. KACZYŃSKI A. and MATYSIAK S.J., Some boundary problems of periodic two-layered elastic composites, in: *First Conference on Mechanics* (eds. Nemeč J., Skrucany R.), Praha, 1987, 3, 199-202.
13. KACZYŃSKI A. and MATYSIAK S.J., Plane contact problems of periodic two-layered elastic composite, *Ing. Arch.*, 58, 1988, 137-147.
14. KACZYŃSKI A. and MATYSIAK S.J., On the complex potentials of the linear thermoelasticity with microlocal parameters. *Acta Mech.*, 72, 1988, 245-259.

15. KACZYŃSKI, A. and MATYSIAK, S.J., On crack problems in periodic two - layered composites, *Int. J. Fract.*, 37, 1988, 31-45.
16. KACZYŃSKI, A. and MATYSIAK, S.J., Thermal stresses in a laminate composite with a row of interface cracks, *Int. J. Engng Sci.*, 27, 1989, 131-147.
17. KACZYŃSKI, A. and MATYSIAK S. J., System of interface cracks in a periodically layered elastic composite, *Eng. Frac. Mech.*, 32,1989,745-756
18. KACZYŃSKI, A. and MATYSIAK, S.J., On the stress distribution in a periodic reinforced elastic composite with partially unbonded fiber, *Eng. Frac. Mech.*, 39. 1991, 745-756
19. KACZYŃSKI, A. and MATYSIAK,S.J., Thermal stresses in a periodic two-layered composites weakened by a row of interface cracks, in: *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, Longman Sci. and Techn. (eds Sneider W., Troger H., Ziegler F.), 1991, 328-332.
20. KACZYŃSKI,A. and MATYSIAK, S.J., On the homogenized model of periodic reinforced elastic composites, in: *Proceedings of the Symposium "Mechanics of Polymer Composites"*, Praha, 1991, 209 - 214
21. KACZYŃSKI A. and MATYSIAK, S.J., Influence of a concentrated body force on an interface crack in periodic two- layered elastic space, *Bull. Pol. Ac.: Tech.Sci.*, 41, 1993 , 67-78
22. KACZYŃSKI A. and MATYSIAK, S.J., Rigid sliding punch on a periodic two-layered elastic half- space, *J. Theor. Appl. Mech.*, 31, 1993, 295 -305.
23. KACZYŃSKI A. and MATYSIAK S.J., Analysis of stress intensity factors in crack problems of periodic two-layered elastic composites, *Acta Mech.*, 107, 1994, 1-16
24. KACZYŃSKI,A. MATYSIAK, S.J., and PAUK, V.J., Griffith crack in a laminated elastic layer, *Int. J. Frac.*, 67,1994, R81-R86.

25. KACZYŃSKI, A. , MATYSIAK, S.J. and PAUK, V.J., Stress intensity factors for an interface penny-shaped crack in laminated elastic layer, *J. Theor. Appl. Mech.*, 33,1995, in the course of publication
26. KONIECZNY, S. WOŹNIAK C., Corrected 2D-theory for composite plates, *Acta. Mech.*, 103,1944, 145-155
27. KONIECZNY. S., WOŹNIAK C. and WOŹNIAK M., A contribution to the modelling of macro-heterogeneous composites, *J. Theor. Appl. Mech.*, 32,1994,323-330.
28. KONIECZNY,S., WOŹNIAK C. and WOŹNIAK M., Dynamics and stability of laminated plates with interlaminar imperfections, *Eur. J. Mech.*, 14, 1995 w druku.
29. KONIECZNY S., WOŹNIAK M., On the wave propagation in fibre-reinforced composites, *J. Theor. Appl. Mech.*, 33,1995, 375-384
30. LEWIŃSKI T., On the interrelation between microlocal parameter and homogenization approaches to the periodic elastic solids, *Bull. Pol. Ac.: Tech.Sci.*, 35,1987, 383-391
31. MATYSIAK S.J., Thermal stresses in a periodic two-layered composites weakened by an interface crack, *Acta Mech.* 78.1989, 95-108.
32. MATYSIAK S.J., On certain problems of heat conduction in periodic composites, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik* , 71, 1991, 524-528.
33. MATYSIAK S. J., On the homogenized model of periodic stratified fluid-saturated porous solids, *Int.J.Engng Sci.*,30, 1992, 729-737.
34. MATYSIAK S.J., Homogenized thermoconsolidation with microlocal parameters of periodic stratified fluid-saturated porous solids, *J. Theor. Appl. Mech.*, 2 1994, 363-376
35. MATYSIAK S.J. and NAGÓRKO. W., Microlocal parameters in a modelling of microperiodic multilayered elastic plates, *Ing Arch.*, 59, 1989, 434-444

36. MATYSIAK S.J. and NAGÓRKO W., On the problem of micro-periodic multilayered elastic plates, Mech. Res. Comm., 15, 1989, 389-396
37. MATYSIAK S.J. and NAGÓRKO W., On the wave propagation in periodically laminated composites, Bull. Pol. Ac. Sci.: Tech. Sci., 43, 1995 w druku.
38. MATYSIAK S.J. and PAUK V., Some problems of stress distribution in a periodic stratified elastic stratum J. Theor. Appl. Mech., 41, 1993, 795-811
39. MATYSIAK S.J., and WĄGROWSKA M., Certain axially symmetric problems of heat conduction in laminated bodies, Bull. Pol. Ac. Sci.: Tech. Sci., 35, 1987, 393-392
40. MATYSIAK S.J., and WOŹNIAK C., On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies, Acta Mech., 63, 1986, 223-238
41. MATYSIAK S.J., and WOŹNIAK C., Microlocal effects in the nonstandard modelling of periodic composites, Proceedings of Euromech. 214, The mechanical behaviour of composites and laminates, Elsevier Appl. Sc. Publ. Ltd. , 1986, 147- 159
42. MATYSIAK S.J. and WOŹNIAK C., Micromorphic effects in a modelling of periodic multilayered elastic composites, Int. J. Engng Sci., 25, 1987, 549-559
43. MAZUR-ŚNIADY K., Macro-dynamics of micro-periodic elastic beams, J. Theor. Appl. Mech., 31, 1993, 781-793
44. MICHALAK B., WOŹNIAK C. and WOŹNIAK M., The dynamic modelling of elastic wavy-plates, Arch. Appl. Mech., 65, 1995 w druku
45. MIELCZAREK B. and WOŹNIAK C., On the dynamic modelling of fibrous composites, J. Tech, Phys., 36. 1995. 103-111
46. MIELCZAREK B. and WOŹNIAK C., On the micro-dynamics of periodic composite materials, przesłane do publikacji
47. NANIEWICZ Z., On the homogenized elasticity with microlocal parameters, Bull. Pol Ac. Sci.: Tech. Sci., 35 1987, 399-409

48. NANIEWICZ Z., On some nonmonotone subdifferential boundary conditions in elastostatics, *Ing. Arch.*, 60, 1989, 31-40
49. NANIEWICZ Z., On the noncoercive problems related to delamination in layered composites, in: *Nonsmooth Optimization, Methods and Applications*, Ed. F. Giannesi, Gordon and Breach Sci. Publ., USA, 1962
50. NANIEWICZ Z., On the existence of solutions to the continuum model of delamination, *Nonl. Anal. Theory, Meth Appl.*, 20, 1993, 481-507
51. NANIEWICZ Z. and PANAGIOTOPOULOS P.D., *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*, Pure and Applied Mathematics, Dekker, 1995, New York-Basel-Hongkong
52. NANIEWICZ Z. and WOŹNIAK C., On the quasi-stationary models of debonding process in layered composites, *Ing. Arch.*, 58, 1988, 403-412
53. WĄGROWSKA M., On certain solutions in the theory of plasticity with microlocal parameters, *Proc. Euromech 214: The Mechanical Behaviour of Composites and Laminates*, Elsevier, London 1986, 219-225
54. WĄGROWSKA M., Certain solutions to axially-symmetric problems in the linear elasticity with microlocal parameters, *Bull. Pol. Ac. Sci.: Tech. Sci.*, 35, 1987, 153-162
55. WĄGROWSKA M., On the homogenization of elastic-plastic periodic composites by the microlocal parameter approach, *Acta Mech.*, 67, 1988, 45-65
56. WĄGROWSKA M., A nonstandard approach to the micromodelling of large deformations in incompressible elastic-plastic composites, *Ing. Arch.*, 59, 1989, 68-77
57. WĄGROWSKA M., Some problems of elastic-viscoplastic multilayered composites, *J. Theor. Appl. Mech.*, 30, 1992, 123-140
58. WĄGROWSKA M., and WOŹNIAK C., On the constitutive modelling of elastic-plastic micro-periodic materials, *J. Theor. Appl. Mech.*, 28, 1990, 289-298

59. WĄGROWSKA M. and WOŹNIAK C., On the formulation of the limit analysis problems for micro-periodic composite materials, ZAMM, 72 1992, 221-223
60. WĄGROWSKA M. and WOŹNIAK C., Macro-modelling of dynamic problems for visco-elastic composite materials, Int. J. Engng. Sci., w druku
61. WIERZBICKI E., On the effective modulae in the microlocal models of elastic periodic composites, J. Theor. Appl. Mech., 27, 1989, 33-40
62. WIERZBICKI E., On the wave propagation in micro-periodic elastic media, Bull. Ac. Pol.: Tech., 41, 1993, 323-327
63. WIERZBICKI E., Nonlinear macro-micro dynamics of laminated structures, J. Theor. Appl. Mech., 33, 1995, 1-17
64. WIERZBICKI E. and WOŹNIAK C., On the modelling of non-periodic multilayered elastic composites, Arch. Mech., 43, 1991, 311-327
65. WIERZBICKI E., WOŹNIAK C. and WOŹNIAK M., Finite rotations in the refined macrodynamics of elastic composites, J. Theor. Appl. Mech., 33, 1995, 15-25
66. WOŹNIAK C., Nonstandard analysis and micromorphic effects in multilayered elastic composites, Arch. Mech., 43, 1991, 311-327
67. WOŹNIAK C., Micromorphic aspects of finite deformations in the light of nonstandard analysis, in: Physical Basis and Modelling of Finite Deformations of Aggregates, Elsevier, London, 1986
68. WOŹNIAK C., A nonstandard method of modelling of thermo-elastic periodic composites, Int. J. Engng Sci., 25 1987, 133- 141
69. WOŹNIAK C., Homogenized thermoelasticity with microlocal parameters, Bull. Ac. Pol.: Tech., 35, 1987, 133-141
70. WOŹNIAK C., On the linearized problems of thermoelasticity with microlocal parameters, Bull. Ac. Pol.: Tech., 35, 1987 143-151

71. WOŹNIAK C., Mathematical modelling of delamination effects in layered composites, Arch. Mech., 40, 1988, 871-884
72. WOŹNIAK C., Nonstandard modelling of certain quasistationary debonding processes in laminates, in: Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, Springer, Berlin-Heidelberg, 1988, 186-192
73. WOŹNIAK C., On the modelling of thermo-unelastic periodic composites microlocal parameter theory, Acta Mech., 80, 1989, 81-94
74. WOŹNIAK C., Discrete and continuum modelling of delamination processes, Ing. Arch., 60, 1990, 335-344
75. WOŹNIAK C., On the micromechanical modelling of solids. An application of Ω -calculus, in: Application of Mathematics to Mechanics, Longman Sci. and Tech., 1990
76. WOŹNIAK C., Macro-modelling of thermo-unelastic composites, Arch. Mech., 43, 1991, 67-80
77. WOŹNIAK C., On the formation of computational models for thermo-elastic-inelastic composites, ZAMM, 72, 1992, 223-225
78. WOŹNIAK C., Heterogeneity in mechanics of composite structures, J. Theor. Appl. Mech., 30, 1992, 519-533
79. WOŹNIAK C., Refined macrodynamics of periodic structures, Arch. Mech., 45, 1993, 295-304
80. WOŹNIAK C., Micro-macro dynamics of periodic material structures, in: Structural Dynamics, Eurodyn '93, Balkena, Rotterdam, 1993, 573-575
81. WOŹNIAK C., Macro-dynamics of elastic and viscoelastic micro-periodic composites, J. Theor. Appl. Mech., 1993, 763-770
82. WOŹNIAK C., Nonlinear macro-elastodynamics of microperiodic composites, Bull. Ac. Pol.: Tech., 31, 1993, 315-321
83. WOŹNIAK C. Microdynamics: continuum modelling the simple composite materials, J. Theor. Appl. Mech., 33, 1995, 267-289.

84. WOŹNIAK C., WIERZBICKI E. and WOŹNIAK M., Thermal stresses in elastodynamics of composite materials, przesłane do publikacji
85. WOŹNIAK C. and WOŹNIAK M., On the effect of interface micro-cracks on interactions in stratified media, *Int. J. Fract.*, 66, 1994, 165-172
86. WOŹNIAK C. and WOŹNIAK M., On the micro-modelling of dynamic response for thermoelastic periodic composites, in: *Proc. IUTAM Symp. Microstructure Properly Interaction in Composite Materials*, Aalborg 1994, in the course of publication
87. WOŹNIAK C., WOŹNIAK M. and BACZYŃSKI Z., Effect of interlaminar imperfections on a behaviour of laminated plates, *Arch. Appl. Mech.*, 63, 1994, 286-293
88. WOŹNIAK C., WOŹNIAK M. and BACZYŃSKI Z., Modelling of nonstationary heat conduction problems in micro-periodic composites, przesłane do publikacji
89. WOŹNIAK C., WOŹNIAK M., and KONIECZNY S., A note on dynamic modelling of periodic composites, *Arch. Mech.*, 45, 1993, 779- 793
90. WOŹNIAK M., On 2D-models of stratified subgrades, *J. Theor. Appl. Mech.* 1994, 689-700
91. WOŹNIAK M., Averaged formulation of nonstationary problems for stratified porous media, *J. Theor. Appl. Mech.*, 33, 401-414
92. WOŹNIAK M., On the dynamic behaviour of micro-damaged stratified media *Int.J. Fract.*, w druku
93. WOŹNIAK M., WOŹNIAK C., Laminated media with interface defects, *ZAMM*, 1995, S171-S172

B. LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- ABOUDI, J., *Mechanics of composite materials: a unified micromechanical approach*, Elsevier, Amsterdam, 1991
- ABOUDI, J., *Generalized effective stiffness theory for the*

- modelling of fibre reinforced composites, Int.J. Solids Structures, 17, 1981, 1005-1018
- ACHENBACH, J.D., HERRMANN, G., Wave motions in solids with lamellar structuring, "Dynamics of Structured Solids" (ed. G. Herrmann), Am. Soc. Mech. Eng., New York, 1968
- BAKHVALOV, N.S., PANASENKO, G.P., Osrednenie processov v periodičeskich sredach, Nauka Moskva, 1984
- BEDFORD, A., STERN, M., A multi - continuum theory for composite elastic materials, Acta Mech., 14, 1972,85-102
- BENSOUSSAN, A., LIONS, J.L., PAPANICOLAOU, G., Asymptotic analysis for periodic structures, North -Holland, Amsterdam, 1978
- BROUTMAN, L.J., KROCK, R.H. (eds.), Composite materials, Vol.1-8, Academic Press, New York, 1973-76
- CAILLERIE, D., Thin elastic and periodic plates, Math. Meth. Appl. Sci., 6, 1984, 159-191
- ĆEREPAŃOV, G.P., Mechanika kompozicionnych materialov, Nauka, Moskva, 1983
- CHRISTENSEN, R.M., Mechanics of composite materials, J. Wiley, New York , 1982
- CIORANESCU, D., SAINT PAULIN, J., Asymptotic techniques to study tall structures, "Trends in Applications of Mathematics to Mechanics", Longman, Harlow, 1991
- DUVAUT, G., METELLUS, A.M., Homogénéisation d'une plaque mince en flexion des structure périodique et symétrique, C.R.Acad.Sci., Paris, 283 (A), 1976,947-950
- ERINGEN, A.C., SUHUBI, E.S., Nonlinear theory of simple elastic solids, Int.J. Engng Sci., 2, 1964, 189-203, 389-404
- GREEN, A.E., NAGHDI, P.M., A dynamical theory of interacting continua, Int. J. Engng Sci., 3, 1965, 231-241
- GREEN, A.E., STEEL, T.R., Constitutive equations for interacting continua, Int. J. Engng Sci., 4, 1966, 483-500

- GRROTI, R.A., ACHENBACH, J.D., Large deformations of a laminated composite, *Int.J.Solids Structures*, 5, 1970, 641-661
- GGUZ', A.N., (red.), *Mechanika kompozitnych materialov konstrukciji*, Nauk. Dumka, Kiev, 1982-83
- GGUZ', A.N., (red.), *Mechanika kompozitov*, Nauk. Dumka, Kiev, 1993
- HAASHIN, Z., Analysis of composite materials - a survey. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50, 1983, 481-505
- HHEGEMIER, G.A., On a theory of interacting continua for wave propagation in composites, "Dynamics of Composite Materials" (ed, E.H.Lee), *Am. Soc. Mech. Eng.*, New York, 1972
- JOONES, R., *Mechanics of composite materials*, Mc Graw-Hill, New York, 1975
- KKOHN, R.V., VOGELIUS, M., A new model for thin plates with rapidly varying thickness, *Int.J. Solids Structures*, 20, 1984, 333-350
- LLEWIŃSKI, T., Homogenized stiffnesses of plates with periodic structure, *Int. J. Solids Structures*, 21, 1992, 309-326
- MMINDLIN, R.D., Microstructure in linear elasticity, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16, 1964, 51-78
- NNEMAT -NASSER, S., HORI, M., *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland, Amsterdam, 1993
- PPOBEDRIA, B.J., *Mechanika kompozicionnych materialov*, Izd. Mosk. Univ., Moskva, 1984
- SSANCHEZ-PALENCIA, E., Non-homogeneous media and vibration theory, *Lecture Notes in Physics*, 127, Springer, Berlin 1980
- SSANCHEZ-PALENCIA, E., ZAOUJ, S., Homogenization technics for compsite media, *Lecture Notes in Physics*, 272, Springer, Berlin, 1985

- ŚLUGA, N.A., Osnovy mechaniki sloistych sred periodičeskoj struktury, Nauk. Dumka, Kiev, 1981
- STEEL, T.R., Applications of theory of interacting continua, Quart. J. Mech. Appl. Math., 20, 1967, 57-72
- SUN, C.T., ACHENBACH, J.D., HERRMANN, G., time-harmonic waves in a stratified medium propagating in the direction of the layering., J. Appl. Mech., 35, 1968, 408-411
- TIERSTEN, H.F., JAHANMIR, M., The theory of composites modelled as interpenetrating solid continua, Arch. Rat. Mech. Anal., 65, 1977, 153-192
- TOLF, G., On dynamical description of fibre reinforced composites, "New Problems in Mechanics of Continua" (eds. Brulin and Hsieh), Waterloo Press, Study No-17, 1983, 145-159
- VANIN, G. A., Mikromechanika kompozicionnych materialov, Nauk. Dumka, Kiev, 1985
- WOŹNIAK, C., Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych, PWN, Warszawa, 1969,
- WOŹNIAK, C., Siatkowe dźwigary powierzchniowe, PWN, Warszawa, 1970
- WOŹNIAK, C., Composite mechanics: a unified modelling of periodic materials and structures, przygotowane do publikacji
- WOŹNIAK, C., BACZYŃSKI, Z.F., WOŹNIAK, M., Modelling of non-stationary heat conduction problems in micro-periodic composites, ZAMM, w druku
- ZÓRAWSKI M., Transverse wave in reinforced materials, "New Problems in Mechanics of Continua" (eds. Brulin and Hsieh), Waterloo Press, Study No-17., 1983 161-169

56584

