Andrzej J. Turski

NIELINIOWE ODDZIAŁYWANIE WIELOSKŁADNIKOWEJ PLAZMY Z ZABURZENIAMI NIESTACJONARNYMI FALE PODŁUŻNE

WARSZAWA 1980

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 182

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 grudnia 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 51/1980

IPPT PAN

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 190 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark.druk. 1,25
Oddano do drukarni w grudniu 1980 r.
Nr zamówienia 797/o/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa, ul.Śniadeckich 8

Andrzej J.Turski
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

NIELINIOWE ODDZIAŁYWANIE WIELOSKŁADNIKOWEJ PLAZMY Z ZABURZENIAMI NIESTACJONARNYMI FALE PODŁUŻNE

NONLINEAR INTERACTION OF MULTICOMPONENT PLASMAS WITH NON-STATIONARY DISTURBANCES LONGITUDOLINAL WARES

1. Wstęp

Badanie zjawisk falowych plazmy przestrzeni międzyplanetarnej a w szczególności jonosfery i magnetosfery prowadzone są przy pomocy systematycznych pomiarów satelitarnych i rakietowych "in situ" oraz przy pomocy naziemnych obserwacji zjawisk plazmowych za pośrednictwem fal elektromagnetycznych, np. sondowanie radarowe strefy zorzy polarnej, obserwacji radiogwizdów i fal radiowych.

Interpretacja otrzymanych wyników napotyka na podstawowe trudności wynikające z niedostatków teorii opisujących zjawiska falowe w plazmie a w szczególności niestacjonarne zaburzenia i wpływ nieliniowości ośrodka. Celem tej pracy jest przedstawienie i analiza równań całkowych na pole elektryczne nieliniowych fal podłużnych wieloskładnikowej plazmy w przybliżeniu Własowa. Równania te opisują nieliniowe oddziaływanie plazmy z zaburzeniami niestacjonarnymi i dostarczają informacji o rozpraszaniu i transmisji liniowych i nieliniowych fal w bezzderzeniowej i izotropowej plazmie a w szczególności fal jonowo-akustycznych.

2. Równanie na pole elektryczne wieloskładnikowej plazmy Własowa.

Analiza stacjonarnych fal jonowo-akustycznych opiera się na równaniu Poissona dla potencjału elektrycznego, gdzie gęstość rozkładu jonów i elektronów zależną od tego potencjału wyznacza się z równań Własowa lub opisu dwupłynowego. Istotnym przybliżeniem tego opisu jest przyjęcie "zimnych" jonów, tzn. jonów nie podlegających ruchom cieplnym ale podlegających wolnym ruchom wywołanymi polem elektrycznym oraz przyjęciu termicznych elektronów. Rozważa się więc dwuskładnikową plazmę złożoną z ciężkich jonów i lekkich elektronów. W wyniku otrzymuje się fale okresowe knoidalne, pojedyńcze solitony i bezzdrzeniowe fale uderzeniowe.

Opis niestacjonarny polega na sprawdzeniu równań "zimnego" płynu jonowego i termicznego płynu elektronowego do równań Boussinesqa lub Kortewega de Vriesa [1] . Równania te opisują również nieliniowe fale na płytkiej wodzie i rozwiązania niestacjonarnych problemów dla tych równań prowadzą np. do określenia zjawisk oddziaływania solitonów.

Zadaniem pracy jest sprowadzenie problemu początkowego dla równań całkowo-różniczkowych Własowa - Maxwella do równań całkowych opisujących niestacjonarne pole elektryczne będące odpowiedzią plazmy na zadane zaburzenie. Równania Własowa - Maxwella opisują ośrodek o słabym sprzężeniu, tj. w szczególności plazmę przestrzeni międzyplanetarnej. Zajmiemy się plazmą wieloskładnikową, o dowolnym stanie równowagi $f_{0\alpha}$ składników $\alpha = 1, 2 \ldots N$. W szczególności może to być plazma jonowo-elektronowa o dowolnej temperaturze jonów i elektronów w stanie równowagi.

Pole elektryczne zależne od czasu t i jednej zmiennej przestrzennej - x /fale podłużne/, spełnia następujące równania, [2] :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} u = - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E \frac{\partial f_\alpha}{\partial u} \tag{1}$$

/2/ $\varepsilon_0 E_t + I = 0, \quad \nabla \times \underline{E} = 0, \quad \underline{E} = -\nabla\varphi$

/3/ $$I = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u f_{\alpha}(u;x,t)\,du, \quad \underline{v} = (\underline{v}_{\perp}, u)$$

gdzie $f_{\alpha} = f_{\alpha}(u;x,t)$ jest funkcją rozkładu prędkości cząstek typu α o masie m_{α} i ładunku q_{α} oraz $I = I(x,t)$, $E = E(x,t)$ i $\varphi = \varphi(x,t)$ są odpowiednio gęstością prądu, polem i potencjałem elektrycznym.

Przedstawimy f_{α} w postaci następującego rozwinięcia

/4/ $$f_{\alpha} = N_{0\alpha} f_{0\alpha} + f_{1\alpha} + f_{2\alpha} + \ldots + f_{n\alpha} + \ldots$$

gdzie $f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(u)$ jest rozkładem równowagowym, $N_{0\alpha}$ - koncentracją równowagową cząstek α i $f_{n\alpha}$ zaburzeniem funkcji rozkładu rzędu E^n [3], [4]. Podstawiając /4/ do /1/, otrzymujemy następującą hierarchię równań:

/5/ $$\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial t} + u\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial x} = -\frac{N_{0\alpha}}{m_{\alpha}} q_{\alpha} E \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial u}$$

/6/ $$\frac{\partial f_{2\alpha}}{\partial t} + u\frac{\partial f_{2\alpha}}{\partial x} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E \frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial u}$$

....

Ograniczymy się do rozpatrywania nieliniowości drugiego stopnia. Rozwiązanie problemu początkowego rów. /5/, zapiszemy

$$/7/ \quad f_{1\alpha}(u;x,t) = g(u;x-ut) - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} N_0 f'_{0\alpha}(u) \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 E(x_1,t_1)\,\delta(x-x_1-u(t-t_1))$$

gdzie $f_{1\alpha}(u;x,0) = g(u;x)$, oraz rozwiązanie rów. /6/ jest

$$/8/ \quad f_{2\alpha}(u;x,t) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 E(x_1,t_1)\left[\frac{\partial}{\partial u} f_{1\alpha}(u;x_1,t_1)\right]\delta(x-x_1-u(t-t_1))$$

gdzie warunek początkowy przyjęto $f_{2\alpha}(u;x,0) = 0$.

Dla badania fal stacjonarnych należałoby poszukiwać rozwiązań dla $t \to \infty$. Znacznie wygodniej jest ustalić równania całkowe dla problemu adiabatycznego włączenia pola w nieskończonej przeszłości, w miejsce problemu początkowego i wtedy rozwiązania rów. /5/ i /6/ będą

$$/7.1/ \quad f_{1\alpha}(u;x,t) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} N_{0\alpha} f'_{0\alpha}(u) \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 E(x_1,t_1)\,\delta(x-x_1-u(t-t_1))$$

$$/8.1/ \quad f_{2\alpha}(u;x,t) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 E(x_1,t_1)\left[\frac{\partial}{\partial u} f_{1\alpha}(u;x_1,t_1)\right]\delta(x-x_1-u(t-t_1))$$

Podstawiając /7/ i /8/ do /1/, /2/ i /3/ otrzymujemy następujące równanie całkowe na pole elektryczne:

$$/9/ \quad E(x,t) = G + K_0 * E + G_1[E] + K_1 * E * E$$

gdzie pole wymuszające jest

$$G(x,t) = \frac{-1}{\varepsilon_0}\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} u \sum_{\alpha} q_{\alpha}\, g_{\alpha}(u; x-ut_1)\, du$$

a wyraz liniowy przyjmuje postać

$$K_0 * E = -\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} E(x_1,t_1) \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 f_{\alpha 0}\left(\frac{x-x_1}{t-t_1}\right) dx_1 \tag{9.1}$$

gdzie częstości plazmowe składników α są $\omega_{\alpha}^2 = N_{0\alpha} q_{\alpha}^2 / \varepsilon_0 m_{\alpha}$. Wyrażenie $G_1[E]$ jest wielkością małą rzędu drugiego względem pola E i przedstawia przyczynek do pola elektrycznego wywołany fluktuacjami rozkładu równowagi $g(u; x-ut)$ i wynosi

$$G_1[E] = -\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} E(x_1,t_1) \sum_{\alpha} \frac{\omega_{\alpha}^2}{N_{0\alpha}} g_{\alpha}\left(\frac{x-x_1}{t-t_1}, x_1\right) dx_1$$

wreszcie wyraz nieliniowy przyjmuje postać

$$K_1 * E * E = \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, K_1(x-x_1, x_1-x_2; t-t_1, t_1-t_2) E(x_1,t_2) E(x_2,t_2)\ .$$

gdzie

$$K_1 = -\sum_{\alpha} \frac{\omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}}{m_{\alpha}} f'_{0\alpha}\left(\frac{x-x_1}{t-t_1}\right) \delta\left(x_1 - x_2 - \frac{x-x_1}{t-t_1}(t_1-t_2)\right)$$

Podstawiając /7.1/ i /8.1/ do rów. /1/.../3/ otrzymujemy nieliniowe całkowe równanie odpowiadające adiabatycznemu włączeniu pola, tj.

$$E(x,t) = -\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} E(x_1,t_1) \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^{2} f_{0\alpha}\left(\frac{x-x_1}{t-t_1}\right) dx_1 +$$

/10/

$$+ \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, E(x_1,t_1)\, E(x_2,t_2) \sum_{\alpha} \frac{\omega_{\alpha}^{2} q_{\alpha}}{m_{\alpha}} f_{0\alpha}'\left(\frac{x-x_1}{t-t_1}\right) \delta\left(x_1 - x_2 - \frac{x-x_1}{t-t_1}(t_1-t_2)\right)$$

Równanie całkowe /9/ przedstawia - z dokładnością do członu drugiego stopnia względem E - odpowiedź plazmy na zaburzenie wytworzone, np. przy pomocy fali przenikającej plazmę lub przy pomocy prądu elektrycznego. Zachowując przybliżenie drugiego stopnia możemy rozwiązanie równań /9/ i /10/ przedstawić przy pomocy rozwiązania równania liniowego, tzn.,

/11/ $$E = E_0 + G_1[E_0] + K_0 * E_0 + K_1 * E_0 * E_0$$

gdzie rozwiązanie równania liniowego, jest

/12/ $$E_0 = G + K_0 * E_0 = G + R_0 * G$$

Rezolwenta - R_0 , liniowego równania /12/ spełnia równanie

/13/ $$R_0 = K_0 + K_0 * R_0$$

Własności takich równań badano w [6] .

Równania /9/ i /10/ zostały wyprowadzone z dokładnością do członów kwadratowych względem pola E. Istotną zaletą tych nieliniowych równań całkowych jest to, że można ich rozwiązanie - z dokładnością do członów kwadratowych - otrzymać na podstawie rozwiązania równania liniowego /12/. Jest tak, ponieważ w równaniach /9/ i /10/ człon nieliniowy jest poprawką na pole E.

Nie jest łatwo wyznaczyń analitycznie ściśłe rozwiązanie równania liniowego /12/ na rezolwentę dla wieloskładnikowej plazmy z silną dyspersją czasowo - przestrzenną, np. w przypadku Maxwellowskich rozkładów równowagowych składników plazmy.

W celu rozwiązania zagadnień rozpraszania i transmisji fal podłużnych w plazmie dogodnie jest wyznaczyć kilka wyrazów następującego szeregu dystrybucyjnego rezolwenty:

$$/14/ \qquad R_0(x,t) = \sum_n (-1)^n a_n(t)\, \delta^{(n)}(x),$$

który odpowiada potęgowemu rozwinięciu transformaty Fouriera rezolwenty względem liczby falowej k. Teoria szeregów dystrybucyjnych i ich zbieżności jest przedstawiona w monografiach dotyczących funkcji uogólnionych np.: [5] . Rozwinięcie rezolwenty /14/ jest stosunkowo łatwo otrzymać i jest ono bardzo użyteczne w zastosowaniu do liniowego równania splotowego /12/, ponieważ

$$\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_0(x-x_1,t-t_1)\, G(x_1,t_1)\, dx_1 = \sum_n (-1)^n \int_0^t a_n(t-t_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x_1,t_1)\, dt_1$$

3. Rozwinięcie rezolwenty w szereg dystrybucyjny.

Równanie rezolwenty /13/ jest postaci:

$$/13a/ \qquad R_0(x,t) = K_0(x,t) + \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x-x_1,t-t_1)\, R_0(x_1,t_1)\, dx_1$$

i w celu wyznaczenia rozwiązania można zastosować transformację Laplace'a względem czasu t i Fouriera względem zmiennej przestrzennej x. Jądro rów. /13/ jest

$$K_o = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 f_{\alpha o}\left(\frac{x}{t}\right)$$

gdzie $f_{\alpha o}(u)$ jest funkcją rozkładu prędkości składnika plazmy. Funkcja ta jest zwykle funkcją **analityczną** posiadającą wszystkie momenty i wobec tego jądro $K_o(x-x_1,t)$ ma następujące własności:

$$/15/ \qquad K_o(x-x_1,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_o(x,\tau)$$

jest szeregiem jednostajnie zbieżnym dla $-\infty < x < \infty$ przy $\tau \in [0,T]$ oraz istnieją następujące całki

$$/16/ \qquad b_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n K_o(x,\tau)\, dx$$

Dla takiego jądra relacja dyspersyjna równania /13a/

$$D(k,s) \equiv 1 - K_o(k,s)$$

nie jest wielomianem lecz funkcją przestępną i otrzymywanie rozwiązania na rezolwentę $R_o(x,t)$ przez odwrócenie transformacji, np.: dla rozkładów Maxwellowskich $f_{o\alpha}$, jest niezmiernie trudne. Wobec tego nie będziemy poszukiwać rozwiązań metodą transformacji lecz przy pomocy następującej metody. Podstawiając szereg /15/ do rów. /13a/ otrzymujemy

$$/17/ \quad R_0(x,t) = K(x,t) + \int_0^t dt_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_0(x,t_1)$$

gdzie $$a_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{n!} R(x,t)\,dx .$$

Ponieważ $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\, \delta^{(n)}(x-x_1)\,dx_1 = (-1)^n \varphi^{(n)}(x)$$

zatem szereg /17/ można przekształcić w następujący szereg dystrybucyjny

$$/18/ \qquad R(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n(t)\, \delta^n(x)$$

Podstawiając /18/ do /13a/ otrzymujemy /17/ oraz podstawiając /18/ do /12/ otrzymujemy rozwiązanie na pole E w postaci następującego szeregu

$$/19/ \quad E(x,t) = G(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t a_n(t-t_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x,t_1)\,dt_1$$

jeżeli znane są współczynniki $a_n(t)$. W przypadku gdy szereg prawej strony rów. /17/ jest niemal jednostajnie zbieżny dla $|x| < \infty$ dla każdego $t \in [0,T]$ to również szereg /18/

jest zbieżny w sensie dystrybucyjnym.
Współczynniki $a_n(t)$ można wyznaczyć mnożąc równanie /13a/ przez x^n, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots \infty$, i całkując względem x w przedziale $(-\infty, \infty)$. Otrzymujemy wtedy następującą hierarchię równań na $a_n(t)$;

$$a_0(t) = b_0(t) + \int_0^t b_0(t_1) a_0(t-t_1) dt_1$$

/19/
$$a_1(t) = b_1(t) + \int_0^t [b_1(t_1) a_0(t-t_1) + b_0(t_1) a_1(t-t_1)] dt_1$$

. . . .

$$a_n(t) = \frac{b_n(t)}{n!} + \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}(t_1)}{(n-k)!} a_k(t-t_1) dt_1$$

gdzie $b_n(t)$ jest dane wzorem /16/ przy znanym K_0, natomiast $a_n(t)$ jest poszukiwanym rozwiązaniem.
Zwykle $K_0(x,t)$ jest funkcją parzystą względem x i wtedy wszystkie współczynniki a_n i b_n dla parzystych indeksów n znikają.
Zauważmy, że

$$b_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n K_0(x,t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 f_{0\alpha}\left(\frac{x}{t}\right) dx$$

$$= t^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} u^n \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 f_{0\alpha}(u) du = M t^{n+1}$$

gdzie M jest stałą będącą sumą n-tych momentów funkcji rozkładu prędkości składników plazmy pomnożonych przez kwadrat częstości plazmowanej tych składników. Zatem transformata Laplace'a równań /19/ prowadzi do transformaty na funkcję poszukiwaną będącą ilorazem wielomianów względem s.

Możemy więc wyznaczyć $a_n(t)$ w jawnej postaci, przy pomocy funkcji trygonometrycznych. W przypadku plazmy elektronowej na tle nieruchomych jonów, gdzie rozkład elektronów jest rozkładem Maxwella, mamy

$$a_0(t) = -\omega_0 \sin\omega_0 t\,,$$

$$a_1(t) = 0\,,$$

$$a_2(t) = \frac{V_t^2}{2}\left(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t\right),$$

$$a_3(t) = 0\,,$$

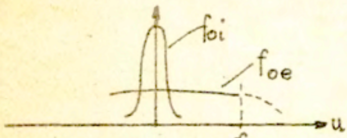
$$a_4(t) = \ldots\ldots$$

gdzie ω_0 i V_t są odpowiednio częstością plazmową i średnią prędkością termiczną elektronów.

4. Fale jonowo-akustyczne.

W plazmie składającej się z zimnych ale ruchomych jonów i gorących elektronów $/T_e \gg T_i/$ można pobudzić fale jonowo-akustyczne. Przyjmuje się, że rozkład równowagowy zimnych jonów i gorących elektronów opisany jest;

$f_{oi} = \delta(u),\, f_{oe} = \{1/2\alpha\}\,[H(u+\alpha) - H(u-\alpha)]$ gdzie $\delta(u)$ jest deltą Diraca a $H(u)$ jest funkcją skoku jednostkowego. Rys. 1 wyjaśnia relację rozkładu jonów i elektronów. Jądra równań /9/ i /10/ przyjmują postać:



Rys. 1.

$$K_0 = -\omega_i^2 (t-t_1)\,\delta(x-x_1) - \omega_e^2 (2\alpha)^{-1}\left[H(x-x_1+\alpha(t-t_1)) - H(x-x_1-\alpha(t-t_1))\right]$$

$$K_1 = \left\{\frac{\omega_i^2 q_i}{m_i}(t-t_1)^2\,\delta'(x-x_1) + (t-t_1)\,\frac{\omega_e^2 q_e}{2m_e\alpha}\left[\delta(x-x_1+\alpha(t-t_1)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \;\delta(x-x_1-\alpha(t-t_1))\right]\right\}\delta\left(x-x_1-\frac{x-x_1}{t-t_1}(t_1-t_2)\right).$$

Tak więc, np. rów./10/ będzie:

$$
\begin{aligned}
E(x,t) = {} & -\omega_i^2 \int_{-\infty}^{t} (t-t_1)E(x,t_1)\,dt_1 - \frac{\omega_i^2}{2\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{x-\mathcal{L}(t-t_1)}^{x+\mathcal{L}(t-t_1)} E(x_1,t_1)\,dx_1 - \\
& - \frac{\omega_i^2 q_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{t} dt_1 (t-t_1)^2 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 E(x,t_1)E(x,t_2) + \frac{\omega_e^2 q_e}{2m_e\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{t} dt_1 (t-t_1) \int_{-\infty}^{t_1} \\
& \left[E(x+\mathcal{L}(t-t_1),t_1)E(x+\mathcal{L}(t-t_2),t_2) - E(x-\mathcal{L}(t-t_1),t_1)E(x-\mathcal{L}(t-t_2),t_2)\right] dt_2
\end{aligned}
\tag{/20/}
$$

Pomijając człon nieliniowy i obliczając $\partial_{tttt} - \mathcal{L}^2 \partial_{ttxx}$ z lewej i prawej strony /20/ sprowadzamy ostatnie równanie do liniowego równania hiperbolicznego czwartego rzędu, a mianowicie:

$$
E_{tttt} - \mathcal{L}^2 E_{ttxx} + (\omega_i^2 + \omega_e^2) E_{tt} - \mathcal{L}^2 \omega_i^2 E_{xx} = 0 \tag{/21/}
$$

Dzieląc /21/ przez ω_e^2 i pomijając ω_i^2/ω_e^2 wobec jedności oraz wyraz $\omega_e^{-2} E_{tttt}$, otrzymujemy liniowe równanie Boussinesqa.

$$
E_{tt} - c_s^2 E_{xx} = \mathcal{L}^2/\omega_e^2 \, E_{xxtt} \tag{/22/}
$$

gdzie prędkość dźwięku $c_s = \mathcal{L}\omega_i/\omega_e$. Z ewolucyjnego rów./21/ wynika, że fala będąca rozwiązaniem tego równania nie może propagować się z większą prędkością niż $\mathcal{L}$. Rów. /22/ otrzymane w teorii fal jonowodźwiękowych dotyczy potencjału φ, gdzie $E = -\varphi_x$.

Zasługuje na uwagę następująca własność rów. /22/. Równanie to można przepisać w postaci:

$$(\partial_{xx} - 1/\lambda^2)(\partial_{tt} + c_s^2/\lambda^2)E = -(c_s^2/\lambda^4)E$$

gdzie $\lambda^2 = c^2/\omega_e^2$

Ponieważ

$$K^0(x,t) = \frac{c_s^2}{2\lambda^3} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$$

jest funkcją Greena i spełnia równanie

$$(\partial_{xx} - 1/\lambda^2) K^0(x,t) = -(c_s^2/\lambda^4)\delta(x)$$

zatem odpowiedni problem początkowy dla rów. /22/ sprowadza się do następującego równania całkowego:

$$E(x,t) = G(x,t) + \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x_1, t-t_1) E(x_1,t_1) dx_1 \tag{22a}$$

gdzie G jest funkcją wymuszającą wynikłą z warunków początkowych, oraz

$$K(x,t) = (c_s^2/2\lambda^3) t e^{-\frac{|x|}{\lambda}} - (c_s^2/\lambda^2) t \delta(x)$$

i G spełnia równanie

$$(\partial_{xx} - 1/\lambda^2) G_{tt} = 0$$

Podstawiając /22a/ do rów. /22/ możemy sprawdzić równoważność rów. /22/ i /22a/. Z rów. /22a/ wynika, że dla każdej chwili czasowej t rozwiązanie $E(x,t)$ ma nośnik nieograniczony, ponieważ jądro $K(x,t)$ ma nośnik nieograniczony więc splot też ma nośnik nieograniczony. Oznacza to nieskończoną prędkość frontu sygnału wynikłą z dyspersji. Choć jest to niezgodne z podstawowym prawem fizyki relatywistycznej, nie wyklucza to, że rów. /22/ może właściwie opisywać istotne własności fal dyspersywnych. Z nieliniowego równania Boussinesga na potencjał

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{xx} + b(\varphi^2)_{xx} + c^2 \varphi_{xxtt} = 0$$

gdzie a, b i c pewne stałe, nie można otrzymać równania czysto różniczkowego na pole $E = -\varphi_x$. Obliczając $\partial_{tttt} - \alpha^2 \partial_{ttxx}$ z lewej i prawej strony rów. /20/ otrzymamy równanie różniczkowo-całkowe, którego część liniowa będzie taka jak /21/ a część nieliniowa zawierać będzie wyrazy całkowe.

Analiza metody otrzymywania równań różniczkowych cząstkowych na potencjał pozwala zauważyć, że tu wyprowadzone równania całkowe /9/ i /10/ są dokładniejsze tak w części liniowej jak i nieliniowej i mogą służyć nie tylko do badania fal długich jonowo-akustycznych lecz także fal krótszych wieloskładnikowej plazmy.

5. Stacjonarne fale jonowo - akustyczne.

Na zakończenie przedstawimy prosty sposób wyznaczania fal stacjonarnych na podstawie rów. /20/. Równanie to będzie spełnione gdy pole E zależy tylko od jednej zmiennej $\xi = x - Ut$ /podobnie dla $\xi = x + Ut$ /, tzn. jeżeli $E = E(\xi)$ wtedy mamy następujące równanie całkowe na pole elektryczne:

$$E(\xi) = -\delta \int_{\xi}^{\infty} (\xi - \xi_1) E(\xi_1)\, d\xi_1 + \beta \int_{\xi}^{\infty} d\xi_1 (\xi - \xi_1) E(\xi_1) \int_{\xi_1}^{\infty} E(\xi_2)\, d\xi_2 \qquad /23/$$

gdzie

$$\delta = \frac{\alpha^2 \omega_i^2 - U^2(\omega_i^2 + \omega_e^2)}{U^2(U^2 - \alpha^2)} \approx \frac{1 - c_s^2/U^2}{\lambda_e^2 - U^2/\omega_e^2} \approx \frac{1 - c_s^2/U^2}{\lambda_e^2} .$$

$$\beta = \left[\frac{\omega_i^2 q_i}{m_i}\frac{2}{U^4} + \frac{\omega_e^2 q_e}{m_e}\frac{\mathcal{L}^2+3U^2}{(\mathcal{L}^2-U^2)^3}\right] \approx \left[\frac{\omega_i^2 q_i}{m_i}\frac{2}{U^4} + \frac{\omega_e^2 q_e}{m_e \mathcal{L}^4}\right] \approx$$

$$\approx \frac{\epsilon_0}{e N_0 \lambda_e^4}$$

przy czym $c_s^2 = \mathcal{L}^2 \omega_i^2 / \omega_e^2$, $N_{oe} = N_{oi} = N_0$

oraz długość Debye'a

$$\lambda_e^2 = \left[-\omega_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} f_{oe}'(u)\,du\right]^{-1} = \frac{\mathcal{L}^2}{\omega_e^2}$$

Dla fali jonowo-dźwiękowej przyjęto, że $U^2 \approx c_s^2 \ll \mathcal{L}^2$.

Przybliżenie $c_s^2 \ll \mathcal{L}^2$ nie stosuje się dla fal o częstościach większych znacznie niż częstość jonowa. Wtedy należy korzystać z nieuproszczonych wyrażeń na δ i β dla dwuskładnikowej plazmy.

Ponieważ $E = -\varphi_\xi$, równanie na potencjał φ będzie na podstawie rów. /23/.

$$-\varphi_\xi = \delta \int_\xi^\infty (\xi - \xi_1)\varphi_{\xi_1} d\xi_1 - \beta \int_\xi^\infty (\xi - \xi_1)\varphi\varphi_{\xi_1} d\xi_1$$

Różniczkując to równanie otrzymujemy równanie oscylatora nieliniowego

/24/ $$\varphi_{\xi\xi} = \delta\varphi - \frac{1}{2}\beta\varphi^2$$

W przypadku pominięcia członu nieliniowego i dla $U^2 < c_s^2$, tzn. $\delta < 0$ ostatnie równanie prowadzi do rozwiązań okresowych typu $\sin\xi\sqrt{|\delta|}$, $\cos\xi\sqrt{|\delta|}$. Nieliniowe rów. /24/ możemy rozwiązać mnożąc obie strony równania przez φ_ξ .

$$\varphi_{\xi\xi}\varphi_\xi = \delta\varphi\varphi_\xi - \frac{1}{2}\beta\varphi^2\varphi_\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi_\xi)^2 = \delta\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi^2 - \beta\varphi^2\varphi_\xi$$

i całkując względem ξ , mamy

$$\varphi_\xi^2 = \delta\varphi^2 - (\beta/3)\varphi^3 + C_0$$

gdzie C_0 jest stałą całkowania. Zatem

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\delta\varphi^2 - (\beta/3)\varphi^3 + C_0}} \qquad /25/$$

Przyjmując, że dla $|\xi| \to \infty$ potencjał $\varphi \to 0$ oraz $E = -\varphi_\xi \to 0$ stała całkowania C_0 jest równa zero.

Dla $U^2 > C_s^2$ czyli $\delta > 0$, mamy

$$\xi - \xi_0 = -\frac{2}{\sqrt{\delta}} \operatorname{ar\,th} \sqrt{[\delta - (\beta/3)\varphi]/\delta}$$

a więc

$$\varphi = \frac{3\delta}{\beta} \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta}(\xi - \xi_0)\right]$$

jest to fala solitonowa, która istnieje dla $C_s < U < 1{,}6\,C_s$. Zachowując stałą $C_0 \neq 0$ dla $U < C_s$ otrzymuje się, na podstawie wzoru /25/, okresową falę nieliniową wyrażoną przez kosinus eliptyczny, tj. tak zwaną falę knoidalną, natomiast dla $U > 1,6\, c_s$ pojawia się rozwiązanie w postaci bezzderzeniowej fali uderzeniowej. Należy zauważyć, że dysponujemy tu dokładniejszymi wyrażeniami na δ i β w porównaniu ze znanymi wyrażeniami opisu fal jonowo-dźwiękowych opartym na równaniu Boussinesqa czy Kartewega de Vriesa. Np. w miejsce $\delta = (1 - c_s^2/U^2)/\lambda_e^2$ otrzymano wyrażenie dokładniejsze

$$\delta = (1 - c_s^2/U^2 + \omega_i^2/\omega_e^2) / (\lambda_e^2 - U^2/\omega_e^2)$$

6. Uwagi końcowe.

Otrzymano równania całkowe z kwadratową nieliniowością opisujące czasowo-przestrzenną odpowiedź wieloskładnikowej plazmy na dowolne zaburzenie. Rozwiązanie tego równania - z dokładnością do członu kwadratowego - można otrzymać na podstawie rozwiązania równania liniowego. Rozpatrzono przypadek niestacjonarnych zaburzeń plazmy jonowo-akustycznej. Nieliniowe równanie całkowe w tym ostatnim przypadku sprowadza się do równania liniowego hyperbolicznego 4-ego rzędu, jeżeli pominąć człon nieliniowy równania całkowego. Równanie to jest dokładniejsze od równania Boussinesqa i jego rozwiązanie przedstawia falę rozchodzącą się ze skończoną prędkością. Fala ta wg. klasyfikacji Whithama [1] jest falą hiperboliczną dyspersywną. Natomiast rozwiązanie równania Boussinesqa jest falą dyspersywną o nieograniczonej prędkości propagacji frontu fali, tzn. odpowiedź - na funkcję wymuszającą zadaną na ograniczonym nośniku w chwili $t = t_0$ - pojawia się natychmiast na całej osi x-ów.

Otrzymane równania całkowe prowadzą do znanych stacjonarnych rozwiązań na fale knoidalne, solitonowe i uderzeniowe z tym, że współczynniki tu występujące są nieco dokładniejsze niż w dotychczas znanym opisie.

LITERATURA

[1] G.B. WHITHAM , Linear and Nonlinear Waves, J. Wiley § Sons 1974, N.York.

[2] N.A. KRALL, A.W. TRIVELPIECE, Fizyka plazmy, PWN Warszawa 1979.

[3] W.W. PUSTOWALOW, W.P. SILIN, Nieliniejnaja Teoria Wzaimnodiejstwia Wołn w Plazmie, Tieoria Płazmy, Tom 61, str. 42-281, Izd. "Nauka", Moskwa, 1972.

[4] A.F. ALEKSANDROW, L.S. BOGDANKIEWICZ, A.A. RUCHADZE, Osnowy Elektrodynamiki Płazmy, Moskwa, Izd. "Wysszaja Szkoła", 1978.

[5] D.S. JONES, Generalised Functions, Mc Graw-Hill, London 1966.

[6] A.J. TURSKI, Problemy Początkowe dla Równań Liniowej Elektrodynamiki Ośrodków z Czasowo-Przestrzenną Dyspersją, Prace IPPT, No 16/19, 1972.

SPIS TREŚCI

	str
1. Wstęp	3
2. Równania na pole elektryczne wieloskładnikowej plazmy Własowa.	4
3. Rozwinięcie rezolwenty w szereg dystrybucyjny	9
4. Fale jonowo-akustyczne	13
5. Stacjonarne fale jonowo-akustyczne	16
6. Uwagi końcowe	19
7. Spis literatury	20