

- 2.21 — akustoelektronika
- 3.33 — elektrodynamika ośrodków o-
kształconych
- 7.76 — fale w ciałach stałych

Eugeniusz Danicki

**PROSTOKĄTNE ODBICIE AFP
OD PERIODYCZNYCH ROWKÓW**

39/1985

P.269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 września 1985 r.

56910



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd.0,83 Ark.druk. 1,5

Oddano do drukarni we wrześniu 1985 r.

Nr zamówienia 562/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

E. Danicki
Zakład Teorii
Elektromagnetycznych

PROSTOKĄTNE ODBICIE AFP OD PERIODYCZNYCH ROWKÓW

STRESZCZENIE

Uogólniono perturbacyjne warunki brzegowe Trierstena na przypadek podłoża piezoelektrycznego. W oparciu o nie wprowadzono równania modów sprzężonych, które z kolei posłużyły do określenia współczynnika odbicia akustycznej fali powierzchniowej od pojedynczego rowka przy dowolnym kącie odbicia. Uwzględniono zarówno mechaniczne jak i elektryczne oddziaływanie między falą padającą i odbitą.

1. WSTĘP

Zjawisko odbicia akustycznej fali powierzchniowej /AFP/ od periodycznych rowków /lub prawie periodycznych/ położonych ukośnie względem frontu fali ma ważne zastosowanie w technice, m.in. w tzw. odbiciowych dyspersyjnych liniach opóźniających. Zwykle jest to odbicie prostokątne /kąt między falą padającą a odbitą wynosi 90° / przy czym, ze względu na anizotropię podłoża, kąt padania fali na rowki może być różny od 45° .

Zasadniczym celem przedstawionej w tym artykule analizy odbicia AFP od periodycznych rowków jest określenie współczynnika odbicia fali od pojedynczego rowka, jednego z wielu, tworzących periodyczny układ. Analiza przeprowadzona jest w zasadzie dla dowolnego, anizotropowego podłoża piezoelektrycznego, z uwzględnieniem zarówno oddziaływań mechanicznych, jak i elektrycznych między AFP a układem rowków, stanowiących zaburzenie powierzchni podłoża.

Przyjęto perturbacyjną metodę analizy co oznacza, że uwzględniono jedynie zasadnicze czynniki, biorące udział w zjawisku odbicia fali, przede wszystkim zaś założono, że rowki są płytkie. Jest to założenie usprawiedliwione, gdyż praktycznie stosowane głębokości rowków nie przekraczają 1-2% ich szerokości, która z kolei jest bliska połowie długości odbijanej AFP.

Kolejne uproszczenia, to:

- pominięcie wyższych składowych harmonicznych periodycznego kształtu powierzchni rowkowanej co oznacza, że rowki zastąpione są przez sinusoidalne pofałdowanie powierzchni,
- pominięcie wyższych składowych harmonicznych pola mechanicznego i elektrycznego /akustycznego/ pojawiających się w periodycznie zaburzonem układzie zgodnie z twierdzeniem Floqueta. Konsekwencją tego założenia jest, że teoria traci ważność w miarę zwiększania kąta padania fali na rowki.

Należy podkreślić, że jakkolwiek rozpatruje się tu współczynnik odbicia AFP od pojedynczego rowka, nie dotyczy on sytuacji odbicia fali od pojedynczego, jednego rowka, wytrawionego w powierzchni podłoża. Rozpatrywany zaś jest efektywny współczynnik odbicia fali od jednego z rowków, występujących w periodycznym układzie. Przyjmując spełnienie warunku Bragga, odbicia fali od poszczególnych rowków sumują się skalarnie. Daje to możliwość określenia współczynnika odbicia od pojedynczego rowka jako części sumarycznego odbicia fali. W przypadku odejścia od warunku Bragga /np. przez niewielką zmianę częstości fali/ odbicie fali od wielu rowków zmienia się silnie wskutek wektorowego sumowania się fal odbitych od poszczególnych rowków. Oczywiście jest jednakże, że współczynnik odbicia od pojedynczego rowka jest prawie stały, gdyż wystarczy niewielka zmiana periodu rowków, aby poprzez spełnienie warunku Bragga przywrócić silne odbicie fali.

Takie zdefiniowanie współczynnika odbicia fali pozwala na uniknięcie analizowania dyfrakcji AFP na pojedynczym rowku, nieodłącznie związanej z jej rozpraszaniem do fal objętościowych. Co więcej, byłaby to sytuacja odległa od praktycznie spotykanej, gdzie występują układy kilkuset rowków, przy czym odległości między bliskimi rowkami są prawie powtarzające się.

Praktycznie więc rozpraszanie AFP do fal objętościowych można traktować jako efekt uboczny.

Literatura przedmiotu prostokątnego odbicia AFP jest raczej uboga. Właściwie, jeśli nie brać pod uwagę pewnych modelowych rozważań typu schematu zastępczego i badań empirycznych, ogranicza się do artykułów [1-3]. Niniejszy artykuł wprowadza pewne uściślenie tych prac, a głównym nowym rezultatem jest wyprowadzenie perturbacyjnych elektrycznych warunków brzegowych. Podano przykładowe obliczenia kilku stosowanych podłoży piezoelektrycznych.

2. PERTURBACYJNE WARUNKI BRZEGOWE

Rozważany jest nieskończony, periodyczny układ płytkich rowków, przedstawiony na Rys. 1a. Fale akustyczne /dla rozpatrywanego tu podłoża piezoelektrycznego składające się z pola elektrycznego i mechanicznego/ zawiera, zgodnie z twierdzeniem Floqueta, nieskończoną liczbę składowych harmonicznych. Składowa o numerze n jest falą o postaci /Rys. 1b/

$$\exp(j\omega t - jrx - j(s+nK)z) \quad /1/$$

z odpowiednią zespoloną amplitudą, gdzie

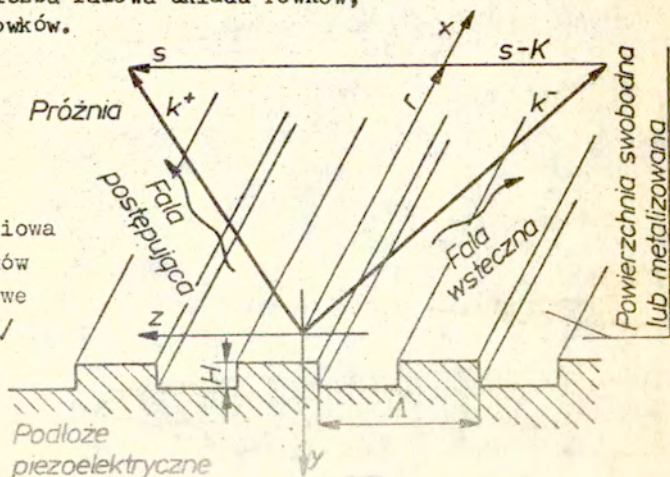
ω - częstość kołowa fali,

r, s - składowe wektora falowego / $s > 0$ /,

$K' = 2\pi/\Lambda$ - liczba falowa układu rowków,

Λ - period rowków.

Rys. 1
Periodyczny układ rowków na powierzchni podłoża /wyjściowa geometria rowków i wektory falowe fal składowych/



W dalszych rozważaniach przyjęte będą następujące uproszczenia:

- zamiast rowków rozpatrywana jest sinusoidalnie pofalowana powierzchnia w postaci

$$y = y_s(z) = -\bar{h} - h \exp(jKz) - h^* \exp(-jKz) \quad /2/$$

gdzie \bar{h} , h i h^* są odpowiednimi współczynnikami szeregu Fouriera, opisującego powierzchnię podłoża. W przypadku rowków o głębokości H i o szerokości $\sqrt{2}$ jest $\bar{h} = H/2$, $|h| = H/\pi$, faza h zależy od położenia początku układu współrzędnych.

- zachowane będą tylko dwie najniższe składowe harmoniczne pola akustycznego, a mianowicie składowa z $n = 0$ /fala postępująca lub padająca/ i z $n = -1$ /fala wsteczna lub odbita/.
- rozpatrywane rowki są płytkie ($H/\lambda \ll 1$) tak, że transformacja układu współrzędnych x, y, z do x', y', z' , związanego z powierzchnią $y = y_s$ /Rys. 1b/ może być opisana relacjami

$$x' = x$$

$$y' = y - \theta z$$

$$z' = z + \theta y$$

$$\theta \approx \tan \theta = dy_s/dz$$

gdzie oś y' jest prostopadła, a oś z' styczna do powierzchni w danym punkcie. Odpowiednio transformują się wektory i tensory do nowego układu współrzędnych x'_n , obróconego o kąt θ względem układu x_n ($x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$)

- w rozważaniach uwzględnione będą jedynie składowe pola akustycznego rzędu nie wyższego niż (H/λ) ,
- rozpatrywane jest odbicie Bragga, to znaczy spełniony jest warunek, że $/r, 0, s/$ i $/r, 0, s-K/$ są wektorami falowymi niezaburzonych akustycznych fal powierzchniowych, propagujących się po powierzchni niezaburzonej /gładkiej, bez rowków/,

- zakłada się, że występujące w rozważanym polu akustycznym na powierzchni podłoża składowe harmoniczne w postaci /1/ mają liczby falowe leżące powyżej liczb falowych odcięcia fal objętościowych, umożliwia to eliminację fal objętościowych z dalszych rozważań, dotyczących odbicia AFP.

Podobnie jak w [3] rozważania wygodnie będzie odnieść do umownej warstwy, położonej na powierzchni półprzestrzeni, rozciągającej się dla $y > 0$. Umowna warstwa piezoelektryczna, z tego samego materiału co i podłoże, zawarta jest między płaszczyzną $y = 0$ a górną, pofalowaną powierzchnią $y = y_s$. Warstwa ta jest cienka, tzn. $|y_s| \ll \lambda$, gdzie λ jest długością rozważanej fali powierzchniowej. Zakłada się oczywiście ciągłość pola akustycznego na powierzchni $y = 0$.

W dalszym ciągu przyjęte będą następujące oznaczenia:

- ρ - gęstość podłoża,
 - u_n - składowa wektora przemieszczeń cząstek podłoża,
 - t_{nk} - składowa tensora naprężeń,
 - φ - potencjał elektryczny,
 - d_n - składowa wektora gęstości strumienia indukcji
 - e_n - składowa wektora natężenia pola elektrycznego, $e_n = -\varphi_{,n}$
- oraz - odpowiednio dużymi literami oznaczone będą wartości pół dla $y = 0$,
na przykład

$$u_n = u_n|_{y=0}, \quad E_1 = -\varphi_{,1}|_{y=0} = -\partial\varphi/\partial x|_{y=0}$$

Dodatkowo $V_n = j\omega u_n$ oznacza prędkość cząstek na powierzchni podłoża. Przyjęta też będzie konwencja sumowania po powtarzających się wskaźnikach.

Zgodnie z założeniami, pole akustyczne składa się z dwóch fal, postępującej i wstecznej, amplitudy których oznaczone będą odpowiednio indeksami + i -. Przykładowo potencjał na powierzchni $y = 0$ ma postać

$$\Phi = \varphi|_{y=0} = \Phi^+ \exp(j\omega t - jrx - jsz) + \Phi^- \exp(j\omega t - jrx - j(s-K)z)$$

/człon $\exp j\omega t$ będzie zwykle pomijany/. Odpowiednio k^+ i k^- są liczbami falowymi fali postępującej i wstecznej, równymi

odpowiednio $\sqrt{r^2 + s^2}$ i $\sqrt{r^2 + s^2 - K^2}$. Składowe wektorów falowych k^+ i k^- są $/r, 0, s/$ i $/r, 0, s - K/$ odpowiednio. Podobnie oznaczone są pozostałe składowe pola.

Zadaniem tego punktu pracy jest wyznaczenie skoku naprężeń mechanicznych i skoku pola elektrycznego przy przejściu od $y = y_s$ do $y = 0$ i przy wzięciu pod uwagę warunków brzegowych dla $y = y_s$, które są następujące

- odpowiednie składowe tensora naprężeń, opisujące naprężenia styczne do powierzchni $y = y_s$ znikają,
- natężenie pola elektrycznego stycznego do powierzchni $y = y_s$ jest ciągle przy przejściu od materiału warstwy do próżni nad warstwą,
- składowa wektora gęstości strumienia indukcji elektrycznej prostopadła do powierzchni $y = y_s$ jest ciągła,
- w przypadku powierzchni metalizowanej wymienione wyżej natężenie pola elektrycznego znika.

A. Pole mechaniczne

Uwzględniając poprzednie założenia otrzymuje się podobnie jak w [3]

$$t_{y'l'}|_{y=y_s} = (t_{yl} + y_s t_{yl,y} - \theta t_{zl})|_{y=0} = 0, \quad l=x,y,z \quad /3/$$

/z dokładnością do członów rzędu H/Λ , co po uwzględnieniu równań ruchu

$$-\varrho \omega^2 u_l = t_{lk,k} \quad /4/$$

pozwała na przedstawienie naprężeń na powierzchni $y = 0$ w postaci

$$t_{yn}|_{y=0} = y_s (\varrho \omega^2 u_n + T_{nx,x}) + (y_s T_{zn})_{,z} = \Delta T_{yn} \quad /5/$$

gdzie naprężenia i przemieszczenia, występujące po prawej stronie, brane są dla $y = 0$ /oznaczenie ΔT_{yn} usprawiedliwione jest tym, że jest to skok naprężenia od $t_{y'n'} = 0$ dla

$y = y_s$ do ΔT_{yn} dla $y = 0/$.

Z relacji /5/ i /2/ wynikają relacje /podobnie jak w [3]

$$\Delta T_{yn}^+ = -\hbar(\rho\omega^2 U_n^+ - jk_m^+ T_{mn}^+) - h(\rho\omega^2 U_n^- - jk_m^+ T_{mn}^-) \quad /6/$$

i analogiczna następująca po zamianie indeksów + i - oraz przyjęciu h^* zamiast h .

Wkład do pola rzędu H/Λ dostarczają jedynie pola, występujące po prawej stronie /6/ rzędu $(H/\Lambda)^0$, a więc pola niezaburzone. Należy zauważyć, że T_{yn}^+ , T_{yn}^- nie mają składowych rzędu zerowego, co również widać z /6/, gdyż są to w istocie naprężenia ΔT_{yn}^+ i ΔT_{yn}^- - znikające przy braku zaburzenia $H = 0/$.

B. Pole elektryczne, przypadek metalizacji powierzchni

Warunek elektrycznie zwartej powierzchni ma postać warunku brzegowego

$$\varphi|_{y=y_s} = (\varphi + y_s \varphi_{,y})|_{y=0} = 0 \quad /7/$$

który równoważny jest zerowaniu się dwóch składowych wektora natężenia pola elektrycznego ($e_l = -\varphi_{,l}$)

$$e_x|_{y=y_s} = (e_x + y_s e_{x,y})|_{y=0} = 0 \quad /8/$$

$$e_z|_{y=y_s} = (e_z + y_s e_{z,y} + \theta e_y)|_{y=0} = 0$$

Wynika stąd

$$\Phi = y_s E_y \quad /9/$$

czyli

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^+ &= -\hbar E_y^+ - h E_y^- \\ \Delta\Phi^- &= -\hbar E_y^- - h^* E_y^+ \end{aligned} \quad /10/$$

gdzie E_y jest związane z polem niezaburzonym dla akustycznej fali powierzchniowej propagującej się pod powierzchnią metalizowaną.

Oznaczenia $\Delta\phi^+$, $\Delta\phi^-$ ilustrują fakt, że stanowią one różnicę /skok/ potencjału od wartości zerowej dla $y = y_s$ do wartości określonej przez /10/ dla $y = 0$.

C. Pole elektryczne, przypadek powierzchni swobodnej, graniczącej z próżnią

W tym przypadku pole niezaburzone zawiera na powierzchni podłoża zarówno niezerowy potencjał elektryczny, jak i niezerową składową wektora gęstości strumienia indukcji, normalną do powierzchni podłoża.

Oznaczmy pole elektryczne w próżni przez kreskę nad odpowiednim symbolem, przykładowo \bar{d}_y oznacza y -składową wektora gęstości strumienia indukcji elektrycznej w próżni / $y < y_s$ /.

W próżni obowiązuje relacja $\bar{d}_{n,n} = 0$ /podobnie jak i w podłożu $d_{n,n} = 0$ /, gdzie $\bar{d}_n = \epsilon_0 \bar{e}_n = -\epsilon_0 \bar{\varphi}_{,n}$

Potencjał elektryczny na powierzchni $y = y_s$ jest $\bar{\varphi}|_{y=y_s} = \varphi|_{y=y_s}$ jest to warunek brzegowy/ więc

$$\bar{d}_y|_{y=y_s} = -\epsilon_0 k \varphi|_{y=y_s} \quad /11/$$

gdzie $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ jest liczbą falową rozpatrywanej fali potencjału / k przyjmuje wartość k^+ lub k^- , w zależności od rozpatrywanej fali, postępującej czy wstecznej/,

Analogicznie do /7/ skok potencjału na warstwie /to jest od $y = y_s$ do $y = 0$ / wynosi

$$\Delta\phi = y_s E_y = (\varphi|_{y=0} - \varphi|_{y=y_s}) \quad /12/$$

skąd można obliczyć potencjał $\varphi|_{y=y_s}$.

Warunek dotyczący ciągłości składowej normalnej /do powierzchni $y = y_s$ / wektora indukcji elektrycznej ma postać

$$d_y |_{y=y_s} - \bar{d}_y |_{y=y_s} = 0 \quad /13/$$

gdzie

$$d_y |_{y=y_s} = (d_y + y_s d_{y,y} - \theta d_z) |_{y=0}$$

$$\bar{d}_y |_{y=y_s} = (\bar{d}_y - \theta d_z) |_{y=y_s} = -\varepsilon_0 k \bar{\varphi} |_{y=y_s} - \theta \bar{d}_z |_{y=y_s}$$

oraz $\bar{d}_z = \varepsilon_0 \bar{e}_z$. z /13/ otrzymuje się

$$\begin{aligned} \Delta D_1 &= (d_y + \varepsilon_0 k \varphi) |_{y=0} = (-y_s d_{y,y} + \theta d_z - \varepsilon_0 k (y_s \varphi_{,y}) + \theta \varepsilon_0 \varphi_{,z}) |_{y=0} \\ &= (y_s d_{x,x} + (y_s d_z)_{,z} - \varepsilon_0 \theta e_z) |_{y=0} + \varepsilon_0 k \Delta \phi \end{aligned} \quad /14/$$

Oznaczenie ΔD_1 usprawiedliwione jest tym, że dla pola niezaburzonego $d_y + \varepsilon_0 k \varphi = d_y - (-\varepsilon_0 k \varphi) = d_y - \bar{d}_y = 0$ dla $y = 0$, czyli ΔD_1 znika. Wartość k w ostatnim członie relacji /14/ należy przyjmować równą k^+ dla składowej postępującej $\Delta \phi$ i k^- dla składowej wstecznej $\Delta \phi$.

Skok składowej y wektora gęstości strumienia indukcji wynosi

$$\Delta D_y = d_y |_{y=0} - \bar{d}_y |_{y=y_s} = (-y_s d_{y,y} + \theta d_z - \theta \bar{d}_z) |_{y=0}$$

a więc

$$\Delta D_y = (y_s d_{x,x} + (y_s d_z)_{,z} + \theta \varepsilon_0 \varphi_{,z}) |_{y=0} \quad /15/$$

Relacja ta i /12/ wskazują, że warstwa y_s jest źródłem skoku zarówno indukcji jak i potencjału. W powyższych oznaczeniach jest

$$\Delta D_1^+ = \bar{h} (j k_n^+ D_n^+ - \varepsilon_0 k^+ E_y^+) + h (j k_n^- D_n^- - \varepsilon_0 k^+ E_y^- + K(s-K) \varepsilon_0 \phi^-) \quad /16/$$

i następną relacją po zamianie indeksów $+$ i $-$, przyjęciu \bar{h} zamiast h oraz $-s/$ zamiast $/s-K/$.

W dalszej części pracy przyjęte będzie spełnienie warunku Bragga, co w układzie współrzędnych z Rys. 1 oznacza, że

$$k_1^+ = k_1^- = r$$

$$k_3^+ - k_3^- = K$$

/17/

a opisane przez /17/, /10/ i /5/ amplitudy są amplitudami fal z czynnikiem falowym typu /1/ przy czym indeks + lub - oznacza amplitudę fali z $n = 0$ lub $n = -1$, odpowiednio, zarówno dla pola zaburzonego, jak i niezaburzonego.

W pracy [3] podana jest nieco inna postać perturbacyjnych warunków brzegowych, mianowicie prawe strony /6/, wyrażają się przez U_n .

Relacje /6/, /10/, /17/ można sprowadzić do analogicznej postaci przez wykorzystanie równań ruchu dla wyrażenia odpowiednich naprężeń i pól elektrycznych poprzez przemieszczenia, potencjał elektryczny itp., jak to podano przykładowo w [3, Dodatek B].

3. METODA PERTURBACYJNA ANALIZY SPRĘŻONYCH MODÓW NORMALNYCH

Rozpatrywane w tej pracy zaburzenie powierzchni podłoża jest małe, usprawiedliwiające stosowanie rachunku zaburzeń. Oznacza to, że zmiana liczby falowej fali propagującej się w ośrodku zaburzonym jest niewielka w stosunku do liczby falowej fali propagującej się w ośrodku niezaburzonym. W rozpatrywanym przypadku ośrodek niezaburzony równoważny jest przyjęciu $y_s = 0$ przy czym rozważane są dwa przypadki - powierzchnia swobodna i metalizowana, dla których liczby falowe i pola skustyczne /ich amplitudy unormowane do jednostkowego wektora Poyntinga AFP/ mogą się istotnie różnić.

Istotą rachunku zaburzeń w rozpatrywanym przypadku jest przyjęcie nieskończenie cienkiej warstwy impedancyjnej zamiast pożądananej warstwy o grubości y_s . Warstwa ta ma jednak własności mechaniczne i elektryczne opisane przez relacje wyprowadzone w poprzedniej części pracy. Przyjmuje się więc, że obowiązują one dla $y = 0$, podczas gdy niezaburzony ośrodek rozciąga się dla $y > 0$, a próżnia /w przypadku powierzchni swobodnej/ dla $y < 0$.

Podstawową relacją, wykorzystywaną do wyprowadzenia równań modów sprzężonych jest zasada wzajemności [4,5], która

w rozpatrywanym układzie próżnia, podłoże piezoelektryczne ma postać

$$\begin{aligned} (\varphi^* \dot{d}_l' + \varphi' \dot{d}_l^*)_{,il} &= 0 \quad \text{dla } y < 0 \\ (-\dot{u}_n^* t_{nl}' - \dot{u}_n' t_{nl}^* + \varphi^* \dot{d}_l' + \varphi' \dot{d}_l^*)_{,il} &= 0 \quad \text{dla } y > 0 \quad /18/ \end{aligned}$$

gdzie kropką oznaczono pochodną po czasie ($\dot{f} = \partial f / \partial t$), a znakiem /'/' oznaczono rozwiązanie równań ruchu ośrodka /i próżni/ w ośrodku zaburzonym, spełniające odpowiednie warunki brzegowe, wyznaczone w poprzednim punkcie pracy. Przemieszczenia U_n , naprężenia t_{nl} , potencjał φ i indukcja d_l stanowią pole modu spełniające równania ośrodka /lub próżni/ i następujące warunki brzegowe

- mechaniczny

$$T_{2i} = t_{2i} |_{y=0^+} = 0 \quad /19a/$$

- elektryczny

$$\Phi = \varphi |_{y=0^+} = 0 \quad /19b/$$

dla przypadku metalizowanej powierzchni podłoża lub dla powierzchni swobodnej, graniczącej z próżnią

$$\Delta D_{\perp} = d_2 |_{y=0^+} - d_2 |_{y=0^-} = 0 \quad /19c/$$

/różnica składowych normalnych powierzchni podłoża wektorów gęstości strumienia indukcji od strony podłoża, $y = 0^+$ i od strony próżni, $y = 0^-$ znika przy założonym spełnieniu ciągłości potencjału/.

Zauważmy, że w obu przypadkach ośrodków, zaburzonego i niezaburzonego, równania ruchu są identyczne, gdyż zaburzenie dotyczy jedynie powierzchni /warunków brzegowych/.

Z przyjętych założeń wynika, że pole modu zaburzonego /f'/ mało różni się od pola modu niezaburzonego /f/ co symbolicznie można zapisać jako

$$|f' - f| \ll |f|$$

tak, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^* f' dy \approx \int_{-\infty}^{\infty} f^* f dy$$

z dokładnością do członów rzędu H/Λ .

Zauważmy, że dla rozpatrywanych tu modów typu fal powierzchniowych jest

$$f \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad |y| \rightarrow \infty \quad /20/$$

Całka po całej osi y , przyjęta do /18/ daje

$$\int_{-\infty}^{\infty} (A_{1,1} + A_{3,3}) dy + \int_{0^+}^{\infty} (A_{1,1} + A_{3,3}) dy = \left\{ - \int_{-\infty}^{0^-} A_{2,4} dy - \int_{0^+}^{\infty} A_{2,4} dy \right\} \quad /21/$$

gdzie przez A_i oznaczono wyrażenie w nawiasach () z lewej strony /18/, odpowiednio dla $y < 0$ lub $y > 0$ zgodnie z obszarem całkowania w /21/.

Po uwzględnieniu warunków brzegowych /20/ prawa strona /21/ przyjmuje postać

$$-V_n^* \Delta T_{ny} + (j\omega D_y)^* \Delta \phi$$

dla metalizowanej powierzchni lub

$$-V_n^* \Delta T_{ny} + \phi^* (j\omega \Delta D_y) + (j\omega D_y)^* \Delta \phi$$

dla swobodnej powierzchni, gdzie wielkości

$$\Delta \phi = \varphi^2|_{y=0^+} - \varphi^2|_{y=0^-}$$

$$\Delta T_{ny} = t_{ny}^2|_{y=0^+}$$

/22/

$$\Delta D_y = d_y^2|_{y=0^+} - d_y^2|_{y=0^-}$$

wyrażają się z kolei poprzez wyprowadzone w poprzednim punkcie pracy perturbacyjne warunki brzegowe. Ze względu na $\phi = 0$ dla powierzchni metalizowanej, prawa strona /21/ daje się zapisać w postaci

$$\left\{ \right\} = -V_n^* \Delta T_{ny} + (j\omega D_y)^* \Delta \phi + \phi^* (j\omega \Delta D_y) \quad /23/$$

Zgodnie z metodą analizy sprzężonych modów normalnych /5/ przyjmuje się, że pole zaburzone można zapisać jako pole modu niezaburzonego pomnożone przez odpowiednią "amplitudę", będącą wolnozmienną funkcją współrzędnych x, z , symbolicznie:

$$f^i = a(x, z) f(x, y, z, t)$$

/24/

$$|a_{ji} f^i| \ll |a_{ji}|$$

Funkcja f wyraża pole modu niezaburzonego, mającego dla $y = 0$ postać fali /1/ dla $n = 0$ lub dla $n = -1$. Podobnie jest z polem zaburzonym w przypadku spełnienia warunków Bragga. Relacje /19/ i dalsze należy odnieść oddzielnie do fali postępującej i wstecznej, a więc

$$(f^* f')_{,i} \approx a_{,i} (f^* f)$$

Przyjęcie tej relacji w lewej stronie /21/ daje

$$a_{,i} 4\pi_l = -V_n^* \Delta T_{ny} + (j\omega D_y)^* \Delta \phi + \phi^* (j\omega \Delta D_y) \quad /25/$$

gdzie

$$\pi_l = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^0 \varphi^* \dot{d}_l dy + \int_0^{\infty} (-\dot{u}_n^* t_{nl} + \varphi^* d_l) dy \right\}$$

jest składową l wektora Poyntinga dla niezaburzonej AFP /w kierunku +, określonym przez wektor falowy AFP postępującej /r,0,s/ lub w kierunku -, określonym przez AFP wsteczną o wektorze falowym /r,0,s-K/, odpowiednio a i π winny być oznaczone indeksem + lub -/.

Istnieje relacja między D_y a ϕ , wynikająca z rozwiązania w próżni, spełniającego warunek ciągłości potencjału na granicy z podłożem $/k_2 \equiv 0/$

$$\bar{\varphi} = \phi e^{ky} \exp(j\omega t - jk_x x_l)$$

gdzie

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \text{ a dalej}$$

$$d_y|_{y=0^-} = D_y = -\epsilon_0 k \phi \quad /26/$$

jest gęstością strumienia indukcji na powierzchni podłoża dla modu niezaburzonego /dla powierzchni swobodnej/.

Podstawienie powyższej relacji do /25/ daje

$$4\pi_l a_{,i} = -V_n^* \Delta T_{ny} + \phi^* j\omega (\epsilon_0 k \Delta \phi + \Delta D_y)$$

czyli, zgodnie z /14/ i /15/

$$4\pi_l a_{,i} = -V_n^* \Delta T_{ny} + \phi^* (j\omega \Delta D_L) \quad /27a/$$

dla powierzchni swobodnej, dla powierzchni metalizowanej /przyjęcie w /25/ $\phi = 0/$ jest

$$4\pi_l a_{,i} = -V_n^* \Delta T_{ny} + (j\omega D_y)^* \Delta \phi \quad /27b/$$

/uwaga - występujące po prawej stronie /27/ amplitudy pola mają na ogół różne wartości dla przypadku swobodnej i metalizowanej powierzchni podłoża/.

Relacje /27/ należy odnieść oddzielnie do modu postępującego o amplitudzie a^+ i modu wstecznego a^- . Odpowiednie amplitudy, wypełniające po prawej stronie /27/ dotyczą wielkości z indeksem + lub - odpowiednio, przy czym amplitudy pola niezaburzonego mogą być unormowane do jednostkowego wektora Poyntinga Π^+ lub Π^- odpowiednio dla fali niezaburzonej propagującej się w kierunku fali postępującej lub wstecznej.

Podstawienie relacji /6/ i /9/ lub /17/ przy zaniedbaniu członów proporcjonalnych do \bar{h} , które, jak można pokazać /Dodatek/ nie dają żadnego wkładu do /27/ [6] daje, przy uwzględnieniu /24/

$$\begin{aligned} 4\Pi_i^+ a_i^+ &= h[-V_n^{+*} \Delta T_{ny}^+ + \Phi^{+*} (j\omega \Delta D_\perp^+)] a^- & /28/ \\ 4\Pi_i^- a_i^- &= h^*[-V_n^{-*} \Delta T_{ny}^- + \Phi^{-*} (j\omega \Delta D_\perp^-)] a^+ \end{aligned}$$

Wprowadzimy dwa nowe układy współrzędnych. W pierwszym wektor Poyntinga fali postępującej będzie miał tylko jedną składową, Π^+ wzdłuż osi oznaczonej przez p , a w drugim układzie wektor Poyntinga fali wstecznej będzie miał tylko składową Π^- wzdłuż osi oznaczonej przez q , wówczas

$$\begin{aligned} a_{,p}^+ &= \frac{h}{4\Pi^+} \mathcal{K}_+ a^- \\ a_{,q}^- &= \frac{h^*}{4\Pi^-} \mathcal{K}_- a^+ \end{aligned} \quad /29/$$

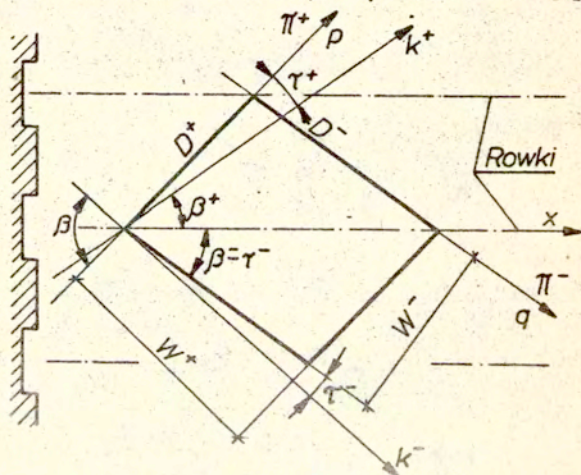
gdzie \mathcal{K}_+ i \mathcal{K}_- określone są przez człony w nawiasach kwadratowych [] występujące w /28/. Relacje /29/ stanowią równania sprzężonych modów normalnych. Pozostaje sprawą otwartą dowód zachowania energii w układzie opisanym tymi relacjami.

4. WSPÓŁCZYNNIK ODBICIA FALI

Fizyczna interpretacja równań modów normalnych /29/ pozwala na wprowadzenie pojęcia współczynnika odbicia fali od jednego rowka. Rozważmy /Rys. 2/ wiązkę fali a^+ , której wektor Poyntinga Π^+ skierowany jest wzdłuż osi p , wiązka ta ma szerokość W^+ .

Podobnie wiązka fali wstecznej o wektorze Poyntinga Π^- skierowanym wzdłuż osi q na szerokość W^- . Szerokości dobrane są w ten sposób, że D^+ i D^- stanowią odległość między sąsiednimi rowkami /osiami rowków/ mierzonymi wzdłuż p i q odpowiednio [3].

Rys. 2
Wiązka fali
postępującej
i wstecznej
w fizycznej
interpretacji
ukośnokątnego
odbicia fali
dla podłoża
anizotropowego



Zmianę amplitudy fali /np. a^+ / na drodze między sąsiednimi rowkami / D^+ / można fizycznie zinterpretować jako efekt odbicia fali jednego rowka. A więc jeśli na początku drogi D^+ jest $a^+ = 0$, a amplituda fali a^- jest ustalona /nie zmienia się ona w ramach rzędu wielkości H/Λ na tej drodze ze względu na słabe sprzężenie między falami/, to na końcu drogi D^+ amplituda odbitej fali przyjmuje wartość

$$a^+ = D^+ \frac{h}{4\pi^+} \alpha_+ a^-$$

/30/

a przenoszona przez nią moc w kierunku p wynosi

$$P^+ = W^+ |a^+|^2 / 2$$

/przyjęto $\Pi^+ = \Pi^- = 1$ i odpowiednio unormowano amplitudy pola akustycznego, występujące w powyższych relacjach/.

Współczynnik odbicia fali γ zdefiniowany jest jako pierwiastek kwadratowy ze stosunku mocy wiązki fali odbitej do mocy wiązki fali padającej, która w rozpatrywanym przypadku ma wartość

$$P^- = W^- |a^-|^2 / 2$$

Uwzględnienie /30/ daje

$$\gamma_+ = \frac{h c_+}{4 \Pi^+} D^+ \sqrt{W^+ / W^-} \quad /31/$$

Odpowiednio γ_- jest współczynnikiem odbicia fali w odwrotnym kierunku /w relacji /31/ należy zamienić indeksy + i - oraz przyjąć h^- zamiast h /. Jakkolwiek nie przeprowadzono ścisłego dowodu, $\gamma = |\gamma_+| = |\gamma_-|$ w przeprowadzonych obliczeniach numerycznych.

Długości $D^{+,-}$, $W^{+,-}$ wyrażają się poprzez Λ oraz kierunki wektorów falowych fali postępującej i wstecznej /w układzie współrzędnych x są to wektory $/r, 0, s/$ i $/r, 0, s-K/$ odpowiednio/ oraz odchyłki wektorów Poyntinga od wektorów falowych /kąty "zbaczenia" energii, Rys. 2, τ^+ i τ^- odpowiednio/. Proste geometryczne relacje

$$W^+ = \Lambda \cos(\beta + \tau^+ - \tau^-) / \sin(\beta^- - \tau^-)$$

$$W^- = \Lambda \cos(\beta + \tau^+ - \tau^-) / \sin(\beta^+ + \tau^+)$$

$$D^+ = \Lambda / \sin(\beta^+ + \tau^+)$$

$$D^- = \Lambda / \sin(\beta^- - \tau^-)$$

$$2\pi / \Lambda = k^+ \sin \beta^+ + k^- \sin \beta^-$$

$$k^+ \cos \beta^+ = k^- \cos \beta^-$$

$$\beta = \beta^+ + \beta^-$$

/32/

pozwalają otrzymać

$$\gamma = \left| \frac{h \omega_+}{4 \pi^+} \right| \frac{2\pi}{\sqrt{(k^- - k^+ \cos \beta)(k^+ - k^- \cos \beta)}} \sqrt{\frac{\sin \beta^+}{\sin(\beta^+ + \tau^+)}} \frac{\sin \beta^-}{\sin(\beta^- - \tau^-)} \quad /33/$$

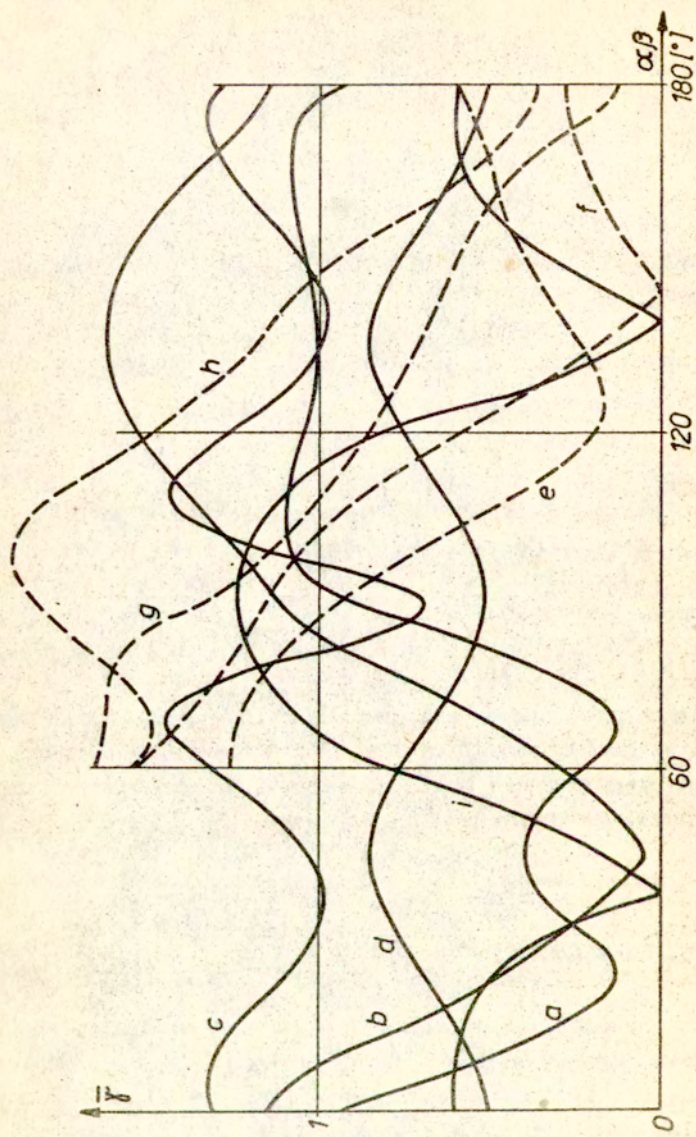
Relacja ta posłużyła do obliczeń numerycznych, przytoczonych poniżej dla kilku podłoży piezoelektrycznych. Przyjęto rowki o głębokości H i szerokości $\Lambda/2$, wykresy współczynnika odbicia γ odniesione są do względnej głębokości rowków zdefiniowanej przez $H\sqrt{k^+k^-}/2\pi$ tzn. $\gamma = \bar{\gamma} H\sqrt{k^+k^-}/2\pi$.

Wyniki obliczeń przedstawione są na Rys. 3

Należy zauważyć złożony charakter zależności $\bar{\gamma}$ od kąta zawartego między falą padającą a odbitą β i od orientacji fali padającej /odbitej/ względem osi krystalograficznych podłoża. Autor nie zna danych eksperymentalnych w dostępnej literaturze, pozwalających na weryfikację powyższych obliczeń, jakkolwiek dostępne dane dla odbicia fali wstecz / $\beta = 180^\circ$ / lub pod kątem prostym / $\beta = 90^\circ$ / są w dobrej zgodności z obliczeniami [3]. Ciekawe, że nie ma danych eksperymentalnych dla metalizowanych rowków w niobianie litu, gdzie współczynnik odbicia fali wstecz ma w/g powyższych obliczeń, zdecydowanie mniejszą wartość niż dla powierzchni swobodnej, rowkowanej.

5. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona teoria uwzględnia jedynie najniższe składowe harmoniczne pola akustycznego, mianowicie tylko falę padającą i odbitą /traci ważność przy małych β /. Tym niemniej wyniki są interesujące, nawet jeśli są przybliżone, gdyż dają pojęcie o złożoności zjawiska odbicia fali w realnych kryształach piezoelektrycznych [8,9] .



Rys. 3 - Zależność współczynnika odbicia fal od kąta odbicia / , linie przerywane/ lub propagacji / = kierunku wektora k^+ , linia ciągła/. Oznaczenia krzywych:

- a - LiNbO_3 , cięcie Y, $\beta = 90^\circ$, α liczone od osi Z, powierzchnia swobodna
- b - jak a, lecz powierzchnia metalizowana
- c - SiO_2 , cięcie RAC, $\beta = 90^\circ$, α liczone od kierunku 45° od osi X /propagacja stosowana w strukturach odbijających dyspersyjnych linii opóźniających/
- d - BSO, cięcie 001, $\beta = 90^\circ$, α liczone od kierunku 110
- e - LiNbO_3 , cięcie Y, fala postępująca / k^+ / w kierunku Z, powierzchnia swobodna
- f - jak e, lecz powierzchnia metalizowana
- g - SiO_2 , cięcie ST, fala postępująca / k^+ / w kierunku X
- h - jak g, lecz cięcie Y
- i - SiO_2 , cięcie ST, odbicie wstecz / $\beta = 180^\circ$ /

Istotnym rezultatem tej pracy jest też wyprowadzenie perturbacyjnych warunków brzegowych, stanowiących uogólnienie perturbacyjnych warunków brzegowych Tierstena [7,3,5] na przypadek podłoża piezoelektrycznego.

DODATEK

STACJONARNOŚĆ PERTURBACYJNYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH
ZE WZGLĘDU NA MAŁE PRZESUNIĘCIE POWIERZCHNI PODŁOŻA

Rozważmy przypadek $h = 0$, $\bar{h} \neq 0$ w relacji /2/. Odpowiada to równoległemu przesunięciu powierzchni podłoża o \bar{h} w górę. Oczywiście jest, że w tak "zaburzonym" układzie akustycznym fala powierzchniowa nie zmienia swojej prędkości. Zgodnie z relacjami perturbacyjnymi, podanymi w [5] zniknąć musi więc prawa strona /27/ dla $h = 0$.

Podstawienie /6/, /12/, lub /17/ do /27/ daje ten warunek w postaci $\Delta t = K = 0$, Δt - zmiana wektora falowego, [3] /

$$0 = \Delta t = -jk\bar{h}2[v\{\rho V_n^* V_n - E_y D_y\} - \{-V_n^* T_{nx} + \Phi^*(j\omega D_x)\}]/4\pi \quad /34/$$

gdzie $v = \omega/r$ - prędkość fazowa fali, dla metalizowanej powierzchni $r = k_0$ i $\Phi = 0$, dla powierzchni swobodnej $r = k_v$. Pierwszy człon w nawiasach $\{ \}$ odpowiada gęstości energii "kinetycznej" \mathcal{E} przy powierzchni podłoża, drugi człon wyraża x - składową wektora Poyntinga $/\Pi_x$, w rozpatrywanym przypadku oś x jest kierunkiem propagacji fali/. Powyższą relację można więc przepisać w postaci

$$\Delta t \sim v\mathcal{E} - \Pi_x \quad /35/$$

Widoczne jest, że $\Delta t = 0$ gdyż dla nietłumionych fal powierzchniowych prędkość przenoszenia energii kinetycznej $v\mathcal{E}$ w kierunku propagacji fali równa jest składowej wektora Poyntinga w tym kierunku (Π_x) .

LITERATURA

- [1] E. Danicki: General Theory of Reflection of Surface Acoustic Wave From Periodic Metal Strips, Proc. of the Second Spr. Sch. on Acoustooptics and Applications, Gdańsk 1983, p. 380 - 389
- [2] E. Danicki: Propagation of Transverse Surface Acoustic Waves in Rotated Y-Cut Quartz Substrates Under Heavy Periodic Metal Electrodes, IEEE Trans., SU -30, 5 /1983/, p. 304-312
- [3] E. Danicki: Perturbation theory of surface acoustic wave reflection from a periodic structure with arbitrary angle of incidence, Arch. Mech., 36, 5-6 /1984/, p. 623-638
- [4] Witold Nowacki: Efekty Elektromagnetyczne w Stałych Ciałach Odkształcalnych, PWN, Warszawa 1983
- [5] B.A. Auld: Acoustic Fields and Waves in Solids, John Wiley and Sons, NY, 1973
- [6] E. Danicki: O odbiciu AFP przez płytkie rowki, OSA-85, Kraków
- [7] E. Danicki: General Theory of Surface Acoustic Wave Reflection From Periodic Grooves, 11^e ICA, Paris 1983, p. 97-100
- [8] J.W. Gulaev, W.I. Grigorievski, W.P. Plesski: Bragowskoe otryazhenie voln Releja ot periodicheski nierownogo uczastka povierchnosti uprugogo tela, ŽTF, 51, 7 /1981/, s. 1338-1344
- [9] A.D. Iapin: Wzaimnoe preobrazovanie povierchnostnykh i objemnykh akusticheskikh voln na periodicheskikh nierownostiach i nieodnorodnostiach granicy twerdogo tela, Ak.Ž., 29, 2 /1983/, s. 212-223