D. Brückner, M. Podhorodyński,
B. Skalmierski

CIĄGOWE UJĘCIE TEORII WEKTORÓW LOSOWYCH I PRAWDOPODOBIEŃSTWA

WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 lipca 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 26/1980

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 1,6. Ark.druk. 3,5.
Oddano do drukarni w lipcu 1980 r.
Nr zamówienia 499/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Damian BRÜCKNER
Marian PODHORODYŃSKI
Zakład Zastosowań Rachunku Prawdopodobieństwa

Bogdan SKALMIERSKI
Instytut Mechaniki Teoretycznej

CIĄGOWE UJĘCIE TEORII WEKTORÓW LOSOWYCH I PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Podstawowym celem rachunku prawdopodobieństwa jest zbudowanie matematycznego modelu zjawisk przypadkowych. W historii rozwoju tej dziedziny wiedzy matematycznej wyodrębniły się głównie dwa nurty: statystyczny /empiryczny/, którego przedstawicielami byli m.in. R.A. FISHER [9] i R.von MISES [13] oraz aksjomatyczny. Najbardziej znanym i powszechnie akceptowanym z ujęć aksjomatycznych rachunku prawdopodobieństwa jest miarowa teoria KOŁMOGOROWA [11]. Te i inne ujęcia poddane są krytycznej analizie w pracy FINE'A [8].

Rezultatem poszukiwań odmiennego sposobu opisu zjawisk przypadkowych są publikacje [2], [3], [4], [5], [6] oraz prace [7] i [14] w których rezygnując z aksjomatycznej metody skonstruowano podstawowe pojęcia probabilistyczne.

Niniejsza publikacja poświęcona jest teorii wektorów losowych w ujęciu ciągowym, przy czym sam wektor losowy zdefiniowany jest w oparciu o zasadę identyfikacji, a podstawowe charakterystyki statystyczne jako średnie z pewnych operacji na wektorze losowym [14]. Pojęciem wyjściowym nie jest tu przestrzeń probabilistyczna jak u KOŁMOGOROWA, lecz wektor losowy zdefiniowany zgodnie z intuicją inżynierską jako zbiór ciągów realizacji liczbowych opisujących kolejne wyniki ciągu doświadczeń, natomiast prawdopodobieństwo i prawdopodobieństwo warunkowe, którym klasycznie narzuca się wszystkie własności miary unormowanej, pojawiają się tu jako pojęcia wtórne, zgodne z ich empirycznymi.

odpowiednikami frekwencję i frekwencję warunkową.

Praca pisana jest z myślą o zastosowaniach w dynamice, gdzie występują zakłócenia losowe, a badanie stabilności i przekroczeń nabiera istotnego sensu w aspekcie prostoty zastosowanego tu opisu. I tak wyniki te będą wykorzystane w kolejnej publikacji dotyczącej teorii uogólnionych procesów stochastycznych i układów punktów losowych oraz ich zastosowaniom. Teorie te zilustrowane będą przykładami zastosowań w zagadnieniach mechaniki. Mianowicie rozwiązany zostanie między innymi problem obciążeń konstrukcji siłami i momentami skupionymi, których wielkość, ilość i punkty przyłożenia są losowe.

§ 1. Średnie.

Niech Λ oznacza dowolny niepusty zbiór parametrów, a A odwzorowanie tego zbioru w zbiór $D_{p,q}$ - układów q dystrybucji lub q funkcji p zmiennych, $p,q \in \mathbb{N}$, tzn.:

$$A: \Lambda \to D_{p,q} ,$$

/1.1/
$$A({}_0\lambda) := \left(f^1(x,{}_0\lambda), \dots, f^q(x,{}_0\lambda)\right), \quad {}_0\lambda \in \Lambda ,$$

gdzie $f^k(x,{}_0\lambda)$, $k = 1, \dots q$, ; $x \in \mathbb{R}^p$ są ustalonymi dystrybucjami /funkcjami/ p zmiennych, zależnych od parametru ${}_0\lambda \in \Lambda$. Odwzorowanie to rozszerzamy na przestrzeń $\Lambda^{\mathbb{N}}$ ciągów elementów zbioru Λ. Mianowicie

/1.2/ $$A({}_i\lambda, i \in \mathbb{N}) := \left(A({}_i\lambda), i \in \mathbb{N}\right) ,$$

przy czym zachowujemy dla tego odwzorowania takie samo oznaczenia jak dla wyjściowego. Dalej rozszerzmy to odwzorowanie na rodzinę zbiorów λ ciągów elementów zbioru Λ w następujący sposób

/1.3/ $$A(\lambda) := \left\{\left(A({}_i\lambda), i \in \mathbb{N}\right) : ({}_i\lambda, i \in \mathbb{N}) \in \lambda\right\}$$

zachowując i tu oznaczenie A. Wartość $A(\lambda)$ nazywamy operacją na λ.

Dla dalszych rozważań tego paragrafu załóżmy, że $q = 1$.

Definicja 1.1.

Średnię $\langle A(\lambda) \rangle$ z operacji A na λ, krótko średnię, nazywamy granicę dystrybucyjną /punktową/ ciągu

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A({}_i\lambda) \;,\; n \in \mathbb{N} \right) \tag{1.4}$$

dystrybucji /funkcji/, o ile ta granica istnieje i jest identyczna w sensie równości dystrybucji /funkcji/ dla każdego ciągu $({}_i\lambda \;,\; i \in \mathbb{N}) \in \lambda$.

Uwaga 1.1.

Zamiast pisać $\langle A(\lambda) \rangle$ będziemy pisać także $\langle f^1(x,\lambda) \rangle$ i nazywać ją średnią na λ.

Niech Λ_0 będzie takim podzbiorem Λ, że dla dowolnego ciągu $({}_i\lambda \;,\; i \in \mathbb{N}) \in \lambda$ istnieje podciąg $({}_{i_j}\lambda \;,\; j \in \mathbb{N})$ o własności

$$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \left({}_{i_j}\lambda \in \Lambda_0 \right) . \tag{1.5}$$

Oznaczmy przez $\left({}_{i_j(\Lambda_0)}\lambda \;,\; j \in \mathbb{N} \right)$ maksymalny podciąg spełniający /1.5/, tzn. podciąg $({}_i\lambda \;,\; i \in \mathbb{N})$ zawierający wszystkie te jego wyrazy, które należą do Λ_0.
Dalej oznaczmy przez n_0 numer $i_1(\Lambda_0)$ oraz

$$n(\Lambda_0) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\Lambda_0}({}_i\lambda) \;,\; n \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

przy czym

$$/1.7/ \qquad \mathbb{1}_{\Lambda_0}({}_0\lambda) := \begin{cases} 1, & {}_0\lambda \in \Lambda_0 \\ 0, & {}_0\lambda \notin \Lambda_0 \end{cases} , \ {}_0\lambda \in \Lambda .$$

Definicja 1.2.

Średnią warunkową $\langle A(\lambda) \| \Lambda_0 \rangle$ z operacji A na λ względem Λ_0, krótko średnią warunkową, nazywamy granicę dystrybucyjną /punktową/ ciągu

$$/1.8/ \qquad \left(\frac{1}{n(\Lambda_0)} \sum_{j=1}^{n(\Lambda_0)} A\left({}_{i_j}(\Lambda_0)\lambda \right), \ n \geqslant n_0 \right)$$

dystrybucji /funkcji/, o ile ta granica istnieje i jest identyczna w sensie równości dystrybucji /funkcji/ dla każdego ciągu $\left({}_i\lambda \ , i \in \mathbb{N} \right) \in \lambda$.

Uwaga 1.2.

Zamiast pisać $\langle A(\lambda) | \Lambda_0 \rangle$ będziemy pisać także $\langle f^1(x, \lambda) | \Lambda_0 \rangle$ i nazywać średnią na λ względem Λ_0.

Wniosek 1.1.

Jeżeli istnieją średnie $\langle \mathbb{1}_{\Lambda_0}(\lambda) \rangle \neq 0$ i $\langle A(\lambda) \cdot \mathbb{1}_{\Lambda_0}(\lambda) \rangle$, to istnieje średnia warunkowa $\langle A(\lambda) | \Lambda_0 \rangle$ i zachodzi równość

$$/1.9./ \qquad \langle A(\lambda) | \Lambda_0 \rangle = \frac{\langle A \cdot \mathbb{1}_{\Lambda_0}(\lambda) \rangle}{\langle \mathbb{1}_{\Lambda_0}(\lambda) \rangle} .$$

Istotnie, obliczmy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\Lambda_0)} \sum_{j=1}^{n(\Lambda_0)} A\left({}_{i_j}(\Lambda_0)\lambda \right) =$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A\left({}_i\lambda\right)\cdot 1\!\!1_{\Lambda_o}\left({}_i\lambda\right)\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1\!\!1_{\Lambda_o}\left({}_i\lambda\right)\right)^{-1}=$$

$$=\langle A\cdot 1\!\!1_{\Lambda_o}(\lambda)\rangle\cdot\langle 1\!\!1_{\Lambda_o}(\lambda)\rangle^{-1},$$

która, jak się okazuje, istnieje i jest identyczna dla każdego ciągu $\left({}_i\lambda\ ,\ i\in\mathbb{N}\right)\in\lambda$, gdyż prawa strona tej równości tę własność.

Wniosek 1.2.

/1.10/ $$\langle f(x)\mid\Lambda_o\rangle = f(x)\,,$$

przy czym $f(x)$ jest dowolną dystrybucją /funkcją/ niezależną od parametru ${}_o\lambda\in\Lambda$

/1.11/ $$\langle\sum_{l=1}^{m}a_lA_l(\lambda)\mid\Lambda_o\rangle=\sum_{l=1}^{m}a_l\langle A_l(\lambda)\mid\Lambda_o\rangle,$$

przy czym $a_l\in\mathbb{R}$, $l=1,\ldots,m$; o ile istnieją średnie warunkowe po prawej stronie równości /1.11/.

Wniosek 1.3.

Jeżeli $R_\lambda=\left\{y\in\Lambda:\ \bigvee_{\left({}_i\lambda\ ,\ i\in\mathbb{N}\right)\in\lambda}\ \bigvee_{i\in\mathbb{N}}\ y={}_i\lambda\right\}\subset\Lambda_o$

istnieje średnia $\langle A(\lambda)\rangle$, to istnieje średnia warunkowe $\langle A(\lambda)\mid\Lambda_o\rangle$ i zachodzi równość

/1.12/ $$\langle A(\lambda)\mid\Lambda_o\rangle=\langle A(\lambda)\rangle.$$

Wniosek 1.4.

Jeżeli $R_\lambda\subset\bigcup_{l=1}^{m}\Lambda_l$, $\Lambda_l\cap\Lambda_k=\emptyset$, $k,l=1,\ldots,m$;

i istnieją średnie $\langle \mathbb{1}_{\Lambda_l}(\lambda) \rangle$, $l = 1, \ldots, m$ oraz średnie warunkowe $\langle A(\lambda) \mid \Lambda_l \rangle$, $l = 1, \ldots, m$ to istnieje średnia $\langle A(\lambda) \rangle$ i zachodzi równość

$$/1.13/ \quad \langle A(\lambda) \rangle = \sum_{l=1}^{m} \langle A(\lambda) | \Lambda_l \rangle \langle \mathbb{1}_{\Lambda_l}(\lambda) \rangle .$$

Istotnie, wystarczy zauważyć, że dla $n \geq \max \{ i_1(\Lambda_1), \ldots \ldots, i_m(\Lambda_m) \}$ zachodzi

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A({}_i\lambda) = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\Lambda_l}({}_i\lambda) \frac{1}{n(\Lambda_l)} \sum_{j=1}^{n(\Lambda_l)} A({}_{i_j(\Lambda_l)}\lambda).$$

§ 2. Wektor losowy i jego podstawowe charakterystyki statystyczne.

Ciąg $(({}_ix^1, \ldots, {}_ix^N), i \in \mathbb{N})$ punktów przestrzeni $\mathbb{R}^N$ nazywamy P_N - podstawowym jeżeli ciąg

$$/2.1/ \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} H(x^k - {}_ix^k), \; n \in \mathbb{N} \right)$$

jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}^N$.

Ciąg $(({}_ix^1, \ldots, {}_ix^N), i \in \mathbb{N})$ punktów przestrzeni $\mathbb{R}^N$ nazywamy B_N - podstawowym jeżeli ciąg

$$/2.2/ \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, u^k \, {}_ix^k, \; n \in \mathbb{N} \right),$$

przy czym $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{Z}$, a $u^k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, N$; jest punktowo zbliżony na $\mathbb{R}^N$ do funkcji ciągłej.

Wniosek 2.1.

Jeżeli ciąg $\left(\left({}_i x^1, \ldots, {}_i x^N\right), i \in \mathbb{N}\right)$ jest P_N - podstawowy, to jest on B_N - podstawowy.

W niepustych, co można łatwo stwierdzić, rodzinach ciągów odpowiednio P_N-, B_N - podstawowych wprowadzamy relacje odpowiednio $\widetilde{P}_N$, $\widetilde{B}_N$ w następujący sposób

$$\left(\left({}_i x^1, \ldots, {}_i x^N\right), i \in \mathbb{N}\right) \widetilde{P}_N \left(\left({}_i \bar{x}^1, \ldots, {}_i \bar{x}^N\right), i \in \mathbb{N}\right) \Leftrightarrow$$

/2.3/
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_i x^k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_i \bar{x}^k\right),$$

$$\left(\left({}_i x^1, \ldots, {}_i x^N\right), i \in \mathbb{N}\right) \widetilde{B}_N \left(\left({}_i \bar{x}^1, \ldots, {}_i \bar{x}^N\right), i \in \mathbb{N}\right) \Leftrightarrow$$

/2.4/
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, u^k\, {}_i x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, u^k\, {}_i \bar{x}^k .$$

Tak określone relacje okazują się relacjami równoważnościowymi i jako takie dzielą rodziny ciągów odpowiednio P_N- , B_N- podstawowych na rozłączne klasy abstrakcji.

Definicja 2.1.

N-wymiarowym P-wektorem losowym $\left[x^1, \ldots, x^N\right]_P$ nazywamy klasę abstrakcji względem relacji $\widetilde{P}_N$. N-wymiarowym B-wektorem losowym $\left[x^1, \ldots, x^N\right]_B$ nazywamy klasę abstrakcji względem relacji $\widetilde{B}_N$. N-wymiarowym wektorem losowym $\left[x^1, \ldots, x^N\right]$ nazywamy P-wektor losowy lub B-wektor losowy.

Wniosek 2.2.

Jeżeli $\left[x^1, \ldots, x^N\right]_P$ jest N-wymiarowym P-wektorem losowym, to istnieje dokładnie jeden taki N-wymiarowy B-wektor losowy $\left[x^1, \ldots, x^N\right]_B$, że

/2.5/ $$\left[x^1, \dots , x^N\right]_P \subset \left[x^1, \dots , x^N\right]_B .$$

Istotnie fakt ten wynika z wniosku 2.1.

Wniosek 2.3.

Jeżeli $\left[x^1, \dots , x^N\right]_B$ jest N-wymiarowym B-wektorem losowym, to istnieje dokładnie jeden taki N-wymiarowy P-wektor losowy $\left[x^1, \dots , x^N\right]_P$, że

/2.6/ $$\left[x^1, \dots , x^N\right]_P \subset \left[x^1, \dots , x^N\right]_B .$$

Istotnie z twierdzenia GLIWIENKI [10] wynika, że dla każdego ciągu $\left(\left({}_ix^1, \dots , {}_ix^N\right), i \in \mathbb{N}\right)$ B_N--podstawowego istnieje taki P_N-podstawowy ciąg $\left(\left({}_i\bar{x}^1, \dots , {}_i\bar{x}^N\right), i \in \mathbb{N}\right)$, że

/a/ $$\left(\left({}_ix^1, \dots , {}_ix^N\right), i \in \mathbb{N}\right) \tilde{B}_N \left(\left({}_i\bar{x}^1, \dots , {}_i\bar{x}^N\right), i \in \mathbb{N}\right)$$

Tak więc $\left[x^1, \dots , x^N\right]_P$ jest zbiorem tych wszystkich ciągów $\left(\left({}_ix^1, \dots , {}_ix^N\right), i \in \mathbb{N}\right)$ B_N-podstawowych, dla których ciąg

/b/ $$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_ix^k\right), \quad n \in \mathbb{N}\right)$$

jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}^N$.

Twierdzenie 2.1.

Jeżeli $\left[x^1, \dots , x^N\right]_P$ jest N-wymiarowym P-wektorem losowym, to istnieją średnie

/2.7/ $$\left\langle \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - x^k\right) \right\rangle ,$$

/2.8/ $$\left\langle \prod_{k=1}^{N} \delta\left(x^k - x^k\right) \right\rangle ,$$ δ - dystrybucja DIRACA ,

/2.9/ $$\left\langle \prod_{k=1}^{N} \exp\left(i\, u^k x^k\right) \right\rangle ,$$

na wektorze losowym $\left[x^1, \ldots , x^N\right]_P$.

<u>Dowód.</u>

Istnienie średniej /2.7/ wynika wprost z P_N- podstawowości i określenia relacji $\widetilde{P}_N$. Dla dowodu istnienia średniej /2.8/ obliczmy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \delta\left(x^k - {}_i x^k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^N}{\partial x^1 \ldots \partial x^N} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_i x^k\right) =$$

/a/

$$= \frac{\partial^N}{\partial x^1 \ldots \partial x^N} \left\langle \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - x^k\right) \right\rangle ,$$

która jak się okazuje istnieje i jest identyczna dla każdego ciągu $\left(\left({}_i x^1, \ldots , {}_i x^N\right) , i \in \mathbb{N}\right) \in \left[x^1, \ldots , x^N\right]_P$, gdyż prawa strona równości /a/ ma tę własność. Dla dowodu istnienia średniej /2.9/ obliczmy granicę

/b/ $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, u^k {}_i x^k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\, u^k x^k\right) \delta\left(x^k - {}_i x^k\right) dx^k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \sum_{k=1}^{N} u^k x^k\right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \delta(x^k - {}_i x^k)\, dx^1 \ldots dx^N =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \sum_{k=1}^{N} u^k x^k\right) \left\langle \prod_{k=1}^{N} \delta(x^k - x^k) \right\rangle dx^1 \ldots dx^N ,$$

która jak się okazuje istnieje i jest identyczna dla dowolnedo ciągu $\left(({}_i x^1, \ldots , {}_i x^N) , i \in \mathbb{N}\right) \in [x^1, \ldots , x^N]_P$, gdyż prawa strona równości /b/ ma tę własność. Dla uzasadnienia przeliczeń /a/ i /b/ dodajmy, że w /a/ skorzystaliśmy z przemienności granicy dystrybucyjnej z pochodną dystrybucyjną [1] , a w /b/ z ciągłości transformacji [16].

Twierdzenie 2.2.

Jeżeli $[x^1, \ldots , x^N]_B$ jest N-wymiarowym B-wektorem losowym, to istnieją średnie /2.7/, /2.8/ i /2.9/ na $[x^1, \ldots , x^N]_B$.

Dowód.

Istnienie średniej /2.9/ wynika wprost z B_N-podstawowości i określenia relacji $\widetilde{B}_N$. Dalej z twierdzenia ustalającego zależność pomiędzy zbieżnością ciągu dystrybuant a zbieżnością ciągu funkcji charakterystycznych wynika, że ciągi postaci /2.1/, gdzie $\left(({}_i x^1, \ldots , {}_i x^N), i \in \mathbb{N}\right) \in [x^1, \ldots , x^N]_B$, są słabo zbieżne do funkcji lokalnie całkowalnych równych prawie wszędzie, zatem są zbieżne dystrybucyjnie do tej samej dystrybucji, co dowodzi istnienia średniej /2.7/. Dowód istnienia średniej /2.8/ jest taki sam w dowodzie twierdzenia 2.1.

Definicja 2.2.

Dystrybuantę, gęstością, funkcję charakterystyczną N-wymiarowego P-wektora losowego $[x^1, \ldots , x^N]_P$ nazywamy odpowiednio średnie /2.7/, /2.8/, /2.9/ na $[x^1, \ldots , x^N]_P$.
Gęstością, funkcję charakterystyczną N-wymiarowego B-wektora losowego $[x^1, \ldots , x^N]_B$ nazywamy odpowiednio średnie /2.8/,

/2.9/ na $[x^1, \ldots, x^N]_B$. Dystrybuantą N-wymiarowego B-wektora losowego $[x^1, \ldots, x^N]_B$ nazywamy funkcję N-wymiarowo lewostronnie ciągłą, która traktowana jako dystrybucja równa jest średniej /2.7/.

Wniosek 2.4.

Jeżeli $[x^1, \ldots, x^N]_P \subset [x^1, \ldots, x^N]_B$, to dystrybuanta, gęstość, funkcja charakterystyczna N-wymiarowego P-wektora losowego $[x^1, \ldots, x^N]_P$ odpowiednio równe dystrybuancie, e gęstości, funkcji charakterystycznej N-wymiarowego B-wektora losowego $[x^1, \ldots, x^N]_B$.

Wniosek 2.5.

Dystrybuanta $G(x^1, \ldots, x^N)$ N-wymiarowego wektora losowego ma następujące własności:

/1/ N--wymiarowa niemalejącość,

/2/ N--wymiarowa lewostronna ciągłość.

/3/ $\lim\limits_{x^k \to -\infty} G(x^1, \ldots, x^k, \ldots, x^N) = 0$, $k \in \{1, \ldots, N\}$

/4/ $\lim\limits_{\substack{x^1 \to \infty \\ \vdots \\ x^N \to \infty}} G(x^1, \ldots, x^N) = 1$.

Wniosek 2.6.

Gęstość $g(x^1, \ldots, x^N)$ N-wymiarowego wektora losowego jest N-wymiarową dstrybucją nieujemną i posiada własności:

/1/ $$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(x^1, \ldots, x^N)\, dx^1, \ldots, dx^N = 1$$

/2/ $$g(x^1, \ldots, x^N) = \frac{\partial^N}{\partial x^1 \ldots \partial x^N} G(x^1, \ldots, x^N),$$

przy czym $G(x^1, \ldots, x^N)$ oznacza dystrybuantę danego wektora losowego.

Wniosek 2.7.

Funkcja charakterystyczna $\Theta\left(u^1,\dots,u^N\right)$ N-wymiarowego wektora losowego ma własności:

/1/ $\left|\Theta\left(u^1,\dots,u^N\right)\right| \leqslant 1$, $\Theta\left(0,\dots,0\right) = 1$

/2/ $\Theta\left(u^1,\dots,u^N\right) = \mathcal{F}_N\left(g\left(x^1,\dots,x^N\right)\right)\left(u^1,\dots,u^N\right)$,

gdzie $g\left(x^1,\dots,x^N\right)$ jest gęstością tego wektora losowego, a $\mathcal{F}_N$ - oznacza N-wymiarową transformację FOURIERA [16] .

§ 3. Istotne realizacje wektora losowego

Definicja 3.1.

Ciągiem realizacji N-wymiarowego wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ nazywamy każdy reprezentant $\left(\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right),\ i\in\mathbb{N}\right)$ klasy abstrakcji $\left[X^1,\dots,X^N\right]$, a realizacją każdy wyraz dowolnego ciągu realizacji. Istotną realizacją N-wymiarowego wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ nazywamy każdą taką realizację $\left({}_oX^1,\dots,{}_oX^N\right)$, że

/3.1/ $$\left({}_oX^1,\dots,{}_oX^N\right) \in \operatorname{supp} g\left(x^1,\dots,x^N\right) ,$$

gdzie $\operatorname{supp} g\left(x^1,\dots,x^N\right)$ oznacza nośnik gęstości tego wektora.

Oznaczmy przez $\mathcal{J}\left[X^1,\dots,X^N\right]$ zbiór wszystkich ciągów realizacji wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$, których każdy wyraz jest istotną realizacją tego wektora, a przez $R\left[X^1,\dots,X^N\right]$ krótko przez R gdy wektor jest ustalony, zbiór wszystkich istotnych realizacji N-wymiarowego wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$. Z wniosku 2.4 otrzymujemy natychmiast wniosek.

Wniosek 3.1.

/3.2/ $$R\left[X^1,\dots,X^N\right]_P = R\left[X^1,\dots,X^N\right]_B \neq \emptyset .$$

Twierdzenie 3.1.

Jeżeli $\left[X^1, \ldots, X^N\right]_P$ jest N-wymiarowym P-wektorem losowym, to $\mathcal{J}\left[X^1, \ldots, X^N\right]_P \neq \emptyset$

Dowód.

Niech $\left({}_i\xi \ , i \in \mathbb{N}\right)$ będzie takim ciągiem niezależnych [10] funkcji mierzalnych, określonych na przestrzeni $\left(\mathcal{M}, \mathfrak{M}, \mu\right)$ z miarą μ unormowaną, o wartościach w przestrzeni $\mathbb{R}^N$, że

$$/a/ \quad \mu\left({}_i\xi < x\right) = G(x)\ , \ i \in \mathbb{N}\ , \quad x = \left(x^1, \ldots, x^N\right) \in \mathbb{R}^N$$

gdzie $G(x)$ jest dystrybusntą P-wektora losowego $\left[X^1,\ldots,X^N\right]_P$. Wówczas z uogólnienia twierdzenia GLIWIENKI na przypadek wielowymiarowy [17] wynika, że ciąg

$$/b/ \quad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H\left(x - {}_i\xi\right) \qquad , \quad n \in \mathbb{N}\right)$$

jest jednostajnie zbieżny do $G(x)$ na takim zbiorze $M_0 \subset \mathcal{M}$ że $\mu\left(M_0\right) = 1$. Pokażemy, że $\mu\left(M_1\right) = 1$, gdzie

$$/c/ \quad M_1 := \left\{m \in M_0 : \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} {}_i\xi(m) \in \operatorname{supp} g(x)\right\} ,$$

przy czym

$$/d/ \quad g\left(x^1, \ldots, x^N\right) = \frac{\partial^N}{\partial x^1 \ldots \partial x^N} G\left(x^1, \ldots, x^N\right) .$$

Obliczmy w tym celu

$$/e/ \quad \mu\left(M_0 \setminus M_1\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left\{m \in M_0 : {}_i\xi(m) \notin \operatorname{supp} g(x)\right\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left\{m \in M_0 + {}_i\xi(m) \notin \operatorname{supp} g(x)\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \operatorname{supp} g(x)} g(x)\, dx = 0.$$

Połóżmy dla dowolnie ustalonego $m \in M_1$

/f/ $$\left({}_i x^1, \dots , {}_i x^N\right) = {}_i\xi(m), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Widoczne jest, że ciąg

$$\left(\left({}_i x^1, \dots , {}_i x^N\right), \ i \in \mathbb{N}\right) \in \mathcal{J}\left[x^1, \dots , x^N\right]_P .$$

Z twierdzenia 3.1. i wniosku 2.3. wynika wniosek

Wniosek 3.2.

Jeżeli $\left[x^1, \dots , x^N\right]_B$ jest N-wymiarowym B-wektorem losowym, to istnieje dokładnie jeden taki N-wymiarowy P-wektor losowy, że

/3.4/ $$\mathcal{J}\left[x^1,\dots,x^N\right]_P \subset \mathcal{J}\left[x^1,\dots,x^N\right]_B \subset \left[x^1,\dots,x^N\right]_B .$$

§ 4. Momenty, korelacja i quasi-momenty wektora losowego.

Niech $\left[x^1, \dots , x^N\right]$ będzie N-wymiarowym wektorem losowym, a $G\left(x^1, \dots , x^N\right)$ jego dystrybuantę.

Definicja 4.1.

Momentem $m^{j_1, \dots , j_s}$ rzędu s, $j_p \in \{1, \dots , N\}$, $p = 1, \dots , s$; N-wymiarowego wektora losowego $\left[x^1,\dots,x^N\right]$ nazywamy liczbę

/4.1/ $$m^{j_1,\dots,j_s} := \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x^{j_1} \dots x^{j_s} \, dG\left(x^1,\dots,x^N\right).$$

Jeśli $\Theta\left(u^1, \dots , u^N\right)$ jest funkcję charakterystyczną N-wymiarowego wektora losowego $\left[x^1, \dots , x^N\right]$ i istnieje skończony moment $m^{j_1, \dots, j_s}$ rzędu s, to zachodzi równość

$$/4.2/ \quad m^{j_1,\dots,j_s} = i^{-s} \left. \frac{\partial^s \theta(u^1,\dots,u^N)}{\partial u^{j_1},\dots,\partial u^{j_s}} \right|_{u^1=\dots=u^N=0} ,$$

przy czym pochodna cząstkowa występująca we wzorze /4.2/ istnieje i jest funkcją ciągłą.

Jeżeli funkcja charakterystyczna $\theta(u^1,\dots,u^N)$ N-wymiarowego wektora losowego $[X^1, \dots, X^N]$ jest funkcją analityczną, to można ją przedstawić w postaci

/4.3/

$$\theta(u^1,\dots,u^N) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} m^{j_1,\dots,j_s} u^{j_1} \dots u^{j_s}.$$

<u>Lemat 3.1.</u>

Jeżeli $({}_i x, i \in \mathbb{N})$ jest takim ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych, że dla każdego $s \in \mathbb{N}$ istnieje granica

$$/4.4/ \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ({}_i x)^s = m_s ,$$

to istnieje granica

$$/4.5/ \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp i \, ({}_i x)$$

i zachodzi równość

$$/4.6/ \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp i \, ({}_i x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} m_s .$$

Dowód.

Wystarczy wykazać, że

/a/ $$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{N_0\in\mathbb{N}}\ \bigwedge_{n>N_0}\left|\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^s}{s!}({}_ix)^s-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{i^s}{s!}m_s\right|<\varepsilon.$$

Ustalmy $\varepsilon>0$. Wówczas

/b/ $$\bigvee_{n_1\in\mathbb{N}}\ \bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\ \sum_{s=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{s!}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({}_ix)^s-m_s\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

/c/ $$\bigvee_{N_0\in\mathbb{N}}\ \bigwedge_{n\geq N_0}\ \bigwedge_{s\leq n_1}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({}_ix)^s-m_s\right|<\varepsilon/2n_1$$

Wówczas dla $n>N_0$.

/d/ $$\left|\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^s}{s!}({}_ix)^s-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{i^s}{s!}m_s\right|\leq$$

$$\leq\sum_{s=1}^{n_1}\frac{1}{s!}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({}_ix)^s-m_s\right|+\sum_{s=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{s!}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({}_ix)^s-m_s\right|<$$

$$<n_1\cdot\frac{\varepsilon}{2n_1}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Twierdzenie 3.1.

Jeżeli $[X^1,\ldots,X^N]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym oraz istnieje ograniczony ciąg $\left(({}_ix_0^1,\ldots,{}_ix_0^N),\ i\in\mathbb{N}\right)\in$ $\in J[X^1,\ldots,X^N]$, to dla dowolnych $j_1,\ldots,j_s\in\{1,\ldots,N\}$ $s\in\mathbb{N}$ istnieje średnia

$\langle X^{j_1},\ldots,X^{j_s}\rangle$ na $J[X^1,\ldots,X^N]$ i zachodzi równość

$$/4.7/ \qquad \langle x^{j_1}, \ldots, x^{j_s} \rangle = m^{j_1, \ldots, j_s} ,$$

gdzie $m^{j_1,\ldots,j_s}$ jest momentem s-tego rzędu wektora losowego $[x^1, \ldots, x^N]$. Ponadto funkcja charakterystyczna tego wektora daje się przedstawić w postaci /4.3/.

Dowód.

Z założeń wynika, że każdy element zbioru $\mathcal{J}[x^1, \ldots, x^N]$ jest ciągiem ograniczonym. Niech $\left(({}_ix^1_o, \ldots, {}_ix^N_o), i \in \mathbb{N}\right) \in \mathcal{J}[x^1, \ldots, x^N]$. Granica

/a/

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {}_ix_o^{j_1} \cdot \ldots \cdot {}_ix_o^{j_s} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x^{j_1} \cdot \ldots \cdot x^{j_s} \cdot$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{N} \delta\left(x^k - {}_ix_o^k\right) dx^1 \ldots dx^N = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x^{j_1} \cdot \ldots \cdot x^{j_s}\, g\left(x^1, \ldots, x^N\right) \cdot$$

$$\cdot dx^1, \ldots, dx^N = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x^{j_1} \ldots x^{j_s} \, dG\left(x^1, \ldots, x^N\right)$$

dowodzi istnienia średniej $\langle x^{j_1} \cdot \ldots \cdot x^{j_s} \rangle$ na $\mathcal{J}[x^1, \ldots, x^N]$ i równości /4.7/. Dalej korzystając z niezależności definicji funkcji charakterystycznej od wyboru ciągu realizacji danego wektora losowego zauważmy, że

$$/b/ \qquad \Theta\left(u^1, \ldots, u^N\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp i \sum_{k=1}^{N} u^k \, {}_ix_o^k .$$

Ponieważ ciąg $\left(\sum_{k=1}^{N} u^k \, {}_ix_o^k , \; i \in \mathbb{N} \right)$ jest ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych oraz

$$/c/ \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} u^k \, {}_ix_o^k \right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} {}_iX_o^{j_1} \cdot \ldots \cdot {}_iX_o^{j_s} \, u^{j_1} \cdot \ldots \cdot u^{j_s} =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} \langle X^{j_1} \cdot \ldots \cdot X^{j_s} \rangle \, u^{j_1} \cdot \ldots \cdot u^{j_s} \, ,$$

więc korzystając z /4.7/ i lematu 3.1 /równość /4.6// uzyskujemy

$$/d/ \quad \theta\left(u^1,\dots,u^N\right) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} m^{j_1,\dots,j_s} \, u^{j_1} \ldots u^{j_s} .$$

<u>Definicja 4.2.</u>

Korelacjami $k^{j_1,\dots,j_s}$ rzędu s, $j_p \in \{1,\dots,N\}$, $p=1,\dots,s$; N-wymiarowego wektora losowego $[X^1,\dots,X^N]$ nazywamy symetryczne współczynniki przedstawienia funkcji charakterystycznej tego wektora losowego w postaci

$$/4.8/ \quad \theta\left(u^1,\dots,u^N\right) = \exp\left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k^{j_1,\dots,j_s} \, u^{j_1} \cdot \ldots \cdot u^{j_s} \right\} .$$

W pracy [4] podano związki pomiędzy korelacjami i momentami N-wymiarowego wektora losowego. Zależność korelacji od momentów ustala wzór

$$/4.9/ \quad k^{j_1,\dots,j_s} = s! \sum_{n=1}^{s} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n \geq 1 \\ \sigma_1+\dots+\sigma_n = s}} \frac{M^{(j_1,\dots,j_s)(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!}$$

gdzie

$$/4.9a/ \quad M^{j_1,\dots,j_s}(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = m^{j_1,\dots,j_{\sigma_1}} \cdot m^{j_{\sigma_1+1},\dots,j_{\sigma_1+\sigma_2}} \cdot \ldots \cdot m^{j_{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+1},\dots,j_s}$$

a $M^{j(1,\dots,j_s)}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ oznacza symetryzację $M^{j_1,\dots,j_s}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$.

Zależność momentów od korelacji jest następująca

$$/4.10/ \quad m^{j_1,\dots,j_s} = s!\sum_{n=1}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n \geq 1 \\ \sigma_1+\dots+\sigma_n = s}} \frac{K^{j(1,\dots,j_s)}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!},$$

gdzie

$$K^{j_1,\dots,j_s}(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = k^{j_1,\dots,j_{\sigma_1}} \cdot k^{j_{\sigma_1+1},\dots,j_{\sigma_2+\sigma_1}} \cdot \ldots \cdot k^{j_{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+1},\dots,j_s}$$

a $K^{j(1,\dots,j_s)}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ oznacza symetryzację $K^{j_1,\dots,j_s}$.

<u>Definicja 4.3.</u>

Quasimomentami $b^{j_1,\dots,j_s}$ rzędu s, $j_p \in \{1,\dots,N\}$, $p = 1,\dots,s$; N-wymiarowego wektora losowego $[X^1,\dots,X^N]$ nazywamy symetryczne współczynniki spełniające zależność

$$/4.11/ \quad \exp\left\{\sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k^{j_1,\dots,j_s} u^{j_1} \cdot \ldots \cdot u^{j_s}\right\} = 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1,\dots,j_s} u^{j_1} \cdot \ldots \cdot u^{j_s}.$$

W pracy /4/ wyprowadzono następujące związki pomiędzy korelacjami i quasimomentami:

/4.12/ $$b^{j_1,\ldots,j_s} = s!\sum_{n=1}^{[s/3]}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\geq 3\\ \sigma_1+\ldots+\sigma_n=s}}\frac{K^{j(1,\ldots,j_s)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}{\prod_{i=1}^{n}\sigma_i!},$$

/4.13/ $$k^{j_1,\ldots,j_s} = s!\sum_{n=1}^{[s/3]}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\geq 3\\ \sigma_1+\ldots+\sigma_n=s}}\frac{B^{j(1,\ldots,j_s)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}{\prod_{i=1}^{n}\sigma_i!},$$

gdzie

/4.13a/ $$B^{j_1,\ldots,j_s}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) =$$

$$= b^{j_1,\ldots,j_{\sigma_1}} \cdot b^{j_{\sigma_1+1},\ldots,j_{\sigma_1+\sigma_2}} \cdot\ldots\cdot b^{j_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1},\ldots,j_s}$$

a $B^{j(1,\ldots,j_s)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ oznacza symatryzację $B^{j_1,\ldots,j_s}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$.

§ 5. Typa wektorów losowych.

Definicja 5.1.

Wektorem ciągłym nazywamy taki N-wymiarowy wektor losowy, którego gęstość jest dystrybucją regularną. Wektorem dyskretnym nazywamy taki N-wymiarowy wektor losowy, którego zbiór istotnych realizacji nie posiada punktu skupienia. Wektorem zdeterminowanym nazywamy taki N-wymiarowy wektor losowy, którego zbiór istotnych realizacji jest jednoelementowy.

Lemat 5.1.

Jeżeli $[X^1,\ldots,X^N]_B$ jest N-wymiarowym B-wektorem losowym o dystrybuancie $G(x^1,\ldots,x^N)$ ciągłej, to każdy jego ciąg realizacji jest P_N-podstawowy.

Dowód.

Oznaczmy

/a/ $$G_n\left(x^1,\dots,x^N\right) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_ix^k\right).$$

Zadajmy dowolne $\varepsilon > 0$. Dla każdego $k \in \{1,\dots,N\}$ istnieje taki ciąg $\left(x_o^k,\dots,x_{m_k}^k\right)$, $m_k \in \mathbb{N}$, że

/b/ $$-\infty = x_o^k \le x_1^k \le \dots \le x_{m_k}^k = +\infty ,$$

$$G\left(+\infty ,\dots,+\infty , x_{i+1}^k, +\infty ,\dots,+\infty\right) -$$
$$- G\left(+\infty ,\dots,+\infty , x_i^k, +\infty ,\dots,+\infty\right) < \varepsilon/2N$$

Ustalmy teraz $\left(x^1,\dots,x^N\right) \in \mathbb{R}^N$. Znajdą się wówczas takie i_k, że

/c/ $$x_{i_k}^k \le x^k \le x_{i_k+1}^k , \; k=1,\dots,N .$$

Stąd

/d/ $$G\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_N}^N\right) \le G\left(x^1,\dots,x^N\right) \le G\left(x_{i_1+1}^1,\dots,x_{i_N+1}^N\right)$$

oraz

/e/ $$G_n\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_N}^N\right) \le G_n\left(x^1,\dots,x^N\right) \le G_n\left(x_{i_1+1}^1,\dots,x_{i_N+1}^N\right).$$

Dalej

/f/ $$G\left(x_{i_1+1}^1,\dots,x_{i_N+1}^N\right) - G\left(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_N}^N\right) \le \sum_{k=1}^{N} G\left(+\infty ,\dots\right.$$
$$\dots,+\infty , x_{i_k+1}^k, +\infty ,\dots,+\infty\Big) - G\Big(+\infty ,\dots,+\infty , x_{i_k}^k, +\infty \dots$$
$$\left.\dots,+\infty\right) < N \cdot \varepsilon/2N = \varepsilon/2 .$$

Dla każdego punktu $\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right)$, $i_k \in \{0,1,\ldots,m_k\}$, $k=1,\ldots,N$

$$/g/ \quad \lim_{n\to\infty} G_n\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right) = G\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right).$$

Punktów $\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right)$, $i_k \in \{0,1,\ldots,m_k\}$, $k=1,\ldots,N$ jest skończona ilość, zatem istnieje takie $r \in \mathbb{N}$, że dla $n > r$ jednocześnie dla wszystkich punktów spełnione są nierówności

$$/h/ \quad \left| G_n\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right) - G\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right)\right| < \varepsilon/2 .$$

Ponieważ

$$/i/ \quad G_n\left(x^1,\ldots,x^N\right) - G\left(x^1,\ldots,x^N\right) \leq$$

$$\leq G_n\left(x^1_{i_1+1},\ldots,x^N_{i_N+1}\right) - G\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right) \leq G_n\left(x^1_{i_1+1},\ldots,x^N_{i_N+1}\right) -$$

$$- G\left(x^1_{i_1+1},\ldots,x^N_{i_N+1}\right) + \varepsilon/2 \leq \left| G_n\left(x^1_{i_1+1},\ldots,x^N_{i_N+1}\right) -\right.$$

$$\left. - G\left(x^1_{i_1+1},\ldots,x^N_{i_N+1}\right)\right| + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

oraz

$$/j/ \quad G\left(x^1,\ldots,x^N\right) - G_n\left(x^1,\ldots,x^N\right) \leq$$

$$\leq G\left(x^1_{i_1+1},\ldots,x^N_{i_N+1}\right) - G_n\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right) \leq G\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right) +$$

$$+ \varepsilon/2 - G_n\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right) \leq \left| G\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right) - G_n\left(x^1_{i_1},\ldots,x^N_{i_N}\right)\right| +$$

$$+ \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon ,$$

więc

/k/ $$\left| G_n\left(x^1,\dots,x^N\right) - G\left(x^1,\dots,x^N\right)\right| < \varepsilon$$

dla $n > r$, co kończy dowód.

Twierdzenie 5.1.

Jeżeli $G\left(x^1,\dots,x^N\right)$ jest dystrybuantą B-wektora ciągłego $\left[x^1,\dots,x^N\right]_B$ i P-wektora ciągłego $\left[x^1,\dots,x^N\right]_P$, to

/5.1/ $$\left[x^1,\dots,x^N\right]_P = \left[x^1,\dots,x^N\right]_B$$

Dowód.

Zawieranie

/a/ $$\left[x^1,\dots,x^N\right]_P \subset \left[x^1,\dots,x^N\right]_B$$

wynika z wniosku 2.2. Inkluzja odwrotna wynika wprost z lematu 4.1.

Twierdzenie 5.2.

Dystrybuanta, gęstości i funckja charakterystyczna odpowiednio $G\left(x^1,\dots,x^N\right)$, $g\left(x^1,\dots,x^N\right)$, $\Theta\left(u^1,\dots,u^N\right)$ wektora dyskretnego mają następujące postacie:

/5.2/ $$G\left(x^1,\dots,x^N\right) = \sum_{\left(y^1,\dots,y^N\right)\in R} p_{y^1,\dots,y^N} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - y^k\right),$$

/5.3/ $$g\left(x^1,\dots,x^N\right) = \sum_{\left(y^1,\dots,y^N\right)\in R} p_{y^1,\dots,y^N} \prod_{k=1}^{N} \delta\left(x^k - y^k\right),$$

/5.4/ $$\Theta\, u^1,\dots,u^N = \sum_{\left(y^1,\dots,y^N\right)\in R} p_{y^1,\dots,y^N} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, u^k y^k .$$

Dowód.

Z definicji wektora dyskretnego wynika, że

/a/ $$\operatorname{supp} g\left(x^1,\dots,x^N\right) = R$$

nie posiada punktów skupienia, zatem dystrybucja $g\left(x^1,\dots,x^N\right)$ jest kombinacją liniową dystrybucji δ - Diraca i jej pochodnych. Wykorzystując fakt, że jako gęstość jest ona pochodną dystrybucyjną funkcji lokalnie całkowalnej otrzymujemy /5.3/. Wzory /5.2/ i /5.4/ wynikają odpowiednio z własności /2/ gęstości i /3/ funkcji charakterystycznej.

Z twierdzenia 5.2 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 5.1.

Dystrybuanta $G\left(x^1,\dots,x^N\right)$, gęstość $g\left(x^1,\dots,x^N\right)$, funkcja charakterystyczna $\Theta\left(u^1,\dots,u^N\right)$ wektora zdeterminowanego mają odpowiednio postacie:

/5.5/ $$G\left(x^1,\dots,x^N\right) = \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - y^k\right),$$

/5.6/ $$g\left(x^1,\dots,x^N\right) = \prod_{k=1}^{N} \delta\left(x^k - y^k\right),$$

/5.7/ $$\Theta\left(u^1,\dots,u^N\right) = \prod_{k=1}^{N} \exp i\, u^k y^k ,$$

gdzie

/5.8/ $$R = \left\{\left(y^1,\dots,y^N\right)\right\}.$$

Wniosek 5.2.

N-wymiarowy wektor losowy jest wektorem zdeterminowanym wtedy i i tylko wtedy, gdy wszystkie korelacje rzędu s, $s > 1$, są równe zeru.

Definicja 5.2.

Wektorem normalnym /guassowskim/ nazywamy taki N-wymiarowy wektor losowy, którego wszystkie korelacje rzędu s, s > 2, są równe zeru.
Odnotujmy, że funkcja charakterystyczna $\tilde{\theta}(u^1,\dots,u^N)$ i gęstość $\tilde{g}(x^1,\dots,x^N)$ wektora normalnego wyrażają się odpowiednio wzorami:

$$/5.9/\quad \theta(u^1,\dots,u^N) = \exp\left\{ i \sum_{l=1}^{N} K^l u^l - \frac{1}{2} \sum_{l_1,l_2=1}^{N} k^{l_1,l_2} u^{l_1} u^{l_2} \right\},$$

$$/5.10/\quad \tilde{g}(x^1,\dots,x^N) = (2\pi)^{-N/2} (\det K)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l_1,l_2=1}^{N} k_{-1}^{l_1,l_2} \cdot (x^{l_1} - k^{l_1})(x^{l_2} - k^{l_2}) \right\},$$

gdzie K oznacza macierz korelacji rzędu 2, a $k_{-1}^{l_1,l_2}$ elementy macierzy odwrotnej K .

W pracy [4] wyrażono gęstość $g(x^1,\dots,x^N)$ dość szerokiej klasy wektorów losowych $[x^1,\dots,x^N]$, których funkcje charakterystyczne dają się przedstawić w postaci /4.3/ oraz dla których szereg występujący po prawej stronie wzoru /4.11/ jest zbieżny w przestrzeni N-wymiarowych dystrybucji temperowanych; w postaci

$$/5.11/\quad g(x^1,\dots,x^N) = \tilde{g}(x^1,\dots,x^N) +$$

$$+ \sum_{s=3}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial^s}{\partial x^{j_1}\dots\partial x^{j_s}} \tilde{g}(x^1,\dots,x^N),$$

gdzie $\tilde{g}(x^1,\dots,x^N)$ dane jest wzorem /5.10/, a $b^{j_1,\dots,j_s}$ są quasimomentymi rzędu s wektora losowego $[x^1,\dots,x^N]$.

§ 6. Zdarzenie i prawdopodobieństwo.

Probabilistykę uważa się wciąż za dyscyplinę młodą, chociażby ze względu na coraz to nowe spojrzenia na fundamentalne pojęcia tej teorii - zdarzenie i prawdopodobieństwo. Najczęściej prze-z zdarzenie rozumie się odpowiedni podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych, a od rodziny wszystkich zdarzeń żąda się by stanowiła σ - ciało. W innych ujęciach /Logical Probability/ zdarzeniem jest pewne zdanie, a rodzina zdarzeń σ - algebrą Boole'a. Obok prawdopodobieństwa ilościowego /Quantitatiive Probability/ rozważa się też porównawcze /comparative Probability/ i subiektywne /Subjective Probability/ [8]. Najczęściej jednak prawdopodobieństwo jest przeliczalnie addytywną miarą unormowaną określoną na pewnym σ -ciele /Kolmogorowa Calculus/. Niemniej sam Kołmogorow zdaje sobie stprawę z tego, iż "Elementy σ - ciała są po prostu idealizacją zdarzeń rzeczywistych i w otaczającym świecie nic im nie odpowiada" [12], natomiast postulowana w aksjomatyce przeliczalna addytywność nie jest uzasadniona charakterem zdarzeń rzeczywistych lecz tylko wygodną matematyczną konwencją [8].

Prezentowana w niniejszej pracy konstrukcja prawdopodobieństwa jest zgodna z jego empirycznym odpowiednikiem - frekwencją, stąd też konieczna jest rezygnacja z pewnych konwencji. Obecnie podamy definicję zdarzenia i prawdopodobieństwa zdarzenia wyznaczonego przez ustalony wektor losowy.

Niech $[x^1,\ldots,x^N]$ oznacza dowolny N-wymiarowy wektor losowy, a $[x^1,\ldots,x^N]_P$ taki P-wektor losowy, że $[x^1,\ldots,x^N]_P \subset [x^1,\ldots,x^N]$.

Definicja 6.1.

Zdarzeniem wyznaczonym przez N-wymiarowy wektor losowy $[x^1,\ldots,x^N]$ nazywamy taki podzbiór Z przestrzeni $\mathbb{R}^N$, dla którego istnieje średnia $\langle 1\!\!1_Z(x^1,\ldots,x^N)\rangle$ na $J[x^1,\ldots,x^N]_P$

Prawdopodobieństwem $P_{[X^1,\dots,X^N]}(Z)$ zdarzenia Z wyznaczonego przez wektor losowy $[X^1,\dots,X^N]$ nazywamy śrenią $\langle \mathbb{1}_Z(X^1,\dots,X^N)\rangle$ na $J[X^1,\dots,X^N]_P$.

Uwaga 6.1.

Jeżeli $[X^1,\dots,X^N]$ będzie ustalonym N-wymiarowym wektorem losowym, to będziemy mówić krótko: Zdarzenie Z oraz $P(Z)$ zamiast $P_{[X^1,\dots,X^N]}(Z)$. Rodzinę wszystkich zdarzeń wyznaczonych przez wektor losowy $[X^1,\dots,X^N]$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{Z}(X^1,\dots,X^N)$ lub krtóko przez $\mathcal{Z}$, gdy wektor $[X^1,\dots,X^N]$ będzie ustalony.

Twierdzenie 6.1.

Jeżeli $[X^1,\dots,X^N]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym, to zbiór zdarzeń $\mathcal{Z}$ i prawdopodobieństwo P mają następujące własności:

/1/ $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{Z}$, $P(\emptyset) = 0$,

/2/ $Z \in \mathcal{Z} \Rightarrow 0 \leq P(Z) \leq 1$,

/3/ $Z \in \mathcal{Z} \Rightarrow Z' \in \mathcal{Z}$, $P(Z') = 1 - P(Z)$,

/4/ $\mathbb{R}^N \in \mathcal{Z}$, $P(\mathbb{R}^N) = 1$,

/5/ $Z \in \mathcal{Z} \Rightarrow P(Z) = P(Z \cap R)$,

/6/ $Z \cap R = \emptyset \Rightarrow Z \in \mathcal{Z}$, $P(Z) = 0$,

/7/ $R \subset Z \Rightarrow Z \in \mathcal{Z}$, $P(Z) = 1$,

/8/ $Z_1,\dots,Z_m \in \mathcal{Z}$, $Z_k \cap Z_l = \emptyset$, $k \neq l$, $k,l = 1,\dots,m \Rightarrow \bigcup_{l=1}^{m} Z_l \in \mathcal{Z}$, $P\left(\bigcup_{l=1}^{m} P\, Z_l\right) = \sum_{l=1}^{m} P(Z_l)$,

/9/ $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$, $Z_1 \subset Z_2 \Rightarrow Z_2 \setminus Z_1 \in \mathcal{Z}$, $P(Z_1) \leq P(Z_2)$, $P(Z_2 \setminus Z_1) = P(Z_2) - P(Z_1)$.

/10/ $\quad Z_2 \in \mathcal{Z},\ P(Z_2) = 0,\ Z_1 \subset Z_2 \Rightarrow Z_1 \in \mathcal{Z},$

$P(Z_1) = 0,$

/11/ $\quad Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z},\ Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z} \Rightarrow Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z},$

$P(Z_1 \cup Z_2) = P(Z_1) + P(Z_2) - P(Z_1 \cap Z_2),$

/12/ $\quad Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z},\ P(Z_2) = 1 \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z},$

$P(Z_1 \cap Z_2) = P(Z_1).$

Dowód.

/1/ wynika z faktu, iż $\mathbb{1}_{\emptyset}(y) = 0,\ y \in \mathbb{R}^N$, a /2/ z tego, że $0 \leqslant \mathbb{1}_Z(y) \leqslant 1$, dla $y \in \mathbb{R}^N$, i dowolnego zbioru $Z \subset \mathbb{R}^N$. Dla dowodu /3/ zauważmy, że $\mathbb{1}_{Z'}(y) = 1 - \mathbb{1}_Z(y),\ y \in \mathbb{R}^N$. Dalej korzystając z /1.10/, /1.11/ i /1.12/ otrzymuje się /3/. /4/ jest konsekwencją /1/ i /3/. W celu sprawdzenia /5/, /6/ i /7/ wystarczy zauważyć, że

/a/ $\quad \mathbb{1}_Z({}_ix^1,\dots,{}_ix^N) = \mathbb{1}_{Z \cap R}({}_ix^1,\dots,{}_ix^N),$

/b/ $\quad \mathbb{1}_R({}_ix^1,\dots,{}_ix^N) = 1$

dla dowolnej istotnej realizacji $({}_ix^1,\dots,{}_ix^N)$ wektora losowego $[X^1,\dots,X^N]$. /8/ wynika z faktu, iż przy założeniach /8/ mamy

/c/ $$\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{l=1}^{m} Z_l}(y) = \sum_{l=1}^{m} \mathbb{1}_{Z_l}(y),\quad y \in \mathbb{R}^N$$

oraz z /1.11/ i /1.12/. Dla pokazania /9/ zauważmy, że

/d/ $\quad Z_2 = Z_1 \cup (Z_2 \setminus Z_1),\quad Z_1 \cap (Z_2 \setminus Z_1) = \emptyset,$

więc można zastosować /8/. Druga własność podana w punkcie /9/

oraz własność /10/ wynikają z nierówności

/e/ $\mathbb{1}_{Z_1}(y) \leq \mathbb{1}_{Z_2}(y)$

prawdziwej przy założeniach /9/ i /10/. Własności /11/ dowodzi się korzystając z /9/ i /8/. Dla dowodu /12/ przedstawmy $Z_1 \cap Z_2$ w postaci $(Z_1' \cup Z_2')'$ i i zauważmy, że $Z_1', Z_2' \in \mathcal{Z}$ oraz że $P(Z_2') = 0$, więc $Z_1' \cap Z_2' \in \mathcal{Z}$ na podstawie /10/. Korzystając z /11/ otrzymujemy, że $Z_1' \cup Z_2' \in \mathcal{Z}$. Stąd i z /3/ uzyskujemy, że $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}$. Dalej korzystając z /11/, /9/ i /3/ obliczmy $P(Z_1 \cap Z_2) = P((Z_1' \cup Z_2')') = 1 -$
$- P(Z_1' \cup Z_2') = 1 - P(Z_1') - P(Z_2') + P(Z_1' \cap Z_2') = P(Z_1) \cdot P(Z_2)$

/f/

a to kończy dowód.

Twierdzenie 6.2.

Jeżeli $[X^1, \ldots, X^N]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym o dystrybuancie $G(x^1, \ldots, x^N)$, a $(a_j^1, \ldots, a_j^N) \in \mathbb{R}^N$ dla $j \in \{0,1\}$, to $\bigtimes_{k=1}^{N} (-\infty, a_0^k)$, $\bigtimes_{k=1}^{N} [a_1^k, a_0^k)$, $\{(a_0^1, \ldots, a_0^N)\}$ należą do $\mathcal{Z}$ oraz zachodzą równości

/6.1/ $$P\left(\bigtimes_{k=1}^{N} (-\infty, a_0^k)\right) = G(a_0^1, \ldots, a_0^N),$$

/6.2/ $$P\left(\bigtimes_{k=1}^{N} [a_1^k, a_0^k)\right) =$$

$$= \sum_{j_1, \ldots, j_N = 0}^{1} (-1)^{j_1 + \ldots + j_N} G(a_{j_1}^1, \ldots, a_{j_N}^N),$$

/6.3/ $$P\left(\{(a_0^1, \ldots, a_0^N)\}\right) =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_N=0}^{1} (-1)^{r_1+\dots+r_N} G\left(a^1_{j_1},\dots,a^N_{j_N}\right)$$

przy czym

$$/6.3a/ \quad a^k_{r_k} := \begin{cases} a^k_o + 0 & \text{dla } r_k = 0 \\ a^k_o, & \text{dla } r_k = 1 \end{cases}, \quad k = 1,\dots,N$$

<u>Dowód.</u>

Dla wykazania istnienia średniej

$$/a/ \quad \left\langle \mathbb{1}_{\substack{N \\ \times \\ k=1}\left(-\infty\,,\, a^k_o\right)} \left(x^1,\dots,x^N\right) \right\rangle$$

na $J\left[x^1,\dots,x^N\right]_p$ zauważmy, że

$$/b/ \quad \mathbb{1}_{\substack{N \\ \times \\ k=1}\left(-\infty\,,\, a^k_o\right)} \left(x^1,\dots,x^N\right) = \prod_{k=1}^{N} H\left(a^k_o - x^k\right).$$

Zatem na podstawie twierdzenia 2.1. i definicji dystrybuanty otrzymujemy istnienie średniej /a/ i równość /6.1/. Równość /6.2/ i istnienie odpowiedniej średniej wynika z /1.11/ i /1.12/ oraz równości

$$/c/ \quad \mathbb{1}_{\substack{N \\ \times \\ k=1}\left[a^k_1,\, a^k_o\right)} \left(x^1,\dots,x^N\right) = \prod_{k=1}^{N} \left[H\left(a^k_o - x^k\right) - H\left(a^k_1 - x^k\right)\right] =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_N=0}^{1} (-1)^{j_1+\dots+j_N} \prod_{k=1}^{N} H\left(a^k_{j_k} - x^k\right).$$

Dowód równości /6.3/ jest analogiczny do dowodu równości /6.2/ z tym, że obowiązuje tu oznaczenie /6.3a/, a istnienie średniej

$$\left\langle \prod_{k=1}^{N} H\left(a^k_{j_k} - x^k\right) \right\rangle \quad \text{i równości}$$

/d/ $$\left\langle \prod_{k=1}^{N} H\left(a^k_{r_k} - x^k\right) \right\rangle = G\left(a^1_{r_1}, \dots, a^N_{r_N}\right)$$

są zagwarantowane przez jednostajną zbieżność ciągu /2.1/.

<u>Twierdzenie 6.3/</u>

Jeżeli $\left[x^1, \dots, x^N\right]$ jest N-wymiarowym wektorem dyskretnym, to

/1/ $$\left(y^1, \dots, y^N\right) \in R \Rightarrow \left\{\left(y^1, \dots, y^N\right)\right\} \in \mathcal{Z} \;, \; P\left(\left\{\left(y^1, \dots, y^N\right)\right\}\right) = p_{y^1, \dots, y^N} \;,$$

/2/ $$Z \cap R = \left\{y_1, \dots, y_m\right\}, y_l = \left(y^1_l, \dots, y^N_l\right), \; l = 1, \dots, m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Z \in \mathcal{Z} \;, \; P(Z) = \sum_{l=1}^{m} p_{y^1_l, \dots, y^N_l} \;,$$

/3/ $$Z \in \mathcal{Z} \;, \; P(Z) = 1 \Rightarrow R \subset Z \;.$$

<u>Dowód.</u>

/1/ wynika z równości /6.3/ i /6.2/. Własność /2/ wynika z punktów /5/ i /8/ twierdzenia 6.1 i punktu /1/ twierdzenia 6.3. Dla dowodu nie wprost własności /3/ przypuśćmy, że istnieją takie $\left(y^1, \dots, y^N\right) \in R$ i $Z \in \mathcal{Z}$, dla których

/a/ $$\left\{\left(y^1, \dots, y^N\right)\right\} \not\subset Z \;, \; P(Z) = 1$$

oraz

/b/ $$p_{\left(y^1, \dots, y^N\right)} > 0$$

Zatem na podstawie punktu /8/ twierdzenia 6.1. mamy

/c/ $$P\left(Z \cup \left\{\left(y^1,\dots,y^N\right)\right\}\right) = P(Z) + p_{y^1,\dots,y^N} > 1\,,$$

co jest sprzeczne z punktem /2/ twierdzenia 6.1.

Lemat 6.1.

Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym, a $Z_0 \in \mathcal{Z}$ takim zdarzeniem, że $P(Z_0) > 0$, to każdy ciąg $\left(\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right),\ i \in \mathbb{N}\right) \in \mathcal{J}\left[X^1,\dots,X^N\right]_P$ zawiera podciąg $\left(\left({}_{i_j}X^1,\dots,{}_{i_j}X^N\right),\ j \in \mathbb{N}\right)$ o własności

/6.4/ $$\left({}_{i_j}X^1,\dots,{}_{i_j}X^N\right) \in Z_0\,, \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

Dowód.

Załóżmy, że istnieje ciąg $\left(\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right),\ i \in \mathbb{N}\right) \in \mathcal{J}\left[X^1,\dots,X^N\right]_P$ zawierający co najwyżej skończoną ilość wyrazów należących do Z_0.

Wówczas

/a/ $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{Z_0}\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right) = 0$$

co sprzeczne jest z założeniem, że $P(Z_0) > 0$.

Uwaga 6.2.

Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym, to prawdopodobieństwo zdarzeń wyznaczonych przez ten wektor jest określone w szczególności na elementach ciała $\mathcal{Z}_0$ złożonego ze skończonych sum przedziałów lewostronnie domkniętych, prawostronnie otwartych i jest na tym ciele funkcją nieujemną, przeliczalnie addytywną i unormowaną.
Można ją zatem, na podstawie twierdzenia o rozszerzaniu miar, rozszerzyć w sposób jednoznaczny do miar przeliczalnie addy-

tywnej i unormowanej określonej na σ - ciele zbiorów borelowskich w przestrzeni $\mathbb{R}^N$.

§ 7. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń

Niech $[X^1,\dots,X^N]$ będzie N-wymiarowym wektorem losowym, a $[X^1,\dots,X^N]_P$ takim P-wektorem losowym, że $[X^1,\dots,X^N]_P \subset \subset [X^1,\dots,X^N]$, $Z_0 \in \mathcal{Z}\,[X^1,\dots,X^N]$ takim zdarzeniem wyznaczonym przez ten wektor, że $P_{[X^1,\dots,X^N]}(Z_0) > 0$.

Definicja 7.1.

Zdarzeniem wyznaczonym przez N-wymiarowy wektor losowy $[X^1,\dots,X^N]$ względem zdarzenia Z_0 nazywamy taki podzbiór Z przestrzeni $\mathbb{R}^N$, dla którego istnieje średnia warunkowa $\langle \mathbb{1}_Z(X^1,\dots,X^N) | Z_0 \rangle$ względem Z_0 na $\mathcal{J}[X^1,\dots,X^N]_P$. Prawdopodobieństwem zdarzenia Z wyznaczonego przez wektor losowy $[X^1,\dots,X^N]$ względem zdarzenia Z_0 $P_{[X^1,\dots,X^N]}(Z \mid Z_0)$ nazywamy średnią warunkową $\langle \mathbb{1}_Z(X^1,\dots,X^N) \mid Z_0 \rangle$ na $\mathcal{J}[X^1,\dots,X^N]_P$.

Uwaga 7.1.

Jeżeli $[X^1,\dots,X^N]$ będzie ustalonym N-wymiarowym wektorem losowym, to będziemy często mówić krótko zdarzenie Z względem Z_0 opuszczając sformułowanie "wyznaczone przez N-wymiarowy wektor losowy $[X^1,\dots,X^N]$" oraz pisać krótko $P(Z \mid Z_0)$ zamiast $P_{[X^1,\dots,X^N]}(Z \mid Z_0)$. Rodzinę wszystkich zdarzeń wyznaczonych przez wektor $[X^1,\dots,X^N]$ względem zdarzenia Z_0 oznaczać będziemy $\mathcal{Z}(X^1,\dots,X^N \mid Z_0)$ lub krtóko przez $\mathcal{Z}|Z_0$, gdy wektor $[X^1,\dots,X^N]$ będzie ustalony.

Wniosek 7.1.

Jeżeli $[X^1,\dots,X^N]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym $Z_0 \in \mathcal{Z}$ $P(Z_0) > 0$ oraz $Z \in \mathcal{Z} \mid Z_0$, to dla dowolnego ciągu

$\left(\left({}_i x^1,\ldots,{}_i x^N\right),\ i\in \mathbb{N}\right)\in \mathcal{J}\left[x^1,\ldots,x^N\right]_P$ zachodzą równości

/7.1/ $$P\left(z \mid z_o\right)=\left\langle 1\!\!1_z\left(x^1,\ldots,x^N\right) \mid z_o\right\rangle=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(z_o)}\sum_{j=1}^{n(z_p)} 1\!\!1_z\left({}_{i_j(z_o)}x^1,\ldots,{}_{i_j(z_o)}x^N\right).$$

Istotnie równość /7.1/ zachodzi na podstawie definicji 7.1 i równości /1.8/, przy czym warunek $P\left(z_o\right)>0$ gwarantuje zgodnie z lematem 6.1 sensowność rozpatrywania średniej warunkowej $\left\langle 1\!\!1_z\left(x^1,\ldots,x^N\right)\mid z_o\right\rangle$ na $\mathcal{J}\left[x^1,\ldots,x^N\right]_P$ względem z_o.

Korzystając z wniosku 1.1 i punktu /12/ twierdzenia 6.1 łatwo uzyskuje się wniosek.

Wniosek 7.2.

Jeżeli $\left[x^1,\ldots,x^N\right]$ jest N--wymiarowym wektorem losowym, $z_o\in \mathcal{Z}$, $P\left(z_o\right)>0$, to

/1/ $z\cap z_o\in \mathcal{Z} \Rightarrow z\in \mathcal{Z}|z_o,\ P\left(z\mid z_o\right)=\dfrac{P\left(z\cap z_o\right)}{P\left(z_o\right)}$,

/2/ $z\in \mathcal{Z},\ P\left(z_o\right)=1 \Rightarrow z\in \mathcal{Z}|z_o,\ P\left(z\mid z_o\right)=P(z)$.

Analogicznie jak dowody twierdzeń 6.1 i 6.2 przebiega dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 7.1.

Jeżeli $\left[x^1,\ldots,x^N\right]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym, a $z_o\in \mathcal{Z}$, $P\left(z_o\right)>0$, to zbiór $\mathcal{Z}|z_o$ i prawdopodobieństwo $P\left(\cdot\mid z_o\right)$ mają następujące własności:

/1/ $\mathcal{Z}|z_o\neq\emptyset,\ \emptyset\in \mathcal{Z}|z_o,\ P\left(\emptyset\mid z_o\right)=0,$

/2/ $z\in \mathcal{Z}|z_o \Rightarrow 0\leq P\left(z\mid z_o\right)\leq 1$.

/3/ $Z \in \mathcal{Z}|Z_0 \Rightarrow Z' \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z'|Z_0) = 1 - P(Z|Z_0)$,

/4/ $\mathbb{R}^N \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(\mathbb{R}^N|Z_0) = 1$,

/5/ $Z \in \mathcal{Z}|Z_0 \Rightarrow P(Z|Z_0) = P(Z \cap R \cap Z_0|Z_0)$,

/6/ $Z \cap R \cap Z_0 = \emptyset \Rightarrow Z \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z|Z_0) = 0$,

/7/ $R \cap Z_0 \subset Z \Rightarrow Z \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z|Z_0) = 1$,

/7'/ $Z_0 \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z_0|Z_0) = 1$,

/8/ $Z_1, \dots, Z_m \in \mathcal{Z}|Z_0$, $Z_k \cap Z_l = \emptyset$, $k \neq l$, $k, l, = 1, \dots, m$

$$\Rightarrow \bigcup_{l=1}^{m} Z_l \in \mathcal{Z}|Z_0, \quad P\left(\bigcup_{l=1}^{m} Z_l \,\Big|\, Z_0\right) = \sum_{l=1}^{m} P(Z_l|Z_0),$$

/9/ $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}|Z_0$, $Z_1 \subset Z_2 \Rightarrow Z_2 \setminus Z_1 \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z_2 \setminus Z_1|Z_0) =$

$= P(Z_2|Z_0) - P(Z_1|Z_0)$, $P(Z_1|Z_0) \leqslant P(Z_2|Z_0)$,

/10/ $Z_2 \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z_2|Z_0) = 0$, $Z_1 \subset Z_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Z_1 \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z_1|Z_0) = 0$,

/11/ $Z_1, Z_2, Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}|Z_0 \Rightarrow Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z_1 \cup Z_2|Z_0) =$

$= P(Z_1|Z_0) + P(Z_2|Z_0) - P(Z_1 \cap Z_2|Z_0)$,

/12/ $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}|Z_0$, $P(Z_2|Z_0) = 1 \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}|Z_0$,

$P(Z_1 \cap Z_2|Z_0) = P(Z_1|Z_0)$,

/13/ jeżeli $(a_j^1, \dots, a_j^N)$, $(b_j^1, \dots, b_j^N) \in \mathbb{R}^N$, $j = 0,1$, to każde ze zdarzeń $\overset{N}{\underset{k=1}{\times}} (-\infty, a_0^k)$, $\overset{N}{\underset{k=1}{\times}} [a_1^k, a_0^k)$, $\{(a_0^1, \dots, a_0^N)\}$ jest zdarzeniem względem każdego ze zdarzeń

$$\mathop{\times}_{k=1}^{N}\left(-\infty,\ b_o^k\right),\ \mathop{\times}_{k=1}^{N}\left[b_1^k, b_o^k\right),\ \left\{\left(b_o^1,\dots,b_o^N\right)\right\}$$, przy założeniu

że te ostatnie mają dodatnie prawdopodobieństwo.

Twierdzenie 7.2.

Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym, a $A,\ B_k,\ A\cap B_k \in \mathcal{Z}$, $k=1,\dots,m$, $B_k \cap B_l = \emptyset$, $k,l=1,\dots$ $\dots,m$ oraz $P\left(B_k\right) > 0$, $k = 1,\dots,m$ $\sum_{k=1}^{m} P\left(B_k\right) = 1$, $k \neq l$,

to zachodzi /wzór na prawdopodobieństwo całkowite/

$$P\left(A\right) = \sum_{k=1}^{m} P\left(A \mid B_k\right) P\left(B_k\right) . \qquad /7.2/$$

Dowód można przeprowadzić korzystając z własności podanych w twierdzeniu 7.1 i z wniosku 1.4.

Wniosek 7.3.

Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym dyskretnym, a $\left(y^1,\dots,y^N\right) \in R$ i $Z \subset \mathbb{R}^N$, to $Z \in \mathcal{Z} \mid \left\{\left(y^1,\dots,y^N\right)\right\}$ oraz $P\left(Z \mid \left\{\left(y^1,\dots,y^N\right)\right\}\right) = \mathbb{1}_Z\left(y^1,\dots,y^N\right)$. /7.3/

Istotnie, zauważmy, że $P\left(\left\{\left(y^1,\dots,y^N\right)\right\}\right) > 0$, więc sensowne jest rozpatrywanie średniej warunkowej

$$/a/ \qquad \left\langle \mathbb{1}_Z\left(X^1,\dots,X^N\right) \mid \left\{\left(y^1,\dots,y^N\right)\right\}\right\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\left\{\left(y^1,\dots,y^N\right)\right\}\right)} \sum_{j=1}^{n\left(\left\{\left(y^1,\dots,y^N\right)\right\}\right)} \mathbb{1}_Z\left(y^1,\dots,y^N\right) =$$

$$= \mathbb{1}_Z\left(y^1,\dots,y^N\right) .$$

Definicja 7.2.

Zdarzeniami niezależnymi nazywamy takie zdarzenia $Z_1,\dots Z_m$ wyznaczone przez N-wymiarowy wektor losowy $\left[X^1,\dots,X^N\right]$, że

$$/7.4/ \quad Z_{j_1} \cap \dots \cap Z_{j_k} \in \mathcal{Z} \ , \ P\left(Z_{j_1} \cap \dots \cap Z_{j_k}\right) =$$

$$= P\left(Z_{j_1}\right) \cdot \dots \cdot P\left(Z_{j_k}\right)$$

dla wszystkich $1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant m$.

Twierdzenie 7.3.

Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ jest N--wymiarowym wektorem losowym, a $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$, to zachodzą następujące implikacje:

/1/ Z_1, Z_2 - zdarzenia niezależne $\Rightarrow$ Z_1', Z_2' - zdarzenia niezależne,

Z_1', Z_2' - zdarzenia niezależne;

/2/ $P\left(Z_1\right) = 0 \vee P\left(Z_1\right) = 1 \Rightarrow Z_1, Z_2$ - zdarzenia niezależne; 1,

/3/ Z_1, Z_2 - zdarzenia niezależne, $P\left(Z_1 \cup Z_2\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z_1\right) = 1 \vee P\left(Z_2\right) = 1$.

Dowód.

Dla dowodu /1/ zauważmy, że na podstawie punktu /11/ i /13/ twierdzenia 6.1. i założenia $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}$

/a/ $Z_1' \cap Z_2' = \left(Z_1 \cup Z_2\right)' \in \mathcal{Z}$

/b/ $P\left(Z_1' \cap Z_2'\right) = 1 - P\left(Z_1\right) - P\left(Z_2\right) + P\left(Z_1\right) \cdot P\left(Z_2\right) =$

$= \left(1 - P\left(Z_1\right)\right)\left(1 - P\left(Z_2\right)\right) = P\left(Z_1'\right) \cdot P\left(Z_2'\right)$.

Dla dowodu drugiej części /1/ zauważmy, że na podstawie założenia $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}$ i punktu /9/ twierdzenia 6.1

/c/ $Z_1' \cap Z_2 = Z_2 \setminus (Z_1 \cap Z_2) \in \mathcal{Z}$

/d/ $P(Z_1' \cap Z_2) = P(Z_2) - P(Z_1) \cdot P(Z_2) = P(Z_1') \cdot P(Z_2)$.

Punkt /2/ wynika bezpośrednio z punktów /10/ i /12/ twierdzenia 6.1. Punkt /3/ jest konsekwencją punktu /1/ gdyż

/e/ $0 = P((Z_1 \cup Z_2)') = P(Z_1') \cdot P(Z_2')$.

Następujący wniosek łatwo wynika z punktu /1/ wniosku 7.2.

Wniosek 7.3.

Jeżeli $[X^1,\dots,X^N]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym, $Z, Z_0 \in \mathcal{Z}$, $P(Z_0) > 0$, to

/1/ Z, Z_0 - zdarzenia niezależne $\Leftrightarrow$ $Z \cap Z_0 \in \mathcal{Z} \wedge P(Z|Z_0) = P(Z)$.

§ 8. Niezależność wektorów losowych.

Lemat 8.1.

Jeżeli $[X^1,\dots,X^N]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym, a $(({}_iX^1,\dots,{}_iX^N),\ i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{J}[X^1,\dots,X^N]_P \subset [X^1,\dots,X^N]$ oraz $\{j_1,\dots,j_m\} \subset \{1,\dots,N\}$, to istnieje dokładnie jeden taki m-wymiarowy wektor losowy $[X^{j_1},\dots,X^{j_m}]$, że $(({}_iX^{j_1},\dots,{}_iX^{j_m}),\ i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{J}[X^{j_1},\dots,X^{j_m}]_P \subset [X^{j_1},\dots,X^{j_m}]$.

Dowód.

Zauważmy, że

/a/ $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} H\left(x^{j_k} - {}_i x^{j_k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N} H\left(y^k - {}_i x^k\right), \ n \in \mathbb{N},$$

przy czym

/b/ $$y^l = \begin{cases} x^l, & l \in \{j_1,\dots,j_m\} \\ \infty, & l \notin \{j_1,\dots,j_m\} \end{cases}, \quad l=1,\dots,N .$$

Ciąg

/c/ $$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} H\left(x^{j_k} - {}_i x^{j_k}\right), \ n \in \mathbb{N}\right)$$

jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}^m$. Granice ciągów postaci /a/ skonstruowanych dla dowolnych ciągów z $\mathcal{J}\left[X^1,\dots,X^N\right]_P$ są identyczne i równe $G\left(y^1,\dots,y^N\right)$. Nietrudno zauważyć, że jeśli $\left(x^1,\dots,x^N\right) \in R\left[X^1,\dots,X^N\right]$, to $\left(x^{j_1},\dots x^{j_m}\right) \in$ $\in R\left[X^{j_1},\dots,X^{j_m}\right]$.

Oznaczmy przez X $N = N_1 + \dots + N_n$ - wymiarowy wektor $\left[X_1^1,\dots,X_{N_1}^1,\dots,X_1^n,\dots,X_{N_n}^n\right]$. Wektory losowe $\left[X_1^1,\dots,X_{N_1}^1\right],\dots$ $\dots,\left[X_1^n,\dots,X_{N_n}^n\right]$ wyznaczone przez wektor losowy X oznaczmy odpowiednio przez $X^1,\dots,X^n$. Wprowadźmy dalsze oznaczenia:

/8.1/ $$\begin{aligned} \mathbf{x}^k &:= \left(x_1^k,\dots,x_{N_k}^k\right); \quad x_1^k,\dots,x_{N_k}^k \in \overline{\mathbb{R}}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=1,\dots, \\ \mathbf{u}^k &:= \left(u_1^k,\dots,u_{N_k}^k\right); \quad u_1^k,\dots,u_{N_k}^k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

/8.2/ $$A^k := \left(-\infty, \mathbf{x}^k\right), \quad k=1,\dots,n,$$

$$\bar{A}^k := \mathbb{R}^{N_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{N_{k-1}} \times A^k \times \mathbb{R}^{N_{k+1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^{N_n} ;$$

/8.2a/

$$\bar{A}^1 := A^1 \times \mathbb{R}^{N_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{N_n} ; \quad \bar{A}^n := \mathbb{R}^{N_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{N_{n-1}} \times A^n$$

$$k=2,\ldots,n-1;$$

Zauważmy, że

/8.3/ $$A^k \subset \mathbb{R}^{N_k} , \quad \bar{A}^k \subset \mathbb{R}^N ; \quad k=1,\ldots,n;$$

oraz, że

/8.4/ $$A^k \in \mathcal{Z}(X^k) , \quad \bar{A}^k \in \mathcal{Z}(X) ; \quad k=1,\ldots,n .$$

Definicja 8.1.

Wektorami niezależnymi nazywamy takie wektory losowe $X^1,\ldots X^n$, że dowolne zdarzenia $\bar{A}^1,\ldots,\bar{A}^n$ wyznaczone przez wektor losowy X są niezależne.

Twierdzenie 8.1.

Każde z następujących zdań jest równoważne niezależności wektorów losowych $X^1,\ldots,X^n$:

/1/ $$P_X(A^1 \times \ldots \times A^n) = P_{X^1}(A^1)\cdot\ldots\cdot P_{X^n}(A^n) ,$$

dla dowolnych $A^1,\ldots,A^n$ postaci /6.2/

/2/ $$G_X(x^1,\ldots,x^N) = G_{X^1}(x^1)\cdot\ldots\cdot G_{X^n}(x^n) ,$$

/3/ $$g_X(x^1,\ldots,x^N) = g_{X^1}(x^1)\cdot\ldots\cdot g_{X^n}(x^n),$$

/4/ $$\theta_X(u^1,\ldots,u^n) = \theta_{X^1}(u^1)\cdot\ldots\cdot\theta_{X^n}(u^n) ,$$

Prosty dowód tego twierdzenia opiera się na definicji 8.1 wzorze /6.1/ twierdzenia 6.2 i zależnościach pomiędzy dystrybuantą, gęstością i funkcją charakterystyczną wektora losowego.

Konsekwencją twierdzenia 8.1 jest następujący wniosek.

Wniosek 8.1.

Jeżeli $X^1,\dots,X^n$ są wektorami niezależnymi, a $B^k \in \mathcal{Z}_o$ w $\mathbb{R}^{N_k}$, $k=1,\dots,n$; to

/8.5/ $P_X\left(B^1\times\dots\times B^n\right) = P_{X^1}\left(B^1\right)\cdot\ldots\cdot P_{X^n}\left(B^n\right)$,

/8.6/ $P_X\left(\mathrm{cl}B^1\times\dots\times \mathrm{cl}B^n\right) = P_{X^1}\left(\mathrm{cl}B^1\right)\cdot\ldots\cdot P_{X^n}\left(\mathrm{cl}B^n\right)$,

/8.7/ $P_X\left(\left\{\left(x^1,\dots,x^n\right)\right\}\right) = P_{X^1}\left(\left\{x^1\right\}\right)\cdot\ldots\cdot P_{X^n}\left(\left\{x^n\right\}\right)$.

W szczególności, korzystając jeszcze z twierdzeń 5.2. i 6.3 otrzymujemy kolejny wniosek.

Wniosek 8.2.

Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym dyskretnym, to wektory losowe $\left[X^1\right],\dots,\left[X^N\right]$ wyznaczone przez ten wektor są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\left(y^1,\dots,y^N\right) \in R\left[X^1,\dots,X^N\right]$ zachodzi wzór

/8.8/ $$P_{y^1,\dots,y^N} = P_{y^1}\cdot\ldots\cdot P_{y^N}$$.

§ 9. Odwzrorowania dopuszczalne.

Niech f będzie rozszerzeniem funkcji typu $\mathbb{R}^N$ w $\mathbb{R}^p$ do odwzorowania określonego na rodzinach ciągów punktów przestrzeni $\mathbb{R}^N$ zgodnie z wzorem /1.3/.

Definicja 9.1.

Odwzorowaniem dopuszczalnym nazywamy takie odwzorowanie f , że dla dowolnego N-wymiarowego wektora losowego $\left[X^1,\ldots,X^N\right]$, dla którego $\mathcal{J}\left[X^1,\ldots,X^N\right]_B$ zawiera się w dziedzinie odwzorowania f, istnieje taki p-wymiarowy wektor losowy $\left[Y^1\ldots Y^p\right]$, że

$$/9.1/ \qquad f\left(\mathcal{J}\left[X^1,\ldots,X^N\right]_B\right)\subset\left[Y^1,\ldots,Y^p\right]_B ,$$

gdzie $\left[X^1,\ldots,X^N\right]_B$, $\left[Y^1,\ldots,Y^p\right]_B$ oznaczają odpowiednio takie B-wektory losowe, że

$$/9.2/ \qquad \left[X^1,\ldots,X^N\right]\subset\left[X^1,\ldots,X^N\right]_B ,$$

$$/9.3/ \qquad \left[Y^1,\ldots,Y^p\right]\subset\left[Y^1,\ldots,Y^p\right]_B .$$

Twierdzenie 9.1.

Rozszerzenie f funkcji ciągłej typu $\mathbb{R}^N$ w $\mathbb{R}^p$ do odwzorowania określonego na rodzinach ciągów punktów przestrzeni $\mathbb{R}^N$ zgodnie z wzorem /1.3/ jest odwzorowaniem dopuszczalnym.

Dowód.

Niech $\left[X^1,\ldots,X^N\right]$ oznacza dowolny N--wymiarowy wektor losowy, a $\left[X^1,\ldots,X^N\right]_B$ taki B-wektor losowy, że zachodzi dla nich /9.2/. Obliczmy dla dowolnego ciągu $\left(\left({}_ix^1,\ldots,{}_ix^N\right),\ i\in\mathbb{N}\right)\in\mathcal{J}\left[X^1,\ldots,X^N\right]_B$ i dowolnych $u^1,\ldots,u^N\in\mathbb{R}$ granicę

$$/a/ \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp i\sum_{r=1}^{p}f^r\left({}_ix^1,\ldots,{}_ix^N\right)u^r =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\exp i\sum_{r=1}^{p}f^r\left(x^1,\ldots,x^N\right)u^r\, d\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N}H\left(x^k-{}_ix^k\right)\right)=$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\exp i\sum_{r=1}^{p}f^r\left(x^1,\ldots,x^N\right)u^r\, dG\left(x^1,\ldots,x^N\right) ,$$

przy czym $G(x^1,\dots,x^N)$ jest dystrybuantą wektora losowego $[x^1,\dots,x^N]$, a f^r oznacza r-tą składową funkcji f, $r=1,\dots,p$. Granica /a/ jest funkcją ciągłą zmiennych $u^1,\dots,u^p$. Istotnie, zadajmy ε, $\varepsilon > 0$. Niech Z oznacza taki skończony N-wymiarowy przedział, że

/b/ $$P(Z) \geqslant 1 - \varepsilon/4$$

oraz niech

/c/ $$M := \max\left\{\sup\left\{f^r(x^1,\dots,x^N) : (x^1,\dots,x^N)\in Z\right\} : 1 \leq r \leqslant p\right\}.$$

Dalej

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \exp i \sum_{r=1}^{p} f^r(x^1,\dots,x^N)u^r \, dG(x^1,\dots,x^N) -\right.$$

$$\left. - \int_{\mathbb{R}^N} \exp i \sum_{r=1}^{p} f^r(x^1,\dots,x^N)\bar{u}^r \, dG(x^1,\dots,x^N)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_Z \left(\exp i \sum_{r=1}^{p} f^r(x^1,\dots,x^N)u^r - \exp i \sum_{r=1}^{p} f^r(x^1,\dots,x^N)\bar{u}^r\right) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot\, dG(x^1,\dots,x^N)\right| + \left|\int_{Z'} \left(\exp i \sum_{r=1}^{p} f^r(x^1,\dots,x^N)\, u^r -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \exp i \sum_{r=1}^{p} f^r(x^1,\dots,x^N)\bar{u}^r\right) dG(x^1,\dots,x^N)\right| \leqq$$

$$\leqq 2M \sum_{r=1}^{p} |u^r - \bar{u}^r| + 2 \cdot \varepsilon/4 < \varepsilon ,$$

/d/

gdy tylko

/e/ $$\sum_{r=1}^{p} |u^r - u^r| < \varepsilon/4M .$$

Ciąg

$$/f/ \qquad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp i \sum_{r=1}^{p} f^r\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right)u^r \ , \ i \in \mathbb{N} \right)$$

jest zbieżny w każdym punkcie $\left(u^1,\dots,u^N\right)$ do funkcji ciągłej wzorem /a/, co dowodzi, że ciąg $\left(\left(f^1\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right),\dots \dots,f^p\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right)\right), \ i \in \mathbb{N}\right)$ jest B_p-podstawowym, a każde dwa ciągi tego typu są w realizacji $\widetilde{B}_p$.

Z twierdzenia 9.1 i definicji 2.2 wynikają wnioski.

Wniosek 9.1.

Rozszerzenie funkcji $h: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$$/9.4/ \qquad h\left(x^1,\dots,x^N\right) := \left(x^{p_1},\dots,x^{p_N}\right),$$

gdzie $\left(p_1,\dots,p_N\right)$ jest permutacją ciągu $\left(1,\dots,N\right)$, zgodnie z wzorem /1.3/ jest odwzorowaniem dopuszczalnym. Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]_p$ jest dowolnym N-wymiarowym wektorem losowym, to opracja $\left(X^{p_1},\dots,X^{p_N}\right)$ wyznacza jednoznacznie wektor losowy $\left[X^{p_1},\dots,X^{p_N}\right]$, którego dystrybuanta, gęstość i funkcja charakterystyczna są odpowiednio równe $G\left(x^{p_1},\dots,x^{p_N}\right)$, $g\left(x^{p_1},\dots x^{p_N}\right)$ $\Theta\left(u^{p_1},\dots,u^{p_N}\right)$, przy czym $G\left(x^1,\dots,x^N\right)$, $g\left(x^1,\dots,x^N\right)$, $\Theta\left(u^1,\dots,u^N\right)$ są odpowiednio dystrybuantą, gęstością i funkcją charakterystyczną wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$.

Wniosek 9.2.

Rozszerzenie funkcji $l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$

$$/9.5/ \qquad l\left(x^1,\dots,x^N\right) := \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^1 x^k + b_k^1,\dots,\sum_{k=1}^{N} a_k^p x^k + b_k^p\right),$$

$$a_k^r,\ b_k^r \in \mathbb{R} \ , \ r = 1,\dots,p \ ; \ k=1,\dots,N$$

jest odwzorowaniem dopuszczalnym. Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ jest dowolnym N-wymiarowym wektorem losowym, to operacja

$\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^1 x^k + b_k^1, \ldots, \sum_{k=1}^{N} a_k^p x^k + b_k^p\right)$ wyznacza jednoznacznie p-wymiarowy wektor losowy $\left[\sum_{k=1}^{N} a_k^1 X^k + b_k^1, \ldots, \sum_{k=1}^{N} a_k^p X^k + b_k^p\right]$, którego funkcja charakterystyczna ma postać $\left(\exp i \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{p} b_k^r u^r\right) \cdot \theta\left(\sum_{r=1}^{p} a_1^r u^r, \ldots, \sum_{r=1}^{p} a_N^r u^r\right)$, gdzie $\theta\left(u^1, \ldots, u^N\right)$ jest funkcją charakterystyczną wektora losowego $\left[X^1, \ldots, X^N\right]$.

<u>Wniosek 9.3.</u>

Rozszerzenie funkcji $\mathcal{R} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$, $1 \leq p \leq N$,

$$\mathcal{R}\left(x^1, \ldots, x^p, \ldots, x^N\right) = \left(x^1, \ldots, x^p\right) \qquad /9.6/$$

jest odwzorowaniem. Jeżeli $\left[X^1, \ldots, X^N\right]$ jest dowolnym N-wymiarowym wektorem losowym, to operacja $\left(x^1, \ldots, x^p\right)$ wyznacza jednoznacznie p-wymiarowy wektor losowy $\left[X^1, \ldots, X^p\right]$, którego dystrybuanta, gęstość i funkcja charakterystyczna są odpowiednio równe $G\left(x^1, \ldots, x^p, +\infty, \ldots, +\infty\right)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x^1, \ldots, x^p, x^{p+1}, \ldots, x^N\right) dx^{p+1} \ldots dx^N$, $\theta\left(u^1, \ldots, u^p, 0, \ldots, 0\right)$, gdzie $G\left(x^1, \ldots, x^N\right)$, $g\left(x^1, \ldots, x^N\right)$, $\theta\left(u^1, \ldots, u^N\right)$ są odpowiednio dystrybuantą, gęstością i funkcją charakterystyczną wektora losowego $\left[X^1, \ldots, X^N\right]$.

§ 10. Zbieżność wektorów losowych.

<u>Definicja 10.1.</u>

Ciąg $\left(\left[X_n^1, \ldots, X_n^N\right], n \in \mathbb{N}\right)$ N-wymiarowych wektorów losowych nazywamy zbieżnym do N-wymiarowego wektora losowego $\left[X^1, \ldots X^N\right]$ jeżeli ciąg odpowiednich funkcji charakterystycznych

$\left(\theta_n\left(u^1,\dots,u^N\right),\ n \in \mathbb{N}\right)$ jest zbieżny do funkcji charakterystycznej $\theta\left(u^1,\dots,u^N\right)$ wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$.

Lemat 10.1.

Każdy okresowy ciąg $\left(\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right),\ i \in \mathbb{N}\right)$ jest ciągiem P_N-podstawowym. Dystrybuanta N-wymiarowego wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ wyznaczonego przez ciąg okresowy $\left(\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right),\ i \in \mathbb{N}\right)$ o okresie m jest postaci

$$/10.1/\qquad G\left(x^1,\dots,x^N\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_iX^k\right).$$

Dowód.

Niech $\left(\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right),\ i \in \mathbb{N}\right)$ oznacza dowolny ciąg okresowy o okresie m. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest

$$/a/\qquad n = p_n m + r_n\ ,\quad 0 \le r_n < m\ ,\quad p_n, r_n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Zatem

$$/b/\qquad {}_nX^k = {}_{r_n}X^k\ ,\ \text{dla } k=1,\dots,N \ \text{ i } \ r_n > 0$$

$${}_nX^k = {}_mX^k \quad \text{dla } k=1,\dots,N \ \text{ i } \ r_n = 0$$

Dalej

$$/c/\qquad \frac{1}{m} = \frac{p_n}{n} \quad \frac{r_n}{nm}$$

Dla dowodu jednostajnej zbieżności ciągu $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_iX^k\right),\ n \in \mathbb{N}\right)$ do $G\left(x^1,\dots,x^N\right)$ danej wzorem /10.1/ zadajmy $\varepsilon > 0$ i zauważmy, że

/d/ $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_i X^k\right) - G\left(x^1,\dots,x^N\right) \right| =$

$= \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{p_n m} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_i X^k\right) + \sum_{i=1}^{r_n} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_i X^k\right) \right) - \right.$

$\left. - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_i X^k\right) \right| \leqslant \left| \frac{p_n}{n} - \frac{1}{m} \right| \left| \sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_i X^k\right) \right| +$

$+ \frac{r_n}{n} \leqslant \frac{r_n}{nm} \cdot m + \frac{r_n}{n} \leqslant \frac{2m}{n} < \varepsilon$,

gdy tylko $n > \frac{2m}{\varepsilon}$.

<u>Twierdzenie 10.1.</u>

Jeżeli $\left[X^1,\dots,X^N\right]$ jest N-wymiarowym wektorem losowym, to istnieje ciąg $\left(\left[Y_m^1,\dots,Y_m^N\right],\ m \in \mathbb{N}\right)$ N-wymiarowych wektorów dyskretnych zbieżnych do wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$.

<u>Dowód.</u>

Niech $\left(\left({}_i X^1,\dots,{}_i X^N\right),\ i \in \mathbb{N}\right)$ będzie dowolnym ciągiem realizacji wektora losowego $\left[X^1,\dots,X^N\right]$, a m dowolną liczbą naturalną. W celu zdefiniowania ciągu $\left(\left({}_i Y_m^1,\dots,{}_i Y_m^N\right),\ i \in \mathbb{N}\right)$ ustalmy $i \in \mathbb{N}$. Wówczas

/a/ $i = p_i n + r_i \ , \quad 0 \leqslant r_i < m \ , \quad p_i,\ r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Połóżmy dla $k \in \{1,\dots,N\}$

/b/
$$ {}_i Y_m^k := {}_{r_i} X^k \ , \quad r_i > 0$$
$$ {}_i Y_m^k := {}_m X^k \ , \quad r_i = 0$$

Tak zdefiniowany ciąg $\left(\left({}_iY_m^1,\ldots,{}_iY_m^N\right),\ i \in \mathbb{N}\right)$ jest okresowy o okresie m i jako taki na podstawie lematu 10.1 - P_N- podstawowy. Ciąg $\left(\theta_m\left(u^1,\ldots,u^N\right),\ m \in \mathbb{N}\right)$ funkcji charakterystycznych wektorów losowych $\left[Y_m^1,\ldots,Y_m^N\right]$ jest zbieżny do funkcji charakterystycznej wektora losowego $\left[X^1,\ldots,X^N\right]$.

Uwaga 10.1.

Istotnym zagadnieniem miarowego ujęcia rachunku prawdopodobieństwa są twierdzenia graniczne [10, 17]. Dają się one wypowiedzieć w ujęciu ciągowym. Dla sformułowania odpowiednich o analogicznych założeniach twierdzeń trzeba zrezygnować z rozważania ciągu niezależnych zmiennych losowych /funkcji mierzalnych/ na rzecz rozpatrywania ciągu $\left(\left[X_n^1,\ldots,X_n^N\right],\ n \in \mathbb{N}\right)$, którego n-ty wyraz jest takim N-wymiarowym wektorem losowym, że wyznaczone przez niego jednowymiarowe wektory losowe $\left[X_n^1\right],\ldots,\left[X_n^n\right]$ są niezależne.

Dla przykładu podamy analogon twierdzenia Lindeberga--Levyego.

Twierdzenie 10.2.

Jeżeli $\left(\left[X_n^1,\ldots,X_n^n\right],\ n \in \mathbb{N}\right)$ jest takim ciągiem wektorów losowych, że

/1/ $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} \ \bigwedge\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left[X_n^k\right] = \left[X_1^1\right]$,

/2/ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wektory losowe $\left[X_n^1\right],\ldots,\left[X_n^n\right]$ wyznaczone przez wektor losowy $\left[X_n^1,\ldots,X_n^n\right]$ są niezależne,

/3/ istnieje skończona, niezerowa korelacja $k^{1,1}$ jednowymiarowego wektora losowego $\left[X_1^1\right]$,

to ciąg jednowymiarowych wektorów losowych

$$/10.2/ \quad \left[N_m\right] := \left[\left(mk^{1,1}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{m} \left(X^l_m - m^1\right)\right],$$

gdzie m^1 jest momentem wektora losowego $\left[X^1_1\right]$, jest zbieżny do wektora normalnego $N(0,1)$.

§ 11. Dystrybucyjny charakter obciążeń przypadkowych pręta prostego.

Język dystrybucji oddaje w sposób najbardziej naturalny charakter wszystkich spotykanych obciąże. Takie pojęcia jak: obciążenia ciągłe o stałej intensywności, siła skupiona oraz moment skupiony rodzą w sposób naturalny pojęcia dystrybucji Heaviside'a, δ - Diraca i δ' - pochodnej dystrybucji Diraca. Zginanie pręta prostego wywołuje siłę prostopadłą do osi pręta lub momenty skupione działające w płaszczyźnie tych sił. Dzięki wprowadzeniu dystrybucji teorii pręta ulega znacznemu uproszczeniu. Przypadek zdeterminowany belki poddanej jednoczesnemu działaniu N_1 momentów skupionych, N_2 sił skupionych i N_3 obciążeń rozłożonych równomiernie omówiony jest w pracy [15].

Pręt o długości 1 identyfikujemy z przedziałem $[0,1] \subset \mathbb{R}$, a o wartościach momentów skupionych i sił skupionych oraz o wartościach obciążeń stałych zakładamy, że pochodzą z przedziału ograniczonego $J \subset \mathbb{R}$.

Niech $\left[M^1,\dots,M^{N_1}, a^1,\dots,a^{N_1}, F^1,\dots,F^{N_2}, b^1,\dots,b^{N_2}, c^1,\dots,c^{N_3}\right]$ będzie $2N_1 + 2N_2 + N_3$ -wymiarowym wektorem losowym, a $\left(\left({}_iM^1,\dots,{}_iM^{N_1}, {}_ia^1,\dots,{}_ia^{N_1}, {}_iF^1,\dots,{}_iF^{N_2}, {}_ib^1,\dots,{}_ib^{N_2},\right.\right.$

$\left.\left.{}_ic^1,\dots,{}_ic^{N_3}\right),\ i \in \mathbb{N}\right)$ jego ciągiem istotnych realizacji.

Umawiamy się traktować ${}_ia^k$ jako punkt przyłożenia momentu skupionego o wartości ${}_iM^k$, $k=1,\dots,N_1$; ${}_ib^k$ jako punkt przyłożenia siły skupionej o wartości ${}_iF^k$, $k=1,\dots,N_2$; a ${}_ic^k$ jako punkt, w którym rozpoczyna działanie siła o stałej intensywności c^k , $k=1,\dots,N_3$; $i \in \mathbb{N}$. Przy tej interpretacji obciążenie pochodzące od i-tej realizacji ciągu istotnych realizacji tego wektora losowego ma postać [15].

$$/11.1/ \quad {}_iq(x) = \sum_{k=1}^{N_1} {}_iM^k \,\delta'\left(x - {}_ia^k\right) + \sum_{k=1}^{N_2} {}_iF^k \,\delta\left(x - {}_ib^k\right) + \sum_{k=1}^{N_3} c^k H\left(x - {}_ic^k\right).$$

Istnieje średnia $\langle q(x) \rangle$, gdzie $q(x)$ oznacza operację na

$$J\left[M^1,\dots,M^{N_1},a^1,\dots,a^{N_1},F^1,\dots,F^{N_2},b^1,\dots,b^{N_2},c^1,\dots,c^{N_3}\right]$$

daną wzorem

$$/11.2/ \quad q(x) = \sum_{k=1}^{N_1} M^k \,\delta'\left(x - a^k\right) + \sum_{k=1}^{N_2} F^k \,\delta\left(x - b^k\right) + \sum_{k=1}^{N_3} c^k H\left(x - c^k\right).$$

Istotnie. Obliczmy dla dowolnego ciągu istotnych realizacji danego wektora granicę

$$/11.3/ \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {}_iq(x) = \sum_{k=1}^{N_1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {}_iM^k \,\delta'\left(x - {}_ia^k\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {}_iF^k \,\delta\left(x - {}_ib^k\right) + \sum_{k=1}^{N_3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c^k H\left(x - {}_ic^k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_1} \lim_{n\to\infty} \int_J y \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta\left(y - {}_iM^k\right) \delta'\left(x - {}_ia^k\right) dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_2} \lim_{n\to\infty} \int_J y \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta\left(y - {}_iF^k\right) \delta\left(x - {}_ib^k\right) dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_3} c^k \left\langle H\left(x - c^k\right)\right\rangle = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\partial}{\partial x} \int_J y\, g_k^1(x,y)\, dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_2} \int_J y\, g_k^2(x,y)\, dy + \sum_{k=1}^{N_3} c^k\, G_k^3(x) ,$$

gdzie $g_k^1(x,y)$ jest gęstością wektora losowego $\left[M^k, a^k\right]$, $k=1,\ldots,N_1$; $g_k^2(x,y)$ - gęstością wektora losowego $\left[F^k, b^k\right]$, $k=1,\ldots,N_2$; a $G_k^3(x)$ dystrybuantą wektora losowego $\left[c^k\right]$, $k=1,\ldots,N_3$.

L i t e r a t u r a .

[1] Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R., - Theory of distributions. The sequential approach, ESPC, Amsterdam, PWN Warszawa 1973.

[2] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B., - Podstawy rachunku prawdopodobieństwa w ujęciu dystrybucyjnym. Zeszyty Nauk.Polit.Śl., Seria Mat.- Fiz., Nr 29, Gliwice 1979, s. 67-81.

[3] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B., - Charakterystyki statyczne zmiennej losowej w ujęciu dystrybucyjnym. Zeszyty Nauk. Polit.Śl. Seria Mat.- Fiz. Nr 29, Gliwice, 1979, s. 13-31.

[4] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B., - Charakterystyki statystyczne wektora losowego w ujęciu dystrybucyjnym, Zeszyty Nauk.Polit.Śl. Seria Mat.- Fiz. Nr 29 Gliwice 1979, s. 35-50.

[5] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B., - Funkcjonał charakterystyczny i pewne charakterystyki statystyczne procesu stochastycznego /ujęcie ciągowe/, Zeszyty Nauk. Polit.Śl. Seria Mat.- Fiz. Nr 29, Gliwice 1979, s. 51-65.

[6] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B., - Proces stochastyczny w ujęciu dystrybucyjnym, Prace matematyczne, t. 8, Prace naukowe U.Śl. Nr 288, Katowice, 1978, s.80-87.

[7] Brückner D., - Wybrane zagadnienia ciągowego ujęcia teorii wielowymiarowych uogólnionych procesów stochastycznych, Praca doktorska, U.Śl. Katowice 1979.

[8] Fine T., Theories of probability. An examinations of foundations, Academic Press, New York - London 1973.

[9] Fisher R.A., On the mathematical foundations of theoretical statistics, Phil. Tras., Royal Sec. 222.

[10] Fisz M., - Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN Warszawa 1969.

[11] Kolmogoroff A.N., - Grundbergriffe der Wahrscheinlichkeitsrechmung, Berlin 1933.

[12] Kolmogorov A.N., - Fundations of the theory of probability, Breux, New York - Chalsea 1956.

[13] Mises R., - Mathematical theory of probability and statistics, Academic Press, New York - London 1964.

[14] Podhorodyński M., - Pewne zagadnienia teorii układów punktów losowych w ujęciu ciągłym, Praca doktorska, U.Śl. Katowice 1979.

[15] Skalmierski B., - Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków, PWN Warszawa 1973.

[16] Zemanian A.H., - Teoria dystrybucji i analiza transformant, PWN Warszawa 1969.

[17] Zubrzycki S., - Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN Warszawa 1970.