

**A. Kosecki, W. Szemplińska-Stupnicka**

**ZMODYFIKOWANA METODA RITZA  
BADANIA DRGAŃ SWOBODNYCH BELKI  
Z NIELINIOWYMI  
WARUNKAMI BRZEGOWYMI**

44/80

P. 269

**WARSZAWA 1980**

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 listopada 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 44/1980



57117



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 2,6. Ark.druk. 3,5.  
Oddano do drukarni w listopadzie 1980 r.  
Nr zamówienia 742/o/80

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

Andrzej Kosecki  
Wanda Szemplińska-Stupnicka  
Zakład Układów Mechanicznych

ZMODYFIKOWANA METODA RITZA BADANIA  
DRGAŃ SWOBODNYCH BELKI Z NIELINIOWYMI  
WARUNKAMI BRZEGOWYMI

1. Wprowadzenie

Wśród wielu przybliżonych metod analitycznych wykorzystywanych w badaniach drgań swobodnych nieliniowych układów dyskretnych i ciągłych, szeroko stosowana jest metoda Ritza. Podstawy matematyczne tej metody wywodzą się, jak wiadomo, z zasady wariacyjnej Hamiltona. W praktyce, gdy poszukiwane jest periodyczne rozwiązanie przybliżone w formie szeregu Fouriera metoda Ritza sprowadza się do tzw. procedury bilansu harmonicznych.

W zastosowaniu do nieliniowych układów dyskretnych metoda Ritza pozwala wyznaczyć, poszukiwane w założonym rozwiązaniu przybliżonym, częstości własne i współczynniki postaci własnych jako funkcje amplitudy. Zależność częstości i postaci własnych od amplitudy jest efektem nieliniowości charakterystyki sprężystej.

W badaniach drgań swobodnych nieliniowych układów ciągłych stosowana jest powszechnie metoda Ritza w klasycznym ujęciu, które charakteryzuje przyjęcie założenia, że w poszukiwanym rozwiązaniu przybliżonym postaci własne drgań są znane i równe postaciom własnym odpowiedniego układu liniowego.

Odpowiada to nałożeniu na układ pewnych więzów, zmuszających go do zachowania stałej, niezależnej od amplitudy postaci odkształcenia. W ten sposób jedynym efektem nieliniowości sprężystej może być zależność częstości własnej od amplitudy, a charakter tej zależności jest zdeterminowany założoną postacią odkształcenia.

Takie uproszczenie może prowadzić do istotnych błędów w ocenie częstości własnych układu. Problem ten ujawnia się szczególnie wyraźnie wtedy, gdy nieliniowość sprężysta występuje w warunkach brzegowych, lub ogólnej, gdy jest "prze-strzennie skupiona" [9].

Argumentem przemawiającym za podjęciem próby modyfikacji metody Ritza tak, by pozwoliła uwzględnić zmienność postaci drgań w funkcji amplitudy jest fakt, że w zastosowaniu do układów dyskretnych formalizm metody Ritza zmienność tę w pełni uwzględnia. Istotnym wydaje się zbudowanie aparatu badawczego pozwalającego na jednolite ujęcie układów mieszanych, dyskretnociągłych.

W obecnej pracy podjęto próbę wykorzystania formalnego podjęcia wynikającego z zastosowania zasady wariacyjnej Hamiltona i zasadniczej idei metody Ritza do wyznaczania rozwiązania przybliżonego jednowymiarowego układu ciągłego przy potraktowaniu funkcji zmiennej przestrzennej jako niewiadomych.

W rozdz. 2.1. przypomniano najpierw kilka istotnych punktów metody Ritza dla układów dyskretnych. Następnie przeprowadzono analogiczne rozważania przy wyprowadzeniu zmodyfikowanego ujęcia metody Ritza w zastosowaniu do badania drgań swobodnych jednowymiarowego, nieliniowego układu ciągłego. Na zakończenie przedstawiono przykład liczbowy, w którym rozważona została belka z jednym nieliniowym warunkiem brzegowym. Dla układu tego wyznaczono pierwszą nieliniową częstość drgań swobodnych przy zastosowaniu trzech metod przybliżonych: perturbacyjnej, Ritza w ujęciu klasycznym oraz Ritza w ujęciu zmodyfikowanym. Przykład pokazuje w jak poważnym stopniu może zmieniać się przebieg nieliniowej częstości drgań swobodnych, wyznaczonej przy pomocy zmodyfikowanego ujęcia metody Ritza, w porównaniu z przebiegiem tej samej częstości, wyznaczonym za pomocą dwóch pozostałych metod przybliżonych.

## 2. Analiza teoretyczna.

### 2.1. Metoda Ritza w zastosowaniu do nieliniowego układu dyskretnego.

Punktem wyjścia do uzasadnienia metody Ritz'a [6] jest zasada wariacyjna Hamiltona, którą dla układu dyskretnego o  $n$  stopniach swobody można przedstawiać w ogólnej postaci

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0,$$

gdzie

$$L = L/q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n / = T - U$$

oznacza funkcję Lagrange'a wyrażoną we współrzędnych i prędkościach uogólnionych. W powyższym wzorze  $T = T / \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n /$  oraz  $U = U / q_1, \dots, q_n /$  stanowią odpowiednio energię kinetyczną i potencjalną rozpatrywanego nieliniowego układu dyskretnego.

Zasada wariacyjna Hamiltona w przekształconej postaci przybiera formę

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_j} \right] \delta q_j dt = 0, \quad /1/$$

gdzie  $t_1$  i  $t_2$  są wybranymi chwilami czasu, dla których spełniony jest warunek

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0, \quad j=1, \dots, n.$$

Wariacje  $\delta q_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , są wzajemnie niezależne, co wynika z wzajemnej niezależności współrzędnych uogólnionych  $q_j, j=1, \dots, n$ . W związku z tym równanie / 1 / może być spełnione tylko wtedy, gdy spełniony jest układ równań

$$\varepsilon_j(t) \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad j=1, \dots, n. \quad /2/$$

Równania / 2 /, stanowiące układ n równań Lagrange'a II rodzaju, opisują drgania swobodne nieliniowego układu dyskretnego. Ścisłe rozwiązanie tych równań nie jest znane, co jest równoznaczne z niemożnością spełnienia warunków  $\varepsilon_j(t) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

W metodzie Ritza poszukiwane jest przybliżone rozwiązanie układu równań / 2 / w postaci skończonego szeregu założonych funkcji czasu

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk} \Psi_k(t), \quad j=1, \dots, n; \quad /3/$$

gdzie  $a_{jk}$  są stałymi współczynnikami, wymagającymi wyznaczenia. Funkcje  $\Psi_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , muszą spełniać określone warunki matematyczne, tj. muszą posiadać ciągłe drugie pochodne w przedziale  $[t_1, t_2]$ , być liniowo niezależne i stanowić N pierwszych wyrazów zupełnego układu funkcji [5, str. 569]. W praktycznych zastosowaniach, gdy poszukiwane jest rozwiązanie periodyczne funkcje  $\Psi_k(t)$  są kolejnymi wyrazami szeregu Fouriera.

Skoro  $\Psi_k(t)$  są z góry założonymi funkcjami czasu, to wariacje współrzędnych uogólnionych  $q_j(t)$  zależą tylko od wariacji współczynników  $a_{jk}$

$$\delta q_j(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial q_j(t)}{\partial a_{jk}} \delta a_{jk} = \sum_{k=1}^N \Psi_k(t) \delta a_{jk},$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Podstawiając powyższą zależność do równania / 1 / i wykorzystując oznaczenia / 2 / otrzymujemy

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(t) \sum_{k=1}^N \psi_k(t) \delta a_{jk} dt = 0, \quad /4/$$

gdzie  $\varepsilon_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$  są pozostałościami równań /2/ po podstawieniu do nich przybliżonego rozwiązania / 3 /.

Wariacje  $\delta a_{jk}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, N$ , są wzajemnie niezależne, zatem równanie / 4 / może być spełnione tylko wtedy, gdy spełniony jest układ równań

$$\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_j(t) \psi_k(t) dt = 0, \quad /5/$$
$$j = 1, \dots, n ; k = 1, \dots, N.$$

Jest to układ  $n \times N$  nieliniowych równań algebraicznych względem niewiadomych, stałych współczynników  $a_{jk}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, N$ . Po jego rozwiązaniu otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie przybliżone / 3 /.

Jeżeli poszukiwane rozwiązanie przybliżone układu równań / 2 / założymy w postaci harmonicznej funkcji czasu

$$q_j(t) = a_j \cos \omega t, \quad j = 1, \dots, n, \quad /6/$$

to niewiadomymi w tym rozwiązaniu są: częstość własna  $\omega$  oraz amplitudy  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Jeśli przyjąć oznaczenie

$$\frac{a_j}{a_1} = b_j, \quad b_1 = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad /7/$$

gdzie  $b_j$  są niewiadomymi współczynnikami postaci własnej, to drgania główne / 6 / przybierają formę

$$q_j(t) = a_j b_j \cos \omega t, \quad j = 1, \dots, n, \quad /8/$$

przy czym  $a_j$  jest amplitudą o dowolnej, stałej wartości, zależnej od warunków początkowych.

Zgodnie z równością / 6 / wariacja  $\delta q_j(t)$  wyraża się zależnością

$$\delta q_j(t) = \cos \omega t \delta a_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

zaś ogólne równanie / 4 / przybiera postać

$$\delta J = \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_j(\omega t) \cos \omega t \delta a_j d(\omega t) = 0,$$

skąd na mocy wzajemnej niezależności wariacji  $\delta a_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , otrzymujemy układ równań

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{E}_j(\omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad /9/$$

Jest to układ  $n$  nieliniowych równań algebraicznych, z którego, po uwzględnieniu oznaczenia / 7 /, wyznaczamy niewiadome częstotliwości i postacie własne drgań. W rezultacie otrzymujemy, że są one funkcjami amplitudy  $a_j$ , tj.



$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_i(a_1), \\ b_{ji} &= b_{ji}(a_1). \end{aligned} \quad j, i = 1, \dots, n$$

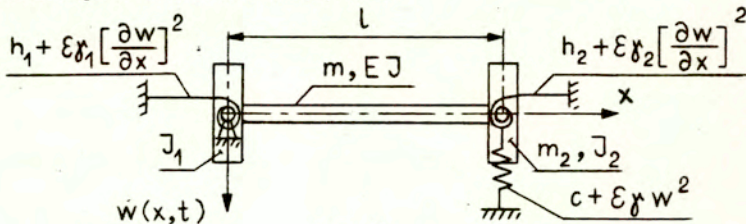
Poszukiwane drgania główne / 8 / przybierają postać

$$q_j(t) = a_1 b_{ji}(a_1) \cos[\omega_i(a_1)t], \quad j, i = 1, \dots, n.$$

Warto zauważyć, że w rozważonym przypadku metoda Ritza jest równoważna z procedurą bilansu harmonicznego.

2.2. Zmodyfikowane ujęcie metody Ritz'a w zastosowaniu do jednowymiarowego, nieliniowego układu ciągłego.

Analogiczne rozważania, jak dla układu dyskretnego, zostaną teraz przeprowadzone dla jednowymiarowego, nieliniowego układu ciągłego. Przykład modelu mechanicznego takiego układu przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1.

Rozpatrywane będą drgania swobodne układu przy założeniu nieliniowości warunków brzegowych. Przyjęte zostanie także założenie, że belka wykonuje tylko drgania poprzeczne, zaś jej drgania wzdłuż nie zostaną zaniedbane.

Jednowymiarowe układy drgające o ciągłym rozkładzie masy rozpatrywane były w pracy [ 1 ] przez H. Leipholz'a. W rozważaniach swych ograniczył się on do analizy prostych przypadków, w których nie brana była pod uwagę możliwość wystąpienia mas skupionych i sprężyn na brzegach układu.

W obecnej pracy, dla rozważanego układu, przyjęto możliwie ogólny przypadek warunków brzegowych. W wyniku przemieszczeń kątowych na obu końcach belki mogą wystąpić momenty sił bezwładności oraz nieliniowe momenty sił sprężystych pochodzące od sprężyn spiralnych,

$$M_{1sp} = h_1 \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} + \epsilon \delta_1 \left[ \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} \right]^3, \quad //10/$$

$$M_{2sp} = h_2 \frac{\partial w(l,t)}{\partial x} + \epsilon \delta_2 \left[ \frac{\partial w(l,t)}{\partial x} \right]^3. \quad //11/$$

Na prawym brzegu układu wystąpi również siła bezwładności, wynikająca z ruchu postępowego masy  $m_2$ , zgodnego z kierunkiem przemieszczeń poprzecznych oraz nieliniowa siła sprężysta, pochodząca od sprężyny śrubowej,

$$F_{spr} = c w(l) + \varepsilon \gamma [w(l)]^3. \quad /12/$$

Określimy najpierw gęstości energii kinetycznej i potencjalnej dla układu przedstawionego na rys.1 przy uczynionych wcześniej założeniach. Wprowadzimy podział wspomnianych wielkości na gęstości energii samej belki, traktowanej jako wnętrze układu drgającego oraz gęstości energii brzegów układu.

Gęstość energii kinetycznej wnętrza układu / belki/ wynosi

$$\tau_w = \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2, \quad /13/$$

gdzie  $m$  jest masą, przypadającą na jednostkę długości belki. Gęstość energii kinetycznej brzegów układu, wynikająca z ruchu kąтового mas o bezwładnościach  $J_1$  i  $J_2$  oraz ruchu postępowego masy o bezwładności  $m_2$  wyrazimy w formie

$$\begin{aligned} \tau_B = & \frac{1}{2} J_1 \left[ \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x \partial t} \right]^2 + \frac{1}{2} J_2 \left[ \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x \partial t} \right]^2 + \\ & + \frac{1}{2} m_2 \left[ \frac{\partial w(l,t)}{\partial t} \right]^2. \end{aligned} \quad /14/$$

Gęstość energii potencjalnej wnętrza układu wyraża się zależnością

$$\mathcal{U}_w = \frac{1}{2} E J \left[ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2, \quad /15/$$

gdzie  $EJ$  jest sztywnością giętą belki, zaś gęstość energii potencjalnej brzegów, pochodząca od sprężyn spiralnych i śrubowej wynosi

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_B = & \frac{1}{2} h_1 \left[ \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} \right]^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \gamma_1 \left[ \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} \right]^4 + \\ & + \frac{1}{2} c [w(l,t)]^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \gamma [w(l,t)]^4 + \quad /16/ \\ & + \frac{1}{2} h_2 \left[ \frac{\partial w(l,t)}{\partial x} \right]^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \gamma_2 \left[ \frac{\partial w(l,t)}{\partial x} \right]^4. \end{aligned}$$

Zastosujemy teraz zasadę wariacyjną Hamiltona do wyprowadzenia równania ruchu i warunków brzegowych dla rozpatrywanego układu ciągłego, przedstawionego na rys. 1.

Dla jednowymiarowego układu o ciągłym rozkładzie masy zasada Hamiltona przybiera ogólną postać [1]

$$\delta \mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \delta \mathcal{L} dx dt = 0.$$

Zasadę tę można wyrazić w formie

$$\delta \mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[ \sum_{s=1}^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_s} \delta w_s \right] dx dt = 0, \quad /17/$$

gdzie  $\mathcal{L}$  jest gęstością Lagrange'a. Dla rozpatrywanego układu drgającego mamy  $r = 5$ , przy czym

$$\begin{aligned} w_1 &\equiv w, & w_4 &\equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx}, \\ w_2 &\equiv \frac{\partial w}{\partial t} = w_t, & w_5 &\equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = w_{xt}. \quad /18/ \\ w_3 &\equiv \frac{\partial w}{\partial x} = w_x, \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę oznaczenia / 18 / gęstość Lagrange'a można wyrazić w postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[ \mathcal{T}_w(w_t) + \mathcal{T}_B(w_t, w_{xt}) \right] + \\ & - \left[ \mathcal{U}_w(w_{xx}) + \mathcal{U}_B(w, w_x) \right], \end{aligned} \quad /19/$$

przy czym odpowiednie gęstości energii kinetycznej i potencjalnej opisano zależnościami / 13 / - / 16 /.

W związku z przyjętymi oznaczeniami / 18 / zasadę Hamiltona / 17 / zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \delta w + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \delta w_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xt}} \delta w_{xt} \right] dx dt = 0. \end{aligned} \quad /20/$$

Zawarty w równaniu / 20 / wyraz

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \delta w_t dx dt$$

można po scałkowaniu przez części wyrazić w postaci

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \delta w_t dx dt = & \int_0^l \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \delta w \right]_{t_1}^{t_2} dx + \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \right) \delta w dx dt. \end{aligned} \quad /21/$$

Ponieważ  $t_1$  i  $t_2$  są wybranymi chwilami czasu, dla których wariacje  $\delta w$  spełniają z założenia warunek

$$\delta w(t_1) = \delta w(t_2) \equiv 0, \quad /22/$$

to równanie / 21 / przybiera postać

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \delta w_t dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \right) \delta w dx dt. \quad /23/$$

Postępując podobnie, wyraz

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xt}} \delta w_{xt} dx dt$$

wyrazimy w wyniku scałkowania przez części w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xt}} \delta w_{xt} dx dt = \int_0^l \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_x} \delta w_x \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_x} \right) \delta w_x dx dt. \quad /24/$$

Ponieważ z założenia spełniony jest warunek /22/, to prawdziwa jest również tożsamość

$$\delta w_x(t_1) = \delta w_x(t_2) \equiv 0,$$

w związku z czym równanie /24/ zapiszemy w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xt}} \delta w_{xt} dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_x} \right) \delta w_x dx dt. \quad /25/$$

Korzystając z odpowiedniego wzoru, wywodzącego się z całkowego twierdzenia Gaussa, wyraz

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} dx dt$$

występujący w równaniu /20/ przedstawimy w formie

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \right) \delta w dx dt + \quad /26/$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \right) \delta w dR dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \delta w_x dR dt,$$

gdzie R jest obszarem brzegowym. W rozważanym przypadku jednowymiarowego układu ciągłego jego brzeg R redukuje się do dwóch punktów, które pokrywają się z końcami belki. W związku z tym całkowanie po brzegu R sprowadza się do wyznaczenia wartości funkcji podcałkowej dla odpowiednich wartości współrzędnej przestrzennej x. Przyjmując, że wartościom indeksu i = 1, 2 odpowiadają wartości x = 0 i x = l, równanie /26/ zapiszemy w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \right) \delta w dx dt +$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \right) \delta w_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \delta w_{xi} dt. \quad /27/$$

Uwzględniając w zasadzie wariacyjnej /20/ zależności /23/, /25/ i /27/ otrzymujemy

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left[ - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \right) \right] \delta w dx \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \delta w_{xi} + \int_0^l \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xt}} \right) \right] \delta w_x dx + /28/$$

$$\left. - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \right) \delta w_i + \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \delta w dx \right\} dt = 0.$$

Biorąc pod uwagę gęstość Lagrange'a, opisaną ogólną zależnością /19/, zasadę Hamiltona /28/ można przekształcić do postaci

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left[ - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_w}{\partial w_t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} \right) \right] \delta w dx \right.$$

$$- \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} \delta w_{xi} - \int_0^l \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_B}{\partial w_x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_B}{\partial w_{xt}} \right) \right] \delta w_x dx + /29/$$

$$\left. + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} \right) \delta w_i - \int_0^l \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_B}{\partial w} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_B}{\partial w_t} \right) \right] \delta w dx \right\} dt = 0$$



Gęstości energii kinetycznej  $\mathcal{T}_B$  i potencjalnej  $\mathcal{U}_B$  opisane odpowiednio zależnościami /14/ i /16/, są określone dla brzegów układu, czyli dla wartości współrzędnej  $x=0$  i  $x=1$ . Uwzględniając przyjęte wcześniej oznaczenie, w którym wspomniane wartości współrzędnej  $x$  odpowiadają wartościom indeksu  $i = 1, 2$ , zasadę wariacyjną Hamiltona sprowadzimy ostatecznie do postaci

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_w}{\partial w_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} \right) \right] \delta w dx + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial \mathcal{U}_B}{\partial w_x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_B}{\partial w_{xt}} \right) \right] \delta w_{xi} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \left[ - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}_B}{\partial w} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_B}{\partial w_t} \right) \right] \delta w_i \right\} dt = 0 \quad /30/$$

Wariacje  $\delta w$ ,  $\delta w_{xi}$  i  $\delta w_i$  są wzajemnie niezależne. Równanie /30/ jest więc spełnione tylko wtedy, gdy spełnione są równania

$$\varepsilon_R(t) \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_w}{\partial w_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} \right) = 0, \quad /31/$$

$$\varepsilon_{1i}(t) \equiv \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial \mathcal{U}_B}{\partial w_x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_B}{\partial w_{xt}} \right) = 0, \quad /32/$$

$$\varepsilon_{2i}(t) \equiv - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{U}_w}{\partial w_{xx}} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}_B}{\partial w} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_B}{\partial w_t} \right) = 0, \quad /33/$$

$$i = 1, 2.$$

Równanie /31/ jest równaniem różniczkowym, opisującym drgania giętne belki, traktowanej jako wnętrze układu. W ogólnym przypadku równanie ruchu belki może zawierać człon nieliniowy, który reprezentuje nieliniowe siły sprężyste, wynikające z geometrycznej nieliniowości.

Równania /32/ i /33/ stanowią nieliniowy układ czterech równań / $i = 1, 2$ /, opisujących warunki brzegowe układu. Pierwsze ze wspomnianych równań jest równaniem momentów sił, zaś drugie - równaniem sił dla obu końców belki. Nieliniowość tych równań jest efektem nieliniowych sztywności sprężyn na końcach belki.

Ścisłe rozwiązanie równań /31/, /32/ i /33/ nie jest znane, tj. nie możemy spełnić warunków  $\varepsilon_R(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{1i}(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{2i}(t) \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Stosując metodę Ritz'a poszukujemy rozwiązania przybliżonego w postaci skończonego szeregu założonych funkcji czasu

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \psi_k(t), \quad /34/$$

gdzie  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , są niewiadomymi funkcjami, które wymagają wyznaczenia. Zauważmy, że w odróżnieniu od założeń spotykanych na ogół w klasycznym ujęciu metody Ritz'a, stosowanej w badaniach nieliniowych układów ciągłych, funkcje

$\varphi_k(x)$  zostały przyjęte w poszukiwanym rozwiązaniu /34/ jako niewiadome podobnie, jak to ma miejsce w przypadku współczynników  $a_{jk}$  w analogicznym rozwiązaniu przybliżonym /3/ dla układu dyskretnego.

Funkcje  $\psi_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , muszą oczywiście spełniać wymagane warunki matematyczne [5, str.569]. Zauważmy, że skoro  $\psi_k(t)$  są z góry założonymi funkcjami czasu, to wariacje  $\delta w$ ,  $\delta w_{xi}$ ,  $\delta w_i$  zależą tylko od wariacji funkcji  $\varphi_k(x)$ , w związku z czym możemy zapisać

$$\delta w = \sum_{k=1}^N \psi_k(t) \delta \varphi_k(x), \quad /35/$$

$$\delta w_{xi} = \sum_{k=1}^N \psi_k(t) \delta \varphi_{xik}, \quad i = 1, 2, \quad /36/$$

$$\delta w_i = \sum_{k=1}^N \Psi_k(t) \delta \varphi_{ik} . \quad /37/$$

Wariacja  $\delta \varphi_k(x)$  jest wariacją przemieszczenia w ruchu poprzecznym belki, zaś  $\delta \varphi_{xik}$  i  $\delta \varphi_{ik}$  oznaczają odpowiednio wariacje przemieszczeń w ruchu kątowym i postępowym końców belki dla  $x = 0$  i  $x = 1$ .

Wariacje  $\delta \varphi_k(x)$ ,  $\delta \varphi_{xik}$  i  $\delta \varphi_{ik}$  są wzajemnie niezależne. Wynika to z wzajemnej niezależności wariacji  $\delta w$ ,  $\delta w_{xi}$  i  $\delta w_i$  oraz z faktu, że w rozwiązaniu przybliżonym  $/34/ \Psi_k(t)$  są założonymi funkcjami czasu.

Podstawiając zależności  $/35/$ ,  $/36/$  i  $/37/$  do równania  $/30/$  oraz wykorzystując oznaczenia  $/31/$ ,  $/32/$  i  $/33/$  otrzymujemy

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^N \left\{ \int_0^l \varepsilon_R(t) \Psi_k(t) \delta \varphi_k(x) dx + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \left[ \varepsilon_{1i}(t) \Psi_k(t) \delta \varphi_{xik} + \varepsilon_{2i}(t) \Psi_k(t) \delta \varphi_{ik} \right] \right\} dt = 0 \quad /38/$$

gdzie  $\varepsilon_R(t)$  i  $\varepsilon_{1i}(t)$ ,  $\varepsilon_{2i}(t)$  są odpowiednio pozostałościami równania ruchu belki i warunków brzegowych po podstawieniu do nich przybliżonego rozwiązania  $/34/$ .

Skoro wariacje  $\delta \varphi_k(x)$ ,  $\delta \varphi_{xik}$  i  $\delta \varphi_{ik}$  są wzajemnie niezależne, to równanie  $/38/$  może być spełnione tylko wtedy, gdy spełnione są równania

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \varepsilon_R(t) \Psi_k(t) dx dt = 0 , \\ \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_{1i}(t) \Psi_k(t) dt = 0 , \quad k = 1, \dots, N, \quad /39/ \\ \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_{2i}(t) \Psi_k(t) dt = 0 . \quad i = 1, 2,$$

Z warunków /39/ otrzymujemy układ  $N$  równań różniczkowych zwyczajnych z nieliniowymi warunkami brzegowymi. Po ich rozwiązaniu otrzymujemy poszukiwane w rozwiązaniu przybliżonym /34/ funkcje  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Należy tutaj zaznaczyć, że związki /39/ zostały otrzymane w wyniku zastosowania metody Ritza zarówno do równania ruchu belki, jak i do warunków brzegowych.

Ten istotny fakt wynika z przyjętego w zmodyfikowanym ujęciu metody Ritza założenia, że w poszukiwanym rozwiązaniu przybliżonym /34/ funkcje  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , są niewiadome. Natomiast w klasycznym ujęciu metody Ritza, stosowanej w badaniach drgań swobodnych nieliniowych układów ciągłych, zakłada się, że funkcje te są znane i równe funkcjom własnym układu liniowego tj. układu /31/ - /33/ dla  $\varepsilon = 0$ .

Założenie to eliminuje z rozważań warunki brzegowe, gdyż, po przeniesieniu z nich nieliniowości do równania ruchu belki, są one z założenia spełnione przez liniowe funkcje własne. W efekcie klasyczna metoda Ritza wymaga spełnienia warunków typu /39/ tylko dla nieliniowego równania ruchu belki.

Jeżeli poszukiwanym rozwiązaniem przybliżonym są drgania główne w postaci harmonicznej funkcji czasu

$$w(x,t) = \varphi(x) \cos \omega t, \quad /40/$$

w którym częstość drgań swobodnych  $\omega$  i funkcja  $\varphi(x)$  są niewiadomymi, to wprowadzając oznaczenie

$$\frac{\varphi(x)}{\alpha} = \Phi(x), \quad \Phi(x_1) = 1 \quad /41/$$

drgania główne /40/ wyrazimy w formie

$$w(x,t) = \alpha \Phi(x) \cos \omega t, \quad /42/$$

gdzie  $\Phi(x)$  jest niewiadomą funkcją postaci własnej drgań zaś  $\alpha$  jest amplitudą o dowolnej, stałej wartości, zależnej od warunków początkowych.

Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami odpowiednie wariacje dla rozwiązania przybliżonego /40/ wyrażą się zależnościami

$$\delta w = \cos \omega t \delta \varphi(x) ,$$

$$\delta w_{xi} = \cos \omega t \delta \varphi_{xi} ,$$

$$i = 1, 2 ,$$

$$\delta w_i = \cos \omega t \delta \varphi_i ,$$

zaś ogólne równanie /38/ przybiera postać

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^l \mathcal{E}_R(\omega t) \cos \omega t \delta \varphi(x) dx + \right. \\ & + \sum_{i=1}^2 \left[ \mathcal{E}_{1i}(\omega t) \cos \omega t \delta \varphi_{xi} + \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{E}_{2i}(\omega t) \cos \omega t \delta \varphi_i \right] \right\} d(\omega t) = 0 . \end{aligned}$$

Na mocy wzajemnej niezależności wariacji  $\delta \varphi(x)$ ,  $\delta \varphi_{xi}$ ,  $\delta \varphi_i$  powyższe równanie może być spełnione tylko wtedy, gdy spełniony jest układ równań

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \mathcal{E}_R(\omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0 , \quad /43a/$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{E}_{1i}(\omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0 , \quad /43b//43/$$

$$i = 1, 2 ,$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{E}_{2i}(\omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0 . \quad /43c/$$

Jak łatwo zauważyć w rozważanym przypadku metoda Ritza została sprowadzona do procedury bilansu harmonicznych, przy czym procedura ta została zastosowana zarówno do równania ruchu belki, jak i do warunków brzegowych. Jak wspomniano wcześniej jest to istotny fakt, różniący zmodyfikowane ujęcie metody Ritza od ujęcia klasycznego tej metody.

Warunek /43a/, odpowiadający równaniu ruchu belki, po uwzględnieniu oznaczenia /41/ prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego względem niewiadomej funkcji postaci własnej.

Ze związków /43b/ i /43c/ otrzymujemy po uwzględnieniu oznaczenia /41/ cztery nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne, opisujące warunki brzegowe. Rozwiązując układ równań /43/ otrzymujemy nieliniowe częstości i postaci własne drgań, które są funkcjami amplitudy  $\alpha$

$$\begin{aligned} \omega_j &= \omega_j(\alpha), \\ \phi_j(x) &= \phi_j(x, \alpha). \end{aligned} \quad j=1, \dots, n$$

W związku z powyższym poszukiwane przybliżone rozwiązanie harmoniczne /42/ przybiera postać

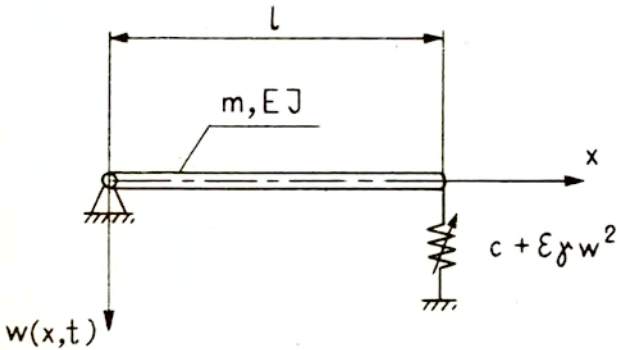
$$w_j(x, t) = \alpha \phi_j(x, \alpha) \cos[\omega_j(\alpha)t], \quad j=1, \dots, n.$$

Zależność częstości i funkcji postaci własnych od amplitudy  $\alpha$  jest w rozważanym przypadku efektem nieliniowości warunków brzegowych układu drgającego. W przypadku ogólnym, gdy uwzględnione są duże odkształcenia sprężyste belki w jej ruchu drgającym, nieliniowość wspomnianych wielkości jest wynikiem nieliniowości zarówno równania ruchu, jak i warunków brzegowych.

### 3. Przykład liczbowy.

W niniejszym rozdziale przedstawiony zostanie przykład liczbowy belki z jednym nieliniowym warunkiem brzegowym, wynikającym z podparcia prawego końca belki sprężyną śrubową o nieliniowej sztywności.

Model mechaniczny układu przedstawiono na rys.2.



Rys. 2.

Dla rozpatrywanego układu mechanicznego równanie drgań poprzecznych belki i warunki brzegowe mają postać

$$m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0, \quad /44/$$

$$w(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0, \quad /45/$$

$$\frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x^3} - \frac{c}{EJ} w(l,t) - \frac{\epsilon \gamma}{EJ} [w(l,t)]^3 = 0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\eta = \frac{x}{l}, \quad p^2 = \bar{\omega}_{01}^2 = \frac{EJ}{m} \frac{\pi^4}{l^4}, \quad \tau = pt,$$

gdzie  $\bar{\omega}_{01}$  jest pierwszą częstotliwością drgań własnych belki podpartej swobodnie na obu końcach, równanie ruchu /44/ i warunki brzegowe /45/ sprowadzimy do postaci bezwymiarowej

$$\frac{\partial^2 w(\eta, \tau)}{\partial \tau^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w(\eta, \tau)}{\partial \eta^4} = 0, \quad /46/$$

$$w(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, \tau)}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \eta^2} = 0, \quad /47/$$

$$\frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \eta^3} - c \sigma w(1, \tau) - \varepsilon \gamma \sigma [w(1, \tau)]^3 = 0,$$

gdzie

$$\lambda^2 = \frac{EJ}{m} \frac{1}{p^2 l^4} = \frac{1}{\pi^4},$$

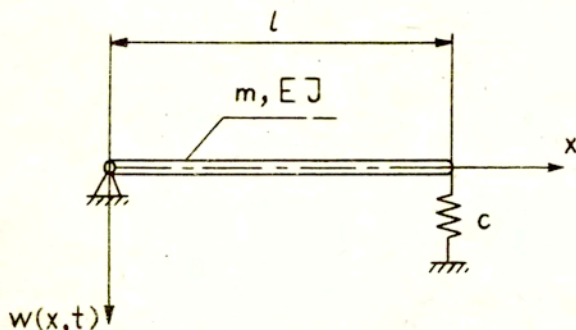
$$\sigma = \frac{l^3}{EJ}.$$

W przeprowadzonych niżej rozważaniach zbadane zostaną drgania główne nieliniowego układu belki w postaci harmonicznej funkcji czasu przy zastosowaniu metody perturbacyjnej, metody Ritza w ujęciu klasycznym i zmodyfikowanego ujęcia metody Ritza, którego podstawy teoretyczne omówiono w rozdziale 2.2. W celu zapewnienia przejrzystości rozważań rozpatrzone zostaną najpierw drgania swobodne odpowiedniego układu liniowego.



3.1. Drgania swobodne belki podpartej na końcu sprężyną liniową.

Na rys. 3 przedstawiono model mechaniczny liniowego układu belki, otrzymany w wyniku zlinearyzowania układu nieliniowego, pokazanego na rys.2. Linearyzacji dokonano odrzucając nieliniowy składnik w odpowiednim wyrażeniu, opisującym sztywność sprężyny podpierającej belkę na jej prawym końcu.



Rys. 3.

Dla układu przedstawionego na powyższym rysunku bezwymiarowe równanie drgań poprzecznych belki ma postać /46/, a warunki brzegowe przybierają formę

$$w(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, \tau)}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \eta^3} - c \sigma w(1, \tau) = 0.$$

Dla rozwiązania szczególnego, założonego w postaci harmonicznej funkcji czasu

$$w(\eta, \tau) = a \Phi_0(\eta) \cos \omega_0 \tau \quad /48/$$

gdzie  $\Phi_0(\eta)$  jest postacią własną a  $\omega_0$  - częstością drgań swobodnych rozpatrywanego układu liniowego, otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{d^4 \Phi_0(\eta)}{d\eta^4} - k_0^4 \Phi_0(\eta) = 0, \quad /49/$$

$$\Phi_0(0) = 0, \quad \frac{d^2 \Phi_0(0)}{d\eta^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 \Phi_0(1)}{d\eta^2} = 0, \quad /50/$$

$$\frac{d^3 \Phi_0(1)}{d\eta^3} - c \Phi_0(1) = 0,$$

gdzie

$$k_0^4 = \frac{1}{\lambda^2} \omega_0^2, \quad /51/$$

skąd dostajemy związek na kwadrat częstości drgań swobodnych

$$\omega_0^2 = \lambda^2 k_0^4 = \frac{k_0^4}{\pi^4}. \quad /52/$$

Funkcję postaci własnej  $\Phi_o(\eta)$  przyjmujemy w formie

$$\Phi_o(\eta) = A \operatorname{sink}_o \eta + B \operatorname{cosk}_o \eta + C \operatorname{shk}_o \eta + D \operatorname{chk}_o \eta, \quad /53/$$

gdzie A, B, C, D są stałymi dowolnymi. Z warunków brzegowych dla  $\eta = 0$  otrzymujemy

$$B = D = 0. \quad /54/$$

Równanie charakterystyczne

$$2c\sigma \operatorname{sink}_o \operatorname{shk}_o - k_o^3 (\operatorname{sink}_o \operatorname{chk}_o - \operatorname{cosk}_o \operatorname{shk}_o) = 0$$

po obu stronach podzieleniu przez  $\operatorname{cosk}_o \operatorname{chk}_o$  przybiera postać

$$2c\sigma \operatorname{tgk}_o \operatorname{thk}_o - k_o^3 (\operatorname{tgk}_o - \operatorname{thk}_o) = 0. \quad /55/$$

Wartościom własnym

$$k_o = k_{on}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad /56/$$

będącym rozwiązaniami równania charakterystycznego /55/ odpowiadają, zgodnie z /52/, częstotliwości drgań swobodnych

$$\omega_{on} = \lambda k_{on}^2 = \frac{k_{on}^2}{\pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad /57/$$

rozpatrywanego układu liniowego. W tabeli 1 podano przykładowo pierwsze trzy częstotliwości własne, wyznaczone przy założeniu, że  $c\sigma = 10$ .

Tabela 1.

$k_{on}$	2,2313	4,0951	7,0974
$\omega_{on}$	0,5045	1,6994	5,1038

Każdej wartości własnej  $k_{on}$  odpowiada funkcja postaci własnej. Biorąc pod uwagę zależność /53/ i warunek /54/ oraz uwzględniając /56/ funkcje postaci własnych przybierają formę

$$\Phi_{on}(\eta) = A_n \operatorname{sink}_{on}\eta + C_n \operatorname{shk}_{on}\eta, \quad /58/$$
$$n = 1, 2, \dots$$

Stałe dowolne  $A_n$  i  $C_n$  wyznaczamy z warunków brzegowych dla  $\eta = 1$  oraz stawiając warunek normalizacyjny

$$\Phi_{on}\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad /59/$$

W związku z tym stałe te przebijają postać

$$A_n = \frac{\operatorname{shk}_{on}}{\operatorname{sink}_{on} \operatorname{sh} \frac{k_{on}}{2} + \sin \frac{k_{on}}{2} \operatorname{shk}_{on}},$$

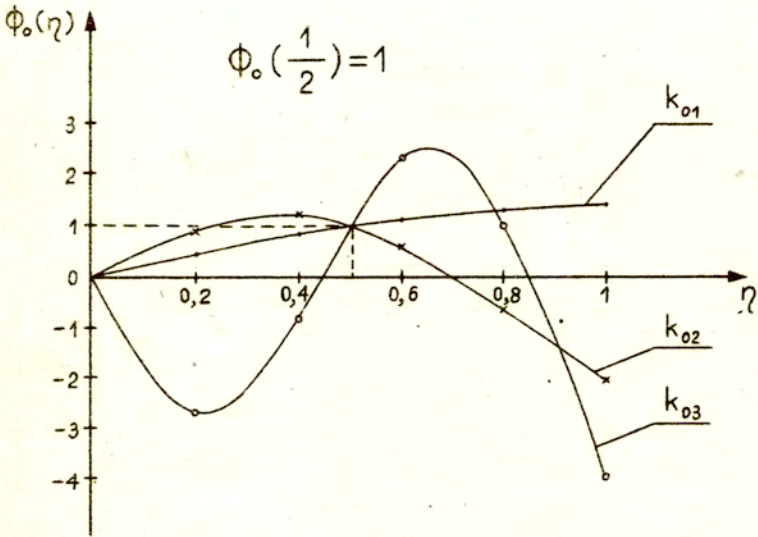
$$C_n = \frac{\operatorname{sink}_{on}}{\operatorname{sink}_{on} \operatorname{sh} \frac{k_{on}}{2} + \sin \frac{k_{on}}{2} \operatorname{shk}_{on}},$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

zaś funkcje postaci własnych wyrazimy ostatecznie w formie

$$\Phi_{on}(\eta) = 2 \frac{\cos \frac{k_{on}}{2} \operatorname{ch} \frac{k_{on}}{2}}{\cos \frac{k_{on}}{2} + \operatorname{ch} \frac{k_{on}}{2}} \left( \frac{1}{\operatorname{sink}_{on}} \operatorname{sink}_{on}\eta + \right. \\ \left. + \frac{1}{\operatorname{shk}_{on}} \operatorname{shk}_{on}\eta \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad /60/$$

Na podstawie zależności /60/ sporządzono wykres funkcji postaci własnych, odpowiadających trzem pierwszym wartościom własnym, wyznaczonym z równania charakterystycznego /55/. Wykres przedstawiony został na rys. 4.



Rys. 4.

### 3.2. Zastosowanie metody perturbacyjnej do zbadania drgań swobodnych nieliniowego układu belki.

Rozpatrzone zostaną teraz drgania swobodne nieliniowego układu ciągłego, którego model mechaniczny przedstawiono na rys. 2. Bezwymiarowe równanie drgań poprzecznych belki i warunki brzegowe mają odpowiednio postać /46/ i /47/.

Do zbadania drgań głównych zostanie zastosowana metoda perturbacyjna [2,5,6]. Jest to metoda przybliżona oparta o ideę "małego parametru". W metodzie tej poszukuje się rozwiązania w postaci szeregu funkcji, uporządkowanego wg. kolejnych potęg małego parametru  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ). Jeżeli stosując metodę perturbacyjną poszukujemy rozwiązania periodycznego, to zgodnie z ideą tej metody założone rozwiązanie można przedstawić w formie

$$\begin{aligned} \omega_n(\eta, \tau) = & a \Phi_{on}(\eta) \cos \omega_n \tau + \\ & + \varepsilon w_1(\eta, \tau) + \varepsilon^2 w_2(\eta, \tau) + \dots, \end{aligned} \quad /61/$$

$$\omega_n = \omega_{on} + \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \dots, \quad /62/$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

gdzie  $\Phi_{on}(\eta), \omega_{on}$  są odpowiednio postaciami i częstościami własnymi układu zlinearyzowanego,  $w_1(\eta, \tau), w_2(\eta, \tau), \dots$  - nieznanymi funkcjami poprawkowymi wychylenia poprzecznego belki,  $e_1, e_2, \dots$  - niewiadomymi współczynnikami poprawkowymi częstości drgań swobodnych, zaś  $a$  jest amplitudą zależną od warunków początkowych. Z założenia, iż szukane rozwiązanie ma być periodyczne o okresie  $2\pi/\omega_n$  wynika, że funkcje poprawkowe  $w_1(\eta, \tau), w_2(\eta, \tau), \dots$  muszą być również periodyczne o tym samym okresie.

Zastosujemy metodę perturbacyjną do wyznaczenia drgań głównych w postaci harmonicznej funkcji czasu

$$\omega_n(\eta, \tau) = a \Phi_{on}(\eta) \cos \omega_n \tau, \quad /63/$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Ponieważ funkcje  $\Phi_{on}(\eta)$  są znane i równe postaciom własnym odpowiedniego układu liniowego, wpływ nieliniowości ropatrywanego układu może się ujawnić tylko poprzez częstości drgań swobodnych  $\omega_n$ , które są jedynymi niewiadomymi w poszukiwanym rozwiązaniu / 63 /. Po podstawieniu / 61 / i / 62 / do równania ruchu belki / 46 / oraz warunków brzegowych / 47 /, i z przyrównania wyrazów przy pierwszej potędze  $\varepsilon$  otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 w_1(\eta, \tau)}{\partial \tau^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w_1(\eta, \tau)}{\partial \eta^4} = \quad /64/$$

$$= [2\omega_{on} e_1 \Phi_{on}(\eta)] a \cos \omega_n \tau,$$

$$w_1(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1(0, \tau)}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_1(1, \tau)}{\partial \eta^2} = 0, \quad /65/$$

$$\frac{\partial^3 w_1(1, \tau)}{\partial \eta^3} - c\sigma w_1(1, \tau) +$$

$$- \left[ \frac{3}{4} \gamma \sigma a^2 \Phi_{on}^3(1) \right] a \cos \omega_n \tau, \quad n=1, 2, \dots$$

Jak łatwo zauważyć zarówno równanie / 64 /, jak i warunki brzegowe / 65 / są niejednorodne. Dla ułatwienia dalszych rozwiązań układ równań / 64 / - / 65 / przedstawiamy w postaci

$$\frac{\partial^2 w_1(\eta, \tau)}{\partial \tau^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w_1(\eta, \tau)}{\partial \eta^4} = F_n(\eta) a \cos \omega_n \tau, \quad /66/$$

$$n=1, 2, \dots,$$

$$w_1(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1(0, \tau)}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_1(1, \tau)}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1(1, \tau)}{\partial \eta^3} - c\sigma w_1(1, \tau) = 0, \quad /67/$$

gdzie

$$F_n(\eta) = 2\omega_{on}e_1\Phi_{on}(\eta) + \quad /68/ \\ - \frac{3}{4}\gamma\sigma a^2\Phi_{on}^3(\eta)\delta(\eta-1), \quad n=1,2,\dots,$$

otrzymując liniowe i niejednorodne równanie ruchu belki /66/ oraz liniowe i jednorodne warunki brzegowe /67/ .

Równanie /66/ rozwiążemy stosując **jedną** z metod przybliżonych. W związku z tym niewiadomą funkcję  $w_1(\eta, \tau)$  rozwinie my w szereg względem funkcji postaci własnych  $\Phi_{oi}(\eta)$  układu liniowego

$$w_1(\eta, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{oi}(\eta) \xi_{oi}(\tau), \quad /69/$$

gdzie  $\xi_{oi}(\tau)$  są współrzędnymi normalnymi. Podstawiając funkcję  $w_1(\eta, \tau)$  w formie /69/ do równania /66/ i mnożąc obustronnie to równanie przez  $\Phi_{oj}(\eta)$  oraz całkując wzdłuż długości belki otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_{oi}(\tau) \int_0^1 \Phi_{oi}(\eta) \Phi_{oj}(\eta) d\eta + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{oi}(\tau) \int_0^1 \lambda^2 \frac{d^4 \Phi_{oi}(\eta)}{d\eta^4} \Phi_{oj}(\eta) d\eta = \\ = \int_0^1 F_i(\eta) \Phi_{oj}(\eta) a \cos \omega_n \tau d\eta, \quad i=1,2,\dots,$$



zaś uwzględniając równania /49/ i /51/ dostajemy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_{oi}(\tau) \int_0^1 \Phi_{oi}(\eta) \Phi_{oj}(\eta) d\eta + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{oi}(\tau) \omega_{on}^2 \int_0^1 \Phi_{oi}(\eta) \Phi_{oj}(\eta) d\eta = \\ & = \int_0^1 F_i(\eta) \Phi_{oj}(\eta) a \cos \omega_n \tau d\eta, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad /70/$$

Biorąc pod uwagę warunek ortogonalności

$$\int_0^1 \Phi_{oi}(\eta) \Phi_{oj}(\eta) d\eta = M_{oj} \delta_{ij} \quad /71/$$

gdzie

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases}, \quad /72/$$

równanie /70/ sprowadza się do układu równań różniczkowych drugiego rzędu

$$\begin{aligned} & M_{oj} \ddot{\xi}_{oj}(\tau) + M_{oj} \omega_{oj} \xi_{oj}(\tau) = \\ & = Q_{oj} a \cos \omega \tau, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad /73/$$

przy czym

$$M_{oj} = \int_0^1 \Phi_{oj}^2(\eta) d\eta \quad /74/$$

jest uogólnioną, bezwymiarową masą j-tej postaci, zaś

$$Q_{oj} = \int_0^1 F_j(\eta) \Phi_{oj}(\eta) d\eta \quad /75/$$

jest uogólnioną, bezwymiarową siłą j-tej postaci.

Spośród równań /73/ rozpatrzymy to równanie, dla którego  $j = n$ . W tym przypadku częstość własna drgań  $\omega_{oj} = \omega_{on}$  jest równa częstości  $\omega_n$  "wymuszenia", występującego po prawej stronie tego równania. W efekcie rozwiązanie szczególne równania /66/ będzie zawierało człon sekularny który wzrasta z czasem nieograniczenie. Aby funkcja  $w_1(\eta, \tau)$  nie zawierała członu sekularnego musi być spełniony warunek

$$Q_{on} = \int_0^1 F_n(\eta) \Phi_{on}(\eta) d\eta = 0. \quad /76/$$

Z warunku znikania członu sekularnego /76/ wyznaczmy współczynnik poprawkowy  $e_1$ , częstości drgań swobodnych  $\omega_n$ .

Podstawiając do równania /76/ zależności /68/ otrzymujemy

$$2\omega_{on} e_1 \int_0^1 \Phi_{on}^2(\eta) d\eta + \\ - \frac{3}{4} \gamma \sigma \alpha^2 \int_0^1 \Phi_{on}^4(\eta) \delta(\eta-1) d\eta = 0,$$

zaś po uwzględnieniu równości /74/ i własności symbolu delty Diraca napiszemy

$$2\omega_{on} e_1 M_{on} - \frac{3}{4} \gamma \sigma \alpha^2 \Phi_{on}^4(1) = 0$$

skąd dostajemy

$$e_1 = \frac{3}{8} \gamma \delta \frac{\Phi_{on}^4(1)}{M_{on}} \frac{a^2}{\omega_{on}}$$

Podstawiając współczynnik poprawkowy  $e_1$ , opisany powyższą zależnością, do równania /62/ otrzymujemy częstość  $\omega_n$  jako funkcję amplitudy  $a$

$$\omega_n = \omega_n(a) = \omega_{on} + \frac{3}{8} \epsilon \gamma \delta \frac{\Phi_{on}^4(1)}{M_{on}} \frac{a^2}{\omega_{on}}, \quad n=1, 2, \dots /77/$$

Poszukiwane drgania główne /63/ możemy wyrazić ostatecznie w formie

$$w(\eta, \tau) = a \Phi_{on}(\eta) \cos[\omega_n(a)\tau], \quad n=1, 2, \dots, \quad /78/$$

gdzie liniowe postaci własne  $\Phi_{on}(\eta)$  i nieliniowe częstości drgań swobodnych  $\omega_n(a)$  są odpowiednio opisane zależnościami /60/ i /77/.

Wyniki przeprowadzonych wyżej rozważań zostaną teraz wykorzystane do wyznaczenia pierwszej nieliniowej częstości drgań swobodnych  $\omega_1(a)$ . W związku z tym wyrazimy najpierw w postaci jawnej wielkości  $\Phi_{on}(1)$  i  $M_{on}$  występujące w zależności /77/. Podstawiamy w tym celu  $\eta = 1$  w równości /60/ otrzymując

$$\Phi_{on}(1) = 4 \frac{\cos \frac{k_{on}}{2} \operatorname{ch} \frac{k_{on}}{2}}{\cos \frac{k_{2n}}{2} + \operatorname{ch} \frac{k_{on}}{2}}, \quad n=1, 2, \dots \quad /79/$$

Uwzględniając ponadto zależności /60/ w równości /74/ i dokonując operacji całkowania dostajemy

$$M_{on} = \frac{2}{k_{on}} \left( \frac{\cos \frac{k_{on}}{2} \operatorname{ch} \frac{k_{on}}{2}}{\cos \frac{k_{on}}{2} + \operatorname{ch} \frac{k_{on}}{2}} \right)^2 \times \quad /80/$$

$$\times \left[ \frac{1}{\operatorname{sink}_{on}} \left( \frac{k_{on}}{\operatorname{sink}_{on}} - 3 \operatorname{cos} k_{on} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\operatorname{sh} k_{on}} \left( \frac{k_{on}}{\operatorname{sh} k_{on}} - 3 \operatorname{ch} k_{on} \right) \right], \quad n=1,2,\dots$$

Podstawiając zależności /79/ i /80/ do wyrażenia /77/ otrzymujemy ostatecznie

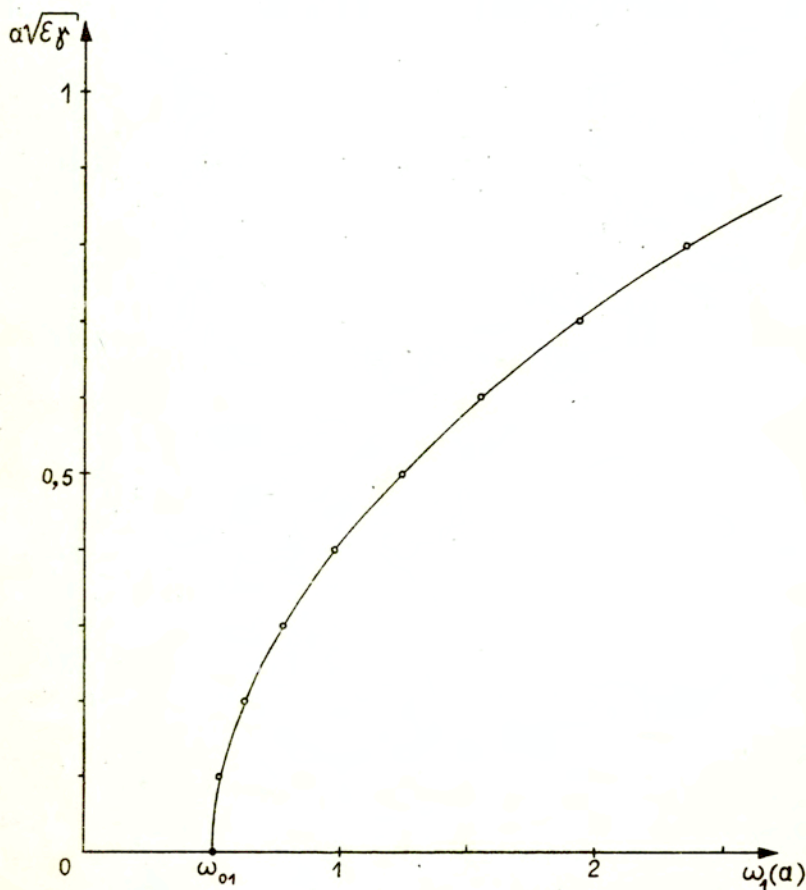
$$\omega_n(a) = \omega_{on} + 48 \varepsilon \gamma \sigma k_{on} \times$$

$$\left( \frac{\cos \frac{k_{on}}{2} \operatorname{ch} \frac{k_{on}}{2}}{\cos \frac{k_{on}}{2} + \operatorname{ch} \frac{k_{on}}{2}} \right)^2 \quad /81/$$

$$\times \frac{\frac{1}{\operatorname{sink}_{on}} \left( \frac{k_{on}}{\operatorname{sink}_{on}} - 3 \operatorname{cos} k_{on} \right) - \frac{1}{\operatorname{sh} k_{on}} \left( \frac{k_{on}}{\operatorname{sh} k_{on}} - 3 \operatorname{ch} k_{on} \right)}{\omega_{on}},$$

$$n=1,2,\dots$$

gdzie częstości własne  $\omega_{0n}$  odpowiedniego układu liniowego są wyrażone zależnością /57/. Należy przy tym pamiętać, że częstości drgań  $\omega_n(\alpha)$  zostały określone przy uwzględnieniu warunku normalizacyjnego /59/, zatem amplituda  $\alpha$  jest amplitudą drgań punktu położonego w połowie długości belki.



Rys. 5.

W oparciu o zależności /81/ sporządzono wykres pierwszej nieliniowej częstości drgań swobodnych  $\omega_1(\alpha)$  w funkcji amplitudy  $\alpha$ , przyjmując  $\sigma = 1$ . Wykres częstości  $\omega_1(\alpha)$  został przedstawiony na rys. 5.

### 3.3. Zastosowanie metody Ritza w ujęciu klasycznym do zbadania drgań swobodnych nieliniowego układu belki.

Zastosowana zostanie teraz metoda Ritza w ujęciu klasycznym do zbadania drgań głównych nieliniowego układu ciągłego / rys.2./, opisanego bezwymiarowymi równaniami /46/i/47/.

Z ostatniego warunku brzegowego /47/ , który jest równaniem sił działających na końcu belki przy  $\eta = 1$ , wyodrębnimy człon nieliniowy i przyjmiemy, że na prawy koniec belki działa nieliniowa siła skupiona. Wykorzystując symbol delty Diraca siłę tę wprowadzimy do równania drgań poprzecznych belki /46/ otrzymując odpowiednio nieliniowe równanie ruchu i liniowe warunki brzegowe

$$\frac{\partial^2 w(\eta, \tau)}{\partial \tau^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w(\eta, \tau)}{\partial \eta^4} + \varepsilon \gamma \sigma [w(\eta, \tau)]^3 \delta(\eta - 1) = 0 , \quad /82/$$

$$w(0, \tau) = 0 , \quad \frac{\partial^2 w(0, \tau)}{\partial \eta^2} = 0 , \quad /83/$$

$$\frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \eta^2} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \eta^3} - c \sigma w(1, \tau) = 0 .$$

W klasycznym ujęciu metody Ritza poszukuje się rozwiązania przybliżonego w postaci harmonicznej funkcji czasu

$$w_n(\eta; \tau) = a \Phi_{on}(\eta) \cos \omega_n \tau, \quad /84/$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

gdzie funkcje  $\Phi_{on}(\eta)$  są znane i równe postaciom własnym odpowiedniego układu liniowego.

Stosując metodę Ritza żądamy, by spełniony był warunek

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathcal{E}_R(\omega_n \tau) \cos \omega_n \tau d(\omega_n \tau) = 0, \quad /85/$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

gdzie  $\mathcal{E}_R(\omega_n \tau)$  jest pozostałością równania ruchu /82/ po podstawieniu do niego rozwiązania przybliżonego /84/. Zauważymy, że warunek /85/ stosowany jest tylko do nieliniowego równania ruchu. Podstawowe założenie upraszczające / leżące u podstaw klasycznego ujęcia metody Ritza, stosowanej w badaniach nieliniowych układów ciągłych/, dotyczące liniowości postaci własnych, eliminuje bowiem z dalszych rozważań zlinearyzowane warunki brzegowe /83/.

Warto również zauważyć, że w rozważanym przypadku metoda Ritza sprowadza się do tzw. procedury bilansu harmonicznych. Warunek /85/ oznacza, że w rozwinięciu pozostałości równania ruchu  $\mathcal{E}_R(\omega_n \tau)$  na szereg Fouriera przyrównywane są do zera wyrazy przy  $\cos \omega_n \tau$ ,  $n=1, 2, \dots$ , a więc przy tej harmonicznej, która została założona w poszukiwanym rozwiązaniu przybliżonym /84/.

Pozostałość równania ruchu /82/, otrzymana w wyniku podstawienia do niego rozwiązania przybliżonego /84/, po rozwinięciu w szereg Fouriera i odrzuceniu trzeciej harmonicznej ma postać

$$\begin{aligned} \varepsilon_R(\omega_n \tau) \equiv & \left[ \lambda^2 \frac{d^4 \Phi_{on}(\eta)}{d\eta^4} - \omega_n^2 \Phi_{on}(\eta) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \varepsilon \gamma \sigma \alpha^2 \Phi_{on}^3(\eta) \delta(\eta-1) \right] \alpha \cos \omega_n \tau = 0, \end{aligned}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Przyrównując do zera wyrażenie stojące w powyższym równaniu przy pierwszej harmonicznej oraz mnożąc otrzymane równanie obustronnie przez  $\Phi_{om}(\eta)$  i całkując po bezwymiarowej długości belki otrzymamy

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \lambda^2 \frac{d^4 \Phi_{on}(\eta)}{d\eta^4} \Phi_{om}(\eta) d\eta - \omega_n^2 \int_0^1 \Phi_{on}(\eta) \Phi_{om}(\eta) d\eta + \\ & + \frac{3}{4} \varepsilon \gamma \sigma \alpha^2 \int_0^1 \Phi_{on}^3(\eta) \Phi_{om}(\eta) \delta(\eta-1) d\eta = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

zaś po uwzględnieniu równania /49/ i /51/ dostajemy

$$\begin{aligned} & \omega_{on}^2 \int_0^1 \Phi_{on}(\eta) \Phi_{om}(\eta) d\eta - \omega_n^2 \int_0^1 \Phi_{on}(\eta) \Phi_{om}(\eta) d\eta + \\ & + \frac{3}{4} \varepsilon \gamma \sigma \alpha^2 \int_0^1 \Phi_{on}^3(\eta) \Phi_{om}(\eta) \delta(\eta-1) d\eta = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$



gdzie  $\omega_{on}$  są częstościami własnymi układu zlinearyzowanego. Biorąc pod uwagę warunek ortogonalności /71/ - /72/, oznaczenie /74/ i wykorzystując własność symbolu delty Diraca otrzymujemy

$$\omega_{on}^2 M_{on} - \omega_n^2 M_{on} + \frac{3}{4} \varepsilon \gamma \sigma a^2 \Phi_{on}(1) = 0, \\ n = 1, 2, \dots,$$

skąd dostajemy

$$\omega_n^2 = \omega_{on}^2 + \frac{3}{4} \varepsilon \gamma \sigma \frac{\Phi_{on}^4(1)}{M_{on}} a^2, \quad /86/ \\ n = 1, 2, \dots$$

Przyjmujemy, że poszukiwane nieliniowe częstości drgań swobodnych wyrażają się zależnością

$$\omega_n = \omega_{on} + \Delta \omega_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad /87/$$

gdzie  $\Delta \omega_n$  są niewiadomymi poprawkami częstości drgań swobodnych, wymagającymi wyznaczenia. Uwzględniając zależność /87/ w wyrażeniu /86/ i zaniedbując kwadrat poprawki częstości  $(\Delta \omega_n)^2$ , który traktujemy jako małą wyższego rzędu, otrzymujemy

$$\Delta \omega_n = \frac{3}{8} \varepsilon \gamma \sigma \frac{\Phi_{on}^4(1)}{M_{on}} \frac{a^2}{\omega_{on}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wstawiając poprawkę częstości  $\Delta \omega_n$ , opisaną powyższą zależnością, do wyrażenia /87/ dostajemy ostatecznie

$$\omega_n = \omega_n(\alpha) = \omega_{on} + \frac{3}{8} \varepsilon \gamma \theta \frac{\Phi_{on}^4(\alpha)}{M_{on}} \frac{\alpha^2}{\omega_{on}}, \quad /88/$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Opisane zależnością /88/ częstości drgań swobodnych mają identyczną postać, jak analogiczne częstości wyznaczone w rozdziale 3.2. przy zastosowaniu metody perturbacyjnej i opisane wyrażeniem /77/. Widzimy więc, że obie metody /perturbacyjna i Ritz'a w ujęciu klasycznym/, zastosowane do wyznaczenia pierwszego przybliżenia poszukiwanego rozwiązania przyjętego w postaci harmonicznej funkcji czasu, prowadzą do identycznych wyników. W związku z tym poszukiwane drgania główne /84/ przybierają ostatecznie postać /78/, tj.

$$w_n(\eta, \tau) = \alpha \Phi_{on}(\eta) \cos[\omega_n(\alpha)\tau],$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

przy czym postacie własne  $\Phi_{on}(\eta)$  i częstości drgań  $\omega_n(\alpha)$  są opisane odpowiednio zależnościami /60/ i /88/.

Postępując analogicznie, jak w rozdziale 3.2., częstości drgań swobodnych /88/ można przedstawić w postaci /81/. Wyznaczona na podstawie tej zależności pierwsza nieliniowa częstość drgań  $\omega_1(\alpha)$  będzie miała oczywiście przebieg identyczny, jak na rys. 5.

- 3.4. Zastosowanie zmodyfikowanego ujęcia metody Ritz'a do zbadania drgań swobodnych nieliniowego układu belki.

Poniżej zbadane zostaną drgania główne rozważanego nieliniowego układu ciągłego /rys.2/, opisanego bezwymiarowymi równaniami /46/ i /47/, przy zastosowaniu metody Ritza w ujęciu zmodyfikowanym.

Rozwiązanie szczególne równania ruchu belki /46/, spełniające warunki brzegowe /47/, założymy w postaci harmonicznnej funkcji czasu

$$w(\eta, \tau) = a \Phi(\eta) \cos \omega \tau, \quad /89/$$

gdzie zgodnie z ideą zmodyfikowanego ujęcia metody Ritza funkcja postaci własnej  $\Phi(\eta)$  i częstość drgań swobodnych  $\omega$  są niewiadomymi, wymagającymi wyznaczenia.

Obie te wielkości mogą podlegać wpływowi nieliniowości rozważanego układu.

Stosując zmodyfikowane ujęcie metody Ritza, opisane w rozdziale 2.2., żądamy, by spełnione były warunki

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathcal{E}_R(\omega \tau) \cos \omega \tau d(\omega \tau) = 0,$$

/90/

$$\int_0^1 \mathcal{E}_i(\omega \tau) \cos \omega \tau d(\omega \tau) = 0,$$

$$i = 1, \dots, 4;$$

gdzie  $\varepsilon_R(\omega\tau)$  i  $\varepsilon_i(\omega\tau)$  są odpowiednio pozostałościami równania ruchu /46/ i warunków brzegowych /47/ po podstawieniu do nich przybliżonego rozwiązania /89/. Zauważymy, że w rozważanym przypadku metoda Ritz'a sprowadza się do tzw. procedury bilansu harmonicznych, przy czym procedura ta jest stosowana zarówno do pozostałości równania ruchu  $\varepsilon_R(\omega\tau)$  jak i do pozostałości warunków brzegowych  $\varepsilon_i(\omega\tau)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Podstawiając rozwiązanie przybliżone /89/ do równań /46/ i /47/ otrzymujemy pozostałości tych równań,

$$\varepsilon_R(\omega\tau) \equiv \left[ \lambda^2 \frac{d^4 \Phi(\eta)}{d\eta^4} - \omega^2 \Phi(\eta) \right] a \cos \omega\tau$$

oraz

$$\varepsilon_1(\omega\tau) \equiv \Phi(0) a \cos \omega\tau,$$

$$\varepsilon_2(\omega\tau) \equiv \frac{d^2 \Phi(0)}{d\eta^2} a \cos \omega\tau,$$

$$\varepsilon_3(\omega\tau) \equiv \frac{d^2 \Phi(1)}{d\eta^2} a \cos \omega\tau,$$

$$\varepsilon_4(\omega\tau) \equiv \left[ \frac{d^3 \Phi(1)}{d\eta^3} - c\sigma \Phi(1) \right] a \cos \omega\tau +$$

$$- \frac{3}{4} \varepsilon_\gamma \sigma a^2 \Phi^3(1) a \cos \omega\tau +$$

$$- \frac{1}{4} \varepsilon_\gamma \sigma a^3 \Phi^3(1) \cos 3\omega\tau,$$

skąd po przyrównaniu do zera wyrażeń stojących przy pierwszej harmonicznej dostajemy

$$\frac{d^4\phi(\eta)}{d\eta^4} - k^4\phi(\eta) = 0, \quad /91/$$

$$\phi(0) = 0, \quad \frac{d^2\phi(0)}{d\eta^2} = 0,$$

$$\frac{d^2\phi(1)}{d\eta^2} = 0, \quad /92/$$

$$\frac{d^3\phi(1)}{d\eta^3} - c\phi(1) - \frac{3}{4}\epsilon\gamma\sigma\alpha^2[\phi(1)]^3 = 0,$$

gdzie

$$k^4 = \pi^4\omega^2. \quad /93/$$

W dalszych rozważaniach wykorzystamy wprowadzony wcześniej warunek normalizacyjny /59/ , tj.

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad /59/$$

Niewiadomą funkcję postaci własnej przyjmiemy w formie

$$\Phi(\eta) = A \operatorname{sink}\eta + B \operatorname{cosk}\eta + C \operatorname{shk}\eta + D \operatorname{chk}\eta \quad /94/$$

i wstawiamy ją do równań /92/. Z dwóch pierwszych równań otrzymujemy warunek

$$B = D = 0 \quad . \quad /95/$$

Dwa pozostałe równania /92/ wraz z warunkiem normalizacyjnym /59/ prowadzą, po uwzględnieniu /95/ do układu trzech równań

$$- A \operatorname{sink} + C \operatorname{shk} = 0 \quad ,$$

$$A(-k^3 \operatorname{cosk} - c\sigma \operatorname{sink}) + C(k^3 \operatorname{chk} - c\sigma \operatorname{shk}) +$$

$$- \frac{3}{4} \varepsilon \gamma \sigma a^2 (A \operatorname{sink} + C \operatorname{shk})^3 = 0 \quad ,$$

$$A \sin \frac{k}{2} + C \operatorname{sh} \frac{k}{2} = 1 \quad .$$

Eliminując z powyższego układu równań stałe dowolne A i C, które wyrażają się odpowiednio zależnościami

$$A = \frac{\operatorname{sh}k}{\operatorname{sink} \operatorname{sh} \frac{k}{2} + \sin \frac{k}{2} \operatorname{sh}k}, \quad /96/$$

$$C = \frac{\operatorname{sink}}{\operatorname{sink} \operatorname{sh} \frac{k}{2} + \sin \frac{k}{2} \operatorname{sh}k}, \quad /97/$$

dostajemy równanie charakterystyczne

$$2\sigma \left[ c + 12\varepsilon\gamma a^2 \left( \frac{\cos \frac{k}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{2}}{\cos \frac{k}{2} + \operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right)^2 \right] \operatorname{sink} \operatorname{sh}k +$$

/98/

$$- k^3 (\operatorname{sink} \operatorname{ch}k - \operatorname{cos}k \operatorname{sh}k) = 0.$$

Równanie to po obustronnym podzieleniu przez  $\operatorname{cos}k \operatorname{ch}k$  przybiera postać

$$2\sigma \left[ c + 12\varepsilon\gamma a^2 \left( \frac{\cos \frac{k}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{2}}{\cos \frac{k}{2} + \operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right)^2 \right] \operatorname{tg}k \operatorname{th}k +$$

/99/

$$- k^3 (\operatorname{tg}k - \operatorname{th}k) = 0.$$

Wartościom własnym

$$k = k_n(a), \quad n = 1, 2, \dots, \quad /100/$$

spełniającym równanie charakterystyczne /99/ odpowiadają, zgodnie z /93/, częstości drgań swobodnych

$$\omega = \omega_n(a) = \frac{k_n(a)}{\pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad /101/$$

będące funkcjami amplitudy  $a$ .

Na rys. 6 przedstawiono wykres pierwszej nieliniowej częstości drgań swobodnych  $\omega_1(a)$ , sporządzony w oparciu o zależność /101/, w której wartości własne  $k_1(a)$  wyznaczone zostały z równania charakterystycznego /99/, przy założonych wartościach  $a\sqrt{\epsilon\gamma}$  oraz przy  $\sigma\delta=10$  i  $\epsilon\delta=1$ .

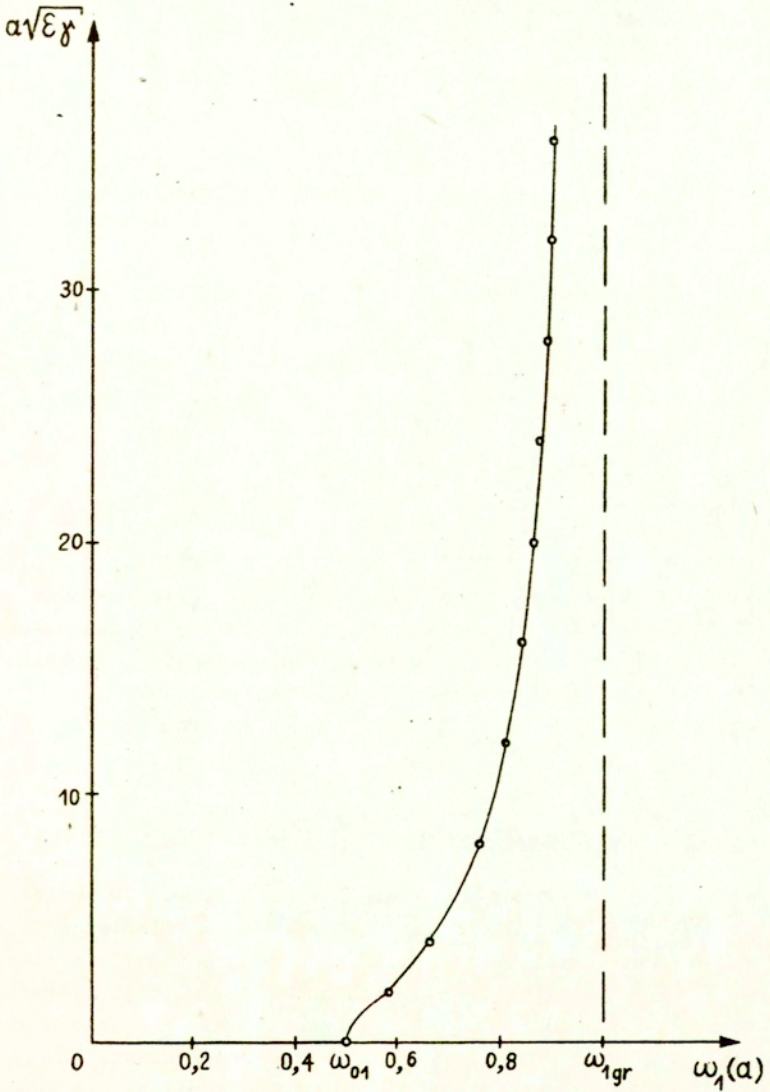
Jak wynika z rys.6 częstość  $\omega_1(a)$  nie rośnie nieograniczenie wraz ze wzrostem amplitudy  $a$ , lecz dąży do pewnej granicznej wartości  $\omega_{1gr}$ . Wartość tę wyznaczymy rozpatrując przypadek graniczny przy  $a \rightarrow \infty$ . W tym celu weźmiemy pod uwagę równanie charakterystyczne /98/ i wyrazimy je w pokazanej niżej postaci wprowadzając jednocześnie oznaczenie

$$\Delta \equiv \operatorname{sinkshk} + \frac{c}{12\epsilon\gamma a^2} \left( \frac{\cos \frac{k}{2} + \operatorname{ch} \frac{k}{2}}{\cos \frac{k}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right)^2 \operatorname{sinkshk} +$$

/102/

$$- \frac{k^3}{a^2} \frac{1}{24\epsilon\gamma\delta} \left( \frac{\cos \frac{k}{2} + \operatorname{ch} \frac{k}{2}}{\cos \frac{k}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right)^2 (\operatorname{sinkchk} - \operatorname{coskshk}) = 0$$





Rys. 6.

Wyznaczymy granicę

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Delta \quad /103/$$

przy założeniu, że  $k$  jest wielkością skończoną oraz

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{k^3}{\alpha^2} = 0 . \quad /104/$$

Uwzględniając równanie /102/ w granicy /103/ oraz wykorzystując warunek /104/ dostajemy

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Delta = \operatorname{sink} \operatorname{sh} k = 0 . \quad /105/$$

Otrzymany wynik w postaci równania /105/ świadczy o tym, że w przypadku granicznym, przy  $\alpha \rightarrow \infty$ , równanie charakterystyczne dla układu belki, podpartej na końcu sprężyną nieliniową, sprowadza się do znanej postaci równania charakterystycznego dla belki podpartej swobodnie.

Ponieważ równanie /105/ dotyczy przypadku granicznego napiszemy

$$\operatorname{sink}_{gr} \operatorname{sh} k_{gr} = 0 .$$

Wartościom własnym  $k_{gr}$ , spełniającym powyższe równanie odpowiadają częstości drgań swobodnych  $\omega_{gr}$ . Częstości te są wartościami granicznymi, do których dążą odpowiednie częstości drgań swobodnych układu nieliniowego. Tak więc pierwsza nieliniowa częstość  $\omega_1(\alpha)$ , pokazana na rys.6, dąży w granicy, przy  $\alpha \rightarrow \infty$ , do pierwszej częstości własnej  $\omega_{1gr}$  odpowiedniego układu belki podpartej swobodnie na obu końcach.

Nieliniowym wartościom własnym  $k_n(\alpha)$  odpowiadają funkcje postaci własnych. Biorąc pod uwagę zależność / 94 / i warunek /95/ oraz uwzględniając oznaczenie /100/ postacie własne wyrazimy w formie

$$\Phi_n(\eta, \alpha) = A_n \operatorname{sink}_n(\alpha)\eta + C_n \operatorname{shk}_n(\alpha)\eta, \quad /106/$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

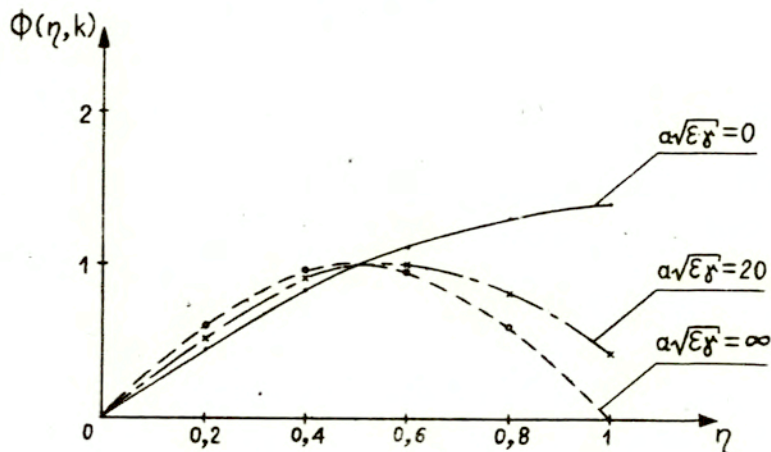
przy czym jako funkcje wartości własnych  $k_n(\alpha)$  są one oczywiście funkcjami amplitudy  $\alpha$ . Podstawiając do wyrażenia /106/ stałe A i C opisane zależnościami /96/ i /97/ funkcje postaci własnych zapiszemy w ostatecznej formie

$$\Phi_n(\eta, \alpha) = 2 \frac{\cos \frac{k_n(\alpha)}{2} \operatorname{ch} \frac{k_n(\alpha)}{2}}{\cos \frac{k_n(\alpha)}{2} + \operatorname{ch} \frac{k_n(\alpha)}{2}} \times \quad /107/$$

$$\times \left[ \frac{1}{\operatorname{sink}_n(\alpha)} \operatorname{sink}_n(\alpha)\eta + \frac{1}{\operatorname{shk}_n(\alpha)} \operatorname{shk}_n(\alpha)\eta \right],$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Rysunek 7 przedstawia sporządzony w oparciu o zależność /107/ wykres, który ilustruje przebiegi zmienności pierwszej postaci  $\Phi_1(\eta, \alpha)$ , odpowiadające trzem założonym wartościom  $\alpha\sqrt{\xi\gamma}$ .



Rys. 7.

Na rys. 7 można wyróżnić dwa przypadki graniczne, między którymi zawierają się wszystkie przebiegi zmienności pierwszej postaci własnej  $\Phi_1(\eta, \alpha)$ . W pierwszym przypadku krzywa odpowiadająca  $\alpha\sqrt{\epsilon_\gamma} = 0$  jest identyczna z pierwszą postacią własną odpowiedniego układu liniowego. W drugim przypadku granicznym przy  $\alpha\sqrt{\epsilon_\gamma} = \infty$  postać własna  $\Phi_1(\eta, \alpha)$  odpowiada pierwszej postaci własnej belki podpartej swobodnie na obu końcach.

Biorąc pod uwagę przeprowadzone wyżej rozważania poszukiwane rozwiązanie przybliżone /89/ możemy wyrazić ostatecznie w formie

$$w_n(\eta, \tau) = a \Phi_n(\eta, \alpha) \cos[\omega_n(\alpha)\tau],$$

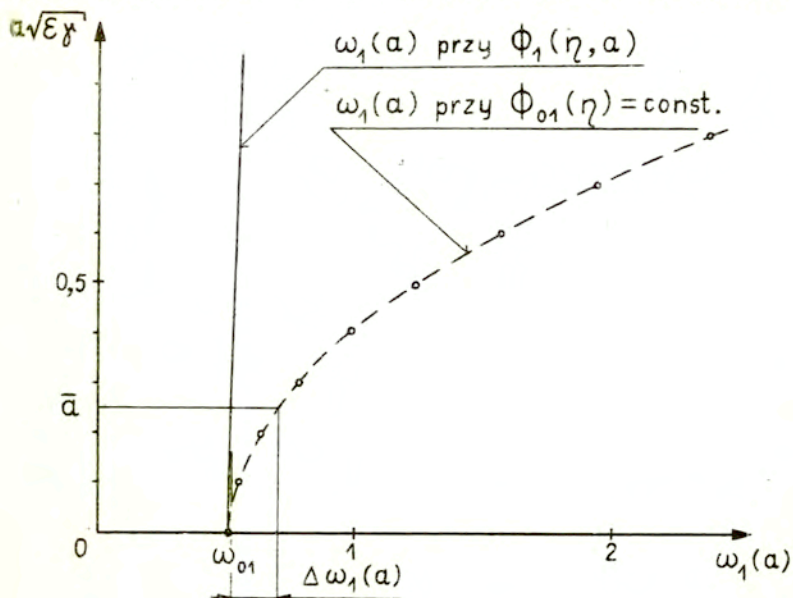
$$n = 1, 2, \dots,$$

gdzie nieliniowe funkcje postaci własnych  $\Phi_n(\eta, a)$  i nieliniowe częstości drgań swobodnych są odpowiednio opisane zależnościami / 107 / i / 101 /.

3.5. Porównanie wyników otrzymanych przy pomocy metod klasycznych i metody Ritza w ujęciu zmodyfikowanym.

W poprzednich rozdziałach, 3.2. - 3.4, do zbadania drgań swobodnych układu belki z jednym nieliniowym warunkiem brzegowym /rys.2/ zastosowane zostały dwie klasyczne metody przybliżone - perturbacyjna i Ritza - oraz metoda Ritza w ujęciu zmodyfikowanym. Wszystkie trzy metody wykorzystano do zbadania drgań głównych w postaci harmonicznej funkcji czasu,

W takim przypadku wspomniane metody klasyczne prowadzą do identycznych wyników. Wyniki uzyskane za pomocą trzeciej z wymienionych metod analitycznych różnią się w znacznym stopniu od wyników otrzymanych przy pomocy metod klasycznych.



Rys. 8.

Rozpatrzony przykład nieliniowego układu ciągłego reprezentuje klasę układów o skupionej przestrzennie nieliniowości. /9/. Występująca w układzie nieliniowa sprzężyna sztywnieje w jednym punkcie ( $\eta = 1$ ) ze wzrostem amplitudy, a stąd i postać odkształcenia może ulegać szybkim zmianom.

Na rys.8 przedstawiono zależność pierwszej częstości własnej  $\omega_1(a)$  w funkcji amplitudy, wyznaczoną przy pomocy dwóch omawianych metod. Jak widać metoda nakładająca na układ więzy tj. zmuszająca go do zachowania niezmienniej postaci odkształcenia daje zupełnie inny wynik zależności częstości własnej do amplitudy, niż metoda pozwalająca układowi na zmiany postaci drgań. W pierwszym przypadku /linia przerywana na rys. 8 /  $\omega_1 \equiv \omega_1(a)$  jest kwadratową funkcją amplitudy, teoretycznie rośnie więc nieograniczenie ze wzrostem amplitudy. Natomiast po zdjęciu tych więzów i uwzględnieniu zmienności postaci odkształcenia okazuje się, że częstość własna rośnie znacznie wolniej i w granicznym przypadku  $a \rightarrow \infty$  dąży do pewnej ograniczonej wartości  $\omega_{1gr} < \omega_{02}$ .

Jest oczywiste, że przybliżone rozwiązanie harmoniczne oparte na założeniu stałej, liniowej postaci drgań może być słuszne tylko w pewnym, ograniczonym zakresie amplitud. Jednak ocena tego zakresu nie jest w praktyce możliwa. Przy okazji obecnej analizy nasuwa się wniosek, że rozwiązanie to może dawać zadowalające wyniki w zakresie amplitud, w jakim zmiana postaci drgań jest na tyle nieznaczna, że nie oddziałuje wyraźnie na zmianę częstości własnej.

W przytoczonym przykładzie postać drgań jest szczególnie wrażliwa na zmianę amplitudy, a stąd i zakres amplitud w którym obie metody dają bliskie wyniki jest bardzo mały. Już przy niewielkiej wartości amplitudy /  $\bar{a}$  na rys.8 / różnica wyników  $\Delta \omega_1(a)$  jest znaczna.

#### 4. Wnioski

W wyniku przeprowadzonej analizy przybliżonych metod wyznaczania drgań głównych ciągłych układów nieliniowych przedstawiona została oryginalna metoda otrzymana na drodze modyfikacji klasycznej metody Ritza.

Zasadniczym elementem modyfikacji w stosunku do ujęcia klasycznego jest przyjęcie rozwiązania w postaci szeregu, w którym nie tylko współczynniki, lecz funkcje zmiennej przestrzennej są niewiadome i wymagają wyznaczenia.

W interpretacji mechanicznej odpowiada to zdjęciu z układu więzów zmuszających go do drgań z założoną i niezmienną w funkcji amplitudy postacią odkształcania. Więzy takie w znacznym stopniu ograniczają możliwość ujawnienia się wpływu nieliniowości na częstości własne.

W interpretacji metody Ritza jako metody minimalizacyjnej przedstawiona metoda realizuje minimum funkcjonału Hamiltona ze względu na funkcję

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varphi(x)} = 0, \text{ przy rozwiązaniu } w(x,t) = \varphi(x) \cos \omega t,$$

podczas gdy metoda klasyczna przy rozwiązaniu harmonicznym

$$w(x,t) = a \Phi_0(x) \cos \omega t,$$

gdzie  $\Phi_0(x)$  - założona funkcja zmiennej przestrzennej  $x$  realizuje minimum funkcjonału ze względu na jeden współczynnik

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a} = 0.$$

Okazuje się, że modyfikacja ta pozwala ujawnić nowe efekty nieliniowości sprężystej:

1/ nie tylko częstości własne  $\omega$ , lecz i postacie własne  $\Phi(x)$  okazują się być funkcjami amplitudy

$$\omega \equiv \omega(\alpha) \quad \text{i} \quad \Phi(x) \equiv \Phi(x, \alpha)$$

2/ Charakter zmienności częstości własnych z amplitudą  $\omega \equiv \omega(\alpha)$  wykazuje nie tylko ilościowe, lecz i jakościowe różnice a stosunku do częstości wyznaczonych metodą klasyczną.

Przedstawiona zmodyfikowana metoda Ritza badania drgań układów ciągłych została zbudowana na założeniach równoważnych założeniom stosowanym przy badaniu układów dyskretnych. Dzięki temu stworzony został jednolity aparat badania układów mieszanych dyskretno-ciągłych.



## Literatura

1. H. Leipholz : Direct variational methods and eigenvalue problems in engineering, Leyden 1977 Noordhoff .
2. W. Szemplińska - Stupnicka : Periodyczne drgania swobodne belki przy słabo-nieliniowych warunkach brzegowych, Rozprawy Inżynierskie 1, 15, 1967, 93 - 103.
3. W. Szemplińska-Stupnicka : The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems, Journal of Sound and Vibration , 63, 4, 1978, 475 - 489.
4. S. Kaliski, Z. Dźygadło, J. Solarz, E. Włodarczyk : Drgania i fale, PWN, Warszawa 1966.
5. R. Gutowski : Równania różniczkowe zwyczajne, PWN, Warszawa 1971.
6. Л.В. Канторович, В.Н. Крылов : Приближенные методы высшего анализа, Москва 1962.
7. K. Klotter : Nonlinear vibration problems treated by the averaging method of W. Ritz, Proc. 1 -st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 125 -131, ASME, New York 1953.
8. Н. Боголюбов, Н. Митропольский : Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва 1961.
9. Iwan W.D., Miller R.K. : Steady - state response of systems with spatially localized nonlinearity, Intern. Journal Non-linear Mechanics, 12, 1977 str. 165-173.

## Spis treści

	str.
1. Wstęp .....	1
2. Analiza teoretyczna. ....	2
2.1. Metoda Ritza w zastosowaniu do nieliniowego układu dyskretnego .....	2
2.2. Zmodyfikowane ujęcie metody Ritza w zastosowaniu do jednowymiarowego, nieliniowego układu ciągłego .....	8
3. Przykład liczbowy .....	20
3.1. Drgania swobodne belki podpartej na końcu sprężyną liniową .....	23
3.2. Zastosowanie metody perturbacyjnej do zbadania drgań swobodnych nieliniowego układu belki .....	27
3.3. Zastosowanie metody Ritza w ujęciu klasycznym do zbadania drgań swobodnych nieliniowego układu belki .....	36
3.4. Zastosowanie zmodyfikowanego ujęcia metody Ritza do zbadania drgań swobodnych nieliniowego układu belki .....	40
3.5. Porównanie wyników otrzymanych przy pomocy metod klasycznych i metody Ritza w ujęciu zmodyfikowanym .....	51
4. Wnioski .....	53
Literatura .....	55