

4.44 — zbiorniki

7.72 — lepkoplastyczność

Włodzimierz Wojno

**ROZWIĄZANIE PERTURBACYJNE
DLA LEPKOPLASTYCZNEGO
ZBIORNIKA KULISTEGO
OBCIĄŻONEGO CIŚNIENIEM
WEWNĘTRZNYM**

3/1989

P. 269



WARSZAWA 1989

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji 8 listopada 1988 r.



56743



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 2,35 Ark.druk. 3

Oddano do drukarni w styczniu 1989 r.

Nr zamówienia 173/89

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Sniadeckich 8

Włodzimierz Wojno
Samodzielna Pracownia Teorii
Materiałów Niesprężystych

ROZWIĄZANIE PERTURBACYJNE DLA LEPKOPLASTYCZNEGO
ZBIORNIKA KULISTEGO OBCIĄŻONEGO CIŚNIENIEM WEWNĘTRZNYM

Streszczenie

W pracy przedstawiono rozwiązanie perturbacyjne dla ruchu grubościennego zbiornika kulistego z materiału lepkoplastycznego pod wpływem zmiennego w czasie ciśnienia wewnętrznego. Rozwiązanie otrzymano zmodyfikowaną metodą Linsteda - Poincaré. Rozpatrzono szczególnie ważny w zastosowaniach przypadek liniowo malejącego ciśnienia. Następnie zaproponowano koncepcję skorygowanego ze względu na wrażliwość na prędkość deformacji rozwiązania plastycznego. W końcu, na podstawie numerycznego przykładu wykazano praktyczną przydatność uzyskanych aproksymacji.

1. Wstęp.

Teoretyczna analiza zachowania się obciążonej dynamicznie konstrukcji z wrażliwego na prędkość deformacji materiału plastycznego wiąże się z koniecznością rozwiązania na ogół nieliniowego problemu początkowo - brzegowego. Nastęrcza to duże trudności, dla zmniejszenia których wprowadzono w zastosowaniach teorii lepkoplastyczności różne założenia upraszczające i aproksymacje, patrz praca [4]. Jako jedną z technik przybliżonego rozwiązywania problemów lepkoplastycznych zaproponowano również i metody perturbacyjne.

I tak, propozycja perturbacji wokoło rozwiązania plastycznego została wprowadzona w pracy [7] dla rozwiązania problemu deformacji grubościennej kuli z materiału lepkoplastycznego, opisanego równaniem konstytutywnym PERZYNY. Rozwiązanie perturbacyjne skonstruowano tu odpowiednio dostosowaną metodą Linstęda - Poincaré [5]. Następnie koncepcję perturbacji wokoło rozwiązania plastycznego wykorzystano z powodzeniem w pracach [8] i [9], poświęconych problemom ruchu utwierdzonej obustronnie lepkoplastycznej belki oraz zamocowanej na obwodzie płyty kołowej. W pracach tych, dla uzyskania rozwiązania z rozdzielonymi zmiennymi, własności materiału opisano jednorodnym równaniem konstytutywnym typu lepkiego, zaś rozwiązania perturbacyjne otrzymano metodą Rayleigha - Schrödingera. Podobny do rozwiązanego w [8] problem perturbacyjny dla belki, której własności lepkoplastyczne tym razem podlegają równaniu konstytutywnemu PERZYNY, przynosi praca [10]. Ze względu na niejednorodność równania konstytutywnego, w celu uzyskania rozwiązania z rozdzielonymi zmiennymi posłużono się tu metodą Galerkina pozostałości z wagą, a następnie techniką perturbacyjną uogólnionego usredniania. W wymienionych pracach ruch konstrukcji zainicjowany był działaniem idealnego impulsu.

Niniejsza praca przedstawia perturbacyjne rozwiązanie zagadnienia ruchu grubościennej kuli lepkoplastycznej obciążonej zmiennym w czasie ciśnieniem wewnętrznym. Własności

materiału scharakteryzowano równaniem konstytutywnym PERZYNY. Rozwiązanie dla potęgowej funkcji nadwyżki naprężenia znalaziono odpowiednio zmodyfikowaną metodą Linsteda - Poincaré. Przeanalizowano ważny w praktyce przypadek liniowo malejącego ciśnienia. Następnie wprowadzono koncepcję skorygowanego ze względu na wrażliwość na prędkość deformacji rozwiązania plastycznego. W końcu, na podstawie przykładu numerycznego wykazano praktyczną przydatność otrzymanych aproksymacji.

2. Sformułowanie problemu.

Rozpatrzmy grubościenny zbiornik kulisty z nieściśliwego i jednorodnego materiału sztywno-idealnie plastycznego, którego własności opisane są równaniami konstytutywnymi P. PERZYNY [6]. Chcemy opisać ruch tej konstrukcji wywołany działaniem wewnętrznego ciśnienia przy założeniu, że towarzyszące deformacje są małe. Wprowadźmy w tym celu oznaczenia r, a, b kolejno dla promienia bieżącego, wewnętrznego i zewnętrznego, oraz t - dla czasu. Następnie oznaczmy naprężenie normalne przez σ_r , naprężenia obwodowe przez σ_θ i σ_φ , zaś ciśnienie wewnętrzne przez p . Zwróćmy tu uwagę, że ze względu na środkową symetrię zbiornika i obciążenia, naprężenia $\sigma_r, \sigma_\theta = \sigma_\varphi$ są naprężeniami głównymi. W końcu, niech v i u oznaczają prędkość i przemieszczenie promieniowe, zaś ρ - gęstość masy.

Przy powyższych oznaczeniach problem opisany jest przez równanie nieściśliwości

$$(2.1) \quad \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} = 0,$$

równanie ruchu

$$(2.2) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial v}{\partial t},$$

równanie konstytutywne

$$(2.3) \quad \frac{v}{r} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \phi \left[\frac{\sigma_{\phi} - \sigma_r}{\sqrt{3} k} \right],$$

oraz zależność kinematyczna

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v.$$

Przyjmujemy, że warunki początkowe są następujące

$$(2.5) \quad v(r, 0) = 0, \quad u(r, 0) = 0, \quad a \leq r \leq b,$$

natomiast warunki brzegowe posiadają postać

$$(2.6) \quad \sigma_r(a, t) = -p(t), \quad \sigma_r(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_k,$$

gdzie t_k jest chwilą końcową, tj. taką, w której ustaje ruch zbiornika. Jeśli ruch nie ustaje, t_k odpowiada chwili, po przekroczeniu której założenie o małych deformacjach przestaje być słuszne.

W równaniu (2.3) k oznacza granicę plastyczności przy czystym ścinaniu, γ jest stałą odpowiadającą za lepkość, zaś $\phi(\ast)$ reprezentuje funkcję nadwyżki naprężenia ponad stan statycznego uplastycznienia. Wartość stałej γ wraz z postacią funkcji $\phi(\ast)$ są określane na podstawie wyników doświadczeń nad dynamicznym zachowaniem się metali.

Zespół równań (2.1) - (2.4) z warunkami (2.5) i (2.6) stanowi problem początkowo - brzegowy dla poszukiwanych funkcji $v(r, t)$, $u(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$ oraz $\sigma_{\phi}(r, t)$.

3. Sprowadzenie problemu do zagadnienia początkowego.

Równanie nieściśliwości (2.1) jest niesprzęgnięte z pozostałymi równaniami sformułowanego powyżej problemu początkowo - brzegowego. Jego rozwiązanie można zatem otrzymać bezpośrednio w postaci z rozdzielonymi zmiennymi

$$(3.1) \quad v(r, t) = \left(\frac{a}{r} \right)^2 v_c(t), \quad a \leq r \leq b,$$

w której $v_c(t) \equiv v(c, t)$ jest prędkością promieniową punktów na powierzchni sfery o dowolnie wybranym, lecz ustalonym promieniu c . Korzystając z tej dowolności przyjmujemy, że $c = a$, co daje wzór na rozkład prędkości

$$(3.2) \quad v(r, t) = \left(\frac{a}{r} \right)^2 v_a(t),$$

wyrażony przez prędkość promieniową $v_a(t)$ punktów położonych na wewnętrznej powierzchni zbiornika.

W równaniu (2.4) zmienna niezależna r odgrywa rolę parametru. Przyjmując zatem $r = a$ i wprowadzając oznaczenie $u_a(t) \equiv u(a, t)$ dla przemieszczenia punktów na wewnętrznej powierzchni, możemy z (2.4) dostać równanie różniczkowe zwyczajne

$$(3.3) \quad \frac{du_a}{dt} = v_a.$$

Dalej, dla $r = a$ związki (2.5) przechodzą w warunki początkowe

$$(3.4) \quad v_a(0) \equiv v_{a0} = 0, \quad u_a(0) \equiv u_{a0} = 0.$$

W końcu, gdy do zależności (3.2) podstawimy odpowiednio równania (2.4) i (3.3), a następnie przeprowadzimy całkowanie po czasie od 0 do t obu stron powstałego związku, wówczas po uwzględnieniu warunków początkowych (2.5)₂ i (3.4)₂ uzyskamy prawo dla przestrzennego rozkładu przemieszczeń

$$(3.5) \quad u(r, t) = \left(\frac{a}{r} \right)^2 u_a(t).$$

Przy rozkładzie prędkości (3.2), równaniu (2.3) możemy nadać postać

$$(3.6) \quad \sigma_{\phi} - \sigma_r = \sqrt{3}k \left[1 + \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a}{\gamma r^3} \right) \right].$$

Jeśli powyższy rezultat oraz zależność (3.2) podstawimy teraz do równania ruchu (2.3), to otrzymamy równanie cząstkowe

$$(3.7) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{2\sqrt{3}k}{r} \left[1 + \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a}{\gamma r^3} \right) \right] = \rho \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{dv_a}{dt}.$$

Obustronne całkowanie tego równania po promieniu r od a do b , przy warunkach brzegowych (2.6) prowadzi już do równania różniczkowego zwyczajnego

$$(3.8) \quad \rho a(1 - \eta) \frac{\partial v_a}{\partial \eta} + 2\sqrt{3}k \int_a^b \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a}{\gamma r^3} \right) \frac{dr}{r} = \\ = p(t) - 2\sqrt{3}k \ln \eta^{-1},$$

w którym

$$\eta = \frac{a}{b}.$$

Całkowanie zaś od a do r przy warunku brzegowym (2.6)₁ daje zależność dla naprężenia promieniowego

$$(3.9) \quad \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}k} = - \frac{p(t)}{\sqrt{3}k} \frac{\frac{a}{r} - \eta}{1 - \eta} + A + C,$$

w jakiej wielkości A i C są określone związkami

$$(3.10) \quad \frac{1}{2}A = \ln \frac{r}{b} + \frac{\frac{a}{r} - \eta}{1 - \eta} \ln \eta^{-1},$$

$$(3.11) \quad \frac{1}{2}C = \int_r^b \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a}{\gamma r^3} \right) \frac{dr}{r} - \frac{\frac{a}{r} - \eta}{1 - \eta} \int_a^b \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a}{\gamma r^3} \right) \frac{dr}{r}.$$

Biorąc teraz pod uwagę (3.9), z równania (3.6) możemy

już wywnioskować, że naprężenie obwodowe jest określone wzorem

$$(3.12) \quad \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}k} = 1 - \frac{p(t)}{\sqrt{3}k} \frac{r^a - \eta}{1 - \eta} + A + C + \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a}{\gamma r^3} \right).$$

Jak widać z zależności (3.2), (3.5) oraz (3.9) - (3.12), rozkłady przestrzenne dla poszukiwanych funkcji $v(r,t)$, $u(r,t)$, $\sigma_r(r,t)$ i $\sigma_p(r,t)$ zależą od czasu za pośrednictwem prędkości $v_a(t)$ lub przemieszczenia $u_a(t)$, które można znaleźć poprzez rozwiązanie zwyczajnego równania różniczkowego (3.8) przy warunku początkowym (3.4)₁, a następnie proste całkowanie równania (3.3) z uwzględnieniem warunku (3.4)₂. Jednakże, dla bardziej przejrzystego przedstawienia techniki perturbacyjnej poszukiwania przybliżonych rozwiązań dla funkcji $v_a(t)$ i $u_a(t)$, w dalszym ciągu pracy te dwa zagadnienia będziemy ujmować wspólnym problemem początkowym.

4. Graniczny problem sztywno - plastyczny.

Oznaczmy przez f dowolną z funkcji $v(r,t)$, $u(r,t)$, $v_a(r,t)$, $u_a(r,t)$, $\sigma_r(r,t)$, $\sigma_p(r,t)$ opisujących ruch w sformułowanym problemie lepkoplastycznym, zaś przez f_p - jej odpowiednik z zespołu funkcji $v_p(r,t)$, $u_p(r,t)$, $v_{ap}(r,t)$, $u_{ap}(r,t)$, $\sigma_{rp}(r,t)$, $\sigma_{pp}(r,t)$ charakteryzujących ruch wówczas, gdy materiał lepkoplastyczny zastąpimy materiałem plastycznym. W pracy [6] wykazano, że gdy $1/\gamma \rightarrow 0$, materiał lepkoplastyczny staje się w granicy materiałem plastycznym. Istotnie, podstawienie $1/\gamma = 0$ w związkach (2.1) - (2.6), formalne zastąpienie w nich funkcji f ich odpowiednikami f_p i uwzględnienie faktu, że $\phi^{-1}(0) = 0$, przeprowadza równanie konstytutywne (2.3) w warunek plastyczności Hubera - Misesa

$$(4.1) \quad \sigma_{pp} - \sigma_{rp} = \sqrt{3}k,$$

pozostawiając równania (2.1), (2.2), (2.4) oraz warunki początkowe (2.5) i brzegowe (2.6) w formie niezminionej. Uzyskany w granicy zespół związków opisuje zatem taki sam jak

poprzednio problem dynamiczny, jednakże dla zbiornika z materiału sztywno - idealnie plastycznego.

Postępując jak w p.3 możemy problem ten sprowadzić do zagadnienia początkowego dla prędkości $v_{ap}(t)$ i $u_{ap}(t)$. Takie same rezultaty otrzymamy również i na drodze przejścia związkach (3.2) - (3.5) oraz (3.8) - (3.12) do granicy, gdy $1/\gamma \rightarrow 0$. Po przejściu do granicy stwierdzamy, że w problemie plastycznym wzory na składowe naprężenia mają postać

$$(4.2) \quad \frac{\sigma_{rp}}{\sqrt{3}k} = - \frac{p(t)}{\sqrt{3}k} \frac{\frac{a}{r} - \eta}{1 - \eta} + A ,$$

$$(4.3) \quad \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{3}k} = 1 - \frac{p(t)}{\sqrt{3}k} \frac{\frac{a}{r} - \eta}{1 - \eta} + A ,$$

natomiast zagadnienie początkowe dla prędkości $v_a(t)$ i przemieszczenia $u_a(t)$ przyjmuje prostą formę

$$(4.4) \quad \frac{dv_{ap}}{dt} = \frac{1}{\rho a(1 - \eta)} (p(t) - p_s), \quad v_{ap}(0) = 0 ,$$

$$(4.5) \quad \frac{du_{ap}}{dt} = v_{ap} , \quad u_{ap}(0) = 0 ,$$

w której

$$(4.6) \quad p_s = 2\sqrt{3}k \ln \eta^{-1} ,$$

jest ciśnieniem, przy jakim następuje pełne uplastycznienie zbiornika sztywno - plastycznego w procesie quasi - statycznym.

Przyjmijmy, że funkcja ciśnienia $p(t)$ jest ciągła i różniczkowalna potrzebną ilość razy oraz taka, że albo $p(0) > p_s$, albo $p(0) = p_s$ i pierwsza niezerowa pochodna $d^m/dt^m(0) > 0$. Przy tych założeniach rozwiązanie problemu początkowego (4.4), (4.5) jest dane wzorami

$$(4.7) \quad v_{ap} = \frac{1}{\rho a(1 - \eta)} (I(t) - p_s t),$$

$$(4.8) \quad u_{ap} = \frac{1}{\rho a(1-\eta)} \left(\int_0^t I(\xi) d\xi - \frac{1}{2} p_s t^2 \right),$$

w których

$$(4.9) \quad I(t) = \int_0^t p(\xi) d\xi,$$

jest impulsem ciśnienia.

Największa intensywność odkształcenia¹⁾, jaka w chwili t występuje w zbiorniku, jest równa

$$(4.10) \quad \epsilon_{ai}(t) = \frac{3}{\rho a^2(1-\eta)} \left(\int_0^t I(\xi) d\xi - \frac{1}{2} p_s t^2 \right).$$

Ponieważ deformacja jest czysto dysypatywna, $v_{ap} \geq 0$ i w konsekwencji tak $u_{ap}(t)$ jak i $\epsilon_{ai}(t)$ są funkcjami rosnącymi.

Długość przedziału czasu, w jakim ważne jest rozwiązanie (4.7), (4.8), zależy od przebiegu funkcji $p(t)$. Aby to wykazać zauważmy najpierw, że ruch ma miejsce wtedy, gdy $I(t)/t > p_s$.

Niech więc w przedziale $[0, t_1]$ określoności funkcji ciśnienia $p(t)$ zachodzi wspomniana nierówność. Jeżeli $\epsilon_{ai}(t_1) \leq \epsilon_p$ ²⁾, wówczas chwilą końcową przedziału ważności rozwiązania jest chwila t_1 . Gdy zaś $\epsilon_{ai} > \epsilon_p$, to aby nie wyjść poza zakres teorii małych odkształceń, za końcową musimy przyjąć chwilę $t_{pe} < t_1$, która spełnia równanie

$$(4.11) \quad \epsilon_p = \frac{3}{a} u_{ap}(t_{pe}) = \frac{3}{\rho a^2(1-\eta)} \left(\int_0^{t_{pe}} I(\xi) d\xi - \frac{1}{2} p_s t_{pe}^2 \right).$$

Prędkość końcowa $v_{ap}(t_1)$ - czy $v_{ap}(t_{pe})$ - jest niezerowa.

¹⁾ Największa intensywność odkształcenia określamy ze wzoru

$$\epsilon_1 = [(\epsilon_r - \epsilon_\rho)^2 + (\epsilon_\rho - \epsilon_\theta)^2 + (\epsilon_\theta - \epsilon_r)^2]^{1/2} / 2 = 3a^2 u_a(t) / r^3,$$

dla $r = a$; $\epsilon_{ai}(t) \equiv \epsilon_1(a, t)$.

²⁾ ϵ_p jest intensywnością odkształcenia plastycznego dopuszczalną w teorii małych odkształceń.

Ruch ustaje w chwili t_{pk} , która poraz pierwszy spełnia równanie

$$(4.12) \quad \frac{I_{pk}}{t_{pk}} = p_s .$$

oraz nierówność $\varepsilon_{ai}(t_{pk}) \leq \varepsilon_p$, gdzie

$$(4.13) \quad I_{pk} = I(t_{pk}) ,$$

jest końcowym impulsem ciśnienia. Z równania (4.12) wnioskujemy, że ruch może ustać tylko wtedy, gdy średnia wartość impulsu ciśnienia zrówna się z ciśnieniem pełnego uplastycznienia quasi - statycznego. Gdy $\varepsilon_{ai}(t_{pk}) > \varepsilon_p$, wówczas za końcową musimy przyjąć chwilę t_{pc} . Ponieważ $t_{pc} < t_{pk}$, w przedziale czasu $[0, t_{pc}]$ mamy spełnioną nierówność $I(t)/t > p_s$, która wskazuje na to, że i w tym przedziale wartości rozwiązań ruch nie ustaje.

Jeżeli przez t_{pr} oznaczymy chwilę t_1 lub t_{pk} czy t_{pc} , to wzór na przemieszczenie końcowe będziemy mogli napisać ogólnie jako

$$(4.14) \quad u_{apr} = \frac{1}{\rho a(1 - \eta)} \left(\int_0^{t_{pr}} I(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} p_s t_{pr}^2 \right).$$

Niech chwila t_{pm} , spełnia równanie

$$(4.15) \quad p(t_{pm}) - p_s = 0 .$$

Jak wynika z (4.4)₁, równanie to jest warunkiem istnienia maksimum prędkości v_{apm} . Jednakże maksimum to występuje tylko wtedy, gdy odpowiadający mu czas $t_{pm} \leq t_{pc}$. Jeżeli $t_{pc} < t_{pm}$, wówczas prędkość doznaje tylko monotonicznego wzrostu do chwili t_{pc} . Największa wartość prędkości określona jest przez ogólny wzór

$$(4.16) \quad v_{apr} = \frac{I_r}{\rho a(1 - \eta)} ,$$

w którym

$$(4.17) \quad I_r = I_{pr} - p_s t_{pmr} .$$

jest impulsem różnicy ciśnień $p(t) - p_s$ w chwili t_{pmr} , zaś v_{apr} , I_r , I_{pr} , t_{pmr} w zależności od relacji między chwilami t_{pm} i t_{pe} oznaczają kolejno bądź v_{apm} , I_m , I_{pm} , t_{pm} , bądź v_{ape} , I_e , I_{pe} , t_{pe} .

5. Oszacowania.

Problem (3.8), (3.4)₁ prowadzi do równoważnego równania całkowego

$$(5.1) \quad \rho a(1 - \eta) v_a(t) = - 2\sqrt{3}k \int_0^t \int_a^b \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a(\xi)}{\gamma r^3} \right) \frac{dr}{r} d\xi + \\ + I(t) - p_s t .$$

Jeżeli równanie to odejmiemy od obustronnie pomnożonego przez $\rho a(1 - \eta)$ równania (4.7), wówczas dostajemy związek

$$\rho a(1 - \eta) (v_{ap}(t) - v_a(t)) = 2\sqrt{3}k \int_0^t \int_a^b \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a(\xi)}{\gamma r^3} \right) \frac{dr}{r} d\xi ,$$

słuszny dla wspólnej części przedziałów czasu w ruchu plastycznym i lepkoplastycznym. Ponieważ $\phi(x) \geq 0$, prawa strona powyższej zależności jest nieujemna, co daje górne oszacowanie dla prędkości

$$(5.2) \quad v_a(t) \leq v_{ap}(t) ,$$

w którym równość zachodzi tylko w chwili $t = 0$. Tak więc, poza początkiem ruchu, prędkość lepkoplastyczna jest w każdej chwili mniejsza od prędkości plastycznej.

Niech teraz w obu ruchach występują maksima prędkości $v_{am} \equiv v_a(t_m)$ i v_{apm} . Ponieważ $v_{apm} \geq v_{ap}(t_m)$, z zależności (5.2) wynika, że maksima te muszą spełniać nierówność

$$(5.3) \quad v_{am} < v_{apm}$$

Chwila t_m , jak widać z (3.8), musi spełniać równanie

$$p(t_m) - p_s = 2\sqrt{3}k \int_a^b \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 v_a}{\gamma r^3} \right) \frac{dr}{r},$$

z dodatnią prawą stroną. Gdy od równania tego odejmiemy stronami związek (4.15), to otrzymamy nierówność

$$(5.4) \quad p(t_m) - p(t_{pm}) > 0,$$

z której wnioskujemy, że dla przyjętej w problemie klasy funkcji ciśnienia

$$(5.5) \quad t_m < t_{pm},$$

t.j. chwila, w jakiej występuje maksimum prędkości lepkoplastycznej, poprzedza chwilę pojawiania się maksimum prędkości plastycznej.

W końcu, biorąc różnicę pomiędzy rozwiązaniem plastycznym i lepkoplastycznym problemu (3.3), (3.4)₂ otrzymujemy związek

$$u_{ap}(t) - u_a(t) = \int_0^t \left[v_{ap}(\xi) - v_a(\xi) \right] d\xi,$$

z którego, wobec nierówności (5.2) wnioskujemy, że

$$(5.6) \quad u_a(t) \leq u_{ap}(t),$$

przy czym równość przemieszczeń zachodzi tylko w chwili $t = 0$. Poza początkiem ruchu, przemieszczenie w ruchu lepkoplastycznym jest zatem w każdej chwili mniejsze od przemieszczenia w ruchu plastycznym.

Rozpatrzmy teraz taki przebieg funkcji ciśnienia, że w chwili t_{pk} zanika ruch plastyczny, t.j. $v_{ap}(t_{pk}) = 0$ i założmy, że ruch lepkoplastyczny ustaje w chwili $t_k \geq t_{pk}$. Gdyby tak było istotnie, to musiałoby być $v_a(t_{pk}) \geq v_{ap}(t_{pk})$, co przeczy

nierówności (5.2). Jeśli więc ruch plastyczny zanika, to ruch plastyczny musi ustać w chwili wcześniejszej, t.j. zachodzi nierówność

$$(5.7) \quad t_k < t_{pk}.$$

Z (5.7) wynika, iż $u_{ap}(t_k) < u_{apk}$, co prowadzi do oszacowania

$$(5.8) \quad u_{ak}^* < u_{apk}.$$

Przemieszczenie końcowe w ruchu lepkoplastycznym jest mniejsze od przemieszczenia końcowego w ruchu plastycznym.

6. Bezwymiarowa postać problemu.

Aby rozwiązać problem metodą perturbacyjną małego parametru należy sprowadzić go do takiej postaci bezwymiarowej, która jest jednocześnie i uporządkowana względem rzędu wielkości. Osiąga się to przez wprowadzenie właściwych wielkości porównawczych. W problemie (2.1) - (2.6) musimy wprowadzić następujące wielkości porównawcze: promień r_R , czas t_R , prędkość v_R , przemieszczenie u_R , naprężenie σ_{rR} i $\sigma_{\phi R}$ oraz ciśnienie p_R . Ale problem ten został sprowadzony do wzorów (3.9) i (3.12) dla składowych naprężenia, oraz zagadnienia początkowego (3.8), (3.3) i (3.4). Istotnym staje się więc dobór wielkości porównawczych tylko dla tych zmiennych, które występują w problemie początkowym, t.j. t_R , v_{aR} , u_{aR} i p_R . Wyborem pozostałych wielkości porównawczych nie jesteśmy skrupowani i jak sugerują wzory (3.2), (3.5), (3.9) - (3.12) wygodnie jest przyjąć $r_R = a$ oraz $\sigma_{rR} = \sigma_{\phi R} = \sqrt{3k}$.

Wielkości v_{aR} i u_{aR} najlepiej byłoby utożsamić odpowiednio z największą wartością v_a prędkości $v_a(t)$ i największą t.j. końcową wartością u_a przemieszczenia $u_a(t)$, które, jak wynika z (3.1) i (3.5), są jednocześnie największymi wartościami prędkości i przemieszczenia w całym zbiorniku. Nie są one jednakże znane i wobec tego zamiast nich, na podstawie nierówności (5.2) lub (5.3) oraz (5.6) lub (5.8), przyjmujemy

ich górne oszacowania v_{apr} i u_{apr} , jakie możemy już wyznaczyć z wzorów (4.16) i (4.14). Przyjmujemy ponadto, iż $p_R = p_S$.

W końcu, wielkość t_R obieramy tak, aby współczynnik przy pochodnej prędkości względem czasu w bezwymiarowym odpowiedniku równania (3.8) był równy jedności.

W dalszym ciągu ograniczymy się do przypadku takiego przebiegu funkcji ciśnienia, jaki spełnia równanie (4.12) i nierówność $\varepsilon_{a1}(t_{pk}) \leq \varepsilon_p$. Jeśli tak, to $v_{aR} = v_{apm}$, $u_{aR} = u_{apk}$, co pozwala już wprowadzić bezwymiarowe zmienne niezależne

$$(6.1) \quad r^* = \frac{r}{a}, \quad t^* = \frac{I_{pk}}{I_m} \frac{t}{t_{pk}},$$

bezwymiarowe zmienne zależne

$$(6.2) \quad v^* = \frac{v}{v_{apm}}, \quad u^* = \frac{u}{u_{apk}}, \quad \sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{\sqrt{3}k}, \quad \sigma_p^* = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}k},$$

oraz bezwymiarowe ciśnienie

$$(6.3) \quad p^* = \frac{p}{2\sqrt{3}k \ln \eta^{-1}}.$$

Zwróćmy uwagę, że z (6.2)_{1,2} wynikają bezwymiarowe zmienne

$$(6.4) \quad v_a^* = \frac{v_a}{v_{apm}}, \quad u_a^* = \frac{u_a}{u_{apk}},$$

konieczne do sprowadzenia do postaci bezwymiarowej problemu początkowego (3.8), (3.3) i (3.4).

W nowych zmiennych, problem początkowo - brzegowy (2.1) - (2.6) przyjmuje postać

$$(6.5) \quad \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + 2 \frac{v^*}{r^*} = 0,$$

$$(6.6) \quad \frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r^*} + 2 \frac{\sigma_r^* - \sigma_p^*}{r^*} = \frac{2 \ln \eta^{-1}}{(1 - \eta)} \frac{\partial v^*}{\partial r^*},$$

$$(6.7) \quad \sigma_{\phi}^* - \sigma_r^* = 1 + \phi^{-1} \left(\delta \frac{v_a^*}{r^* \sqrt{3}} \right),$$

$$(6.8) \quad \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \nu v^*,$$

$$(6.9) \quad v^*(r^*, 0) = 0, \quad u^*(r^*, 0) = 0, \quad 1 \leq t^* \leq \eta^{-1},$$

$$(6.10) \quad \sigma_r^*(1, t^*) = -2p^*(t^*) \ln \eta^{-1}, \quad \sigma_r^*(\eta^{-1}, t^*) = 0,$$

$$0 \leq t^* \leq t_k^*.$$

w której

$$(6.11) \quad \delta = \frac{\sqrt{3} v_{apm}}{\gamma a}, \quad 3)$$

$$(6.12) \quad \nu = \frac{I_m}{I_{pk}} \frac{v_{apm} t_{pk}}{u_{apk}},$$

są dodatnimi parametrami bezwymiarowymi.

Dalej, związki (3.2) i (3.5) uzyskują formę

$$(6.13) \quad v^*(r^*, t^*) = \frac{v_a^*(r^*, t^*)}{r^{*2}},$$

$$(6.14) \quad u^*(r^*, t^*) = \frac{u_a^*(r^*, t^*)}{r^{*2}}.$$

3) W przypadku liniowej funkcji nadwyżki, t.j. równań konstytutywnych Hohenemsera - Pragera, patrz np. [5], odpowiadająca za lepkość stała γ zależy od współczynnika lepkości strukturalnej θ za pośrednictwem wzoru

$$\gamma = k/(2\theta),$$

który pozwala wyrazić związek (6.11) jako

$$\delta = \frac{\sqrt{3} v_{apm} \eta}{2ka}.$$

Parametr $ka/(v_{apm} \eta)$ nazywany jest liczbą Bingham'a, lub Saint-Venanta.

W końcu, wzory (3.9) - (3.12) sprowadzają się do zależności

$$(6.15) \quad \sigma_r^* = -2p^*(t^*) \frac{r^{*-1} - \eta}{1 - \eta} \ln \eta^{-1} + AC(r^*; \eta^*) - C(r^*; v_a^*; \eta, \delta),$$

$$(6.16) \quad \sigma_p^* = 1 - 2p^*(t^*) \frac{r^{*-1} - \eta}{1 - \eta} \ln \eta^{-1} + AC(r^*; \eta^*) - C(r^*; v_a^*; \eta, \delta) + \phi^{-1} \left(\delta \frac{v_a^*}{r^{*3}} \right),$$

$$(6.17) \quad \frac{1}{2} AC(r^*; \eta^*) = \ln r^* \eta + \frac{r^{*-1} - \eta}{1 - \eta} \ln \eta^{-1},$$

$$(6.18) \quad \frac{1}{2} C(r^*; v_a^*; \eta, \delta) = \int_{r^*}^{\eta} \phi^{-1} \left(\delta \frac{v_a^*}{r^{*3}} \right) \frac{dr^*}{r^*} + \\ - \frac{r^{*-1} - \eta}{1 - \eta} \int_1^{\eta} \phi^{-1} \left(\delta \frac{v_a^*}{r^{*3}} \right) \frac{dr^*}{r^*},$$

zaś problem początkowy (3.8), (3.3), (3.4) przybiera formę

$$(6.19) \quad \frac{dv_a^*}{dt^*} + \frac{1}{\ln \eta^{-1}} \int_1^{\eta} \phi^{-1} \left(\delta \frac{v_a^*}{r^{*3}} \right) \frac{dr^*}{r^*} = p^*(t^*)^{-1}, \quad v_a^*(0) = 0,$$

$$(6.20) \quad \frac{du_a^*}{dt^*} = \nu v_a^*, \quad u_a^*(0) = 0.$$

W szczególności, gdy $\phi(x) = (x)^n$, występujące w (6.18) i (6.19) całki są równe

$$(6.21) \quad \int_{r^*}^{\eta} \phi^{-1} \left(\delta \frac{v_a^*}{r^{*3}} \right) \frac{dr^*}{r^*} = \frac{n}{3} (r^{*-3/n} - \eta^{3/n}) \delta^{1/n} v_a^{*1/n},$$

$$(6.22) \quad \int_{r^*}^{\eta^{-1}} \phi^{-1} \left(\delta \frac{v_a^*}{r^{*3}} \right) \frac{dr^*}{r^*} = \frac{n}{3} (1 - \eta^{3/n}) \delta^{1/n} v_a^{*1/n}.$$

Jeżeli teraz wprowadzimy dodatni bezwymiarowy parametr

$$(6.23) \quad \alpha_n = \frac{n}{3} \frac{1 - \eta}{\ln \eta^{-1}} \delta^{1/n}$$

i skorzystamy z powyższych całek, to związek (6.18) doprowadzimy do postaci

$$(6.24) \quad C(r^*; v_a^*; \eta, \alpha_n) = \alpha_n B(r^*; \eta, n) v_a^{*1/n},$$

w której

$$(6.25) \quad \frac{1}{2} B(r^*; \eta, n) = \frac{\ln \eta^{-1}}{1 - \eta^{3/n}} \left[r^{*-3/n} - \eta^{3/n} - \frac{(r^{*-1} - \eta)(1 - \eta^{3/n})}{1 - \eta} \right].$$

Tak więc dla potęgowej funkcji nadwyżki składowe naprężenia (6.15), (6.16) określone są zależnościami

$$(6.26) \quad \sigma_r^* = -2p^*(t^*) \frac{r^{*-1} - \eta}{1 - \eta} \ln \eta^{-1} + A(r^*; \eta^*) + \\ - \alpha_n B(r^*; \eta, n) v_a^{*1/n},$$

$$(6.27) \quad \sigma_\varphi^* = 1 - 2p^*(t^*) \frac{r^{*-1} - \eta}{1 - \eta} \ln \eta^{-1} + A(r^*; \eta^*) + \\ - \alpha_n \left[B(r^*; \eta, n) - \frac{3}{n} \frac{\ln \eta^{-1}}{1 - \eta^{3/n}} r^{*-3/n} \right] v_a^{*1/n},$$

zaś problem początkowy (6.20), (6.21) w bezwymiarowej postaci możemy zapisać jako

$$(6.28) \quad \frac{dv_a^*}{dt^*} + \alpha_n v_a^{*1/n} = p^*(t^*) - 1, \quad v_a^*(0) = 0,$$

$$(6.29) \quad \frac{du_a^*}{dt^*} = \nu v_a^*, \quad u_a^*(0) = 0.$$

7. Rozwiązanie perturbacyjne.

Gdy $\frac{1}{\gamma} \rightarrow 0$, wówczas jak wynika z (6.11), określony wzorem (6.23) parametr $\alpha_n \rightarrow 0$. Załóżmy, że występujący w (6.29) parametr ν nie jest mały. Jeśli tak, to ze sposobu w jaki wprowadzono zmienne bezwymiarowe możemy wywnioskować, iż w równaniu (6.28) prawa strona $p^*(t^*) - 1 = O_s(1)$ ⁴⁾, człon $\alpha_n v_a^{*1/n} = O(\alpha_n)$ i wobec tego $dv_a^*/dt^* = O_s(1)$, zaś w równaniu (6.29) $v_a^* = O_s(1)$, co pociąga za sobą, że i $u_a^*/dt^* = O_s(1)$. W przypadku granicznym, gdy $\alpha_n = 0$, człon $\alpha_n v_a^{*1/n}$ oczywiście znika, redukując zagadnienie (6.28), (6.29) do problemu plastycznego, który w zmiennych wymiarowych przedyskutowaliśmy już w p.4. Jeżeli w równaniu (6.28) $0 < \alpha_n \ll 1$, człon $\alpha_n v_a^{*1/n}$ jest mały w porównaniu z członami pozostałymi. W tym przypadku problem lepkoplastyczny możemy traktować jako nieznacznie i regularnie zaburzony problem plastyczny i poszukiwać jego przybliżonego rozwiązania metodą perturbacji "wokół" znanego rozwiązania plastycznego.

Przyjmijmy więc, że parametr α_n jest mały a rozwiązanie perturbacyjne problemu (6.28), (6.29) daje się przedstawić w postaci bezpośredniego rozwinięcia względem kolejnych potęg α_n . Skorzystajmy następnie z techniki regularnej perturbacji, patrz np. [5]. W rezultacie stwierdzimy, że rozwinięcie pierwszego rzędu poszukiwanego rozwiązania jest określone wzorami

$$(7.1) \quad v_a^*(t^*) = I^*(t^*) - t^* - \alpha_n \int_0^{t^*} (I^*(\xi) - \xi)^{1/n} d\xi + \dots,$$

$$(7.2) \quad u_a^*(t^*) = \nu \int_0^{t^*} (I^*(\xi) - \xi) d\xi - \alpha_n \nu \int_0^{t^*} \int_0^{\xi} (I^*(\xi) - \xi)^{1/n} d\xi d\xi + \dots,$$

w których

⁴⁾ Ogólnie, $\psi(t, \omega) = O(\omega)$ jeżeli $\psi = O(\omega)$ i $\psi \neq o(\omega)$. $O(\omega)$ i $o(\omega)$ są tu symbolami Landaua przy normie $\|\psi(t, \omega)\| = \max|\psi|$. Wyczerpujące wyjaśnienie tych symboli można znaleźć np. w książce [3].

$$(7.3) \quad I^*(t^*) = \int_0^{t^*} p^*(\zeta) d\zeta .$$

jest bezwymiarowym impulsem ciśnienia.

Z definicji (6.1)₂ wnioskujemy, że $t_{pk}^* = I_{pk}^* / I_m$. Ruch w problemie plastycznym zachodzi zatem w przedziale czasu $0 \leq t^* \leq t_{pk}^*$, przy czym, co wynika z (7.1) dla $\alpha_n = 0$, w chwili końcowej mamy

$$(7.4) \quad v_{ap}^*(t_{pk}^*) = I^*(t_{pk}^*) - 1 = 0 .$$

Należy oczekiwać, że jeśli tylko $\alpha_n \ll 1$, przedział czasu w jakim ma miejsce ruch w rozwiązaniu lepkoplastycznym jest niewiele mniejszy od poprzedniego. A jeśli tak, to uzasadnionym wydaje się być żądanie, by rozwinięcia (7.1) i (7.2) były równomiernie słuszne w sensie Lighthilla w całym przedziale czasu $0 \leq t^* \leq t_{pk}^*$, patrz [5]⁵⁾. Jednakże, jak wynika z (7.1) i (7.4), $|v_{a1}^* / v_{ap}^*| \rightarrow \infty$ gdy tylko $t^* \rightarrow t_{pk}^* - 0$, co oznacza, że rozwinięcie (7.1) żądania tego nie spełnia. W konsekwencji, przedział czasu w którym jest ono ważne, t.j. wystarczająco dokładne, jest w zależności od wartości parametru α_n mniejszy od postulowanego i może okazać się zbyt mały na to, aby wyznaczyć z zadawalającą dokładnością czas końcowy oraz odpowiadające mu przemieszczenie końcowe.

W celu usunięcia podobnego niedostatku, w pracy [7] zastosowano z powodzeniem metodę Linstredta - Poincaré zmodyfikowaną w ten sposób, że stałą wprowadzoną do transformacji czasu wyznacza się tak, aby rozwinięcie względem małego parametru dla rozwiązania - niezależnie od przyjętego rzędu - było równomiernie słuszne według Lighthilla w takim samym przedziale czasu transformowanego. Wykazano jednocześnie, iż tak wyznaczona stała jest tożsama z czasem końcowym.

⁵⁾ Zgodnie z Lighthillem żądamy tu aby w rozwinięciach (7.1), (7.2) pierwsze perturbacje nie były bardziej osobliwe od perturbacji zerowych, t.j., aby stosunki v_{a1}^* / v_{ap}^* i u_{a1}^* / u_{ap}^* były ograniczone w całym przedziale czasu [0,1].

Aby uzyskać równomiernie słuszne rozwinięcia dla rozwiązania problemu (6.28), (6.29), w niniejszej pracy proponujemy inną modyfikację metody Linstredta - Poincaré. A mianowicie, wprowadzamy nową zmienną czasu za pośrednictwem transformacji

$$(7.5) \quad t^* = t_k^* \tau,$$

w której chwila końcowa

$$(7.6) \quad t_k^* = t_{k0}^* + \alpha_n t_{k1}^* + \alpha_n^2 t_{k2}^* + \dots,$$

tak, że problem (6.28), (6.29) przyjmuje postać

$$(7.7) \quad \frac{d\bar{v}_a^*}{d\tau} = -t_k^* (\alpha_n \bar{v}_a^{*1/n} - p^*(\tau t_k^*) + 1), \quad \bar{v}_a^*(0) = 0,$$

$$(7.8) \quad \frac{d\bar{u}_a^*}{d\tau} = \nu t_k^* \bar{v}_a^*, \quad \bar{u}_a^*(0) = 0,$$

gdzie $\bar{v}_a^*(\tau) = v_a^*(t_k^*(t_k^*\tau))$, $\bar{u}_a^*(\tau) = u_a^*(t_k^*(t_k^*\tau))$, zaś t_{k0}^* , t_{k1}^* ,... są stałymi. Przyjmujemy następnie, iż

$$(7.9) \quad \bar{v}_a^*(\tau) = \bar{v}_{ap}^*(\tau) + \alpha_n \bar{v}_{a1}^*(\tau) + \alpha_n^2 \bar{v}_{a2}^*(\tau) + \dots,$$

$$(7.10) \quad \bar{u}_a^*(\tau) = \bar{u}_{ap}^*(\tau) + \alpha_n \bar{u}_{a1}^*(\tau) + \alpha_n^2 \bar{u}_{a2}^*(\tau) + \dots,$$

i określamy funkcje $\bar{v}_{ap}^*(\tau)$, $\bar{v}_{a1}^*(\tau)$,..., $\bar{u}_{ap}^*(\tau)$, $\bar{u}_{a1}^*(\tau)$,... wybierając jednocześnie stałe t_{k0}^* , t_{k1}^* ,... tak, aby w chwili końcowej $t^* = t_k^*$ prędkość była równa zeru, t.j., aby był spełniony warunek końcowy

$$(7.11) \quad \bar{v}_a^*(1) = 0.$$

Wyznaczone w taki sposób rozwinięcia (7.9) i (7.10) są równomiernie słuszne w sensie Lighthilla w przedziale czasu $0 \leq \tau \leq 1$.

Zauważmy, że funkcję $p^*(\tau t_k^*)$ można przedstawić w postaci

$$(7.12) \quad p^*(\tau t_k^*) = \bar{p}^*(\tau) + \alpha_n \tau \frac{d\bar{p}^*(\tau)}{d\tau} t_{k1}^* t_{k0}^* + \\ + \frac{1}{2} \alpha_n^2 \tau \frac{d^2 \bar{p}^*(\tau)}{d\tau^2} t_{k1}^{*2} t_{k0}^{*2} + 2 \frac{d\bar{p}^*(\tau)}{d\tau} t_{k2}^* t_{k0}^* + \dots$$

w jakiej skorzystaliśmy z oznaczenia

$$(7.13) \quad \bar{p}^*(\tau) \equiv p^*(\tau t_{k0}^*).$$

W celu wyznaczenia poszukiwanych funkcji i stałych, podstawiamy najpierw (7.9), (7.10) oraz (7.12) do problemu (7.7), (7.8), (7.11) i kładziemy $\alpha_n = 0$. W rezultacie otrzymujemy problem plastyczny

$$(7.14) \quad \frac{d\bar{v}_{ap}^*}{d\tau} = t_{k0}^* (\bar{p}^*(\tau) - 1) \quad \bar{v}_{ap}^*(0) = 0, \quad \bar{v}_{ap}^*(1) = 0,$$

$$(7.15) \quad \frac{d\bar{u}_{ap}^*}{d\tau} = \nu t_{k0}^* \bar{v}_{ap}^*, \quad \bar{u}_{ap}^*(0) = 0,$$

o rozwiązaniu

$$(7.16) \quad t_{k0}^* = t_{pk}^*,$$

$$(7.17) \quad \bar{v}_{ap}^*(\tau) = t_{pk}^* (\bar{I}^*(\tau) - \tau),$$

$$(7.18) \quad \bar{u}_{ap}^*(\tau) = \nu t_{pk}^{*2} \int_0^\tau (\bar{I}^*(\tau) - \tau) d\xi,$$

wyrażonym przez bezwymiarowy impuls ciśnienia

$$(7.19) \quad \bar{I}^*(\tau) = \int_0^\tau \bar{p}^*(\xi) d\xi.$$

Następnie różniczkujemy (7.7), (7.8) oraz (7.11) względem

α_n i przyjmujemy, że $\alpha_n = 0$, co przy uwzględnieniu (7.16) daje problem

$$(7.20) \quad \frac{d\bar{v}_{a1}^*}{d\tau} = -t_{k1}^* \left[1 - \frac{d}{d\tau} (\bar{p}^*(\tau)\tau) \right] - t_{pk}^* \bar{v}_{ap}^{*1/n}, \quad \bar{v}_{a1}^*(0) = 0, \\ \bar{v}_{a1}^*(1) = 0,$$

$$(7.21) \quad \frac{d\bar{u}_{a1}^*}{d\tau} = \nu (t_{k1}^* \bar{v}_{ap}^* + t_{pk}^* \bar{v}_{a1}^*), \quad \bar{u}_{ap}^*(0) = 0,$$

dla pierwszych perturbacji. Rozwiązanie tego problemu jest dane wzorami

$$(7.22) \quad t_{k1}^* = t_{pk}^{*1/n+1} (1 - \bar{p}^*(1))^{-1} \int_0^1 (\bar{I}^*(\tau) - \tau)^{1/n} d\xi,$$

$$(7.23) \quad \bar{v}_{a1}^*(\tau) = -t_{k1}^* (1 - \bar{p}^*(\tau))\tau - t_{pk}^* \int_0^\tau \bar{v}_{ap}^{*1/n}(\xi) d\xi,$$

$$(7.24) \quad \bar{u}_{a1}^*(\tau) = \nu \left\{ t_{k1}^* \left[\int_0^\tau \bar{v}_{ap}^*(\xi) d\xi - t_{pk}^* \int_0^\tau (1 - \bar{p}^*(\xi))\xi d\xi \right] + \right. \\ \left. - t_{pk}^* \int_0^\tau \int_0^\xi \bar{v}_{ap}^{*1/n}(\xi) d\xi d\xi \right\}.$$

W końcu, aby otrzymać problem dla drugich perturbacji, różniczkujemy (7.7), (7.8), oraz (7.11) poraz drugi względem α_n i kładziemy $\alpha_n = 0$. W rezultacie stwierdzamy, że problem ten jest określony jako

$$(7.25) \quad \frac{d\bar{v}_{a2}^*}{d\tau} = -t_{k2}^* \left[1 - \frac{d}{d\tau} (\bar{p}^*(\tau)\tau) \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\bar{p}^*(\tau)}{d\tau} \tau^2 \right) t_{k1}^{*2} / t_{pk}^* + \\ - t_{k1}^* \bar{v}_{ap}^{*1/n} - \frac{1}{n} t_{pk}^* \bar{v}_{ap}^{*1/n-1} \bar{v}_{a1}^*, \quad \bar{v}_{a2}^*(0) = 0, \quad \bar{v}_{a2}^*(1) = 0,$$

$$(7.26) \quad \frac{d\bar{u}_{a2}^*}{d\tau} = \nu (t_{k2}^* \bar{v}_{ap}^* + t_{k1}^* \bar{v}_{a1}^* + t_{pk}^* \bar{v}_{a2}^*) , \quad \bar{u}_{ap}^*(0) = 0 ,$$

a jego rozwiązanie przyjmuje postać

$$(7.27) \quad t_{k2}^* = (1 - \bar{p}^*(1))^{-1} \left[t_{k1}^* \left(\frac{1}{\Xi} \frac{dp^*(1)}{d\tau} t_{k1}^* / t_{pk}^* - \int_0^1 \bar{v}_{ap}^{*1/n}(\xi) d\xi \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{n} t_{pk}^* \int_0^1 \bar{v}_{ap}^{*1/n-1}(\xi) \bar{v}_{a1}^*(\xi) d\xi \right] ,$$

$$(7.28) \quad \bar{v}_{a2}^*(\tau) = -t_{k2}^* (1 - \bar{p}^*(\tau)) \tau + t_{k1}^* \left(\frac{1}{\Xi} \frac{dp^*(\tau)}{d\tau} \tau^2 t_{k1}^* / t_{pk}^* + \right. \\ \left. - \int_0^\tau \bar{v}_{ap}^{*1/n}(\xi) d\xi \right) - \frac{1}{n} t_{pk}^* \int_0^\tau \bar{v}_{ap}^{*1/n-1}(\xi) \bar{v}_{a1}^*(\xi) d\xi ,$$

$$(7.29) \quad \bar{u}_{a2}^*(\tau) = \nu \left\{ t_{k2}^* \left[\int_0^\tau \bar{v}_{ap}^*(\xi) d\xi - t_{pk}^* \int_0^\tau (1 - \bar{p}^*(\xi)) \xi d\xi \right] + \right. \\ \left. + t_{k1}^* \left[\int_0^\tau \bar{v}_{a1}^*(\xi) d\xi - \frac{1}{\Xi} t_{k1}^* \int_0^\tau \frac{dp^*(\xi)}{d\xi} \xi^2 d\xi \right] + \right. \\ \left. - t_{pk}^* \left[t_{k1}^* \int_0^\tau \int_0^\xi \bar{v}_{ap}^*(\xi)^{1/n} d\xi d\xi - \frac{1}{n} t_{pk}^* \int_0^\tau \bar{v}_{ap}^{*1/n-1}(\xi) \bar{v}_{a1}^*(\xi) d\xi \right] \right\} .$$

Postępując tak dalej, możemy obliczyć i następne perturbacje poszukiwanego rozwiązania, co jednakże wymaga znacznego nakładu pracy. Rezultaty są z reguły coraz to bardziej skomplikowane, a przy odpowiednio małych wartościach parametru α_n wzrost dokładności uzyskiwanych rozwinięć jest już zwykle niewielki.

Jeśli zatem ograniczymy się do perturbacji już uzyskanych, to możemy utworzyć bądź aproksymację pierwszego rzędu

$$(7.30) \quad \bar{v}_a^*(\tau) = \bar{v}_{ap}^*(\tau) + \alpha_n \bar{v}_{a1}^*(\tau),$$

$$(7.31) \quad \bar{u}_a^*(\tau) = \bar{u}_{ap}^*(\tau) + \alpha_n \bar{u}_{a1}^*(\tau),$$

$$(7.32) \quad \tau = t^* / (t_{pk}^* + \alpha_n t_{k1}^*),$$

bądź aproksymację drugiego rzędu

$$(7.33) \quad \bar{v}_a^*(\tau) = \bar{v}_{ap}^*(\tau) + \alpha_n \bar{v}_{a1}^*(\tau) + \alpha_n^2 \bar{v}_{a2}^*(\tau),$$

$$(7.34) \quad \bar{u}_a^*(\tau) = \bar{u}_{ap}^*(\tau) + \alpha_n \bar{u}_{a1}^*(\tau) + \alpha_n^2 \bar{u}_{a2}^*(\tau),$$

$$(7.35) \quad \tau = t^* / (t_{k0}^* + \alpha_n t_{k1}^* + \alpha_n^2 t_{k2}^*),$$

Równomierną słuszność uzyskanych rozwinięć wykazuje się na drodze bezpośrednich obliczeń.

8. Maksymalna prędkość i przemieszczenie końcowe.

Niech prędkość osiąga maksymalną wartość w chwili τ_m . Jeśli tak, to jak wynika z (7.5), (7.7) i (7.9), chwila ta musi spełniać warunek

$$(8.1) \quad \alpha_n \bar{v}_a^{*1/n}(\tau_m) - p^*(t_m^*) + 1 = 0,$$

w którym

$$(8.2) \quad \bar{v}_a^*(\tau_m) = \bar{v}_{ap}^*(\tau_m) + \alpha_n \bar{v}_{a1}^*(\tau_m) + \alpha_n^2 \bar{v}_{a2}^*(\tau_m) + \dots,$$

$$(8.3) \quad \tau_m = t_m^* / t_k^*.$$

Jeśli przyjmiemy teraz, że

$$(8.4) \quad \tau_m = \tau_{pm}^* + \alpha_n \tau_{m1}^* + \alpha_n^2 \tau_{m2}^* + \dots,$$

to na podstawie (8.3) mamy również i rozwinięcie

$$(8.5) \quad t_m^* = t_{pm}^* + \alpha_n t_{m1}^* + \alpha_n^2 t_{m2}^* + \dots,$$

w jakim

$$(8.6) \quad t_{pm}^* = t_{pk}^* \tau_{pm},$$

$$(8.7) \quad t_{m1}^* = t_{pk}^* \tau_{m1} + t_{k1}^* \tau_{pm},$$

$$(8.8) \quad t_{m2}^* = t_{pk}^* \tau_{m2} + t_{k1}^* \tau_{m1} + t_{k2}^* \tau_{pm}.$$

Perturbacje t_{pm}^* , t_{m1}^* , t_{m2}^* , ... wyznaczamy z równania (8.1) taką samą techniką jak w punkcie poprzednim. Musimy tu jednakże uwzględnić zależności

$$(8.9) \quad \bar{v}_{ap}^*(\tau_{pm}) = 1, \quad \frac{d\bar{v}_{ap}^*(\tau_{pm})}{d\tau} = 0,$$

z których pierwsza wynika z definicji (6,4)₁, zaś druga jest warunkiem występowania maksimum prędkości w rozwiązaniu plastycznym.

I tak, przy $\alpha_n = 0$ otrzymujemy równanie

$$(8.10) \quad p^*(t_{pm}^*) = 1,$$

z jakiego wyznaczamy t_{pm}^* . Natomiast z równań, jakie dostajemy przez dwukrotne różniczkowanie (8.1) i podstawienie $\alpha_n = 0$, znajdujemy, że

$$(8.11) \quad t_{m1}^* = \left[\frac{dp^*(t_{pm}^*)}{dt^*} \right]^{-1}$$

$$(8.12) \quad t_{m2}^* = t_{pk}^{*-1} \left[\frac{dp^*(t_{pm}^*)}{dt^*} \right]^{-3} \left\{ \frac{1}{n} \bar{v}_{ap}^*(\tau_{pm}) \left[\frac{dp^*(t_{pm}^*)}{dt^*} \right]^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{d^2 p^*(t_{pm}^*)}{dt^{*2}} \right\}.$$

Prędkość maksymalna $\bar{v}_{am}^* \equiv \bar{v}_a^*(\tau_m)$ można rozwinąć w szereg

względem kolejnych potęg α_n . Aby znaleźć wyrazy tego rozwinięcia, skorzystajmy z (8.2) i napiszmy, że

$$(8.13) \quad \bar{v}_{apm}^* + \alpha_n \bar{v}_{a1m}^* + \alpha_n^2 \bar{v}_{a2m}^* + \dots = \bar{v}_{ap}^*(\tau_m) + \alpha_n \bar{v}_{a1}^*(\tau_m) + \alpha_n^2 \bar{v}_{a2}^*(\tau_m) + \dots,$$

gdzie chwila τ_m jest określona przez (8.4). Korzystając z zademonstrowanej już w p.7 procedury, z równania (8.13) znajdujemy, że

$$(8.14) \quad \bar{v}_{apm}^* = \bar{v}_{ap}^*(\tau_{pm}) = 1,$$

$$(8.15) \quad \bar{v}_{a1m}^* = \bar{v}_{a1}^*(\tau_{pm}),$$

$$(8.16) \quad \bar{v}_{a2m}^* = -\frac{1}{2} \left[\frac{dp^*(t_{pm}^*)}{dt^*} \right]^{-1} \left(1 - \frac{dp^*(t_{pm}^*)}{dt^*} \tau_{pm} t_{k1}^* \right)^2 + \bar{v}_{a2}^*(\tau_{pm}).$$

Zwróćmy uwagę, że ze względu na (8.9) występujące w (8.15) i (8.16) wielkości $\bar{v}_{a1}^*(\tau_{pm})$ oraz $\bar{v}_{a2}^*(\tau_{pm})$ są równe

$$(8.17) \quad \bar{v}_{a1}^*(\tau_{pm}) = -t_{pk}^* \int_0^{\tau_{pm}} \bar{v}_{ap}^{*1/n}(\xi) d\xi,$$

$$(8.18) \quad \bar{v}_{a2}^*(\tau_{pm}) = t_{k1}^* \left(\frac{1}{2} \frac{d\bar{p}^*(\tau_{pm})}{d\tau} \tau_{pm}^2 t_{k1}^* / t_{pk}^* - \int_0^{\tau_{pm}} \bar{v}_{ap}^{*1/n}(\xi) d\xi \right) - \frac{1}{n} t_{pk}^* \int_0^{\tau_{pm}} \bar{v}_{ap}^{*1/n-1}(\xi) \bar{v}_{a1}^*(\xi) d\xi.$$

Z definicji (8.4)₂ widać, iż $\bar{u}_{ap}^*(1) = 1$, co w świetle zależności (7.7), (7.8) prowadzi do wniosku, że zachodzi związek

$$(8.19) \quad \nu t_{pk}^* \int_0^1 \bar{v}_{ap}^*(\xi) d\xi = 1,$$

który uwzględniamy przy obliczaniu wartości perturbacji przemieszczenia w chwili końcowej $\tau = 1$. Wartości te są równe

$$(8.20) \quad \bar{u}_{apk}^* \equiv \bar{u}_{ap}^*(1) = 1.$$

$$(8.21) \quad \bar{u}_{aik}^* \equiv \bar{u}_{ai}^*(1) = \nu \left\{ t_{k1}^* \left[(\nu t_{pk}^*)^{-1} - t_{pk}^* \int_0^1 (1 - \bar{p}^*(\xi)) \xi d\xi \right] + \right. \\ \left. - t_{pk}^* \int_0^1 \int_0^\xi \bar{v}_{ap}^*(\xi)^{1/n} d\xi d\xi \right\}$$

$$(8.22) \quad \bar{u}_{a2k}^* \equiv \bar{u}_{a2}^*(1) = \nu \left\{ t_{k2}^* \left[(\nu t_{pk}^*)^{-1} - t_{pk}^* \int_0^1 (1 - \bar{p}^*(\xi)) \xi d\xi \right] + \right. \\ \left. + t_{k1}^* \left[\int_0^1 \bar{v}_{a1}^*(\xi) d\xi - \frac{1}{2} t_{k1}^* \int_0^1 \frac{d\bar{p}^*(\xi)}{d\xi} \xi^2 d\xi \right] + \right. \\ \left. - t_{pk}^* \left[t_{k1}^* \int_0^\tau \int_0^\xi \bar{v}_{ap}^*(\xi)^{1/n} d\xi d\xi - \frac{1}{n} t_{pk}^* \int_0^\tau \bar{v}_{ap}^{1/n-1}(\xi) \bar{v}_{a1}^*(\xi) d\xi \right] \right\}.$$

Przy pomocy powyżej otrzymanych wyników możemy utworzyć aproksymacje pierwszego lub drugiego rzędu rozwinięć (8.5), (8.13)₂ odpowiednio dla t_{m}^* i \bar{v}_{am}^* oraz rozwinięcia (7.11) dla przemieszczenia końcowego \bar{u}_{ak}^* .

9. Liniowo - malejąca funkcja ciśnienia.

Przyjmijmy teraz, że ciśnienie maleje od skończonej wartości do zera zgodnie z funkcją liniową

$$(9.1) \quad p(t) = p_s (1 + h) \left(1 - \frac{t}{t_1}\right), \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Z równania (4.12) znajdujemy, że dla tej funkcji

$$(9.2) \quad t_{pk} = \frac{2h}{1+h} t_1,$$

co oznacza, iż jeśli tylko ma być $0 < t_{pk} \leq t_1$, musi zachodzić nierówność $0 < h \leq 1$.

Dalej, z zależności (4.14) i (4.16) określamy prędkość maksymalną i przemieszczenie końcowe, równe

$$(9.3) \quad v_{apm} = \frac{p_s t_1 h^2}{2\rho a(1-\eta)(1+h)},$$

$$(9.4) \quad u_{apk} = \frac{2p_s t_1^2 h^3}{2\rho a(1-\eta)(1+h)^2}.$$

Ze względu na (9.3), określone wzorami (6.11), (6.12) wielkości δ oraz ν są teraz równe

$$(9.5) \quad \delta = \frac{\sqrt{3} p_s t_1 h^2}{2\rho a^2 \gamma (1-\eta)(1+h)}, \quad \nu = \frac{3h}{8}.$$

Zauważmy w końcu, że ze wzorów (4.13) i (4.17) otrzymujemy iloraz impulsów ciśnień $I_{pk}/I_m = 4/h$. Otrzymane powyżej wielkości pozwalają już na pełne określenie bezwymiarowych wielkości zdefiniowanych przez (6.1)₂, (6.2)_{1,2}, (6.3) i (6.4).

Bezwymiarowa postać funkcji (9.1) jest dana przez zależność

$$(9.6) \quad p^*(t^*) = 1 + h \left(1 - \frac{ht^*}{2}\right),$$

zaś zdefiniowana przez (7.13) funkcja $\bar{p}^*(\tau)$ przyjmuje formę

$$(9.7) \quad \bar{p}^*(\tau) = 1 + h(1 - 2\tau).$$

Korzystając z (9.7) obliczamy wprowadzony wzorem (7.19) bezwymiarowy impuls ciśnienia

$$(9.8) \quad \bar{I}^*(\tau) = \tau \left[1 + h(1 - \tau)\right],$$

a następnie konieczne do wyznaczenia perturbacji całki

$$(9.9) \quad \int_0^{\tau} (\bar{I}^*(\tau) - \tau)^{1/n} d\tau = h^{1/n} B_{\tau}(1+1/n, 1+1/n),$$

$$(9.10) \quad \int_0^1 (\bar{I}^*(\tau) - \tau)^{1/n} d\xi = h^{1/n} B(1+1/n, 1+1/n),$$

w których

$$(9.11) \quad B(p, q) = \int_0^1 \xi^{p-1} (1 - \xi)^{q-1} d\xi = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

jest pełna, zaś

$$(9.12) \quad B_\tau(p, q) = \int_0^\tau \xi^{p-1} (1 - \xi)^{q-1} d\xi,$$

niepełną funkcją Beta. $\Gamma(\xi)$ w (9.11) oznacza funkcję Gamma Eulera.

Po przeprowadzeniu obliczeń zerowe perturbacje (7.16) - (7.18) przyjmują postać

$$(9.13) \quad t_{pk}^* = \frac{4}{h},$$

$$(9.14) \quad \bar{v}_{ap}^*(\tau) = 4\tau(1 - \tau),$$

$$(9.15) \quad \bar{u}_{ap}^*(\tau) = 3\tau^2(1 - \frac{2}{3}\tau)$$

zaś pierwsze perturbacje (7.22) - (7.24) - formę

$$(9.16) \quad t_{k1}^* = - 2^{2(1+1/n)} h^{-1} B(1+1/n, 1+1/n),$$

$$(9.17) \quad \bar{v}_{a1}^*(\tau) = - 2^{2(1+1/n)} h^{-1} \left[B(1+1/n, 1+1/n)(1 - 2\tau)\tau + \right. \\ \left. + B_\tau(1+1/n, 1+1/n) \right],$$

$$(9.18) \quad \bar{u}_{a1}^*(\tau) = - 2^{1+2/n} 3h^{-1} \left[B(1+1/n, 1+1/n)(1 - \tau)\tau^2 + \right. \\ \left. + \int_0^\tau B_\xi(1+1/n, 1+1/n) d\xi \right].$$

Drugie perturbacje (7.27) - (7.29) są w porównaniu z poprzednimi już bardziej złożone i dają się zapisać jako

$$(9.19) \quad t_{k2}^* = -2^{2(1+2/n)} h^{-2} \left\{ (nh)^{-1} \left[B(1+1/n, 1+1/n) \left[B(1+1/n, 1/n) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2B(2+1/n, 1+1/n) \right] + \int_0^1 B_\xi(1+1/n, 1+1/n) \xi^{1/n-1} (1-\xi)^{1/n-1} d\xi \right] + \right. \\ \left. + (1-h) B^2(1+1/n, 1+1/n) \right\}.$$

$$(9.20) \quad \bar{v}_{a2}^*(\tau) = t_{k2}^* h(1-\tau)\tau + 2^{2(1+2/n)} h^{-1} \left\{ B(1+1/n, 1+1/n) * \right. \\ * \left[B_\tau(1+1/n, 1+1/n) - B(1+1/n, 1+1/n) h\tau^2 + \right. \\ \left. + (nh)^{-1} \left[B_\tau(1+1/n, 1/n) - 2B_\tau(2+1/n, 1/n) \right] \right] + \\ \left. (nh)^{-1} \int_0^\tau B_\xi(1+1/n, 1+1/n) \xi^{1/n-1} (1-\xi)^{1/n-1} d\xi \right\}.$$

$$(9.21) \quad \bar{u}_{a2}^*(\tau) = \frac{3}{2} t_{k2}^* h(1-\tau)\tau^2 + 2^{2/n-1} \frac{3}{2} t_{k1}^* \left[B(1+1/n, 1+1/n) * \right. \\ * \left. (4\tau-3)\tau^2/6 - \int_0^\tau B_\xi(1+1/n, 1+1/n) d\xi \right] + 2^{1+4/n} 3h^{-1} * \\ * \left\{ B(1+1/n, 1+1/n) \left[\int_0^\tau B_\xi(1+1/n, 1+1/n) d\xi - B(1+1/n, 1+1/n) h\tau^3/3 + \right. \right. \\ \left. \left. + (nh)^{-1} \left(\int_0^\tau B_\xi(1+1/n, 1/n) d\xi - 2 \int_0^\tau B_\xi(2+1/n, 1/n) d\xi \right) \right] + \right. \\ \left. + (nh)^{-1} \int_0^\tau \int_0^\xi B_\xi(1+1/n, 1+1/n) \xi^{1/n-1} (1-\xi)^{1/n-1} d\xi d\xi \right\}.$$

Z (8.6), (8.10) oraz (9.5) wynika, że

$$(9.22) \quad t_{pm}^* = \frac{2}{h}, \quad \tau_{pm} = \frac{1}{2},$$

natomiast zerowe perturbacje \bar{v}_{apm}^* i \bar{u}_{apk}^* są określone jak w (8.14) i (8.20).

Pierwsze perturbacje (8.11), (8.15) i (8.21) doznają zmiany na

$$(9.23) \quad t_{m1}^* = -2h^{-2},$$

$$(9.24) \quad \bar{v}_{a1m}^* = -2^{2(1+1/n)} h^{-1} B_{1/2}(1+1/n, 1+1/n),$$

$$(9.25) \quad \bar{u}_{a1k}^* = -2^{1+2/n} 3h^{-1} \int_0^1 B_{\xi}(1+1/n, 1+1/n) d\xi,$$

zaś drugie perturbacje (8.12), (8.16) i (8.22) uzyskują postać

$$(9.26) \quad t_{m2}^* = 2^{(1+2/n)} (nh^2)^{-1} B_{1/2}(1+1/n, 1+1/n),$$

$$(9.27) \quad \bar{v}_{a2m}^* = h^{-2} \left[1 - 2^{2/n} h B(1+1/n, 1+1/n) \right]^2 + 2^{2(1+2/n)} h^{-1} *$$

$$\begin{aligned} & * \left\{ B(1+1/n, 1+1/n) \left[B_{1/2}(1+1/n, 1+1/n) - B(1+1/n, 1+1/n) h/4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (nh)^{-1} \left[B_{1/2}(1+1/n, 1+1/n) - 2B_{1/2}(2+1/n, 1+1/n) \right] \right] \right\} + \\ & \quad \left. + (nh)^{-1} \int_0^{1/2} B_{\xi}(1+1/n, 1+1/n) \xi^{1/n-1} (1-\xi)^{1/n-1} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$(9.28) \quad \bar{u}_{a2k}^* = 2^{2/n-1} 3t_{k1}^* \left[B(1+1/n, 1+1/n) / 6 - \int_0^1 B_{\xi}(1+1/n, 1+1/n) d\xi \right] + \\ + 2^{1+4/n} 3h^{-1} \left\{ B(1+1/n, 1+1/n) \left[\int_0^1 B_{\xi}(1+1/n, 1+1/n) d\xi + \right. \right.$$

$$-B(1+1/n, 1+1/n)h/3]+$$

$$+(nh)^{-1} \int_0^1 \int_0^\zeta B_\zeta(1+1/n, 1+1/n) \zeta^{1/n-1} (1-\zeta)^{1/n-1} d\zeta d\zeta \}.$$

Przy wyprowadzaniu wzoru ostatniego uwzględniliśmy fakt, że zachodzi zależność

$$(9.29) \quad \int_0^1 B_\zeta(1+1/n, 1+1/n) d\zeta - 2 \int_0^1 B_\zeta(2+1/n, 1+1/n) d\zeta = 0.$$

Przy tabelaryzacji powyższych wzorów występujące w zależnościach (9.18) - (9.21), (9.25), (9.27) i (9.28) całki będziemy zastępowali prostrzymi wyrażeniami całkowymi według reguł

$$(9.30) \quad \int_0^\tau B_\zeta(r+1/n, s+1/n) d\zeta = \tau B_\tau(r+1/n, s+1/n) - B_\tau(r+1+1/n, s+1/n),$$

$$(9.31) \quad \int_0^\tau \int_0^\zeta B_\zeta(1+1/n, 1+1/n) \zeta^{1/n-1} (1-\zeta)^{1/n-1} d\zeta d\zeta =$$

$$= \tau \int_0^\tau B_\zeta(1+1/n, 1+1/n) \zeta^{1/n-1} (1-\zeta)^{1/n-1} d\zeta +$$

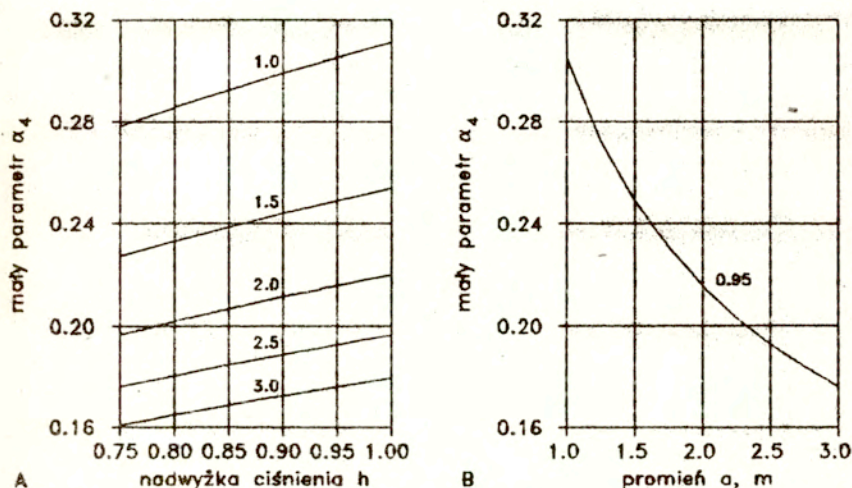
$$- \int_0^\tau B_\zeta(1+1/n, 1+1/n) \zeta^{1/n} (1-\zeta)^{1/n-1} d\zeta,$$

gdzie r i s są dodatnimi liczbami całkowitymi.

10. Przykład.

Aby zademonstrować praktyczną wartość otrzymanego rozwiązania przyjmijmy, że zbiornik jest wykonany ze stopu aluminiowego o nazwie i własnościach wyspecyfikowanych w pracy [2].

t.j. Al 6001 - T6, $k = 171 \text{ MPa}$, $\rho = 2709.5 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 6750 \text{ s}^{-1}$,
 $n = 4$. Załóżmy, iż $\eta = 0.8$, a ciśnienie osiąga wartość zerową w
 chwili $t_1 = 0.0008 \text{ s}$.



Rys.1. Mały parametr w funkcji: A - nadwyżki ciśnienia, B - promienia wewnętrznego

Krzywe wartości parametru α_4 w zależności od nadwyżki ciśnienia h w zakresie od 0.75 do 1, dla wewnętrznego promienia $a = 1, 1.5, 2, 2.5, 3 \text{ m}$, są przy tych danych przedstawione na Rys.1A. Rys.1B ilustruje zaś przebieg wartości α_4 jako funkcji promienia a przy ustalonej wartości $h = 0.95$.

Wzory (6.26) i (6.27) dla naprężeń przyjmują postać

$$(10.1) \quad \sigma_r^* = -0.4463 + 2 \ln r^* - 2.2314h(1 - 0.5ht^{*2})(r^{*-1} - 0.8) + \\ - 2.896\alpha_4(r^{*-0.75} - 0.7705r^{*-1} - 0.2295)v_a^{*0.25},$$

$$(10.2) \quad \sigma_\varphi^* = 1 + \sigma_r^* + 1.086\alpha_4 r^{*-0.75} v_a^{*0.25},$$

zaś problem początkowy (6.28), (6.29) - formę

$$(10.3) \quad \frac{dv_a^*}{dt^*} = -\alpha_4 v_a^{*0.25} + h(1 - 0.5ht^{*2}), \quad v_a^*(0) = 0,$$

$$(10.4) \quad \frac{du_a^*}{dt^*} = 0.375hv_a^*, \quad u_a^*(0) = 0.$$

Z odpowiednich zależności w poprzednim punkcie otrzymujemy wzory dla perturbacji zerowych

$$(10.5) \quad t_{pk}^* = 4h^{-1},$$

$$(10.6) \quad \bar{v}_{ap}^*(\tau) = 4\tau(1 - \tau),$$

$$(10.7) \quad \bar{u}_{ap}^*(\tau) = 3\tau^2(1 - 0.6667\tau),$$

pierwszych

$$(10.8) \quad t_{k1}^* = -3.4971h^{-1},$$

$$(10.9) \quad \bar{v}_{a1}^*(\tau) = -5.6569h^{-1} \left[0.6182(1 - 0.5\tau)\tau + B_\tau(1.25, 1.25) \right],$$

$$(10.10) \quad \bar{u}_{a1}^*(\tau) = -8.4853h^{-1} \left[0.6182(1 - \tau)\tau^2 + \tau B_\tau(1.25, 1.25) + \right. \\ \left. - B(2.25, 1.25) \right],$$

oraz drugich

$$(10.11) \quad t_{k2}^* = h^{-2} \left[3.0576(1 - h) + 0.8478h^{-1} \right],$$

$$(10.12) \quad \bar{v}_{a2}^* = t_{k2}^* h(\tau - 2\tau)\tau + 8h^{-1} \left\{ 0.6182 \left[B_\tau(1.25, 1.25) + \right. \right. \\ \left. \left. - 0.6182h\tau^2 + 0.25h^{-1} \left[B_\tau(1.25, 0.25) - 2B_\tau(2.25, 0.25) \right] \right] + \right. \\ \left. + 0.25h^{-1} \int_0^\tau B_\tau(1.25, 1.25) \tau^{-0.75} (1 - \tau)^{-0.75} d\tau \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (10.13) \quad \bar{u}_{a2}^*(\tau) = & 1.5t_{k2}^* h(1-\tau)\tau^2 + 2.1213t_{k1}^* \left[0.103 - \tau B_\tau(1.25, 1.25) \right] + \\
 & + B_\tau(2.25, 1.25) + 12h^{-1} \left\{ 0.6182 \left[\tau B_\tau(1.25, 1.25) + \right. \right. \\
 & - B_\tau(2.25, 1.25) - 0.2061h\tau^3 + 0.25h^{-1} \left. \left[\tau B_\tau(1.25, 0.25) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - (1+2\tau)B_\tau(2.25, 0.25) + 2B_\tau(3.25, 0.25) \right] \right\} + \\
 & + 0.25h^{-1} \left[\tau \int_0^\tau B_\zeta(1.25, 1.25) \zeta^{-0.75} (1-\zeta)^{-0.75} d\zeta + \right. \\
 & \left. - \int_0^\tau B_\zeta(1.25, 1.25) \zeta^{0.25} (1-\zeta)^{-0.75} d\zeta \right].
 \end{aligned}$$

W końcu, dla perturbacji prędkości maksymalnej, czasu jej wystąpienia oraz przemieszczenia końcowego mamy zależności

$$(10.14) \quad t_{pm}^* = 2h^{-1}, \quad \bar{v}_{apm}^* = 1, \quad \bar{u}_{apk}^* = 1,$$

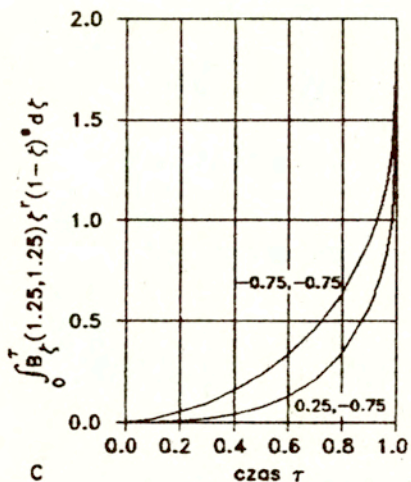
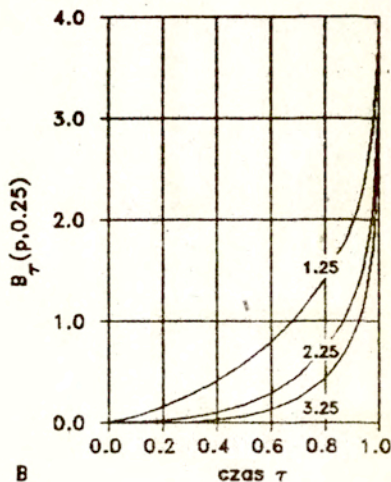
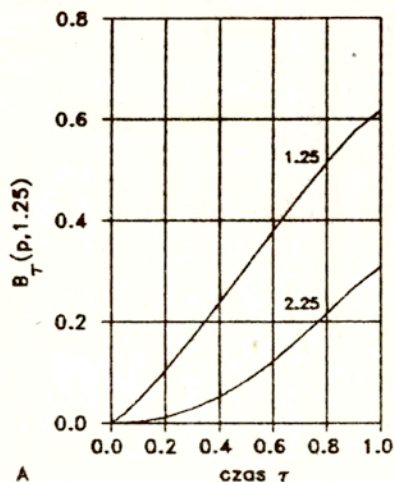
$$(10.15) \quad \bar{t}_{m1}^* = -2h^{-2}, \quad \bar{v}_{a1m}^* = -1.748h^{-1}, \quad \bar{u}_{a1k}^* = -2.6228h^{-1},$$

$$(10.16) \quad t_{m2}^* = 0.2185h^{-2}, \quad \bar{v}_{am2}^* = h^{-2}(1.3094 - 0.2203h - 0.0003h^2),$$

$$(10.17) \quad \bar{u}_{a2k}^* = -0.4374t_{k1}^* + 12h^{-2} \left[0.6182(0.3092 - 0.2061h) + 0.0881 \right].$$

Do tabelaryzacji powyższych wzorów konieczne są wartości występujących w nich niepełnych funkcji Beta oraz całek (wzory (10.12) i (10.13)) od nich zależnych. Z informacji zawartych w poradniku [1] wynika że tablice niepełnych funkcji Beta o pożądanym parametrach nie są dostępne. Przeprowadziliśmy zatem ich tabelaryzację na podstawie definicji (9.12), przy czym dla $\tau = 1$ skorzystaliśmy z zależności (9.11)₂. Potrzebne tu funkcje Gamma Eulera określiliśmy przy pomocy tablic [11]. Przebieg poszczególnych funkcji przedstawiliśmy na Rys.2. Funkcje pokazane na wykresie A wyznaczyliśmy co 0.1, zaś na wykresie B - co 0.1 w zakresie od 0 do 0.8, następnie dla odciętych 0.83 i

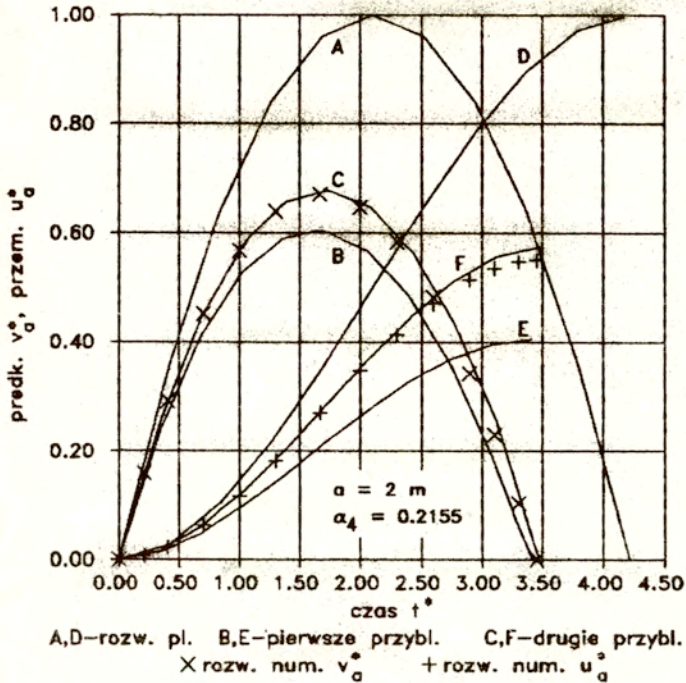
0.87 i dalej co 0.02 w przedziale od 0.9 do 0.98. Przedstawione na wykresie C całki obliczyliśmy co 0.1.



Rys.2. Funkcje wymagające tabularyzacji: A, B - niepełne funkcje Beta, C - całka zależna od niepełnej funkcji Beta.

Rys.3 przedstawia przebieg prękości v_a^* i przemieszczenia u_a^* w czasie t^* dla nadwyżki $h = 0.95$ oraz promienia $a = 2$ m. Parametr $\alpha_4 = 0.2155$. Krzyżyki i plusy reprezentują rozwiązanie

numeryczne problemu (10.3) i (10.4), zaś krzywe ciągłe - przybliżenia perturbacyjne. Linie A, B, C opisują przebiegi prędkości, natomiast D, E, F - przebiegi przemieszczenia. Przy porządkowaniu oznaczeń poszczególnym rozwiązaniom zawiera załączona do rysunku legenda. Zaobserwujemy tu bardzo dobrą zgodność wyników drugiego przybliżenia z wynikami numerycznymi.

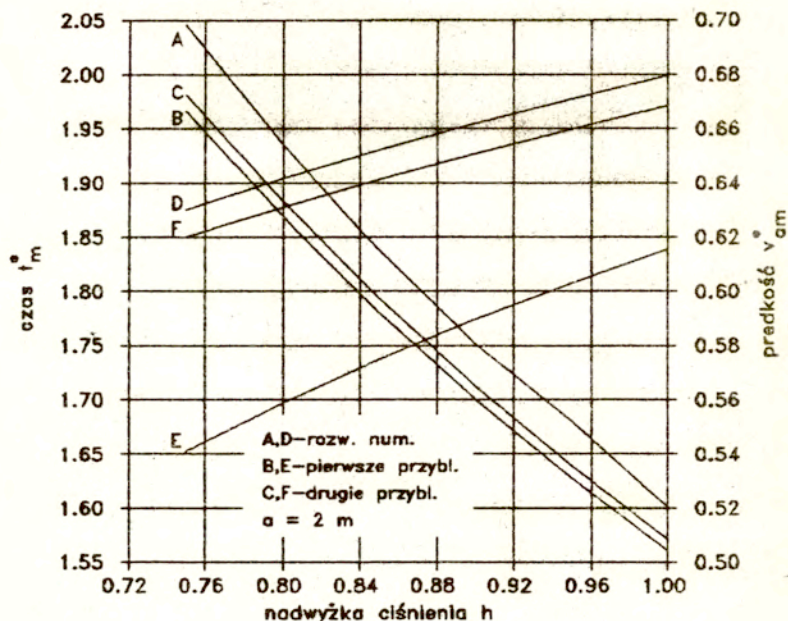


Rys.3. Prędkość i przemieszczenie jako funkcje czasu.

Porównanie maksymalnych prędkości i końcowych przemieszczeń daje procentowe błędy względne odpowiednio 1.5% i 4.4%. Dla pierwszego przybliżenia błędy te są znacznie większe i równe 10.4% oraz 27.3%.

Na Rys.4 pokazane są krzywe maksymalnych prędkości v_{am}^* oraz wartości t_m^* odpowiadających im chwil w funkcji nadwyżki ciśnienia h w zakresie 0.75 - 1 przy ustalonym promieniu $a = 2 \text{ m}$. Wartości parametru α_4 zmieniają się od 0.1969 do

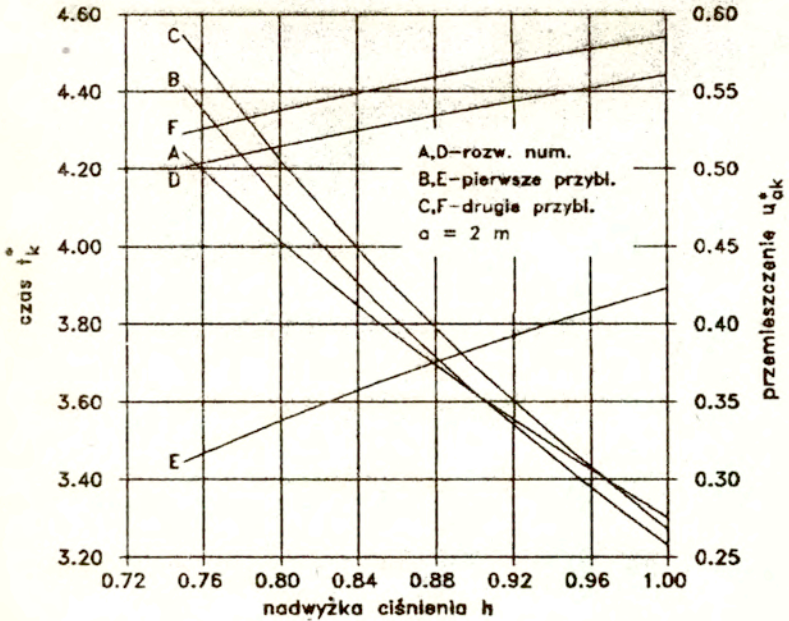
0.2199. Krzywe czasu zaznaczone są literami A, B, C, natomiast krzywe prędkości - literami D, E, F. Oznaczenia A, D wskazują na wyniki numeryczne, B, E odpowiadają pierwszemu przybliżeniu, zaś C, F - przybliżeniu drugiemu.



Rys.4. Prędkość maksymalna i czas pojawienia się jej jako funkcje nadwyżki ciśnienia.

Z przebiegu krzywych wynika, że wraz ze wzrostem h prędkości maksymalne rosną, a odpowiadające im wartości czasu maleją. W przypadku prędkości maksymalnej w pierwszym przybliżeniu przy wzroście h procentowy błąd względny maleje od 14.1% do 9.4%, natomiast w drugim przybliżeniu - od 1.6% do 1.5%. Tak samo zachowuje się i procentowy błąd względny dla czasu. A mianowicie, w pierwszym przybliżeniu maleje od 3.9% do 2.5%, zaś w drugim - od 3.2% do 1.9%. Tak więc w miarę wzrostu nadwyżki ciśnienia zwiększa się się dokładność rozwiązań przybliżonych dla przedstawionych tu wielkości.

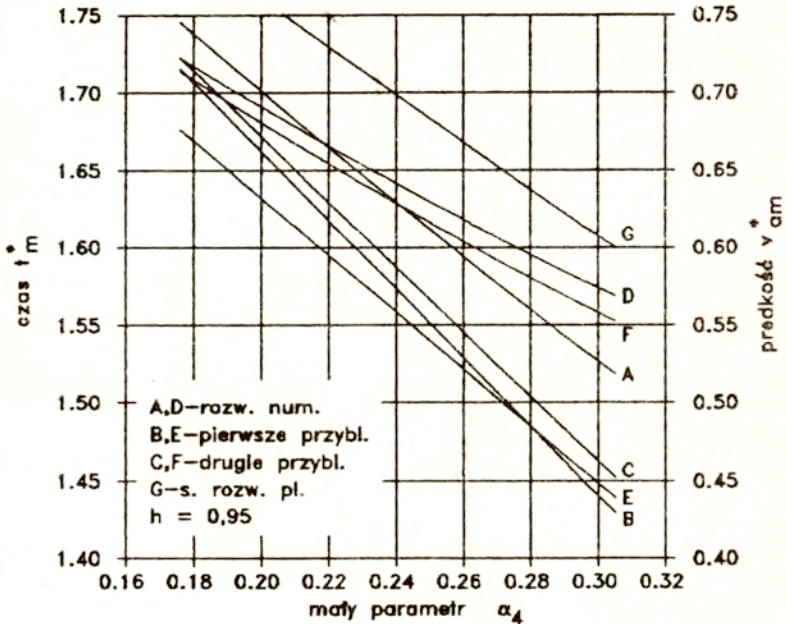
Rys.5 prezentuje wyniki dla czasu końcowego t_k^* , krzywe A, B, C, oraz dla przemieszczenia końcowego u_{ak}^* , krzywe D, E, F, w zależności od h przy ustalonym promieniu $a = 2$ m. Dalsze szczegóły dotyczące oznaczeń podane są w legendzie.



Rys.5. Przemieszczenie końcowe i czas końcowy jako funkcje nadwyżki ciśnienia.

Widzimy tu, że im większe są wartości h , tym większe są wartości oraz dokładności przybliżeń przemieszczenia końcowego. W pierwszym przybliżeniu procentowy błąd względny maleje od 37.5% do 24.5%, natomiast w drugim przybliżeniu - od 4.7% do 4.5%. Przy wzroście h maleją również i wartości czasu końcowego. Krzywe B, C dla przybliżeń perturbacyjnych czasu przecinają krzywą D dla jego rozwiązania numerycznego. W rezultacie dla $0.75 \leq h < 0.94$ bliższe rozwiązaniu numerycznemu jest przybliżenie pierwsze, obarczone maksymalnym procentowym błędem względnym 4.1%, podczas gdy dla $0.94 \leq h \leq 1$ lepsze rezultaty daje już przybliżenie drugie z błędem nie przekraczającym 1.0%.

Wartości maksymalnej prędkości v_{am}^* oraz odpowiadającego jej czasu t_m^* w zależności od małego parametru α_4 dla ustalonej nadwyżki $h = 0.95$ pokazane są na Rys.6. Krzywe czasu oznaczone są przez A, B, C, zaś - prędkości - przez D, E, F. Oznaczenia A, D odnoszą się do rozwiązania numerycznego, B, E - do pierwszego przybliżenia i C, F - do przybliżenia drugiego.

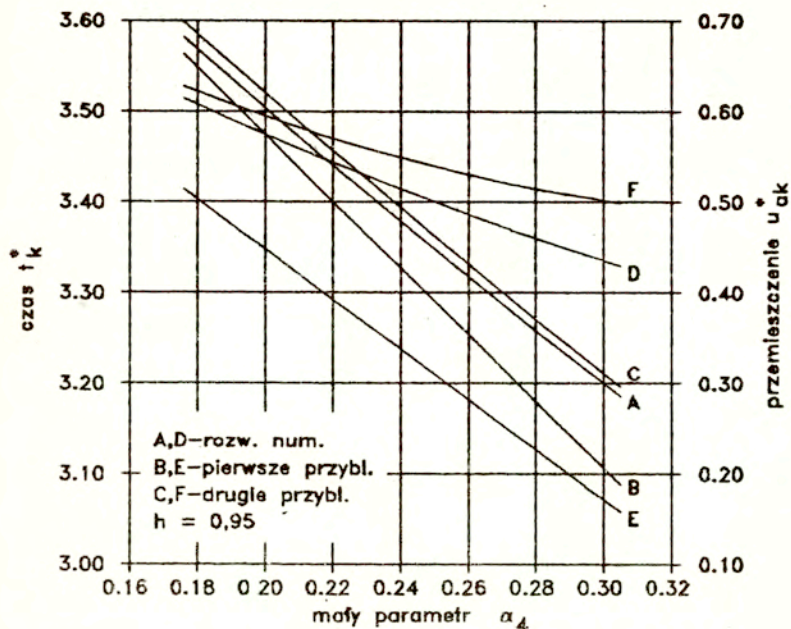


Rys.6. Prędkość maksymalna i czas pojawienia się jej jako funkcje małego parametru.

Przy wzroście α_4 prędkości maksymalne i odpowiadające im czasy maleją. Zmniejszają się również i dokładności przybliżeń perturbacyjnych. I tak, dla prędkości, w pierwszym przybliżeniu procentowy błąd względny wzrasta od 6.4% do 22.6%, natomiast w drugim przybliżeniu - od 1.2% do 2.8%. Dla czasu, w tej samej co poprzednio kolejności przybliżeń, występuje wzrost od 1.8% do 5.8% i od 1.3% do 4.2%.

Rys.7 ilustruje krzywe D, E, F przemieszczenia końcowego u_{ak}^* , a także i krzywe A, B, C czasu końcowego t_k^* w funkcji α_4

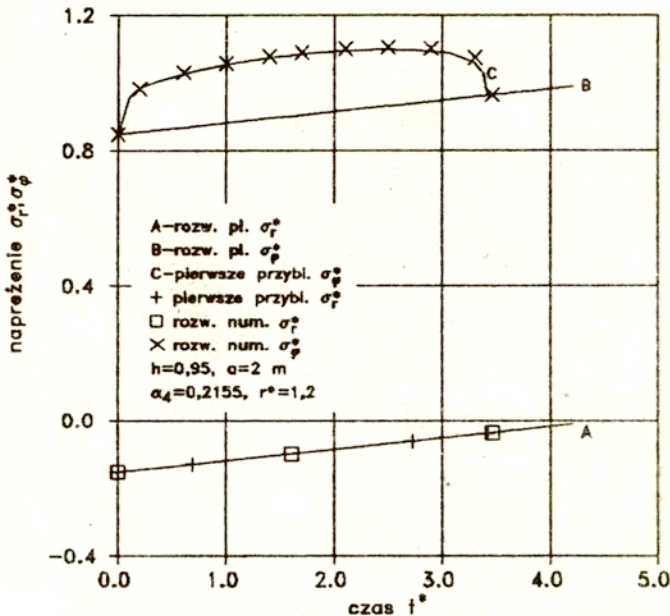
dla $h = 0.95$. Wszystkie krzywe maleją ze wzrostem α_4 . Ponadto, przy wzroście wartości małego parametru spada również i dokładność przybliżeń perturbacyjnych. W pierwszych przybliżeniach procentowe błędy względne wzrastają od 14.7% do 57.6% dla przemieszczenia i od 0.6% do 3% dla czasu. natomiast w drugim przybliżeniu, w tej samej kolejności - od 4.6% do 12.6%, oraz od 0.5% do 0.6%.



Rys.7. Przemieszczenie końcowe i czas końcowy jako funkcje małego parametru.

W końcu. Rys.8 przedstawia przebiegi naprężeń σ_r^* , σ_φ^* w punktach o promieniu $r^* = 1.2$ w procesie deformacji wywołanej nadwyżką ciśnienia $h = 0.95$, przy wewnętrznym promieniu $a = 2$ m. Wartość α_4 jest równa 0.2155. Oznaczenia poszczególnych wyników podane są w legendzie. Pierwsze przybliżenia dla naprężeń otrzymujemy ze wzorów (10.1) i (10.2) z aproksymacją pierwszego rzędu dla v_a^* . Zgodność tego przybliżenia z rozwiązaniem numerycznym jest bardzo dobra.

bowiem procentowy błąd względny dla maksymalnych naprężeń obwodowych i promieniowych nie przekracza 0.7%.



Rys.8. Ewolucja naprężeń.

11. Skorygowane rozwiązanie plastyczne.

Typowe przebiegi prędkości oraz przemieszczeń, jakie dla poszczególnych rozwiązań przedstawiliśmy na Rys.3, posiadają te same cechy jakościowe. Nasuwa to myśl, aby przybliżone rozwiązanie lepkoplastyczne wyrazić za pośrednictwem odpowiednio skorygowanego rozwiązania plastycznego. Korekcję taką możemy przeprowadzić jak poniżej.

Wyłączmy formalnie w zależności (7.9) przed nawias rozwinięcie (8.13)₁ dla prędkości maksymalnej, zaś w związku (7.3) - rozwinięcie (7.1) dla przemieszczenia końcowego przy $\tau = 1$, a następnie rozwiniemy powstałe w nawiasach wyrażenia w szeregi potęgowe względem α_n . Po odpowiednich obliczeniach otrzymamy związki

$$(11.1) \quad \bar{v}_a^*(\tau) = \bar{v}_{am}^* \left[\bar{v}_{ap}^* + \alpha_n (\bar{v}_{a1}^* - \bar{v}_{ap}^* \bar{v}_{a1m}^*) + \dots \right],$$

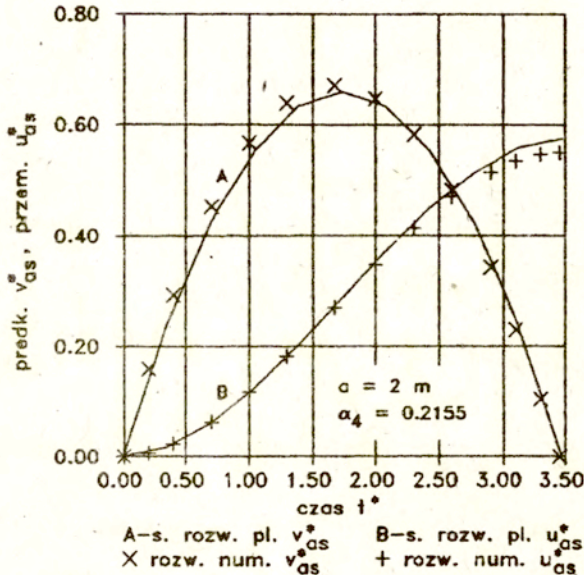
$$(11.2) \quad \bar{u}_a^*(\tau) = \bar{u}_{ak}^* \left[\bar{u}_{ap}^* + \alpha_n (\bar{u}_{a1}^* - \bar{u}_{ap}^* \bar{u}_{a1k}^*) + \dots \right].$$

Pomijając teraz w nawiasach dużych wszystkie człony z parametrem α_n i uwzględniając (7.17) oraz (7.18) dostajemy proste wzory

$$(11.3) \quad \bar{v}_{as}^*(\tau) = t_{pk}^* \bar{v}_{am}^* (\bar{I}^*(\tau) - \tau),$$

$$(11.4) \quad \bar{u}_{as}^*(\tau) = \nu t_{pk}^{*2} \bar{u}_{ak}^* \int_0^\tau (\bar{I}^*(\tau) - \tau) d\xi,$$

w których czas τ jest określony przez zależność (7.5), natomiast dolny indeks s wskazuje na korekcję ze względu na wrażliwość materiału na prędkość deformacji.



Rys.9. Prędkość i przemieszczenie jako funkcje czasu.

Z (11.3) i (11.4) wynika, że skorygowane plastyczne przemieszczenie końcowe $\bar{u}_{as}^*(1) = \bar{u}_{ak}^*$, zaś skorygowana maksymalna prędkość plastyczna $\bar{v}_{as}^* = \bar{v}_{am}^*$ pojawia się przy $\tau = 1/2$, a więc w chwili $t_{sm}^* = t_k^*/2$. Dokładność skorygowanego rozwiązania zależy zatem od dokładności z jaką wyznaczamy \bar{v}_{am}^* , \bar{u}_{ak}^* i t_k^* .

Dla danych z przykładu oraz \bar{v}_{am}^* , \bar{u}_{ak}^* i t_k^* w drugim przybliżeniu zależność czasu t_{sm}^* od parametru α_4 pokazuje krzywa G na Rys.6. Dla krzywej tej procentowy błąd względny nie przekracza 5.5%.

Rys.9 przedstawia przebieg prędkości \bar{v}_{as}^* i przemieszczenia \bar{u}_{as}^* w czasie t^* dla $h = 0.95$ oraz $\alpha_4 = 0.2158$. Na rysunku tym naniezione są także i wyniki obliczeń numerycznych. Porównanie wyników wskazuje na ich dobrą zgodność. Procentowe błędy względne są takie same jak dla drugich przybliżeń perturbacyjnych zamieszczonych na Rys.3.

12. Wnioski.

Przedstawione powyżej wyniki potwierdzają praktyczną przydatność otrzymanych przybliżeń perturbacyjnych dla znacznego zakresu wartości parametru α_n i nadwyżek ciśnienia h bliskich jedności. Dla wartości α_n wyspecyfikowanych w przykładzie należy posługiwać się przybliżeniem drugim. Dobre wyniki daje tu także i skorygowane ze względu na wrażliwość na prędkość deformacji rozwiązanie plastyczne. Pewną uciążliwością uzyskanego rozwiązania perturbacyjnego są występujące w nim całki, które dla większości funkcji przebiegu ciśnienia nie dają się wyrazić przez funkcje elementarne, co zmusza do ich numerycznej tabelaryzacji. Uciążliwość ta jest znacznie złagodzona w przypadku posługiwania się skorygowanym rozwiązaniem plastycznym.

Literatura.

1. M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, National Bureau of Standards, Applied Mathematics, Series*55.
2. S.R. BODNER and P.S. SYMONDS, Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantilever beams subjected to impulsive loading, Jour. Appl. Mech., vol. 29, No 4, 719 - 727, 1962.
3. W. ECKHAUS, Matched asymptotic expansions and singular perturbations, North - Holland Mathematics Studies, 6, North - Holland / American Elsevier, 1973.
4. N. JONES et. al., The dynamic plastic behaviour of shells, In: Dynamic Response of Structures, Ed. G. HERRMAN and N. PERRONE, Pergamon Press, 1 - 29, 1972.
5. A. NAYFEH, Perturbation methods, Pure and Appl. Math., J. Wiley, and Sons, New York - London - Sydney - Toronto, 1973.
6. P. PERZYNA, Teoria lepkoplastycznosci, PWN, Warszawa 1966.
7. W. WOJNO, Perturbation solution for rigid - viscoplastic container, Arch. Mech., 31, 407 - 422, 1979.
8. W. WOJNO and T. WIERZBICKI, On perturbation solution for impulsively loaded viscoplastic structures, ZAMP, 30, 41 - 55, 1979.
9. W. WOJNO and T. WIERZBICKI, Perturbation solution for impulsively loaded viscoplastic plates, International Journal of Non - Linear Mechanics, 15, 211 - 223, 1980.
10. W. WOJNO, Perturbation solution for viscoplastic beam under ideal impuls loading, Arch. Mech., 33, 1, 83 - 97, 1981.
11. M. ZYCKOWSKI, Tablice funkcji Eulera i pokrewnych, PWN, Warszawa 1954.



56743