

## Ondes de cisaillement à polarisation horizontale. Diffraction par une sphère parfaitement rigide.

A. GERARD (PARIS)

LA PROPAGATION d'ondes sphériques de type SH est envisagée dans un milieu infini, élastique, homogène et isotrope contenant une inclusion sphérique parfaitement rigide. La source est située à l'extérieur de cette dernière. La solution de ce problème de diffraction s'interprète aisément en termes d'optique géométrique. La réflexion des ondes SH suit en première approximation les lois de Descartes. En outre, il apparaît sur la surface de la sphère une série d'ondes dispersives évanescentes, faisant  $m$  fois le tour du noyau et dont la vitesse de propagation est inférieure à celle des ondes SH incidentes qui leur ont donné naissance.

Rozważa się rozchodzenie fal sferycznych typu SH w ośrodku nieskończonym, sprężystym, jednorodnym i izotropowym, zawierającym inkluzję sferyczną, doskonale sztywną. Źródło jest umieszczone na zewnątrz tej inkluzji. Rozwiązanie takiego problemu dyfrakcji można łatwo zinterpretować posługując się terminami z optyki geometrycznej. Odbicie fal SH wynika z pierwszego przybliżenia praw Kartezjusza. Ponadto pojawia się na powierzchni sfery szereg fal dyspersyjnych tłumionych, tworzących  $m$ -krotny obrót wokół rdzenia. Prędkość ich rozchodzenia się jest mniejsza od prędkości fal padających SH, które wywołują fale dyspersyjne.

Обсуждается распространение сферических волн типа SH в бесконечной, упругой, однородной и изотропной среде, содержащей сферическое, идеально жесткое включение. Источник помещен вне этого включения. Решение такой задачи дифракции можно легко интерпретировать, пользуясь терминами из геометрической оптики. Отражение волн SH следует из первого приближения законов Декарта. Кроме того появляется на поверхности сферы ряд затухающих дисперсионных волн, образующих  $m$ -кратный оборот вокруг сердцевины. Скорость их распространения меньше чем скорость падающих волн SH, которые вызывают дисперсионные волны.

### Introduction

LA DIFFRACTION des ondes élastiques longitudinales—ondes  $P$ —et de cisaillement—ondes  $S$ —est étudiée par de nombreux chercheurs. Le plus souvent les solutions analytiques obtenues le sont à l'aide des méthodes asymptotiques utilisées en électromagnétisme et en acoustique.

Ainsi, dès 1956 SCHOLTE [13], NAGASE [9] étudient, indépendamment l'un de l'autre, la propagation d'ondes sphériques  $P$  et  $S$  dans un milieu élastique, homogène contenant une inclusion sphérique fluide. Le premier auteur détaille la réflexion, la transmission et la diffraction des ondes  $P$ ; le second s'attarde sur les ondes de Rayleigh issues des ondes  $P$  et  $S$  venant frapper une sphère fluide. Tous deux utilisent conjointement la transformation de WATSON et la méthode du col. TA-LIANG TENG et RICHARDS [15] en 1969 s'intéressent plus particulièrement au voisinage de la frontière de la zone "d'ombre" lors de la diffraction d'ondes planes  $P$  et  $S$  par une cavité cylindrique entourée d'un milieu infini, élastique et homogène. Ils utilisent essentiellement la transformation de Fourier, la sommation de Poisson et la méthode de la plus grande descente. Récemment, ANSELL [1] 1973,

exploite l'étude de NAGASE à l'aide des polynômes de CLEMMOW et donne ainsi une forme analytique nouvelle de la solution du problème évoquée ci-dessus.

Ces diverses études issues de la géophysique incitent naturellement à entreprendre celle de la diffraction des ondes sphériques de cisaillement à polarisation horizontale (ondes SH) par une sphère parfaitement rigide incluse dans un espace infini, objet du présent travail. Les milieux envisagés sont supposés élastiques, homogènes et isotropes. Adaptant la méthode des champs de forces [3 et 4] à notre problème, on commence par retrouver un résultat connu [5] pour représenter le champ "incident". Celui-ci est utilisé au deuxième paragraphe pour préciser la propagation des ondes sphériques SH dans notre modèle. La solution du problème de diffraction obtenue à l'aide de la transformation de Watson est valable derrière l'obstacle — zone d'ombre — et nous l'interprétons au paragraphe suivant en termes d'optique géométrique comme des rayons diffractés par l'inclusion; en outre, il apparaît sur la surface de celle-ci des ondes évanescentes et dispersives qui s'y propagent à des vitesses inférieures à celle des ondes SH incidentes. Dans la dernière partie on établit la solution de notre problème en avant de l'obstacle — zone éclairée — par une technique due à NUSSENZVEIG [10]. Ce dernier résultat montre que les ondes SH suivent en première approximation les lois de Descartes de l'optique géométrique et permet d'atteindre la solution globale recherchée.

Ce travail est à rapprocher de celui effectué en 1959 par LEVY et KELLER [7]. Ces derniers en s'appuyant sur des bilans d'énergie et une extension du principe de Fermat bâtissent une théorie géométrique de la diffraction à l'aide de laquelle ils résolvent le problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des objets de forme géométrique simple. Nous avons constaté que nos résultats sont similaires à ceux de l'exemple de la sphère conductrice donnés par LEVY et KELLER. Ainsi l'intérêt de l'étude que nous présentons ici se situe dans la nature des ondes considérées, la rigidité de l'obstacle, l'introduction de la perturbation due à la source dans les équations du mouvement, l'acquisition de la solution du problème en avant de la sphère ainsi que dans certaines interprétations des résultats et leurs éventuelles applications en géophysique.

## 1. Recherche du champ incident par un champ de forces

On choisit un système de coordonnées sphériques de vecteur de base  $e_r, e_\theta, e_\varphi$ . Les ondes dont nous envisageons l'étude étant des ondes de cisaillement à polarisation horizontale, il en résulte que le champ de déplacements n'a qu'une seule composante normale au plan  $e_r, e_\theta$ . D'une façon analogue à l'étude de SCHOLTE [13] pour les ondes  $P$  on cherche le champ de déplacement  $u$  sous la forme:

$$u = \nabla_A[e_r r \Psi(r, \theta, \varphi, t)].$$

BURRIDGE & KNOPOFF [3], HUDSON [4] ayant établi qu'une force concentrée était équivalente à une source d'ondes, nous supposons qu'au point  $S$  de coordonnées  $r = b, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$  existe une telle force. Nous sommes ainsi conduit à définir un champ de forces  $F$  par unité de volume possédant les mêmes propriétés que le champ de déplacement de sorte que l'on pose:

$$F = \nabla_A[e_r r f(r, \theta, \varphi, t)].$$

En utilisant les lois de contraintes-déformations de l'élasticité classique on vérifie que les composantes radiales  $F_r, u_r$  de  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{u}$  sont nulles ainsi que la dilatation. L'une des équations du mouvement est automatiquement satisfaite tandis que les deux autres le sont si  $\Psi$  est solution de :

$$(1.1) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - f \right),$$

où  $V^2 = \mu/\rho$  désigne le carré de la vitesse des ondes SH,  $\mu$  étant le coefficient de Lamé et  $\rho$  la masse volumique du milieu infini.

La distribution de force  $f$ , correspondant à la source  $S$  monochromatique de pulsation  $\omega$ , communique au milieu élastique un mouvement d'amplitude  $f_0$  tel que :

$$(1.2) \quad f = f_0 \frac{\delta(r-b) \delta(\theta-\theta_0) \delta(\varphi-\varphi_0)}{r^2 \sin \theta} e^{-i\omega t}.$$

SINGH & BEN MENAHEM [14] ont montré que :

$$(1.3) \quad \frac{\delta(\theta-\theta_0) \delta(\varphi-\varphi_0)}{\sin \theta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_0, \varphi_0) Y_{mn}(\theta, \varphi)$$

avec  $\bar{Y}_{mn}$  le conjugué de  $Y_{mn} = P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ .

Pour résoudre l'équation (1.1) compte tenu de (1.2) et (1.3) il est naturel de supposer que  $\Psi$  est de la forme :

$$(1.4) \quad \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{mn}(r) Y_{mn}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}.$$

Si nous posons  $\beta = \omega/V$ ,  $U_{mn}(r)$  doit alors vérifier l'équation :

$$(1.5) \quad \frac{d^2 U_{mn}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU_{mn}(r)}{dr} + \left\{ \beta^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} U_{mn}(r) = A_{mn} \frac{\delta(r-b)}{r^2},$$

$$A_{mn} = (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_0, \varphi_0).$$

Deux solutions fondamentales de l'équation homogène associée à (1.5) sont les fonctions de Hankel de première et seconde espèce d'ordre  $n+1/2$ . Compte tenu de leur développement asymptotique pour  $r$  grand et de (1.4),  $H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r)$  correspond à une onde qui s'écarte à l'infini en restant bornée, nous la baptisons : onde divergente, par opposition à  $H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r)$  qui progresse en sens inverse et que nous désignons par : onde convergente.

En  $r = 0$ , seule la somme de ces deux fonctions est finie de sorte que nous retenons pour solutions fondamentales de (1.5) les fonctions de Hankel et de Bessel :

$$H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r), \quad J_{n+1/2}(\beta r).$$

Poursuivant la résolution de l'équation (1.5) par les méthodes usuelles (cf. [8], p. 826) et compte tenu de la valeur  $2i/\pi\beta r$  du wronskien des solutions fondamentales retenues, on trouve:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} U_{mn} &= \frac{if_0(2n+1)(n-m)!}{8V^2\sqrt{rb}(n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_0, \varphi_0) J_{n+1/2}(\beta b) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r), \quad r \geq b, \\ U_{mn} &= \frac{if_0(2n+1)(n-m)!}{8V^2\sqrt{rb}(n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_0, \varphi_0) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta b) J_{n+1/2}(\beta r), \quad 0 \leq r \leq b. \end{aligned}$$

Le modèle que nous étudions par la suite ayant la symétrie de révolution, on suppose que la source  $S$  est située en  $\theta_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ . A l'avenir nous omettrons volontairement le facteur  $e^{-i\omega t}$  et le champ "incident" sera représenté par la composante  $\Psi = \Psi_i$  du potentiel vecteur qui, d'après (1.4) et (1.6), vaut:

$$(1.7)_1 \quad \Psi_i = \frac{if_0}{4V^2\sqrt{rb}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta b) J_{n+1/2}(\beta r) P_n(\cos\theta), \quad 0 \leq r \leq b,$$

$$(1.7)_2 \quad \Psi_i = \frac{if_0}{4V^2\sqrt{rb}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r) J_{n+1/2}(\beta b) P_n(\cos\theta), \quad r \geq b.$$

On retrouve par cette méthode les résultats connus [5]. Notons que (1.7) est aussi le développement (cf. [12], t. 1, p. 12) de:

$$\frac{f_0 e^{i\beta R}}{4\pi V^2 R}, \quad R = (r^2 + b^2 - 2br\cos\theta)^{1/2}.$$

Enfin (1.7)<sub>1</sub> est finie en  $r = 0$  et représente une onde "convergente" tandis que (1.7)<sub>2</sub> qui est bornée à l'infini, s'interprète comme une onde "divergente". Cette remarque nous sera précieuse par la suite pour déterminer le "champ total" qui règne dans un milieu infini contenant une inclusion sphérique, ce que nous nous proposons d'établir à présent.

## 2. Ondes incidentes sur une sphère parfaitement rigide

Le champ précédemment défini vient frapper une sphère rigide de rayon  $a$ . Dans la région de l'espace  $r > a$ , on note  $\Psi_r$  le champ total qui se compose du champ incident  $\Psi_i$  et du champ réfléchi  $\Psi_r$ , à déterminer. En  $r = a$ , la sphère étant parfaitement rigide, la condition à la limite se traduit par:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{en } r = a).$$

Les ondes réfléchies par la sphère de rayon  $a$  sont du type divergent; il est donc naturel de chercher  $\Psi_r$  sous la forme:

$$(2.2) \quad \Psi_r = \frac{if_0}{4V^2\sqrt{rb}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r) P_n(\cos\theta), \quad r > a.$$

La condition à la limite (2.1) nous fournit la valeur du coefficient  $A_n$  soit

$$(2.3) \quad A_n = -(n+1/2) \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(\beta b)}{H_{n+1/2}^{(1)}(\beta a)} J_{n+1/2}(\beta a).$$

Puisque  $\Psi_t = \Psi_i + \Psi_r$ , en portant (2.3) dans (2.2) et tenant compte de (1.7), le champ total s'écrit :

$$(2.4) \quad \Psi_t = \frac{if_0}{4V^2 \sqrt{rb}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) g_j(n, \beta b, \beta a, \beta r) P_n(\cos\theta), \quad j = 1, 2$$

avec la notation :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} g_1 &= H_{n+1/2}^{(1)}(\beta b) H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) - H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta b) \frac{H_{n+1/2}^{(2)}(\beta a)}{H_{n+1/2}^{(1)}(\beta a)} & \text{si } a < r < b, \\ g_2 &= H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r) H_{n+1/2}^{(2)}(\beta b) - H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta b) \frac{H_{n+1/2}^{(2)}(\beta a)}{H_{n+1/2}^{(1)}(\beta a)} & \text{si } r \geq b. \end{aligned}$$

En ne retenant que les termes dominants du développement asymptotique de  $H_{n+1/2}^{(1)}$  et  $H_{n+1/2}^{(2)}$  il vient :

$$(2.6) \quad \Psi_t = - \frac{if_0}{8V^2 \sqrt{rb}} (n+1/2) \frac{1}{r} \left\{ \left( \frac{r}{b} \right)^{n+1} \text{ ou } \left( \frac{b}{r} \right)^{n+1} \right\} P_n(\cos\theta) \left\{ 1 + O\left( \frac{1}{n} \right) \right\}$$

suivant que  $r < b$  ou que  $r > b$ . Comme  $|P_n(\cos\theta)| \leq 1$  la série  $\Psi_t$  converge et ceci très lentement.

On ne peut donc pas avoir une bonne approximation de la solution  $\Psi_t$  en ne conservant que les premiers termes de la série (2.4). Nous sommes incités à utiliser la transformation

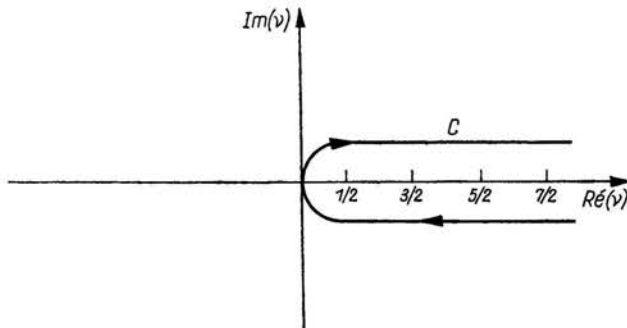


FIG. 1.

de WATSON [2] pour passer de la série (2.4) à une série équivalente et plus rapidement convergente.

Considérons l'intégrale dans le plan complexe  $v$  :

$$(2.7) \quad J = \frac{f_0}{16V^2 \sqrt{rb}} \int_C \frac{v g_j(v) P_{v-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi v} dv,$$

où  $C$  est le contour entourant la partie positive de l'axe réel de  $v$  (Fig. 1).

Si on remarque que  $H_v^{(1)}(x)$ , en tant que fonction de  $v$ , n'a pas de pôle sur l'axe réel positif de  $v$ , on en déduit que la série des résidus de l'intégrand de  $J$  pris aux pôles  $v_n = n + 1/2$  est identique à la série  $\Psi_t$ ; ceci nous permet de remplacer l'étude de (2.4) par celle de  $J$ .

Les propriétés des fonctions  $H_v^{(1)}$ ,  $H_v^{(2)}$  et  $P_{v-1/2}$  (cf. Appendice C) permettent d'établir que l'intégrand de  $J$  est une fonction impaire de  $v$ . Il est alors possible de rempla-

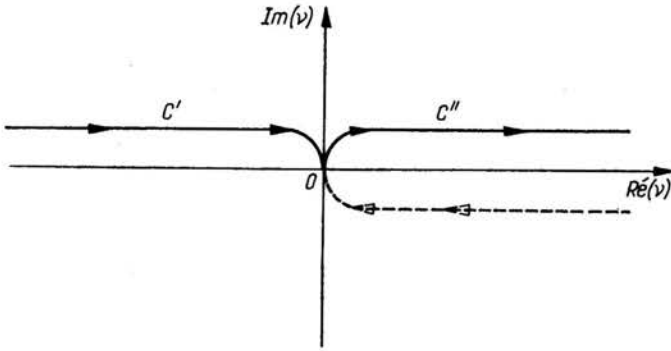


FIG. 2.

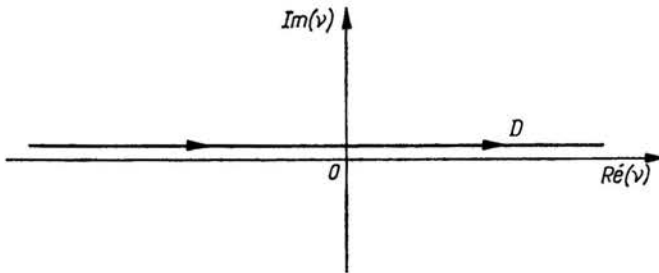


FIG. 3,

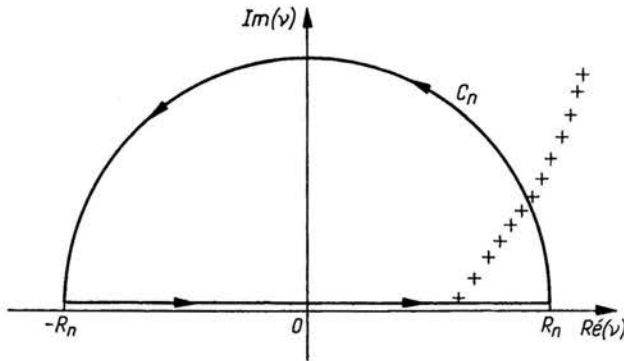


FIG. 4. Les croix désignent les zéros de  $H_v^{(1)}(\beta a)$ .

cer la partie inférieure du contour  $C$  par le contour  $C' + C''$  (Fig. 2) lequel peut, sans difficulté, être déformé pour devenir la droite  $D$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$  (Fig. 3). Ainsi, dans (2.7), nous remplaçons le contour  $C$  par le contour  $D$ .

Soit  $D_n$  le contour fermé constitué de la droite  $D$  et du demi-cercle  $C_n$  de rayon  $R_n$  tracé dans  $I^+$ , le demi-plan  $\text{Im}(v)$  positif (Fig. 4).

Nous choisissons  $C_n$  de façon à éviter les singularités qui se trouvent dans  $I^+$  lesquelles sont les zéros de la fonction de  $v$ ,  $H_v^{(1)}(\beta a)$ , c'est-à-dire les pôles de la fonction  $g_j$  définie en (2.5).

Comme (cf. Appendice A)

$$(2.8) \quad \lim_{|\nu_n| \rightarrow +\infty} \frac{f_0}{16V^2 \sqrt{rb}} \int_{C_n} \frac{\nu g_j(\nu) P_{\nu-1/2}(-\cos\theta) d\nu}{\cos \pi \nu} = 0,$$

$\Psi_t$  est égale à la série des résidus pris aux divers pôles de la fonction  $g_j(\nu)$  car l'intégrale  $J$  se réduit à :

$$(2.9) \quad \Psi_t = \frac{f_0}{16V^2 \sqrt{rb}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu g_j(\nu) P_{\nu-1/2}(-\cos\theta)}{\cos \pi \nu} d\nu.$$

Sur le contour  $D$  on a la relation :

$$\frac{1}{\cos \pi \nu} = 2e^{i\pi \nu} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{2im\pi \nu}$$

et (2.9) s'écrit :

$$(2.10) \quad \Psi_t(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(r, \theta)$$

avec :

$$(2.11) \quad \Psi_m(r, \theta) = \frac{(-1)^m f_0}{8V^2 \sqrt{rb}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu g_j(\nu, \beta a, \beta b, \beta r) P_{\nu-1/2}(-\cos\theta) e^{i\pi \nu(2m+1)} d\nu.$$

Puisque  $P_{\nu-1/2}(-\cos\theta) = (-1)^{\nu-1/2} P_{\nu-1/2}(\cos\theta)$  on a aussi :

$$(2.12) \quad \Psi_m(r, \theta) = \frac{(-1)^m f_0}{8V^2 \sqrt{rb}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu g_j(\nu) P_{\nu-1/2}(\cos\theta) e^{2im\pi \nu} d\nu.$$

Pour connaître  $\Psi_t$  il nous suffit de calculer les intégrales par la méthode des résidus. On trouve que les zéros en  $\nu$  de la fonction  $H_\nu^{(1)}(\beta a)$  sont donnés par [6] :

$$(2.13) \quad \nu_n(\beta a) = \beta a + \left(\frac{\beta a}{2}\right)^{1/3} x_n e^{i\pi/3} + O((\beta a)^{-1/3}),$$

où  $-x_n$  est le nième zéro de la fonction d'Airy d'argument  $x$ ; pour  $n$  assez grand on voit que :

$$\nu_n = (\beta a) + \frac{1}{2} [3\pi(n-1/4)]^{-2/3} x_n e^{i\pi/3} (\beta a)^{-1/3}, \quad n \gg 1.$$

Soit  $r_n$  la quantité :

$$r_n = - \left\{ \frac{H_\nu^{(2)}(\beta a)}{\frac{\partial H_\nu^{(1)}}{\partial \nu}(\beta a)} \right\}_{\nu = \nu_n}.$$

Pour  $\nu$  voisin de  $\beta a$  on utilise les approximations (5) de l'appendice C. Il convient aussi de tenir compte du Wronskien des fonctions d'Airy  $A_i(-x)$  et  $A_i(-xe^{2i\pi/3})$  pour obtenir la relation :

$$r_n = \frac{e^{-i\pi/6}}{2\pi} \left(\frac{\beta a}{2}\right)^{1/3} \frac{1}{[A_i'(-x_n)]^2},$$

où  $A'_i$  désigne la dérivée de la fonction d'Airy. Le calcul de (2.11) et de (2.12) conduit respectivement aux expressions:

$$(2.14) \quad \Psi_m(r, \theta) = \frac{(-1)^m f_0 i \pi}{4V^2 \sqrt{rb}} \sum_{n=1}^{\infty} v_n r_n H_{v_n}^{(1)}(\beta r) H_{v_n}^{(1)}(\beta b) P_{v_n-1/2}(-\cos\theta) e^{i(2m+1)\pi v_n},$$

$$(2.15) \quad \Psi_m(r, \theta) = \frac{(-1)^m f_0 i \pi}{4V^2 \sqrt{rb}} \sum_{n=1}^{\infty} v_n r_n H_{v_n}^{(1)}(\beta r) H_{v_n}^{(1)}(\beta b) P_{v_n-1/2}(\cos\theta) e^{2i\pi v_n}.$$

Aux fins d'expliciter les relations ci-dessus on se sert des formules (3) et (4) de l'appendice C qui nous conduisent à:

$$H_{v_n}^{(1)}(\beta b) H_{v_n}^{(1)}(\beta r) \sim \frac{2}{\pi \beta} [(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)]^{-1/4} \exp\{i\beta(r^2 - a^2)^{1/2} - i v_n \arccos \frac{a}{r} - i\pi/4\} \times \\ \times \exp\{i\beta(b^2 - a^2)^{1/2} - i v_n \arccos \frac{a}{b} - i\pi/4\}.$$

$$v_n r_n = \left(\frac{\beta a}{2}\right)^{1/3} \frac{\beta a e^{-i\pi/6}}{2\pi} [A'_i(-x_n)]^{-2}.$$

Il est alors aisé d'écrire (2.14) et (2.15) sous la forme:

$$\Psi_m(r, \theta) = \frac{(-1)^m f_0 (\beta a)^{1/3} e^{i\pi/3} 2^{1/6} a [(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)]^{-1/4}}{4\pi^{3/2} V^2 \sqrt{rb} \beta a \sin \theta} \exp\{i\beta[(r^2 - a^2)^{1/2} \\ + (b^2 - a^2)^{1/2}]\} \sum_{n=1}^{\infty} [A'_i(-x_n)]^{-2} \exp\left\{i v_n \left[ (2m+1)\pi - \theta - \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{a}{b} \right] + i\pi/4\right\},$$

$$\Psi_m(r, \theta) = \frac{(-1)^m f_0 (\beta a)^{1/3} e^{i\pi/3} 2^{1/6} a [(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)]^{-1/4}}{4\pi^{3/2} V^2 \sqrt{rb} \beta a \sin \theta} \exp\{i\beta(r^2 - a^2)^{1/2} \\ + (b^2 - a^2)^{1/2}\} \sum_{n=1}^{\infty} [A'_i(-x_n)]^{-2} \exp\left\{i v_n \left[ 2m\pi + \theta - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r} \right] - i\pi/4\right\}.$$

De ces deux dernières expressions on déduit sans difficulté:

$$(2.16) \quad \Psi_m(r, \theta) = B \exp\{i\beta[(r^2 - a^2)^{1/2} + (b^2 - a^2)^{1/2}]\} (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} [A'_i(-x_n)]^{-2} \times \\ \times e^{2i\pi v_n} \{\exp i(v_n \delta - \pi/4) + \exp i(v_n \gamma + \pi/4)\}$$



avec

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{f_0(\beta a)^{1/3} e^{i\pi/3} 2^{-5/6} a [(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)]^{-1/4}}{4\pi^{3/2} V^2 \sqrt{rb \beta a} \sin \theta}, \\
 \delta &= \theta - \ar \cos \frac{a}{b} - \ar \cos \frac{a}{r}, \\
 \gamma &= \pi - \theta - \ar \cos \frac{a}{b} - \ar \cos \frac{a}{r}.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Par anticipation sur le paragraphe suivant nous pouvons noter que (2.10), compte tenu de (2.16), représente la solution du problème posé quel que soit  $\theta$  si  $m \geq 1$  et pour  $|\theta| > \pi/2$  si  $m = 0$ . Les résultats ci-dessus, établis indépendamment des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques de Levy et Keller, sont en accord avec leur relation 26 p. 173 de [7] obtenue à l'aide d'un bilan d'énergie et d'une extension du principe de Fermat. Voyons à présent quelques traits particuliers se dégageant de (2.10) ainsi que son domaine de validité.

### 3. Domaine de validité, interprétation, zone "d'ombre"

Pour connaître le domaine de validité du développement auquel nous venons d'aboutir il convient d'examiner la convergence de ce dernier.

Puisque  $\nu_n$  a une partie imaginaire positive on voit que la partie réelle de  $i\nu_n \delta$  est négative si  $\delta$  est positif; ce qui a lieu si:

$$\theta > \ar \cos \frac{a}{b} + \ar \cos \frac{a}{r}.
 \tag{3.1}$$

Lorsque cette condition est satisfaite les termes de la série (2.16) décroissent exponentiellement. Dans tous les autres cas la solution est inacceptable. La comparaison de ce résultat à (2.6) justifie donc a postériori l'usage de la transformation de Watson.

Enfin, lorsque l'on remplace  $\nu_n$  par  $\beta a$ , on néglige les termes de l'ordre de  $(\beta a)^{1/3}$ . Par suite (2.16) n'est valable que si:

$$\beta(r^2 - a^2)^{1/2} \gg (\beta a)^{1/3} \quad \text{et} \quad \beta(b^2 - a^2)^{1/2} \gg (\beta a)^{1/3};$$

cet ensemble de conditions s'écrit encore:

$$(r - a) \gg a^{1/3} \beta^{-2/3} \quad \text{et} \quad (b - a) \gg a^{1/3} \beta^{-2/3}
 \tag{3.2}$$

Autrement dit, la solution proposée au paragraphe précédent est acceptable quel que soit  $m$ , si la source et "l'observateur" sont suffisamment loin de la sphère de rayon  $a$  d'après (3.2), et seulement dans la zone "d'ombre", si  $m = 0$  d'après (3.1).

On peut interpréter, en termes d'optique géométrique, la solution établie au paragraphe 2. Envisageons d'abord le cas simple  $m = 0$  qui fournit le premier élément  $\Psi_0$  du développement (2.10) soit:

$$\begin{aligned}
 \Psi_0(r, \theta) &= B \exp \{i\beta [(r^2 - a^2)^{1/2} + (b^2 - a^2)^{1/2}]\} \sum_{n=1}^{\infty} [A'_i(-x_n)]^{-2} \times \\
 &\quad \times \{e^{i(\nu_n + \pi/4)} + e^{i(\nu_n \delta - \pi/4)}\},
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

où l'on a posé:

$$B = \frac{f_0(\beta a)^{1/3} 2^{-5/6} e^{i\pi/3} a [(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)]^{-1/4}}{4\pi^{3/2} V^2 \sqrt{rb} \beta a \sin \theta},$$

$$(3.4) \quad \gamma = \pi - \theta - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r},$$

$$\delta = \theta - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r}.$$

Puisque  $\beta$ , l'inverse de la longueur d'onde, vaut  $\omega/V$ , il est commode pour l'avenir d'écrire (2.13) sous la forme:

$$(3.5)_1 \quad r_n = \frac{\omega a}{W_n} + i\chi_n,$$

$$(3.5)_2 \quad W_n = V[1 + (4a\beta)^{-2/3} x_n]^{-1},$$

$$(3.5)_3 \quad \chi_n = \frac{\omega a}{V} (4a\beta)^{-2/3} x_n \sqrt{3} > 0.$$

Les  $n^{\text{ièmes}}$  composants de  $\Psi_0$  ont pour phase:

$$(3.6) \quad \varphi_{n1}^0 = \omega \left\{ \left( \frac{r^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{b^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2} + \frac{a\delta}{W_n} \right\},$$

$$\varphi_{n2}^0 = \omega \left\{ \left( \frac{r^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{b^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2} + \frac{a\gamma}{W_n} \right\}.$$

Il est clair que  $\left( \frac{b^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2}$  correspond au temps mis par l'onde pour parcourir le trajet  $ST_1$  ou  $ST'_1$ , Fig. 5. De même, le temps  $\left( \frac{r^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2}$  correspond aux rayons  $T_2P$  ou  $T'_2P$

tandis que les termes  $a\delta/W_n$  ou  $\frac{a\gamma}{W_n}$  représentent les chemins  $T'_1T'_2$  ou  $T_1T_2$  parcourus sur la surface de la sphère de rayon  $a$  à la vitesse  $W_n$ . Il en résulte que les termes de phase  $\varphi_{n1}^0$  et  $\varphi_{n2}^0$  correspondent respectivement aux trajets  $ST'_1T'_2P$  et  $ST_1T_2P$ .

Ainsi le premier élément  $\Psi_0$  de la solution représente une diffraction des rayons issus de la source  $S$ . En outre, il convient de remarquer que les chemins  $T_1T_2$  et  $T'_1T'_2$  sont parcourus par une infinité d'ondes qui, ayant pris naissance aux points  $T_1$  et  $T'_1$ , possèdent les trois propriétés <sup>(1)</sup> suivantes:

a) Elles sont évanescentes car elles ont un facteur d'amplitude, à décroissance exponentielle, proportionnel soit à:

$$\exp(-\chi_n \delta) \text{ soit à } \exp(-\chi_n \gamma) \text{ d'après (3.3) et (3.5)}_3.$$

b) Elles sont dispersives puisque leur vitesse  $W_n$  dépend de la fréquence  $\omega$  d'après (3.5)<sub>2</sub>.

c) Elles se propagent toujours à une vitesse  $W_n$  inférieure <sup>(2)</sup> à celles des ondes SH incidentes qui leur ont donné naissance d'après (3.5)<sub>2</sub>.

<sup>(1)</sup> SCHOLTE, dans son étude sur les ondes  $P$ , donne seulement la première propriété (a) (cf. [13], p. 32) ce qui est inhérent à la méthode qu'il utilise.

<sup>(2)</sup> On est donc en présence d'ondes de surface d'après les caractères  $a$  et  $c$ .

Une analyse semblable peut être conduite lorsque  $m \geq 1$ . En effet, si nous écrivons (2.16) sous la forme:

$$(3.7) \quad \Psi_m(r, \theta) = (-1)^m e^{2im\pi n} \Psi_0,$$

il est clair que la phase des deux composants de  $\Psi_m$  est:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \varphi_{n1}^m &= \omega \left\{ \left( \frac{r^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{b^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2} + \frac{a\delta}{W_n} + m \frac{2\pi a}{W_n} \right\}, \\ \varphi_{n2}^m &= \omega \left\{ \left( \frac{r^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{b^2 - a^2}{V^2} \right)^{1/2} + \frac{\alpha\gamma}{W_n} + m \frac{2\pi a}{W_n} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi (3.8) nous montre que les termes  $\Psi_m$  correspondent à des rayons qui effectuent le trajet  $ST_1 T_2 P$  ou  $ST'_1 T'_2 P$  (Fig. 5) en ayant fait  $m$  fois le tour du noyau <sup>(3)</sup>. Il y a atté-

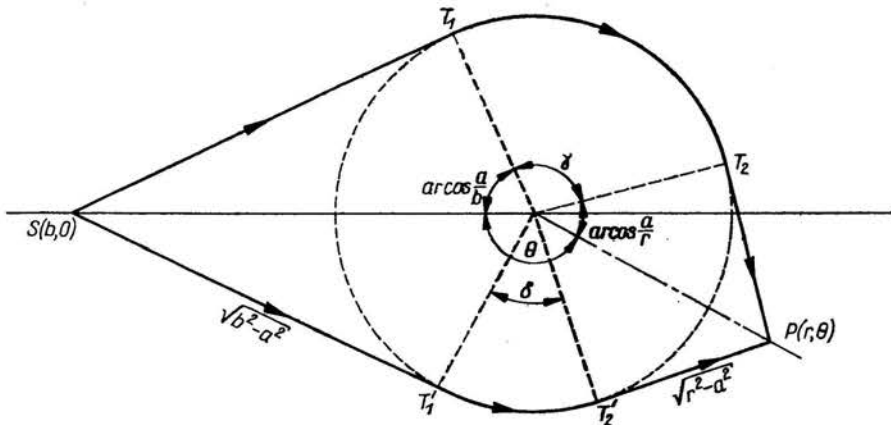


FIG. 5.

nuation et dispersion des ondes faisant  $m$  fois le tour du noyau et le trajet  $T'_1 T'_2$  ou  $T_1 T_2$  est effectué à une vitesse  $W_n < V$ . On est donc en présence d'ondes de surface. Enfin, si nous remarquons que pour  $n$  fixé, la série en  $m$  est une série géométrique de raison inférieure à 1 en module, on peut alors écrire la solution  $\Psi$  sous la forme:

$$(3.9) \quad \Psi(r, \theta) = B \exp \{ i\beta [(r^2 - a^2)^{1/2} + (b^2 - a^2)^{1/2}] \} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(\nu_n \delta - \pi/4)} + e^{i(\nu_n \gamma + \pi/4)}}{[A'_1(-x_n)]^2 (1 + e^{2i\pi\nu_n})}.$$

Cette dernière expression de  $\Psi$  est analogue à la relation (2.6), p. 173 donnée par LEVY et KELLER [7] dans le cas de la diffraction des ondes électromagnétiques par une sphère conductrice.

<sup>(3)</sup> A notre connaissance, une interprétation de même nature a été donnée pour la première fois à propos d'ondes électromagnétiques par LEVY et KELLER (cf. [7], p. 173).

#### 4. Solution en avant de l'obstacle

Nous avons remarqué que la solution obtenue au 2ème paragraphe est en défaut en avant de l'obstacle si  $m = 0$ . Nous adaptons la méthode de Nussenzweig à notre problème pour déterminer dans ce cas le champ diffracté. Cette méthode a l'avantage d'éviter de recalculer tous les résidus et permet en outre de mieux voir le lien entre la zone "d'ombre" et la zone "éclairée". Nous ne gardons que les grandes étapes de cette technique dont les détails peuvent se déduire facilement de ceux donnés en [10], pp. 41 à 46.

Nous partons de la décomposition:

$$(4.1) \quad P_{\nu-1/2}(\cos\theta) = Q_{\nu-1/2}^{(1)}(\cos\theta) + Q_{\nu-1/2}^{(2)}(\cos\theta).$$

Les résidus contenant  $\gamma$  restent rapidement convergents dans la zone "éclairée" pourvu que, d'après (2.17),

$$(4.2) \quad (\beta a)^{1/3}(\theta + \theta_0) \gg 1,$$

$$(4.3) \quad \theta_0 = \arccos \frac{a}{b} + \arccos \frac{a}{r},$$

ce que nous admettrons; faisant  $m = 0$  dans (2.12) il vient:

$$(4.4) \quad \Psi_0 = \frac{f_0}{8V^2 \sqrt{rb}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu g_j(\nu, \beta a, \beta b, \beta r) P_{\nu-1/2}(\cos\theta) d\nu.$$

En introduisant (4.1) dans (4.4) il en résulte deux intégrales; l'une  $\Psi_0^{(1)}$  contient  $Q_{\nu-1/2}^{(1)}$ , l'autre  $\Psi_0^{(2)}$  contient  $Q_{\nu-1/2}^{(2)}$ .

Nous considérons d'abord l'intégrale  $\Psi_0^{(1)}$ . Etant donné que le premier élément de  $g_1$  ou de  $g_2$  (cf. 2.5) n'a pas de pôle dans  $I^+$  ces termes fournissent une contribution nulle à l'intégrale de sorte qu'il reste à évaluer par la méthode du col la quantité:

$$(4.5) \quad \Psi_0^{(1)} = - \frac{f_0}{8V^2 \sqrt{rb}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(\beta r) H_{\nu}^{(1)}(\beta b) \frac{H_{\nu}^{(2)}(\beta a)}{H_{\nu}^{(1)}(\beta a)} Q_{\nu-1/2}^{(1)}(\cos\theta) d\nu.$$

On constate, au voisinage de  $\beta a$ , la présence de deux cols d'égale importance et la contribution de chacun d'eux doit être prise en compte. Celle relative à celui qui est situé à droite de  $\beta a$  s'obtient à l'aide des développements asymptotiques de l'appendice A qui montrent en particulier que

$$H_{\nu}^2(x)/H_{\nu}^1(x) \sim -1.$$

Le col est défini par:

$$(4.6) \quad \nu = \beta r \sin W_1 = \beta b \sin W_2 \quad \text{avec} \quad W_1 + W_2 + \theta = \pi,$$

d'où la première valeur:

$$(4.7) \quad \Psi_{\text{inc}}^{(1)} = \frac{f_0}{4\pi V^2 R} e^{i\beta R}, \quad R = r \cos W_1 - b \cos W_2.$$

C'est donc le champ "incident" en  $P$  (cf. Fig. 6) que l'on retrouve par ce premier calcul.

Le second calcul pour  $\Psi_0^{(1)}$  est relatif au deuxième col situé entre 0 et  $\beta a$ ; les approximations de l'appendice A nous conduisent alors à :

$$H_v^{(2)}(x)/H_v^{(1)}(x) \sim \exp \left\{ -2i \left[ (x^2 - v^2)^{1/2} - v \arccos \frac{v}{x} + \pi/4 \right] \right\}.$$

Le col est déterminé par :

$$(4.8) \quad v = \beta r \sin W_1 = \beta b \sin W_2 = \beta a \sin W_3 \quad \text{avec} \quad W_1 + W_2 - 2W_3 + \theta = 0$$

et l'évaluation de (4.5) conduit à :

$$(4.9) \quad \Psi_{\text{réf}}^{(1)} \sim - \frac{af_0 \sqrt{\sin W_3 \cos W_3}}{4\pi V^2 \sqrt{rb \sin \theta}} \frac{\exp \{i\beta(D_1 + D_2)\}}{(D_1 r \cos W_1 + D_2 b \cos W_2)^{1/2}},$$

où l'on a posé :

$$D_1 = b \cos W_2 - a \cos W_3, \quad D_2 = r \cos W_1 - a \cos W_3.$$

Le résultat (4.9) s'interprète aisément avec la Fig. 6 comme des rayons réfléchis ayant parcourus un chemin du type STP. On note que (4.8) est l'analogue pour les ondes SH, des lois de Descartes de l'optique géométrique.

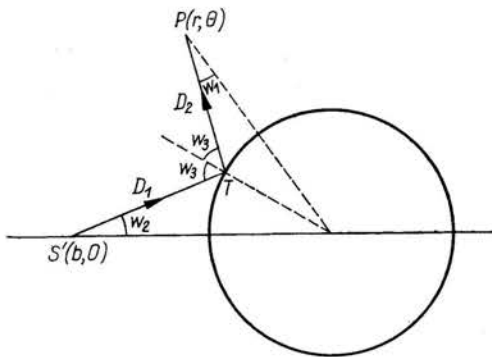


FIG. 6.

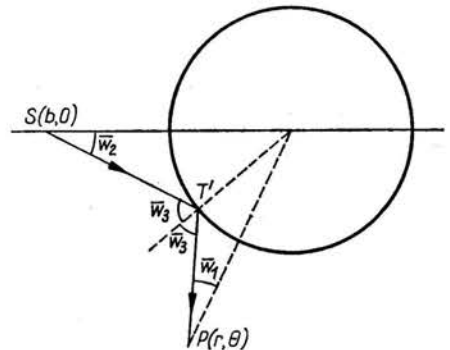


FIG. 7.

En faisant pour  $\Psi_0^{(2)}$  les mêmes calculs que ceux effectués pour  $\Psi_0^{(1)}$  on trouve la première contribution à  $\Psi_0^{(2)}$  soit :

$$(4.10) \quad \Psi_{\text{inc}}^{(2)} \sim \frac{f_0}{4\pi V^2 R_1} e^{i\beta R_1}, \quad R_1 = r \cos \bar{W}_1 - b \cos \bar{W}_2,$$

provenant du col défini par :

$$v = \beta r \sin \bar{W}_1 = \beta b \sin \bar{W}_2 \quad \text{avec} \quad \bar{W}_1 + \bar{W}_2 - \theta = \pi.$$

La deuxième contribution à  $\Psi_0^{(2)}$  est :

$$(4.11) \quad \Psi_{\text{réf}}^{(2)} \sim \frac{af_0}{4\pi V^2 \sqrt{rb \sin \theta}} \left[ \frac{\sin \bar{W}_3 \cos \bar{W}_3}{\bar{D}_1 r \cos \bar{W}_1 + \bar{D}_2 b \cos \bar{W}_2} \right]^{1/2} e^{i\beta(\bar{D}_1 + \bar{D}_2)}.$$

avec

$$\bar{D}_1 = b \cos \bar{W}_2 - a \cos \bar{W}_3, \quad \bar{D}_2 = r \cos \bar{W}_1 - a \cos \bar{W}_3.$$

Cette dernière approximation étant afférente au col défini par:

$$\nu = \beta r \sin \bar{W}_1 = \beta b \sin \bar{W}_2 = \beta a \sin \bar{W}_3 \quad \text{tel que} \quad \bar{W}_1 + \bar{W}_2 - 2\bar{W}_3 - \theta = 0 \quad (\text{Fig. 7}).$$

Ainsi compte tenu de l'étude ci-dessus<sup>(\*)</sup> la solution complète de notre problème s'écrit à l'aide de (2.10), (2.16), (4.7), (4.9), (4.10) et (4.11); sous la forme:

$$\begin{aligned} \Psi = & \Psi_{\text{ino}}^{(1)} + \Psi_{\text{réf}}^{(1)} + \Psi_{\text{ino}}^{(2)} + \Psi_{\text{réf}}^{(2)} \\ & + B \exp \{ i\beta [(r^2 - a^2)^{1/2} + (b^2 - a^2)^{1/2}] \} \left\{ e^{i\pi/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\nu_n \delta}}{[A'_i(-x_n)]^2} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(\nu_n \delta - \pi/4)} + e^{i(\nu_n \gamma + \pi/4)}}{[A'_i(-x_n)]^2 (1 + e^{2i\pi\nu_n})} \right\} \end{aligned}$$

où le coefficient  $B$  est celui défini en (3.4).

## 5. Conclusion

Nous avons étudié les effets d'une inclusion sphérique parfaitement rigide sur la propagation d'ondes sphériques SH.

Dans un premier temps, la mise en oeuvre de la transformation de Watson a permis de donner la solution de ce problème sous la forme d'une série qui converge exponentiellement vers zéro lorsque  $|\theta| > \pi/2$  (zone d'ombre) pour le premier terme et quel que soit  $\theta$  pour les autres termes.

Dans une seconde étape, on a interprété en termes d'optique géométrique les résultats obtenus au deuxième paragraphe. Ceux-ci ne sont valables que si la source et "l'observateur" sont loin de la sphère diffractante.

L'étude particulière faite pour atteindre la solution en avant de l'obstacle (zone éclairée) a montré que les ondes SH suivent en première approximation les lois de Descartes de l'optique géométrique comme les ondes  $P$ .

Enfin il se dégage de cette étude que l'arrivée d'ondes SH sur la cavité sphérique donne naissance à une infinité d'ondes évanescentes, dispersives qui se propagent sur la surface de l'inclusion et font  $m$  fois le tour de celle-ci à une vitesse  $W_n$  inférieure à celle des ondes SH incidentes.

## Appendice A

On pose:  $\beta a = x$ ,  $\beta b = y$ ,  $\beta r = z$ .

On utilise les identités:

$$(1) \quad H_0^{(1)}(x) H_0^{(2)}(y) - H_0^{(1)}(y) H_0^{(2)}(x) = 2 \{ J_0(x) H_0^{(2)}(y) - H_0^{(2)}(x) J_0(y) \},$$

$$(2) \quad H_0^{(1)}(x) H_0^{(2)}(y) - H_0^{(1)}(y) H_0^{(2)}(x) = 2 \{ J_0(y) H_0^{(1)}(x) - H_0^{(1)}(y) J_0(x) \}.$$

<sup>(\*)</sup> Les résultats (4.9) et (4.11) sont analogues à ceux donnés par SCHOLTE pour les ondes  $P$  (cf. [13] relation (10), p. 27).

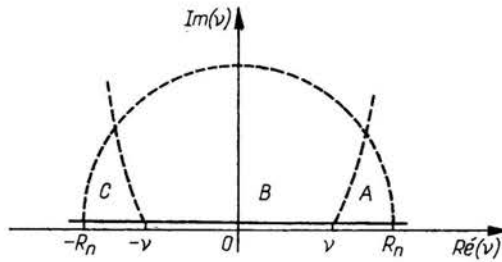


FIG. 8.

**I. Dans la zone A**

On utilise (1) pour mettre  $g_1$  sous la forme:

$$(3) \quad g_1 = 2 \frac{H_v^{(1)}(y)}{H_v^{(1)}(x)} \{J_v(x) H_v^{(2)}(z) - H_v^{(2)}(x) J_v(z)\} \text{ avec } x < z < y.$$

Pour  $z$  et  $v$  grands, on utilise les valeurs asymptotiques des fonctions de Hankel et de Bessel (cf. appendice B); d'où:

$$g_1 \sim iA^2 e^{\alpha(x)-\alpha(y)} \{e^{\alpha(x)-\alpha(z)} - e^{\alpha(z)-\alpha(x)}\},$$

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi v} e^{v \log \frac{x}{y}} \{e^{v \log \frac{x}{z}} - e^{-v \log \frac{x}{z}}\};$$

or,  $x < z < y \Rightarrow \frac{x}{z} < 1$ , comme dans la région A  $\text{Re}(v) > 0$ , l'accolade se comporte comme:

$$e^{-v \log x/z}$$

d'où:

$$g_1 \sim -\frac{2i}{\pi v} e^{v \log z/y}$$

or  $z/y < 1 \Rightarrow g \rightarrow 0$  exponentiellement quand  $|v| \rightarrow +\infty$ .

**II. Dans la zone B  $\text{Re}(v) > 0$**

On peut de même utiliser la forme (3) d'où:

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi v} e^{\alpha(y)-\alpha(x)} \{e^{\alpha(x)-\alpha(z)} - e^{-\alpha(x)+\alpha(z)}\} \Rightarrow$$

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi v} e^{v \log y/x} \{e^{v \log x/z} - e^{-v \log x/z}\} \quad x/z < 1,$$

$g_1$ , quand  $|v| \rightarrow +\infty$ , se comporte comme:

$$\frac{2i}{\pi v} e^{v \log y/z}, \quad \text{Re}(v) > 0.$$

III. Dans les zones  $B$   $\text{Ré}(\nu) < 0$  et  $C$

On utilise la formule (2), d'où:

$$g_1 = 2 \frac{H_\nu^{(1)}(y)}{H_\nu^{(1)}(x)} \{J_\nu(x)H_\nu^{(1)}(z) - J_\nu(z)H_\nu^{(1)}(x)\} \quad \text{avec} \quad x < z < y.$$

On établit (cf. appendice C)

$$J_\nu(y) = e^{i\pi\nu} J_{-\nu}(y) - e^{-i\pi\nu} \sin i\pi\nu H_\nu^{(1)}(y)$$

d'où:

$$g_1 = 2e^{i\pi\nu} \{J_{-\nu}(x)H_\nu^{(1)}(z) - J_{-\nu}(z)H_\nu^{(1)}(x)\} \frac{H_\nu^{(1)}(y)}{H_\nu^{(1)}(x)},$$

or dans ces zones on a:

$$J_{-\nu} = i \frac{A}{2} e^{-(a+i\pi\nu)} \quad \text{et} \quad H_\nu^{(1)} = Ae^x$$

d'où:

$$g_1 = \frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \log y/x} \{e^{-\nu \log x/z} - e^{\nu \log x/z}\}$$

$$\text{Ré}(\nu) < 0 \text{ et } y/z < 1 \Rightarrow g_1 \sim -\frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \log y/z}$$

donc  $g_1$ , quand  $|\nu| \rightarrow +\infty$ , converge exponentiellement vers zéro dans les régions  $B$   $\text{Ré}(\nu) < 0$  et  $C$ .

En résumé, on a les comportements ci-après pour  $g_1$ :

dans  $A$

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \log z/y}, \quad z/y < 1 \text{ et } \text{Ré}(\nu) > 0;$$

dans  $B$

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \log y/z}, \quad y/z < 1 \text{ et } \text{Ré}(\nu) > 0,$$

$$g_1 \sim -\frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \log y/z}, \quad y/z < 1 \text{ et } \text{Ré}(\nu) < 0;$$

dans  $C$

$$g_1 \sim -\frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \log y/z}, \quad y/z < 1 \text{ et } \text{Ré}(\nu) < 0.$$

Ces résultats permettent d'établir sans difficulté la relation (2.8) pour la fonction  $g_1$ . Il en est de même pour la fonction  $g_2$ .



### Appendice B

Les résultats que l'on trouve dans Watson p. 262 ne sont pas très bien adaptés à nos calculs. Partant des représentations intégrales des fonctions de Hankel et de Bessel on établit, en utilisant la méthode du col, les comportements asymptotiques ci-après pour  $z$  et  $\nu$  grands :

quand  $|\nu| \rightarrow +\infty$ ;  $A = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}$ ,  $e^{\alpha(z)} = \left(\frac{ze}{2\nu}\right)^\nu$ ,  $B = \frac{\sqrt{2\nu}}{z\sqrt{\pi}}$ .

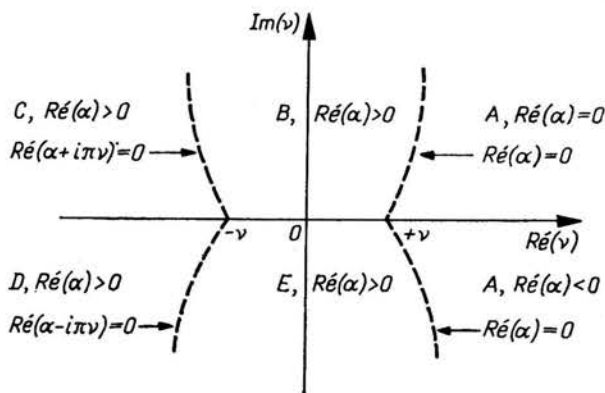


FIG. 9.

Dans A

$$H_\nu^{(1)}(z) = -iAe^{-\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = iAe^{-\alpha(z)}$$

$$J_\nu(z) = \frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{\prime(1)}(z) = iBe^{\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{\prime(2)}(z) = -iBe^{\alpha(z)}$$

Dans B

$$H_\nu^{(1)}(z) = -Ae^{\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = iAe^{-\alpha(z)}$$

$$J_\nu(z) = \frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{\prime(1)}(z) = Be^{\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{\prime(2)}(z) = -iBe^{-\alpha(z)}$$

$$J_{-\nu}(z) = i\frac{A}{2} e^{-[\alpha(z)+i\pi\nu]}$$

Dans C

$$H_\nu^{(1)}(z) = Ae^{\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -Ae^{\alpha(z)+2i\pi\nu}$$

$$J_\nu(z) = \frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{\prime(1)}(z) = Be^{\alpha(z)}$$

$$J_{-\nu}(z) = i\frac{A}{2} e^{-[\alpha(z)+i\pi\nu]}$$

$$H_\nu^{\prime(2)}(z) = -Be^{\alpha(z)+2i\pi\nu}$$

Dans D

$$H_\nu^{(1)}(z) = -Ae^{\alpha(z)-2i\pi\nu}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = Ae^{\alpha(z)}$$

$$J_\nu(z) = \frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$$

$$H_\nu^{\prime(1)}(z) = -Be^{\alpha(z)-2i\pi\nu}$$

$$H_\nu^{\prime(2)}(z) = Be^{\alpha(z)}$$

$$J_{-\nu}(z) = -i\frac{A}{2} e^{-[\alpha(z)-i\pi\nu]}$$

Dans  $E$

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = -iAe^{-\alpha(z)}, \quad J_{\nu}(z) = \frac{A}{2} e^{\alpha(z)}, \quad H_{\nu}^{(1)}(z) = iBe^{-\alpha(z)},$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = Ae^{\alpha(z)}, \quad J_{-\nu}(z) = -i\frac{A}{2} e^{-[\alpha(z)-i\pi\nu]}, \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = Be^{\alpha(z)}.$$

## Appendice C

On a utilisé les relations

$$(1) \quad H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}(x); \quad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(x),$$

$$(2) \quad P_{-\nu-1/2}(\cos\theta) = P_{\nu-1/2}(\cos\theta),$$

cf. ROBIN tome 2, p. 240, formule 40.

$$(3) \quad P_{\nu-1/2}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sin\theta}} e^{i(\nu\theta-\pi/4)} + O(1/\nu),$$

cf. ΡΕΠΙΑΥ, p. 145.

$$Q_{\nu-1/2}^{(1)}(\cos\theta) = \frac{\exp\{-i(\nu\theta-\pi/4)\}}{\sqrt{2\pi\nu\sin\theta}}; \quad Q_{\nu-1/2}^{(2)}(\cos\theta) = \frac{\exp\{i(\nu\theta-\pi/4)\}}{\sqrt{2\pi\nu\sin\theta}}.$$

cf. [12], p. 89.

$$(4) \quad H_{\nu}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x^2 - \nu^2)^{-1/4} \exp\{i[(x^2 - \nu^2)^{1/2} - \nu \arccos \frac{\nu}{x} - \pi/4]\},$$

$$(5) \quad H_{\nu}^{(1)}\left(\nu - x e^{i\pi/3} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3}\right) = 2e^{-i\pi/3} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3} A_1(-x) + O(1/\nu),$$

$$(6) \quad H_{\nu}^{(2)}\left(\nu - x e^{i\pi/3} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3}\right) = 2e^{i\pi/3} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3} A_1(-x e^{2i\pi/3}) + O(1/\nu),$$

les trois premiers zéros de la fonction d'Airy  $A_1(-x)$  sont:

$$x_1 = 2,33811, \quad x_2 = 4,08795, \quad x_3 = 5,52056;$$

d'une manière générale tous les  $x_n$  sont positifs (cf. V.A. FOCK, Electromagnetic Waves, vol. 1, p. 384, 1965).

On a:

$$(7) \quad 2J_{\nu}(y) = H_{\nu}^{(1)}(y) + H_{\nu}^{(2)}(y), \quad 2J_{-\nu}(y) = H_{-\nu}^{(1)}(y) + H_{-\nu}^{(2)}(y)$$

$$(8) \quad \Rightarrow 2J_{-\nu}(y) = e^{i\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}(y) + e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(y);$$

avec (7) on remplace  $H_{\nu}^{(1)}$  par  $H_{\nu}^{(2)}$  d'où:

$$(9) \quad \begin{aligned} 2J_{-\nu}(y) &= e^{i\pi\nu}[2J_{\nu}(y) - H_{\nu}^{(2)}(y)] + e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(y), \\ 2J_{-\nu}(y) &= e^{-i\pi\nu}[2J_{\nu}(y) - H_{\nu}^{(1)}(y)] + e^{i\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}(y), \end{aligned}$$

d'où:

$$J_{-,v}(y) = e^{i\pi v} J_{,v}(y) - H_v^{(2)}(y) \sin i\pi v,$$

$$J_{-,v}(y) = J_{,v}(y) e^{-i\pi v} + H_v^{(1)}(y) \sin i\pi v$$

et ainsi:

$$(10) \quad J_{,v}(y) = e^{i\pi v} J_{-,v}(y) - e^{-i\pi v} \sin i\pi v H_v^{(1)}(y),$$

$$(11) \quad J_{,v}(y) = e^{-i\pi v} J_{-,v}(y) + e^{i\pi v} \sin i\pi v H_v^{(2)}(y).$$

## Bibliographie

1. J. H. ANSELL, *Geoph. J. R. Astr. Soc.*, **32**, 95-117, 1973.
2. H. BREMMER, *Terrestrial radio waves. Theory of propagation*, Elsevier Publ. Comp., Amsterdam-New York 1949.
3. R. BURRIDGE, L. KNOPOFF, *B. S. S. A.*, **54**, 6, 1875, 1888, 1964.
4. J. A. HUDSON, *Geoph. J. R. Astr. Soc.*, **18**, 233, 249, 1969.
5. N. JOBERT, *Ann. de Geoph.*, **2**, 1965.
6. J. B. KELLER, S. I. RUBINOW, M. GOLDSTEIN, *J. of Math. Phys.*, **4**, 6, 829, 832, 1963.
7. B. R. LEVY, J. B. KELLER, *Com. Pure Appl. Math.*, **12**, 159, 209, 1959.
8. MORSE and FESHBACH, *Methods of theoretical physics*, 1 et 2, 1953.
9. M. NAGASE, *J. of Phys. Soc. of JAPAN*, **11**, 3, 279, 301, 1956.
10. H. M. NUSSENZVEIG, *Annals of Physics*, **34**, 23, 95, 1965.
11. G. PETIAU, *La théorie des fonctions de Bessel*, C.N.R.S., Paris 1955.
12. L. ROBIN, *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales*, Gauthier Villars, Paris 1957.
13. J. G. J. SCHOLTE, *N. E. D. Met. Inst.*, Paper No 65, 5, 55, 1956.
14. SINGH and BEN MENAHEM, *Geoph. J. R. Astr. Soc.*, **17**, 3, 333, 350, 1969.
15. TA. LIANG TENG and RICHARDS, *J. of Geoph. Res.*, **74**, 6, 1537, 1555, 1969.
16. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*, University Press, Cambridge 1922.

THE CLASSICAL

INSTITUT DE MECANIQUE THEORIQUE ET APPLIQUEE  
UNIVERSITE DE PARIS VI  
4, PLACE JUSSIEU -75230 PARIS -CEDEX 05

Reçu 20, 2, 1974.