

Sur l'écoulement de Couette instationnaire d'un fluide de Huilgol

RAYMONDE DROUOT (PARIS)

ON CONSIDÈRE le modèle introduit par HUILGOL pour représenter les fluides incompressibles du deuxième ordre. Ce modèle est défini à partir de dérivées objectives du tenseur gauche de Cauchy-Green et il ne présente pas le caractère instable des fluides du deuxième ordre classique décrit par COLEMAN, DUFFIN-MIZEL pour l'écoulement de glissement simple. On montre que la solution de l'écoulement instationnaire d'un tel fluide occupant le domaine compris entre deux cylindres coaxiaux, lorsqu'un cylindre est brusquement mis en rotation uniforme, existe, qu'elle est régulière et stable. Ces résultats complètent les travaux de TING.

Rozważa się model wprowadzony przez Huilgola dla opisu płynów nieściśliwych drugiego rodzaju. Model ten jest określony w oparciu o pojęcie pochodnych obiektywnych lewego tensora Cauchy'ego-Greena i nie opisuje niestalej charakterystyki klasycznych płynów drugiego rodzaju, podanej przez COLEMANA, DUFFINA i MIZELA dla przepływu z prostym poślizgiem. Pokazano, że istnieje rozwiązanie niestacjonarnego przepływu takiego płynu w obszarze zawartym między dwoma cylindrami współosiowymi, gdy jeden z cylindrów jest raptownie wprawiony w równomierny ruch obrotowy, oraz że to rozwiązanie jest regularne i stabilne. Wyniki te uzupełniają prace TINGA.

Обсуждается модель введенная Гюйголем для описания несжимаемых жидкостей второго рода. Эта модель определена опираясь на понятия объективных производных левого тензора Коши-Грина и она не описывает непостоянной характеристики классических жидкостей второго рода, приведенной Колеманом, Даффином и Мизелем для течения с простым скольжением. Показано, что существует решение нестационарного течения такой жидкости в области содержащейся между двумя соосными цилиндрами, когда один из цилиндров внезапно приводится в равномерное вращательное движение, а также, что это решение регулярно и стабильно. Эти результаты пополняют работы Тинга.

Introduction

DANS cet article, nous reprenons le modèle proposé par HUILGOL [1] pour un fluide incompressible du deuxième ordre. HUILGOL a montré que les équations du mouvement de ces fluides, pour les écoulements de glissements simple et de Poiseuille non stationnaires, entraînent dans le cadre des travaux de TING [2]. TING obtenait des solutions très régulières, stables au sens de COLEMAN, DUFFIN et MIZEL [3], pour ces écoulements, en adoptant la loi de comportement des fluides du deuxième ordre classique, avec l'hypothèse suivante, rejetée actuellement : le coefficient du deuxième tenseur de Rivlin-Ericksen est positif. Les fluides représentés par le modèle de HUILGOL ne présentent pas en particulier l'instabilité décrite par COLEMAN-DUFFIN-MIZEL [3] pour les fluides du deuxième ordre classique. Cette étude a pour but, d'une part de préciser la loi de comportement en introduisant

d'une autre façon le tenseur B_2 de HUILGOL, et d'autre part de compléter les résultats de TING en considérant l'écoulement de Couette instationnaire pour le fluide HUILGOL. On montrera dans ce cas l'existence, l'unicité, la régularité de la solution pour des conditions initiales et aux limites moins régulières que celles envisagées par TING.

1. Définition du fluide de Huilgol—introduction du tenseur $B_{(2)}(t)$

La loi proposée par HUILGOL s'apparente à celle des fluides du deuxième ordre classique dont l'expression est la suivante :

$$(1.1) \quad S + pI = \eta_0 A_{(1)} + \mu A_{(1)}^2 + \gamma A_{(2)}$$

où S désigne le tenseur des contraintes, $A_{(1)}$ et $A_{(2)}$ sont les premiers et deuxièmes tenseurs de Rivlin-Ericksen, η_0 , μ et γ sont des constantes; η_0 étant supposé positif et γ négatif. En effet cette loi a pour expression:

$$(1.2) \quad S + pI = \eta_0 A_{(1)} + \mu A_{(1)}^2 + \nu B_{(2)}$$

dans laquelle $B_{(2)}$ est un nouveau tenseur, η_0 , μ et ν sont des constantes vérifiant la condition essentielle η_0 et ν positives. Le tenseur B_2 est une dérivée seconde objective du tenseur gauche de Cauchy-Green, soit:

$$B_t(\tau) = F_t(\tau)F_t^T(\tau)$$

où $F_t(\tau)$ désigne le gradient de déformation relative. La dérivation par rapport à τ n'étant pas objective, on introduit le tenseur

$$(1.3) \quad \bar{B}_t(\tau) = \bar{p}_t^1(\tau)B_t(\tau)P_t(\tau)$$

où $P_t(\tau)$ est un tenseur qui dépend de t et τ tel que $P_t(t) = I$ (I tenseur unité). De plus, on supposera que lors d'un changement de référentiel $P_t(\tau)$ se transforme de la façon suivante:

$$P_t^*(\tau) = Q(\tau)P_t(\tau)Q^T(t);$$

\bar{B}_t représente le transporté de B_t dans un repère de référence lié à l'instant t , repère indépendant de τ . Les dérivées par rapport à τ de $\bar{B}_t(\tau)$ sont alors objectives et les tenseurs définis par:

$$(1.4) \quad \left. (-1)^n \frac{d^n \bar{B}_t(\tau)}{d\tau^n} \right]_{\tau=t} \text{ sont objectifs.}$$

On obtient alors pour expression des deux premières dérivées:

$$(1.5) \quad \left. -\frac{d\bar{B}_t(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=t} = -A_{(1)},$$

$$(1.6) \quad \left. \frac{d^2 \bar{B}_t(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=t} = 2\dot{P}_t^{-1}(t)A_{(1)} + 2A_{(1)}\dot{P}_t(t) + A_{(2)} + 2LL^T - 2L^T L,$$

où

$$\dot{P}_t(t) = \left. \frac{dP_t(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=t}, \quad L = \left. \frac{dF_t(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=t}.$$

L désigne le tenseur gradient des vitesses. En particulier si l'on choisit pour $P_t(\tau)$ $R_t(\tau)$, $R_t(\tau)$ désignant le tenseur de rotation, ces dérivées donnent les tenseurs de Rivlin-Ericksen ou des combinaisons de ces derniers.

Dans l'article de HUILGOL [1] $P_t(\tau)$ désigne une transformation orthogonale ou non qui fait passer d'une base définie à l'instant τ à une base définie à l'instant t . Si $P_t(\tau)$ est orthogonal on retrouve les formules données par Huilgol (2.17) et (2.18).

$$(1.7) \quad A_{(1)} = -B_{(1)},$$

$$(1.8) \quad B_{(2)} = A_{(2)} + 2LL^T - 2L^TL + 2A_{(1)}\dot{P}_t - 2\dot{P}_t A_{(1)}.$$

L'exemple qui va suivre permettra d'expliciter les quantités \dot{P}_t et $B_{(2)}$.

2. Écoulement de Couette non stationnaire

Equations du mouvement. Formulation du problème

On utilisera par la suite les coordonnées r, θ, z , e_r, e_θ, e_z étant les vecteurs unitaires de la base naturelle et on supposera le champ des vitesses de la forme :

$$(2.1) \quad \mathbf{V} = r\omega(r, t)\mathbf{e}_\theta.$$

L'équation de continuité est immédiatement vérifiée. Les matrices qui représentent les divers tenseurs intervenant dans la loi de comportement ont les expressions suivantes :

$$(2.2) \quad A_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & r \frac{\partial \omega}{\partial r} & 0 \\ r \frac{\partial \omega}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(2.3) \quad A_{(1)}^2 = \begin{bmatrix} r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(2.4) \quad B_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & r \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial r} & 0 \\ r \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial r} & 2r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La quantité $\dot{P}_t(t)$ qui intervient dans le calcul de $B_{(2)}$ s'écrit alors :

$$(2.5) \quad \dot{P}_t = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut remarquer que, dans ce cas, $P_t(\tau)$ représente la transformation orthogonale faisant passer de la base orthogonale, e_r, e_θ, e_z en le point M occupé par la particule à l'instant τ , à la même base en le point M' occupé par la même particule à l'instant t .

La relation (1.2) détermine les composantes du tenseur des contraintes, soit

$$(2.6) \quad \begin{aligned} S_{11} + p &= \mu r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2, & S_{22} + p &= \mu r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + 2\nu r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2, \\ S_{33} + p &= 0, & S_{12} &= \eta_0 r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \nu r \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial r}, & S_{13} &= S_{23} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on suppose que les forces volumiques sont négligeables, les équations du mouvement se réduisent à :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} S_{11} + \frac{1}{r} (S_{11} - S_{22}) - \frac{\partial p}{\partial r} &= -\rho r \omega^2, \\ r \frac{\partial}{\partial r} S_{12} + 2S_{12} - \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \rho r^2 \frac{\partial \omega}{\partial t}, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

On peut remarquer que la symétrie de révolution de l'écoulement considéré implique $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ de sorte que :

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial r} [r^2 S_{12}] = \rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

L'utilisation combinée de (2.6) et de la relation précédente permet d'explicitier l'équation vérifiée par ω soit :

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta_0 r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} + \nu r^3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial r} \right] = \rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Remarque. Le tenseur des contraintes, pour ce même mouvement et pour un fluide du deuxième ordre (MARKOVITZ-COLEMAN [4]) a pour expression

$$(2.10) \quad \begin{aligned} S_{11} + \varrho &= \mu r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + 2\gamma r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2, & S_{22} + \varrho &= \mu r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2, \\ S_{33} + \varrho &= 0, & S_{12} &= \eta_0 r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \gamma r \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial r}, & S_{13} &= S_{23} = 0. \end{aligned}$$

La fonction ω vérifie une équation analogue à (2.9) où il convient de remplacer ν par γ , γ étant négatif. On se propose d'étudier les solutions de (2.9) qui vérifient certaines conditions initiales et aux limites données. On supposera que le fluide occupe le domaine compris entre deux cylindres coaxiaux indéfinis de rayons r_1 et r_2 avec $r_2 > r_1$, qu'initialement le fluide est au repos. A partir de l'instant initial le cylindre extérieur est animé d'une rotation uniforme Ω , tandis que le cylindre intérieur est maintenu fixe.

Le problème ainsi posé, est formulé ci-après :

$$\begin{aligned} \varrho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta_0 r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} + \nu r^3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial r} \right], \quad \eta_0 > 0, \nu > 0, \\ \text{(I)} \quad t > 0, \quad \omega(r_1, t) &= 0 \quad \omega(r_2, t) = \Omega, \\ t = 0, \quad \omega(r, t) &= 0 \quad \text{pour } r \in [r_1, r_2]. \end{aligned}$$

L'équation (2.9) est une équation aux dérivées partielles, linéaire et le problème (I) est complètement équivalent au problème (I') obtenu en faisant le changement de fonction suivant :

$$(2.11) \quad \omega(r, t) = \omega^0(r, t) + \omega^1(r)$$

où $\omega^1(r)$ est la solution stationnaire du problème correspondant

$$(2.12) \quad \omega^1(r) = \frac{\Omega r_2^2}{r^2} \frac{(r^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)},$$

$$\begin{aligned} \varrho r^3 \frac{\partial \omega^0}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta_0 r^3 \frac{\partial \omega^0}{\partial r} + \nu r^3 \frac{\partial^2 \omega^0}{\partial t \partial r} \right], \\ \text{(I')} \quad t > 0, \quad \omega^0(r_1, t) &= 0, \quad \omega^0(r_2, t) = 0, \\ t = 0, \quad \omega^0(r, 0) &= -\omega^1(r). \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, dans la suite, $\omega^0(r, t)$ sera noté $\omega(r, t)$. On étudiera le problème (I') et on donnera une formulation faible de ce problème.

3. Formulation faible du problème

Notations et définitions des espaces fonctionnels

Soit $I =]r_1, r_2[$, on désignera par :

- $L^2(I)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur I .

Pour u, v éléments de $L^2(I)$ on notera :

$$(u, v) = \int_I u v dr \text{ le produit scalaire dans } L^2(I)$$

et

$$|v| = \left(\int_{r_1}^{r_2} v^2 dr \right)^{1/2} \text{ la norme associée ;}$$

- $H^1(I) = \left\{ v \in L^2(I), \frac{\partial v}{\partial r} \in L^2(I) \right\}$

$$\|v\|^2 = \left(\int_{r_1}^{r_2} v^2 dr + \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 dr \right) \text{ la norme dans } H^1(I);$$

- $\mathcal{D}(I)$: l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur I à support compact ;
- $H_0^1(I) = \left\{ v \in L^2(I), \quad \frac{\partial v}{\partial r} \in L^2(I), \quad v(r_1) = v(r_2) = 0 \right\}$;
- $H^{-1}(I)$ le dual de $H_0^1(I)$;
 t désignera le temps, et $t \in]0, T[$, $T < \infty$;
- $L^2(0, T; H_0^1(I)) = \left\{ \text{l'espace des classes de fonctions } t \rightarrow f(t) \text{ de }]0, T[\text{ dans } H_0^1(I) \text{ mesurables, telles que} \right.$

$$\|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(I))} = \left(\int_0^T \|f\|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty \};$$

- $L^2(0, T; H^{-1}(I)) = \left\{ \text{l'espace des classes de fonctions } t \rightarrow g(t) \text{ de }]0, T[\text{ dans } H^{-1} \text{ mesurables et telle que} \right.$

$$\|g\|_{L^2(0, T; H^{-1}(I))} = \left(\int_0^T \|g\|_{H^{-1}(I)}^2 dt \right)^{1/2} < \infty \};$$

- $W(0, T) = \left\{ f \in L^2(0, T; H_0^1(I)), \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(I)) \right\}$

avec la norme

$$\|f\|_{W(0, T)}^2 = \left\{ \|f\|_{L^2(0, T; H_0^1(I))}^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(I))}^2 \right\}.$$

Les diverses propriétés des espaces introduites seront supposées connues [5].

PROPOSITION 1. *Le problème (I)' est équivalent au problème (II) ainsi défini :*

Trouver $\omega \in L^2(0, T; H_0^1(I))$, $\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(I))$ telle que :

$$\frac{\partial}{\partial t} a_1(\omega, v) + a_0(\omega, v) = 0,$$

$$\omega(0) = -\omega^1(r).$$

Où a_1 et a_0 sont des formes bilinéaires symétriques définies sur $H_0^1(I)$,

$$(3.1) \quad a_1(\omega, v) = \int_{r_1}^{r_2} \rho r^3 \omega v dr + \int_{r_1}^{r_2} \nu r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} dr,$$

$$(3.2) \quad a_0(\omega, v) = \eta_0 \int_{r_1}^{r_2} r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} dr.$$

En effet, en effectuant le produit scalaire, on déduit de (I)'

$$(3.3) \quad \left(\rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t}, v \right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_0 r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} + \nu r^3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial r} \right), v \right) \forall v \in H_0^1(I),$$

d'où

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \rho r^3 \omega v dr + \int_{r_1}^{r_2} \nu r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} dr \right\} + \eta_0 \int_{r_1}^{r_2} r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} dr = 0.$$

Réciproquement : Si dans l'équation

$$\frac{d}{dt} a_1(\omega, v) + a_0(\omega, v) = 0 \quad \text{on prend} \quad v \in \mathcal{D}(\mathbb{I})$$

alors on obtient le problème (I)'.

Les formes $a_0(\omega, v)$ et $a_1(\omega, v)$ introduites dans le problème (II) jouissent d'un certain nombre de propriétés énumérées ci-dessous :

a) Elles sont symétriques et réelles et ne dépendent pas explicitement de t .

Les applications $t \rightarrow a_1(\omega, v)$ et $t \rightarrow a_0(\omega, v)$ sont donc continues sur $]0, T[$.

b) Les formes sont continues sur $H_0^1(\mathbb{I}) \times H_0^1(\mathbb{I})$, c'est-à-dire

$$(3.5) \quad |a_1(\omega, v)| \leq C_1 \|\omega\| \|v\|,$$

$$(3.6) \quad |a_0(\omega, v)| \leq C_0 \|\omega\| \|v\|.$$

D'autre part η_0, ν étant positifs, on obtient facilement les majorations suivantes :

$$(3.7) \quad \alpha \|\omega\|_{H_0^1(\mathbb{I})}^2 \leq a_1(\omega, \omega) \leq \beta \|\omega\|_{H_0^1(\mathbb{I})}^2$$

avec

$$(3.8) \quad \alpha = \inf(\rho, \nu) r_1^3 \quad \text{et} \quad \beta = \sup(\rho, \nu) r_2^3$$

$$(3.9) \quad a_0(\omega, \omega) \geq \alpha_0 \|v\|_{H_0^1(\mathbb{I})}^2$$

avec

$$(3.10) \quad \alpha_0 = \frac{\eta_0 r_1^3}{1 + 4(r_2 - r_1)^2}.$$

c) Les formes a_1 et a_0 vérifient donc une inégalité du type

$$(3.11) \quad a_0(v, v) + \lambda a_1(v, v) \geq 1 \alpha_1 \|v\|_{H_0^1(\mathbb{I})}^2$$

avec

$$(3.12) \quad \lambda = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \frac{r_1^3}{2} \inf(\rho, \nu).$$

L'ensemble des propriétés énoncées permet d'appliquer le théorème 7.1 de LIONS [6] (p. 70). Ce théorème permet d'affirmer l'existence d'une solution $w \in L^2(0, T, H_0^1(\mathbb{I}))$ du problème II et assure que l'application $\{0, \omega(0)\} \rightarrow \omega(t)$ est continue de $(L^2(0, T, H_0^1(\mathbb{I})) \times H_0^1(\mathbb{I})) \rightarrow L^2(0, T, H_0^1(\mathbb{I}))$; en d'autres termes la solution dépend continuellement des conditions initiales.

Ce théorème ne donne aucun résultat sur la régularité de la solution et en particulier sur $\dot{\omega}$. Nous reprenons alors la méthode de FAEDO-GALERKIN [5] qui nous permettra d'obtenir directement un théorème d'existence, de régularité et d'unicité de la solution du problème (II).

4. Méthode de Galerkin — théorème d'existence

4.1. Solutions approchées

Soit $w_1 \dots w_m$ une base orthonormale de $H_0^1(I)$; V_m espace engendré par $\{w_1 \dots w_m\}$. On va montrer qu'il existe une fonction unique de la forme

$$(4.1) \quad y_m(t) = \sum_{i=1}^m g_i^m(t) w_i$$

telle que

$$(4.2) \quad \frac{d}{dt} a_0(y_m(t), w_j) + a_0(y_m(t), w_j) = 0 \text{ pour } j = 1 \dots m,$$

$$(4.3) \quad y_m(0) = \sum_1^m \mu_i w_i, \quad y(0) = \sum_1^\infty \mu_i w_i \in H_0^1(I);$$

a_1 ne dépendant pas de t explicitement, (3.2) peut s'écrire :

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^m \frac{dg_i^m(t)}{dt} a_1(w_i, w_j) + \sum_1^m g_i^m(t) a_0(w_i, w_j) = 0.$$

En posant A_1^m la matrice d'ordre m des $a_1(w_i, w_j)$ qui est symétrique, A_0^m la matrice d'ordre m des $a_0(w_i, w_j)$ également symétrique, \mathbf{g}^m vecteur dont les m composantes sont $g_i^m(t)$, l'ensemble (4.2) et (4.3) peut s'écrire :

$$(4.5) \quad A_1^m \frac{d\mathbf{g}^m}{dt} + A_0^m \mathbf{g}^m = 0,$$

$$(4.6) \quad \mathbf{g}^m(0) = \mathbf{u}^m,$$

\mathbf{u}^m vecteur de composantes $(\mu_1 \dots \mu_m)$.

Le système différentiel (4.5), (4.6) a une solution unique si A_1^m est une matrice inversible. Pour ceci, il suffit de voir que la forme quadratique associée est définie positive. En désignant par Y l'élément de R^m de composantes (y_i) , la forme quadratique associée s'écrit :

$$(4.7) \quad Y^T A_1^m Y = a_1 \left(\sum_i y_i w_i, \sum_j y_j w_j \right).$$

En utilisant la coercivité de a_1 et le fait que la base $\{w_m\}$ soit orthonormale, nous obtenons l'inégalité :

$$(4.8) \quad \alpha \sum |y_i|^2 \leq Y^T A_1^m Y \leq |Y|_{R^m} |A_1^m Y|_{R^m}.$$

Donc $(A_1^m)^{-1}$ existe et de plus nous avons (4.9): $|(A_1^m)^{-1}| \leq \frac{1}{\alpha}$. Une solution y_m existe, y_m constituant l'approximation de rang m .

4.2. Estimations à priori de $y_m(t)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

y_m obtenue au paragraphe précédent appartenant à V_m , on peut remplacer dans l'équation (3.2) w_j par $y_m(t)$ et en intégrant sur $]0, T[$, on obtient :

$$(4.10) \quad \frac{1}{2} a_1(y_m(T), y_m(T)) + \int_0^T a_0(y_m(t), y_m(t)) dt = \frac{1}{2} a_0(y_m(0), y_m(0)).$$

En utilisant (2.7) et (2.9), (3.9) fournit l'inégalité

$$(4.11) \quad \alpha \|y_m(T)\|^2 + \alpha_0 \int_0^T \|y_m(t)\|^2 dt \leq \beta \|y_m(0)\|^2.$$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, $y_m(0) \rightarrow y(0)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et pour m assez grand

$$(4.12) \quad \|y_m(t)\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{\beta}{\alpha} \|y(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2;$$

$y_m(t)$ est bornée par une constante indépendante du rang m dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, donc il existe une sous suite extraite $y_\mu \rightarrow z$ dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ faiblement.

Maintenant on va effectuer des estimations à priori semblables pour $\dot{y}_m(t)$ dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$.

4.3. Estimations à priori de \dot{y}_m dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$

Formellement on définit :

$$(4.13) \quad \dot{y}_m(t) = \sum_{i=1}^m \dot{g}_i^m(t) w_i.$$

Pour t fixe, on va montrer que $\dot{y}_m(t)$ est élément de V_m .

Les $\dot{g}_i^m(t)$ doivent être telles que la norme

$$(4.14) \quad \|\dot{y}_m(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\dot{g}_i^m|^2 \text{ soit finie.}$$

En résolvant l'équation (3.5) on déduit

$$(4.15) \quad \dot{g}_i^m = -(A_1^m)_{ip}^{-1} (A_0^m)_{pj} g_j^m.$$

Or d'après (4.9)

$$|(A_1^m)|^{-1} \leq \frac{1}{\alpha}, \quad |A_0^m| \leq m\eta_0 r_1^2.$$

Donc pour m fini $\dot{y}_m \in V_m$, alors on peut répéter les mêmes opérations qu'au paragraphe précédent en remplaçant w_j par $\frac{dy_m}{dt}$ et en intégrant sur $]0, T[$

$$(4.16) \quad \alpha \int_0^T \|\dot{y}_m(t)\|^2 dt + \frac{\alpha_0}{2} \|y_m(T)\|^2 \leq \frac{1}{2} a_0(y_m(0), y(0)),$$

$$(4.17) \quad a_0(y_m(0), y_m(0)) \leq \eta_0 r_2^3 \|y_m(0)\|^2.$$

Ce qui entraîne que

$$(4.18) \quad \|\dot{y}_m(t)\|_{L^2(0,T,H_0^1(I))}^2 \leq \eta_0 \frac{r_2^3}{\alpha} \|y_m(0)\|_{H_0^1(I)}^2;$$

$\|\dot{y}_m(0)\|$ est borné dans $L^2(0, T, H_0^1(I))$, on peut donc en extraire une sous-suite qui tend vers $g = \dot{z}$ dans $L^2(0, T, H_0^1(I))$.

4.4. Montrons que $y_m \rightarrow z$ dans $L^2(0, T, H_0^1(I))$ faiblement z étant solution du problème

$y_\mu \rightarrow z$; soit j un rang fixé pour $\mu > j$

$$(4.19) \quad a_1\left(\frac{dy_\mu}{dt}, w_j\right) + a_0(y_\mu, w_j) = 0.$$

En considérant $\Phi \in C^1(0, T)$ avec $\Phi(T) = 0$

$$(4.20) \quad \int_0^T \left[a_1\left(\frac{dy_\mu}{dt}, w_j\right) \Phi(t) dt + a_0(y_\mu, w_j) \Phi(t) dt \right] = 0.$$

En intégrant par parties et en passant à la limite pour $\mu \rightarrow \infty$

$$(4.21) \quad - \int_0^T a_1(z, w_j) \dot{\Phi}(t) dt + \int_0^T a_0(z, w_j) \Phi(t) dt = a_1(y(0), w_j) \Phi(0).$$

Ce calcul donne en particulier pour $\Phi \in \mathcal{D}(0, T)$

$$(4.22) \quad \frac{d}{dt} a_1(z, w_j) + a_0(z, w_j) = 0 \text{ au sens des distributions.}$$

Or les combinaisons linéaires finies des w_j sont denses dans $H_0^1(I)$, il vient alors

$$(4.23) \quad \frac{d}{dt} a_1(z, v) + a_0(z, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Il reste à montrer que z vérifie la condition initiale. D'après ce qui précède, z est élément de $W(0, T)$, donc est une fonction continue presque partout de $[0, T] \rightarrow H_0^1(I)$.

En reprenant l'équation (3.21) pour $\Phi \in C^1(0, T)$, $\Phi(T) = 0$ on obtient

$$(4.24) \quad a_1(z(0), w_j) = a_1(y(0), w_j) \quad \forall j.$$

Les combinaisons linéaires finies de w_j sont denses dans $H_0^1(I)$ et d'autre part a_1 est une forme définie positive

$$(4.25) \quad a_1(z(0) - y(0), w_j) = 0 \Rightarrow a_1(z(0) - y(0), v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

$$x \Rightarrow z(0) - y(0) = 0;$$

$z(t)$ est donc solution du problème II, et $y_m(t) \rightarrow z(t)$ dans $L^2(0, T, H_0^1(I))$ faiblement.

4.5. Convergence forte de $y_m(t) \rightarrow z(t)$ dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$

Calculons l'expression suivante :

$$(4.26) \quad F = \int_0^T a_0(y_m - z, y_m - z) dt + \frac{1}{2} a_1(y_m(T) - z(T), y_m(T) - z(T))$$

en tenant compte de l'équation vérifiée pour y_m et en passant à la limite lorsque $m \rightarrow \infty$, on montre sans difficulté que $\lim_{m \rightarrow \infty} F = 0$.

Les deux formes a_0 et a_1 étant coercives on peut donc écrire

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_0^T \|y_m - z\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right) = 0.$$

D'où la convergence forte de $y_m \rightarrow z$ dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$. La méthode de Galerkin permet de montrer l'existence d'une solution au problème II.

5. Unicité de la solution

Pour démontrer l'unicité de la solution, il suffit de démontrer que pour des données initiales nulles $w(0) = 0$, la solution est $w \equiv 0$ dans $W(0, T)$. Nous utilisons la propriété $W(0, T) \subset C^0(0, T, H_0^1(\Omega))$

$$(5.1) \quad \int_0^T \frac{d}{dt} a_1(w, w) dt + \int_0^T a_0(w, w) dt = 0,$$

$$(5.2) \quad a_1(w(T), w(T)) + \int_0^T a_0(w, w) dt = 0.$$

En utilisant la coercivité de a_0 et de a_1 on peut écrire

$$(5.3) \quad \alpha \|w(T)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \alpha_0 \|w\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 \leq 0.$$

Ce qui donne $\|w\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 = 0$ dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$.

De la même façon on obtiendra $\|\dot{w}\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 = 0$ dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ en substituant à (5.1) :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} a_1 \left(w, \frac{dw}{dt} \right) dt + \int_0^T a_0 \left(w, \frac{dw}{dt} \right) dt = 0.$$

On en déduit alors que $w = 0$ dans $W(0, T)$.

6. Comportement de la solution pour $t \rightarrow \infty$

Soit z solution du problème II dans $W(0, T)$; z vérifie donc

$$(6.1) \quad \frac{d}{dt} a_1(z(t), v) + a_0(z(t), v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\mathbf{I}),$$

$$(6.2) \quad 2 \int_0^s a_0(z(t), z(t)) dt + \int_0^s \frac{d}{dt} a_1(z(t), z(t)) dt = 0;$$

a_0 et a_1 étant coercives, on peut de façon élémentaire déduire :

$$(6.3) \quad \alpha_0 \|z(t)\|_{L^2(0, s, H_0^1(\mathbf{I}))}^2 + \alpha \{ \|y(s)\|^2 - \|z(0)\|^2 \} \leq 0.$$

Considérons la fonction (6.4): $t \rightarrow f(t) = \|z(t)\|_{H_0^1(\mathbf{I})}^2$

$$(6.5) \quad \alpha_0 \int_0^s f(t) dt + \alpha (f(s) - f(0)) \leq 0.$$

La dérivée $f'(s)$ existe au sens des distributions

$$(6.6) \quad \alpha f'(s) + \alpha_0 f(s) \leq 0,$$

$f'(s)$ est sommable presque partout car elle est majorée par une fonction sommable;

$$(6.7) \quad \frac{d}{dt} (e^{\frac{\alpha}{\alpha_0} t} f(t)) \leq 0.$$

(6.7) entraîne que $e^{\frac{\alpha}{\alpha_0} t} f(t)$ est une fonction décroissante de t d'où

$$(6.8) \quad f(t) \leq e^{-\frac{\alpha}{\alpha_0} t} f(0), \quad \forall t > 0.$$

Pour $t \rightarrow \infty$ $f(0)$ fini, et nous avons

$$(6.9) \quad f(t) = \|z(t)\|_{H_0^1(\mathbf{I})}^2 \leq e^{-\frac{\alpha}{\alpha_0} t} \|z(0)\|_{H_0^1(\mathbf{I})}^2 \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow \|z(t)\|_{H_0^1(\mathbf{I})}^2 \rightarrow 0.$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, la solution du problème II tend vers 0 dans $H_0^1(\mathbf{I})$, c'est-à-dire que la solution du problème I tend vers la solution du problème stationnaire dans $L^2(\mathbf{I})$.

Sans difficultés, on montre la dépendance continue de la solution du problème II, par rapport aux conditions initiales.

Finalement pour l'écoulement de Couette plan non stationnaire, avec une méthode différente de celle utilisée par TING [2], on obtient un théorème d'existence, d'unicité, de régularité de la solution pour ce problème particulier. Ce problème est tel qu'il n'y ait pas continuité entre une donnée aux limites $\omega(r_2, t)$ et la donnée initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(r_2, t) \neq \lim_{r \rightarrow r_2} \omega(r, 0).$$

Les problèmes envisagés par TING ne présentaient pas de telle discontinuité et les méthodes qu'il mettait en oeuvre excluaient l'étude de tels cas. Le problème (I) envisagé constitue ainsi une généralisation aux cas de solutions distributions.

7. Résolution du problème par transformation de Laplace

Afin d'obtenir une représentation analytique, qui approche en un certain sens, pour $t > 0$, la solution du problème (I), on peut considérer le problème (III) suivant :

Trouver $w(r, t)$ telle que

$$(III) \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta_0 r^3 \frac{\partial w}{\partial r} + \nu r^3 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} \right], \\ w(r_1, t) &= 0, \quad w(r_2, t) = \Omega(1 - e^{-t/\tau}), \end{aligned}$$

τ étant une constante donnée positive, $w(r, 0) = 0$.

Le problème rentre dans la catégorie de ceux traités par TING [2]; et la transformation de Laplace nous fournit d'ailleurs la solution explicite. On peut alors étudier la dépendance de la solution par rapport à τ . En particulier pour tout $t > \varepsilon$, ε positif donné, la solution du problème III tend vers celle du problème I lorsque $\tau \rightarrow 0$. Nous montrerons que dans ces conditions la solution de III converge uniformément vers la solution I. Etant assuré l'unicité de la solution I, on obtiendra ainsi une représentation dans le domaine où elle est continue.

Dans la suite on supposera que la solution cherchée est suffisamment régulière pour que les opérations effectuées soient justifiées.

Par transformation de Carlson-Laplace [7]

$$(7.1) \quad \hat{w}(r, p) = p \int_0^\infty w(r, t) e^{-pt} dt,$$

le problème transformé du problème III s'écrit

$$(7.2) \quad r^2 \frac{d^2 \hat{v}}{dr^2} + r \frac{d\hat{v}}{dr} - (1 - \alpha r^2 \hat{v}) = 0,$$

où

$$(7.3) \quad \hat{v} = r \hat{w},$$

$$(7.4) \quad \hat{v}(r_1, p) = 0, \quad \hat{v}(r_2, p) = \Omega r_2 \frac{\frac{1}{\tau}}{p + \frac{1}{\tau}},$$

désignant la quantité complexe

$$(7.5) \quad \alpha = \frac{-\rho p}{\eta_0 + \nu p}.$$

Dans la suite on posera (7.6) $x = \alpha^{1/2}$ avec pour détermination du radical celle qui vérifie

$$(7.6) \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x \leq \frac{\pi}{2}.$$

La solution de (6.3) et (6.4) s'écrit ainsi

$$(7.7) \quad \hat{v}(r, p) = \Omega r_2 \frac{\frac{1}{\tau} (J_1(xr_1)Y_1(xr) - Y_1(xr_1)J_1(xr))}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right) Y_1(xr_2)J_1(xr_1) - Y_1(xr_1)J_1(xr_2)},$$

où J_1, Y_1 désignent les fonctions de Bessel d'ordre 1, de première et seconde espèce.

Le problème consiste alors à inverser cette fonction en utilisant la formule de Bromwich :

$$(7.8) \quad v(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \frac{\hat{v}(r, p)}{p} e^{pt} dp.$$

Il faut pour cela a) étudier la convergence de l'intégrale définie par (7.8), b) calculer cette intégrale par application du théorème des résidus sur un domaine limité par un contour défini ci-après.

7.1. Etude de la convergence de l'intégrale (7.8)

Les pôles de l'expression \hat{v}/p sont les zéros de l'expression

$$(7.9) \quad p \left(p + \frac{1}{\tau} \right) (Y_1(xr_2)J_1(xr_1) - Y_1(xr_1)J_1(xr_2)) = 0.$$

Il existe une infinité dénombrable de zéros de

$$(7.10) \quad Y_1(xr_2)J_1(xr_1) - Y_1(xr_1)J_1(xr_2)$$

qui sont tous réels et simples [8], et notés $x_1 \dots x_n$. Les valeurs $p_1 \dots p_n$ correspondantes sont telles que

$$(7.11) \quad -\frac{\eta_0}{\nu} \leq p_n < 0.$$

Pour $\text{Re } p \geq \alpha_0$, $\alpha_0 > 0$, \hat{v}/p est holomorphe et il est facile de voir que

$$(7.12) \quad \left| \frac{\hat{v}}{p} \right| \leq \frac{M}{|p|^2}.$$

(7.12) entraîne que l'intégrale (7.8) converge uniformément en r et t .

7.2. Définition du contour. Calcul de l'intégrale

Le contour considéré est analogue à celui de TING [2], p. 9, modifié toutefois, afin de prendre en compte le pôle $p = -1/\tau$ (τ étant une constante réelle positive supposée petite).

En appliquant le théorème des résidus :

$$(7.13) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{L+C+AB+CD+C_N} \frac{\hat{v}}{p} e^{pt} dp = \Sigma \text{ résidus.}$$

Si l'on reprend les notations adoptées par TING on peut écrire $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{\hat{v}}{p} e^{pt} dp = 0$ par

utilisation du lemme de Jordan; $\int_{AB+CD} \frac{\hat{v}}{p} e^{pt} dp = 0$ (la fonction considérée est continue dans ce domaine).

Les courbes C_N doivent être choisies de façon à ce qu'elles ne rencontrent pas l'axe réel en un pôle.

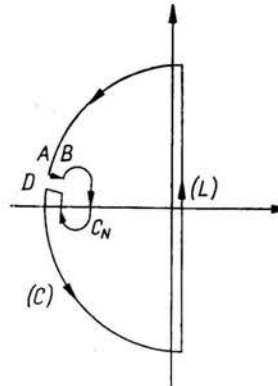


FIG. 1.

Il est possible d'établir [9] (p. 205-206), [10] (p. 128) l'inégalité suivante :

$$(7.14) \quad r_1 x_n < \frac{n\pi + \frac{\pi}{4}}{\mu - 1} < r_1 x_{n+1},$$

où $\mu = \frac{r_2}{r_1} > 1$. Ceci permet de choisir $\tau \sin \eta = \left(N + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{\mu - 1}$ en conservant toujours les notations de TING [2]. Alors les C_N ainsi définis sont tels que

$$(7.15) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} \frac{\hat{v}}{p} e^{pt} dp = 0.$$

Finalement la formule d'inversion (7.13) conduit à

$$(7.16) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \frac{\hat{v}}{p} e^{pt} dp = \Sigma \text{ résidus.}$$

7.3. Calcul des résidus

Les pôles de \hat{v}/p sont tous simples, $p = -1/\tau, p = 0, p_1 \dots p_n$ correspondant aux racines de (7.10).

Notons R_{-1} le résidu correspondant à $p = -1/\tau, x_{-1}$ la valeur de x correspondante, R_0 le résidu correspondant à $p = 0$ et $R_1 \dots R_n$ les résidus associés à $p_1 \dots p_n$; alors:

$$(7.17) \quad R_{-1} = -\Omega r_2 \frac{J_1(x_{-1} r_1) Y_1(x_{-1} r) - J_1(x_{-1} r) Y_1(x_{-1} r_1)}{J_1(x_{-1} r_1) Y_1(x_{-1} r_2) - J_1(x_{-1} r_1) J_1(x_{-1} r_2)} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$(7.18) \quad R_0 = \frac{\Omega r_2^2}{r} \frac{(r^2 - r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2} \quad (R_0 \text{ correspond à la solution stationnaire}),$$

$$(7.19) \quad R_n = 2\Omega r_2 \frac{\frac{1}{\tau} e^{p_n t}}{\left(p_n + \frac{1}{\tau}\right)} \frac{(\eta_0 + \nu p_n)}{\eta_0} \frac{J_1(x_n r_1) J_1(x_n r_2)}{J_1^2(x_n r_2) - J_1^2(x_n r_1)} \times \\ \times (Y_1(x_n r) J_1(x_n r_1) - J_1(x_n r) Y_1(x_n r_1)).$$

La convergence de la série $\sum_1^\infty R_n$ est obtenue en utilisant le développement asymptotique des fonctions de Bessel, et celui des racines $r_1 x_n$ de l'équation (7.10) [11, 10].

Sans entrer dans les détails de calcul, nous aboutissons au résultat

$$(7.20) \quad n \rightarrow \infty |R_n| = \theta \left(\frac{1}{(x_n r_1)^3} \right),$$

d'où la convergence de la série.

La solution $v(r, t)$ trouvée par la formule d'inversion vérifie les conditions aux limites $v(r_1, t) = 0$, $v(r_2, t) = \Omega r_2 (1 - e^{-t/\tau})$.

D'autre part la condition initiale est vérifiée

$$(7.21) \quad v(r, 0) = R_{-1}(0) + R_0 + \sum_1^\infty R_n(0) = 0.$$

Ce dernier résultat est obtenu en développant R_0 et $R_{-1}(0)$ à l'aide des noyaux de HANKEL [12], p. 305 et 85.

Il est facile de vérifier que $\partial w / \partial t$, $\partial w / \partial r$, $\partial^2 w / \partial r^2$ sont bornées, les hypothèses permettant d'appliquer la transformation de Laplace sont donc vérifiées à postériori.

7.4. Etude de la dépendance de la solution par rapport à τ

Pour tout $\varepsilon > 0$, pour $t > \varepsilon$ la fonction $(r_2, t) \rightarrow w(r_2, t)$ tend, lorsque τ tend vers zéro, vers la fonction échelon Ω .

Pour τ fixé, la solution est donnée par

$$(7.22) \quad v(r, t) = R_{-1}(t, \tau) + R_0 + \sum_1^\infty R_n(t, \tau).$$

Or la série $\sum_1^\infty R_n(t, \tau)$ converge uniformément pour τ tel que $\frac{\nu}{\tau} - \eta_0 \neq 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\sum_1^\infty R_n(\tau) \right) = \sum_1^\infty \lim_{\tau \rightarrow 0} R_n(\tau) \quad \forall t.$$

Par contre $R_{-1}(t, \tau)$ dont l'expression est donnée par (6.17) est tel que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [\lim_{t \rightarrow 0} R_{-1}(t, \tau)] \neq \lim_{t \rightarrow 0} [\lim_{\tau \rightarrow 0} R_{-1}(t, \tau)].$$

En se fixant $t > \varepsilon$ et en faisant ensuite tendre τ vers 0, on obtient alors la représentation de la solution du problème I pour toute valeur de t vérifiant $t > \varepsilon$

$$v(r, t) = R_0 + \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum R_n(t, \tau),$$

$$(7.23) \quad v(r, t) = \frac{\Omega r_2^2 (r^2 - r_1^2)}{r (r_2^2 - r_1^2)} + \sum_1^{\infty} 2\Omega r_2 \frac{(\eta_0 + \nu p_n)}{\eta_0} e^{p_n t} \frac{J_1(x_n r_2) J_1(x_n r_1) N(x_n r)}{J_1^2(x_n r_1) - J_1^2(x_n r_2)},$$

$$N(x_n r) = J_1(x_n r) Y_1(x_n r_1) - Y_1(x_n r) J_1(x_n r_1).$$

R e m a r q u e. Pour $\nu = 0$ nous retrouvons la solution du problème I pour un fluide de Navier-Stokes.

8. Conclusion

Le problème considéré nous montre qu'il est important de préciser l'espace dans lequel nous recherchons la solution. Les techniques d'analyse fonctionnelle peuvent se transposer immédiatement pour les problèmes envisagés par TING. A chaque fois nous obtenons une équation aux dérivées partielles linéaire d'évolution de type parabolique; le signe du coefficient ν joue un rôle primordial, puisqu'il assure la coercivité des formes introduites et intervient directement dans l'unicité et l'existence de la solution. En ce qui concerne la loi de comportement, nous obtenons des résultats tout à fait opposés à ceux de COLEMAN-DUFFIN-MIZEL [3]. La solution pour ce modèle existe, est unique et bornée et dépend continûment des conditions initiales. Cette étude confirme les conclusions de Huilgol quant à la validité d'un tel modèle. Cependant il reste à replacer cette loi de comportement par rapport aux fluides simples en particulier et par rapport aux divers modèles représentant des fluides non newtoniens.

Bibliographie

1. R. R. HUILGOL, *A second-order fluid differential type*, Int. J. of Non-Linear Mech., **3**, 471-482, 1968.
2. T. W. TING, *Certain non steady flows of second-order fluids*, A.R.M.A., **14**, 1-26, 1963.
3. B. D. COLEMAN, R. J. DUFFIN, V. J. MIZEL, *Instability, uniqueness and non existence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip*, A.R.M.A., **19**, 100-116, 1965.
4. H. MARKOVITZ, B. D. COLEMAN, *Non steady flows of second-order fluids*, Phys. Fluid, **7**, 6, 833-841, 1964.
5. G. CHAVENT, *Analyse fonctionnelle et discrétisation des équations aux dérivées partielles*, IRIA, Novembre 1971.

6. J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles et problème aux limites*, Springer, Berlin 1961.
7. M. PARODI, *Introduction à l'étude de l'analyse et du calcul symbolique*, Gauthier-Villars, Paris 1957.
8. A. GRAY, G. B. MATHEWS, *A treatise on Bessel functions and their applications to Physics*, Dover-New York 1966.
9. E. JAHNKE, F. EMDE, *Tables of functions*, 4. ed. Dover, N. York 1945.
10. H. S. CARSLAW, *Conduction of heat*, 2nd Ed., London 1921.
11. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*, University Press, Cambridge 1962.
12. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill, New-York 1951.

DEPARTEMENT DE MECANIQUE THEORIQUE
UNIVERSITE DE PARIS VI,
E.R.A. au C.N.R.S. N° 159.

Reçu 17 Janvier 1974.