

7.72 — sprężystość, plastyczność

7.75 — pękanie

**Ewa Turska-Klębek**

**O WYZNACZANIU STREF PLASTYCZNYCH  
W CIAŁACH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH  
ZAWIERAJĄCYCH SZCZELINĘ  
W ANTYPLASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA**

10/1987

P. 269

**WARSZAWA 1987**

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 września 1986 r.

56866



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,83 Ark.druk. 1,5  
Oddane do drukarni w marcu 1987 r.  
Nr zamówienia 155/87.

---

warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

Ewa Turska-Kłębek  
Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych  
IPPT PAN

O WYZNACZANIU STREF PLASTYCZNYCH W CIAŁACH  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH ZAWIERAJĄCYCH SZCZELINĘ  
W ANTYPŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

Streszczenie

Wyznaczono rozkład naprężeń w nieograniczonym materiale sprężysto - idealnie plastycznym zawierającym półnieskończoną szczelinę i znajdującym się w antypłaskim stanie odkształcenia. Rozważono przypadki: gdy powierzchnie szczeliny są obciążone, a w nieskończoności naprężenia znikają i gdy brzegi szczeliny są wolne od naprężeń, a w nieskończoności naprężenia są stałe. Dla zagadnienia półprzestrzeni z nieobciążoną szczeliną uzyskano kształt granicy strefy plastycznej i funkcję odwrotną do zespolonej funkcji naprężeń.

1. WSTĘP

Rozpatrzmy nieograniczone, izotropowe i jednorodne ciało sprężysto-plastyczne zawierające szczelinę. Jeżeli tę szczelinę potraktujemy jako przecięcie o zerowej grubości, to w jej wierzchołku, niezależnie od tego, jak małe będą obciążenia, którym poddane będzie ciało, powstanie strefa plastyczna. Istnienie strefy plastycznej ma wpływ na rozkład naprężeń w całym ośrodku i wskutek tego, również na kryteria rozwoju szczeliny. Zjawisko to, nawet dla ciał sprężysto - idealnie plastycznych z ustalonym warunkiem plastyczności Hubera-

-Missea lub Treski-St. Venanta, stanowi bardzo złożony problem matematyczny. W związku z tym powstało wiele przybliżonych modeli, jak i numerycznych metod opisujących uplastycznienie ośrodka w wierzchołku szczeliny. Przykłady można znaleźć np. w [1] czy [2]. Spotyka się nadal prace [3], w których granicę sprężysto-plastyczną wyznacza się z rozwiązania czysto sprężystego zagadnienia, podstawiając otrzymane rozkłady naprężeń do warunku plastyczności Hubera-Misesa lub do tego warunku z wprowadzonym stałym mnożnikiem granicy plastyczności [4,5]. Również przy formułowaniu warunków wzrostu szczeliny [6] wykorzystuje się przybliżony kształt granicy sprężysto-plastycznej, otrzymany z analizy czysto sprężystego zagadnienia. Jedynie ściśle rozwiązania zagadnienia sprężysto-plastycznego uzyskano przy założeniu antypłaskiego stanu odkształcenia szczeliny [7,8,9], jednak i w tym przypadku brak rozwiązań zadań z niesymetrycznym obciążeniem ciała lub z zadaniem obciążeniem na powierzchni szczeliny. W pracy tej przedstawiono trzy takie przykłady, wskazując na różnicę między rozwiązaniem zagadnienia sprężysto-plastycznego a rozwiązaniem uzyskanym z rozwiązania zagadnienia sprężystego. Zastosowano metodę "swobodnej powierzchni" przy założeniu uplastycznienia bliskiego zasięgu.

## 2. SZCZELINA OBCIĄŻONA NA POWIERZCHNIACH

Ze względu na prostszy opis matematyczny rozwiązanie zagadnień teorii szczelin dla antypłaskiego stanu odkształcenia jest znacznie łatwiejsze, niż w przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Wektor przemieszczenia  $\underline{u}$  w antypłaskim stanie odkształcenia może być przedstawiony:

$$\underline{u} = [0, 0, w(x_1, x_2)],$$

gdy przemieszczenie  $w(x_1, x_2)$  jest równoległe do osi  $x_3$

prostokątnego układu kartezjańskiego  $(x_1, x_2, x_3)$ . Jedyne niezerowe składowe tensora odkształceń  $\underline{\epsilon}$  to  $\epsilon_{13}(x_1, x_2)$  i  $\epsilon_{23}(x_1, x_2)$ . Z prawa Hooke'a wynika, że w obszarze sprężystym jedyne niezerowe składowe tensora naprężenia, to:

$$\sigma_{13}(x_1, x_2) = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2),$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_2) = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, x_2),$$

gdzie  $\mu$  jest modułem ścinania. Układ równań równowagi Lamé sprowadza się, przy braku sił masowych, do równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0$$

Przyjmując, że  $w(x_1, x_2) = \frac{1}{\mu} \text{Im}[f(z)]$ , gdzie  $f(z)$  jest funkcją analityczną zmiennej zespolonej  $z = x_1 + ix_2$ , otrzymujemy, w części sprężystej ciała, związek:

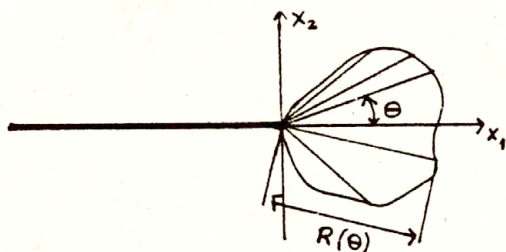
$$\sigma_{32}(x_1, x_2) + i\sigma_{31}(x_1, x_2) = f'(z), \quad z = x_1 + ix_2$$

W obszarze, w którym materiał uległ uplastycznieniu zakładamy, że spełniona jest równość:

$$\sigma_{32}^2(x_1, x_2) + \sigma_{31}^2(x_1, x_2) = k^2,$$

gdzie dla hipotezy Hubera-Misesa  $k = \sigma_{PL}/2$ , a dla hipotezy Treski-St. Venanta  $k = \sigma_{PL}/\sqrt{3}$ , gdzie  $\sigma_{PL}$  - granica plastyczności. Rozpatrując uplastycznienie tylko przy wierzchołku szczeliny otrzymujemy [1, 10], że naprężenia są stałe wzdłuż promieni wychodzących z wierzchołka szczeliny (Rys. 1):





Rys. 1.

czyli:

$$(2.1) \quad \sigma_{23}(r, \theta) = k \cos \theta, \quad \sigma_{31}(r, \theta) = -k \sin \theta$$

lub:

$$(2.2) \quad \sigma_{32}(r, \theta) + i\sigma_{31}(r, \theta) = k e^{-i\theta}, \quad x_1 + ix_2 = r e^{i\theta}, \quad r \leq R(\theta).$$

Ponieważ wszystkie składowe tensora naprężeń  $\underline{\sigma}$  muszą być ciągłe, rozwiązanie zagadnienia sprężysto - idealnie plastycznego sprowadza się do znalezienia analitycznej funkcji  $f'(z)$ , spełniającej odpowiednie warunki brzegowe i wyznaczenia krzywej  $R = R(\theta)$ , na której funkcja  $f'(z)$  spełnia warunek:

$$f'(z) \Big|_{z=R(\theta)} = k e^{-i\theta}$$

a. Przypadek sprężysto-plastyczny.

Rozważmy nieograniczony ośrodek przecięty półnieskończoną pasmową szczeliną wzdłuż ujemnej części osi  $x_1$  (Rys. 1). Niech brzegi szczeliny będą obciążone naprężeniem  $\sigma_{32}(x_1, 0) = \alpha / (x_1 - 1)$  dla  $x_1 < 0$ , a w nieskończoności naprężenia znikają. Dla ułatwienia dalszych obliczeń przyjmujemy  $\alpha = k$ . Metodą

podobną do użytej w klasycznej pracy Hulta i McClintocka [7] dobierania funkcji o odpowiednich własnościach w przestrzeni naprężeń  $w = \sigma_{32} + i\sigma_{31}$  otrzymujemy, że funkcja odwrotna  $F(w)$  do poszukiwanej  $f'(z)$  jest:

$$F(w) = z = \left(\frac{k}{w} + 1\right)^2, \quad w = \sigma_{32} + i\sigma_{31},$$

a krzywą  $R = R(\theta)$  rozgraniczającą obszar sprężysty od plastycznego jest kardioda o równaniu:

$$R(\theta) = e^{-i\theta} f'^{-1}(e^{-i\theta}) = 2(\cos\theta + 1).$$

Po odwróceniu funkcji  $F(w)$  i rozdzieleniu na część rzeczywistą i urojoną wyznaczamy rozkład naprężeń w obszarze sprężystym:

$$\sigma_{32}(r, \theta) = \frac{k(\sqrt{r} \cos(\theta/2) - 1)}{r + 1 - 2\sqrt{r} \cos(\theta/2)},$$

$$\sigma_{31}(r, \theta) = -\frac{k\sqrt{r} \sin(\theta/2)}{r + 1 - 2\sqrt{r} \cos(\theta/2)},$$

gdzie  $r, \theta$  to współrzędne biegunowe, przedstawione na Rys. 1. i  $-\pi < \theta < \pi$ . W obszarze plastycznym naprężenia wyrażone są wzorem (2.2). Linie stałej intensywności naprężeń  $\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 = k^2/c^2$  przedstawiono na Rys. 2. dla  $c^2 = 1, 2, 3, 4, 5$ . Przy  $c = 1$  jest to krzywa  $R = R(\theta)$ .

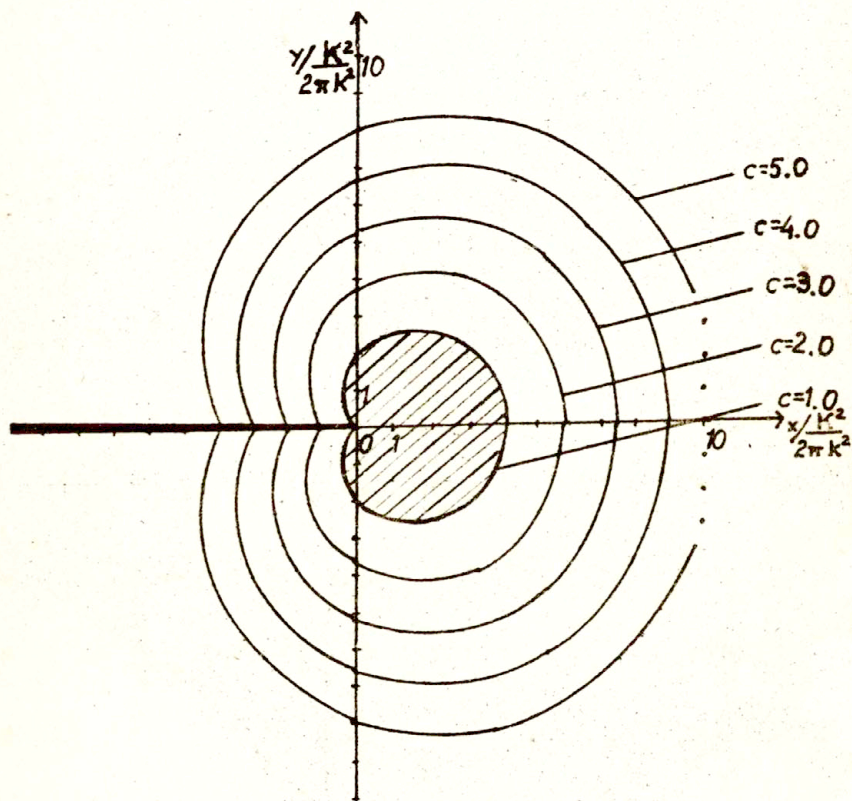
#### b. Przypadek sprężysty.

Aby rozwiązać to samo zagadnienie (szczelina obciążona na brzegu naprężeniem  $\sigma_{32}(x_1, 0) = k/(x_1 - 1)$ ,  $x_1 < 0$

i w nieskończoności ośrodek wolny od obciążeń  $\sigma_{32} + i\sigma_{31} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$   
 w przypadku zagadnienia czysto sprężystego,  
 przekształcamy płaszczyznę  $z = x_1 + ix_2$  na górną półpłaszczyznę  
 $\Omega = \eta + i\xi$  odwzorowaniem  $\Omega = i\sqrt{z}$  i szukamy takiej  
 funkcji analitycznej  $g(\Omega)$ , że na brzegu półpłaszczyzny  
 $\text{Re}[g(\eta, 0)] = -k/(\eta^2 + 1)$ , (Rys.3).

Z całki Poissona otrzymujemy:

$$(2.4) \quad \text{Re}[g(\eta, \xi)] = \Phi(\eta, \xi) = -\frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2} \frac{\xi}{\xi^2 + (\eta-\tau)^2} d\tau.$$



Rys.2.



Można wyznaczyć  $g(\Omega)$  znając część rzeczywistą (2.4). Niech

$$\Phi_1(\eta, \xi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\eta, \xi) \quad \text{i} \quad \Phi_2(\eta, \xi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(\eta, \xi), \quad \text{wtedy}$$

$$g'(\Omega) = \Phi_1(\Omega, 0) - i\Phi_2(\Omega, 0), \quad \text{czyli} \quad g(\Omega) = \int g'(\Omega) d\Omega.$$

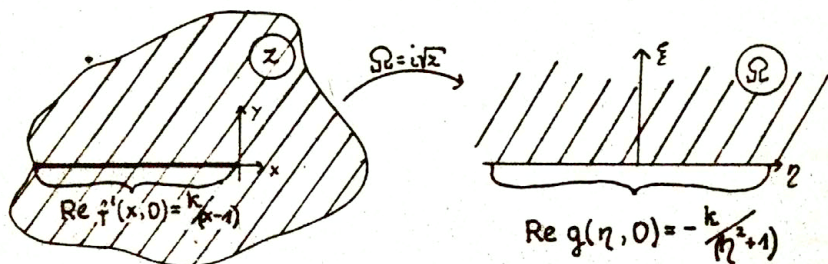
Podstawiając wynik całkowania (2.4) do powyższych wzorów, po zmianie współrzędnych, mamy:

$$f(z) = \frac{k}{\sqrt{z}(\sqrt{z} + 1)}.$$

Wybieramy "dodatnią" gałąź pierwiastka  $\sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ . Rozkład naprężeń wyraża się wzorami:

$$\sigma_{32}(r, \theta) = k \frac{r \cos \theta + \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}}{r(r + 2\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + 1)},$$

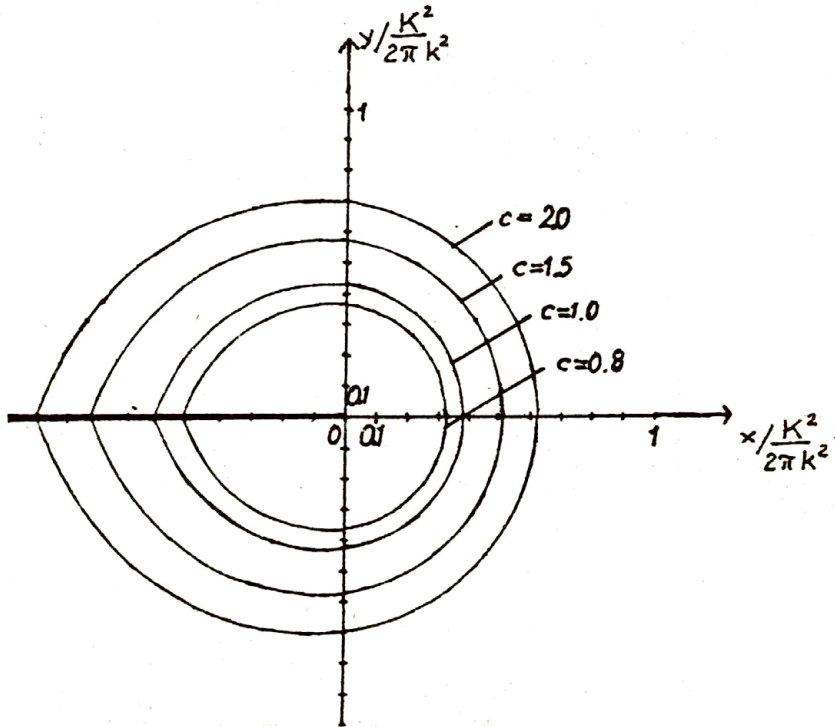
$$\sigma_{31}(r, \theta) = -k \frac{r \sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}}{r(r + 2\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + 1)}.$$



Rys. 3.

Linie stałej intensywności naprężeń  $\sigma_{32}^2 + \sigma_{31}^2 = k^2/c^2$  przy  $c^2 = 0,8; 1; 1,5; 2$  przedstawione są na Rys.4. Porównując rozwiązanie zagadnienia sprężysto-plastycznego z rozwiązaniem

otrzymanym z zagadnienia sprężystego widać różnicę w rozkładzie naprężeń w obu przypadkach. Należy zauważyć, że jednostka na Rys.4 jest 10-krotnie mniejsza, niż na Rys.2. Punkty przecięcia linii stałej intensywności naprężeń z ujemną częścią osi  $x_1$  z Rys.2 i Rys.4 oczywiście pokrywają się.



Rys.4.

### 3. OBCIĄŻONY OBSZAR ZE SZCZELINĄ

#### a. Zadanie sprężysto-plastyczne.

Jako następny przykład rozważmy zadanie sprężysto-plastyczne dla półnieskończonej, swobodnej od naprężeń szczeliny w nieograniczonym ośrodku obciążonym w nieskończoności

napreżeniem  $\sigma_{31}^{\infty} = -p$  ( $p/k < 1$ ) takim, że przy  $p = 0$   
 $(\sigma_{32} + i\sigma_{31})(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{K}{\sqrt{2\pi z}}$ ,  $K = \text{const}$ . Wprowadźmy dla ułat-  
 wienia obliczeń, nowe, unormowane zmienne:

$$\xi = \sigma_{32}/k \quad \eta = -\sigma_{31}/k$$

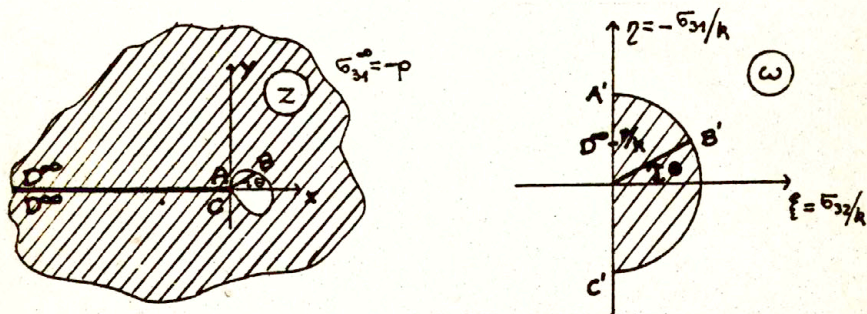
wtedy:

$$(3.1) \quad \omega = \xi + i\eta = f(x - iy)$$

i poszukiwaną funkcją będzie funkcja odwrotna do  $f$ :

$$(3.2) \quad F(\omega) = f^{-1}(\xi + i\eta) = x - iy$$

odwzorowująca półkole w płaszczyźnie naprężeń  $\omega$  na płaszczyznę fizyczną  $z$ . Na Rys.5 przedstawiono odpowiedniość punktów z płaszczyzny  $z = x + iy$  i  $\omega$ .



Rys.5.

Odwzorowanie  $F(\omega)$  musi spełniać następujące warunki brzegowe:

$$1^{\circ} \quad \operatorname{Im}[F(w)] = 0 \quad w \in A'D^{\alpha}C'$$

(brzegi szczeliny są wolne od naprężeń  $\sigma_{32}$ )

$$2^{\circ} \quad \text{a) } F(ip/k) = \infty \quad \text{i} \quad (p=0 \Rightarrow F(w) \xrightarrow{w \rightarrow 0} \frac{K^2}{2\pi k^2} \frac{1}{w^2})$$

(naprężenia w nieskończoności  $\sigma_{13}^{\infty} = -p$ , a gdy  $p=0$ , to:  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{K}{\sqrt{2\pi z}}$  - uplastycznienie bliskiego zasięgu)

(3.3)

$$\text{b) } F(i) = F(-i) = 0$$

(wierzchołek szczeliny ma współrzędne (0,0) )

$$3^{\circ} \quad \operatorname{Im}[w \cdot F(w)] = 0 \quad w \in A'B'C'$$

(granica strefy plastycznej jest zamknięta krzywą o równaniu  $R(\theta) = e^{i\theta} F(e^{i\theta})$  )

Wprowadzając funkcję analityczną  $G(w) = w \cdot F(w)$  otrzymujemy dla niej odpowiednio:

$$1^{\circ} \quad \operatorname{Re}[G(w)] = 0 \quad w \in A'D^{\alpha}C'$$

$$2^{\circ} \quad \text{a) } G(ip/k) = \infty \quad \text{i} \quad (p=0 \Rightarrow G(w) \xrightarrow{w \rightarrow 0} \frac{K^2}{2\pi k^2} \frac{1}{w})$$

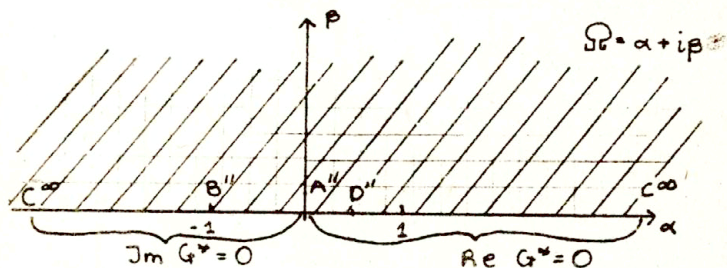
(3.4)

$$\text{b) } G(i) = G(-i) = 0$$

$$3^{\circ} \quad \operatorname{Im}[G(w)] = 0 \quad w \in A'B'C'$$



Za pomocą odwzorowania  $\Omega = \left( \frac{1+iw}{1-iw} \right)^2$  przekształcamy półkole z płaszczyzny  $w$  (Rys.5) na półpłaszczyznę (Rys.6):



Rys.6.

Warunki (3.4) dla  $G^*(\Omega) = G(w(\Omega))$  transformują się na:

$$1^\circ \quad \operatorname{Re}[G^*(\Omega)] = 0 \quad \Omega \in A''D''C''$$

$$2^\circ \quad \text{a) } G^*\left(\frac{1-p/k}{1+p/k}\right) = \infty$$

$$(3.5) \quad \text{b) } (p=0 \Rightarrow G^*(\Omega) \xrightarrow{\Omega \rightarrow 1} \frac{K^2}{2\pi k^2} \frac{1}{\Omega-1})$$

$$\text{b) } G^*(0) = G^*(\infty) = 0$$

$$3^\circ \quad \operatorname{Im}[G^*(\Omega)] = 0 \quad \Omega \in A''B''C''$$

Funkcja  $G^*(\Omega)$ , spełniająca warunki (3.5) jest [11]:

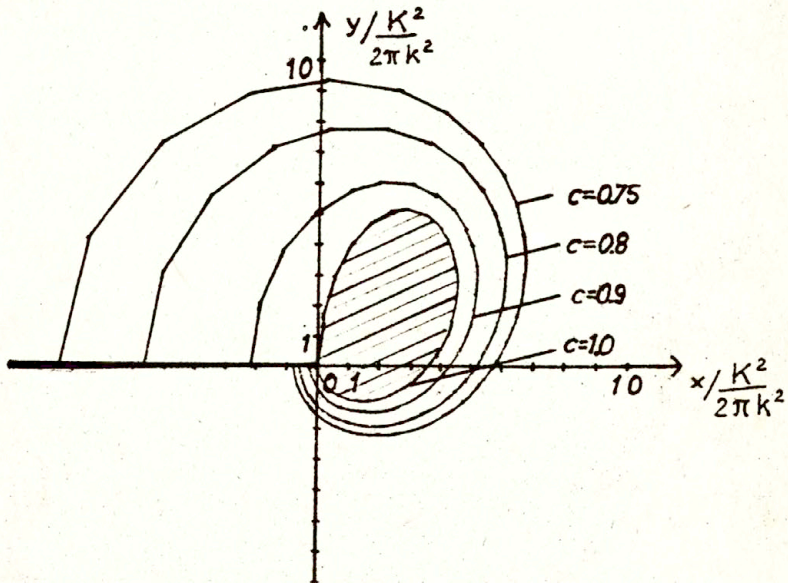
$$(3.6) \quad G^*(\Omega) = \frac{2K^2}{\pi k^2} \frac{i\sqrt{\Omega}}{\Omega - \frac{1-p/k}{1+p/k}}$$

zatem podstawiając  $\Omega = (1 + i\omega)^2 / (1 - i\omega)^2$  do (3.6):

$$(3.7) \quad F(\omega) = \frac{K^2}{2\pi k^2} \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right) \frac{(1 + p/k)^2}{1 + p^2/k^2 + i \frac{p}{k} \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)}$$

Przy  $p=0$  rozwiązanie (3.7) pokrywa się z rozwiązaniem Hulta i McClintocka [7]. Krzywa, stanowiąca granicę sprężysto-plastyczną, ma postać:

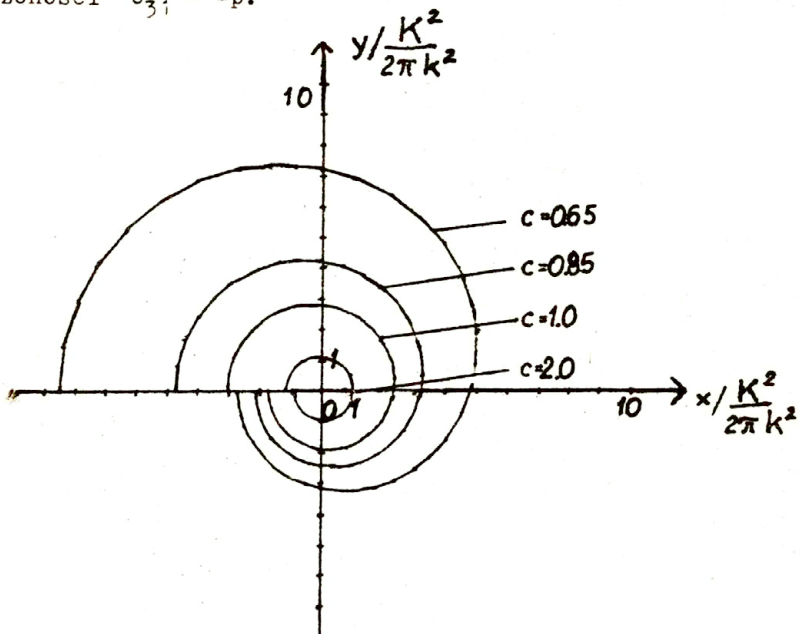
$$(3.8) \quad R(\theta) = \frac{K^2}{\pi k^2} \cdot \cos\theta \cdot \frac{(1 + p/k)^2}{1 + p^2/k^2 - 2 \frac{p}{k} \sin\theta}$$



Rys.7.

Na Rys.7. przedstawiono krzywą (3.8) i linię stałej

intensywności naprężeń  $\sigma_{32}^2 + \sigma_{31}^2 = c^2$  dla  $p/k = 0.5$  i  $c = 1; 0.9; 0.8; 0.75$ . Brak symetrii krzywej  $R(\theta)$  względem osi  $x$ , przy  $p \neq 0$  spowodowany jest zadaniem typem obciążenia w nieskończoności  $\sigma_{31}^\infty = -p$ .



Rys. 8.

b. Zadanie sprężyste.

Rozwiązaniem analogicznego zadania sprężystego jest potencjał naprężeń:

$$(3.9) \quad \sigma_{32}(x,y) + i\sigma_{31}(x,y) = \frac{K}{k\sqrt{2\pi z}} - ip.$$

Na Rys. 8 przedstawiono linie stałej intensywności naprężeń  $\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 = c^2$  dla  $p = 0.5$  i  $c = 0.65; 0.8; 1; 2$ : Żadna

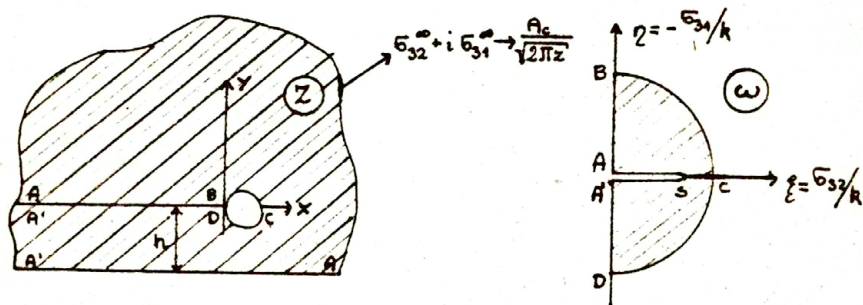
z krzywych nie jest zamknięta. Porównując Rys.6 z Rys.7 można zauważyć, że rozwiązania są podobne do siebie daleko od wierzchołka szczeliny.

#### 4. SPREŻYSTO/PLASTYCZNA PÓŁPŁASZCZYŻNA ZE SZCZELINĄ

Rozpatrzmy zagadnienie szczeliny w półpłaszczyźnie. Niech dana będzie nieobciążona, półnieskończona szczelina w odległości  $h$  od brzegu półpłaszczyzny obciążonej w nieskończoności obciążeniem typu  $z^{-1/2}$ , tzn.:

$$\sigma_{32}^{\infty} + i\sigma_{31}^{\infty} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{A_c}{\sqrt{2\pi z}} \quad A_c = \text{const.}$$

a na brzegu składowa naprężenia  $\sigma_{31} = 0$  (Rys.9a):



Rys.9.

Poszukujemy funkcji  $F(\omega)$  (3.2) spełniającej na półkole z wycięciem (Rys.9b) warunki:



$$\begin{aligned}
 &1^\circ \quad \operatorname{Im}[F(\omega)] = 0 \quad \omega \in BA, A'D \\
 &2^\circ \quad \operatorname{Im}[F(\omega)] = h \quad \omega \in ASA' \\
 (4.1) \quad &3^\circ \quad \operatorname{Im}[\omega \cdot F(\omega)] = 0 \quad \omega \in BCD \\
 &4^\circ \quad F(A) = F(A') = \infty \quad \text{i} \quad F(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{A_c^2}{2\pi\omega^2}
 \end{aligned}$$

Wartość stałej  $s$  (Rys.9b) jest nieznaną, jest to maksimum składowej  $\sigma_{32}(x, -h)$  tensora naprężenia na brzegu półpłaszczyzny.

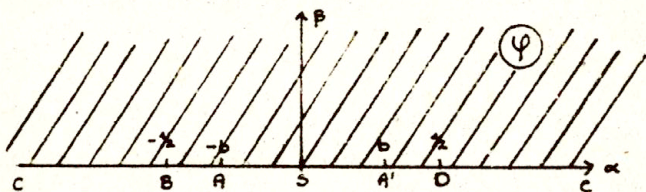
Przyjmijmy tak, jak w przykładzie 3 funkcję  $G(\omega) = \omega \cdot F(\omega)$ , dla której warunki brzegowe mają postać:

$$\begin{aligned}
 &1^\circ \quad \operatorname{Re}[G(\omega)] = 0 \quad \omega \in BA, A'B \\
 &2^\circ \quad \operatorname{Im}[G(\omega)] = \omega \cdot h \quad \omega \in ASA' \\
 (4.2) \quad &3^\circ \quad \operatorname{Im}[G(\omega)] = 0 \quad \omega \in BCD \\
 &4^\circ \quad G(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{A_c^2}{2\pi\omega}
 \end{aligned}$$

Funkcja:

$$(4.3) \quad \varphi = \frac{\sqrt{(1 - s^2\omega^2)(s^2 - \omega^2)}}{(1 - s^2\omega^2) + (s^2 - \omega^2)}$$

odzworowuje półkole z wycięciem (Rys.9b) na półpłaszczyźnie  $\varphi = \alpha + i\beta$  (Rys.10)



Rys. 10.

z odpowiednimi warunkami brzegowymi dla  $G^*(\varphi) = G(\varpi(\varphi))$ :

$$1^{\circ} \quad \text{Im}[G^*(\varphi)] = 0 \quad \varphi \in (-\infty, -1/2)$$

$$2^{\circ} \quad \text{Re}[G^*(\varphi)] = 0 \quad \varphi \in (-1/2, -b)$$

$$3^{\circ} \quad \text{Im}[G^*(\varphi)] = h(\varphi) \\ \varphi \in (-b, b), \quad h^2(\varphi) = \frac{h(\sqrt{1/4-\varphi^2} - \sqrt{1/4-b^2})}{\sqrt{1/4-\varphi^2} + \sqrt{1/4-b^2}}$$

$$(4.4) \quad 4^{\circ} \quad \text{Re}[G^*(\varphi)] = 0 \quad \varphi \in (b, 1/2)$$

$$5^{\circ} \quad \text{Im}[G^*(\varphi)] = 0 \quad \varphi \in (1/2, \infty)$$

$$6^{\circ} \quad \text{a) } G^*(-b) = G^*(b) \longrightarrow \frac{A_c^2}{2\pi \sqrt{b} \pm \varphi} \sqrt{\frac{1}{2b} - 2b}, \\ b = \frac{s}{1+s^2}$$

$$\text{b) } G^*(\infty) = \text{const.}$$

Jest to zagadnienie Keldysza-Sedova (Signoriniego) dla półpłaszczyzny [11], którego rozwiązaniem jest funkcja:

$$(4.5) \quad G^*(\varphi) = \frac{\sqrt{R(\varphi)}}{\pi i} \int_{-b}^b \frac{i h(\tau)}{\sqrt{R(\tau)}} \frac{1}{\tau - \varphi} d\tau + C \sqrt{R(\varphi)}$$

gdzie:

$$R(\varphi) = \frac{\varphi^2 - 1/4}{\varphi^2 - b^2}, \quad h(\tau) = h \left( \frac{\sqrt{1/4 - \tau^2} - \sqrt{1/4 - b^2}}{\sqrt{1/4 - \tau^2} + \sqrt{1/4 - b^2}} \right)^{1/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wykonując całkę (4.5) [12], otrzymujemy:

$$(4.6) \quad G^*(\varphi) = \frac{h}{\pi} R(\varphi) \left[ \frac{\sqrt{1/4 - b^2}}{\sqrt{1/4 - \varphi^2}} \ln \frac{4(\varphi\sqrt{1/4 - b^2} - b\sqrt{1/4 - \varphi^2})^2}{\varphi^2 - b^2} - \ln \frac{\varphi - b}{\varphi + b} \right] + C \sqrt{R(\varphi)}.$$

Gdy stała  $s$  dąży do zera, to nasze zagadnienie powinno sprowadzić się do zadania płaszczyzny z jedną półnieskończoną szczeliną w ośrodku poddanym w nieskończoności obciążeniom typu  $K_{III}/k\sqrt{2\pi z}$ , tzn.  $\sigma_{32} + i\sigma_{31} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} K_{III}/\sqrt{2\pi z}$ , gdzie  $K_{III}$  - współczynnik intensywności naprężeń. Jest to równoważne warunkowi, że dla  $s = 0 \Rightarrow F(w) \xrightarrow{w \rightarrow 0} K_{III}^2/k^2 2\pi w^2$ .

Podstawiając związek (4.3) do (4.6) i przyjmując  $b = 0$  otrzymujemy:  $F(w) = C \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{w^2} \right)$ , zatem  $C = \frac{K_{III}}{k^2 \pi}$ . Jest to znane rozwiązanie [7].

Aby wyznaczyć wartość stałej  $s$  skorzystamy z warunku  $6^\circ$  związków (4.4). Dla  $\varphi \rightarrow \pm b$  funkcja  $G^*(\varphi)$  (4.6), przyjmuje wartość:



$$(4.7) \quad G^*(\pm b) = \frac{h}{\pi} \frac{\sqrt{1/4 - b^2}}{\sqrt{2b} \sqrt{b \mp \varphi}} \ln(1 - 4b^2) + C \frac{\sqrt{1/4 - b^2}}{\sqrt{2b} \sqrt{b \mp \varphi}} .$$

Przyrównując (4.7) do  $A_c^2/2\pi \sqrt{\frac{1}{2b} - 2b} \frac{1}{\sqrt{b \mp \varphi}}$  (4.4 6o)

i podstawiając  $b = s/(1 + s^2)$ , otrzymujemy:

$$(4.8) \quad s^2 = \frac{\exp\left(\frac{K_{III}^2 - A_c^2}{2hk^2}\right) - 1}{\exp\left(\frac{K_{III}^2 - A_c^2}{2hk^2}\right) + 1}$$

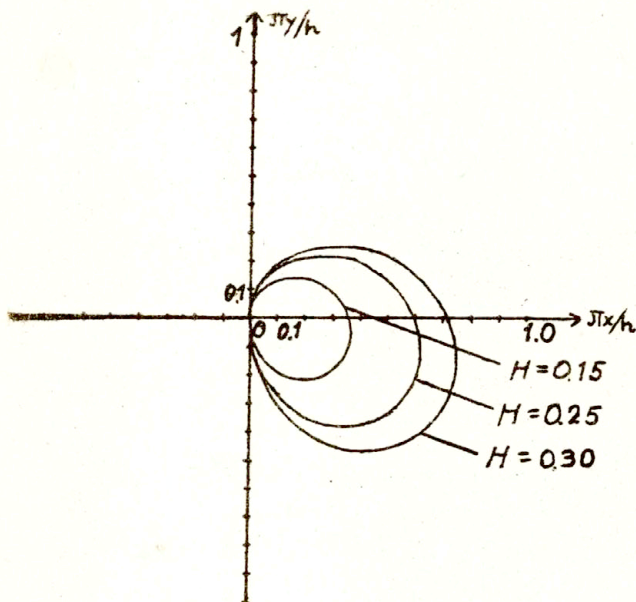
Granica strefy plastycznej  $R(\theta) = e^{i\theta} F(e^{i\theta})$  opisana jest wzorem:

$$R(\theta) = \frac{h}{\pi} \frac{\sqrt{\varphi^2 - 1/4}}{\sqrt{\varphi^2 - b^2}} \left[ \frac{\sqrt{1/4 - b^2}}{\sqrt{\varphi^2 - 1/4}} \operatorname{arctg} \frac{2b\varphi \sqrt{(1/4 - b^2)(\varphi^2 - 1/4)}}{b^2(\varphi^2 - 1/4) - \varphi^2(1/4 - b^2)} + \ln \frac{\varphi + b}{\varphi - b} + \frac{K_{III}}{k^2 h} \right]$$

przy  $\varphi = -\sqrt{1 + s^2} - 2s \cos\theta / 2(1 + s) \sin\theta, \quad -\pi < \theta < \pi$

Na Rys.11 przedstawiono wykresy krzywych będących granicami strefy plastycznej dla  $A_c = K_{II} = K_{III} / \sqrt{2\pi}$  (współczynnik intensywności naprężeń dla półpłaszczyzny osłabionej półnieskończoną szczeliną w odległości  $h$  od brzegu, gdy ciało obciążone jest w nieskończoności naprężeniem typu  $K_{III} / \sqrt{2\pi z}$ ) dla różnych wartości parametru  $H = K_{III} (1 - 1/2\pi) / k^2 h$ ,  $h = 0.15; 0.25; 0.3$ .





Rys. 11.

#### L I T E R A T U R A

1. G.P.CHEREPANOV, Mechanics of brittle fracture, McGraw-Hill International Book Company, 1979.
2. L.H.LARSSON ed., Advances in elasto-plastic fracture mechanics, Applied Science Publishers Ltd., London, 1970.
3. T.M.BANKS, A.GARLICK, The form of crack tip plastic zones, Eng.Fract.Mech., 19, 3, 1984.
4. YU DAL, O razvitij ustalostnyh treščin v plastinach, Deformacij splošnyh sred i upravlenije dviženija, Izd. Leningr.Univers., 1984.

5. M.A.GREKOV, O vlijanii dvuchosnoj nagruzki na razmery plastičeskoj zony okolo treščiny, Problemy mehaniki deformiruemogo tverdogo tela, Izd.Lenigr.Univ., 1982.
6. N.P.ANDRIANOPOULOS, P.S.THEOCARIS, The Griffith-Orowan fracture theory revisited - the T-criterion, Int.J.Mech. Sci., 27, 11/12, 1985.
7. J.A.HULT, F.A.McCLINTOCK, [w:] Proceedings of the 9-th International Congress of Applied Mechanics, Brussels, ss.51-59, 1956.
8. J.RICE, Contained plastic deformation near cracks and notches under longitudinal shear, Int.J.Fract.Mech., 2, 426-447, 1966.
9. B.D.ANIN, G.P.ČEREPANOV, Uprugo-plastičeskaja zadača, Izd. "Nauka", Novosibirsk, 1983.
10. J.RICE, Mathematical analysis in the mechanics of fracture, [w:] Fracture, Wyd. H.Liebowitz, Academic Press, New York and London, 1968.
11. N.I.MUSKHELISHVILI, Singular integral equations, P.Nprdhoff N.V., 1953.
12. A.P.PRUDNIKOV, YU.A.BRYČEV, O.I.MARIČEV, Integraly i riady, Moskva, "Nauka", 1981.

## SUMMARY

The structure of near-tip stress and shape of plastic zone is analyzed for cracks in infinite elastic - perfectly plastic solids under anti-plane strain conditions. Three cases are considered: an infinite crack with stress applied on its surfaces, an infinite crack in external load and an infinite crack in a half-plane.