

Prace habilitacyjne

Jan Piwnik

ANALIZA OSIOWO-SYMETRYCZNYCH
PROCESÓW OBRÓBKI PLASTYCZNEJ

44/1985

P.269



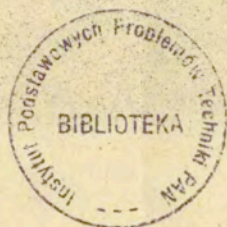
WARSZAWA 1985

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 listopada 1985 r.



56905



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark.wyd. 9 Ark.druk. 13,5
Oddano do drukarni w listopadzie 1985 r.
Nr zamówienia 688/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

JAN PIWNIK

Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy w Białymstoku

Pracownia Mechaniki Doświadczalnej ZMOC IPPT PAN

w Warszawie

ANALIZA OSIOWO-SYMETRYCZNYCH PROCESÓW OBRÓBKI PLASTYCZNEJ

1. WPROWADZENIE

1.1. Uwagi ogólne

Znajomość rozkładu naprężeń i odkształceń w obszarze uplastycznienia jest podstawą analizy technicznej procesów obróbki plastycznej. Wyznaczanie pól naprężeń i odkształceń w tych procesach opiera się głównie na wynikach teorii plastyczności oraz doświadczalnych metodach mechaniki ośrodka ciągłego. Analiza doświadczalna zajmuje się najczęściej rejestracją przemieszczeń punktów strefy plastycznej, pomiarami twardości i sił oraz wyznaczaniem różnych funkcji materiałowych. Doświadczalne rozkłady prędkości i niejednorodności właściwości materiału w obszarze płynięcia plastycznego można wykorzystać do sformułowania rzeczywistych danych brzegowych. Dotyczy to w szczególności zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi. Wobec niejednorodności i niestacjonarności stanu naprężenia rola eksperymentu w analizie procesów plastycznego płynięcia jest decydująca. Doświadczalne przebiegi pól kinematycznych w polu płynięcia są podstawą do weryfikacji rozwiązań zagadnień brzegowych uzyskanych na przykład metodą charakterystyk [1,2,3]. Jednocześnie dane z doświadczeń są podstawową wskazówką służącą do przewidywania postaci nowych rozwiązań zagadnień brzegowych. Treść i cel

naukowy eksperymentu są związane z aktualnym stanem teorii plastyczności. Literatura metod doświadczalnych jest bardzo obszerna. Można tu wymienić między innymi monografie [4,5,6,7,8,9,10,11,12].

Racjonalną analizę zjawisk występujących w procesach deformacji plastycznych mogłaby umożliwić teoria plastyczności. W odróżnieniu od kosztownego eksperymentu można by przy jej pomocy przewidzieć historię procesu, wyjaśnić wpływ wzmocnienia i innych efektów na parametry technologiczne procesu. Możliwości teorii plastycznego płynięcia w tym zakresie są jednak poważnie ograniczone z powodu trudności matematycznych przy rozwiązywaniu podstawowego układu równań stanu plastycznego i braku warunków brzegowych. W większości przypadków równania statyki są sprzężone z równaniami kinematyki i uzyskanie rozwiązań zagadnień brzegowych jest niemożliwe. Trzeba przyznać jednak, że znane rozwiązania idealnej plastyczności reprezentują szeroki wachlarz zagadnień brzegowych obróbki plastycznej. Obszerny przegląd tych rozwiązań można znaleźć na przykład w monografiach [13,14,15,16]. Podstawowym narzędziem matematycznym stosowanym do rozwiązywania zagadnień brzegowych idealnej plastyczności jest metoda charakterystyk. Metoda ta łączy w sobie ścisłość i efektywność rachunkową. Podstawowe znaczenie mają obliczenia obciążeń wywołujących płynięcie plastyczne na podstawie twierdzeń ekstremalnych o ocenie górnej.

Teoretyczna analiza procesów obróbki plastycznej jest możliwa w ogóle po wprowadzeniu szeregu bardzo istotnych założeń upraszczających. Wybór uproszczeń jest podyktowany celem badań i możliwościami użycia aparatu matematycznego. Ważnym przykła-

dem są tu osiowo-symetryczne procesy plastycznego formowania metali. Celem rozsprzężenia rozwiązań dla naprężeń i prędkości przyjmuje się warunek plastyczności Treski i postulat pełnej plastyczności Haara-Kármána [17, 18]. Poprawność takiego podejścia z punktu widzenia opisu zachowania się rzeczywistych materiałów jest sprawą kontrowersyjną i wymaga weryfikacji. Uproszczenia te sprowadzają cały układ równań do statycznie wyznaczalnego układu czterech równań różniczkowych dla naprężeń i dwóch równań dla prędkości płynięcia, które są typu hiperbolicznego.

Znane rozwiązania zagadnień osiowo-symetrycznych dotyczą głównie takich zadań, w których dane są warunki brzegowe. Typowym przykładem jest rozwiązywanie zagadnienie nośności granicznej pręta osłabionego nacięciem. Inne rozwiązanie zadania osiowo-symetrycznego to teoria pomiaru twardości, gdzie zastosowano metodę iteracyjną. Znane rozwiązania zadań osiowo-symetrycznych na gruncie teorii plastycznego płynięcia znajdują się w pracach [18, 19, 20, 21].

Jednak w większości problemów płynięcia osiowo-symetrycznego dane brzegowe są niewystarczające do jednoznacznego określenia pola naprężeń bez wprowadzania dodatkowych założeń. Są to takie osiowo-symetryczne procesy jak: ciągnięcie drutu przez stożkową matrycę, wyciskanie prętów i rur przez matrycę, osiowo-symetryczne procesy kucia itp. Otrzymane dotychczas rozwiązania takich zadań dotyczą jedynie obliczeń sił na podstawie drastycznie uproszczonych schematów płynięcia plastycznego [22].

Interesującym podejściem jest przewidywanie pól prędkości i odkształceń na podstawie założonej z góry kinematycznie dopu-

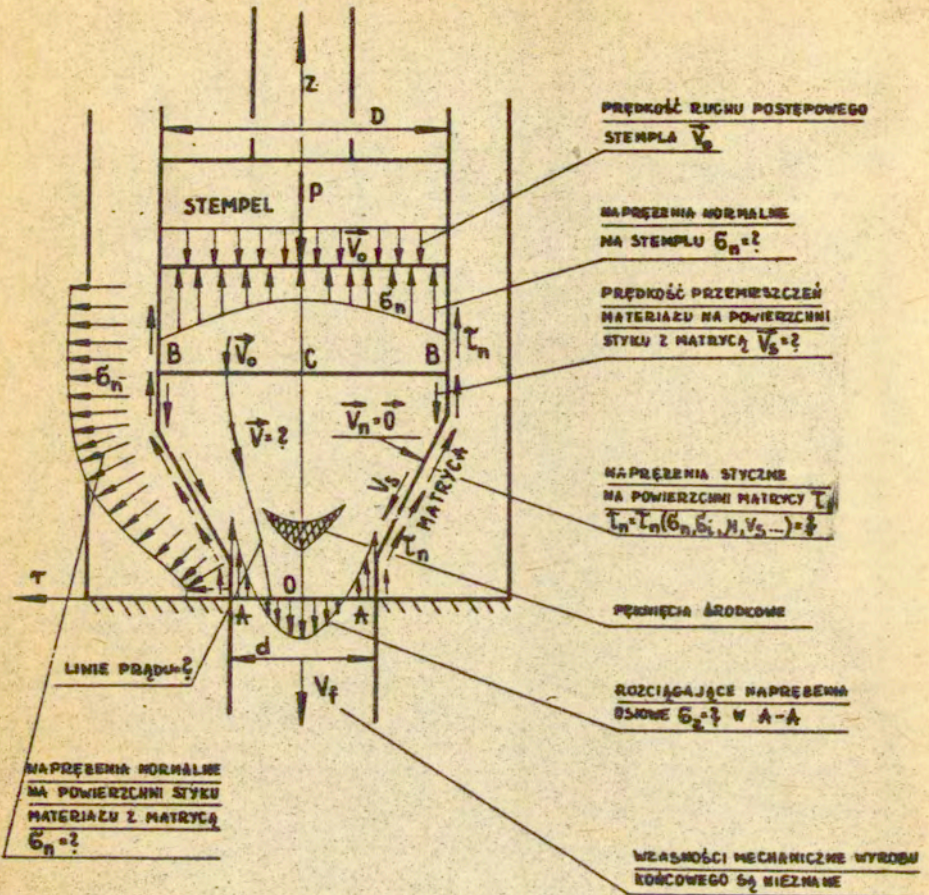
szczalnej postaci funkcji prądu utozsamianej z wydatkiem przepływu [23,24,25,26,27,28]. Jednak jak dotąd brakuje jednoznacznych rozwiązań dla naprężeń opartych na koncepcji funkcji prądu. Posiadanie dokładnych rozwiązań zagadnień osiowo-symetrycznych z mieszanymi warunkami brzegowymi pozwoliłoby na obliczenie pól naprężeń i odkształceń dla bardzo szerokiej grupy procesów obróbki plastycznej metali. Rozwiązania takie mogłyby być wykorzystane do obliczeń naprężeń kontaktowych i wyznaczania najkorzystniejszych ze względu na jakość wyrobu kształtów matryc. Posłużyłyby do przewidywania tekstury materiału i własności mechanicznych końcowych wyrobów. Byłyby punktem wyjścia do rozumienia i opisu procesów wiązkiego rozdzielania deformowanego plastycznie metalu [11,29,30]. Podstawowe znaczenie mają próby poszukiwania rozwiązań zagadnień brzegowych w osiowej symetrii z uwzględnieniem wzmocnienia i efektów dynamicznych. Wzmocnienie materiału obserwujemy głównie w procesach obróbki plastycznej na zimno. Przejawia się ono zwiększaniem wytrzymałości przy wroście odkształceń. Pomijanie tej cechy w obliczeniach może prowadzić do dużych błędów.

Stąd każda próba poszukiwania nowych, dokładniejszych rozwiązań zagadnień osiowo-symetrycznych z mieszanymi warunkami brzegowymi przyspiesza rozwój teorii i technologii obróbki plastycznej. Na uwagę zasługują tu procesy wyciskania na zimno. Problem ten jest tematyką przedstawionej pracy.

1.2. Cel i zakres pracy

Niniejsze opracowanie stanowi omówienie istniejących metod uwzględniania wzmocnienia w obliczeniach procesów plastycznego formowania metali i następnie przedstawienie własnych wyników teoretycznej i doświadczalnej analizy procesu osiowo-symetrycznego wyciskania z uwzględnieniem wzmocnienia. W procesie tym materiał pod naciskiem stempla jest wyciskany przez zwięzający się otwór matrycy. Schemat tego procesu i związane z nim ważniejsze problemy zestawione w formie pytań pokazano na rys. 1.1. Praca zawiera własną próbę odpowiedzi na większość z pytań postawionych na rys. 1.1., z których najważniejsze to znajomość pól prędkości i naprężeń. Podstawowym narzędziem analizy procesu wyciskania było nowe, przybliżone rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego teorii plastycznego płynięcia z mieszanymi warunkami brzegowymi. Podstawowy układ równań stanu plastycznego w osiowej symetrii z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa zastąpiono jednym, nieliniowym, niehiperbolicznym równaniem względem funkcji prądu $\Phi(r,z)$. Zaproponowano nowe, przybliżone rozwiązanie tego równania w formie umożliwiającej włączenie do niego doświadczalnych informacji o danych brzegowych i niejednorodności plastycznej. Konstrukcję teoretycznej, nieznannej funkcji prądu $\Phi(r,z)$ oparto na wnioskach z obszernych, własnych badań doświadczalnych procesu wyciskania na zimno stopu aluminium PA2. Pola prędkości i naprężeń obliczono z uwzględnieniem wzmocnienia izotropowego. Wyniki teoretyczne porównano z doświadczalnymi.

W rozdziale drugim obok sformułowania problemu brzegowego



$OBDA$ - OBSZAR UPŁASTYCZENIA -
 ZŁADOME TENSORA NAPRĘŻEŃ
 I ODKSZTAŁCEN W $OBDA$ σ_{ij} , ϵ_{ij}
 NAJKORZYSTNIEJSZY ZE WZGLĘDU NA
 JAKOŚĆ WYROBU KSZTAŁT MATRYCY $Rb(z)$

RYS. 1-1

omówiono istniejące w literaturze iteracyjne i doświadczalnie-obliczeniowe metody uwzględnienia wzmocnienia materiału w procesach deformacji plastycznych. Ze względu na ścisły związek z tematem pracy i brak szerszych opracowań, większą część rozdziału drugiego przeznaczono na analizę metod doświadczalnie-obliczeniowych występujących w publikacjach pod nazwą "wizjoplastyczności".

Rozdział trzeci zawiera przede wszystkim prezentację doświadczalnych przebiegów pól kinematycznych w obszarach uplastycznienia czterech wyciskanych współbieżnie próbek z PA2 w temperaturze normalnej, t.j. z udziałem wzmocnienia. Parametry procesu tak dobierano, żeby zbadać wpływ stopnia redukcji i kąta rozwarcia stożka matrycy na postać funkcji prądu utożsamianej dalej z wydatkiem przepływu. Do wygładzania dyskretnej, doświadczalnej funkcji prądu oraz operacji jej kilkakrotnego różniczkowania koniecznej przy obliczaniu prędkości odkształceń wykorzystano funkcje sklejane (spline). Wzmocnienie, identyfikowane z niejednorodnością plastyczną, określano doświadczalnie dwoma sposobami, t.j. hipotezą jednej krzywej umocnienia oraz metodą pól twardości. Dane te pozwoliły sformułować rzeczywiste warunki brzegowe na powierzchniach styku materiału z narzędziem. Ważnym i nowym wynikiem uzyskanym na stosunkowo dużym materiale doświadczalnym jest ustalenie, że do dokładnej aproksymacji funkcji prądu w polu płynięcia materiału poddanego wyciskaniu można efektywnie stosować szeregi trygonometryczne dwóch zmiennych w postaci separowalnej. Nowym elementem było pokazanie jakościowej i ilościowej zależności pomiędzy wymiarami matrycy i przebiegami funkcji prądu w deformowanym pla-

stycznie metalu. Zależności te dla stopu PA2 sformułowano w postaci empirycznych wzorów. Nowe wyniki badań doświadczalnych stanowiły wskazówkę przy poszukiwaniu rozwiązań teoretycznych rozpatrywanego problemu.

Następnie w rozdziale czwartym przeprowadzono teoretyczną analizę procesu wyciskania osiowo-symetrycznego. Układ równań stanu plastycznego w osiowej symetrii sprowadzono do jednego równania różniczkowego, cząstkowego typu niehiperbolicznego. Równanie to zawiera niewiadomą funkcję prądu $\phi(\tau, z)$ oraz uwzględnia niejednorodność plastyczną, która zależy od intensywności odkształceń. Niejednorodne i nieliniowe równanie względem $\phi(\tau, z)$ wyprowadzono przy warunku plastyczności Hubera-Misesa z pominięciem uproszczenia Haara-Kármána. Nieliniowe równanie wyjściowe sprowadzono do równania różniczkowego zwyczajnego dzięki odpowiedniej, z góry założonej postaci funkcji prądu $\phi(\tau, z)$. Konstrukcję funkcji $\phi(\tau, z)$ zaproponowano w formie podwójnego, separowalnego względem „z” szeregu trygonometrycznego. Szereg ten jest sumą dwóch różnych szeregów. Pierwszy z nich reprezentuje informacje o danych brzegowych odnośnie tarcia. Uważamy, że wyrazy tego szeregu są zadane i określa się je przyjętym związkiem na tarcie lub doświadczalnie. Wyrazy drugiego szeregu zawierają nieznanne człony zależne od zmiennej „z”. Wyrazy te wyznaczamy iteracyjnie z wyjściowego, nieliniowego równania stanu plastycznego przy ustalonej współrzędnej „T” odpowiadającej linii konturu matrycy. Po podstawieniu ich do założonej wcześniej postaci funkcji prądu otrzymujemy ciągłą i n-krotnie różniczkowalną funkcję $\phi(\tau, z)$ w każdym punkcie obszaru uplastycznienia. Funkcja $\phi(\tau, z)$ wyznaczona z równania stanu plastycznego spełnia ściśle wszystkie warunki brzegowe, związki Lévy-Misesa oraz

z dużą dokładnością równania ruchu. Pola prędkości przemieszczeń i odkształceń otrzymane z $\Phi(\tau, z)$ są ciągłe i różniczkowalne w całym polu płynięcia plastycznego. Kolejno z równań równowagi i związków płynięcia obliczono pola naprężeń. Warunek dodatniości mocy w całym polu uplastycznionym jest zachowany z założenia.

Obliczenia jednego przykładu przy rzeczywistych warunkach brzegowych na powierzchni styku z matrycą wykazały dużą efektywność proponowanego podejścia. Pozwoliło to przeprowadzić ścisłą weryfikację doświadczalną teoretycznych pól prędkości, jak też hipotezy Haara-Kármána.

Przedstawione rozwiązanie jest z konieczności przybliżone, ale umożliwia obliczenie pól prędkości i naprężeń w obszarze uplastycznionym wyciskanego, cylindrycznego pręta z różnymi warunkami na tarcie. Proponowane rozwiązanie może być szczególnie przydatne do obliczeń pól naprężeń w zadaniach, gdzie pola prędkości i niejednorodności plastycznej są zadane doświadczalnie.

Zbieżność otrzymanego rozwiązania zależy od przyjętych założeń przy wyznaczaniu członów odpowiedzialnych za tarcie, przebiegu procesu iteracji jak też od założonej postaci funkcji prądu. Założenia te można łatwo zweryfikować, ponieważ wyrażają się one wielkościami kinematycznymi. Analityczna postać funkcji prądu $\Phi(\tau, z)$ może uwzględniać wzmocnienie i efekty dynamiczne.

Prezentowane podejście pozwoliło otrzymać efektywne rozwiązanie dla pól prędkości i naprężeń w procesie wyciskania na zimno. Jednocześnie otrzymane wyniki są nowym elementem w zakresie analizy zagadnień osiowo-symetrycznych z mieszanymi warunkami brzegowymi.

2. METODY OBLICZENIOWE PROCESÓW OBRÓBKI PLASTYCZNEJ UWZGLĘDNIAJĄCE WZMOCNIENIE MATERIAŁU

2.1. Formułowanie zagadnień brzegowych i uwagi o metodach ich rozwiązywania

Sformułowanie zagadnienia brzegowego dla izotermicznej teorii plastycznego płynięcia we współrzędnych X_i ($i=1,2,3$) polega na zestawieniu równań ruchu, warunku plastyczności i stowarzyszonych z nim związków płynięcia plastycznego.

Trzy równania ruchu mają postać:

$$(2.1.1) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right), \quad \text{gdzie}$$

F_i - składowe sił masowych,

ρ - gęstość materiału,

v_i - składowe wektora prędkości.

Ogólny warunek plastyczności opisujący zmianę kształtu wyjściowej powierzchni plastyczności, jej przesunięcie i obrót może być dany równaniem [31]:

$$(2.1.2) \quad 2F = N_{ijkl} (\delta_{ij} - \delta_{ij}) (\delta_{kl} - \delta_{kl}) - 2k^2$$

Tensor S_{ij} jest dewiatorem tensora naprężenia Cauchy'ego i wyznaczamy go z zależności:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Funkcja k oznacza granicę plastyczności przy czystym ścinaniu. Tensory N_{ijkl} i δ_{ij} są funkcjami odkształcenia plastycznego. Dyskusję tego warunku zawierają również prace [32,33]. Teoria plastycznego płynięcia jest nieczuła na skalę czasu i opiera się

na założeniu istnienia potencjału plastycznego, uożsamionego z warunkiem plastyczności. Wówczas otrzymujemy sześć zależności między składowymi tensora prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$ wyrażonego składowymi wektora prędkości V_i a składowymi wektora naprężenia σ_{ij} :

$$(2.1.3) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} .$$

Skalarny mnożnik λ zależy od czasu i położenia punktu w obszarze plastycznym. Z warunku mocy dysypowanej $\lambda \geq 0$.

Warunki brzegowe zadajemy w postaci związków na prędkości, przemieszczenia, naprężenia i siły na powierzchniach swobodnych oraz na powierzchniach kontaktu z narzędziem. Przyjęcie wybranego związku na naprężenia styczne wywołane tarcie jest związane z posiadaniem informacji o zmianach wartości naprężeń stycznych jak też ich kierunku. Aktualnie posiadamy skąpe dane o przebiegach wartości naprężeń stycznych na powierzchniach styku materiału z narzędziem [34,35,36,37]. Naprężenie styczne τ_n , wywołane siłą tarcia działającą na powierzchni kontaktu, ma zawsze kierunek przeciwny do kierunku przesuwania się materiału po powierzchni narzędzia. Równania: (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) opisują przy zadanych warunkach brzegowych dynamiczne zagadnienie plastycznego płynięcia.

W ogólnym przypadku należy wyznaczyć sześć składowych σ_{ij} , trzy składowe V_i i niewiadomą λ . Dotychczas nie opracowano efektywnych metod rozwiązania zagadnienia dynamicznego, nawet dla przypadków płaskiego i osiowo-symetrycznego płynięcia z kinematycznym czy izotropowym wzmocnieniem. Znane metody obliczeń odnoszą się do zagadnień quasi-statycznych idealnej plastyczno-

ści. Przyjmuje się, że siły masowe i bezwładności są pomijalnie małe. Materiał jest izotropowy i jednorodny. Mimo tych uproszczeń w stosunku do zagadnień dynamicznych, rozwiązanie ogólnego przypadku quasi-statycznego płynięcia napotyka na duże trudności matematyczne.

Sformułowanie zagadnień osiowo-symetrycznych dla ciała izotropowego i sztywno-idealnie plastycznego polega na zestawieniu równań równowagi, warunku uplastycznienia i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia we współrzędnych cylindrycznych: r, z, φ , w których oś z jest jednocześnie osią symetrii. Przyjmuje się przy tym założenie o braku płynięcia w kierunku obwodowym, tj. $V_{\varphi} = 0$ co pociąga znikanie naprężeń:

$$\tau_{\varphi r} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = 0.$$

Przedstawmy wspomniany układ równań z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa i stowarzyszonym z nim prawem płynięcia.

Równania równowagi bez sił masowych i członów bezwładnościowych w układzie współrzędnych: r, z, φ upraszczają się do postaci:

$$(2.1.4.a) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\varphi}}{r} = 0,$$

$$(2.1.4.b) \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.$$

Przyjęcie $\delta_{ij} = 0$ w związku (2.1.2) odpowiada wzmocnieniu izotropowemu. Warunek plastyczności (2.1.2) wyrazi się wówczas w postaci:

$$(2.1.5) \quad (\sigma_r + \sigma_\vartheta)^2 + (\sigma_\vartheta + \sigma_z)^2 + (\sigma_z + \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6k^2(\beta).$$

Funkcja $k(\beta)$ zależy od skalarnego parametru β . Parametr β może być pracą odkształcenia plastycznego albo intensywnością plastycznych odkształceń. Zatem $k(\beta)$ nie zależy od stanu naprężenia. Stąd stowarzyszone z warunkiem (2.1.5) prawo plastycznego płynięcia daje następujące cztery związki pomiędzy składowymi tensora prędkości odkształceń: $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\vartheta, \dot{\epsilon}_z, \dot{\gamma}_{rz}$ a naprężeniami:

$$(2.1.6.a) \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} = \lambda(2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_z),$$

$$(2.1.6.b) \quad \dot{\epsilon}_\vartheta = \frac{v_r}{r} = \lambda(2\sigma_\vartheta - \sigma_z - \sigma_r),$$

$$(2.1.6.c) \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \lambda(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\vartheta),$$

$$(2.1.6.d) \quad \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 3\lambda\tau_{rz}.$$

Powyższe związki płynięcia są identyczne jak przy idealnej plastyczności. Należy jednak zaznaczyć, że skalarny mnożnik λ w przypadku wzmocnienia izotropowego zależy dodatkowo od parametru β . W powyższym układzie siedmiu równań występuje siedem niewiadomych: $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\vartheta, \tau_{rz}, v_r, v_z, \lambda$ określających stan naprężenia i płynięcia.

W pracach [13,38] podano, że układ równań zagadnienia osio-

wo-symetrycznego nie jest hiperboliczny. Ogólne metody rozwiązywania takiego układu nie są znane, dlatego stosuje się różne uproszczenia. Wybór tych uproszczeń jest związany ze sposobem zastąpienia niehiperbolicznego układu równań na taki, który posiada efektywne rozwiązania. W tym wypadku podstawową pomocą przy ustalaniu założeń upraszczających powinny być doświadczenia. Uproszczenia powinny być wyrażone wielkościami kinematycznymi, ponieważ są one wtedy łatwiejsze do weryfikacji doświadczalnej. Najczęściej spotykane uproszczenia podstawowego układu równań zagadnienia osiowo-symetrycznego idą w kierunku rozdzielenia rozwiązań dla naprężeń i dla prędkości.

W pracy [17] wykazano, że jeśli przyjąć warunek plastyczności Treski i warunek pełnej plastyczności Haara-Kármána to otrzymujemy statycznie wyznaczalny układ czterech równań różniczkowych dla naprężeń, który jest typu hiperbolicznego. Składowe prędkości płynięcia określamy z warunków izotropii i nieściśliwości, które stanowią układ dwóch równań różniczkowych typu hiperbolicznego. Z punktu widzenia opisu zachowania się rzeczywistych materiałów największe wątpliwości wzbudza tu warunek równości dwóch, spośród trzech, naprężeń głównych, tj. postulat Haara-Kármána. Postulat ten jest oparty na intuicji i wymaga sprawdzenia doświadczalnego. Wprowadzenie postulatu Haara-Kármána ma cechy zastosowania metody przewidywania w procedurze rozwiązywania [39].

Takie postawienie problemu osiowo-symetrycznego umożliwiło rozwiązanie dużej klasy zagadnień brzegowych o praktycznym znaczeniu. Przegląd tych rozwiązań można znaleźć między innymi w monografiach [14, 15, 20, 38]. Są to najczęściej zadania

statycznie wyznaczalne, w których warunki brzegowe są dane w naprężeniach.

Brak jest natomiast kompletnych rozwiązań zagadnień osiowo-symetrycznych z mieszanymi warunkami brzegowymi. Rozpatrywane zagadnienia należą do statycznie niewyznaczalnych. Znanne analityczne, numeryczne i wykreślne metody rozwiązań przypadków z mieszanymi warunkami brzegowymi dotyczą płaskiego stanu odkształcenia [15,40,41,42,43], chociaż wiele z nich nie posiada przedłużeń pól naprężeń w obszar sztywny. Zastosowanie tych metod w zagadnieniach osiowej symetrii jest niemożliwe ze względu na brak geometrycznego podobieństwa pomiędzy siatką charakterystyk dla prędkości i dla naprężeń. W odróżnieniu od teorii płaskiego stanu odkształcenia w osiowej symetrii nieliniowej, niejednorodny, hiperboliczny układ równań z warunkiem Treski i hipotezą Haara-Kármána posiada osobliwość na osi symetrii i nie da się sprowadzić do postaci liniowej. Osobliwość na osi symetrii eliminowano przez wprowadzenie zastępczego rozwiązania zadania ściskania krępego cylindra w jednorodnym stanie naprężenia [44]. Stąd w otoczeniu osi symetrii obliczenia pól prędkości obarczone są dużymi błędami.

Rozpatrzmy interesujący nas dalej proces wyciskania z nieodkształcalnego cylindrycznego pojemnika, w którym zamknięty jest cylindryczny pręt materiału. Pod naciskiem tłoka materiał wyciskany jest przez stożkowy otwór matrycy, w pobliżu którego tworzy się obszar silnych odkształceń plastycznych. Teorię tego procesu buduje się na ogólnej teorii procesów ustalonych, przebiegających w warunkach osiowej symetrii. W pracy [45] omówiono zagadnienie wyznaczania stanu naprężenia i prędkości płynięcia

w procesach wyciskania przez otwór stożkowy z małą i znaczną redukcją średnicy początkowej materiału. Rozwiązanie przedstawiono dla modelu sztywno-plastycznego bez wzmocnienia i warunku plastyczności Treski, przy przyjęciu postulatu pełnej plastyczności Haara-Kármána. Ogólnie biorąc metoda rozwiązania rozważanego przypadku polega na wykorzystaniu warunków brzegowych wyrażonych w prędkościach do sformułowania warunków brzegowych w naprężeniach na linii konturu matrycy lub wyznaczeniu równania charakterystyki ograniczającej obszar uplastycznienia.

W tym celu przy małych redukcjach średnicy początkowej materiału $R \leq 0,5$ zakłada się wstępnie pewną funkcję rozkładu nacisku p wzdłuż linii styku materiału z matrycą. Stopień redukcji wyraża się wzorem:

$$(2.1.7) \quad R = 1 - \left(\frac{R_0}{T_0} \right)^2,$$

gdzie R_0 i T_0 oznaczają odpowiednio połowę średnicy na wejściu i po redukcji. Następnie postać funkcji nacisku p wyznaczamy iteracyjnie z warunkiem spełnienia ciągłości składowej normalnej prędkości do powierzchni styku materiału z matrycą.

Przy znacznych redukcjach $R > 0,5$ z warunków brzegowych wyrażonych w prędkościach dobieramy wstępnie równanie krzywej określającej brzeg obszaru sztywno-plastycznego, po czym iteracyjnie tak korygujemy jej kształt, aby spełniony był warunek ciągłości składowej normalnej prędkości do linii konturu matrycy. W obydwu przypadkach na liniach ograniczających obszar uplastycznienia usuwano nieciągłości prędkości. Dalszy ciąg postępowania przy wyznaczaniu pól naprężeń i prędkości odbywa się według algorytmu stosowanego w zadaniach statycznie wyznaczal-

nych.

Omawiane w [45] rozwiązanie uzyskane na drodze iteracyjnej było szczegółowo analizowane w pracy [46]. Ze względu na to, że uzyskano je metodą charakterystyk było ono przedmiotem ścisłej weryfikacji doświadczalnej w pracach [1,2,3,46,47]. Rozbieżności pomiędzy doświadczalnymi i teoretycznymi przebiegami pól prędkości były drastyczne. Nieco lepszą zgodność wyników teorii i eksperymentu stwierdzono dla sił. Rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego otrzymane w pracy [45] metodą charakterystyk można uznać za zgrubne przybliżenie pól prędkości i naprężeń w obszarze uplastycznienia materiału wyciskanego przez stożkową matrycę.

W przypadku materiału sztywno-idealnie plastycznego, gdy wartość funkcji K nie zależy od stanu odkształcenia problem osiowo-symetryczny z omawianymi uproszczeniami jest statycznie wyznaczalny i układ równań dla naprężeń może być rozwiązany niezależnie od równań kinematycznych pod warunkiem, że warunki brzegowe dane są w naprężeniach.

Uwzględnienie wzmocnienia materiału powoduje sprzężenie rozwiązania dla naprężeń i prędkości. Powstaje zatem konieczność rozwiązywania pełnego układu siedmiu równań (2.1.4), (2.1.5) i (2.1.6). W tej sytuacji bezpośrednio wykorzystanie metody charakterystyk do obliczeń uwzględniających wzmocnienie materiału w zadaniach osiowej symetrii z mieszanymi warunkami brzegowymi jest niemożliwe. Sprawa ta wymaga innego podejścia.

Metoda charakterystyk pomimo jej słabych stron w odniesieniu do analizy zagadnień osiowo-symetrycznych jest aktualnie jedyną efektywną metodą rozwiązywania takich zagadnień dla ciał

ła sztywno-plastycznego bez wzmocnienia. Ostatnio obserwuje się intensywny rozwój i zastosowania metody elementów skończonych do analizy osiowo-symetrycznych procesów obróbki plastycznej [48,49,50,51,52]. Konkurencyjność metody elementów skończonych w stosunku do metody charakterystyk jest jak dotąd sprawą dyskusyjną. Pogląd ten wyrażają na przykład prace [53,54]. Zagadnienia osiowo-symetryczne rozwiązywano metodami wariacyjnymi [55,56,57] oraz metodami z różnymi wariantami dość drastycznych uproszczeń [58,59,60,61,62,63]. Najwięcej uwagi w literaturze obróbki plastycznej poświęcono obliczeniom sił według oceny górnej wyznaczanej z kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości w obszarze uplastycznienia [22,64,65,66]. Moc dysypacji, w procesie deformacji plastycznej, obliczona z założonych pól prędkości może przy tym zgrubnie uwzględniać efekty pękania wiązkiego występującego na przykład w procesie wyciskania cylindrycznych, metalowych prętów [22,64,66].

Wybór przybliżonych, kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości aproksymujących realną kinematykę płynięcia plastycznego pozwala nie tylko na obliczanie sił, ale również umożliwia optymalizację procesu wyciskania pod kątem doboru najkorzystniejszego profilu matryc ze względu na minimalną moc sił zewnętrznych [28,56]. W monografii [57] omówiono prace, w których do opisu kinematyki zastosowano funkcje zmiennych zespolonych i teorię potencjału pól wektorowych [23,24,25,26,27,28].

W ostatnich latach ukazało się szereg prac, w których kinematyka procesów osiowo-symetrycznych jest opisywana przy pomocy funkcji prądu [23,24,25,26,27,28]. Pól naprężeń nie wyznaczano. Dobór wyrażeń analitycznych opisujących przebieg funkcji

prądu wymaga dużej ostrożności, ponieważ do obliczeń prędkości płynięcia, prędkości odkształceń oraz naprężeń wchodzi pierwsz^o, drugie i trzecie pochodne funkcji prądu względem współrzędnych. Wrażliwość dokładności rozwiązań otrzymanych metodą funkcji prądu na proces różniczkowania sprawia, że przy wyborze jej postaci decydującą rolę odgrywają dane doświadczalne. Niezależnie od tych trudności ten atrakcyjny sposób wyrażania pól kinematycznych może w poważnym stopniu ułatwić otrzymanie rozwiązań uwzględniających rzeczywiste warunki brzegowe, wzmocnienie i efekty dynamiczne. Aktualnie w literaturze brakuje kompletnych, teoretycznych rozwiązań zagadnień osiowo-symetrycznych obróbki plastycznej z mieszanymi warunkami brzegowymi opartych na koncepcji funkcji prądu.

Na stosunkowo wszechstronną analizę procesów obróbki plastycznej pozwala metoda doświadczalno-obliczeniowa. Naprężenia oblicza się tu z pomierzonych doświadczalnie składowych tensora prędkości odkształceń i znanego z doświadczenia stopnia wzmocnienia. Wobec nadmiaru równań w stosunku do niewiadomych obliczane naprężenia oznaczają się niejednoznacznością. W niektórych zagadnieniach iteracyjne metody obliczeń podstawowego układu równań stanu plastycznego pozwalają uwzględnić wzmocnienie i efekty dynamiczne. Metody doświadczalno-obliczeniowe i iteracyjne są stosunkowo skromnie reprezentowane w literaturze światowej. Metody te omówiono szerzej w kolejnych punktach rozdziału.

2.2. Iteracyjne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych z uwzględnieniem wzmocnienia materiału.

Istniejące, nieliczne metody obliczeń z uwzględnieniem wzmocnienia materiału dotyczą geometrycznie dwuwymiarowych, niestacjonarnych i stacjonarnych zagadnień płaskiego stanu odkształcenia, osiowej symetrii i kilku osiowo-symetrycznych przypadków w warunkach płaskiego stanu naprężenia [67, 68, 69, 70, 71]. Matematyczne trudności rozwiązywania nieliniowych układów równań różniczkowych stanu plastycznego zmuszają do stosowania iteracyjnych metod obliczeń specjalnie dobieranych dla każdego przypadku.

Celem zilustrowania podstawowych koncepcji tych metod omówimy sposób rozwiązania osiowo-symetrycznych zagadnień płaskiego stanu naprężenia, który zaproponowano w 1963 r. w pracy [67].

Wyjściowy układ równań składający się z równania równowagi, warunku plastyczności w postaci:

$$(2.2.1) (\sigma_r - a_r)^2 + (\sigma_r - a_r)(\sigma_\theta - a_\theta) - (\sigma_\theta - a_\theta)^2 = 3k^2,$$

stowarzyszonego z nim prawa płynięcia i warunku nieściśliwości zawiera cztery niewiadome: dwie składowe naprężenia σ_r i σ_θ , grubość blachy h i składową promieniową V_r prędkości płynięcia. Wielkości a_r i a_θ są funkcjami stanu naprężenia opisującymi przemieszczenie się powierzchni płynięcia, $k = k(\epsilon)$ jest funkcją intensywności odkształcenia opisującą izotropowe powiększanie wymiarów powierzchni plastyczności, T jest współrzędną promieniową rozpatrywanego punktu.

Rozwiązanie tego układu napotyka jednak na poważne trudności. Występujące w warunku plastyczności funkcje opisujące wzmożenie materiału są zależne od stanu odkształcenia. Sprzężenie równań opisujących stan naprężenia ze stanem odkształcenia wymaga jednoczesnego rozwiązywania całego układu równań. Zaproponowana w [67] metodyka obliczeń polegała na uzyskaniu tego rozwiązania metodą kolejnych przybliżeń.

W pierwszym etapie deformacji pomijamy efekt wzmożnienia materiału i rozwiązujemy numerycznie odpowiedni układ równań różniczkowych, skąd wyznaczamy składowe przyrosty odkształcenia w poszczególnych punktach obszaru plastycznego:

$$(2.2.2) \quad de_v = \frac{dr}{r}, \quad de_n = \frac{dh}{h}, \quad de_r = -de_v - de_n$$

oraz intensywność przyrostu odkształcenia:

$$(2.2.3) \quad de_i = \sqrt{\frac{1}{2}(de_v^2 + de_n^2 + de_r^2)}.$$

Całkując następnie te zależności wzdłuż trajektorii cząsteczek od początku ruchu możemy obliczyć składowe odkształcenia i intensywności odkształcenia oraz wyznaczyć, ze znanej dla danego materiału funkcji opisującej wzmożenie, wartości a_r, a_v i k w poszczególnych punktach obszaru uplastycznienia. Wyznaczenie drugiego etapu sprowadza się do rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia brzegowego ze znanym z poprzedniego przybliżenia rozkładem niejednorodności materiału. Proces iteracji dla zagadnień stacjonarnych możemy powtarzać tak długo, aż rozwiązania kolejnych przybliżeń będą się różniły nieznacznie. Przy rozwiązywaniu zagadnień niestacjonarnych cały proces deformacji dzielimy na odpowiednią ilość etapów, rozwiązując w każdym

z nich cały układ równań.

Praca [67] zawiera przykłady zastosowań tej metody dla stacjonarnych i niestacjonarnych zagadnień plastycznego płynięcia. Podano rozwiązania dla obciskania rury i rozciągania płaskiego pierścienia dla hipotezy kinematycznego i izotropowego prawa wzmocnienia. Przyjęto przy tym liniowe zależności parametrów wzmocnienia od stanu odkształcenia w formie:

$$(2.2.4) \quad k = k_0 + c e_i$$

dla wzmocnienia izotropowego oraz:

$$(2.2.5) \quad \begin{aligned} a_r &= c(2e_r + e_\theta), \\ a_\theta &= c(2e_\theta + e_r) \end{aligned}$$

dla wzmocnienia kinematycznego. Wielkości k_0 i c oznaczają stałe materiałowe. Otrzymane wyniki liczbowe dla obu hipotez porównano z wynikami obliczeń bez uwzględnienia wzmocnienia materiału. Dla wszystkich przykładów zaproponowana metoda iteracyjna jest szybko zbieżna, różnice pomiędzy drugim i trzecim przybliżeniem nie przekraczały 3%. Analogiczny sposób obliczeń wykorzystano do analizy procesu ciągnięcia wtyłoczki z krążka mającej centralny otwór [68]. Wyniki obliczeń otrzymano zszywając dwa rozwiązania: dla ciągnięcia płaskiego krążka i dla ciągnięcia dna wtyłoczki. Przyjęto tu warunek Hubera-Misesa z izotropowym wzmocnieniem określonym rzeczywistą zależnością intensywności naprężenia od intensywności odkształcenia otrzymaną przy jednoosiowym rozciąganiu próbki cylindrycznej z miękkiej stali. Taki sam sposób obliczeń jak w obu przypadkach zastosowano do rozwiązywania osiowo-symetrycznych zagadnień płaskiego

stanu naprężenia z uwzględnieniem efektów dynamicznych i wzmocnienia materiału [69].

Ogólną dyskusję metod numerycznej analizy płynięcia plastycznego w płaskim stanie odkształcenia i osiowej symetrii przedstawiono w pracy [70]. Ich wspólną cechą było sprowadzenie układu równań różniczkowych cząstkowych opisującego rozpatrywany problem do układu typu hiperbolicznego drogą wstępnego założenia pola prędkości lub innego pola i następnie metodą kolejnych przybliżeń obliczenie wszystkich poszukiwanych wielkości.

Metody numeryczne przedstawione w pracach [67,68,69,70] znajdują zastosowanie do analizy procesów plastycznego płynięcia dla materiałów ze wzmocnieniem i bez wzmocnienia, gdy układ równań różniczkowych rozpatrywanego problemu nie jest typu hiperbolicznego. Ich główna idea polega na wstępnym założeniu rozkładu jednej z poszukiwanych wielkości, co sprowadza zagadnienie do statycznie wyznaczalnego układu równań typu hiperbolicznego dla naprężeń i analogicznego układu dla prędkości płynięcia. Rozwiązujemy te dwa układy wielokrotnie, przy czym rozwiązanie dla prędkości z poprzedniego etapu wykorzystuje się przy rozwiązywaniu układu dla naprężeń następnego etapu. Posługując się taką koncepcją autor pracy [71] otrzymał nowe rozwiązania zagadnień brzegowych w płaskim stanie odkształcenia elementu osłabionego wycięciem oraz nowe rozwiązanie zagadnień rozciągania osiowo-symetrycznych prętów z karbam. We wszystkich rozwiązanych tam przykładach stosowano hipotezę izotropowego wzmocnienia materiału i proste zależności intensywności naprężenia od intensywności odkształcenia. Zbudowane algo-

rytmy obliczeń dopuszczają możliwość dostosowania programu obliczeń do hipotezy kinematycznego wzmocnienia, czy też jakiejś formy pośredniej uwzględniającej przemieszczenie i zmianę wymiarów powierzchni plastyczności. Przedstawione w tej pracy programy można wykorzystać do analizy wpływu wzmocnienia na przebieg deformacji i przewidywania zachowania się rzeczywistych materiałów. Wymownym tego przykładem jest wykonana w pracy [71] analiza utraty stateczności procesu rozciągania próbki cylindrycznej. Interesującym wnioskiem wynikającym z numerycznej analizy utraty stateczności rozciąganej próbki cylindrycznej jest fakt, że utworzenie się szyjki zależy od modułu stycznej krzywej $\delta_i = f(\theta_i)$ i długości próbki. Poddano w wątpliwość kryterium maksymalnej siły jako warunku utożsamiającego utratę stateczności rozciąganej próbki cylindrycznej. Znalazło to potwierdzenie w dokładnych wynikach zarejestrowanych przy rozciąganiu cylindrycznej próbki ze stali 15 [71].

Opierając się na wynikach cytowanych powyżej prac można sprecyzować zasady przyjętych dotychczas metod obliczeń zagadnień brzegowych teorii plastycznego płynięcia z uwzględnieniem wzmocnienia dla geometrycznie dwuwymiarowych przypadków płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia oraz osiowej symetrii. Stosowane metody obliczeń mają następujący przebieg:

- 1) Jako pierwsze przybliżenie przyjmujemy rozwiązanie dla materiału sztywno-idealnie plastycznego. Rozwiązujemy rozpatrywane zagadnienia brzegowe wyznaczając w pierwszym kroku naprężenia i prędkości. Rozkład intensywności odkształcenia obliczamy z pól prędkości.
- 2) Na podstawie wyników odpowiednich badań materiałowych

oraz znanego rozwiązania w naprężeniach i prędkościach pierwszego kroku obliczamy rozkład niejednorodności plastycznej w obszarze uplastycznienia.

- 3) Wykorzystując równania plastycznej niejednorodności znajdujemy rozwiązanie dla naprężeń i prędkości w drugim etapie odkształcenia.
- 4) Obliczamy nowy rozkład niejednorodności i rozwiązujemy kolejny etap procesu odkształcenia.

Do obliczeń niezbędna jest znajomość rozkładu granicy plastyczności $\bar{\sigma}_i(x_j)$ w kolejnym etapie zaawansowanego płynięcia plastycznego. Pole niejednorodności $\bar{\sigma}_i(x_j)$ w obszarze uplastycznienia pośrednio uwzględnia wzmocnienie materiału. Podstawą obliczeń są więc równania plastycznej niejednorodności rozwiązywane metodą charakterystyk.

Pomimo zalet metoda nie ma cech uniwersalności. Kosi ona wszystkie błędy rozwiązania wyjściowego dla modelu sztywno plastycznego ograniczonego dodatkowo ciągłością i różniczkowalnością pól prędkości. Błędy te są zwielokrotnione procedurą obliczeń numerycznych, a ich oszacowanie na drodze teoretycznej jest obecnie niemożliwe i wymaga weryfikacji doświadczalnej.

Omówione koncepcje rozwiązań zagadnień brzegowych z uwzględnieniem wzmocnienia nie znajdują bezpośredniego zastosowania do teoretycznej analizy osiowo-symetrycznych procesów obróbki plastycznej z mieszanymi warunkami brzegowymi. Zadania takie są statycznie niewyznaczalne nawet w przypadku przyjęcia warunku freski i postulatu Haara-Kármána, stąd brak ścisłych rozwiązań dla modelu idealnie plastycznego.

Uwzględnienie wzmocnienia w problemach osiowej symetrii

z mieszanymi warunkami brzegowymi wymaga innej realizacji uproszczeń podstawowego układu równań stanu plastycznego. Ponieważ w takim wypadku nie ma ogólnej metody postępowania, proces wprowadzania założeń upraszczających powinien być kontrolowany wynikami doświadczeń. Własne propozycje w tym zakresie pokazano w ostatnim rozdziale niniejszej pracy.

2.3. Doświadczalno-obliczeniowe metody rozwiązywania zagadnień brzegowych z uwzględnieniem wzmocnienia materiału.

Istotą doświadczalno-obliczeniowych metod wyznaczania pól naprężeń w obszarze uplastycznienia jest rozwiązywanie podstawowego układu równań stanu plastycznego przy zadanych doświadczalnie warunkach brzegowych i prędkościach odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$ w polu uplastycznienia. Również z doświadczenia znany jest rozkład niejednorodności plastycznej $\sigma_1(x_j)$, który pośrednio określa lokalne wzmocnienie materiału. Pierwszą pracą, która zwróciła uwagę badaczy na praktyczną możliwość obliczeń naprężeń plastycznych z pomierzonych doświadczalnie prędkości był artykuł [72] ogłoszony w 1954 r. Od tej pory powstało wiele prac wykorzystujących doświadczalne pola kinematyczne w różnych procesach obróbki plastycznej do obliczeń pól naprężeń. Spośród nich wybrano do omówienia te, które wniosły merytoryczny wkład do analizy pól kinematycznych, niejednorodności plastycznej i pól naprężeń w obszarze uplastycznienia rzeczywistego materiału.

Podstawowe i aktualne problemy metody to: technika wizualizacji trajektorii cząsteczek plastycznie płynącego materiału, obróbka matematyczna dyskretnej funkcji doświadczalnych, metoda wyznaczania lokalnej granicy plastyczności oraz sposób obliczeń pól naprężeń.

Z obliczeniowego punktu widzenia wyznaczanie naprężeń sprowadza się do numerycznego lub graficznego całkowania równań równowagi przy znanych warunkach brzegowych oraz wielkościach doświadczalnych: $\dot{\epsilon}_{ij}$, $\dot{\epsilon}_i$, \dot{e}_i , $\dot{\sigma}_i$ w każdym punkcie obszaru uplastycznienia. Możliwość stosowania warunku plastyczności Hubera-Misesa, ze zmienną po obszarze uplastycznienia w różnych etapach deformacji granicą plastyczności, umożliwia uwzględnienie wzmocnienia materiału. Wartości intensywności naprężeń w obszarze uplastycznienia są zmienne, jednak w rozpatrywanym punkcie podczas trwania jednego małego etapu deformacji wartości $\dot{\sigma}_i$ i \dot{e}_i mogą być przyjmowane za stałe.

Dokładność tej metody z fizycznego punktu widzenia jest zależna głównie od przyjętych hipotez dotyczących zasad wyznaczania pól kinematycznych i granicy plastyczności w obszarze płynięcia plastycznego. Uwzględnienie rzeczywistych własności materiału podczas odkształcenia plastycznego wymaga wyznaczenia historii obciążenia i trajektorii cząstki od momentu wywołania odkształcenia trwałego. Trajektorie cząstek plastycznie płynącego materiału jednoznacznie określają granicę obszaru uplastycznienia, stan odkształcenia i stan naprężenia. Naprężenia są zawsze wielkościami obliczeniowymi w ramach przyjętego równania konstytutywnego. Ich bezpośredni pomiar w złożonych stanach naprężenia jest obecnie niemożliwy ze względu na brak

metod fizycznych. Autorzy prac [73, 74, 75] zaproponowali, stosowany obecnie do tej metody termin „wizjoplastyczności”, motywując ten wybór analogią z metodą analizy naprężeń określaną terminem „fotosprężystość”. Najnowsze zastosowania metody wizjoplastyczności w zagadnieniach dwuwymiarowego płygnięcia plastycznego są rezultatem komputeryzacji obliczeń i fotograficznego drukowania siatek w przekroju dwuczęściowego modelu [76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85].

W pracach [74, 76] zastosowano dla ustalonych, osiowo-symetrycznych przepływów plastycznych pojęcie funkcji prądu. Dla rozpatrywanego przykładu procesu wyciskania funkcja $\phi(\tau, z)$ określana jest jako wydatek przepływu odpowiadający danej linii prądu w niezdeformowanym obszarze. Dla danej linii prądu funkcja prądu ma stałą wartość i określona jest jako:

$$(2.3.1.a) \quad \Phi_i^r = \pi R_i^2 |\bar{V}_0|,$$

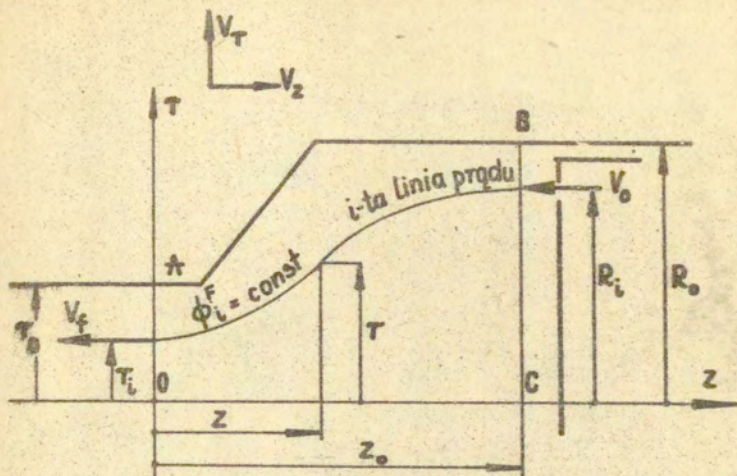
gdzie i oznacza numer kolejnej linii prądu, R_i - odległość danej linii od osi Z^0 w nieodkształconej części, \bar{V}_0 - prędkość tłoka wywołującego ruch. Oznaczenia podano na rys.2.1.

W dowolnym punkcie przekroju określonym współrzędną Z^0 wydatek przepływu $\phi(\tau, z)$ odpowiadający i -tej linii prądu jest z definicji określony zależnością:

$$(2.3.1.b) \quad \phi(\tau, z) = \int_0^i 2\pi r (-V_z) dr.$$

Wzdłuż dowolnej i -tej linii prądu w przepływie ustalonym funkcja prądu ma stałą wartość, tj.: $d\phi(\tau, z) = 0$,

$$(2.3.2) \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} d\tau.$$



Rys.2.1.

Jednocześnie z warunku styczności wektora prędkości do linii prądu pomiędzy składowymi prędkości wzdłuż tej linii zachodzi związek:

$$(2.3.3) \quad \frac{dr}{dz} = \frac{V_T}{V_z}$$

Z zależności (2.3.2) i (2.3.3) otrzymujemy:

$$(2.3.4) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} V_z + \frac{\partial \phi}{\partial r} V_T = 0$$

Różniczkując równanie (2.3.1.b) po „T” otrzymujemy zależność na składową płynięcia w kierunku osiowym:

$$(2.3.5) \quad V_z = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial r} .$$

Podstawiając (2.3.5) do (2.3.4) mamy wzór na składową prędkości w kierunku promieniowym:

$$(2.3.6) \quad V_r = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial z} .$$

Składowe tensora prędkości odkształceń określamy z wzorów

(2.1.6):

$$(2.3.7.a) \quad \dot{\epsilon}_r = -\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} ,$$

$$(2.3.7.b) \quad \dot{\epsilon}_z = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} ,$$

$$(2.3.7.c) \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} ,$$

$$(2.3.7.d) \quad \dot{\chi}_{rz} = \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] .$$

Składowe odkształceń i intensywność odkształceń otrzymujemy na drodze całkowania prędkości odkształceń wzdłuż każdej z trajektorii:

$$(2.3.8) \quad e_{ij} = \int_0^t \dot{e}_{ij} dt ,$$

$$(2.3.9) \quad e_i = \int_0^t \dot{e}_i dt .$$

Funkcja prądu $\Phi(\tau, z)$ spełnia z definicji warunki nieściśliwości materiału.

Interpretacja opisu kinematyki plastycznego płynięcia funkcją prądu $\Phi(\tau, z)$ ma charakter czysto geometryczny. Ciągłość i różniczkowalność funkcji $\Phi(\tau, z)$ usuwa założenie o lokalnej jednorodności odkształcenia w każdym punkcie obszaru uplastycznienia, który to warunek jest punktem wyjścia do obliczeń składowych tensora odkształceń i prędkości odkształceń w metodzie nanoszenia siatek na modelu. Dwukrotne numeryczne różniczkowanie dyskretnie określonej funkcji eksperymentalnej przy wyznaczaniu prędkości odkształceń oraz dodatkowa operacja całkowania przy wyznaczaniu naprężeń wymaga dużej ostrożności przy wyborze wyrażań aproksymujących postać funkcji prądu. Rozbieżność numerycznych metod różniczkowania może prowadzić do dużych błędów, niekiedy nawet z dokładnością do zmiany znaku wartości prędkości odkształceń i tym bardziej naprężeń [86,87].

Wyznaczanie pól odkształceń w niestacjonarnych procesach plastycznie deformowanych elementów odbywa się głównie poprzez obserwację przyrostów przemieszczeń du_i węzłów początkowo kwadratowej siatki, którą nanosimy na powierzchni swobodnej lub w płaszczyźnie środkowej dwuczęściowego modelu. Przemieszczenia du_i rejestrujemy w kolejnych etapach plastycznego płynięcia. Wobec założenia, że czas trwania małego etapu deformacji ma wartość jednostkową, można utożsamić przyrosty składowych odkształceń ze składowymi tensora prędkości odkształceń. Mają one postać:

$$(2.3.10) \quad \dot{\epsilon}_{ij} \approx d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx_i} du_j + \frac{d}{dx_j} du_i \right].$$

Metodyka wyznaczania pól prędkości, odkształceń i prędkości odkształceń z pomierzonych pól przemieszczeń jest szczegółowo omówiona w monografiach [10, 11, 12, 88, 89, 90].

Rozkład granicy plastyczności w uplastycznionym polu, utożsamiany z niejednorodnością plastyczną, jest możliwy obecnie do wyznaczania tylko na drodze doświadczalnej. Podstawą jest przyjęcie hipotez o zgodności związków aktualnej granicy plastyczności, branej dalej jako intensywność naprężeń σ_i , z intensywnością odkształceń ϵ_i lub twardością H w prostych i złożonych stanach naprężeń. Praktyczne wykorzystanie związku σ_i z innymi wielkościami fizycznymi, na przykład optycznymi lub elektrycznymi jest jeszcze z braku podstaw doświadczalnych niemożliwe.

Dotychczas stosowano najczęściej dwie metody określania pola niejednorodności plastycznej:

- a) metoda oparta na przyjęciu hipotezy uogólnionej krzywej płynięcia $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$,
- b) metoda oparta na hipotezie związku granicy plastyczności z twardością $\sigma_i = \sigma_i(H)$.

Metoda wykorzystująca związek $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ polega na wyznaczeniu rozkładu intensywności naprężeń w odciążonym elemencie poprzez obliczenie intensywności odkształceń z pomiarów zdeformowanej, początkowo kwadratowej siatki. Siatka ta jest nanoszona w środkowej płaszczyźnie dwuczęściowego modelu. Następnie dla pomierzonej, w danym punkcie strefy deformacji, wartości ϵ_i należy przyporządkować odpowiadającą jej wartość σ_i wziętą z krzywej materiałowej $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$. Krzywą materiałową otrzymujemy w jednoosiowej próbie rozciągania lub

ściskania. Poważnym problemem jest tu jednak fakt, że związku $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ nie można uważać za uniwersalne prawo wzmocnienia, lecz za przybliżoną zależność opisującą wzmocnienie materiału. Obecnie brakuje dostatecznej ilości faktów doświadczalnych potwierdzających istnienie wspólnej krzywej płynięcia w prostych i złożonych stanach naprężeń niezależnej od: rodzaju stanu naprężenia, postaci dewiatora, historii obciążenia, prędkości odkształcenia i innych efektów [7]. Inną poważną niedogodnością jest bardzo duża pracochłonność przy opracowywaniu wyników doświadczeń i dokładnym nanoszeniu siatek na powierzchnie przekroju dwuczęściowego modelu. Pomimo tych wad, metoda wyznaczania pól niejednorodności plastycznej oparta na hipotezie $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ znalazła rozpowszechnienie w metodach obliczeniowych obróbki plastycznej [11, 12, 73, 74, 75, 76, 77, 79] uwzględniających wzmocnienie materiału. Możliwość opisu związku $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ w jednoosiowych próbach ściskania i rozciągania omówiono szeroko w pracy [91].

Twardość większości metali poddanych odkształceniom plastycznym ulega zmianie. Zjawisko to wykorzystano do poszukiwania ilościowych związków twardości z granicą plastyczności. Z fizycznego punktu widzenia nie rozwiązany problem w interpretacji twardości jest uzyskanie odpowiedzi na pytanie jak zależy twardość, rozumiana jako średnie ciśnienie na powierzchni odcisku od stanu naprężenia i historii naprężenia. Szukając odpowiedzi na to pytanie należy opisać anizotropię własności realnego materiału wywołaną deformacją plastyczną zależną od stanu naprężenia i historii obciążenia, przy których przebiega odkształcenie plastyczne. Następnie należałoby

rozwiązać zadanie o wciskaniu osiowo-symetrycznego, sztywnego stempla w umacniający się anizotropowy materiał. Wobec tego, że materiał nabrał już cech anizotropowych, w ogólnym przypadku zagadnienie nie jest już osiowo-symetryczne. Aktualnie teoria plastyczności nie dysponuje rozwiązaniem takich przypadków. Dlatego też zadanie o istnieniu wspólnych związków pomiędzy liczbą twardości i intensywnością naprężenia dla różnych stanów naprężenia i trajektorii obciążenia w realnych materiałach wymaga skomplikowanych badań doświadczalnych na maszynach, w których możliwe jest uzyskanie złożonych stanów naprężeń. W monografiach [11, 12, 92] przedstawiono wyniki badań doświadczalnych dla różnych materiałów. W tym celu wykonywano doświadczenia na próbkach rurkowych poddanych różnym kombinacjom siły rozciągającej, momentu skręcającego i ciśnienia wewnętrznego. Obciążenia realizowano przyrostami według zadanego programu i po odciążeniu wykonywano wzdłuż powierzchni zewnętrznej 10 pomiarów twardości Vickersa, przyjmując ostatecznie wartości średniej arytmetycznej twardości. Z doświadczeń wyznaczono wykresy twardości w funkcji intensywności odkształcenia i intensywności naprężenia. Dla wszystkich badanych materiałów rozrzuty punktów doświadczalnych dla różnych stanów naprężenia nie przekroczyły 15% na wykresie $HV = f(\epsilon)$ i 20% na wykresie $HV = f(\sigma)$ w stosunku do wykresu cechującego otrzymanego przy jednoosiowym stanie naprężenia. Związki między różnymi miarami twardości a trwałym odkształceniem czy wywołującym je stanem naprężenia są związkami empirycznymi i ich jednoznaczność jest ciągle jeszcze sprawą dyskusyjną. Wynika to z innego charakteru pomiarów twardości i pomiarów

odkształceń przy jednoosiowym rozciąganiu czy ścisaniu. Dokładność pomiarów zależy w dużym stopniu od właściwego przygotowania próbek. Uzyskanie jednorodnego rozkładu twardości nawet w niezdeformowanej próbce stanowi istotny problem i wymaga zastosowania specjalnych zabiegów [93]. W pracach [11, 12, 92] uważa się, że twardość jest jednoznaczna funkcją intensywności naprężenia wywołującego odkształcenie plastyczne. Natomiast związek między twardością a intensywnością odkształceń plastycznych wynika z hipotezy o jednej krzywej wzmocnienia. Innego zdania są autorzy pracy [94]. Uważają oni, że twardość jest jednoznaczna funkcją intensywności odkształceń i nie zależy od sposobu w jaki te odkształcenia otrzymano. Zaletą tego sposobu weryfikacji zależności $H = H(\epsilon_i)$ jest możliwość przeprowadzenia badań na jednej próbce w szerokim zakresie odkształceń. W pracy [95] podano rozwiązanie statyczne przy wciskaniu kulki w plastyczną półprzestrzeń. Przybliżona zależność między granicą plastyczności ciała izotropowego idealnie plastycznego i twardością Brinella ma postać:

$$(2.3.11) \quad \sigma_i = 0,383 HB$$

Wyznaczanie pola niejednorodności σ_i w dwuwymiarowych zagadnieniach plastycznego płynięcia polega na pomiarze twardości w odkształconym obszarze odciążonego elementu. Następnie z krzywej cechującej dla danego materiału $H = H(\sigma_i)$ bierzemy te wartości σ_i , które odpowiadają pomierzonym wartościom twardości. Uwzględniony przy tym w przybliżeniu efekt wzmocnienia jest typu izotropowego. Funkcja wzmocnienia izotropowego będzie miała inny przebieg, niż to ma miejsce w przypad-

ku hipotezy jednej krzywej $\sigma_i = \bar{\sigma}_i(\epsilon_i)$. Ocena tej różnicy może być dokonana tylko na drodze doświadczalnej i jest w dalszym ciągu otwarta z powodu małej liczby danych eksperymentu.

Pola naprężeń powinny spełniać równania równowagi, warunków plastyczności, stowarzyszone prawo płynięcia i warunki brzegowe.

Celem obliczenia składowych tensora naprężenia skorzystamy ze związków Lévy-Misesa, do których podstawimy doświadczalnie dane wielkości $\dot{\epsilon}_i$, ϵ_i oraz $\bar{\sigma}_i$. Związki te w układzie cylindrycznym r, z, ϑ po przekształceniu wzorów (2.1.6) mają postać:

$$(2.3.12.a) \quad \sigma_z = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_i(r,z)}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_z + \bar{\sigma} \quad ,$$

$$(2.3.12.b) \quad \sigma_r = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_i(r,z)}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_r + \bar{\sigma} \quad ,$$

$$(2.3.12.c) \quad \sigma_\vartheta = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_i(r,z)}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_\vartheta + \bar{\sigma} \quad ,$$

$$(2.3.12.d) \quad \tau_{rz} = \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}_i(r,z)}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\gamma}_{rz} \quad ,$$

gdzie:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\vartheta) \quad ,$$

$$(2.3.13) \quad \bar{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + (\sigma_\vartheta - \sigma_z)^2] + 3\tau_{rz}^2} \quad ,$$

$$(2.3.14) \quad \dot{e}_i = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2} [(\dot{e}_z - \dot{e}_r)^2 + (\dot{e}_r - \dot{e}_\theta)^2 + (\dot{e}_\theta - \dot{e}_z)^2 + \frac{3}{4} \delta_{rz}^2]}$$

Intensywność prędkości odkształceń obliczamy z danych składowych tensora prędkości odkształceń. Intensywność naprężeń w rozpatrywanym punkcie obszaru uplastycznienia podczas małego etapu deformacji przyjmujemy za wartość stałą wyznaczoną przy użyciu hipotezy jednej krzywej $\sigma_i = \sigma_i(\dot{e}_i)$ lub z półtwardości. Wartość intensywności naprężeń w tym samym punkcie będzie inna w następnym etapie małej deformacji, ale będzie zawsze stała w bieżącym, rozpatrywanym etapie odkształcenia. Założenie takie umożliwia obliczenie składowej τ_{rz} z czwartego równania układu (2.3.12.d). Określenie składowych normalnych tensora naprężenia wymaga znajomości w równaniach (2.3.12) średniego ciśnienia hydrostatycznego σ . Do wyznaczenia tej wielkości wykorzystamy równania równowagi (2.1.4). Eliminując σ z pierwszych dwóch równań (2.3.12) otrzymamy:

$$\sigma_z = \sigma_r + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\tau, z)}{\dot{e}_i} (\dot{e}_z - \dot{e}_r).$$

Wyrażenie na różniczkę $d\sigma_z$ ma postać:

$$(2.3.15) \quad d\sigma_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} dr + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz.$$

Różniczkując σ_z po współrzędnej r otrzymamy:

$$(2.3.16) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_i \frac{\dot{e}_z - \dot{e}_r}{\dot{e}_i} \right).$$

Z równania równowagi (2.1.4.a) mamy:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (2.3.16) znajdujemy:

$$(2.3.17) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_i \frac{\dot{e}_z - \dot{e}_r}{\dot{e}_i} \right) - \frac{\partial \tau_z}{\partial z} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}$$

Równanie równowagi (2.1.4.b) daje związek:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{\tau_z}{r} - \frac{\partial \tau_z}{\partial r}$$

Naprężenia w prawych częściach związków na $\partial \sigma_z / \partial r$ zastępujemy prędkościami odkształceń i następnie podstawiamy je do wzoru (2.3.15). Kolejno całkując numerycznie lub graficznie równanie (2.3.15) otrzymujemy wyrażenie na składową σ_z z dokładnością do stałej całkowania $\sigma_z(0, z_0)$ [56, 76]:

$$(2.3.18) \quad \begin{aligned} \sigma_z(r, z) = & \int_z^{z_0} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\delta}_{rz}}{2\lambda} \right) + \frac{\dot{\delta}_{rz}}{2r\lambda} \right] dz + \\ & + \int_0^r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{e}_z - \dot{e}_r}{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{\delta}_{rz}}{2\lambda} \right) - \frac{\dot{e}_r - \dot{e}_\theta}{r\lambda} \right]_{z=z_0} dr + \\ & + \sigma_z(0, z_0), \end{aligned}$$

gdzie

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i}$$

W procesie wyciskania stałą całkowania $\sigma_z(0, z_0)$ określamy w przekroju $z = z_0$ (rys. 2.1) z warunku na siłę wyciskania z całkowitego równania równowagi:

$$(2.3.19) \quad -P = \frac{\pi D^2}{4} \sigma_z(0, z_0) + 2\pi \int_0^{D/2} r \left(\int_0^r \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} \right) dr,$$

gdzie P jest zmierzoną doświadczalnie siłą wyciskania a D średnicą wyjściową wyciskanego pręta cylindrycznego. Składowe naprężenia: $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ oraz ciśnienie hydrostatyczne σ obliczamy po obliczeniu σ_z .

Analizując przedstawioną powyżej metodę wyznaczenia naprężeń nie trudno zauważyć nadmiar liczby równań w stosunku do ilości niewiadomych. Mamy bowiem cztery równania układu (2.3.12) i dwa równania równowagi. Wobec przyjętego założenia o nieściśliwości:

$$(2.3.20) \quad \dot{e}_r + \dot{e}_\theta + \dot{e}_z = 0,$$

tylko dwa z pierwszych trzech równań układu (2.3.12) są liniowo niezależne. Ostatecznie wraz z równaniami równowagi mamy pięć równań niezależnych, zaś poszukiwanych niewiadomych: $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ jest cztery. Stąd rozkład naprężeń okazuje się niejednoznaczny. Możliwym jest więc obliczenie σ_z po kilku drogach całkowania. W ogólnym przypadku jeżeli liczba niewiadomych składowych tensora naprężenia wynosi m a ilość niezależnych równań jest n przy $n > m$ to ilość dróg całkowania C_n^m będzie wynosiła:

$$(2.3.21) \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Dla osiowej symetrii i teorii płynięcia liczba ta wynosi

$C_5^4 = 5$. Mamy więc niejednoznaczność stanu naprężenia, na którą składa się zbiór złożony z pięciu kompletów poszukiwanych składowych tensora naprężenia, tj.:

$$\begin{array}{cccc}
 \sigma_r^1 & , & \sigma_\theta^1 & , & \sigma_z^1 & , & \tau_{rz}^1 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \sigma_r^5 & & \sigma_\theta^5 & & \sigma_z^5 & & \tau_{rz}^5
 \end{array}$$

Należy dodać, że niejednoznaczność ta związana jest z przyjętą teorią plastyczności i np. w osiowej symetrii dla teorii deformacyjnej bez warunku nieściśliwości liczba dróg całkowania: $C_6^4 = 15$. Ścisłe spełnienie warunku izotropii i plastyczności osłabia rozwiązanie w naprężeniach, które spełniają jedno z równań równowagi oraz warunki brzegowe z pewnym błędem. W pracach [10,83,87] trudność tę łagodzą wybierając za ostateczne rozwiązanie pewne uśrednione pole względem wszystkich możliwych statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, odpowiadających różnym drogom całkowania. To skorygowane, statycznie dopuszczalne pole naprężeń było najbliższe pełnemu wykorzystaniu informacji eksperymentalnej w ramach przyjętego modelu sztywno-plastycznego. Do wyznaczenia takiego pola naprężeń używano metody najmniejszych kwadratów. W pracy [96] podano inny sposób ujednoznacznienia obliczeń pól naprężeń w procesie osiowo-symetrycznego wyciskania stopów aluminium PA2. Metoda polega na dodaniu członu korekcyjnego $\delta^M \phi(r,z)$ do doświadczalnej postaci funkcji prądu $\phi(r,z)$. Korektę funkcji prądu wyznaczono z rozwiązania podstawowego układu równań z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa dla izotropowego

wzmocnienia. Człon korekcyjny $\delta^H\phi$ wyrażono w postaci zbieżnego szeregu trygonometrycznego. Tak określony zastępczy wydatek $\phi + \delta^H\phi$ wykorzystano do obliczeń naprężeń, które spełniają wówczas wszystkie równania podstawowego układu równań jak też rzeczywiste warunki brzegowe.

Zilustrujemy teraz przedstawione podstawy teoretyczne metody na przykładach analizy procesów plastycznego płynięcia przebiegających w osiowej symetrii i płaskim stanie odkształcenia.

Rozpatrzmy proces wyciskania próbki cylindrycznej [72]. Osiowo-symetryczne próbki walcowe 109-86 mm wykonano z ołowiu z dwóch połówek. Na płaszczyźnie podziału, którą stanowiła płaszczyzna południkowa jednej z połówek naniesiono, metodą mechanicznego nacinania siatkę kwadratową złożoną z linii oddalonych o 2,5 mm. Dla lepszego kontrastu utworzone w ten sposób rowki wypełniono barwnikiem. Dwie połówki próbki składowano w matrycy i obciążono przyrostowo powodując wpływ materiału z matrycy z prędkością około 2,5 mm/min. Po każdym kroku odpowiadającym przemieszczeniu tłoka o wartości w granicach od 0,25 do 2,5 mm demontowano matrycę i wykonywano na specjalnym stanowisku zdjęcie zdeformowanej siatki. Na podstawie kilku kolejnych zdjęć, łącząc ze sobą punkty odpowiadające położeniom węzłów siatki określono linie prądu w zdeformowanym materiale. Porównanie kolejnych zdjęć pozwala na określenie zakresu, w którym zachowane są warunki ustalonego płynięcia. Znając wartości prędkości przemieszczeń i ich kierunki obliczano składowe prędkości V_T i V_Z odpowiednio w kierunkach T i Z . Różniczkując graficznie funkcje rozkładu po-

szczególnych składowych prędkości wzdłuż promienia lub wysokości obliczano przyrosty odkształceń: $de_r, de_z, d\delta_{rz}$, które wobec przyjęcia jednostkowego czasu równają się liczbowo odpowiednim prędkościom odkształcenia: $\dot{e}_r, \dot{e}_z, \dot{\delta}_{rz}$. Prędkość odkształcenia w kierunku obwodowym \dot{e}_θ obliczano z warunku nieściśliwości. Mając składowe obliczano w poszczególnych punktach intensywność przyrostów odkształceń ze wzoru (2.3.10). Na podstawie określonego w ten sposób pola przyrostów odkształceń obliczano stan naprężenia ze związku Lévy-Misesa oraz równań równowagi. W omawianej pracy obliczenia wykonano dla stałej wartości granicy plastyczności $\sigma_L = 14 \text{ kg mm}^2$ niezależnej od odkształceń. Zależność $\partial\sigma_z/\partial r$ wyrażono jako (2.3.17). Różniczkując graficznie zależność (2.3.10) obliczono rozkłady naprężeń σ_z wzdłuż promienia r dla kilku przekrojów na różnych wysokościach z . Przyjęto przy tym, że wypadkowa siła jest taka sama we wszystkich przekrojach i równa zmierzonemu w czasie doświadczenia obciążeniu maszyny wytrzymałościowej. Znając wartości naprężenia σ_z w poszczególnych punktach, możemy wykorzystując związki prawa płynięcia (2.3.12) obliczyć pozostałe składowe naprężenia.

Zaproponowana w pracach [72,73,74,75] metoda analizy stanu odkształcenia i naprężenia w geometrycznie dwuwymiarowych zagadnieniach plastycznego płynięcia nie znalazła w początkowym okresie szerszego zastosowania ze względu na jej pracochłonność. Wymaga ona przeprowadzenia złożonych doświadczeń modelowych na stanowiskach specjalnie zaprojektowanych do rozpatrywanego procesu płynięcia, poza tym opracowanie wyników doświadczeń wymaga różniczkowania składowych prędkości pły-

nięcia i składowych prędkości odkształceń po współrzędnych τ i Z oraz całkowania po przekroju.

Większe zainteresowanie tą metodą można było zaobserwować dopiero w drugiej połowie lat sześćdziesiątych, kiedy to możliwość zastosowania komputerów pozwoliła na zwiększenie dokładności otrzymanych rezultatów i jednocześnie zmniejszenie pracochłonności obliczeń. Zachowując opisany bliżej schemat analizy wprowadzono w serii prac [76,77,78,79,80,81,82] automatyzację obliczeń i uzyskano szereg nowych rozwiązań. Wprowadzona automatyzacja polegała na polepszeniu metod nanoszenia siatki w przekroju modelu i określeniu jej zdeformowanej postaci oraz na komputeryzacji obliczeń. W pracach [74,76] do nanoszenia siatki wykorzystano metodę fotograficznego drukowania, która umożliwiła otrzymywanie, znacznie prościej i dokładniej, siatek o oczkach rzędu 0,5 mm. Po zdeformowaniu próbki wyznaczono współrzędne poszczególnych linii w kierunku równo oddalonych przekrojach na specjalnym mikroskopie ekranowym. Określone w ten sposób wartości wprowadzono jako dane do maszyny cyfrowej. Program obliczeń obejmował:

- wykładzenie rozkładu funkcji $\phi(\tau, Z)$ wzdłuż τ i Z ,
- obliczenie rozkładu prędkości V_τ i V_Z poprzez numeryczne różniczkowanie funkcji $\phi(\tau, Z)$,
- obliczanie składowych prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$ w węzłowych punktach siatki,
- obliczanie intensywności prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_i$ i następnie poprzez jej całkowanie po czasie wzdłuż linii prądu, intensywności odkształcenia ϵ_i ,
- obliczanie składowej naprężenia σ_z poprzez całkowanie

zależności (2.3.18) przy spełnieniu warunku, żeby wypadkowa siła na wyjściu była równa zeru.

Przyjmujemy przy tym analityczną postać funkcji umocnienia materiału, np. w formie:

$$(2.3.22) \quad \sigma_i = C e_i^m,$$

gdzie C i m to stałe materiałowe i w ten sposób uwzględniamy wzmocnienie materiału w obliczeniach stanu naprężenia. Pozostałe składowe tensora naprężenia obliczamy ze związków wynikających z praw płynięcia.

W przedstawionych w pracach [4,76] przykładach obliczeń wyciskania przez stożkową matrycę o kącie rozwarcia 90° z trzykrotną, czterokrotną i sześciokrotną redukcją przekroju poprzecznego nie ograniczono się tylko do podania rozkładów odkształceń i naprężeń w obszarze uplastycznionym, ale przeprowadzono na ich podstawie analizę kształtu matrycy i dobór stopnia redukcji przekroju w ten sposób, żeby ograniczyć strefą naprężeń rozciągających na wyjściu materiału. Jest to kryterium istotne z technologicznego punktu widzenia, bowiem zabezpiecza przed możliwością występowania pęknięć w środku wyciśniętego pręta. W pracach [66,76] pokazano, otrzymane doświadczalnie, przekroje pręta ze stożkowymi pustkami powstałymi w wyniku złego zaprojektowania matrycy. Jest to wada, która dyskwalifikuje produkt, a jednocześnie jest trudna do wykrycia bo uwidacznia się dopiero po przecięciu pręta wzdłuż osi symetrii.

Inny sposób opracowania wyników doświadczeń wykorzystano do analizy wyciskania przez zbieżną matrycę w warunkach pła-

ego stanu odkształcenia [79,80,81]. Przemieszczenia wyznaczano porównując na dwóch kolejnych zdjęciach obraz początkowo kwadratowej siatki naniesionej metodą fotograficznego drukowania w środkowym przekroju. Budując następnie wykresy zależności składowych przemieszczeń w funkcji czasu obliczono prędkości przemieszczeń, skąd wyznaczano prędkości odkształceń i kierunki największych prędkości odkształcenia postaciowego. Zakładając izotropowość materiału zbudowano na tej podstawie pole linii poślizgu. Stan naprężenia wyznaczono całkując zależności wzdłuż charakterystyk dla materiału niejednorodnego. Wartość granicy plastyczności w danym punkcie obszaru uplastycznionego wyznaczano z krzywej umocnienia materiału. Intensywność odkształcenia obliczono całkując intensywność prędkości odkształcenia wzdłuż linii prądu.

Analiza wyników wszystkich cytowanych prac dotyczących wyciskania na zimno przez matrycę stożkową o kącie rozwarcia od 30° do 90° ujawnia następujące ogólne cechy tego procesu:

1. Siły tarcia na powierzchniach styku matrycy i materiału są na tyle duże, że wywołują powstanie wzdłużnych naprężeń rozciągających w obszarze uplastycznienia.
2. Rozkład naprężeń stycznych w polu uplastycznienia charakteryzuje się zmianą znaku.
3. Większość obszaru uplastycznionego znajduje się w warunkach trójwymiarowego nierównomiernego ściskania ze współczynnikiem $\sigma/\epsilon = -(1 \div 5)$ [97]. Stosunek ten przyjmuje wartości ujemne bliskie zero, tylko w obszarze bezpośrednio przyległym do tworzących matrycy i osi symetrii. Ogólny schemat stanu naprężenia charaktery-

zuje się dwuosiowym ściskaniem i jednoosiowym rozciąganiem.

Wykorzystanie twardości do analizy stanu naprężenia nie jest zbyt licznie reprezentowane w literaturze. W monografiach [11, 12, 92] wymienia się kilkanaście przykładów zastosowań, ale w większości z nich pomiar twardości był stosowany równoległe z analizą deformacji początkowo kwadratowej siatki. Jedynie w przypadku analizy stanu naprężenia w szyjce rozciąganego pręta [92] obliczenia przeprowadzono w oparciu o doświadczalnie określony rozkład twardości. Po rozciągnięciu pręta z miękkiej stali aż do wyraźnego wytworzenia się szyjki przecięto próbkę wzdłuż osi symetrii i po mechanicznym wygładzeniu zmierzono rozkład twardości HRB w obszarze zlokalizowanej deformacji. Z krzywej cechowania dla tego materiału określonej z prób jednoosiowego ściskania cylindrycznych próbek wyznaczono rozkład intensywności naprężenia. Wykorzystując dalej równania plastycznej niejednorodności w warunkach osiowej symetrii, przy założeniu hipotezy Haara-Kármána rozwiązano, poczynając od swobodnego brzegu zagadnienie ^(oraz mieszane) Cauchy'ego i obliczono składowe stanu naprężenia w szyjce. Wyniki obliczeń bardzo dobrze zgadzały się z klasyczną, uproszczoną formułą Dawidkowa-Spirydonowej [98]. W środkowym punkcie minimalnego przekroju szyjki naprężenie osiowe wynosiło 8 kg mm^2 , a według formuły uproszczonej $7,8 \text{ kg mm}^2$.

Przy analizie osiowo-symetrycznego wyciskania pręta [92] pomiar twardości i określony na jej podstawie rozkład intensywności naprężenia w obszarze uplastycznionym traktowano jako uzupełnienie metody wizjoplastyczności. Składowe prędkości od-

kształcenia obliczono na podstawie deformacji naniesionej, w środkowej płaszczyźnie próbki, kwadratowej siatki. Następnie w 120 punktach odkształconego obszaru zmierzono twardość Vickersa i z krzywej cechowania badanego materiału określono rozkład intensywności naprężenia. W ten sposób wyznaczono wszystkie wielkości występujące w prawie płynięcia dla dewiatorów. Nieznaną wartość ciśnienia hydrostatycznego obliczono całkując równanie równowagi. We wszystkich rozpatrywanych przypadkach wyciskania przy kątach rozwarcia matrycy: 60° , 90° , 120° oraz stopniach redukcji R równych kolejno: 0,64, 0,55, 0,75 składowe naprężenia σ_r i σ_θ były ściskające. Oznacza to, że przecięcie próbki w płaszczyźnie wzdłużnej nie miało wpływu na rozkład naprężeń. Naprężenia osiowe σ_z mają nierównomierny rozkład wzdłuż promienia. Na osi symetrii w pobliżu oczka matrycy naprężenia σ_z są rozciągające. Naprężenia te wzrastają w kierunku wzrostu kąta rozwarcia matrycy i maleją ze zmniejszeniem stopnia redukcji. Naprężenia normalne σ_n na powierzchni konturu matrycy mają nierównomierny przebieg. Wielkość tych naprężeń rośnie ze wzrostem kąta rozwarcia matrycy. Żadne z naprężeń głównych nie jest równe naprężeniu obwodowemu σ_θ , nie jest więc spełniony warunek Haara-Kármána.

Rozszerzenie możliwości opisanej analizy stanu naprężenia dla procesów obróbki plastycznej na gorąco przedstawiono [99] na przykładzie osiowo-symetrycznego wyciskania przez stożkowe matryce o różnych kątach rozwarcia. Wyciskana próbka nagrzana była do temperatury 530°C , a temperaturę matrycy utrzymywano w granicach $350 - 380^\circ\text{C}$. Prędkości odkształcenia i intensywność odkształcenia obliczano tak jak w wizjoplastyczności,

Z obrazu odkształcenia siatki naniesionej w środkowej płaszczyźnie składającej się z dwóch części próbki. Na powierzchni drugiej części zmierzono twardość w poszczególnych punktach odkształconego materiału. Poddając następnie cylindryczne próbki o średnicy 10 mm i wysokości 15 mm jednoosiowemu ścisłaniu w różnych temperaturach wyznaczono krzywe cechowania $HV = f(\epsilon_i)$ i $HV = f(e_i)$ dla temperatur: 300, 400, 450, 500, 550°C. Mając więc w poszczególnych punktach wyznaczoną twardość i intensywność odkształcenia można z krzywych cechowania określić rozkład temperatury a następnie intensywność naprężenia z wykresu $HV = f(\epsilon_i)$ dla danej temperatury. Obliczenia składowych naprężenia przeprowadzono w sposób poprzednio opisany.

Dokładność obliczeń naprężeń i prędkości zależy od następujących głównych czynników:

1. błędów odczytu dyskretnie otrzymanej informacji eksperymentalnej,
2. błędów wygładzania wyjściowej informacji wynikającej z przyjęcia wyrażeń aproksymujących,
3. błędów różniczkowania i całkowania,
4. błędów fizycznych przyjętego modelu sztywno-plastycznego i prawa wzmocnienia.

Dokładność wyjściowej informacji doświadczalnej zależy od staranności i wykonania próbek oraz błędów nanoszenia siatek na przekrój wzdłużny. Dokładność odczytu będzie zależna od stopnia redukcji. Duże stopnie redukcji powodują rozszerzanie się linii siatki, co istotnie obniża dokładność pomiaru przemieszczeń punktów siatki. Zdaniem autorów prac [9, 10, 77, 97]

dokładność pomiarów przemieszczeń siatek drukowanych fotograficznie nie przekracza 0,01 - 0,02 mm przy małych redukcjach i 0,02 - 0,04 mm przy znacznych redukcjach. Dokładna ocena błędu informacji wyjściowej jest trudna, gdyż zależy od bardzo wielu czynników, jak np. metody i aparatury pomiarowej, geometrii obszaru pomiarowego i oczka siatki, oświetlenia itd. Błędy obróbki matematycznej zadanych doświadczalnie pól przemieszczeń zależą od przyjętych metod numerycznych. W procesie wygładzania eliminuje się błędy przypadkowe, których źródła tkwią głównie w mikroefektach przy odkształceniu plastycznym. Procedura wygładzania daje w rezultacie uśrednione linie prądu, których funkcje są ciągłe i różniczkowalne. Dokładna analiza wpływu różnych metod aproksymujących na stabilność wyników wykazała [86,97], że pierwsze pochodne od wyjściowego pola przemieszczeń są mało czułe na sposób wygładzania. Największe błędy wnoszą różne metody wygładzania w przekrojach ekstremalnych wartości funkcji, na brzegach obszaru uplastycznienia i trajektoriach w pobliżu konturu matrycy. Numeryczne określenie drugich i trzecich pochodnych z dyskretnych pól przemieszczeń obarczone jest dużym błędem. Dotychczas wykorzystywano do tego celu metodę najmniejszych kwadratów i metodę różnic skończonych. Dwukrotne numeryczne różniczkowanie funkcji wyjściowej prowadzi dodatkowo do wygładzenia ekstremalnych wartości obliczonych wielkości, których dokładność zmniejsza się na brzegach obszaru uplastycznienia i liniach konturu narzędzia. W pracy [96] do wygładzania numerycznego funkcji doświadczalnych wykorzystano funkcje sklepane „spline”.

Dokładność obliczonych wartości prędkości sprawdza się od-

chyleniem od warunku nieściśliwości, tj. zmianę $\text{div } \vec{V}$ po obszarze uplastycznienia. W pracy [97] odchylenie od zerowej wartości $\text{div } \vec{V}$, w przypadku wyciskania hydrostatycznego przez matrycę o kącie rozwarcia $2\alpha = 40^\circ$ z czterokrotną redukcją przekroju kołowego było zawarte w przedziale $[-0,05, +0,1]$.

Według [97] ogólny błąd przy wyznaczaniu wielkości kinematycznych w znacznej części pola płynięcia plastycznego wynosi 5 - 10 %, zaś na trajektoriach skrajnych i w obszarze wyjścia zwiększa się do 15 - 30 %.

Składowe tensora naprężenia obliczamy różniczkując trzykrotnie wyjściowe funkcje doświadczalne. Dokładność obliczeń naprężeń zależy od zgodności cech realnego materiału z własnościami przyjętego modelu sztywno-plastycznego i wzmocnienia izotropowego. Równie ważny jest tu zastosowany sposób ujednocznienia pól naprężeń. Uwzględnienie wzmocnienia materiału przy odkształceniu plastycznym obniża gradienty zmian naprężeń szczególnie na wyjściu ze strefy uplastycznienia. Jednak hipoteza jednej krzywej wzmocnienia $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ jest obarczona trudnym do określenia błędem. Wobec braku bezpośredniej informacji eksperymentalnej dla naprężeń błąd obliczeniowy stanu naprężenia możemy określić tylko metodami pośrednimi. W pracy [10] błąd ten określono jako średnie odchylenie kwadratowe pomiędzy polami naprężeń otrzymanych na różnych drogach całkowania. Istnieje jeszcze możliwość porównywania obliczeniowych pól naprężeń z tymi samymi wielkościami otrzymanymi metodami charakterystyk w płaskim stanie odkształcenia i osiowej symetrii. Porównanie takie o ile jest możliwe (brak rozwiązań ścisłych dla osiowej symetrii) ma również ograniczoną wartość,

ze względu na znaczne drastyczne uproszczenia przy formułowaniu warunków brzegowych.

W przypadku, gdy z pola twardości wyznaczamy siatkę charakterystyk, dokładność pól naprężeń będzie zależała głównie od zabiegów przygotowawczych przed pomiarem twardości. W osiowej symetrii dokładność takiej analizy będzie ograniczona przede wszystkim przyjęciem warunku plastyczności Treski i hipotezy pełnej plastyczności Haara-Kármána.

Metody doświadczalno-obliczeniowe analizy pól kinematycznych i pól naprężeń w procesach obróbki plastycznej są rozwijane w wielu ośrodkach zagranicznych i w Polsce. Świadczą o tym cytowane poprzednio publikacje zachodnie i radzieckie. W kraju dziedzina ta jest skromnie reprezentowana w literaturze [46, 100, 101, 102]. Elementy nowe w stosunku do cytowanych powyżej prac to obliczanie odkształceń skończonych w procesie wyciskania i ich doświadczalny związek z rozkładem temperatury w uplastycznionym polu [103]. Nowości w bieżących pracach związane są przeważnie z ulepszaniem techniki wizualizacji ruchu plastycznie deformowanego materiału. Nadal pozostają nierozwiązane, trudne problemy obliczeń pól naprężeń i oceny wzmocnienia. W dalszym ciągu nie posiadamy dokładnych metod różniczkowania numerycznego dyskretnych funkcji doświadczalnych. Postęp w tej grupie problemów jest jednym z celów niniejszej pracy.

2.4. Podsumowanie

Uzyczenie rozwiązania z uwzględnieniem wzmocnienia dla złożonych procesów obróbki plastycznej stwarza ciągle jeszcze zasadnicze trudności. W większości przypadków mamy mieszane warunki brzegowe, które uniemożliwiają rozsprzęgnięcie równań statyki i kinematyki. Nawet w przypadku takich geometrycznie prostych procesów jak wyciskanie materiału przez matrycę przy zachowaniu warunków osiowej symetrii nie uzyskano poprawnego rozwiązania, które spełnia wszystkie kinematyczne i statyczne warunki zadania. W podejmowanych w wielu ośrodkach naukowych próbach rozwiązania tego zagadnienia istotną rolę odgrywają badania doświadczalne, których wyniki dostarczają informacji o sposobie deformacji i wzmocnienia. Informacje te ułatwiają rozwiązanie kompletu równań stanu plastycznego. Podstawą obliczeń jest obraz zdeformowanej, początkowo kwadratowej siatki lub rozkład twardości w obszarze plastycznym. Niezbędne doświadczenia są trudne i pracochłonne, wymagające zbudowania specjalnych stanowisk modelowych. Opracowanie wyników jest również bardzo pracochłonne, wymagające automatyzacji pomiarów współrzędnych zdeformowanej siatki i komputeryzacji obliczeń.

Metodami doświadczalno-obliczeniowymi uzyskano cały szereg rozwiązań zagadnień brzegowych i można przypuszczać, że po wyeliminowaniu podstawowych mankamentów skuteczność ich wzrośnie. Zainteresowanie tego rodzaju metodami wynika z faktu, że umożliwiają one przeprowadzenie doświadczalnej analizy stanu naprężenia i odkształcenia z uwzględnieniem rzeczywistych

cech materiałów dla wielu praktycznych problemów.

Podjęwane próby teoretycznej analizy procesów plastycznego płynięcia z uwzględnieniem wzmocnienia polegały na wstępnym zakładaniu pewnych wielkości. Następnie drogą iteracji poszukujemy rozwiązania właściwego lub też dzielimy cały proces na szereg etapów, dla których kolejno uzyskujemy rozwiązania przyjmując pewne wielkości jako znane z poprzedniego etapu. Możliwości tej grupy metod mają ograniczony zasięg. Nie można ich jak dotąd efektywnie stosować do zagadnień osiowo-symetrycznych z mieszanymi warunkami brzegowymi.

Każda z opisanych szczegółowo metod wzajemnie się uzupełnia i rozszerza możliwości naukowej analizy poszczególnych procesów.

3. DOŚWIADCZALNA ANALIZA PROCESU WYCISKANIA OSIOWO-SYMETRYCZNEGO

3.1. Uwagi ogólne

Celem tego rozdziału jest przedstawienie nowych wyników badań doświadczalnych w zakresie kinematyki plastycznego płynięcia i niejednorodności plastycznej materiału poddanego wyciskaniu w warunkach osiowej symetrii.

Doświadczenia przeprowadzono pod kątem ich przydatności do analizy teoretycznej procesów wyciskania z uwzględnieniem wzmocnienia materiału. Chodzi tu głównie o możliwość weryfikacji doświadczalnej rozwiązań teoretycznych dla funkcji prądu i pól prędkości. Doświadczalne przebiegi pól prędkości i niejednorodności plastycznej posłużyły przy tym do sformułowania rzeczywistych warunków brzegowych. Wykorzystano to w rozdziale czwartym do obliczeń pól naprężeń. Formą zapisu wyników doświadczeń była również uwarunkowana dalszym jej wykorzystaniem do analiz teoretycznych.

Do opisu doświadczalnych pól prędkości przemieszczeń i prędkości odkształceń zastosowano koncepcję funkcji prądu. Postać funkcji prądu, w obszarach uplastycznienia czterech próbek wyciskanych z różnymi parametrami, wyznaczono z pomiarów współrzędnych punktów linii prądu. Do wygładzania dyskretnie zadanej funkcji prądu oraz operacji jej kilkakrotnego różniczkowania wykorzystano funkcje sklepane „spline”. Następnie z charakteru przebiegów funkcji prądu $\Phi(\tau, z)$ ustalono, że do jej opisu analitycznego można zastosować podwójne szeregi trygono-

metryczne. Kolejno obliczano składowe prędkości przemieszczeń oraz składowe tensora prędkości odkształceń. Intensywność odkształceń $\dot{\epsilon}_i$ otrzymano na drodze całkowania intensywności prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_i$ wzdłuż trajektorii cząstki.

Rozkład wzmocnienia utożsamiono z niejednorodnym rozkładem granicy plastyczności materiału w polu płynięcia plastycznego. Wymuszona odkształceniami trwałymi niejednorodność plastyczna była wyznaczona za pomocą hipotezy jednej krzywej płynięcia $\sigma_i = f(\epsilon_i)$. Tak wyznaczone pośrednio wzmocnienie porównano z rozkładem intensywności naprężeń $\sigma_i(\tau, z)$ otrzymanym z pomiarów twardości w przekroju wzdłużnym wyciskanej próbki. W obydwu przypadkach metoda wyznaczania wzmocnienia była oparta na założeniu, że ma ono charakter izotropowy. Przebieg doświadczeń i obliczeń omówiono szczegółowo w kolejnych punktach rozdziału.

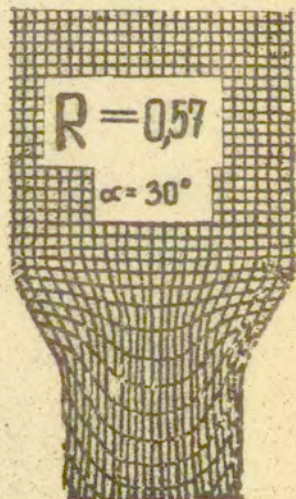
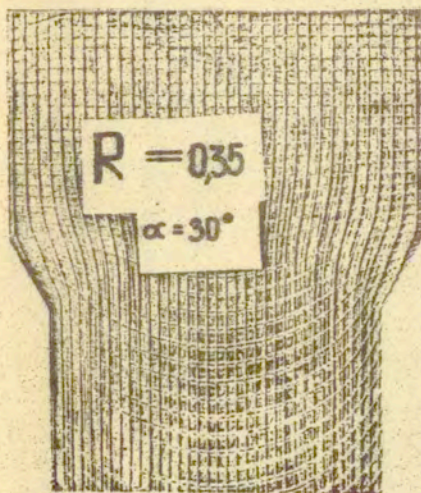
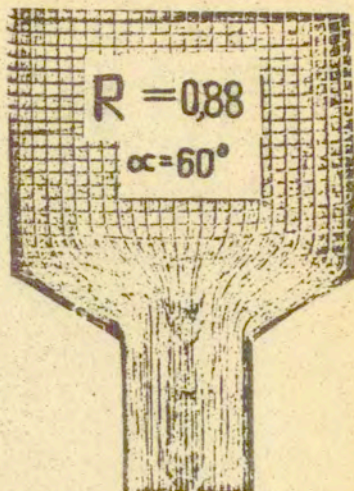
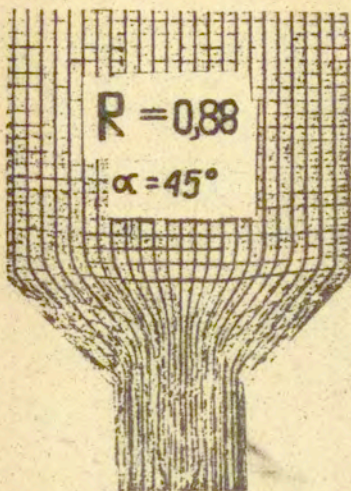
3.2. Kinematyka procesu wyciskania

Proces wyciskania zrealizowano na przyrządzie własnej konstrukcji [46] z dwuczęściową składaną komorą, w której umieszczono próbki złożone z dwóch półcylicydrycznych połówek. Osowo-symetryczne próbki o średnicy wyjściowej $D = 50$ mm i 70 mm wykonano ze stopu aluminium PA2. Na płaszczyznę podziału, którą stanowiła płaszczyzna południkowa jednej z połówek, naniesiono siatkę kwadratową złożoną z linii oddalonych o $2 \pm 0,1$ mm. Wyciskanie prowadzono z prędkością stempla $V_0 = 15$ mm/min. bez smarowania, ale z wysoką gładkością powierzchni próbek i matryc.

Przed wyciskaniem próbki poddano wyżarzaniu ujednorodniającemu. Parametry próbek oraz obrazy zdeformowanych siatek na płaszczyźnie podziału pokazano na rys.3.1. Do ciągłej rejestracji przemieszczenia stempla (X) i wartości siły wyciskania (P) zastosowano specjalny układ pomiarowy z przetwornikami indukcyjnymi i rejestratorem P-X [46]. Proces wyciskania przerywano po ustaleniu się wartości siły na znacznym odcinku przemieszczenia stempla, co odpowiadało w przybliżeniu wyciśnięciu połowy wstępnej wysokości próbki. Ponad dwukrotna długość próbek wyjściowych w stosunku do wymiarów średnic tj. 150/70 i 110/50 zapewnia osiągnięcie stacjonarnego etapu płynięcia plastycznego.

Linie wzdłużne zdeformowanych siatek z rys.3.1. doznają przegięć przy wejściu w obszar intensywnego odkształcenia i u wyjścia z niego. Przegięcia te mają wzajemnie przeciwny kierunek. Linie poprzeczne siatki wyginają się symetrycznie wypukłością w kierunku ruchu stempla. Jest to spowodowane opóźnianiem się zewnętrznych warstw w stosunku do wewnętrznych. Strzałki ugięcia poprzecznych linii zwiększają się w kierunku oddalania się od powierzchni czołowej próbki. Jest to rezultat działania sił tarcia między próbką i pojemnikiem. Obrazy zdeformowanej siatki, w szczególności zmiany odległości wierzchołków linii poprzecznych na długości wskazują na dużą niejednorodność własności mechanicznych wewnętrznych warstw materiału próbki. Niejednorodność stanu odkształcenia zobrazowana zdeformowanymi siatkami jest wynikiem bardzo złożonych procesów fizycznych przebiegających w trakcie wyciskania.

Dotychczas jedyną metodą pozwalającą na dokładne określe-



Rys. 3.1

nie rzeczywistych, lokalnych wartości prędkości w polu przynięcia plastycznego jest znajomość doświadczalnych trajektorii cząstek plastycznie płynącego materiału. Przy wyznaczaniu pól prędkości z doświadczalnie określonych trajektorii przyjmujemy szereg założeń, z których najważniejsze to nieściśliwość materiału. Warunek ten nałożony na pola przemieszczeń i prędkości wynika naturalnie z faktu, że informacje o geometrii odkształcenia uzyskujemy na odciążonych modelach. Spełnienie warunku osiowej symetrii oznacza, że próbka nie może być skręcana w płaszczyźnie prostopadłej do jej osi wzdłużnej, przy jednoczesnym braku przemieszczenia obydwu półcyndrycznych części względem siebie. Zatem identyczne zachowanie się modelu dwuczęściowego z niedzielonym będzie możliwe, gdy w płaszczyźnie podziału nie będzie naprężeń stycznych a naprężenia normalne będą ściskające. Rozkład wyjściowej niejednorodności własności mechanicznych niezdeformowanych próbek musi być symetrycznie rozłożony względem osi wzdłużnej w obydwu połówkach dzielonej próbki.

Sprawdzenie słuszności powyższych założeń nie jest łatwym zadaniem. Mimo to uważamy je za poprawne opierając się na intuicji i obserwacjach doświadczalnych.

Celem wyznaczenia położenia linii prądu dwie połówki próbki składano w matrycy i obciążano przyrostowo powodując wpływ materiału z matrycy [5,47]. Po każdym kroku odpowiadającym małemu przemieszczeniu stempla demontowano matrycę i wykonywano na specjalnym stanowisku zdjęcie zdeformowanej siatki. Na podstawie kilku kolejnych zdjęć, łącząc ze sobą punkty odpowiadające położeniom węzłów siatki, określono linie prądu w zde-

formowanym materiale. Następnie w stacjonarnej fazie procesu porównano tak otrzymane linie prądu z kształtem zdeformowanych, początkowo równoległych do osi symetrii wzdłużnych linii kwadratowej siatki. Porównanie to dla jednej z próbek wykazało, że linie te pokrywają się z bardzo dużą dokładnością. Zatem w procesie stacjonarnego wyciskania zdeformowane linie wzdłużne, początkowo kwadratowej siatki, mogą być uważane za linie prądu. Założenie takie stosowano w pracach [11, 12, 74, 75, 79] poświęconych doświadczalnej analizie procesu wyciskania.

Jak zaznaczono, do opisu pól prędkości użyto funkcji prądu. Przepływ plastyczny ma z założenia charakter laminarny. Wobec tego trajektorie cząstek są uważane dalej za linie prądu w ustalonej fazie procesu wyciskania. Laminarność procesu wynika z obrazów zdeformowanych siatek. Wzdłużne rysy siatek na rys. 3.1. są prostymi równoległymi do kierunku ruchu stempla przed wejściem do obszaru płynięcia jak i też po wyjściu z pola intensywnych, niejednorodnych odkształceń plastycznych. Odnosi się to do wszystkich czterech próbek wyciskanych z małymi i dużymi stopniami redukcji. Przyjęcie linii wzdłużnych zdeformowanej, uprzednio kwadratowej, siatki za linie prądu w poważnym stopniu upraszcza procedurę obliczeń pól prędkości.

Wtedy jedyną informacją doświadczalną o płynięciu plastycznym są pomierzone współrzędne: T , Z poszczególnych punktów leżących na kolejnych i -tych liniach prądu. Dokładność pomiarów współrzędnych punktów leżących na linii prądu jest stosunkowo duża, ponieważ grubość rys wzdłużnych zdeformowanej siatki maleje w kierunku wzrostu odkształceń. W przeciwieństwie do tego linie poprzeczne rozszerzają się a węzły zdeformowanej siatki

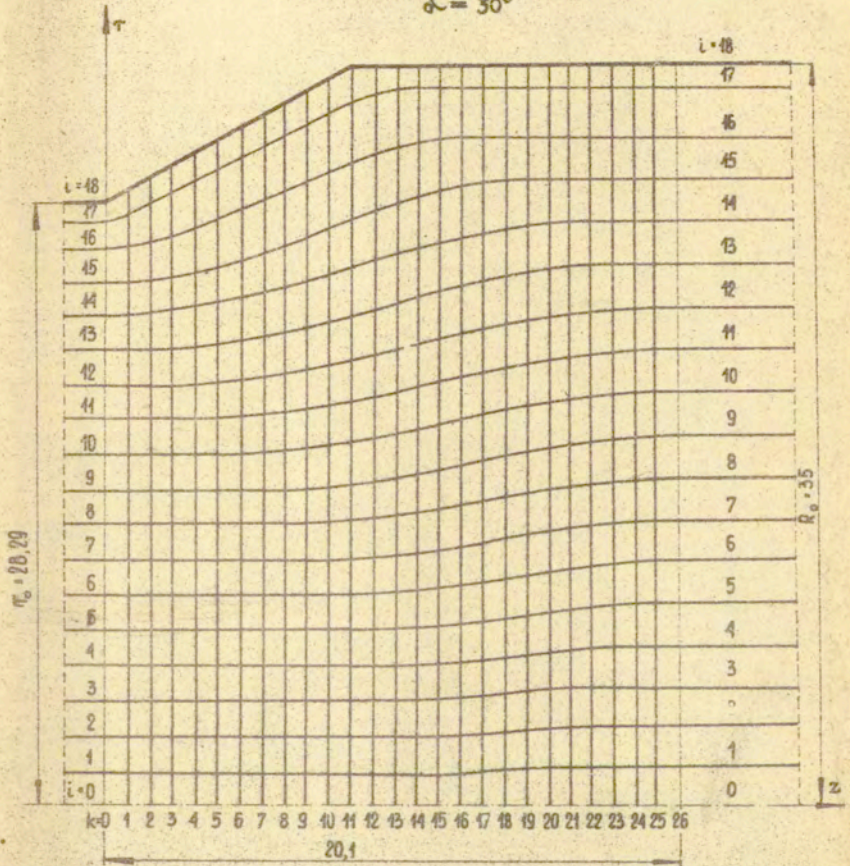
są rozmyte i ich dokładna lokalizacja jest niemożliwa. Przyjęcie koncepcji funkcji prądu pozwala nam uniknąć pomiarów współrzędnych węzłów siatki po deformacji. Interesują nas tylko współrzędne T, Z punktów leżących na wzdłużnych liniach siatki po deformacji próbki.

Współrzędne T kilkudziesięciu punktów wzdłuż linii prądu pomierzono w trzydziestu przekrojach współrzędnej Z . Przekroje te były równo oddalone od siebie przeciętnie o 0,75 mm. W całości dla czterech próbek wykonano kilkanaście tysięcy pomiarów. Czynność ta jest bardzo pracochłonna i wymaga automatyzacji. Dokładność pomiarów ze względu na grubość rys siatki wynosiła rzędu 0,1 mm. Otrzymane doświadczalnie linie prądu z pomiarów czterech przepływów plastycznych w zakresie redukcji R od 0,35 do 0,88 oraz trzech różnych kątów rozwarcia stożka matrycy przedstawiono na rysunkach od 3.2. do 3.5. Pokazane linie prądu pozwoliły w szerokim zakresie określić charakter doświadczalnej funkcji prądu $\Phi(T, Z)$ w polu płynięcia plastycznego. Funkcja prądu $\Phi(T, Z)$, mająca prostą interpretację fizyczną wydatku przepływu, jest naturalną wielkością opisującą ruch plastycznie deformowanego materiału. Wielkość ta ma duże znaczenie w mechanice ośrodków ciągłych przy badaniach teoretycznych ustalonych przepływów osiowo-symetrycznych.

W literaturze brak jest szczegółowych, obszernych danych doświadczalnych na temat przebiegu funkcji prądu $\Phi(T, Z)$ w obszarach plastycznych przepływów osiowo-symetrycznych. Doświadczalne rozkłady funkcji prądu $\Phi(T, Z)$ mają znaczenie poznawcze niezależnie od innych wielkości kinematycznych. Posiada one bezpośrednio do weryfikacji rozważań teoretycznych zaga-

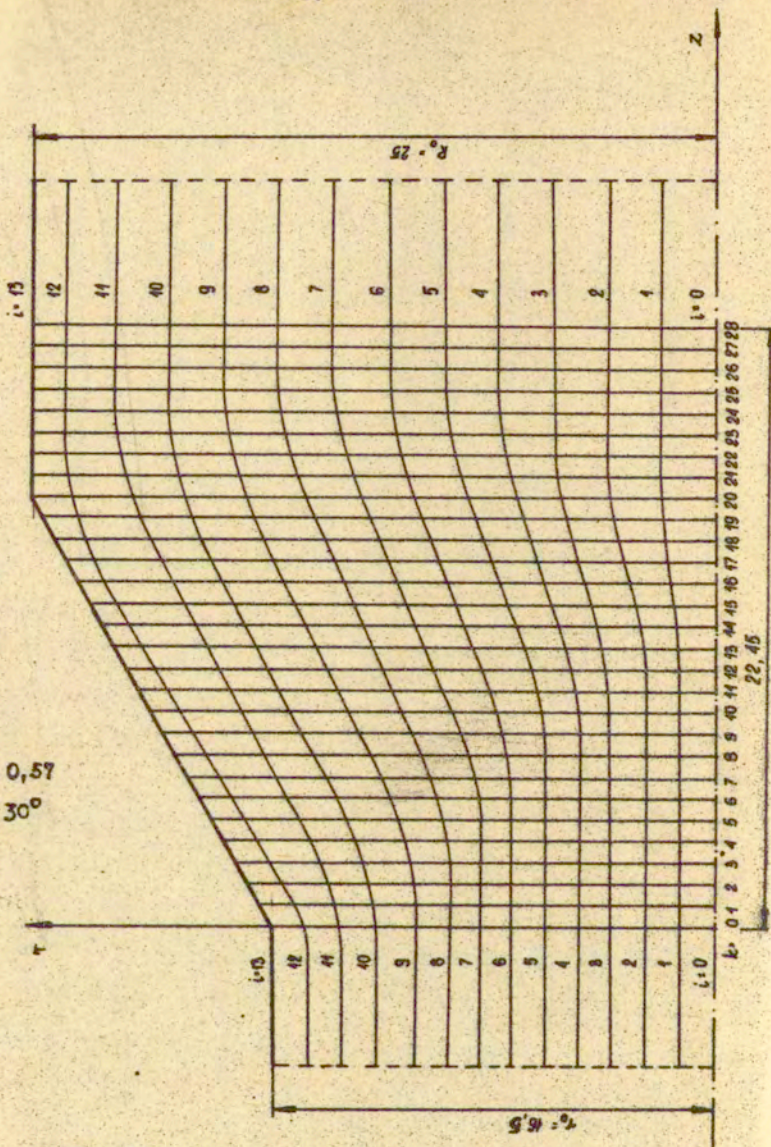
$R = 0,35$

$\alpha = 30^\circ$



Rys. 3.2

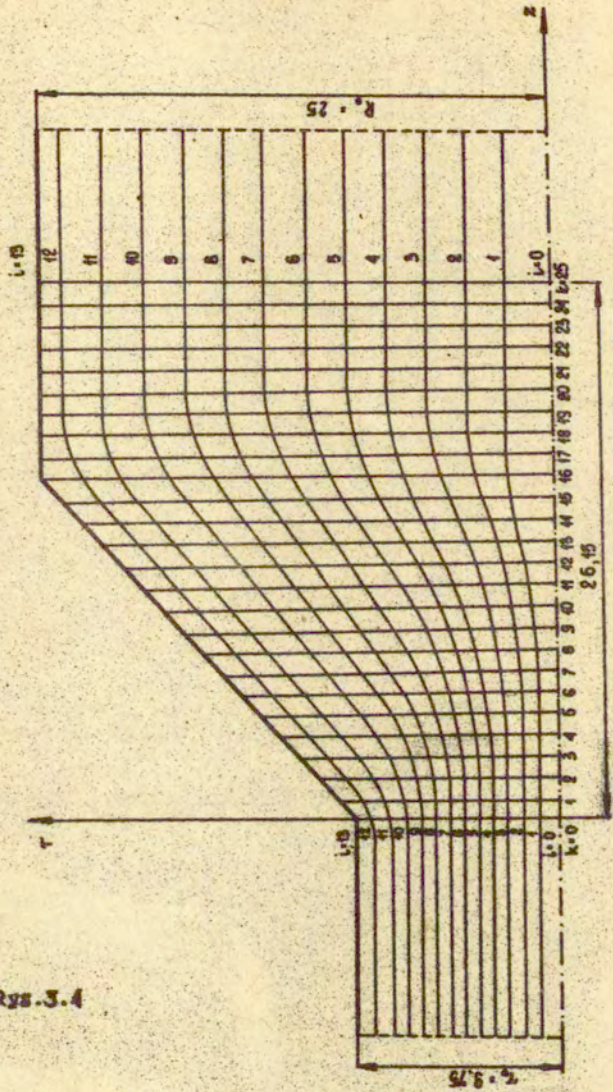
$R = 0,57$
 $\alpha = 30^\circ$

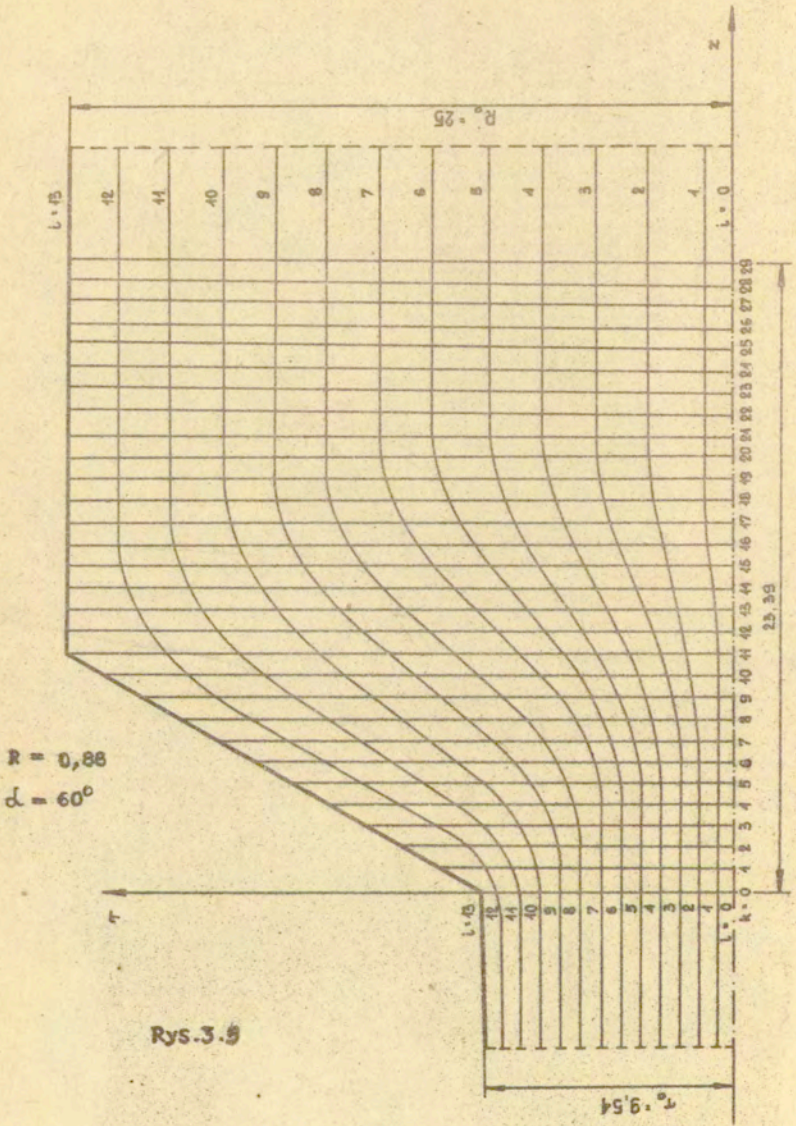


Rys. 3.3

$R = 0,88$
 $\alpha = 45^\circ$

Rys. 3.4





Rys.3.9

dnień brzegowych teorii plastyczności sformułowanych wielkościami kinematycznymi.

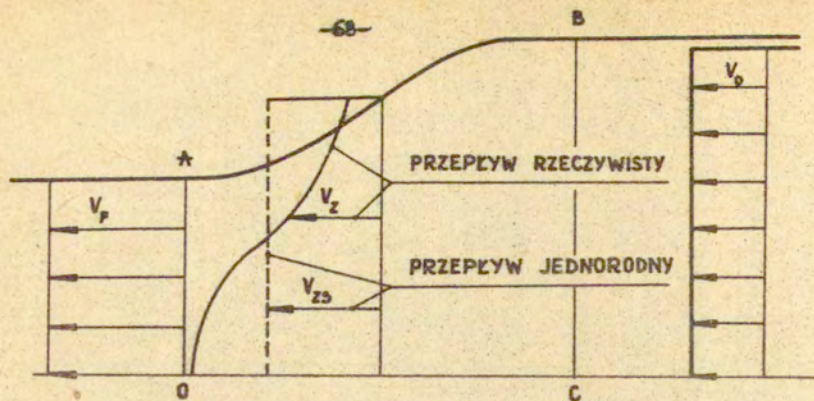
Wzdłuż każdej linii prądu fizyczna funkcja prądu $\Phi^F(\tau, z)$ ma stałą wartość i oblicza się ją z zależności (2.3.1.a). Wszystkie oznaczenia zawiera rys.3.7. Wartość $\Phi^F(\tau, z)$ jest inna w każdym punkcie k-tego przekroju współrzędnej „z” w obszarze płynięcia i wynika z położenia linii prądu. W dalszym ciągu wygodniej jest wprowadzić do opisu wydatku przepływu dwie bezwymiarowe wielkości. Są to: współrzędna znormalizowana $T_n(\tau, z)$ i bezwymiarowa funkcja prądu $\Phi(\tau, z)$. Wprowadzenie^o bezwymiarowej współrzędnej $T_n(\tau, z)$ uniezależnia opis zjawisk od kształtu konturu matrycy. Współrzędna $T_n(\tau, z)$ oznacza stosunek bieżącej wartości współrzędnej „ τ ” punktu leżącego w k-tym przekroju współrzędnej „z” do wartości $R_b(z)$ równej promieniowi konturu matrycy w rozpatrywanym przekroju współrzędnej „z” (rys.3.7).

Fizyczny wydatek przepływu $\Phi^F(\tau, z)$ w dowolnym punkcie obszaru płynięcia można przedstawić w postaci sumy dwóch członów jako

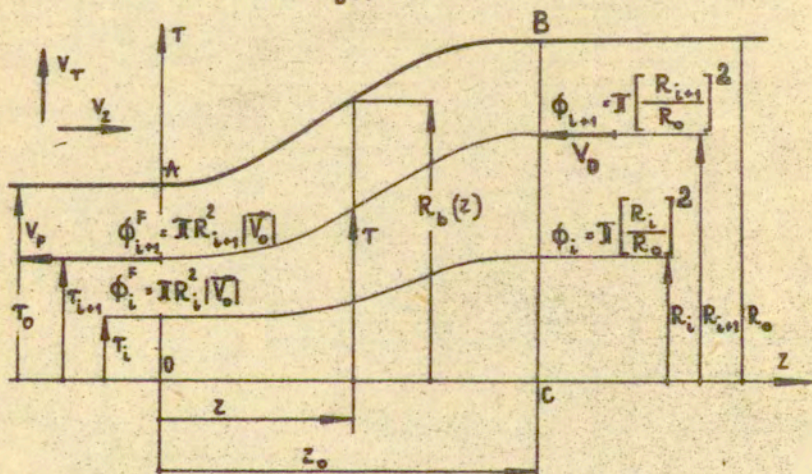
$$(3.2) \quad \Phi^F(\tau, z) = \Phi_1^F(\tau, z) + \delta\Phi^F(\tau, z).$$

Człon $\Phi_1^F(\tau, z)$ jest wydatkiem w umownie jednorodnym przepływie, któremu w k-tym przekroju współrzędnej „z” odpowiada średnia zastępcza składowa osiowa prędkości V_{zs} niezależna od „ τ ”. Prędkość $V_{zs}(z)$ obliczamy z bilansu wydatku w k-tym przekroju współrzędnej „z”. Równanie bilansu ma postać

$$(3.3) \quad \pi R_b^2(z) V_{zs}(z) = \pi R_0^2 V_0, \quad \text{stad}$$



$$(3.1) \quad T_n = \frac{T}{R_b(z)}$$



RJS-3-7

$$(3.3) \quad V_z(z) = \frac{R_0^2 V_0}{R_b^2(z)}$$

Ilustruje to rys.3.7., na którym linią ciągłą zaznaczono przebieg prędkości $V_z(z)$ w k-tym przekroju „z”. Linią przerywaną zaznaczono tam przebieg rzeczywistej składowej osiowej prędkości $V_z(\tau, z)$. Przyjmujemy dalej, że pozostała część wydatku $\delta F^F(\tau, z)$ jest wywołana głównym udziałem niejednorodności odkształceń i może być określona w k-tym przekroju współrzędnej „z” jako różnica pomiędzy rzeczywistym wydatkiem $\phi_l^F(\tau, z)$ odpowiadającym i-tej linii prądu a wydatkiem „jednorodnym” $\phi_1^F(\tau, z)$.

Uownie jednorodny wydatek $\phi_1^F(\tau, z)$ w k-tym przekroju współrzędnej „z” ma postać:

$$(3.4) \quad \phi_1^F(\tau, z) = \pi \tau^2 V_z(z) = \pi \frac{\tau^2 R_0^2}{R_b^2(z)} V_0,$$

gdzie „ τ ” jest współrzędną punktu leżącego na linii prądu w przekroju „k” (rys.3.7).

Człon niejednorodnej części wydatku $\delta \phi^F(\tau, z)$ przedstawia się jako:

$$(3.5) \quad \delta \phi^F = \phi_l^F - \phi_1^F,$$

$$(3.5) \quad \delta \phi^F(\tau, z) = \pi R_l^2 V_0 - \pi \frac{\tau^2 R_0^2}{R_b^2(z)} V_0.$$

Dzieląc obie strony równania (3.5) przez iloczyn $R_0^2 V_0$ otrzymujemy bezwymiarowe wielkości: $\delta \phi$, ϕ_l , ϕ_1 , przy oznaczaniu których opuszczamy górny indeks „F”. Wielkości te mają teraz następującą postać:

$$\delta \phi(\tau, z) = \pi \frac{R_l^2}{R_0^2} - \pi \frac{\tau^2}{R_b^2(z)} = \pi \frac{R_l^2}{R_0^2} - \pi \tau_n^2,$$

$$(3.6) \quad \phi_i = \pi \left(\frac{R_i}{R_0} \right)^2, \quad \phi_k = \pi \tau_k^2.$$

R_0 oznacza połowę średnicy wyjściowej próbki. Pełne wyrażenie na bezwymiarową funkcję pływnięcia $\phi(\tau, z)$ w dowolnym punkcie obszaru pływnięcia otrzymujemy teraz podstawiając do zależności (3.2) związki (3.6) po czym mamy:

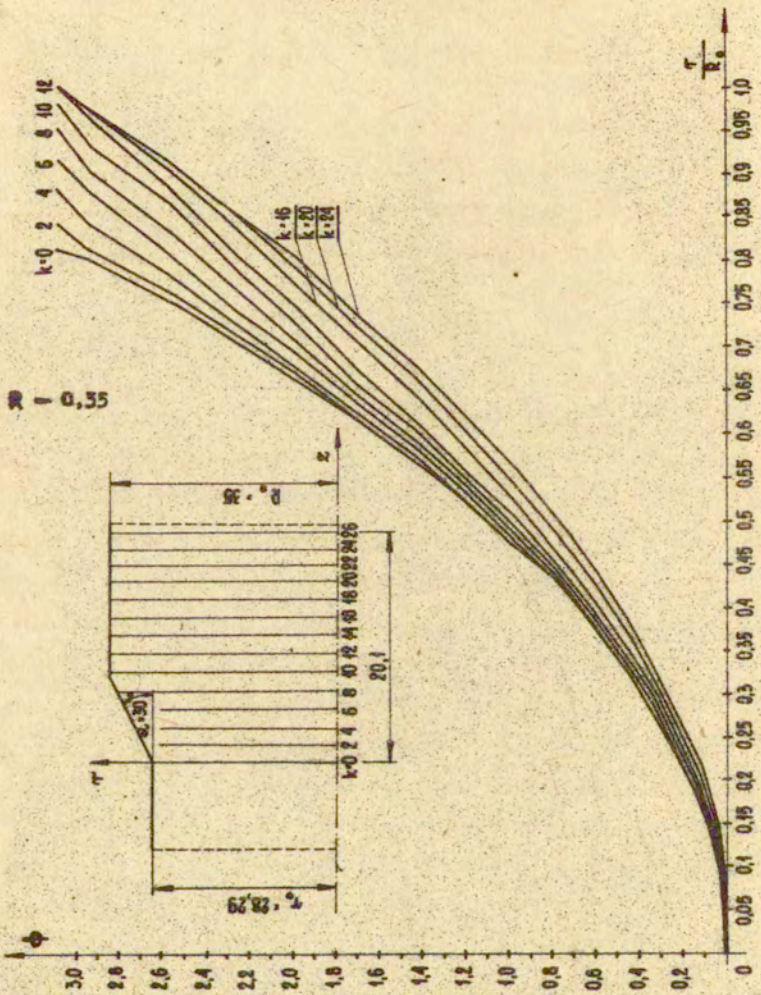
$$(3.7) \quad \phi(\tau, z) = \pi \tau_k^2(\tau, z) + \delta\phi(\tau, z).$$

Funkcja prądu (3.7) będzie kinematycznie dopuszczalna, jeżeli poza obszarem odkształceń plastycznych człon $\delta\phi(\tau, z)$ jest równy zero. Na osi symetrii $\phi(\tau, z)$ powinna się zerować, natomiast na konturze matrycy jej wartość będzie maksymalna i równa π . Warunek nieściśliwości jest tu spełniony z definicji. Przyjęta powyżej postać funkcji prądu $\phi(\tau, z)$ wyrażona sumą dwóch członów jest uzasadniona przebiegami doświadczalnymi tej wielkości w polu pływnięcia plastycznego czterech wyciskanych próbek. Ilustrują to rysunki od 3.8. do 3.25. Na rysunkach od 3.8. do 3.11. pokazano przebiegi bezwymiarowej funkcji prądu $\phi(\tau, z)$ w zależności od promienia τ w k -tych przekrojach współrzędnej z^k . Wzdłuż danej i -tej linii prądu wartość funkcji prądu $\phi(\tau, z)$ była brana jako $\phi_i = \pi R_i^2 / R_0^2$. Charakter przebiegów $\phi - \tau$ w przekrojach k współrzędnej z^k jest podobny dla małych i dużych redukcji przy różnych kątach rozwarcia stożka matrycy. Bardzo interesująco wyglądają prze-

biegi bezwymiarowej funkcji prądu $\phi(\tau, z)$ wyrażone we współrzędnej $\tau_n^2(\tau, z)$, które pokazano na rys. od 3.12. do 3.15. Wi-
dzimy tu wyraźnie, że we wszystkich czterech próbkach wartość
funkcji prądu $\phi(\tau, z)$ składa się z dwóch odcinków tj. $\pi\tau_n^2$
i $\delta\phi$. Odcinek $\pi\tau_n^2$ odpowiada funkcji prądu na skrajnych prze-
krojach współrzędnej „z”, które oddzielają pole niejednorodnego
płynięcia od pozostałej części.

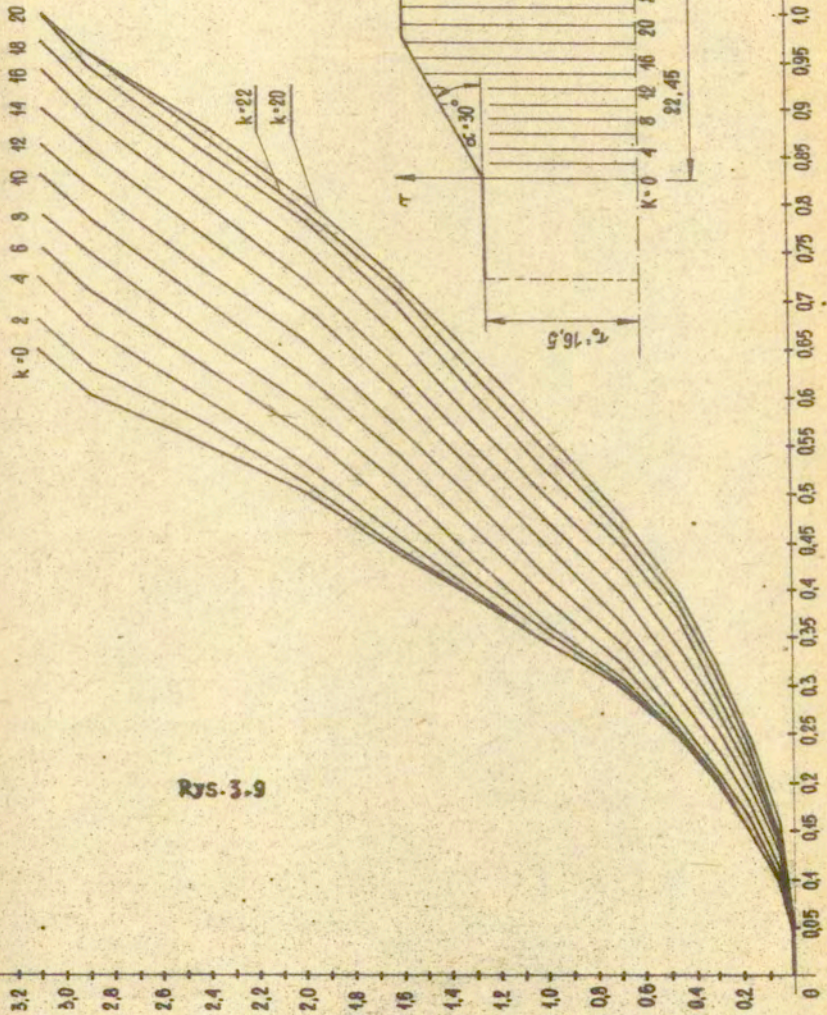
Doświadczalne przebiegi $\phi - \tau_n^2$ dostarczają informacji
o sposobie aproksymacji $\phi(\tau, z)$ w całym polu płynięcia plasty-
cznego. Inną, ważną sprawą jest wpływ parametrów geometrycz-
nych matrycy na przebieg niejednorodnej składowej funkcji prądu
 $\delta\phi(\tau, z)$. Bezpośrednią odpowiedź na to pytanie dają wykresy
 $\delta\phi - \tau_n^2$ zestawione na rys. od 3.16. do 3.19. Wielkość $\delta\phi(\tau, z)$
w dowolnym punkcie i-tej linii prądu z k-tego przekroju współ-
rzędnej „z” obliczano jako różnicę $\pi R_i^2/R_0^2 - \pi\tau_n^2$. Analizu-
jąc przebiegi $\delta\phi - \tau_n^2$ na rys. 3.16. i 3.17. można zauważyć,
że ze wzrostem stopnia redukcji następuje wzrost maksymalnych
wartości $\delta\phi$ w próbkach o tym samym kącie rozwarcia stożka ma-
trycy. Z drugiej strony z rys. 3.18. i 3.19. wynika, że przy
takim samym stopniu redukcji maksymalne wartości $\delta\phi$ rosną
w kierunku wzrostu kąta rozwarcia matrycy. Zatem maksymalne
wartości niejednorodnej składowej wydatku przepływu $\delta\phi(\tau, z)$
rosną w obszarze uplastycznienia ze wzrostem stopnia redukcji
i kąta rozwarcia stożka matrycy.

Fakt ten, jak też kształt doświadczalnych przebiegów linii
prądu i funkcji prądu w obszarze uplastycznionym ma dużą war-
tość dla teorii procesu wyciskania. Informacje te pozwalają
przewidywać nowe, kinematycznie dopuszczalne funkcje prądu,

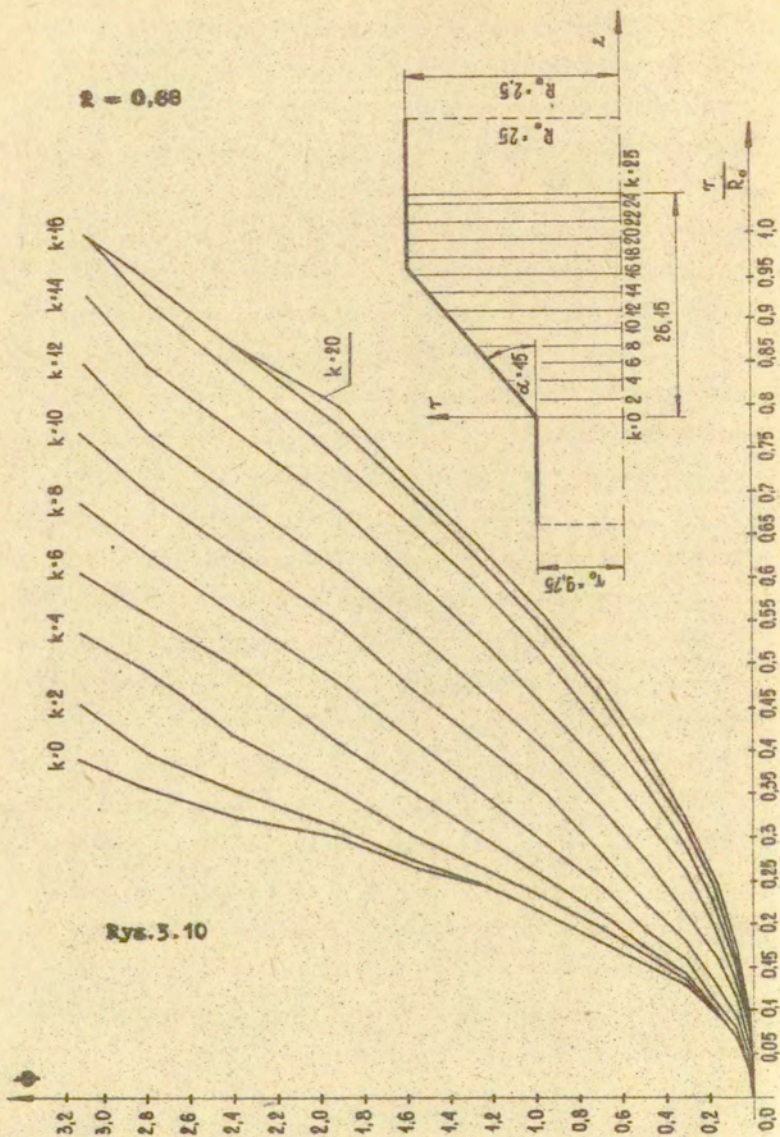


Rys. 3.8

$R = 0,57$

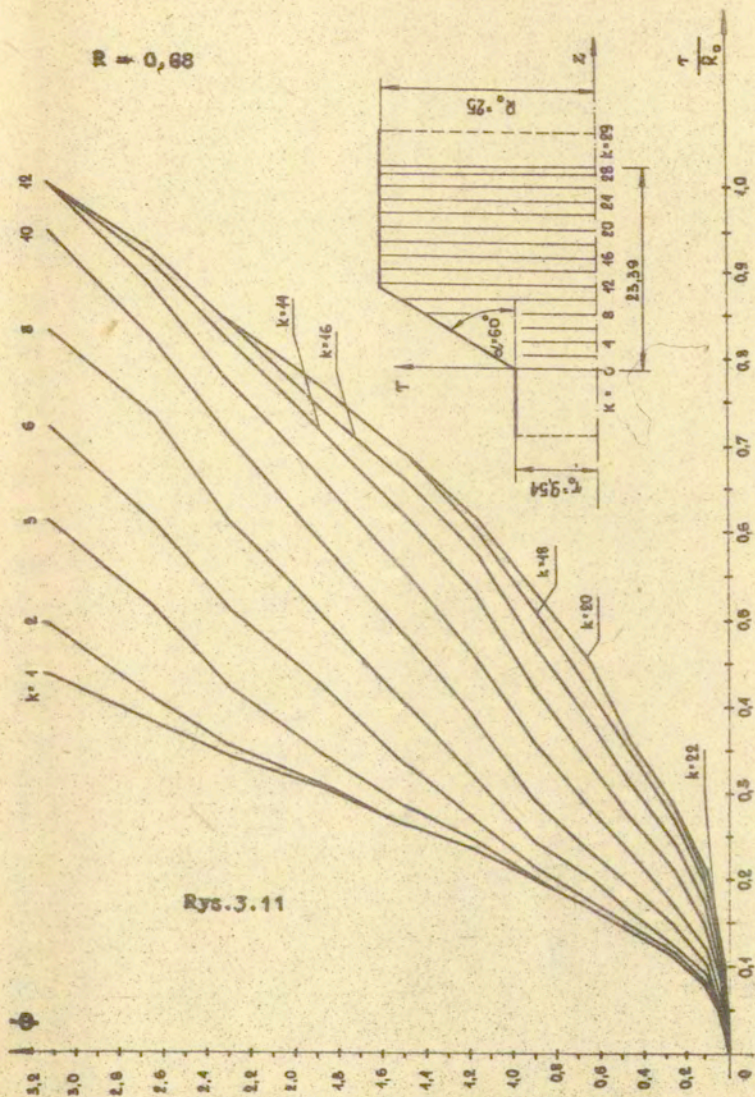


Rys. 3.9



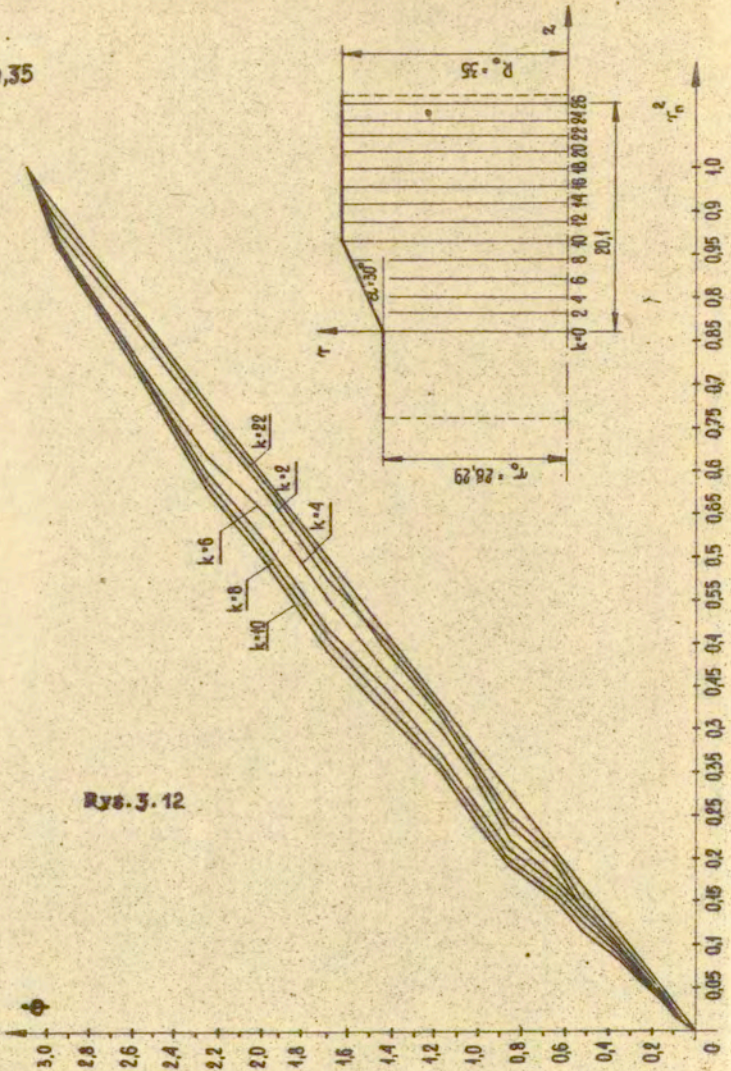
Rys. 3.10

$\mu = 0,88$

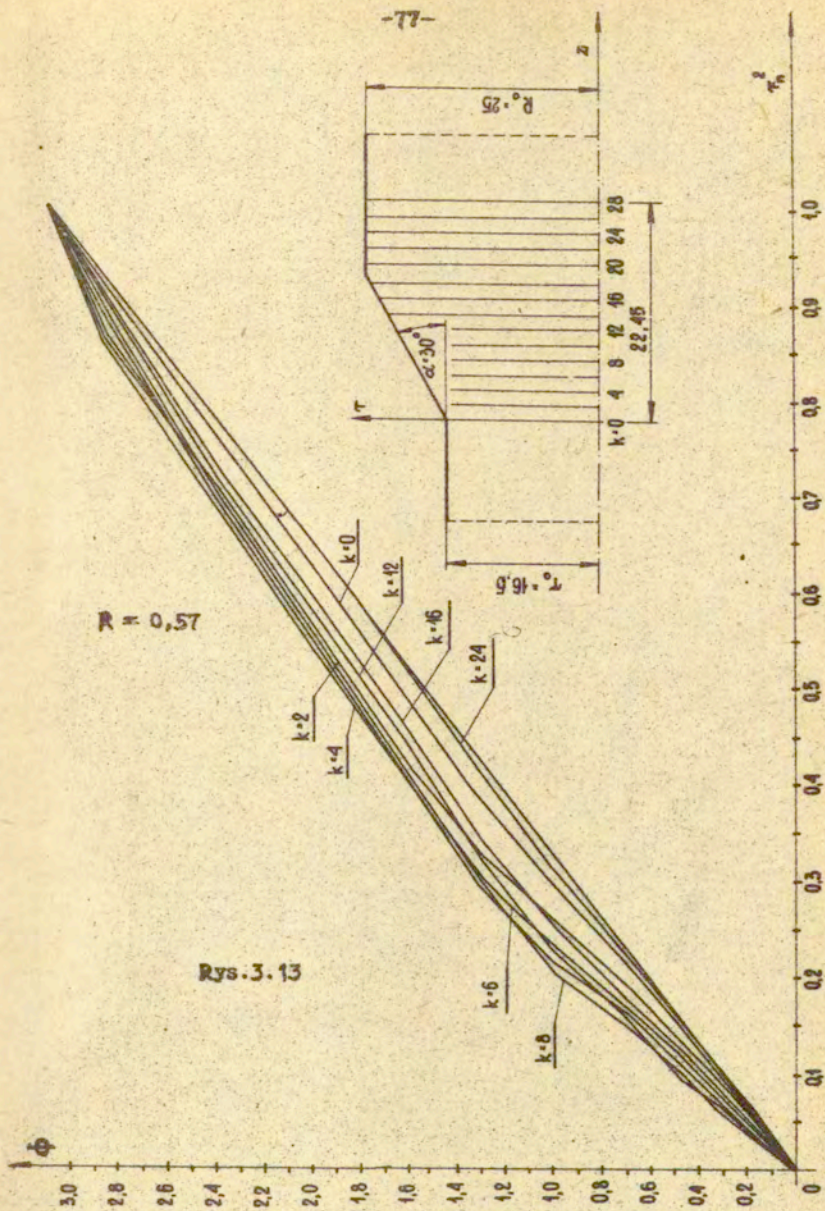


Rys. 3.11

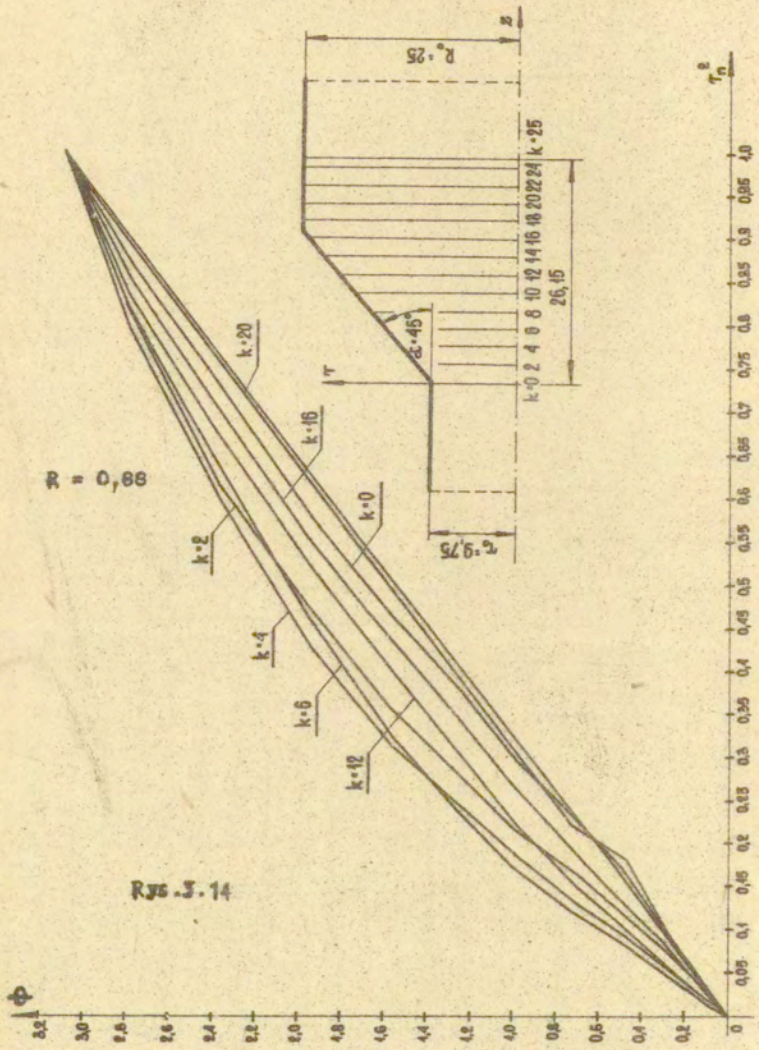
$R=0,35$



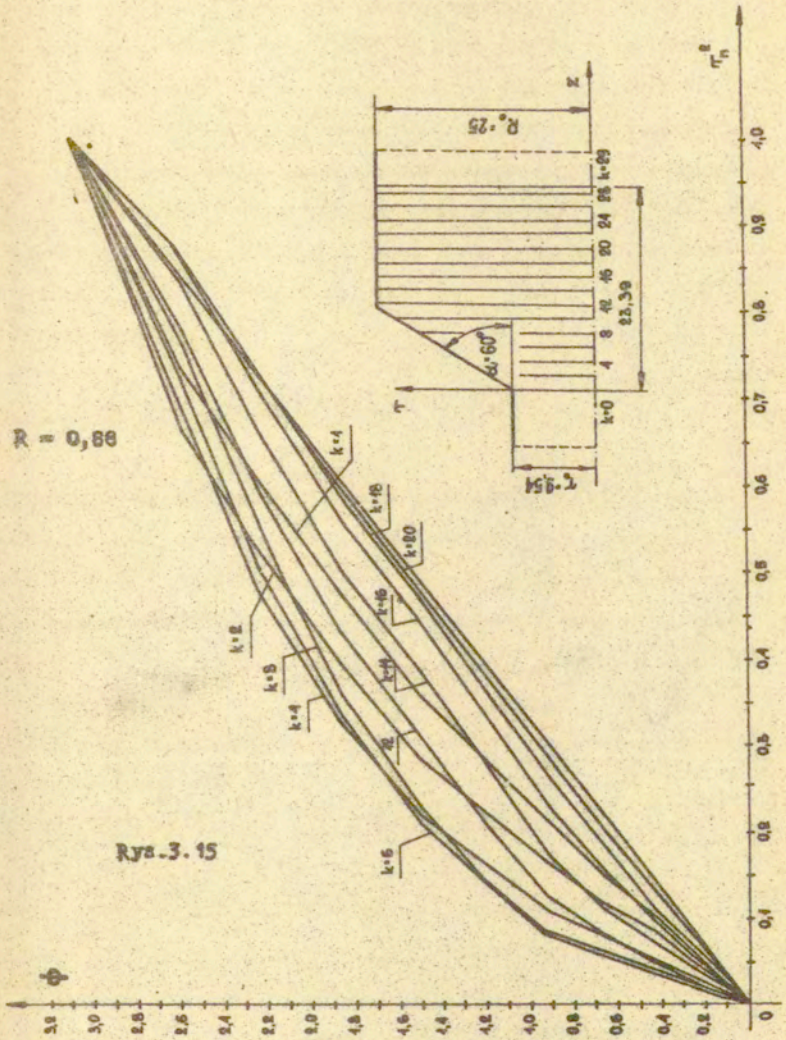
Rys. 3.12



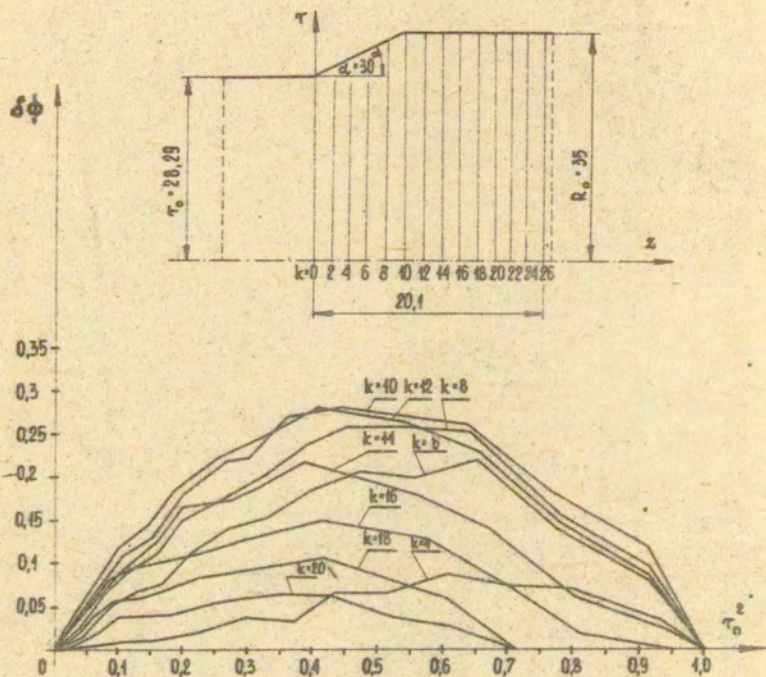
Rys. 3.13



Rys. 3.14

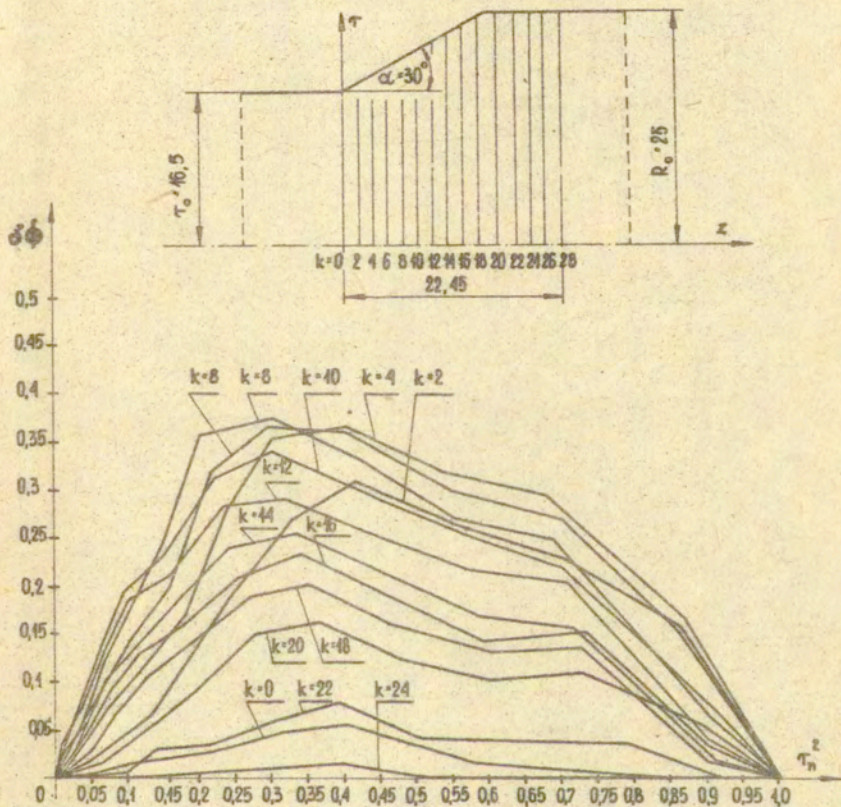


$R = 0,55$



Rys. 5.16

$R = 0,57$



Rys. J. 17

$R = 0,68$

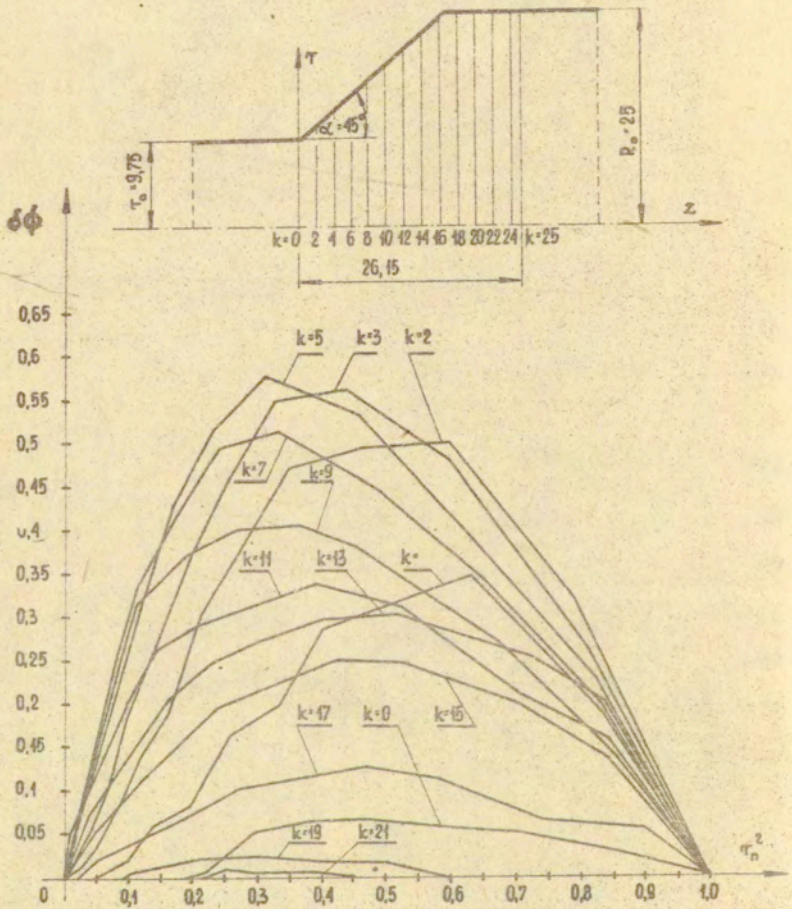
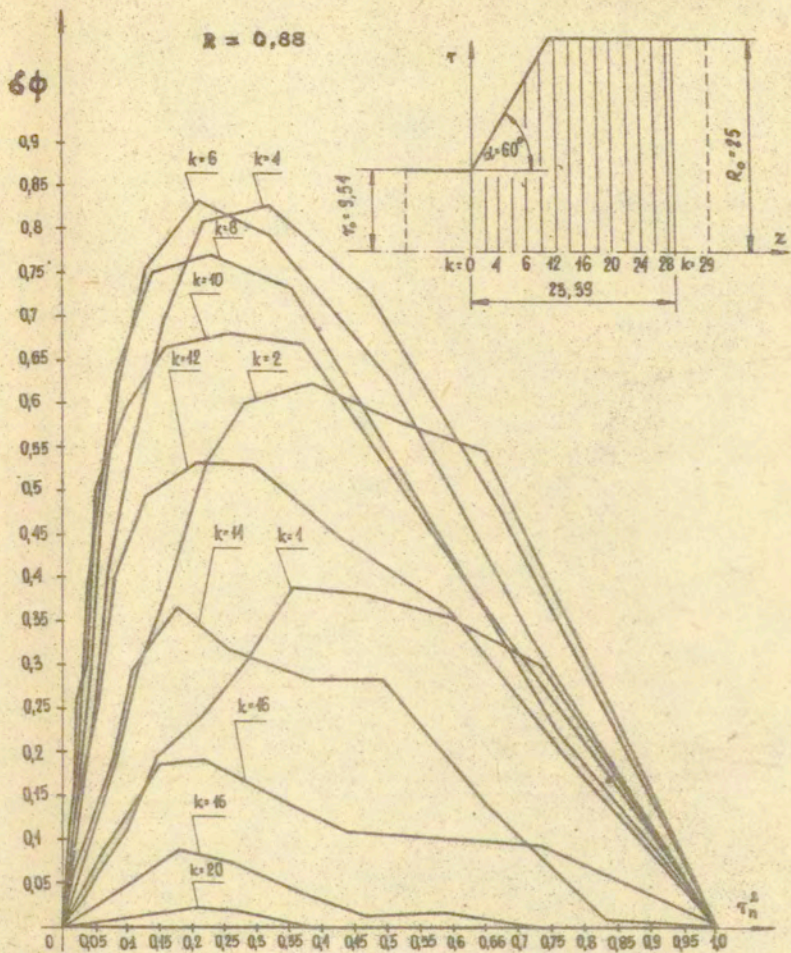


Рис. 3-18



Rys. 3. 19

z których za pomocą twierdzeń ekstremalnych teorii plastyczności można obliczyć dokładniejsze w porównaniu do obecnych oceny górne obciążeń. Propozycję analitycznego opisu przebiegu doświadczalnej funkcji prądu $\phi(\tau, Z)$ w obszarach uplastycznienia rozpatrywanych próbek przedstawiono za pomocą empirycznych wzorów w rozdziale czwartym.

Doświadczalne przebiegi $\delta\phi - \tau_n^2$ w polu płynięcia czterech próbek wskazują, że do ścisłej aproksymacji tej wielkości można wykorzystać szeregi trygonometryczne. Funkcja $\delta\phi(\tau, Z)$ przyjmuje wartości zerowe w tych przekrojach współrzędnej „Z”, które ograniczają obszar niejednorodnego płynięcia. Spełnienie kinematycznych warunków zadania wymaga od funkcji aproksymującej $\delta\phi(\tau, Z)$, aby jej wartości zerowały się na konturze matrycy i osi symetrii tj. w $\tau_n = 1$ i $\tau_n = 0$.

Pole niejednorodnego płynięcia jest ograniczone dwoma równoległymi przekrojami współrzędnej „Z”, osią symetrii i konturem matrycy. Koncepcja funkcji prądu nie uwzględnia więc istnienia obszarów sztywnych. Przy tych założeniach we współrzędnych $\tau_n^2 - Z$ pole niejednorodnego płynięcia jest prostokątem bez względu na kształt konturu matrycy. Doświadczalne przebiegi linii prądu w prostokątnym polu płynięcia $\tau_n^2 - Z$ odwzorowane z pola $\tau - Z$ mogą ułatwić teoretyczną analizę kinematyki procesu wyciskania. Pozwalają one na opis przebiegu linii prądu w formie funkcji wyrażającej jawną zależność pomiędzy współrzędną znormalizowaną „ τ_n^2 ” a współrzędną „Z”. Przebiegi te odpowiadające czterem rozważanym próbkom pokazano na rys. od 3.20. do 3.23. Linie poziome na tych rysunkach tj. $\tau_n^2 = \text{const.}$ oznaczają linie prądu przepływu „jednorodnego”.

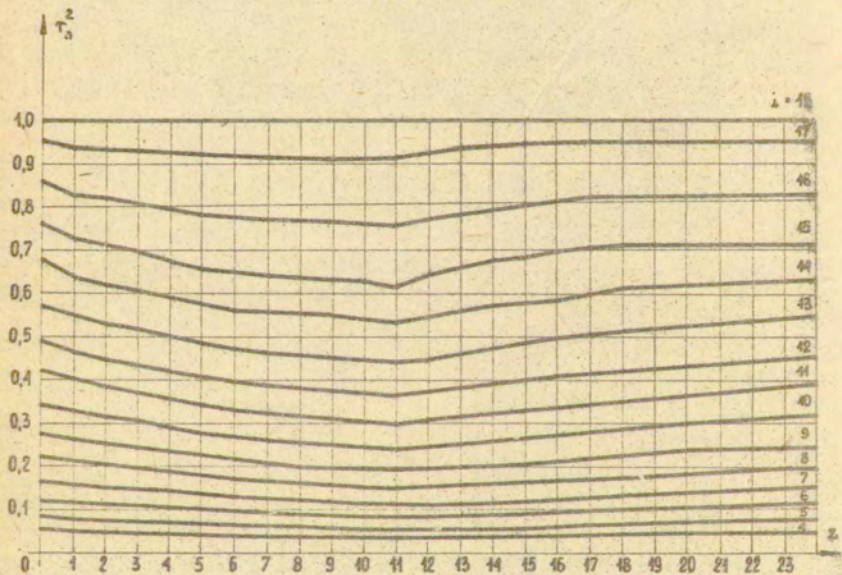
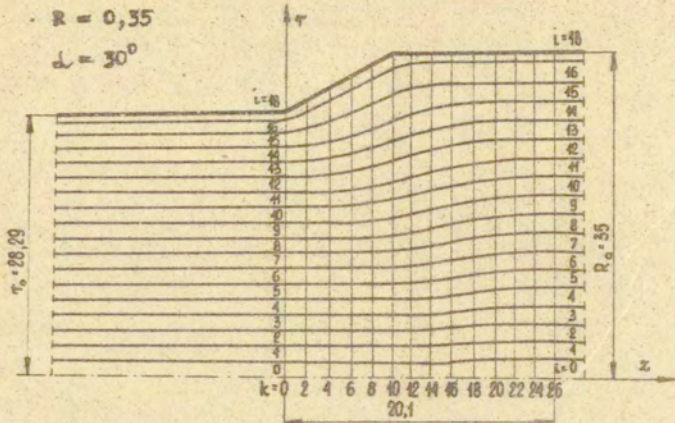
Pogrubione linie odwzorowują przebiegi doświadczalnych linii prądu a ich odchylenie od linii poziomych jest ilościową miarą niejednorodności przepływu plastycznego.

Zakładając, że funkcja $\delta\phi(\tau, z)$ jest ciągła i wielokrotnie różniczkowalna w polu płynięcia oraz przyjmuje wartości zerowe na brzegach obszaru określoności, można ją przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego zależnego od zmiennych „ τ ” i „ z ”. Postać funkcji $\delta\phi(\tau, z)$ powinna zapewniać brak osobliwości na osi symetrii obliczonym z niej prędkościom przemieszczeń i odkształceń. Uwzględniając to przyjmujemy $\delta\phi(\tau, z)$ w formie szeregu:

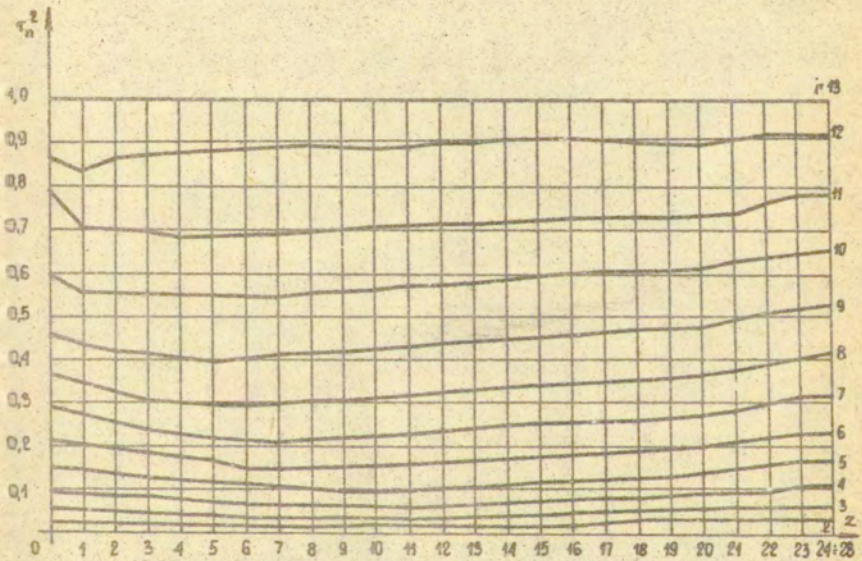
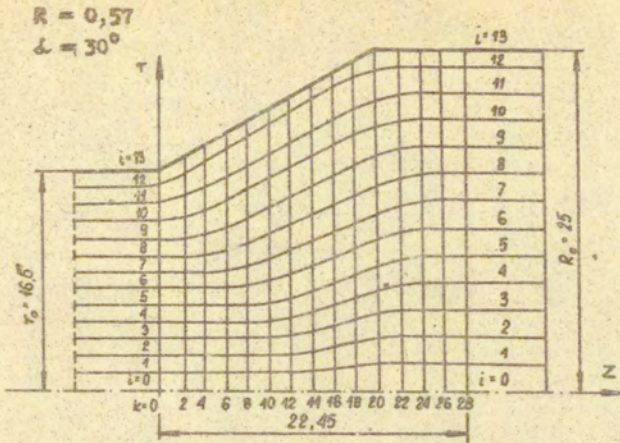
$$(3.8) \quad \delta\phi(\tau, z) = A_1(z)\sin^2\pi\tau_n^2 + A_2(z)\sin^22\pi\tau_n^2 + \dots + A_k(z)\sin^2k\pi\tau_n^2.$$

Widzimy, że współczynniki Fouriera tego szeregu $A_k(z)$ są zależne tylko od współrzędnej „ z ”. Założenie o separowalnej postaci szeregu (3.8) względem zmiennej „ z ” wynika z faktu, że kierunek głównej części przyrostu funkcji $\delta\phi(\tau, z)$ jest wyróżniony kierunkiem ruchu stempla tj. osią „ z ”. Potwierdzają to szczególnie jaskrawo wykresy przebiegów funkcji $\delta\phi(\tau, z)$ w k -tych przekrojach zmiennej „ z ” w zależności od znormalizowanej współrzędnej τ_n^2 (rys. od 3.16 do 3.19).

Wartości współczynników: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$, ..., $A_k(z)$ w k -tych przekrojach współrzędnych „ z ” w zależności (3.8) obliczamy metodą najmniejszych kwadratów znając z doświadczenia wartość $\delta\phi(\tau, z)$ w tych przekrojach. Tak obliczone funkcje: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$, ..., $A_k(z)$ mają nieregularne przebiegi wzdłuż współrzędnej „ z ”. Do dokładnych obliczeń pól prędkości prze-



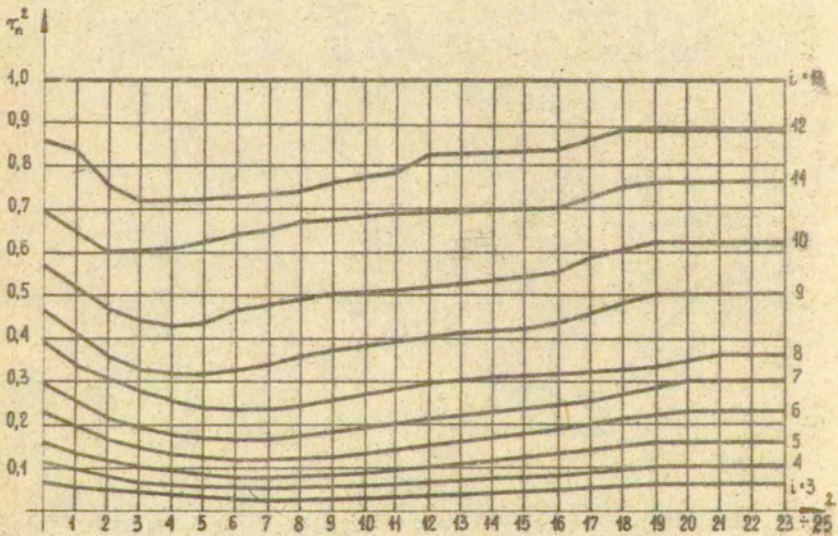
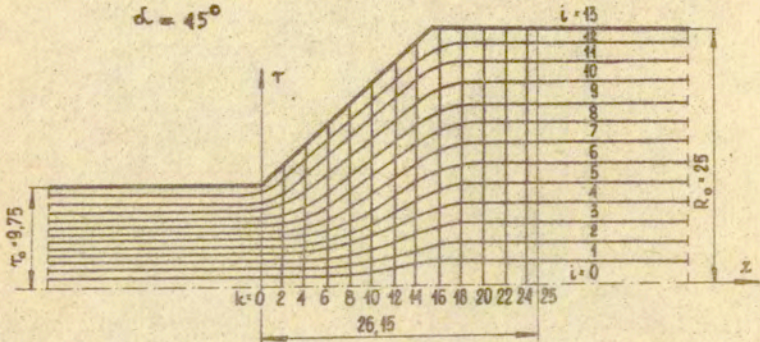
Rys. 3.20



rys. 3.21

$R_1 = 0,68$

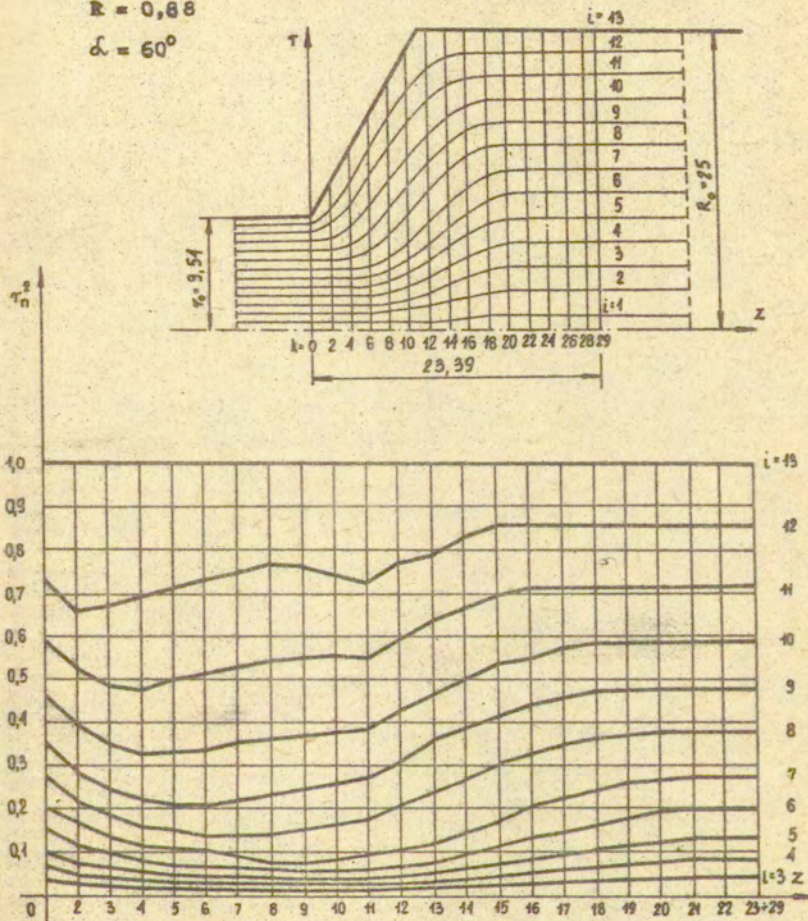
$\alpha = 45^\circ$



Rys. 3.22

$R = 0,68$

$\alpha = 60^\circ$

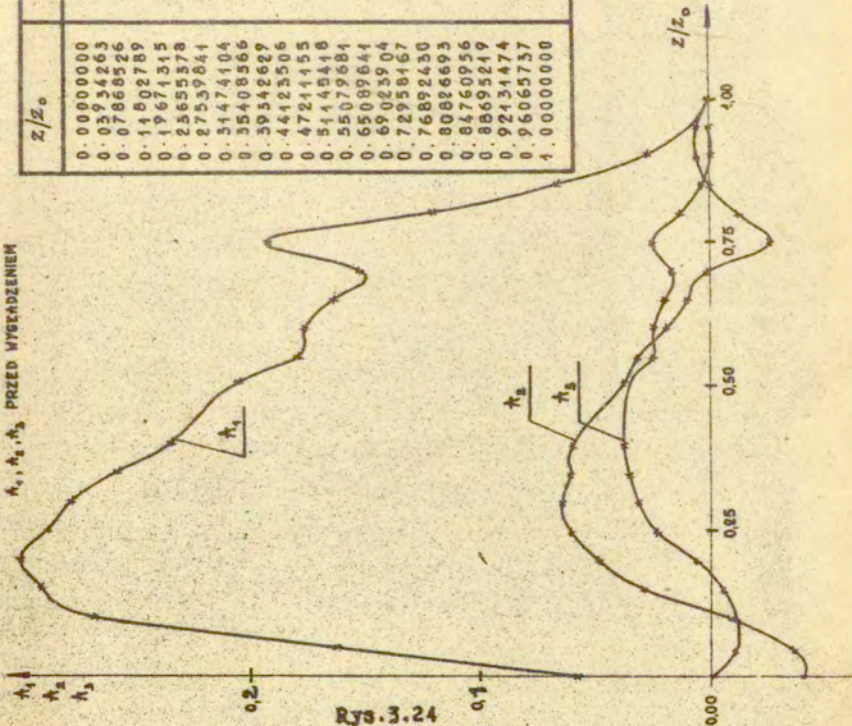


Rys. 3.23

mieszceń i odkształceń w rozważanych przypadkach wyciskania okazało się celowym ograniczyć ilość współczynników Fouriera wyrażenia (3.8) tylko do trzech. Niewyglądzone przebiegi funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ dla trzech próbek przedstawiono na rys. od 3.24. do 3.26. W tabelach na tych rysunkach podano wartości współczynników $A_k(z)$ wzdłuż zmiennej „z”. Z tabel i wykresów widzimy, że wartości współczynników we wszystkich trzech próbkach maleją ze wzrostem k tj. $A_1 > A_2 > A_3$. Szereg (3.8) jest więc szybko zbieżny. Nieregularności przebiegów funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ są związane w dużym stopniu z niedokładnością pomiarów współrzędnych „T” linii prądu w k-tych przekrojach współrzędnej „z”.

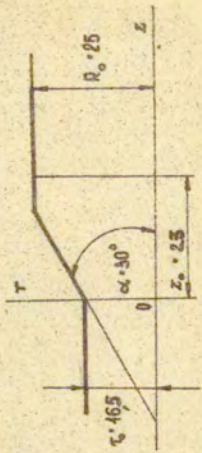
Do dalszych obliczeń procesu należy wybrać właściwy sposób wygładzania i interpolacji przebiegów doświadczalnych, dyskretnie zadanych funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$. Należy przy tym mieć na uwadze, że do obliczeń pól prędkości odkształceń i pól naprężeń potrzebne są pierwsze, drugie i trzecie pochodne funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ względem „z”. Do wygładzania i aproksymacji globalnej danych dyskretnie funkcji doświadczalnych wykorzystywano najczęściej w zagadnieniach płynięcia plastycznego wielocłonowe wielomiany potęgowe lub szeregi Fouriera [8,9,10,12]. Jednak ze względu na rozbieżność procesu różniczkowania obliczenia pochodnych wyższego rzędu są obciążone dużymi błędami. W zadaniach interpolacyjnych zakładamy, że dana funkcja $f(x)$ jest przybliżona jednym wielomianem na całym odcinku $[a, b]$. Przy tym założeniu jedyną możliwością uzyskania lepszego przybliżenia jest zwiększenie stopnia wielomianu interpolacyjnego. Jednak nawet dla bardzo regularnych

WSPÓRCZYNNIKI FOURIERA
 h_1, h_2, h_3 PRZED WYŁĄCZENIEM



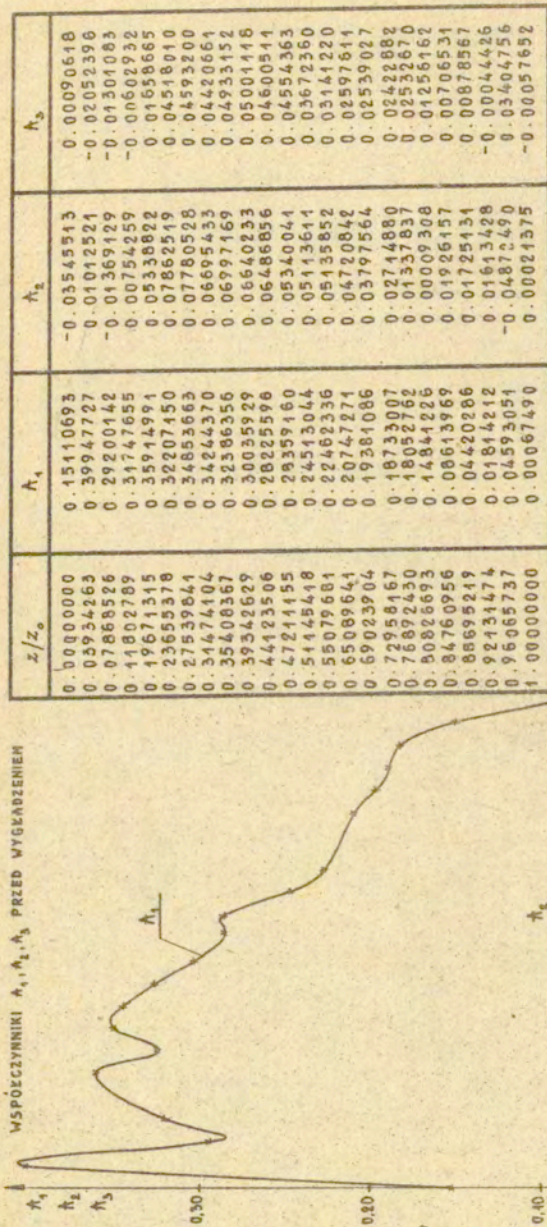
z/z_0	h_1	h_2	h_3
0.0000000	0.45110693	-0.03545513	0.00090618
0.0394263	0.39947727	-0.01019521	-0.02052396
0.0788526	0.29200112	-0.01369129	-0.01501083
0.1182789	0.31747635	0.00754259	-0.00592932
0.1577052	0.35944994	0.05338822	-0.01658665
0.1971315	0.3207110	0.0786219	0.04518010
0.2365578	0.34853681	0.07780528	0.04093200
0.2759841	0.34843360	0.0699433	0.04480661
0.3147404	0.32386356	0.06997169	0.04933152
0.3540366	0.30359597	0.06640233	0.05001118
0.39342627	0.28225596	0.06486856	0.04600511
0.4423506	0.2859160	0.05340041	0.04554365
0.4721155	0.24943048	0.05113611	0.03672360
0.51143418	0.22462336	0.05135952	0.03141220
0.55079681	0.20747271	0.0479042	0.0297611
0.65096641	0.19384086	0.03797664	0.02539027
0.69083904	0.18733007	0.02718880	0.02428882
0.72938167	0.18052752	0.01337837	0.0232670
0.76822430	0.14841226	0.00009308	0.01256162
0.80826693	0.08513969	0.01926157	0.00706531
0.84760956	0.04420286	0.01725131	0.00878567
0.88659249	0.01914212	0.01613428	-0.00044426
0.92131474	0.04593091	-0.04872490	-0.03404756
0.96065737	0.00067490	0.00021375	-0.00037652
1.00000000			

R=0.57

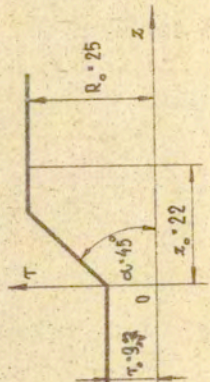


Rys. 3.24
<http://rcin.org.pl>

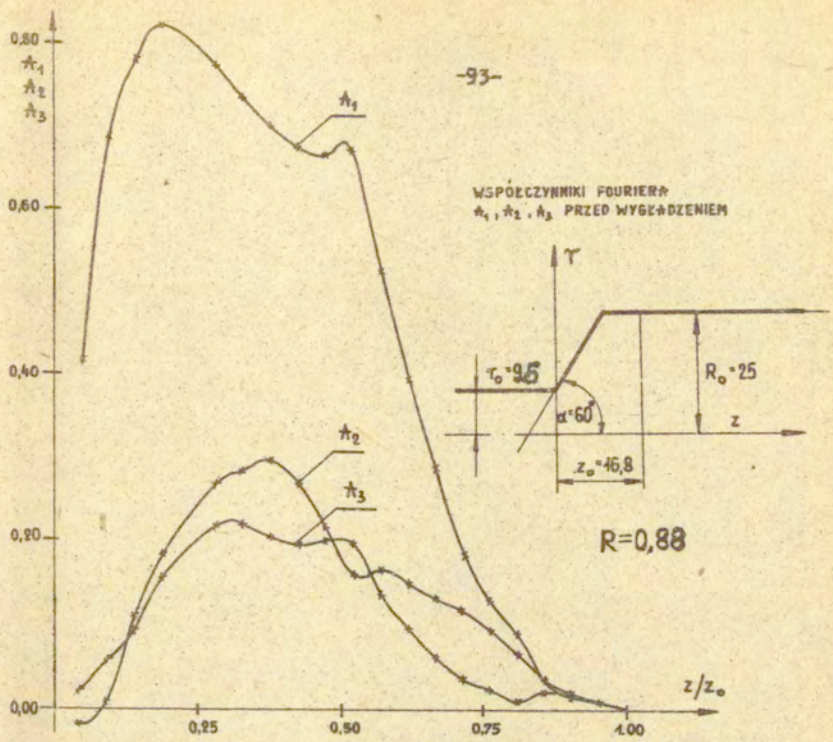
WSPÓŁCZYNNIKI $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ PRZED WYKREŚLENIE



R=088



WSPÓŁCZYNNIKI FOURIERA
 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$ PRZED WYGLĄDZENIEM



z/z_0	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
0.04761905	0.41312806	-0.02109756	0.01956272
0.09523810	0.68276236	0.00648105	0.05711019
0.14285714	0.77747886	0.10943574	0.09058858
0.19047619	0.81865406	0.18176503	0.15529649
0.23809524	0.76846228	0.26610944	0.21671452
0.28571429	0.72945747	0.28250407	0.21849513
0.33333333	0.36095238	0.29555530	0.20327987
0.38095238	0.69840680	0.29555530	0.19453661
0.42857143	0.67046609	0.26565426	0.19959998
0.47619048	0.65947272	0.21596872	0.19518301
0.52380952	0.66684267	0.15728666	0.13553244
0.57142857	0.52018057	0.16544747	0.09499625
0.61904762	0.39274762	0.14926560	0.06129690
0.66666667	0.28603794	0.12967293	0.03584986
0.71428571	0.18069712	0.11790310	0.02393540
0.76190476	0.12595864	0.09146694	0.01433042
0.80952381	0.08971186	0.06520384	0.00630208
0.85714286	0.03396214	0.03471411	0.0005420
0.90476190	0.01474936	0.01953183	
0.95238095	0.00495557	0.00707517	
1.00000000	-0.00000674	-0.00011953	

funkcji ciąg wielomianów interpolacyjnych wcale nie musi być zbieżny do interpolowanej funkcji [104]. W tej sytuacji możliwe jest inne sformułowanie tego zadania.

Przy pewnych założeniach funkcję $f(x)$ można w przybliżeniu opisać jako zbudowaną z wielu wielomianów trzeciego stopnia (sześciennych) w ten sposób, że funkcja $f(x)$ i jej dwie pierwsze pochodne względem x są wszędzie ciągłe. Natomiast trzecia pochodna może mieć nieciągłości w punktach X_i . Taką funkcję nazywamy funkcją sklejaną (w jęz. angielskim - cubic spline function), a punkty X_i ($i=0, 1, \dots, m$) nazywamy węzłami [104, 105]. Funkcja sklejana jest zatem kawałkami złożona z m wielomianów stopnia trzeciego tak, że sama funkcja $f(x)$ i jej obydwie pochodne nie mają w punktach X_i punktów nieciągłości. Interpolacji za pomocą funkcji sklejanych używamy głównie po to, aby połączyć dane punkty - w celach graficznych - krzywą „możliwie gładką” [104, 105]. Do największych zalet spline funkcji sześciennych należy jej zbieżność w całym przedziale $x \in [a, b]$ do funkcji którą interpoluje [105, 106]. Właściwości tej nie posiadają inne wielomiany interpolacyjne bez względu na rodzaj. Warunkiem dobrej zbieżności jest dobranie odpowiednio gęstego podziału $[a, b]$. Najszybciej jest zbieżna sama spline funkcja sześcienna i jej pochodna rzędu pierwszego. Dobra zbieżność pierwszych pochodnych umożliwia rekurencyjne wyznaczanie pochodnych wyższego rzędu. Spline funkcja sześcienna mająca własność zerowania się jej drugich pochodnych $f''(a) = f''(b) = 0$ na końcach przedziału określoności nazywana jest naturalną spline funkcją sześcienną. Pokazuje się też [105, 106, 107, 108], że interpolacyjna naturalna funkcja skleja-

na jest „najgładszą” funkcją interpolującą punkty (x_i, y_i) .
Własność ta utożsamiona z minimalną wartością krzywizny całko-
witej jest wykorzystana w zagadnieniu najlepszej aproksymacji
i wygładzaniu dyskretnego rozkładu danych wejściowych x_i .

Metodykę i algorytm interpolacji, wygładzania oraz różni-
czkowania numerycznego dyskretnych funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$
za pomocą funkcji sklejanych sześciennych zaczerpnięto z pra-
cy. [107]. Pokażemy teraz szkic tego algorytmu.

Określmy więc funkcje sklejane sześciennie takie, że dla
przedziału $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} = b$ zachodzą równości:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

W każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$, $f(x)$ jest wielomianem sto-
pnia trzeciego. Zatem na dowolnym odcinku podziału spline
funkcję sześcienną można przedstawić równaniem:

$$(3.9) \quad f(x) = y_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

gdzie y_i - wartość $f(x)$ w i -tym węźle,

b_i, c_i, d_i - współczynniki wielomianu.

Taka reprezentacja funkcji sklejaney sześcienney jest źle uwa-
runkowana dla celów numerycznych. Dogodniej jest przedstawić
funkcję $f(x)$ następującym równaniem:

$$(3.10) \quad f(x) = w y_{i+1} + \bar{w} y_i + h_i^2 [(w^3 - w) \delta_{i+1} + (\bar{w}^3 - \bar{w}) \delta_i],$$

gdzie $f(x)$ określono na:

$$h_i = x_{i+1} - x_i ,$$

$$w = \frac{x - x_i}{h_i} ,$$

$$\bar{w} = 1 - w ,$$

δ_{i+1} , δ_i - pewne stałe, które należy określić.

Równanie (3.10) spełnia warunek:

$$(3.11) \quad f(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad \text{oraz} \quad f(x_i) = y_i .$$

Różniczkując trzykrotnie równanie (3.10) przy uwzględnieniu, że $w' = 1/h_i$ i $\bar{w}' = -1/h_i$ otrzymujemy:

$$f'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + h_i [(3w^2 - 1)\delta_{i+1} - (3\bar{w}^2 - 1)\delta_i] ,$$

$$(3.12) \quad f''(x) = 6w\delta_{i+1} + 6\bar{w}\delta_i ,$$

$$f'''(x) = \frac{6(\delta_{i+1} - \delta_i)}{h_i} .$$

Wartości $f'(x)$ w skrajnych punktach podprzedziału otrzymujemy ze związków:

$$f'_+(x_i) = \Delta_i - h_i(\delta_{i+1} + 2\delta_i) ,$$

$$f'_-(x_{i+1}) = \Delta_i + h_i(2\delta_{i+1} + \delta_i) ,$$

gdzie

$$\Delta_i = (y_{i+1} - y_i) / h_i .$$

Celem zapewnienia nieciągłości funkcji sklejanej wewnątrz przedziału $[a, b]$ nakładamy warunek :

$$(3.13) \quad f'_-(x_i) = f'_+(x_i) , \quad i = 2, \dots, n-1 .$$

Ciągłość $f''(x)$ wynika bezpośrednio z postaci (3.10) dla $f(x)$.

Po uwzględnieniu powyższych związków otrzymujemy liniowy układ równań względem δ_i :

$$(3.14) \quad h_{i-1}\delta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\delta_i + h_i\delta_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1} , \\ i = 2, \dots, n-1 .$$

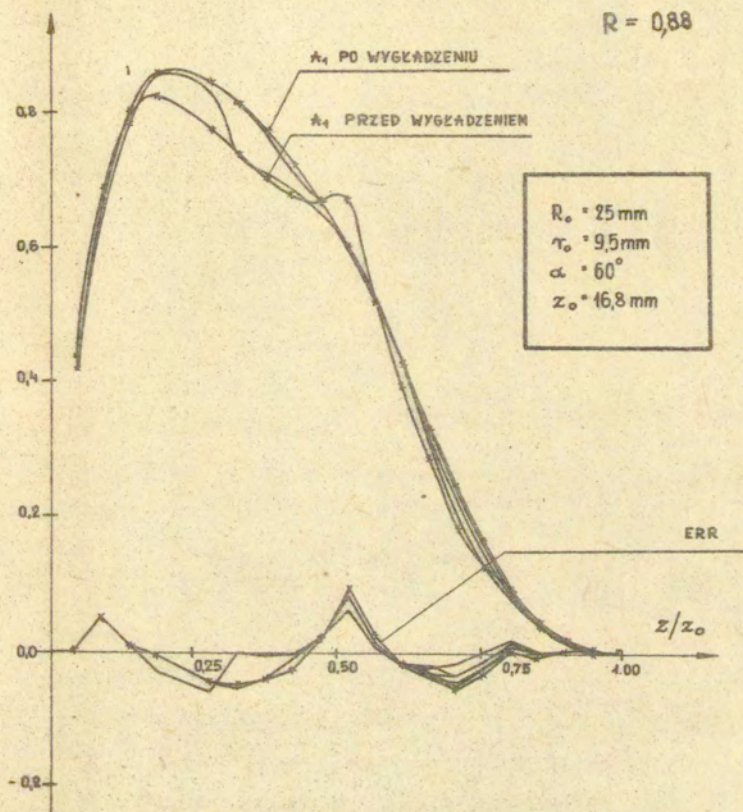
Równania (3.14) określają funkcję sklejoną. Układ ten ma $i = n$ niewiadomych δ_i , więc do jednoznacznego określenia funkcji sklejanej potrzeba dwóch dodatkowych warunków. Wybieramy je z czterech możliwych warunków granicznych, tj.:

- a) $f(x)$ - zadana w $x = a$ i $x = b$,
- b) $f'(x)$ - zadana w $x = a$ i $x = b$,
- c) $f''(x) = 0$ w $x = a$ i $x = b$,
- d) $f'''(x)$ - zadana w $x = a$ i $x = b$.

Warunek zerowania się drugich pochodnych na krańcach przedziału jest wykorzystywany przy wygładzaniu dyskretnego rozkładu danych wejściowych. W przypadku obliczeń pochodnych numerycznych większą dokładność zapewnia warunek zadania wartości trzecich pochodnych w punktach skrajnych podziału [107].

Wygładzanie dyskretnych przebiegów: $R_1(z)$, $R_2(z)$, $R_3(z)$ przy użyciu opisanego algorytmu polegało na iteracyjnym poszukiwaniu najlepszej aproksymacji w sensie minimum normy. Było to

realizowane przez wielokrotną aproksymację lokalną spline funkcją naturalną. W kroku elementarnym na pięciu punktach dyskretnego przebiegu funkcji $A_k(z)$ z pominięciem dwóch punktów wewnętrznych rozwijana jest spline funkcja sześcienna. Wartości w pominiętych punktach wyliczone są w wyniku aproksymacji. Kroki powtarzane są aż do wyczerpania węzłów aproksymacji. Na końcu przedziału w razie potrzeby następuje przesunięcie numeracji w przeciwnym kierunku o dopeżnienie do pięciu węzłów aproksymacji. Kolejna iteracja polega na ponownym wykonaniu kroków elementarnych startując z punktu o numeracji o jeden wyżej w zbiorze danych. Przy wygładzaniu przebiegów dyskretnych funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$, odpowiadających każdej z rozpatrywanych trzech próbek, proces iteracji ustalał się po sześciu cyklach. Przykładowy przebieg procesu iteracyjnego wygładzania współczynnika $A_1(z)$ dla próbki z półkątem rozwarcia matrycy $\delta = 60^\circ$ i stopniem redukcji $R = 0,88$ pokazano na rys. 3.27. Rys. od 3.28. do 3.30. ilustrują wygładzone przebiegi: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ dla każdej z trzech rozpatrywanych próbek. Wygładzone przebiegi tych funkcji dają bezpośrednie wskazówki do ścisłego analitycznego opisu kinematycznie dopuszczalnych funkcji prądu w procesie wyciskania. Jakościowa wartość ze znajomości przebiegów współczynnika Fouriera $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ polega na tym, że widoczny jest tu jawny związek pomiędzy parametrami procesu a jednorodnością przepływu plastycznego. Na przykład maksymalne wartości funkcji $A_1(z)$ są w przybliżeniu proporcjonalne do stopnia redukcji R . Pozostałe dwa współczynniki tj. $A_2(z)$ i $A_3(z)$ maleją w stosunku do $A_1(z)$ z szybkością w przybliżeniu proporcjonalną do kwadratu numeru indeksu. Wygładzone



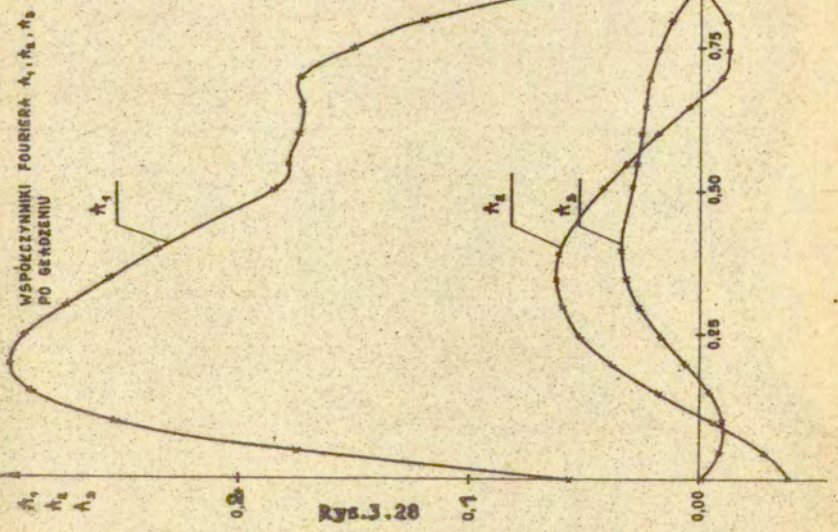
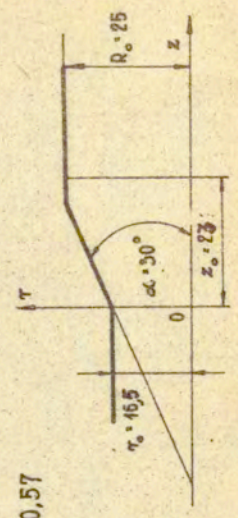
Rys.3.27

przebiegi funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ posłużyły do wyznaczenia ich pochodnych numerycznych pierwszego rzędu z zależności (3.12).

Efektywne rekurencyjne różniczkowanie numeryczne techniką spline prowadzi do wyznaczenia pochodnych rzędu N o ile funkcja różniczkowana jest klasy C^N . W danym przypadku naj-
szybciej zbieżna jest pochodna rzędu pierwszego [107, 108].
Stąd uzasadnionym jest rekurencyjne obliczanie następnych dwóch pochodnych biorąc za punkt wyjścia wygładzone wartości pierwszych pochodnych współczynników: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ względem zmiennej z . Dane do rozwinięcia pochodnych w spline funkcję muszą ulec wygładzeniu przed rozpoczęciem rekurencji w celu wygaszenia lokalnych błędów o charakterze oscylacyjnym powstałych w wyniku błędu metody i niedokładności procesu wygładzania wstępnego. Warunki brzegowe zadawano wartościami trzech pochodnych w punktach skrajnych podziału. Wartości tych pochodnych szacowano metodą różnic skończonych [107].
Przykładowe wyniki obliczeń pochodnych numerycznych omawianych funkcji względem zmiennej z dla próbki ze stopniem redukcji $R = 0,57$ i półkątem stożka matrycy $\beta = 30^\circ$ zestawiono na rysunkach od 3.31 do 3.33 Na rys. 3.31 porównano przebiegi da_1/dz przed i po gładzeniu. Pokazano przy tym przebieg procesu wygładzania w kolejnych sześciu iteracjach, po których błąd bezwzględny ERR osiągnął ustabilizowaną najmniejszą wartość. Rys. 3.32 i 3.33 ilustrują przebiegi d^2A_1/dz^2 i d^3A_1/dz^3 wzdłuż z . Wartości tych pochodnych w równo oddalonych od siebie 24 przekrojach zmiennej z przedstawiono w tabelkach pod wykresami. Wykresy pochodnych odznaczają się du-

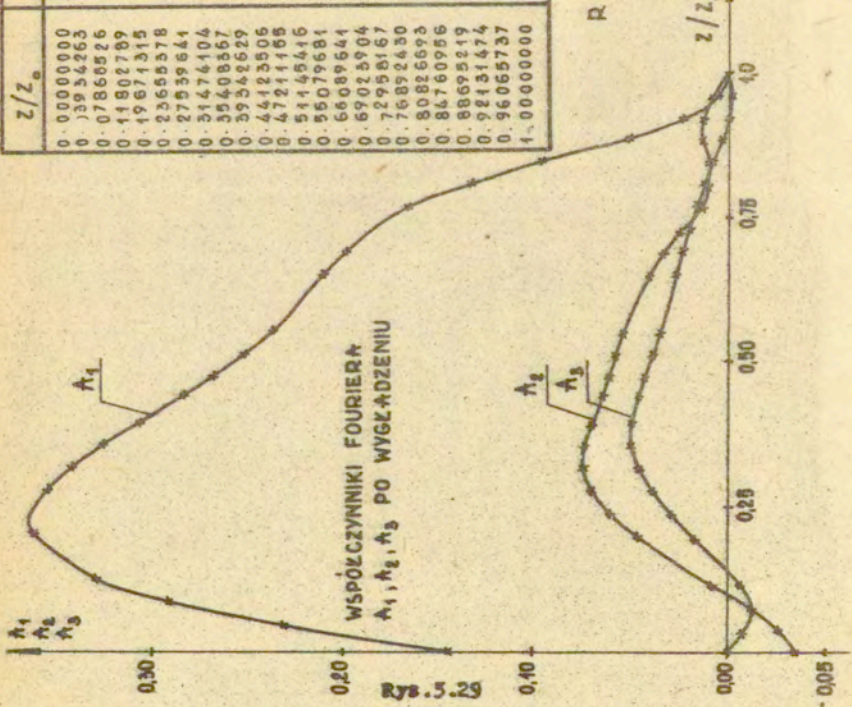
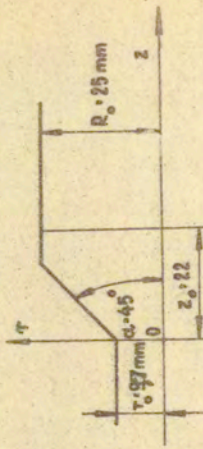
WSPÓŁCZYNNIKI FOURIERA h_1, h_2, h_3
PO BOKOWIENI

z/z_0	h_1	h_2	h_3
0.0000000	0.15110693	-0.03545543	0.00970618
0.03934863	0.23167706	-0.02866879	-0.09441719
0.07869726	0.29445523	-0.01865979	-0.01266428
0.11804589	0.32960787	0.00915784	0.06664633
0.15739452	0.3622476	0.04754634	0.01662502
0.19674315	0.36224747	0.06498846	0.0226550
0.23609178	0.3547232	0.0710770	0.0376792
0.27544041	0.34263357	0.07564625	0.04674692
0.31478904	0.32618292	0.07564806	0.05031491
0.35413767	0.30519658	0.07078542	0.05037450
0.3934863	0.2822544	0.06497817	0.04643903
0.43283493	0.26658934	0.06173677	0.04535039
0.47218355	0.25166578	0.05848381	0.03740693
0.51153218	0.23614226	0.0557765	0.03481586
0.55088081	0.21083531	0.04139528	0.02732841
0.59022944	0.19773251	0.03364761	0.02419593
0.62957807	0.18284551	0.02460692	0.02095646
0.6689267	0.16617853	0.0147325	0.01760992
0.7082753	0.13204820	0.01082993	0.01284377
0.74762393	0.09574926	0.00975249	0.00825432
0.78697253	0.05000810	0.0146338	0.00302096
0.82632113	0.02218698	0.01440179	0.0013193
0.86566973	0.00402442	0.00954988	-0.0025016
0.90501833	0.00067480	0.00021375	-0.00057652

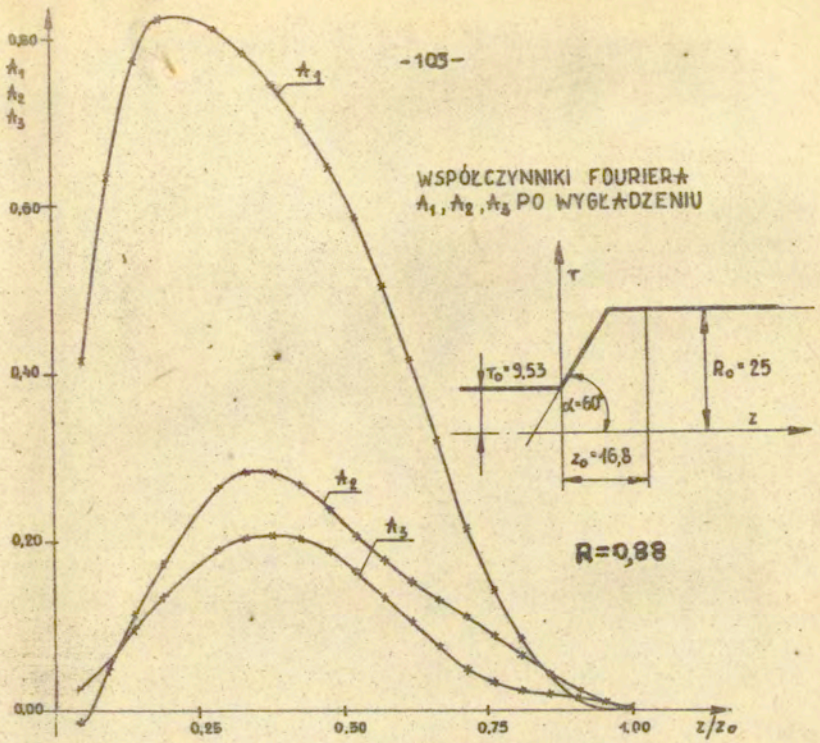


Rys. J. 28

z/z_0	λ_1	λ_ξ	λ_3
0.00000000	0.15110693	-0.03545513	0.00090616
0.03934263	0.25116706	-0.02686879	-0.0094719
0.07868526	0.29145523	-0.01265979	-0.01664248
0.11802789	0.32950787	0.00849784	-0.00664633
0.15737052	0.36226776	0.04754634	0.01662502
0.19671315	0.38221947	0.06198846	0.02926540
0.23605578	0.3872832	0.07107770	0.03967952
0.27539841	0.34269557	0.07564625	0.04874692
0.31474104	0.32618292	0.07554806	0.05031491
0.35408367	0.30519638	0.07078312	0.05037460
0.39342630	0.28225514	0.06497817	0.04643903
0.43276893	0.26834931	0.06173677	0.04335039
0.47211156	0.25166378	0.05818381	0.03940693
0.51145419	0.23614286	0.05527665	0.03481586
0.55079682	0.21085651	0.04139528	0.02732841
0.59013945	0.19773351	0.03364761	0.02449593
0.62948208	0.18284551	0.02460692	0.02095644
0.66882471	0.16617853	0.01427323	0.01760992
0.70816734	0.15201820	0.01082993	0.01284377
0.74751000	0.132074926	0.00975249	0.00845432
0.78685263	0.05000810	0.01416338	0.00302095
0.82619526	0.03212698	0.01410179	0.00043193
0.86553789	0.00402442	0.00954988	-0.00125016
0.90488052	0.00067490	0.00021375	-0.00057652



WSPÓŁCZYNNIKI FOURIERA
 A_1, A_2, A_3 PO WYGLĄDZENIU



z/Z_0	A_1	A_2	A_3
0.04761905	0.41312806	0.02109756	0.01956272
0.09523810	0.63235964	0.04677751	0.05376984
0.14285714	0.76997220	0.11033167	0.09426871
0.19047619	0.82186715	0.17369992	0.13365516
0.23809524	0.81088537	0.26263251	0.18790965
0.28571429	0.77823521	0.28044143	0.20167137
0.33333333	0.73956614	0.27919325	0.20612092
0.38095238	0.69409641	0.26573995	0.20113617
0.42857143	0.64182603	0.24008154	0.18671712
0.47619048	0.58275499	0.20224801	0.16286577
0.52380952	0.50250740	0.17484330	0.13271318
0.57142857	0.41430362	0.15005120	0.10294883
0.61904762	0.31814362	0.12784173	0.07363072
0.66666667	0.21402742	0.10821488	0.04469885
0.71428571	0.13883583	0.08535474	0.03024729
0.76190476	0.08034496	0.06314656	0.02015198
0.80952381	0.04022920	0.03920944	0.01733633
0.85714286	0.01346535	0.02068605	0.01303008
0.90476190	0.00003356	0.00757639	0.00723324
0.95238095	-0.00000671	-0.00014953	-0.00005420
1.00000000			

Rys. 3.30
<http://rcin.org.pl>

wą gładkością i regularnością. Dokładność obliczeń jest przy tym wysoka.

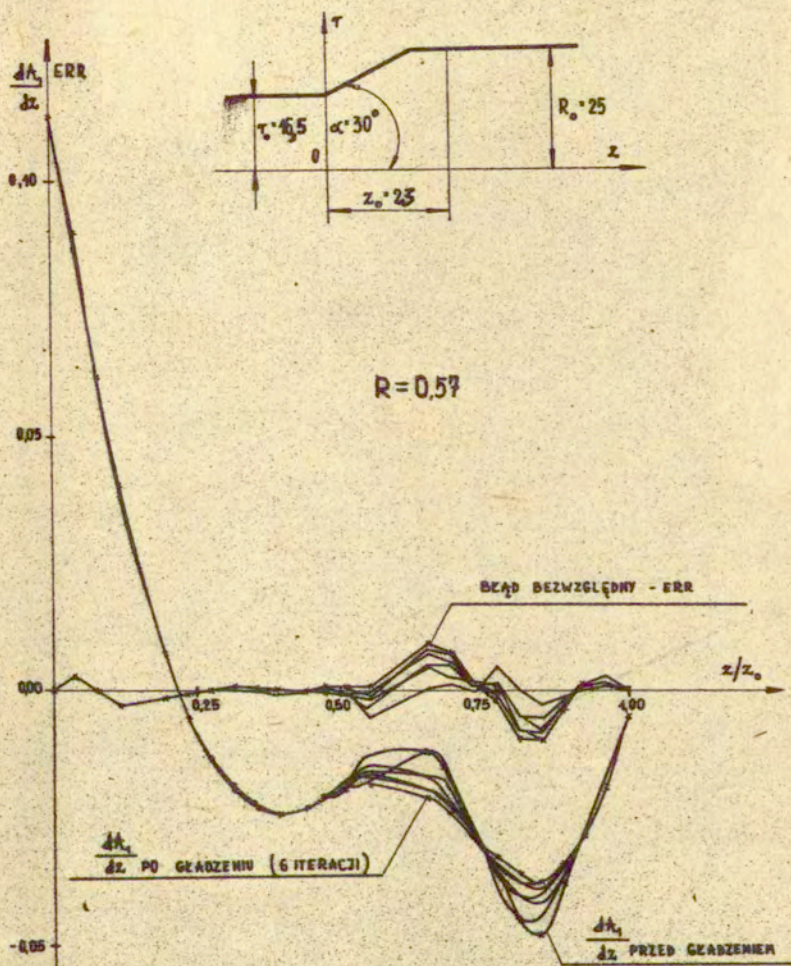
W przeciwieństwie do tego różniczkowanie numeryczne metodą różnic skończonych lub na podstawie interpolacji [105, 106] jest obarczone dużym błędem. Dotyczy to w szczególności sytuacji, gdy węzły są narzucone z góry a dyskretne wartości funkcji są w nich pomierzone z określoną dokładnością. Dotychczas nie stosowano techniki spline funkcji do obróbki wyników doświadczalnych w procesach wyciskania. Prezentowana tu próba w tym zakresie wskazuje na efektywność zastosowanej procedury numerycznej.

Do wyznaczenia pól kinematycznych ze związków (2.3.1) i (2.3.2) potrzebna jest znajomość pierwszych, drugich i mieszanych pochodnych funkcji prądu $\Phi(\tau, z)$ względem zmiennych τ i z . Pochodne te mamy w postaci związków analitycznych, których wartości obliczamy po wstawieniu do nich numerycznych wartości: $A_1(z), A_2(z), A_3(z), dA_1/dz, d^2A_1/dz^2$ i.t.d. Wyrażenia na pochodne w postaci zamkniętej otrzymujemy ze zróźniczkowania funkcji przynięcia $\Phi(\tau, z)$, która jak pokazano wcześniej jest zbieżnym szeregiem tj.:

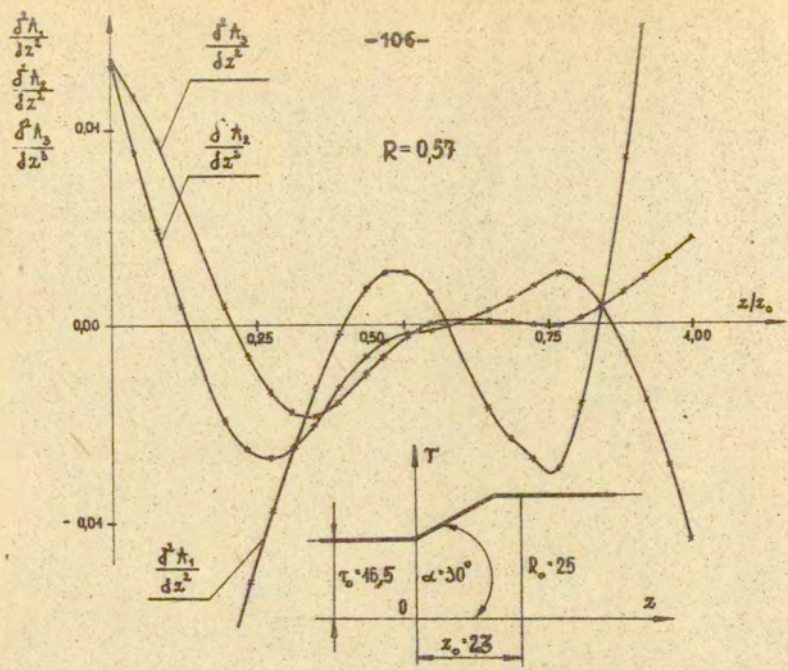
$$(3.15) \quad \Phi(\tau, z) = \pi\tau_0^2 + A_1(z)\sin\pi\tau_0^2 + A_2(z)\sin 2\pi\tau_0^2 + A_3(z)\sin 3\pi\tau_0^2 + \dots$$

Funkcja $T_0(\tau, z)$ musi być w każdym punkcie zmiennej τ, z ciągła i co najmniej trzykrotnie różniczkowalna.

Składowe prędkości przemieszczeń V_τ i V_z obliczono po uprzednim podstawieniu do wzorów (2.3.1) numerycznie obliczonych pochodnych: $dA_1/dz, dA_2/dz, dA_3/dz$ oraz numerycznie wy-

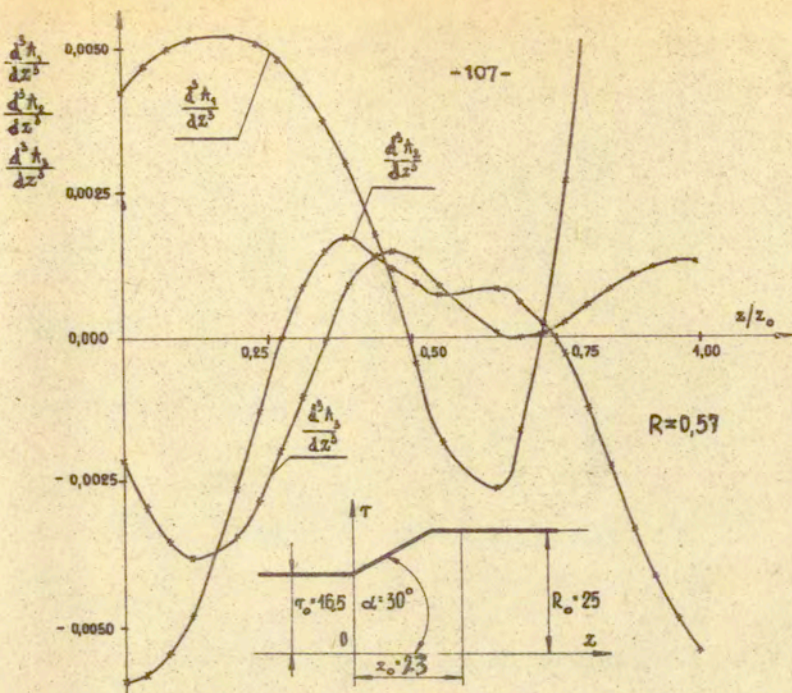


Rys.3.31



DRUGIE POCHODNE WSP. h_1, h_2, h_3 PO z , PO GRADZENIU

z/z_0	$\frac{d^2 h_1}{dz^2}$	$\frac{d^2 h_2}{dz^2}$	$\frac{d^2 h_3}{dz^2}$
0.0000000	-0.03571171	0.01328283	0.01363537
0.03934265	-0.03241555	0.00895582	0.01181223
0.07868526	-0.02884946	0.00480058	0.00950273
0.11802789	-0.02503922	0.00091455	0.00673191
0.19671315	-0.01716233	-0.00486675	0.00095246
0.23655378	-0.01324989	-0.00640438	-0.00160169
0.27539841	-0.00964681	-0.00682430	-0.00349784
0.31474104	-0.00630591	-0.00645117	-0.00455816
0.35408367	-0.00327534	-0.00527454	-0.00475287
0.39342629	-0.00055509	-0.00329438	-0.00408197
0.44123506	0.00185721	-0.00168686	-0.00260273
0.47211155	0.00259929	-0.00097650	-0.00175009
0.51145418	0.00261714	-0.00044415	-0.00078043
0.55079681	0.00159543	-0.00032954	0.00005838
0.65089641	-0.00443145	0.00069658	0.00013963
0.69023904	-0.00596899	0.00125102	0.00007432
0.72958167	-0.00703749	0.00189076	-0.0004586
0.76892430	-0.00763694	0.00261578	-0.00022092
0.80826693	-0.00421365	0.00216764	0.00015309
0.84760956	0.00094303	0.00083366	0.00072911
0.88695219	0.00840252	-0.00155696	0.00157718
0.92431474	0.01526923	-0.00404975	0.00235198
0.96065737	0.02353352	-0.00736726	0.00327807
1.00000000	0.03222740	-0.01117954	0.00424582

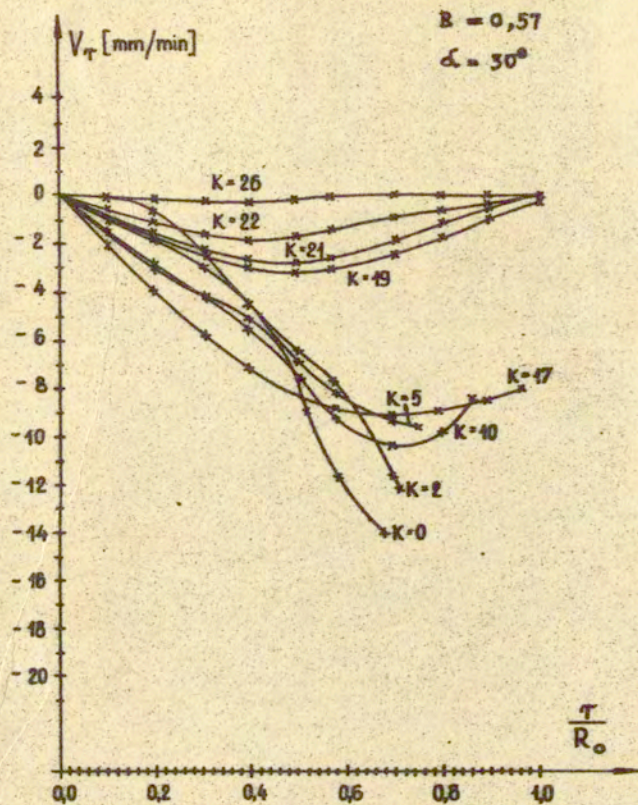


TRZECIE POCHODNE WSP. h_1, h_2, h_3 PO z , PO GRADZENIU

z/z_0	$\frac{d^3 h_1}{dz^3}$	$\frac{d^3 h_2}{dz^3}$	$\frac{d^3 h_3}{dz^3}$
0.00000000	0.00398306	-0.0055329	-0.00199950
0.03934263	0.00437336	-0.00547342	-0.00273707
0.07868526	0.00467851	-0.00513350	-0.00327120
0.11802789	0.00486511	-0.00449809	-0.00357094
0.19671315	0.00488894	-0.00244367	-0.00326473
0.23655378	0.00474509	-0.00118590	-0.00264830
0.27539841	0.00449945	-0.00001972	-0.00182033
0.31474104	0.00409322	0.00084676	-0.00095711
0.35408367	0.00352855	0.00139660	-0.00006910
0.39342629	0.00280543	0.00162978	0.00084369
0.44123506	0.00164519	0.00130737	0.00130782
0.47211155	0.00079278	0.00111414	0.00138997
0.51145418	-0.00041058	0.00088498	0.00124721
0.55079681	-0.00174529	0.00067493	0.00082718
0.65089641	-0.00248053	0.00078753	0.00007442
0.69023904	-0.00152109	0.00057820	0.00000029
0.72958167	0.00014281	0.00022579	0.00005126
0.76892430	0.00251118	-0.00026972	0.00022735
0.80826693	0.00504469	-0.00117028	0.00052840
0.84760956	0.00720217	-0.00209073	0.00078633
0.88695219	0.00906935	-0.00311141	0.00101585
0.92131474	0.01023192	-0.00386862	0.00115348
0.96065737	0.01102687	-0.00458183	0.00123910
1.00000000	0.01124947	-0.00513091	0.00124790

szkądzonych wartości funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$. Składowe tenso-
ra prędkości odkształceń: $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_z$, $\dot{\epsilon}_{rz}$ otrzymano po pod-
stawieniu do wzorów (2.3.2) numerycznych wartości pochodnych:
 dA_1/dz , dA_2/dz , dA_3/dz , d^2A_1/dz^2 , d^2A_2/dz^2 , d^2A_3/dz^2 oraz wartości
funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$. Wyniki obliczeń przedstawiono dla
próbki, którą wyciskano przez matrycę o półkątzie rozwarcia
stożka matrycy $\alpha = 30^\circ$ ze stopniem redukcji $R = 0,57$ (50mm/33mm).

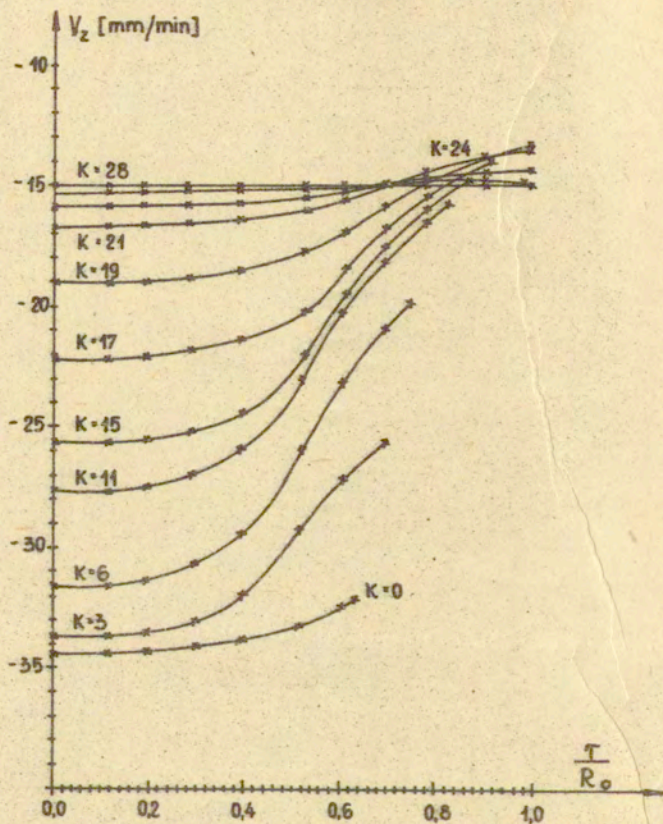
Przebiegi składowych prędkości V_r i V_z w zależności od
promienia r w k przekrojach zmiennej z pokazano na rys. 3.34
i 3.35. Na osiach pionowych zaznaczono bezwzględne wartości
 V_r i V_z , natomiast na osiach poziomych odkładano bieżące wa-
rtości promienia r odniesionego do połowy średnicy wyjściowej
próbki $R_0 = 25\text{mm}$. Położenie przekroju k współrzędnej z należy
odczytywać na rys. 3.3. Przebiegi składowych prędkości $V_r(r, z)$
i $V_z(r, z)$ odznaczają się znaczną nierównomiernością w warstwach
przylegających do konturu matrycy. Na przykład składowe prę-
dkości V_z w otoczeniu naroży matrycy intensywnie maleją i są
znacznie mniejsze od prędkości stempla V_0 . Stosunkowo dużą
jednorodność składowej osiowej prędkości V_z wzdłuż promienia
obserwujemy w obszarze przyległym do osi symetrii. W rejonie
otworu matrycy tj. od $k = 0$ do $k = 6$ stwierdzono znaczną nie-
równomierność obydwu składowych prędkości. Fakt ten stoi
w sprzeczności z założeniami teoretycznymi wielu uproszczonych
schematów płynięcia plastycznego branych najczęściej w prakty-
ce do obliczeń oceny górnej siły wyciskania. Przykładowo we-
dług rozpowszechnionego schematu biegunowego płynięcia [64]
w polu ograniczonym przekrojami od $k = 0$ do $k = 6$ prędkość wy-
pływu metalu z otworu matrycy jest stała.



Rys. 3.34

$R = 0,57$

$\alpha = 30^\circ$

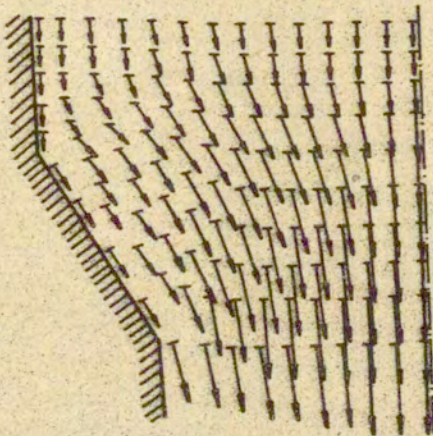
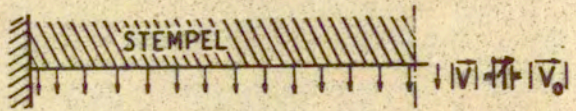


Rys. 3.35

Geometrycznym obrazem nierównomiernego rozkładu prędkości przemieszczeń w obszarze uplastycznienia omawianej próbki jest rys. 3.36. Pokazano tu położenie wektorów prędkości $\vec{V}(\tau, z)$ w płaszczyźnie fizycznej pola płynięcia plastycznego. Widać tu wyraźnie, że warstwy zewnętrzne próbki hamowane siłami powierzchniowymi tarcia przemieszczają się znacznie wolniej w kierunku otworu matrycy w porównaniu z warstwami wewnętrznymi.

Nierównomierność płynięcia metalu jest spowodowana także niejednorodnym, zmieniającym się w trakcie odkształceń plastycznych, rozkładem granicy plastyczności w obszarze uplastycznienia. Procesowi zaawansowanych odkształceń plastycznych towarzyszą znaczące zmiany temperatury wewnątrz obszaru płynięcia, co również wpływa na nierównomierność rozkładu prędkości.

Nierównomiernemu rozkładowi prędkości odpowiada nierównomierny rozkład prędkości odkształceń i intensywności odkształceń. W odniesieniu do próbki z redukcją $R=0,57$ i półkątem stożka matrycy $\alpha=30^\circ$ ilustrują to rys. 3.37 i 3.38. Przykładowo na rys. 3.37 przedstawiono przebieg składowej osiowej tensora prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_z/|\dot{V}_0|$ wzdłuż bezwymiarowego promienia τ/R_0 w k przekrojach zmiennej z^* . Składowa $\dot{\epsilon}_z$ ma decydujący wpływ na wielkość strefy osiowych naprężeń rozciągających, stąd funkcja ta szczególnie określa charakter zjawisk w procesie wyciskania. Na osi pionowej rys. 3.37 odłożono stosunek wartości osiowej składowej prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_z$ do modułu prędkości na stemple $|\dot{V}_0|$. Na osi poziomej zaznaczono bezwymiarowy stosunek τ/R_0 . Poło-



$$R = 0.57$$

$$\alpha = 50^\circ$$

Rys. 3.36

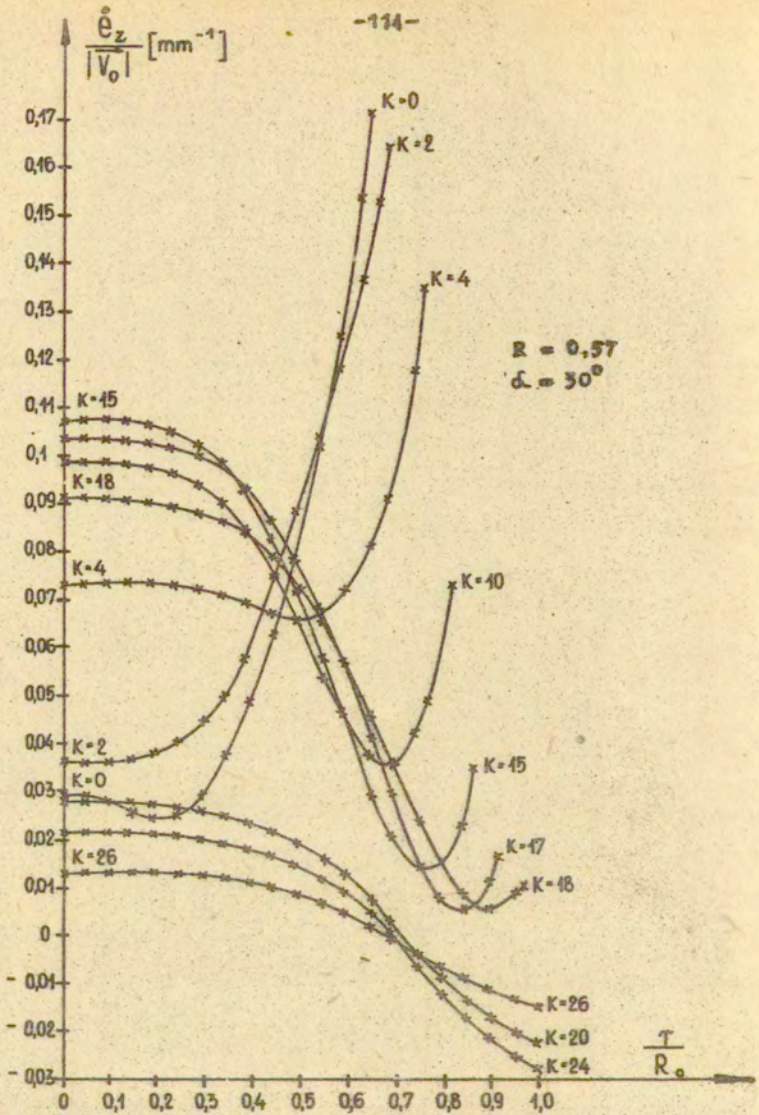
żenie przekrojów k odczytujemy z rys. 3.3. Z przebiegów wykresów $\dot{e}_2/|\dot{v}_2|$ w funkcji „ t ” i „ z ” widać, że w znacznym obszarze pola płynięcia w kierunku wypływu obserwujemy wzrost osiowych prędkości odkształceń. Mają one charakter rozciągający. W rejonie bezpośrednio przylegającym do powierzchni styku materiału z matrycą wartości rozciągającej składowej \dot{e}_2 intensywnie rosną i nacechowane są dużą nierównomiernością. Wskazuje to na zmienny przebieg stycznych naprężeń kontaktowych. Ujemne wartości składowej osiowej prędkości odkształceń obserwujemy jedynie w małym obszarze przylegającym do stempla.

Taki obraz rozkładu składowej $\dot{e}_2(t, z)$ w polu płynięcia plastycznego wskazuje bezpośrednio na istnienie naprężeń rozciągających w rejonie otworu matrycy.

Kolejnym etapem obliczeń było wyznaczenie intensywności odkształceń $e_i(t, z)$ w obszarze uplastycznienia. Znając przebiegi wszystkich składowych tensora prędkości odkształceń, intensywność odkształceń $e_i(t, z)$ obliczano całkując numerycznie funkcję intensywności prędkości odkształceń $\dot{e}_i(t, z)$ wzdłuż linii prądu po czasie. Zależność ta ma postać

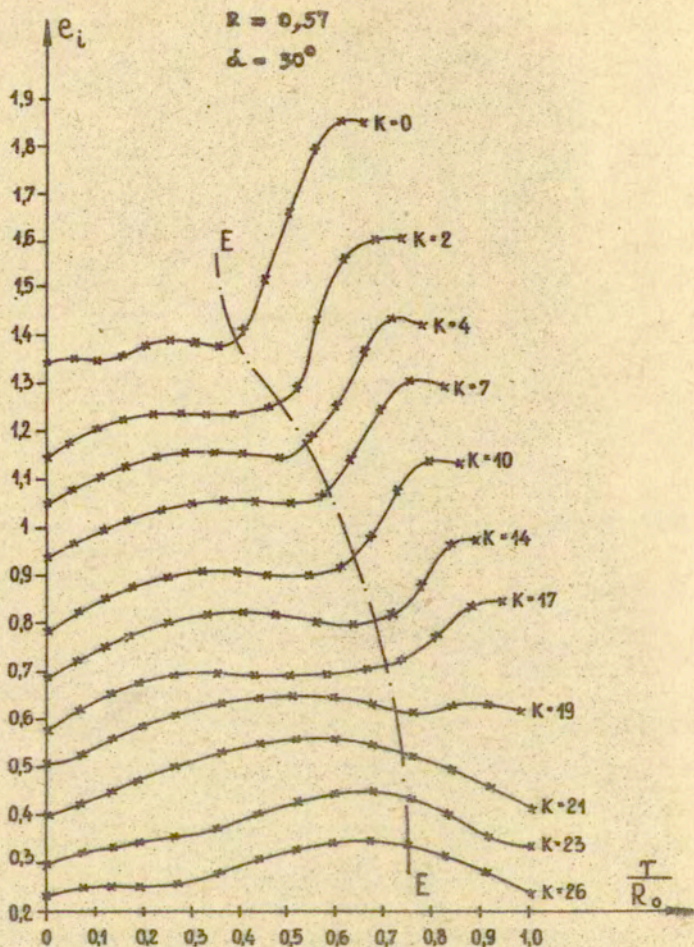
$$(3.16) \quad e_i = \int_0^t \dot{e}_i dt = \int_{z_0}^z \dot{e}_i \frac{dz}{v_z} ,$$

gdzie z_0 jest wartością współrzędnej „ z ” określającą początek obszaru uplastycznienia (rys 3.3.). Funkcję $\dot{e}_i(t, z)$ obliczono ze związku (2.3.7). Parametr czasu dt zamieniono ilorazem dz/v_z . Składowa osiowa prędkości v_z jest już znana z poprzednich obliczeń. Przedział całkowania zmiennej „ z ” jest związany z przyjętym kształtem i zasięgiem strefy deformacji plasty-



Rys. 3.57

cznej. W danych przypadkach kształt ten jest ograniczony powierzchnią matrycy i dwoma płaszczyznami prostopadłymi do osi symetrii. Początek obszaru deformacji plastycznej wzdłuż osi „Z” (rys.3.3.) wyznacza współrzędna $Z = Z_0$, stąd całkowanie (3.16) przeprowadzimy od wartości $Z = Z_0$ do $Z = 0$. Rys.3.38 obrazuje rozkład intensywności odkształceń $\theta_i(\tau, Z)$, który odpowiada próbce z rys.3.3. Na osi pionowej rys.3.38. odłożono wartości $\theta_i(\tau)$ w kolejnych k-przekrojach zmiennej „Z”. Na osi poziomej zaznaczono bezwymiarowe wartości promienia τ/R_0 . Obserwujemy tu stosunkowo duże przyrosty intensywności odkształceń wzdłuż promienia w warstwach bezpośrednio przyległych do powierzchni styku materiału z matrycą. Największe gradienty intensywności odkształceń $\theta_i(\tau, Z)$ występują w rejonie otworu matrycy. Niejednorodność intensywności odkształceń z rejonu otworu matrycy przechodzi do wyrobu. Niejednorodność $\theta_i(\tau, Z)$ w przekroju wyjściowym limituje niejednorodność własności mechanicznych wyrobu. Linia E - E z rys.3.38 umownie rozdziela pole uplastycznione na strefy małych i dużych gradientów intensywności odkształceń $\theta_i(\tau, Z)$. Można przypuszczać, że kształt linii E - E wyznacza profil takiej matrycy, przy której gradienty $\theta_i(\tau, Z)$ oraz strefa osiowych naprężeń rozciągających będą minimalne. Kształt obszaru stosunkowo jednorodnych przebiegów $\theta_i(\tau, Z)$ wzdłuż promienia, który jest zawarty pomiędzy osią symetrii i linią E - E może być pomocną wskazówką przy projektowaniu profilu matrycy i doborze parametrów procesu.



Rys. 3.38

3.3. Niejednorodność plastyczna

Podstawy doświadczalne metod pozwalających w przybliżony sposób wyznaczyć lokalną wartość granicy plastyczności w dowolnym punkcie materiału poddanego zaawansowanym odkształceniom plastycznym podano w punkcie 2.5. Podstawy metody opierają się na przyjęciu dwóch hipotez. Będą to: hipoteza jednej krzywej umocnienia $\sigma_i - \epsilon_i$ w jednoosiowych i złożonych stanach naprężeń oraz hipoteza jednej krzywej cechującej twardość - intensywność naprężeń $HM - \delta_i$ w prostych i złożonych stanach naprężeń. Obydwie hipotezy, częściowo zweryfikowane doświadczalnie w płaskim stanie naprężenia na metalach [11,92], służą pośrednio do określenia lokalnego wzmocnienia materiału. Hipotezy te narzucają jednak z góry izotropowy charakter wzmocnienia plastycznie deformowanego materiału. Pomimo tego ograniczenia są one pomocne przy badaniu własności mechanicznych odkształconego materiału, ponieważ są skuteczne w ocenie różnic lokalnych wartości granicy plastyczności w polu uplastycznionym. Ponadto są one proste i stosunkowo łatwe w realizacji doświadczalnej.

Niejednorodność plastyczna, rozumiana tu jako niejednorodna wartość granicy plastyczności w różnych punktach obszaru uplastycznienia, może być wywołana różnymi czynnikami [16]. Celem częściowego wyeliminowania strukturalnych źródeł niejednorodności materiału wyjściowego, próbki z PA2 przed wydiskaniem były poddane wyżarzaniu w temperaturze 300°C w czasie pięciu godzin, po czym chłodzono je wraz z piecem przez

dwanaście godzin. Mimo tego zabiegu niektóre obszary materiału pozostają nadal lokalnie niejednorodne, chociaż w mniejszym stopniu jak przed wybarzeniem. Można to stwierdzić w niezdeformowanym materiale pomiarami twardości. W odróżnieniu od metody pól twardości nie da się ujawnić niejednorodności plastycznej nieodkształconego plastycznie metalu za pomocą hipotezy jednej krzywej umocnienia.

W rozważanym przypadku interesuje nas obraz niejednorodności plastycznej materiału wymuszony odkształceniami plastycznymi. Wtedy można pole niejednorodności plastycznej powiązać ze zjawiskiem wzmocnienia materiału. Metoda wyznaczania granicy plastyczności z analizy pól twardości jest obarczona trudnym do oszacowania błędem czułości pomiaru twardości na niejednorodność wyjściową. Twardość nie jest przy tym cechą materiałową, pomimo to jest ona bezpośrednio zależna od intensywności naprężenia i pośrednio od odkształcenia plastycznego metalu [11,92,94]. Jednocześnie w odróżnieniu od twardości intensywność naprężeń σ_i identyfikowana z granicą plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu lub ścisłaniu jest uważana za funkcję materiałową określającą stopień wzmocnienia materiału. Geometryczny obraz krzywej umocnienia stopu PA2 w układzie współrzędnych $\sigma_i - \epsilon_i$ podano na rys. 3.39. Krzywą umocnienia otrzymano w próbie jednoosiowego ścisłania cylindrycznych próbek [46]. Przebieg krzywej $\sigma_i - \epsilon_i$ opisano zależnością potęgową (2.3.22). Współczynniki C i m w (2.3.22) obliczono metodą najmniejszych kwadratów [46]. Bieżącą, rzeczywistą wartość granicy plastyczności $\sigma_i(\epsilon_i)$ obliczano jako naprężenie jednorodne z zależności:

$$(3.17) \quad \sigma_i = \frac{4P}{\pi d^2} \quad , \quad \text{gdzie}$$

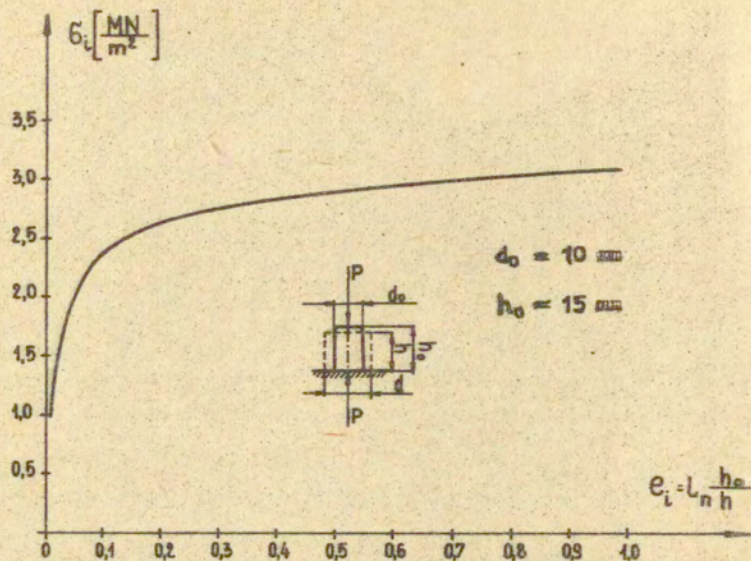
P jest siłą ściskającą próbkę a d - aktualną, średnią średnicą odkształconej próbki. Intensywność odkształceń e_i brano jako :

$$(3.18) \quad e_i = \ln \frac{h_0}{h} \quad , \quad \text{gdzie}$$

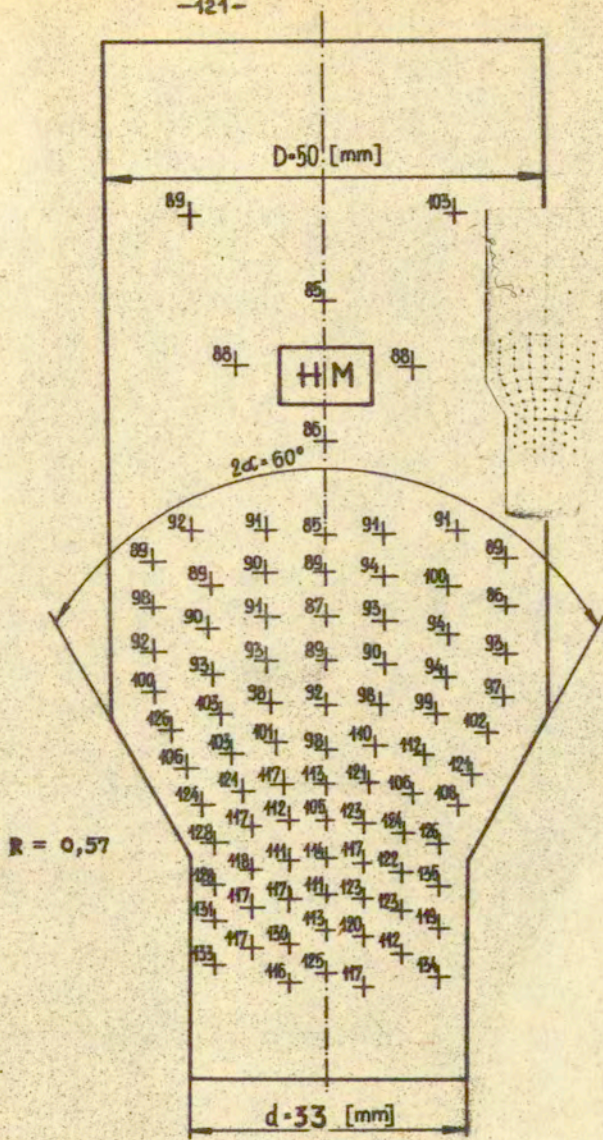
h_0 jest początkową wysokością próbki, h bieżącą wysokością próbki ściśniętej. Próbkę ściskania zastosowano ze względu na większy zakres odkształceń plastycznych w porównaniu do rozciągania. Krzywa $\sigma_i - e_i$ z rys.3.39 nazywana też krzywą materiałową posłużyła dalej do określenia pola $\sigma_i(\tau, z)$ w obszarze uplastycznionym przekroju wzdłużnego omawianej próbki z rys.3.3. Pole $e_i(\tau, z)$ w tej próbce podano na rys.3.38.

Rezultat pomiarów twardości HM w płaszczyźnie wzdłużnej rozpatrywanej próbki z redukcją $R=0,57$ i $\alpha=30^\circ$ pokazano na rys.3.40. Twardość mierzono aparatem Rockwella przy użyciu kulki pod naciskiem 100kG. Ilościową miarą twardości HM był iloraz siły nacisku do powierzchni koła o średnicy odcisku kulki, Taką miarę twardości można w przybliżeniu interpretować jako uśrednioną wartość nacisku powierzchniowego wywieranego przez deformowany materiał na sztywną kulkę. Pomiar twardości kulką wymaga szeregu zabiegów przygotowawczych na środkowej powierzchni podziału cylindrycznej próbki [46].

Twardość mierzono na całej wzdłużnej powierzchni próbki wzdłuż siedmiu linii prądu w odstępach zapewniających uni-



Rys. 5.39



Rys. 3.40

knęcie wzajemnego wpływu stref umocnienia.

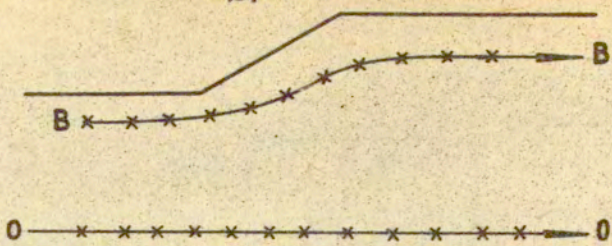
Pomimo stosunkowo niewielkiej redukcji widzimy na rys. 3.40. znaczne różnice w wartościach twardości wzdłuż linii prądu w całym polu uplastycznionym. Twardość wzrasta w kierunku otworu matrycy oraz w warstwach przylegających do powierzchni stożkowej matrycy. Różnica pomiędzy średnią twardością materiału znajdującego się przed obszarem uplastycznionym i po wyjściu z niego jest znacząca i wynosi przeciętnie 40%. Miejscami widać też skokowe przyrosty twardości, które są wywołane prawdopodobnie czynnikami strukturalnymi bez jawnego związku z deformacją plastyczną. W całości rozkład twardości w całym przekroju wzdłużnym świadczy o występowaniu znacznej niejednorodności własności mechanicznych materiału znajdującego się w strefie deformacji plastycznej.

Przyporządkowanie polu twardości odpowiadającego mu rozkładowi intensywności naprężeń $\sigma_i(r, z)$ wymaga wyznaczenia krzywej cechującej $HM - \sigma_i$. Krzywą cechującą $HM - \sigma_i$ otrzymano z pomiaru twardości odciążonych, uprzednio ściskanych próbek cylindrycznych o średnicy 10mm i wysokości 15mm. Stosowano te same zabiegi przygotowawcze jak przy sporządzaniu krzywej materiałowej $\sigma_i - \epsilon_i$. Pomiar twardości HM wykonywano w środku czołowych powierzchni odkształconych próbek. Wielkości σ_i i ϵ_i były obliczane analogicznie jak przy sporządzaniu krzywej umocnienia. Zależność pomiędzy σ_i i HM okazała się zbliżona do liniowej. W przedziale $\sigma_i \in [2,5 - 4] \text{ MPa}$ zależność ta ma przybliżoną postać:

$$(3.19) \quad \sigma_i \approx 0,32 \cdot HM .$$

Znając krzywą cechowania $HM - \sigma_i$ oraz pole twardości $HM(\tau, z)$ naniesiono przykładowo w rozpatrywanej próbce wzdłuż jej osi symetrii $O - O$ i linii prądu $B - B$ wartości intensywności naprężeń σ_i . Podwójne wartości σ_i odłożono w punktach pomiaru twardości, które na rys. 3.41 oznaczono krzyżykami. Wartości σ_i wyznaczone z twardości oznaczono trójkątami. Jednocześnie w tych samych punktach linii prądu obliczano σ_i posługując się hipotezą jednej krzywej umocnienia. Wartości e_i wzdłuż linii $O - O$ i $B - B$ odczytano z wykresu 3.38 i oznaczono kółeczkami.

Przebiegi σ_i wzdłuż trajektorii nazwano umownie liniami umocnienia. Linie te otrzymane metodą pól twardości mają nieregularny charakter. Jest to związane z czułością pomiaru twardości na lokalne niejednorodności materiału. W przeciwieństwie do tego linie umocnienia otrzymane z krzywej materiałowej odznaczają się dużą gładkością. W obydwu wypadkach obserwujemy znaczący wzrost intensywności naprężeń wzdłuż linii prądu, w szczególności w rejonie kontaktu materiału z matrycą. Do obliczeń naprężeń w obszarze uplastycznienia wygodniej jest wyznaczać pola $\sigma_i(\tau, z)$ z hipotezy jednej krzywej umocnienia. Bardziej pracochłonna jest metoda pól twardości. Obydwie metody są z konieczności przybliżone i nawzajem się uzupełniają. Obszerniejsze wyniki badań doświadczalnych pól niejednorodności plastycznej stopu PA2 w procesach wyciskania podano w pracach [46, 109].



R = 0,57

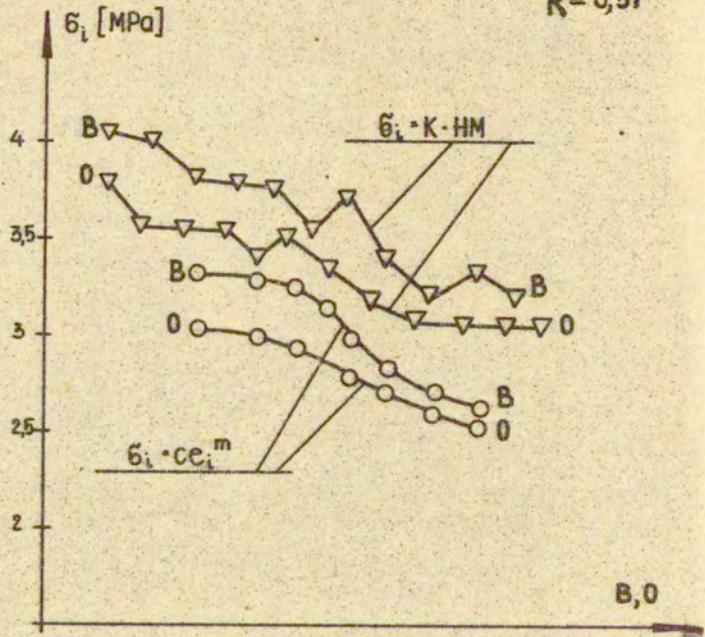


Рис. 5.41

3.4. Podsumowanie i wnioski

Proces wyciskania pręta cylindrycznego z metalu przez matryce stożkowe wywołuje szczególnie złożone zjawiska w tych objętościach materiału, które uległy odkształceniom plastycznym. Przedstawione przykłady wyciskania, z trzema kątami stożków matryc w zakresie trzech redukcji od $R = 0,35$ do $R = 0,88$ wskazują, że opis pól prędkości przemieszczeń i odkształceń za pomocą funkcji prądu $\Phi(\tau, z)$ prowadzi do efektywnych wyników. W badanym zakresie redukcji przekroju początkowego i kątów matryc doświadczalna funkcja prądu $\Phi(\tau, z)$ interpretowana fizycznie jako wydatek przepływu, może być przedstawiona w postaci sumy dwóch składowych. Jedna z nich nazwana unownie jednorodną składową funkcji prądu $\Phi_1 = \pi r_n^2$ daje osiową prędkość przemieszczeń $V_z(z)$ niezależną od promienia r . Składowa $\Phi_1(\tau, z)$ opisuje zgrubnie kinematycznie dopuszczalny schemat płynięcia plastycznego, który odpowiada hipotezie płaskich przekrojów. Część funkcji prądu oznaczona przez $\delta\Phi(\tau, z)$ daje główny wkład do opisu niejednorodności pól prędkości przemieszczeń i odkształceń. W badanych czterech przykładach wyciskania maksymalne wartości $\delta\Phi(\tau, z)$ wykazywały wzrost w kierunku powiększania stopnia redukcji i kąta rozwarcia matrycy przy jednakowych warunkach tarcia na kontakcie materiału z powierzchniami narzędzia.

Przebiegi funkcji prądu $\Phi(\tau, z)$ w polu płynięcia plastycznego wykazały, że do ich opisu analitycznego można zastosować podwójne szeregi trygonometryczne w postaci separo-

walnej ze względu na współrzędną, której kierunek jest zgodny z kierunkiem ruchu stempla. Wartości współczynników tego szeregu można dokładnie obliczyć z pomiarów współrzędnych linii prądu a następnie wygładzić ich przebiegi wykorzystując funkcje sklepane „spline”. W ten sposób otrzymano numerycznie zbieżne pierwsze, drugie i trzecie pochodne doświadczalnej funkcji prądu $\phi(r, z)$ względem „r” i „z”. Zapewnia to dokładne obliczenia składowych prędkości przemieszczeń i odkształceń oraz intensywności odkształceń.

Posiadanie dokładnych przebiegów pól prędkości i intensywności odkształceń można wykorzystać do racjonalnej analizy kształtu profilu matrycy. Pola te dają też możliwość przewidywania własności mechanicznych wyrobu. Szczegółowo przedstawione w różnych postaciach doświadczalne przebiegi funkcji prądu, przed i po gładzeniu wyników pomiarów, stanowią bezpośrednią, praktyczną wskazówkę do opisu teoretycznego tego bardzo złożonego procesu. Na przykład mogą one służyć do konstruowania nowych, dokładnych schematów płynięcia plastycznego materiału w procesie wyciskania osiowo-symetrycznego. Wydaje się, że charakter przebiegu funkcji prądu w polu płynięcia plastycznego wyciskanego materiału będzie zależny głównie od sił tarcia występujących na kontakcie materiału z narzędziem. Brak danych na ten temat w literaturze uniemożliwia jednak wyciągnięcie ogólniejszych wniosków. Informacją wyjściową do opisu płynięcia plastycznego opartego na koncepcji funkcji prądu są współrzędne wzdłużnych linii siatki po deformacji. Wzdłużne linie siatki po odkształceniu można z dobrą dokładnością uważać za linie prądu w ustalonej fazie

procesu wyciskania.

Pokazane sposoby określania niejednorodności plastycznej wymuszonej odkształceniem plastycznym mogą z dobrym przybliżeniem umożliwić opis zjawisk w procesie wyciskania z uwzględnieniem izotropowego wzmocnienia materiału. Widzimy, że nawet przy niewielkiej redukcji materiał znajdujący się w strefie deformacji plastycznej dozna istotnych zmian twardości. Wyznaczona doświadczalnie niejednorodność plastyczna zdeformowanego materiału jest cenną pomocą przy przewidywaniu własności wyrobów. Jest też interesującą informacją o charakterze poznawczym, ponieważ pośrednio służy do teoretycznej analizy wpływu wzmocnienia materiału na przebieg procesu.

Pokazane metody doświadczalnych badań procesu wyciskania wymagają żmudnych pomiarów, pracochłonnych zabiegów oraz obliczeń na maszynach cyfrowych. Stąd konieczna jest automatyzacja tych czynności, gdyż w przeciwnym wypadku ich koszt jest wysoki.

Należy podkreślić, że przedstawione w tym rozdziale wnioski i spostrzeżenia mają ze względu na złożoność zjawisk ograniczony zakres i dotyczą głównie czterech omawianych przykładów wyciskania na zimno stopów aluminium.

Wnioski i informacje doświadczalne zawarte w tym rozdziale będą wykorzystane dalej do teoretycznej analizy procesu wyciskania, w szczególności do obliczeń pól naprężeń.

4. TEORETYCZNA ANALIZA PROCESU WYCISKANIA OSIOWO-SYMETRYCZNEGO (TEORIA TECHNICZNA)

4.1. Uwagi wstępne

Postęp w rozwiązywaniu zagadnień osiowo-symetrycznych z mieszanymi warunkami brzegowymi na drodze przystosowania metody charakterystyk jest niezadawalający. Ilustrują to na przykład wspomniane prace [1,2,3,4,6,4,7] w których porównywano wyniki teoretyczne otrzymane metodą charakterystyk z rezultatami doświadczeń. Porównywano tam teoretyczne i doświadczalne przebiegi linii prądu, prędkości przemieszczeń, kształty obszarów uplastycznienia i naciski na stemplu w procesie wyciskania cylindrycznego pręta z PA2. Różnice w przebiegach doświadczalnych i obliczeniowych prędkości przemieszczeń miały charakter jakościowy. Różnice kształtów obszarów uplastycznienia były również jakościowe.

Ograniczone perspektywy nowych rozwiązań zadań z mieszanymi warunkami brzegowymi w warunkach osiowej symetrii opartych na warunku Treski omówiono w rozdziale drugim. Najbardziej wątpliwym z fizycznego punktu widzenia jest warunek pełnej plastyczności Haara-Kármána. Pominięcie tego niesprawdzonego doświadczeniem i wyrażonego naprężeniami założenia może w niektórych przypadkach znacząco ulepszyć rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego.

W rozdziale tym przedstawiono nowe rozwiązanie problemu osiowo-symetrycznego z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa

i wzmocnieniem izotropowym. Rozwiązanie to wykorzystano do analizy procesu wyciskania osiowo-symetrycznego w ustalonej fazie płynięcia plastycznego. W rozwiązaniu pominięto warunek Haara-Kármána.

Układ równań podstawowych teorii plastycznego płynięcia w osiowej symetrii z warunkiem Hubera-Misesa nie jest typu hiperbolicznego [38]. Efektywne rozwiązania takiego układu z mieszanymi warunkami brzegowymi nie są znane. Nie ma też ogólnej metody postępowania w takich przypadkach. Dane brzegowe są niewystarczające do jednoznacznego określenia pola naprężeń. Zatem ze względu na trudności matematyczne, jak również z powodu złożoności zjawisk fizycznych, uproszczenia są nieuniknione. W odróżnieniu od uproszczeń wyrażonych w naprężeniach, fizycznie poprawniej jest formułować je polami kinematyki. Przemawia za tym lepsza poglądowość i możliwość bezpośredniej weryfikacji doświadczalnej. Uproszczenia wyrażone polami kinematycznymi mogą mieć formę przewidywania postaci rozwiązania. Stan plastyczny z warunkiem Hubera-Misesa przy wyciskaniu opisuje siedem równań. W ustalonej fazie płynięcia plastycznego można je zastąpić jednym nieliniowym równaniem cząstkowym wyrażonym nieznaną funkcją prądu. Jeżeli funkcję prądu określimy z założenia w postaci pewnego wyrażenia analitycznego, to takie postępowanie ma cechy metody przewidywania rozwiązania opartej na uproszczeniach kinematycznych. Typ wyrażenia analitycznego na funkcję prądu można przewidzieć opierając się na intuicji, albo najpewniej na wynikach pomiarów współrzędnych doświadczalnych linii prądu. Wyrażenia takie mogą zawierać niewiadome funkcje zależne od jed-

iej lub dwóch współrzędnych. Mogą to być też nieznanne współczynniki liczbowe. Niewiadome funkcje lub współczynniki wyznaczamy z nieliniowego względem nich równania stanu plastycznego.

Funkcja prądu interpretowana jako wydatek przepływu ustalonego jest wielkością mierzalną bezpośrednio w doświadczeniu. Stąd weryfikacja zgodności propozycji teoretycznych z doświadczeniem daje możliwość dokładnej oceny założeń upraszczających.

Punktem wyjścia przy opracowywaniu prezentowanego rozwiązania z uwzględnieniem wzmocnienia izotropowego materiału były doświadczalne przebiegi funkcji prądu w obszarach uplastycznienia czterech wyciskanych próbek z PA2.

Analiza teoretyczna poruszanego problemu ma tu z konieczności formę teorii technicznej.

4.2. Założenia i zależności podstawowe

Analizę teoretyczną procesu wyciskania osiowo-symetrycznego opieramy na przybliżonym rozwiązaniu układu równań stanu plastycznego teorii plastycznego płynięcia. Będą to: dwa równania równowagi, warunek plastyczności Hubera-Misesa i cztery równania stowarzyszonego z warunkiem plastyczności prawa płynięcia. Równania te wyrażono we współrzędnych cylindrycznych T, ϑ, Z . Szczegółową ich postać przedstawiono w punkcie 2.1. Są to związki: (2.1.4.a), (2.1.4.b), (2.1.5), (2.1.6.a), (2.1.6.b), (2.1.6.c), (2.1.6.d). Naprężeń od sił ma-

sowych i bezwładnościowych nie uwzględniano. Płynięcie plastyczne w kierunku obwodowym nie występuje. Pięć równań od (2.1.5) do (2.1.6.d) można zastąpić czterema związkami od (2.3.12.a) do (2.3.12.d). Wtedy mamy sześć równań podstawowych. Do wyznaczenia pozostaje również sześć nieznanych funkcji. Są to cztery składowe tensora naprężenia i dwie składowe wektora prędkości. Omówiono to szczegółowo w rozdziale drugim. Przyjmujemy model ciała sztywno-idealnie plastycznego w każdym punkcie płynięcia, ale ze zmienną granicą plastyczności w obszarze uplastycznienia. Niejednorodność plastyczna jest wymuszona odkształceniami plastycznymi i utożsamia się ją ze zjawiskiem wzmocnienia materiału. Przyjmujemy hipotezę wzmocnienia izotropowego, według której powiększenie granicy plastyczności następuje równomiernie we wszystkich kierunkach w miarę wzrostu obciążenia. Następnie przyjmujemy hipotezę jednej krzywej płynięcia, w myśl której postać funkcji $\sigma_i = f(\epsilon_j)$ jest stała dla danego materiału i nie zależy od stanu naprężenia i drogi obciążenia. Hipoteza ta znalazła dość dobre potwierdzenie doświadczalne w warunkach proporcjonalnych dróg obciążenia [4,7]. Ogólnie można uznać, że zachowanie się rzeczywistych metali cechuje przemieszczenie i zmiana wymiarów aktualnej powierzchni plastyczności, niezależnie od przyjętej definicji uplastycznienia [14]. Mimo intensywnych badań nad zjawiskiem wzmocnienia metalu poddanego deformacjom plastycznym nie ma dotąd jasności w rozumieniu tego zjawiska [7,14]. Nieuwzględnienie wzmocnienia materiału przy obliczaniu naprężeń w procesach wyciskania na zimno może prowadzić do dużych błędów. Lepiej

jest w takich wypadkach przyjąć chociażby proste prawo wzmocnienia izotropowego.

Przyjęcie tak uproszczonego w stosunku do rzeczywistości opisu zachowania się metali powoduje pomimo to duże trudności w obliczeniach pól prędkości i naprężeń. Dodatkowe kłopoty wynikają z braku warunków brzegowych. Stosunkowo najłatwiej jest uzyskać dane o przebiegach pól prędkości na powierzchni styku materiału z narzędziem.

Aktualnie nie ma jasnego rozumienia zjawisk towarzyszących tarcia w procesach wyciskania. W literaturze [16,34,35,36,37] na ten temat można odnotować przeciwstawne hipotezy i sprzeczne wnioski.

Występujące w warunku plastyczności (2.1.5) funkcje opisujące izotropowe wzmocnienie są zależne od stanu odkształcenia. Sprzężenie równań opisujących stan naprężenia ze stanem odkształcenia wymaga jednoczesnego rozwiązywania całego układu równań.

Można to osiągnąć wprowadzając do opisu pól prędkości w obszarze płynięcia plastycznego kinematycznie dopuszczalną funkcję prądu $\phi(\tau, z)$. Sens fizyczny $\phi(\tau, z)$ i sposób podejścia jest tu identyczny jak w doświadczalnej metodzie wizjo-plastyczności pokazanej w rozdziałach drugim i trzecim. Różnica polega na tym, że w eksperymencie mamy zadaną doświadczalnie $\phi(\tau, z)$, natomiast ^{tutaj} funkcję prądu $\phi(\tau, z)$ wyznaczamy z podstawowego układu równań stanu plastycznego. Niejednorodne rozkłady składowych prędkości przemieszczeń w kierunku osiowym V_z i promieniowym V_r wyrażają się jako związki (2.3.5) i (2.3.6). Składowe prędkości odkształceń i intensyw-

ności prędkości wyznacza się ze wzorów (2.3.7) i (2.3.14). Zależności te zostały szczegółowo wyprowadzone w rozdziale drugim. Funkcja prądu $\phi(\tau, z)$ musi być ciągła i n -krotnie różniczkowalna względem τ^n i z^n w polu płynięcia plastycznego.

Sześć równań stanu plastycznego: (2.1.4.a), (2.1.4.b), (2.3.12.a), (2.3.12.b), (2.3.12.c), (2.3.12.d) zastąpimy jednym równaniem nieliniowym względem $\phi(\tau, z)$. Otrzymujemy je wprowadzając związki (2.3.7) i (2.3.14) do równań prawa płynięcia (2.3.12), które podstawiamy do równań równowagi (2.14.a) i (2.14.b). Równania równowagi mają wtedy postać:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \sigma^\tau + 2m^\tau \left(\frac{1}{\tau} \phi^{\tau z} - \frac{1}{\tau^2} \phi^z \right) + \\ & + m^z \left(-\frac{1}{\tau} \phi^{\tau\tau} + \frac{1}{\tau^2} \phi^\tau + \frac{1}{\tau} \phi^{zz} \right) + \\ & + m \left(\frac{1}{\tau} \phi^{\tau\tau z} - \frac{1}{\tau^2} \phi^{\tau z} + \frac{1}{\tau} \phi^{zzz} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & \sigma^z + m^\tau \left(-\frac{1}{\tau} \phi^{\tau\tau} + \frac{1}{\tau^2} \phi^\tau + \frac{1}{\tau} \phi^{zz} \right) + \\ & + 2m^z \left(-\frac{1}{\tau} \phi^{\tau z} \right) + \\ & + m \left(-\frac{1}{\tau} \phi^{\tau\tau\tau} + \frac{1}{\tau^2} \phi^{\tau\tau} - \frac{1}{\tau^3} \phi^\tau - \frac{1}{\tau} \phi^{\tau z z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Następnie równanie (4.2) różniczkujemy względem zmiennej „ z ” a równanie (4.3) względem zmiennej „ τ ”. Po zróżniczkowaniu otrzymane wyrażenia odejmujemy stronami. Po przekształceniach otrzymujemy następującą postać końcową:

$$\begin{aligned}
 & \phi^{\tau\tau\tau\tau} + \phi^{\tau\tau z z} + \phi^{z z z z} - \frac{2}{\tau} \phi^{\tau\tau\tau} - \frac{2}{\tau} \phi^{\tau z z} + \\
 & + \frac{3}{\tau^2} \phi^{\tau\tau} - \frac{3}{\tau^2} \phi^{\tau} = \\
 & = \frac{1}{m} \left[2m^{\tau z} (2\phi^{\tau z} - \frac{1}{\tau} \phi^z) + \right. \\
 (4.4) \quad & + (m^{\tau\tau} - m^{zz}) (\phi^{\tau\tau} - \frac{1}{\tau} \phi^{\tau} - \phi^{zz}) + \\
 & + m^{\tau} (2\phi^{\tau\tau\tau} - \frac{3}{\tau} \phi^{\tau\tau} + \frac{3}{\tau^2} \phi^{\tau} + 2\phi^{\tau z z} - \frac{1}{\tau} \phi^{zz}) + \\
 & \left. + 2m^z (\phi^{\tau z z} - \frac{1}{\tau} \phi^{\tau z} + \phi^{zzz}) \right].
 \end{aligned}$$

Górne indeksy w (4.2), (4.3) i (4.4), ze względu na wygodę zapisu, oznaczono jako symbole różniczkowania względem zmiennych „ τ ” i „ z ”. Na przykład

$$\phi^{\tau\tau z z} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial \tau^2 \partial z^2}$$

funkcja $m(\tau, z)$ wyraża się w formie:

$$(4.5) \quad m(\tau, z) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\tau, z)}{\epsilon_i(\tau, z)},$$

gdzie $\sigma_i(\tau, z)$ jest polem intensywności naprężeń utożsamionym z niejednorodnością plastyczną. Niejednorodny rozkład granicy plastyczności $\sigma_i(\tau, z)$ w polu płynięcia plastycznego jest zadany w zależności od $\dot{\epsilon}_i(\tau, z)$ lub $\epsilon_i(\tau, z)$. Odpowiada to wzmocnieniu izotropowemu materiału. Lewa strona równania (4.4) przedstawia podwójny operator różniczkowy Laplace'a funkcji prądu $\Delta \Delta \phi(\tau, z)$. Po oznaczeniu prawej strony równania (4.4) przez f zapisujemy je w postaci:

$$(4.6) \quad \Delta \Delta \phi(r, z) = f.$$

W przypadku uwzględnienia członów bezwładnościowych prawa część równania (4.6) musi być uzupełniona przez dodanie

wyrażenia f_b :

$$(4.7) \quad f_b = \frac{1}{2\pi r} \frac{S}{m} \left[\left(\phi^{rz} - \frac{1}{r} \phi^z \right) \left(\phi^{zz} - \frac{1}{r} \phi^r + \phi^{rr} \right) + \right. \\ \left. + \left(\phi^z - \phi^r \right) \left(\phi^{zzr} - \frac{1}{r} \phi^{zz} - \frac{1}{r} \phi^{rz} + \phi^{rrz} \right) - \right. \\ \left. - \phi^{rz} \left(\phi^{zz} + \phi^{rz} \right) \right].$$

Warunki brzegowe dla równania (4.4) będą zależały od przyjętego wyrażenia na tarcie pomiędzy deformowanym materiałem i narzędziem.

Równanie (4.4) lub (4.6) opisuje przepływ laminarny niejednorodnego plastycznie materiału ze wzmocnieniem izotropowym i jest wyrażone współrzędnymi, pochodnymi funkcji prądu i stałymi materiałowymi. Wzmocnienie reprezentuje tu człon $m(r, z)$. Wyznaczenie nieznannej funkcji prądu $\phi(r, z)$ z równania (4.4) nawet przy najprostszych odnośnie tarcia warunkach brzegowych jest zadaniem bardzo trudnym. Ogólna teoria rozwiązywania równań typu (4.4) nie jest znana [23, 38, 110]. Problem ten porusza praca [11]. Przybliżony, iteracyjny sposób rozwiązywania równania (4.4) [23, 110] polega na podzieleniu całego procesu obliczeń na etapy. W pierwszym kroku przy zadanych warunkach brzegowych rozwiązujemy liniowe równanie

biharmoniczne

$$(4.8) \quad \Delta \Delta \phi(\tau, z) = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania niech będzie funkcja $\phi_1(\tau, z)$.

W drugim kroku otrzymane poprzednio rozwiązanie podstawiamy do prawej strony równania (4.4). Następnie rozwiązujemy liniowe równanie biharmoniczne z prawą stroną zależną od $\phi_1(\tau, z)$

$$(4.9) \quad \Delta \Delta \phi(\tau, z) = f_1.$$

W rezultacie otrzymujemy pierwsze przybliżone rozwiązanie równania (4.4), które oznaczymy przez $\phi_2(\tau, z)$. Kolejno podstawiamy $\phi_2(\tau, z)$ do prawej strony równania (4.4) i znowu rozwiązujemy liniowe równanie biharmoniczne

$$(4.10) \quad \Delta \Delta \phi(\tau, z) = f_2.$$

Proces obliczeń jest powtarzany tak długo, dopóki rozwiązania kolejnych przybliżeń będą się różniły nieznacznie. Przy numerycznym rozwiązywaniu nieliniowego równania cząstkowego typu (4.4) stosowano metodę różnic skończonych [110]. Wprowadza się wtedy podział obszaru płynięcia na dyskretną siatkę punktów, w przybliżony sposób spełniając równanie (4.4). Warunki brzegowe są spełnione w przybliżeniu w skończonej ilości punktów na brzegu. W węzłach siatki równanie różniczkowe zastępuje się równaniem algebraicznym, w którym nie wiadomą w danym punkcie jest funkcja prądu $\phi(\tau, z)$. Wskutek

dzielenia obszaru płynięcia metody numeryczne prowadzą do stosunkowo dużej liczby nieliniowych równań algebraicznych. Zbieżność numerycznych rozwiązań zagadnień nieliniowych jest ciągle problemem otwartym. Procedura obliczeń jest złożona co wpływa na stosunkowo niską wydajność i wysokie koszty. Trudności z tym związane dobrze ilustruje praca [110], w której koncepcji funkcji prądu użyto do numerycznej analizy procesu wyciskania w płaskim stanie odkształcenia. Zastosowana tam metoda różnic skończonych pozwoliła obliczyć rozkłady linii prądu i rotacji w polu płynięcia idealnie plastycznego materiału. Podobnych zadań dla wyciskania w osiowej symetrii, z uwzględnieniem wzmocnienia, numerycznie nie rozwiązywano. Oszacowanie dokładności rozwiązań numerycznych jest trudne i w cytowanych pracach tego podstawowego problemu nie badano. Nie weryfikowano też zgodności obliczeń z wynikami doświadczeń.

Pokazane dalej przybliżone rozwiązanie równania (4.4) ma formę założonego z góry wyrażenia analitycznego, którego kształt sugeruje doświadczenie. Zatem metoda postępowania polega na otrzymaniu rozwiązania dla pól prędkości z funkcji prądu a następnie obliczenie pól naprężeń. Naprężenia obliczamy z równań równowagi i związków płynięcia w identyczny sposób jak w metodzie „wizjoplastyczności”. Podano to szczegółowo w rozdziale drugim. Należy dodać, że w odróżnieniu od metody wizjoplastyczności, obliczone z teoretycznej funkcji prądu $\phi(\tau, z)$ pola naprężeń będą jednoznaczne. Propozycję konstrukcji teoretycznej funkcji prądu spełniającej w przybliżeniu równanie (4.4) przy warunkach brzegowych wyrażonych

polami kinematycznymi omawia szczegółowo kolejny punkt.

4.3. Konstrukcja teoretycznej funkcji prądu

Funkcja prądu $\phi(\tau, z)$ interpretowana jest fizycznie jako bezwymiarowy wydatek przepływu odpowiadający dowolnemu punktowi obszaru płynięcia plastycznego. Sposób pomiaru $\phi(\tau, z)$ podano w rozdziale trzecim. Wyznaczona na drodze teoretycznej funkcja $\phi(\tau, z)$ może być zatem bezpośrednio porównana z jej odpowiednikiem doświadczalnym. Z tego powodu wykorzystane dalej oznaczenia wielkości geometrycznych i kinematycznych są identyczne jak w rozdziale trzecim. Oznaczenia i kształt obszaru uplastycznienia przyjmujemy jak na rys. 4.1 i 4.2, na których uplastycznione pole w układzie współrzędnych „ τ - z ” oznaczono jako **OABC**. To samo pole w układzie współrzędnych „ τ_n^2 - z_n ” jest zawsze kwadratem o boku równym jedności. Jest to niezależne od kształtu konturu matrycy **AB** i wynika z definicji znormalizowanego promienia $\tau_n = \tau/R_0(z)$ oraz znormalizowanej współrzędnej z_n , którą podano na rys. 4.1 i 4.2. Kształt linii **OA** i **CB** ograniczających obszar uplastycznienia najwygodniej jest przyjąć w postaci odcinków prostoliniowych prostopadłych do osi symetrii. Pokazano to na rys. 4.1. Jest to w zgodzie z prezentowanymi w rozdziale trzecim doświadczeniami. W ogólnym przypadku kształt linii **OA** i **BC** może zależeć od dwóch współrzędnych: τ, z . Obrazuje to rys. 4.2. Wielkości d i z_0 lokalizują obszar płynięcia plastycznego. Możemy je wyznaczyć dwoma sposobami. W pierwszym zakłada-

my wymiar α , natomiast Z_0 obliczamy z minimum wyrażenia na moc zużytą na odkształcenie plastyczne. Drugi sposób polega również na założeniu wymiaru α , ale różni się metodą obliczania Z_0 . Wielkość Z_0 obliczamy przyjmując w określonym punkcie $P(\tau_p, z_p)$ z rys.4.1. ustaloną, małą wartość intensywności odkształceń $E_1(\tau_p, z_p) = E_0$. Drugi sposób jest wygodniejszy do obliczeń numerycznych. Najprościej jest przyjąć wymiary α i Z_0 opierając się na założeniu lub intuicji.

Materiał znajdujący się po prawej stronie linii BC na rys.4.1. i 4.2. jest sztywny i porusza się w kierunku ruchu stempla z prędkością \bar{V}_0 . W polu $OABC$ materiał doznaje niejednorodnych odkształceń plastycznych z prędkością płynięcia plastycznego $\bar{V}(\tau, z)$. Na lewo od linii OA materiał jest sztywny i porusza się ze stałą prędkością \bar{V}_f wynikającą z bilansu przepływu. Obszar płynięcia z rys.4.1. przyjęto jako dziedzinę $\Phi(\tau, z)$.

Zakładamy, że na liniach DA i BC nie występują nieciągłości prędkości przemieszczeń. Kształt konturu matrycy $R_b(z)$ wzdłuż AB musi być opisany funkcją ciągłą, jednoznacznie i n -krotnie różniczkowalną względem z^n w każdym punkcie $z \in [0, Z_0]$. Dodatkowo zakładamy, że w punktach $z=0$ (A) i $z=Z_0$ (B) zachodzą związki:

$$(4.11) \quad \frac{dR_b(z)}{dz} = \frac{d^2R_b(z)}{dz^2} = \frac{d^3R_b(z)}{dz^3} = \frac{d^4R_b(z)}{dz^4} = 0.$$

Kształt konturu matrycy nie przewiduje ostrych naroży. Stąd rzeczywisty kontur z narożami musimy zastąpić konturem gładkim spełniającym postulowane wyżej założenia. Ilustruje to

rys.4.3. W przypadku matrycy płaskiej musimy ze względu na wprowadzone założenia usunąć ostre naroża uwzględniając jednocześnie kształt strefy martwej. Pokazano to na rys.4.4. Kształt strefy martwej możemy scharakteryzować na przykład kątem δ (rys.4.4.). Można go wyznaczyć z warunku minimum wyrażenia na moc realizującą proces wyciskania. Wygodnym sposobem umożliwiającym zdobycie informacji o kształcie strefy „martwej” są doświadczenia modelowe polegające na wyciskaniu plasteliny [112,113] lub ołowiu [102]. Strefa „martwa” jest obszarem w którym materiał nie doznaje odkształceń plastycznych, ale sąsiaduje ze strefą intensywnego płynięcia plastycznego. Na granicy tych obszarów występują bardzo złożone, niezbadane dotychczas zjawiska. Przyjmuje się zgrubnie, że na powierzchni rozgraniczającej materiał „martwy” i zdeformowany występują naprężenia styczne równe granicy plastyczności na ścinanie.

Proponowany opis pól prędkości i przemieszczeń za pomocą funkcji prądu jest nieczuły na istnienie stref „martwych” w narożach matryc. W praktyce procesy wyciskania stopów metali kolorowych na zimno są prowadzone w matrycach stożkowych o kącie rozwarcia 2δ od 60° do 120° . Unika się w ten sposób ujemnego wpływu na jakość wyrobu istnienia stref „martwych” [6,16,22,60,63,66].

Przyjęte założenia umożliwiają wyznaczenie najbardziej korzystnego konturu $R_p(z)$, który zapewnia na przykład minimum mocy procesu lub jednorodny rozkład odkształceń w wyrobie końcowym. Problem optymalizacji profilu matrycy jest bardzo złożony. Sprawa ta była poruszona w pracach [22,23,24,25,26,

27,28] i jest nadal aktualnym naukowo i ważnym praktycznie tematem.

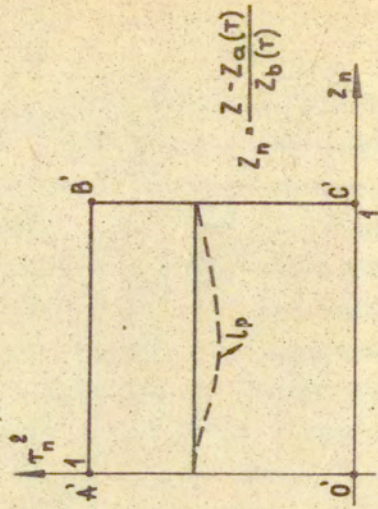
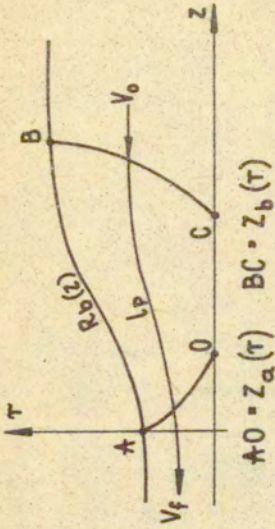
Założenie o jednoznaczności, ciągłości i różniczkowalności funkcji konturu matrycy $R_{\phi}(z)$ odpowiada szerokiej klasie procesów wyciskania na zimno prowadzonych w rzeczywistych warunkach.

Konstrukcja funkcji prądu $\Phi(\tau, z)$ musi zapewnić spełnienie równania (4.4) przy zadanych warunkach brzegowych. Warunki brzegowe są określone kinematyczną dopuszczalnością pól prędkości otrzymanych z $\Phi(\tau, z)$ oraz naprężeniami tarcia. Spełnienie równania (4.4) z uwzględnieniem wzmocnienia wymaga od funkcji $\Phi(\tau, z)$ ciągłości i n -krotnej różniczkowalności względem τ i z w każdym punkcie pola $OABC$ (rys.4.3.). Wynika z tego warunek ciągłości i różniczkowalności pól prędkości przemieszczeń i odkształceń w polu $OABC$ (rys.4.3.), w tym na liniach OA i BC . Na liniach OA i BC składowe osiowe prędkości V_z są równe odpowiednio V_f i V_0 , natomiast składowe promieniowe prędkości V_r będą równe zeru.

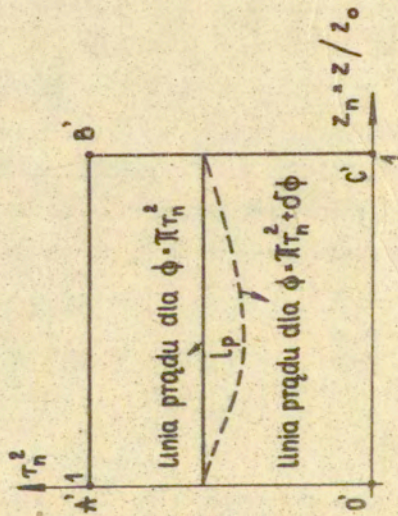
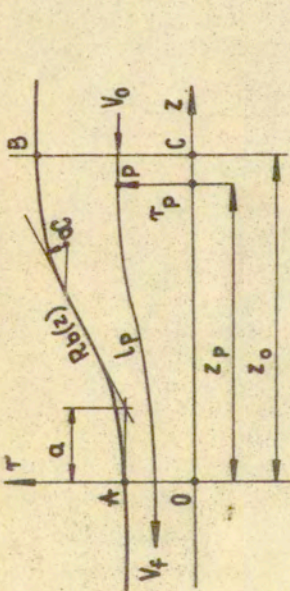
Uwzględniając doświadczenia i wnioski przedstawione w rozdziale trzecim postulujemy, że bezwymiarową funkcję prądu $\Phi(\tau, z)$ w procesach wyciskania osiowo-symetrycznego można przedstawić w formie sumy dwóch funkcji

$$(4.12) \quad \Phi(\tau, z) = \phi_1(\tau, z) + \delta\phi(\tau, z).$$

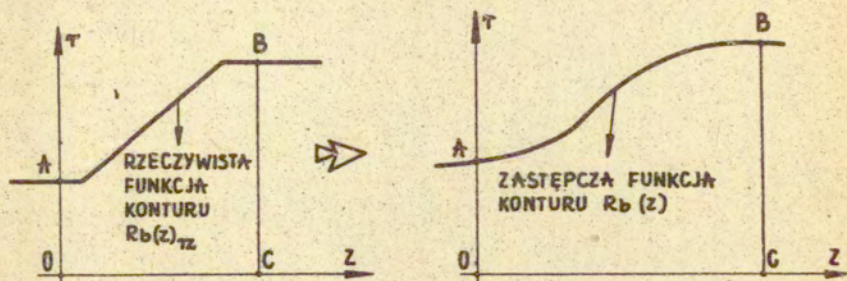
Funkcja $\phi_1(\tau, z)$ jest tą częścią wydatku bezwymiarowego, który daje składowe osiowe prędkości V_z niezależne od współrzędnej τ . Wydatek $\phi_1(\tau, z)$ nazwiemy dlatego umownie jednorodnym



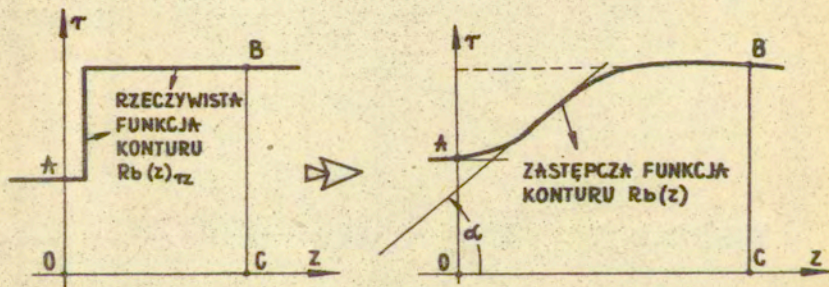
Rys. 4.2



Rys. 4.1



Rys. 4.3



Rys. 4.4

określmy go jako:

$$(4.13) \quad \phi_1(\tau, z) = \mathcal{I} \tau_n^2$$

Funkcja $\phi_1(\tau, z)$ daje następujące kinematycznie dopuszczalne pola prędkości przemieszczeń otrzymane z wzorów (2.3.5) i (2.3.6):

$$(4.14) \quad V_{\tau}^1 = -V_0 R_0^2 \frac{\tau}{R_b^3(z)} \frac{dR_b(z)}{dz},$$

$$(4.15) \quad V_z^1 = -V_0 R_0^2 \frac{1}{R_b(z)}$$

Funkcja $\phi_1(\tau, z)$ jest jednoznaczna, ciągła i n -krotnie różniczkowalna w **OABC** (rys.4.1). Charakter przepływu jednorodnego ilustrują rys.: 3.7., 4.1., 4.2. Linie ciągłe, poziome $\tau_n^2 = \text{const.}$ na rys.4.1. i 4.2. są odwzorowaniem linii prądu z płaszczyzny τ - Z odpowiadających wydatkowi jednorodnemu $\phi_1(\tau, z)$. Linia przerywana τ_p na rys.4.1. i 4.2. jest odwzorowaniem linii prądu z fizycznego pola **OABC**, której odpowiada funkcja prądu $\phi(\tau, z)$ w postaci (4.12).

Główny udział w opisie niejednorodności odkształceń w polu pąknięcia plastycznego **OABC** (rys.4.1 i 4.2) reprezentuje w (4.12) człon $\delta\phi(\tau, z)$. Funkcję $\delta\phi(\tau, z)$ nazwiemy niejednorodną częścią wydatku przepływu plastycznego. Ze względu na kinematyczną dopuszczalność funkcji (4.12) wyrażenie $\delta\phi(\tau, z)$ musi przyjmować wartości zerowe na osi symetrii **DC**, konturze matrycy **AB** oraz liniach **AC** i **CB** (rys.4.1).

Funkcja $\delta\phi(r,z)$ musi być z założenia ciągła i n-krotnie różniczkowalna względem „ r ” i „ z ” w każdym punkcie dziedziny **OABC** (rys.4.1). W świetle tych założeń funkcja $\delta\phi(r,z)$ spełnia w **OABC** warunki Dirichleta. Można więc zaprojektować jej kształt w postaci podwójnego, zbieżnego szeregu Fouriera. Jest interesującym, że analogiczny wniosek wysunięto z obserwacji doświadczalnych przebiegów tej wielkości pokazanych w rozdziale trzecim. Konstrukcja $\delta\phi(r,z)$ jest bardzo wrażliwa na proces różniczkowania. Można otrzymać dobrą zgodność doświadczalnych i teoretycznych przebiegów wartości funkcji $\delta\phi(r,z)$ w polu **OABC**, ale jakościowo odbiegające od rzeczywistych rozkłady pól prędkości przemieszczeń i odkształceń. Ta czułość na proces różniczkowania wymaga szczególnego połączenia ogólnych wymagań od konstrukcji $\delta\phi(r,z)$ stawianych równaniem (4.4) z jednoczesnym uwzględnieniem jej rzeczywistego kształtu opisanego w rozdziale trzecim.

Uwzględniając to proponujemy aproksymację $\delta\phi(r,z)$ w postaci wyrażenia analitycznego, które jest sumą dwóch różnych, zbieżnych szeregów, separowalnych względem zmiennej „ z ”. Funkcja $\delta\phi(r,z)$ ma postać:

$$(4.16) \quad \delta\phi(r,z) = \delta\phi_B(r,z) + \delta\phi_M(r,z), \quad \text{gdzie}$$

$$(4.17) \quad \delta\phi_B(r,z) = A_1(z)\sin\pi r_n^2 + A_2(z)\sin 2\pi r_n^2 + \dots + A_k(z)\sin k\pi r_n^2,$$

$$(4.18) \quad \delta\phi_M(\tau, z) = \alpha_1(z) \left[\sin\pi\tau_n^2 + \frac{1}{2} \sin 2\pi\tau_n^2 \right] + \\ + \alpha_2(z) \left[\frac{1}{2} \sin 2\pi\tau_n^2 + \frac{1}{3} \sin 3\pi\tau_n^2 \right] + \\ + \dots + \alpha_k(z) \left[\frac{1}{k} \sin k\pi\tau_n^2 + \frac{1}{k+1} \sin(k+1)\pi\tau_n^2 \right].$$

Podstawiając: (4.13), (4.16), (4.17) i (4.18) do (4.12) otrzymujemy:

$$(4.19) \quad \phi(\tau, z) = \pi\tau_n^2 + \sum_{k=1}^n A_k(z) \sin k\pi\tau_n^2 + \\ + \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \left[\frac{1}{k} \sin k\pi\tau_n^2 + \frac{1}{k+1} \sin(k+1)\pi\tau_n^2 \right].$$

Niech dalej szereg $\phi_B(\tau, z)$ oznacza sumę wyrażen (4.13) i (4.17)

$$(4.20) \quad \phi_B(\tau, z) = \pi\tau_n^2 + \sum_{k=1}^n A_k(z) \sin k\pi\tau_n^2.$$

Wtedy wyrażenie na teoretyczną funkcję prądu $\phi(\tau, z)$ przyjmuje formę:

$$(4.21) \quad \phi(\tau, z) = \phi_B(\tau, z) + \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \left[\frac{1}{k} \sin k\pi\tau_n^2 + \frac{1}{k+1} \sin(k+1)\pi\tau_n^2 \right].$$

Funkcja $\phi(\tau, z)$ zawiera współczynniki $A_k(z)$ i $\alpha_k(z)$ zależne tylko od współrzędnej „z”. Wyrazy z funkcjami $\sin k\pi\tau_n^2$ zależą od „T” i „z”. Liczba k numeruje wyrazy szeregów: (4.17), (4.18) i należy do zbioru liczb naturalnych, T_n wyznaczamy z (3.1) (str. 58).

Funkcja $\phi_B(\tau, z)$ w (4.21) jest znana z założenia i opisuje dane brzegowe odnośnie tarcia. Naprężenia tarcia będą wte-

dy funkcjami wyrażonymi wielkościami kinematycznymi i danymi materiałowymi. Zatem funkcje $A_k(z)$ w (4.21) można wyznaczyć z określonego związku na tarcie. Funkcja $\Phi_B(\tau, z)$ może być też wzięta bezpośrednio z doświadczeń pokazanych w rozdziale trzecim.

Druga część funkcji prądu tj. szereg $\delta\Phi_M(\tau, z)$ zawiera nieznane funkcje $Q_k(z)$, które wyznaczamy iteracyjnie z równania stanu plastycznego (4.4) przy ustalonej współrzędnej τ'' na linii konturu matrycy tj. $\tau = R_B(z)$ co odpowiada $\tau_n = 1$. Ten sposób wyznaczania nieznanymi funkcji $Q_k(z)$ wynika z własności konstrukcji wyrażenia na $\Phi(\tau, z)$, które jest szeregiem separowalnym względem zmiennej z' . Jednocześnie proponowana konstrukcja $\Phi(\tau, z)$ sprawia, że funkcja $\delta\Phi_M(\tau, z)$, jej pierwsze i drugie pochodne względem τ'' , z' znikają w związkach określających naprężenia tarcia na linii konturu matrycy AB w $\tau = R_B(z)$ ($\tau_n = 1$). Naprężenia tarcia są oprócz danych materiałowych zależne tylko od wartości $\Phi_B(\tau, z)$ oraz jej pierwszych i drugich pochodnych względem zmiennych: τ, z .

Naprężenia tarcia muszą być równe naprężeniom stycznym na powierzchni kontaktu materiału z matrycą w $\tau_n = 1$. Szczegółowe wyrażenia określające naprężenia styczne τ_n w $\tau_n = 1$ podano w następnym punkcie. Funkcja $\Phi_B(\tau, z)$ może być w tym wypadku określona jako doświadczalny rozkład wydatku przepływu w obszarze uplastycznienia. Rozkład doświadczalny $\Phi_B(\tau, z)$ określa jednoznacznie przebieg naprężeń stycznych τ_n wzdłuż konturu matrycy. Jest to podstawowa zaleta proponowanej konstrukcji $\Phi(\tau, z)$ przedstawionej funkcją (4.21). Zatem funkcje $\Phi_B(\tau, z)$ możemy wziąć z doświadczeń realizowanych w rozdziale trzecim.

Będą one opisywać rzeczywiste warunki brzegowe, które możemy wyrazić na przykład prędkościami przemieszczeń lub związkami na τ_n wynikającym z teorii plastyczności płynięcia.

Wyrażenie (4.19) na bezwymiarową funkcję $\Phi(\tau, z)$ można po przekształceniach sprowadzić do następującej postaci:

$$\Phi(\tau, z) = \pi \tau_n^2 + A_1^{\dagger}(z) \sin \pi \tau_n^2 + A_2^{\dagger}(z) \sin 2\pi \tau_n^2 + \dots + A_k^{\dagger}(z) \sin k\pi \tau_n^2,$$

(4.22) gdzie na przykład:

$$A_1^{\dagger}(z) = A_1(z) + a_1(z),$$

$$A_2^{\dagger}(z) = A_2(z) + \frac{1}{2} [a_1(z) + a_2(z)], \text{ i. t. d.}$$

Jak widzimy, wyrażenie (4.22) aproksymujące teoretyczną funkcję prądu $\Phi(\tau, z)$ jest podobne jak przy opisie jej doświadczalnych przebiegów. Różnica dotyczy przebiegów współczynników $A_k(z)$. W doświadczeniu funkcje $A_k(z)$ określamy z pomiarów współrzędnych linii prądu. W teorii przebiegi tych funkcji wyznaczamy z równania stanu plastycznego (4.4) w $\tau_n = 1$ i oznaczamy je przez $A_k^{\dagger}(z)$. W wypadku zadania $\Phi(\tau, z)$ w (4.21) doświadczeniem różnice pomiędzy $A_k^{\dagger}(z)$ i $A_k(z)$ będą ilościową oceną odstępstwa rzeczywistej funkcji prądu od teoretycznej otrzymanej z teorii plastycznego płynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału.

Proponowana konstrukcja $\Phi(\tau, z)$ w równoważnych formach (4.19) i (4.22) ma spełniać ściśle wszystkie kinematyczne warunki brzegowe. Przedyskutujemy teraz szczegółowo warunki które muszą spełniać wtedy funkcje $A_k^{\dagger}(z)$ z (4.22).

Funkcję $\Phi(r, z)$ w formie (4.22) ograniczymy do trzech wyrazów z funkcjami $A_1^t(z)$, $A_2^t(z)$, $A_3^t(z)$. Wtedy pola prędkości przemieszczeń i odkształceń obliczone zależnościami: (2.3.5), (2.3.6), (2.3.7) dla (4.22) mają następującą postać:

$$(4.23) \quad V_r = \left\{ \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{dA_1^t}{dz} \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2} + \frac{dA_2^t}{dz} \sin 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + \frac{dA_3^t}{dz} \sin 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] - \frac{r}{R_b^3} \frac{dR_b}{dz} \left[1 + A_1^t \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2A_2^t \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3A_3^t \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] \right\} R_0^2 V_0,$$

$$(4.24) \quad V_z = -\frac{1}{R_b^2} \left[1 + A_1^t \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2A_2^t \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3A_3^t \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] R_0^2 V_0,$$

$$(4.25) \quad \dot{\epsilon}_r = \left\{ -\frac{1}{2\pi r^2} \left[\frac{dA_1^t}{dz} \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2} + \frac{dA_2^t}{dz} \sin 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + \frac{dA_3^t}{dz} \sin 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] - \frac{1}{R_b^3} \frac{dR_b}{dz} \left[1 + A_1^t \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2A_2^t \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3A_3^t \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] + \frac{1}{R_b^2} \left[\frac{dA_1^t}{dz} \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2 \frac{dA_2^t}{dz} \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3 \frac{dA_3^t}{dz} \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] + \frac{2\pi r^2}{R_b^5} \frac{dR_b}{dz} \left[A_1^t \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 4A_2^t \sin 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 9A_3^t \sin 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] \right\} R_0^2 V_0,$$

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_z = & \left\{ \frac{2}{R_b^3} \frac{dR_b}{dz} \left[1 + A_1^t \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2A_2^t \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3A_3^t \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] - \right. \\
 (4.26) \quad & \left. - \frac{1}{R_b^2} \left[\frac{dA_1^t}{dz} \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2 \frac{dA_2^t}{dz} \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3 \frac{dA_3^t}{dz} \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{dR_b}{dz} \frac{2\pi r^2}{R_b^5} \left[A_1^t \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 4A_2^t \sin 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 9A_3^t \sin 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] \right\} R_b^2 V_b,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_\theta = & \left\{ - \frac{1}{R_b^3} \frac{dR_b}{dz} \left[1 + A_1^t \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2A_2^t \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3A_3^t \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] + \right. \\
 (4.27) \quad & \left. + \left[\frac{dA_1^t}{dz} \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2} + \frac{dA_2^t}{dz} \sin 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + \frac{dA_3^t}{dz} \sin 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] \frac{1}{2\pi r^2} \right\} R_b^2 V_b,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi}_{rz} = & \left\{ 3\pi \frac{1}{R_b^4} \left(\frac{dR_b}{dz} \right)^2 \left[1 + A_1^t \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2A_2^t \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3A_3^t \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] - \right. \\
 (4.28) \quad & \left. - \pi \frac{1}{R_b^3} \frac{d^2 R_b}{dz^2} \left[1 + A_1^t \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2A_2^t \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3A_3^t \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{d^2 A_1^t}{dz^2} \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2} + \frac{d^2 A_2^t}{dz^2} \sin 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + \frac{d^2 A_3^t}{dz^2} \sin 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] - \right. \\
 & \left. - 2\pi \frac{1}{R_b^3} \frac{dR_b}{dz} \left[\frac{dA_1^t}{dz} \cos \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 2 \frac{dA_2^t}{dz} \cos 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 3 \frac{dA_3^t}{dz} \cos 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] - \right. \\
 & \left. - 2\pi \frac{3}{R_b^5} \left(\frac{dR_b}{dz} \right)^2 \left[A_1^t \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 4A_2^t \sin 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 9A_3^t \sin 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] + \right. \\
 & \left. + 2\pi \frac{1}{R_b^4} \left[A_1^t \sin \pi \frac{r^2}{R_b^2} + 4A_2^t \sin 2\pi \frac{r^2}{R_b^2} + 9A_3^t \sin 3\pi \frac{r^2}{R_b^2} \right] \right\} R_b^2 V_b.
 \end{aligned}$$

Funkcja prądu w postaciach: (4.19), (4.21), (4.22) przyjmuje wartości zerowe na osi symetrii $T_n = 0$. Na linii konturu matrycy $T_n = 1$ funkcja $\phi(\tau, z) = \Pi$. Jest to zgodne z interpretacją $\phi(\tau, z)$ jako bezwymiarowego wydatku przepływu osiowo-symetrycznego. Szereg (4.22) będzie zbieżny w dowolnym punkcie pola $OABC$ (rys. 4.1.), jeżeli wartości funkcji $A_k^t(z)$ będą malały w kierunku wzrostu k . Analizując wyrażenia: (4.23), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27), (4.28) oraz uwzględniając równanie (4.4) widzimy, że ciągłość i różniczkowalność wielkości: $V_r, V_z, \dot{e}_r, \dot{e}_z, \dot{e}_\theta, \dot{\delta}_{rz}$ w całym polu $OABC$ (rys. 1) wymaga od funkcji $A_k^t(z)$ jednoznaczności, ciągłości i n -krotnej różniczkowalności względem zmiennej „ z ”. Na liniach ograniczających pole uplastycznione $OABC$ (rys. 4.1) z założenia o braku nieciągłości prędkości przemieszczeń i odkształceń w $z = 0$ i $z = z_0$ mamy następujące warunki brzegowe dla funkcji $A_k^t(z)$:

$$(4.29) \quad A_k^t(z) = \frac{dA_k^t(z)}{dz} = \frac{d^2A_k^t(z)}{dz^2} = 0.$$

Zatem uwzględniając związki (4.22) w punktach $z = 0$ i $z = z_0$ (rys. 4.1) obowiązują jednocześnie dwa założenia:

$$(4.30) \quad A_k(z) = \frac{dA_k(z)}{dz} = \frac{d^2A_k(z)}{dz^2},$$

$$a_k(z) = \frac{da_k(z)}{dz} = \frac{d^2a_k(z)}{dz^2}.$$

Funkcje: (4.23), (4.25), (4.27), (4.28) posiadają osobliwości na

osi symetrii, ale ich granice przy $\tau=0$ mają skończone wartości, które utożsamiamy dalej z wartościami tych funkcji. Dotyczy to również wyrażeń na pochodne wymienionych funkcji względem τ i z w punktach znajdujących się na osi symetrii ($\tau=0$).

Wyrażenie (4.16) lub (4.22) na funkcję $\phi(\tau, z)$ spełnia warunek zerowania się składowej normalnej prędkości V_n na powierzchni styku materiału z matrycą. Związek na V_n w $\tau_n=1$ ma postać

$$(4.31) \quad V_n = V_\tau \cos \delta_1 - V_z \sin \delta_1,$$

gdzie δ_1 na rys.4.4. jest kątem nachylenia stycznej w dowolnym punkcie linii konturu matrycy. Tangens tego kąta wyraża się jako

$$(4.32) \quad \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{dR_b(z)}{dz}.$$

Podstawiając (4.23), (4.24) i (4.32) do (4.31) w $\tau = R_b(z)$ otrzymujemy zerową wartość V_n . Zatem warunek nieprzenikalności materiału przez powierzchnię sztywnej matrycy jest spełniony.

Własności konstrukcji (4.19) na $\phi(\tau, z)$ oraz związków: (4.23), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27), (4.28) przy postulowanych wyżej założeniach umożliwiają tożsamościowe spełnienie się równania (4.4) w punktach leżących na osi symetrii.

Wykorzystanie funkcji $\phi(\tau, z)$ w proponowanej formie (4.21) wymaga jeszcze dodatkowej dyskusji sposobu określenia funkcji

$\Phi_B(r, z)$, która jak wspomniano reprezentuje opis warunków brzegowych odnośnie tarcia. Omawia to szczegółowo następny punkt.

4.4. Opis rzeczywistych warunków brzegowych odnośnie tarcia

Jak zaznaczono funkcja $\Phi_B(r, z)$, w rozważanych wyrażeniach (4.19) i (4.21), jest reprezentacją tej części bezwymiarowego wydatku przepływu, który jednoznacznie określa rozkład naprężeń stycznych τ_n na powierzchni kontaktu materiału z matrycą. Ilustruje to rys.4.5., na którym naprężenia styczne oznaczono jako τ_n , zaś naprężenia normalne przez σ_n .

W dalszych obliczeniach wykorzystano skrócony wariant wzoru (4.21) na $\Phi(r, z)$ tj.:

$$(4.33) \quad \Phi(r, z) = \pi \tau_n^2 + A_1(z) \sin \pi \tau_n^2 + A_2(z) \sin 2\pi \tau_n^2 + A_3(z) \sin 3\pi \tau_n^2 + \alpha(z) \left[\sin \pi \tau_n^2 + \frac{1}{2} \sin 2\pi \tau_n^2 \right].$$

Równoważna (4.33) forma na $\Phi(r, z)$ ma postać:

$$(4.34) \quad \Phi(r, z) = \pi \tau_n^2 + A_1^t(z) \sin \pi \tau_n^2 + A_2^t(z) \sin 2\pi \tau_n^2 + A_3^t(z) \sin 3\pi \tau_n^2,$$

gdzie:

$$(4.35) \quad A_1^{\dagger}(z) = A_1(z) + \alpha(z) \quad ,$$

$$(4.36) \quad A_2^{\dagger}(z) = A_2(z) + \frac{1}{2} \alpha(z) \quad ,$$

$$(4.37) \quad A_3^{\dagger}(z) = A_3(z) \quad .$$

Współczynniki $A_1(z), A_2(z), A_3(z)$ uważa się dalej za znane a związek na $\Phi_B^{\dagger}(\tau, z)$ przybiera znaną postać :

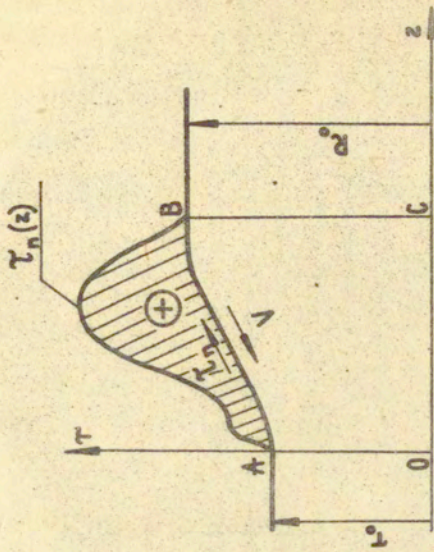
$$\Phi_B^{\dagger} = \tau \tau_n^2 + A_1(z) \sin \tau \tau_n^2 + A_2(z) \sin 2\tau \tau_n^2 + A_3(z) \sin 3\tau \tau_n^2 \quad .$$

Wzory (4.33) i (4.34) na $\Phi(\tau, z)$ spełniają ściśle wszystkie kinematyczne warunki zadania pod warunkiem spełnienia założeń onówionych w punkcie 4.3. Jediną niewiadomą w (4.33) jest funkcja $\alpha(z)$, której wyznaczeniu z równania (4.4) przy $\tau_n = 1$ poświęcimy następny punkt.

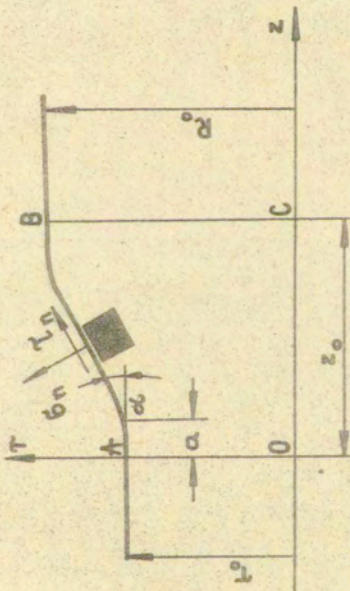
Przebieg $\tau_n(z)$ obrazujący rozkład naprężeń stycznych wzdłuż konturu matrycy (rys.4.6.) określimy warunkami równowagi materiału w $\tau_n = 1$ z zależności:

$$(4.38) \quad \tau_n^{\dot{}}(z) = \tau_{n2}(z) (\cos^2 \delta - \sin^2 \delta) + (\sigma_r - \sigma_z) \sin \delta \cos \delta \quad .$$

Związek (4.38), w którym δ (rys.4.5.) oznacza kąt rozwarcia stożka matrycy jest również słuszny dla konturu krzywoliniowego.



Rys. 4.6



Rys. 4.5

wego. Wtedy δ będzie kątem nachylenia stycznej w dowolnym punkcie konturu i jest określony zależnością (4.32). Po podstawieniu w $T_n=1$ do (4.38) związków prawa pąknięcia (2.3.12) otrzymujemy

$$(4.39) \quad \tau_n(z) \Big|_{T_n=1} = \frac{\delta_1(z)}{3} \frac{\dot{\delta}_{12}(z)}{\dot{\epsilon}_1(z)} \cos 2\delta + \frac{\delta_1(z)}{3} \frac{[\dot{\epsilon}_1(z) - \dot{\epsilon}_2(z)]}{2\dot{\epsilon}_2(z)} \sin 2\delta.$$

Funkcje: $\delta_1(z)$, $\dot{\delta}_{12}(z)$, $\dot{\epsilon}_1(z)$, $\dot{\epsilon}_2(z)$, $\dot{\epsilon}_3(z)$ na linii konturu w $T_n=1$ są zależne we wzorach: (4.25), (4.26), (4.27), (4.28) tylko od współczynników $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ występujących w wyrażeniu (4.20) na $\phi_B(\tau, z)$. Jest tak ponieważ funkcja (4.18) na $\delta\phi_M$ mająca w tym wypadku postać:

$$(4.40) \quad \delta\phi_M(\tau, z) = \alpha(z) \left[\sin^2 \pi\tau_n^2 + \frac{1}{2} \sin 2\pi\tau_n^2 \right]$$

oraz jej pochodne: $\delta\phi_M^T$, $\delta\phi_M^{TT}$, $\delta\phi_M^Z$, $\delta\phi_M^{ZZ}$, $\delta\phi_M^{TZ}$ w $T_n=1$ są równe zero. Natomiast wyższe od wymienionych pochodnych funkcji $\delta\phi_M(\tau, z)$ występujące w (4.4) w $T_n=1$ są różne od zera. Wynika to z własności funkcji

$$(4.41) \quad F(\tau, z) = \sin^2 \pi\tau_n^2 + \frac{1}{2} \sin 2\pi\tau_n^2,$$

która występuje w (4.40). Pochodne funkcji $F(\tau, z)$ w $T_n=1$ tj. F^T , F^{TT} , F^Z , F^{ZZ} , F^{TZ} są równe zero. Wyższe pochodne funkcji $F(\tau, z)$ w $T_n=1$ są różne od zera.

Powyższa, najważniejsza własność proponowanej konstrukcji na $\phi(\tau, z)$ umożliwia jasno wydzielić jej składnik $\phi_B(\tau, z)$ jako jedyną część wydatku opisującą funkcję $T_n(z)$. Zatem

funkcja $T_n(z)$ opisująca przebieg naprężeń stycznych wzdłuż linii konturu matrycy zależy od danych materiałowych i pochodnych: ϕ_B^r , ϕ_B^{rr} , ϕ_B^z , ϕ_B^{zz} , ϕ_B^{rz} w $T_n=1$. Funkcja $\alpha(z)$ nie występuje w zależności (4.39) na $T_n(z)$. Funkcja $\alpha(z)$ wyznaczona dalej z (4.4) nie opisuje efektów tarcia na powierzchni kontaktu materiału z matrycą. Opis naprężeń stycznych na powierzchni kontaktu w prezentowanym podejściu jest realizowany wyłącznie za pomocą konstrukcji funkcji $\phi_B(r,z)$ i jej wymienianych pochodnych w $T_n=1$.

Jakościowy przebieg $T_n(z)$ pokazano na rys.4.6. W punktach A ($z=0$) i B ($z=z_0$) naprężenia T_n są nieokreślone ze względu na nieoznaczoność wyrażeń:

$$(4.42) \quad \frac{\dot{\gamma}_{rz}}{\dot{\epsilon}_i}, \quad \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z}{\dot{\epsilon}_i}$$

w tych punktach. Wynika to z założeń odnośnie funkcji $A_k(z)$ i $\alpha_k(z)$ omawianych w punkcie 4.3. Znak naprężeń $T_n(z)$ w każdym punkcie $z \in [0, z_0]$ jest dodatni (rys.4.6.), ponieważ kierunek wektora naprężeń tarcia jest przeciwny do kierunku wektora prędkości przemieszczeń \vec{V} .

Jak wiadomo jedną z podstawowych trudności przy rozwiązywaniu zadań osiowo-symetrycznych z mieszanymi warunkami brzegowymi jest brak danych o związku naprężeń tarcia z naprężeniami normalnymi σ_n , granicą plastyczności σ_i , współczynnikiem tarcia μ , temperaturą T itp. Postulowane w literaturze [42,60,62,66] zależności na tarcie w formach:

$$(4.43) \quad T_n = \mu \sigma_i,$$

$$(4.44) \quad \tau_n = \mu \delta_n$$

są przyjmowane z konieczności, aby uzyskać jakiekolwiek przybliżone rozwiązania. Jednak związki (4.43) i (4.44) jakościowo odbiegają od rzeczywistego stanu [34,35,36,37]. Brak jest w dalszym ciągu efektywnej metodyki badań zjawisk związanych z tarciem w obróbce plastycznej. Metodyka taka powinna tak formułować wyniki badań, aby były one bezpośrednio wykorzystane do rozwiązywania zadań obróbki plastycznej opartej na teorii plastyczności. Ze względu na stosunkowo największą dostępność i dokładność pomiarów wielkości kinematycznych wskazanym jest formułować opis zjawisk na powierzchni styku za pomocą pojęć kinematyki plastycznego płynięcia. Wtedy naprężenia τ_n z rys.4.5. i 4.6. można utożsamić z naprężeniami tarcia, które wyznaczamy ze związku (4.39) i prawa płynięcia (2.3.12).

Kierując się przedstawionymi przesłankami proponuje się dalej określenie rzeczywistych warunków brzegowych w procesie wyciskania za pomocą doświadczalnego rozkładu wydatku przepływu w polu $OABC$ (rys.4.5.) tj.: funkcją $\phi_B(\tau, z)$ oraz jej pochodnymi: $\phi_B^T(\tau, z)$, $\phi_B^{\tau\tau}(\tau, z)$, $\phi_B^{\tau z}(\tau, z)$, $\phi_B^z(\tau, z)$, $\phi_B^{zz}(\tau, z)$ na linii konturu w $\tau = R_B(z)$. Funkcje $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ w $\phi_B(\tau, z)$ określonym wzorem (4.18) oraz ich pierwsze i drugie pochodne względem „ z ” mogą być wyznaczone z pomiarów współrzędnych: τ^a , z^a położenia doświadczalnych linii prądu w obszarze uplastycznienia wyciskanej próbki. Szczegółowy opis i wyniki takiego postępowania pokazano w rozdziale trzecim. Znajomość doświadczalnych funkcji $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$, ...

oraz ich pierwszych i drugich pochodnych dostarcza informacji o rzeczywistych przebiegach prędkości i odkształceń na powierzchni styku materiału z matrycą. Dane brzegowe mogą być wyrażone różnymi funkcjami zależnymi od: $A_k(z)$, dA_k/dz , d^2A_k/dz^2 . Do obliczeń naprężeń stycznych $T_n(z)$ możemy wykorzystać wzór (4.39).

Wyznaczenie na drodze teoretycznej funkcji $A_1(z), A_2(z), \dots, A_k(z)$ spełniających założone z góry przebiegi $T_n(z)$ na przykład w postaci (4.43) jest również możliwe. Można to uzyskać na drodze iteracyjnej zakładając wcześniej współczynnik tarcia μ i postać krzywej umocnienia. W tym celu porównujemy ze sobą wyrażenia (4.39) i (4.43). Warunki brzegowe i sposób przewidywania funkcji $A_k(z)$ muszą zapewniać kinematyczną dopuszczalność dla funkcji prądu $\Phi_B(\tau, z)$. Jednak jak podkreślono wcześniej związek (4.43) jest bardzo zgrubną oceną na powierzchni styku materiału z matrycą, stąd otrzymane z niego przybliżone funkcje $A_k(z)$ dadzą mało dokładny obraz przebiegu $\Phi_B(\tau, z)$.

W przypadku wyciskania stopu PA2 na zimno w warunkach opisanych w rozdziale trzecim przebiegi doświadczalnych funkcji: $A_1(z), A_2(z), A_3(z), \dots, A_k(z)$ można aproksymować następującymi empirycznymi wzorami:

$$(4.45) \quad A_1(z) = R \sin \pi \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{R+M+1},$$

$$(4.46) \quad A_2(z) = \frac{R}{4} \sin^2 2\pi \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{R+M+1},$$

$$(4.47) \quad A_3(z) = \frac{R}{9} \sin^3 3\pi \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{R+M+1},$$

$$(4.48) \quad H_k(z) = \frac{R}{k^2} \sin^k k \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{R+\mu+1}$$

We wzorach tych R jest stopniem redukcji określonym wzorem (2.17). Wielkość R przybiera wartości z przedziału $(0, 1)$. Współczynnik tarcia $\mu \in [0, 0,5]$. Zasięg obszaru uplastycznionego określamy wielkością z_0 (rys.4.5.), która wynosi:

$$(4.49) \quad z_0 = a + \frac{R_0}{\sin \alpha} - \frac{\tau}{\operatorname{tg} \alpha},$$

gdzie $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$,

$$(4.50) \quad a = \mu R (R_0 - \tau_0).$$

Znaczenie parametrów geometrycznych: a, τ_0, R_0, α ilustruje rys.4.5.

Wzory: (4.45), (4.46), (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) mogą być przydatne do przybliżonej analizy pól prędkości, odkształceń i naprężeń w procesach wyciskania stopów aluminium na zimno w zakresie redukcji $R \in [0,35, 0,85]$ i małego tarcia. Po wstawieniu tych wzorów do wyrażenia (4.20) na $\phi_B(\tau, z)$ funkcja ta spełnia wszystkie warunki kinematyczne. Jednocześnie otrzymane z niej naprężenia styczne $T_n(z)$ określone przez (4.39) są dodatnie. Nawet uproszczona do jednego wyrazu funkcja

$$(4.51) \quad \phi_B(\tau, z) = \tau \tau_n^2 + R \sin^k \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{R+\mu+1} \sin^k \tau \tau_n^2$$

daje bardzo zbliżony do rzeczywistych rozkład prędkości przemieszczeń [114]. Siły obliczone z oceny górnej dla pól prędkości odkształceń otrzymanych z (4.51) są mniejsze od analogicznych sił otrzymanych z powszechnie stosowanego biegunowego schematu płynięcia plastycznego. Przyjmując, że $\Phi = \Phi_B(\tau, z)$ możemy obliczyć dla (4.51) przybliżony rozkład składowej osiowej naprężenia $\sigma_z(\tau, z)$. W pracy [114] wyznaczono jej przebieg wzdłuż osi symetrii i stwierdzono istnienie naprężeń rozciągających w materiale w rejonie oczka matrycy. Potwierdza to poprawność uproszczeń wprowadzonych w (4.51). Jednocześnie analityczna postać wzoru $\Phi(\tau, z)$ w formie (4.51) zapewnia efektywność i łatwość realizacji obliczeń.

Nie będziemy tu rozwijać szerzej, bardzo ważnego zresztą, tematu uproszczonych metod obliczeń procesów wyciskania. Zwracamy jedynie uwagę na możliwość różnych wariantów uproszczeń funkcji $\Phi(\tau, z)$ pokazanej w równoważnych postaciach (4.19) i (4.21). Uproszczenia te i wyniki z tego otrzymane będą szerzej omówione w pracy [114]. Kończąc wątek metod przybliżonych należy zaznaczyć, że proponowane empiryczne wzory: (4.45), (4.46), (4.47), (4.48) na $A_k(z)$ dają analityczną postać wzoru na $\Phi(\tau, z)$ na przykład w formie (4.51). Pozwala to na wstępną analizę pól prędkości, odkształceń i naprężeń w materiale poddanym wyciskaniu na zimno przez matrycę z dowolnym profilem. Możliwości te oparte na omawianych wzorach empirycznych są nowym elementem uproszczonej teorii procesów wyciskania metali na zimno, która dotychczas opiera się na biegunowym schemacie płynięcia plastycznego.

W dalszej części wyrażenie na $\Phi_B(\tau, z)$, wzięte jako

doświadczalny rozkład funkcji prądu, wykorzystamy do sformułowania warunków brzegowych przy rozwiązywaniu równania (4.4), z którego wyznaczmy nieznaną funkcję $Q(z)$ a następnie $\Phi(\tau, z)$ oraz pola prędkości i odkształcenia w polu uplastycznienia **DABC** (rys.4.5).

4.5. Wyznaczanie funkcji prądu

Rozpatrzmy teraz metodę i wyniki obliczeń funkcji prądu oraz pól prędkości przemieszczeń i odkształceń. W tym celu za rozwiązanie równania (4.4) przyjmujemy funkcję $\Phi(\tau, z)$ w założonej postaci (4.33). Do obliczeń przyjmujemy doświadczalne przebiegi funkcji $A_1(z), A_2(z), A_3(z)$ występujących we wzorze (4.33). Jak już wspomniano funkcje te określają jednoznacznie przebiegi pól prędkości i naprężenia styczne na powierzchni kontaktu materiału z matrycą. Przyjęcie doświadczalnych przebiegów funkcji $A_1(z), A_2(z), A_3(z)$ we wzorze (4.33) oznacza, że poszukujemy przybliżonego rozwiązania teoretycznego problemu osiowo-symetrycznego z rzeczywistymi warunkami brzegowymi.

Uwzględniając rzeczywiste dane brzegowe wyznaczamy przebieg nieznaną w wyrażeniu na $\Phi(\tau, z)$ (4.33) funkcji $Q(z)$ z równania (4.4) przy ustalonej wartości współrzędnej τ' . Z obliczeniowego punktu widzenia najkorzystniej wyznacza się funkcję $Q(z)$ z równania (4.4) przy wartości $\tau = R_b(z)$ tj. $\tau_h = 1$. Odpowiada to znanej linii konturu matrycy, która jest jednocześnie znaną skrajną linią prądu w obszarze upla-

stycznienia. Powyższe założenie odnośnie sposobu ustalenia wartości τ umożliwia uwzględnienie wzmocnienia izotropowego przy obliczaniu $\alpha(z)$, ponieważ funkcja $\alpha(z)$ zależy również od intensywności naprężeń do obliczenia której według wzoru (2\3.22) niezbędna jest znajomość kształtu linii prądu.

Celem przedstawienia procedury wyznaczania $\phi(\tau, z)$, poprzez obliczenia przebiegów funkcji $\alpha(z)$ z równania (4.4) w $\tau_n = 1$, przekształcimy związek (4.4) do następującej postaci:

$$(4.52) \quad \begin{aligned} & \phi^{\tau\tau\tau\tau} + \phi^{\tau\tau z z} + \phi^{z z z z} - \frac{2}{\tau} \phi^{\tau\tau\tau} - \frac{2}{\tau} \phi^{\tau z z} = \\ & = f - \frac{3}{\tau^2} \phi^{\tau\tau} + \frac{3}{\tau^3} \phi^{\tau} \end{aligned}$$

W dalszym ciągu górne indeksy przy ϕ oznaczają kilkakrotne różniczkowanie po odpowiednich zmiennych, natomiast f jest funkcją utożsamiającą się z prawą stroną równania (4.4). Z konstrukcji funkcji prądu $\phi(\tau, z)$ w postaci (4.33) wynikają następujące związki na przebiegi jej pochodnych wzdłuż linii konturu matrycy tj. przy $\tau_n = 1$:

$$(4.53) \quad \phi^{\tau} = \phi_B^{\tau},$$

$$(4.54) \quad \phi^{\tau\tau} = \phi_B^{\tau\tau},$$

$$(4.55) \quad \phi^{\tau z} = \phi_B^{\tau z},$$

$$(4.56) \quad \phi^z = \phi_B^z, \quad ,$$

$$(4.57) \quad \phi^{zz} = \phi_B^{zz}, \quad ,$$

$$(4.58) \quad \phi^{\pi\pi} = \phi_B^{\pi\pi} + \alpha(z) F_{(\tau,z)}^{\pi\pi}, \quad ,$$

$$(4.59) \quad \phi^{\pi\pi\pi} = \phi_B^{\pi\pi\pi} + \alpha(z) F_{(\tau,z)}^{\pi\pi\pi}, \quad ,$$

$$(4.60) \quad \phi^{zzz} = \phi_B^{zzz} + 4\alpha^z(z) F_{(\tau,z)}^{zzz} + \alpha(z) F_{(\tau,z)}^{zzzz}, \quad ,$$

$$(4.61) \quad \phi^{\pi\pi z} = \phi_B^{\pi\pi z} + 2\alpha^z(z) F_{(\tau,z)}^{\pi\pi z} + \alpha(z) F_{(\tau,z)}^{\pi\pi z z}, \quad ,$$

$$(4.62) \quad \phi^{\pi z} = \phi_B^{\pi z} + \alpha(z) F_{(\tau,z)}^{\pi z}, \quad ,$$

$$(4.63) \quad \phi^{\pi z} = \phi_B^{\pi z} + \alpha(z) F_{(\tau,z)}^{\pi z}.$$

Pochodne (4.55) do (4.63) występują w równaniu (4.52) przy

$\tau_n = 1$. Występująca w związkach (4.53) - (4.63) funkcja

$\phi_B(\tau, z)$ jest określona przez (4.20). Funkcję $F(\tau, z)$ po-

daje wzór (4.41). Zatem funkcje $\phi_B(\tau, z)$ i $R(\tau, z)$ są znane. Niewia-

dome funkcje to $\alpha(z)$ i jej pochodna względem zmiennej „z”

tj.: $\alpha^z(z)$. Dzięki odpowiedniej konstrukcji wyrażenia (4.33)

na $\phi(\tau, z)$ udało nam się ograniczyć ilość pochodnych niezna-

nej funkcji $Q(z)$ w (4.52) tylko do jednej. W związku z tym po podstawieniu związków: (4.53 \neq 4.63) do równania (4.52) w $T_B = 1$ otrzymujemy silnie nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu względem poszukiwanej funkcji $Q(z)$. Warunki brzegowe dla $Q(z)$ wynikają z wymagań dla $\phi(r, z)$, które omówiono szczegółowo w punkcie 4.3. Nieliniowość równania (4.52) względem $Q(z)$ wynika z nieliniowości funkcji f względem poszukiwanej niewiadomej. Teoria rozwiązywania nieliniowego równania (4.52) jest nieznana. Przebiegi funkcji $Q(z)$ będziemy w związku z tym poszukiwać, stosowaną w takich wypadkach metodą kolejnych iteracji.

Po podstawieniu do (4.52) związków od (4.53) do (4.63) i przekształceniu lewa strona równania (4.52) zależy tylko od $Q(z)$ i $Q'(z)$, natomiast prawa strona (4.52) zależy od f i pochodnych funkcji ϕ_B . Przekształcając dalej (4.52) otrzymujemy następującą analityczną postać na przebieg nieznanej funkcji $Q(z)$:

$$\begin{aligned}
 Q(z) = & \frac{f - \phi_B^{TTTT} - \phi_B^{TTZZ} - 2\alpha^2 \omega F^{TZ} - \phi_B^{ZZZZ} - 4\alpha^2 F^{ZZ}}{F^{TTTT} + F^{TTZZ} + F^{ZZZZ} - \frac{2}{R_B(z)} [F^{TTTT} + F^{TTZZ}]} + \\
 (4.64) & + \frac{\frac{1}{R_B(z)} [2\phi_B^{TTZ} + 2\phi_B^{TTT} + \frac{3}{R_B^2(z)} \phi_B^T - \frac{3}{R_B^2(z)} \phi_B^T - \frac{3}{R_B(z)} \phi_B^{TT}]}{F^{TTTT} + F^{TTZZ} + F^{ZZZZ} - \frac{2}{R_B(z)} [F^{TTTT} + F^{TTZZ}]}
 \end{aligned}$$

Prawa strona wzoru (4.64) zależy od Φ_B , $a^z(z)$ i f . Funkcja f jako prawa strona wyrażenia (4.4) zależy nieliniowo od $a(z)$ i $a^z(z)$ oraz danych brzegowych podanych przez Φ_B . Jednocześnie funkcja f zależy nieliniowo od danych materiałowych wyrażonych przez funkcję $m[\epsilon_i(\tau, z), \dot{\epsilon}_i(\tau, z)]$ oznaczoną wzorem (4.5). Zatem funkcja $a(z)$ uwzględnia rzeczywiste warunki brzegowe i wzmocnienie izotropowe. Uwzględnienie wzmocnienia chociażby w najprostszej formie tj. jako wzmocnienia izotropowego jest tu konieczne, ponieważ rzeczywiste dane brzegowe zawierają już efekty od wzmocnienia materiału. Wydzielenie efektów wzmocnienia z doświadczalnego przebiegu doświadczalnej funkcji prądu $\Phi_B(\tau, z)$ oraz utożsamienie ich z jakimś konkretnym prawem wzmocnienia jest niemożliwe. Uwzględniając wyniki doświadczeń z rozdziału trzeciego uważamy, że wzmocnienie w procesie wyciskania na zimno jest istotnym czynnikiem i na charakter izotropowy. Poprawność takiego założenia będą ilustrowały różnice w przebiegach doświadczalnych i teoretycznych pól prędkości otrzymanych z rozwiązania (4.52) przy rzeczywistych warunkach brzegowych zadanych funkcją $\Phi_B(\tau, z)$ i jej pochodnymi względem T i z .

Funkcja f jako prawa strona równania (4.4) jest nieokreślona w punktach $z=0$ i $z=z_0$, ponieważ w tych punktach jest ona wyrażeniem nieoznaczonym typu zero dzielone przez zero. Stąd w punktach $z=0$ i z_0 funkcja $a(z)$ obliczana z (4.64) będzie również nieokreślona. Jednak warunek kinematycznej dopuszczalności $\Phi(\tau, z)$ wraz z założeniami nieciągłości pól prędkości przemieszczeń i odkształceń

na liniach ograniczających pole uplastycznione wymaga (punkt 4.3), aby $a(z)$ oraz jej pochodne: da/dz , d^2a/dz^2 w punktach $z=0$ i $z=z_0$ były z założenia równe zero. Kształt obszaru uplastycznionego przyjmujemy taki jak na rys.4.3. Wymiary a i z_0 wzięto z doświadczalnych obrazów linii prądu, którym odpowiada doświadczalna funkcja $\phi(\tau, z)$ opisująca warunki brzegowe.

Ustalamy więc, że wartości funkcji $a(z)$ oraz jej pochodnych występujących w równaniu (4.4) są równe zero w punktach $z=0$ i $z=z_0$. W pozostałych wszystkich punktach odcinka OC (rys.4.5) funkcję $a(z)$ i jej pochodne określimy ze wzoru (4.64). Spełniając dalej warunki nałożone na kształt konturu matrycy zaokrąglamy jego naroża, żeby $R_b(z)$ była różniczkowalna na całym odcinku OC (rys.4.5).

W pierwszym kroku iteracji przy wyznaczaniu $a^I(z)$ do prawej strony (4.64) wstawiamy znane z założenia funkcje: $R_b(z)$, $\phi_B(\tau, z)$ i ich pochodne. Funkcja $a(z)$ i jej pochodne, które występują w funkcji f przyjmują z założenia w pierwszym kroku wartości zerowe w każdym punkcie $z \in [0, z_0]$. Obliczenia prowadzimy przy $\tau = R_b(z)$, stąd kształt linii prądu jest znany i umożliwia uwzględnienie wzmocnienia poprzez obliczenie intensywności naprężeń $\delta_i(z)$ ze wzoru (2.3.22) jak też pochodnych tej funkcji występujących z prawej strony (4.64). Zatem wzmocnienie w pierwszym kroku iteracji $a^I(z)$ określamy doświadczeniem $[\delta_i(z) = c e_i(z), e_i = e(\phi_B^I, \phi_B^{II}, \phi_B^{III}, \phi_B^{IV}, \phi_B^{V})]$.

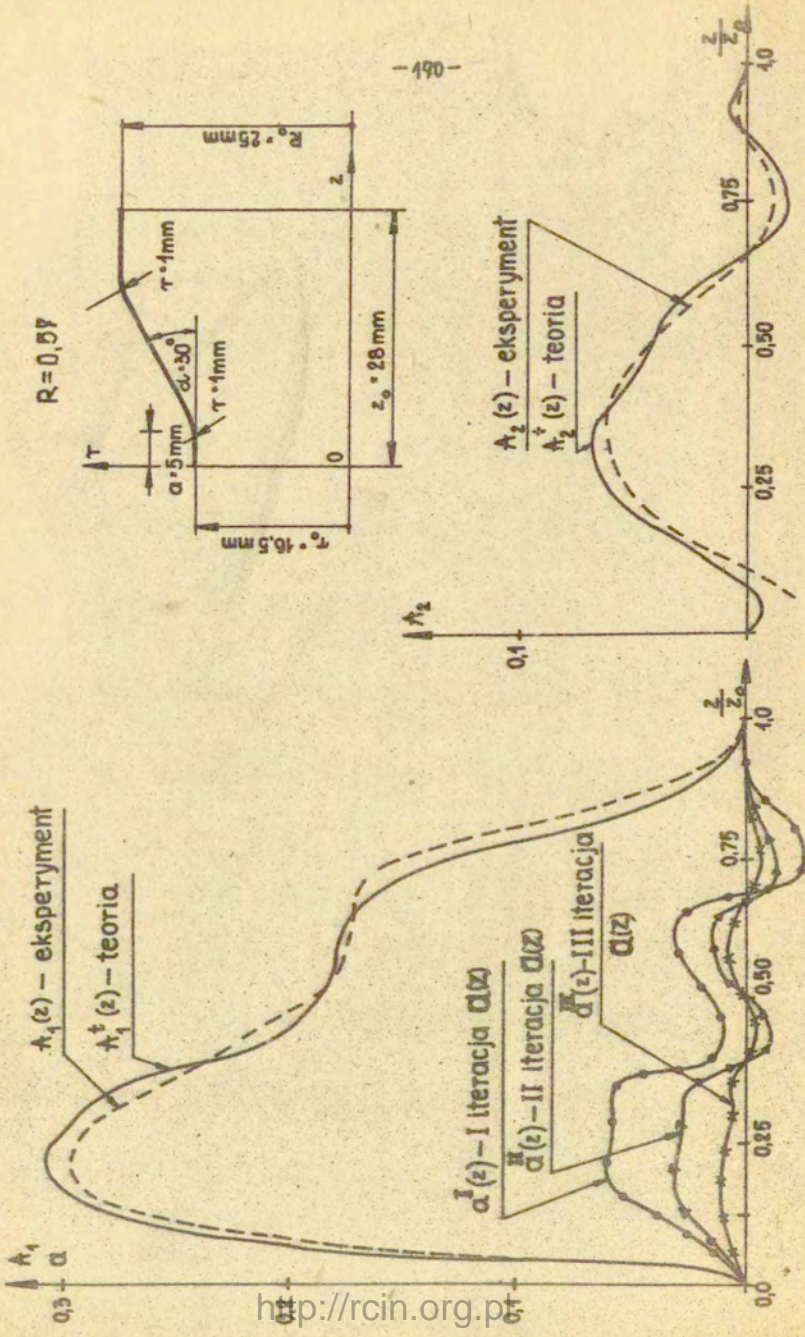
W drugiej iteracji funkcję $a^{II}(z)$ otrzymujemy podstawiając do prawej strony (4.64) funkcję $a^I(z)$ i jej pochodną da^I/dz zamiast $a(z)$ i da/dz . Pochodną da^I/dz

w przedziale $z \in (0, z_0)$ otrzymujemy różniczkując analityczną postać wzoru (4.64) na $\alpha^I(z)$. Pochodna $d\alpha^I/dz$ w skrajnych punktach $z=0$ i $z=z_0$ z założenia przyjmuje wartości zerowe. Kolejne iteracje wykonujemy analogicznie. Pokazane dalej wyniki obliczeń wykazały, że już w trzeciej iteracji funkcje $\alpha^{II}(z)$ i $\alpha^I(z)$ różniły się nieznacznie wartościami i kształtem. Funkcja $\alpha(z)$ zależy od danych brzegowych i materiałowych. Dane te mogą być przyjęte na drodze założeń lub jako wielkości doświadczalne. W przypadku, gdy dane brzegowe i materiałowe są określone eksperymentem istnieje możliwość dokładnej weryfikacji rozwiązań teoretycznych. Otrzymane na drodze teoretycznej linie prądu, prędkości i intensywność odkształceń można wtedy porównać z ich doświadczalnymi wielkościami, ponieważ jedne i drugie spełniają te same warunki brzegowe. Różnice będą wynikać głównie z błędów modelu fizycznego i mogą posłużyć do oceny teorii plastycznego płynięcia jako narzędzia analizy zjawisk zachodzących w procesie wyciskania.

Zilustrowano to na przykładzie obliczeń funkcji $\alpha(z)$ dla próbki z PA2 wyciskanej na zimno przez matrycę stożkową z redukcją $R=0,57$ i półkątem rozwarcia $\delta=30^\circ$. Średnica początkowa próbki $2R_0=50$ mm, średnica końcowa $2R_1=33$ mm. Promień zaokrąglenia w narożach wynosi 1 mm (rys.4.7). Położenie doświadczalnych linii prądu i rzeczywiste rozkłady $\phi_B(r,z)$ dla tej próbki są zestawione na rys.: 3.3, 3.9, 3.13, 5.17. Niezbędne dane odnośnie przebiegów doświadczalnych funkcji $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ i ich numerycznych pochodnych zaczerpnięto z rys.: 3.28, 3.32, 3.33, 3.34. Dane materiałowe odnośnie krzywej umocnienia $\delta_i(\epsilon_i)$ wzięto z rys.3.40,

Dane te wstawiono w pierwszej iteracji do wzoru (4.64) i otrzymano pierwsze przybliżenie $\alpha^I(z)$. Następnie obliczono przebieg $\alpha^II(z)$ w drugim kroku iteracyjnym. Kolejno wyznaczono $\alpha^III(z)$ w trzecim kroku iteracyjnym. Przebiegi: $\alpha^I(z)$, $\alpha^II(z)$, $\alpha^III(z)$ zestawiono na rys.4.7. Na osi pionowej rys.4.7 odłożono wartości funkcji $\alpha(z)$, zaś na osi poziomej bezwymiarową współrzędną z/z_0 . Widzimy tu nieznaczne różnice w przebiegach $\alpha(z)$ z drugiej i trzeciej iteracji w znacznym zakresie z/z_0 . Kształt krzywych $\alpha^I(z)$ i $\alpha^III(z)$ jest również bardzo zbliżony. Wydaje się, że proces znajdowania $\alpha(z)$ ze wzoru (4.64) w kolejnych iteracjach jest szybko zbieżny. Na rys.4.7 przebiegi: $\alpha^I(z)$, $\alpha^II(z)$, $\alpha^III(z)$ pokazano na tle doświadczalnych funkcji: $A_1(z)$, $A_2(z)$. Stosunek teoretycznej wartości $\alpha(z)$ do doświadczalnych wartości: $A_1(z)$, $A_2(z)$ jest jakościową miarą fizycznej poprawności teorii technicznej. Przebiegi: $A_1^t(z)$, $A_2^t(z)$ obliczone ze wzorów (4.35) i (4.36) porównane z ich doświadczalnymi odpowiednikami $A_1(z)$ i $A_2(z)$ wykazały dobrą zgodność zarówno co do kształtu jak i wartości liczbowych. Świadczy to o efektywności teorii plastycznego płynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału jako narzędzia umożliwiającego dokładne wyznaczenie przebiegów $\phi(u, z)$ w polu uplastycznienia wyciskanego cylindrycznego pręta.

Po wyznaczeniu funkcji $\alpha(z)$, kolejno obliczano i porównywano teoretyczne i doświadczalne rozkłady linii prądu, prędkości przemieszczeń i intensywności odkształceń. Pokazano to w następnym punkcie.

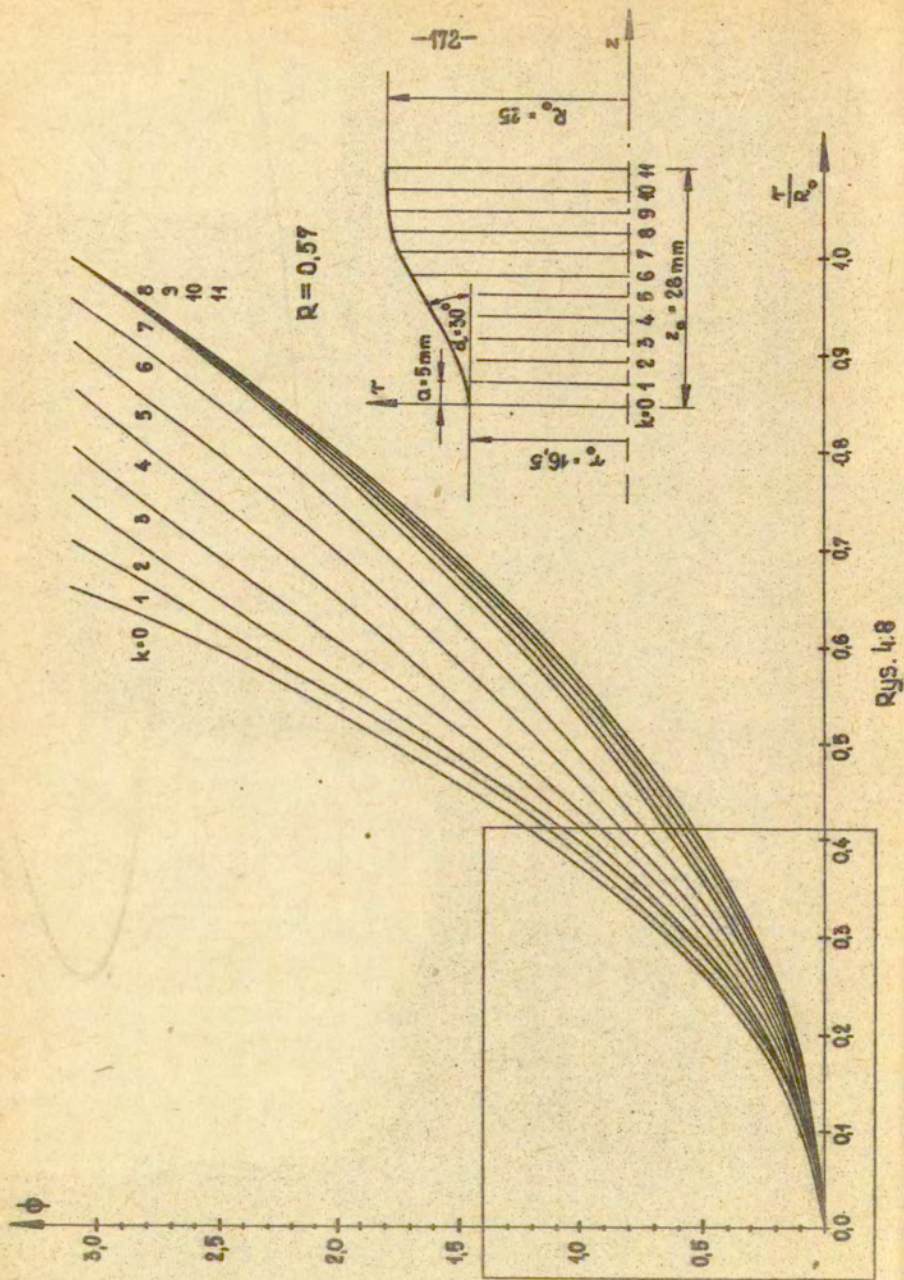


Rys. 47

4.6. Obliczenia wielkości kinematycznych w świetle wyników doświadczalnych

Wyznaczoną funkcję $\alpha(z)$ z trzeciej iteracji w punkcie 4.5 podstawiamy do wzoru (4.33) i obliczamy przebiegi funkcji prądu $\phi(r,z)$ wzdłuż promienia „ T ” w k -przekrojach zmiennej „ Z ”. Ilustruje to rys.4.8. Na osi pionowej odłożono wartości funkcji $\phi(r,z)$ od 0 do π . Na osi poziomej zaznaczone bezwymiarowe wartości stosunku promienia „ T ” do połowy średnicy R_0 . Przebiegi $\phi(r,z)$ wzdłuż promienia „ T ” przy ustalonych wartościach zmiennej „ Z ” oznaczonych numerami „ k ” są bardzo zbliżone do doświadczalnych z rys.3.9.

Wzdłuż linii prądu wartość bezwymiarowej funkcji $\phi(r,z)$ jest stała. Było to omawiane w rozdziałach drugim i trzecim. Własność ta jest wykorzystana do wyznaczania położenia linii prądu w polu uplastycznienia. Pokazano to na rys.4.9, na którym widzimy powiększony fragment rozkładu $\phi(r,z)$ oznaczonego prostokątem na rys.4.8. Celem zilustrowania sposobu określenia położenia linii prądu poprowadzono na wykresie $\phi-\tau$ linię poziomą $a'-e'$ odpowiadającą stałej wartości $\phi(r,z) = 0,502$. Punkty przecięcia poziomej linii $a'-e'$ z krzywymi $\phi-\tau$ przy ustalonym „ k ” odwzorowują przebieg linii prądu $a-e$ z płaszczyzny fizycznej „ $T-Z$ ” obszaru uplastycznienia. Współrzędne „ T ” linii prądu przy ustalonych wartościach współrzędnej „ Z ” oznaczone numerami „ k ”, wyznaczamy prowadząc z punktów przecięcia linie prostopadłe do osi T/R_0 . Na rys.4.9 współrzędne „ T/R_0 ” odpowiadające linii prądu $l=3$ zaznaczono strzałkami. Poło-

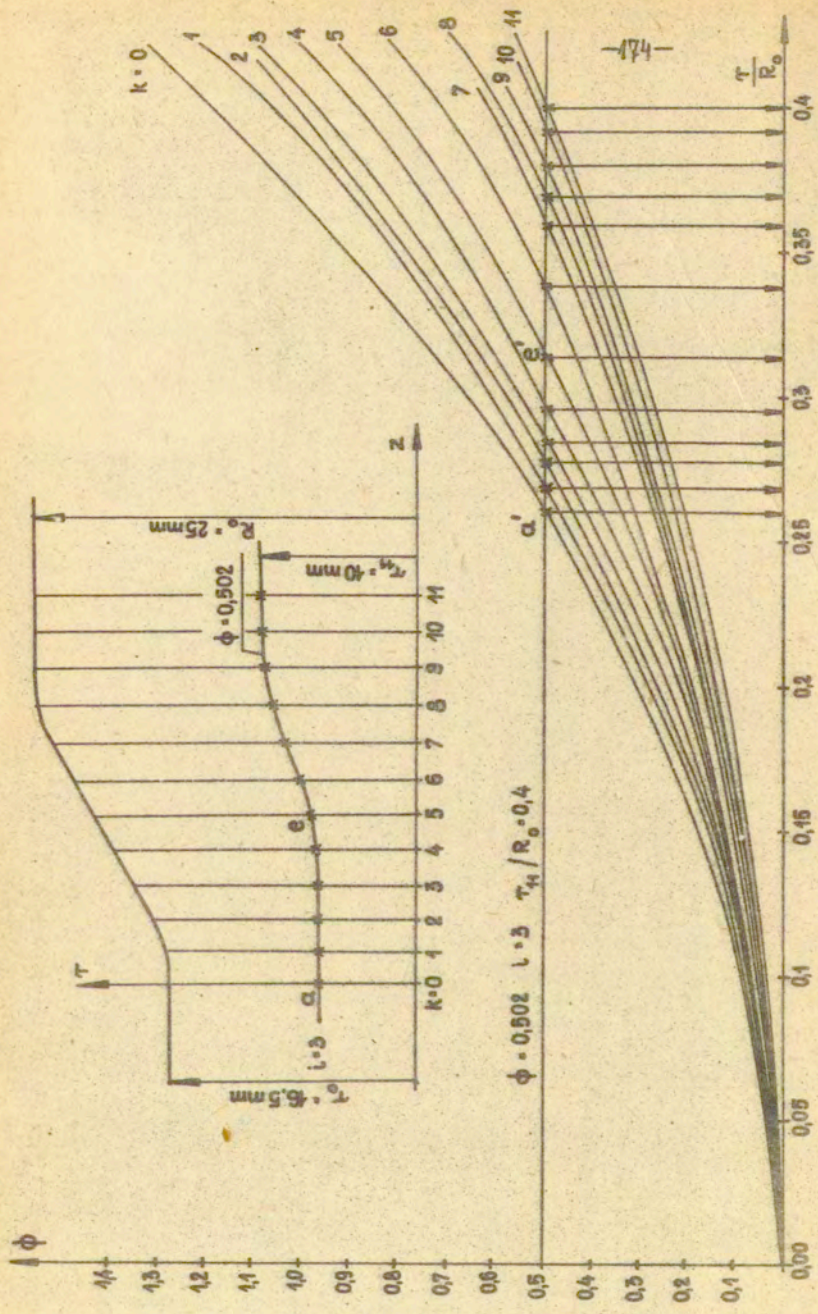


Rys. 4.8

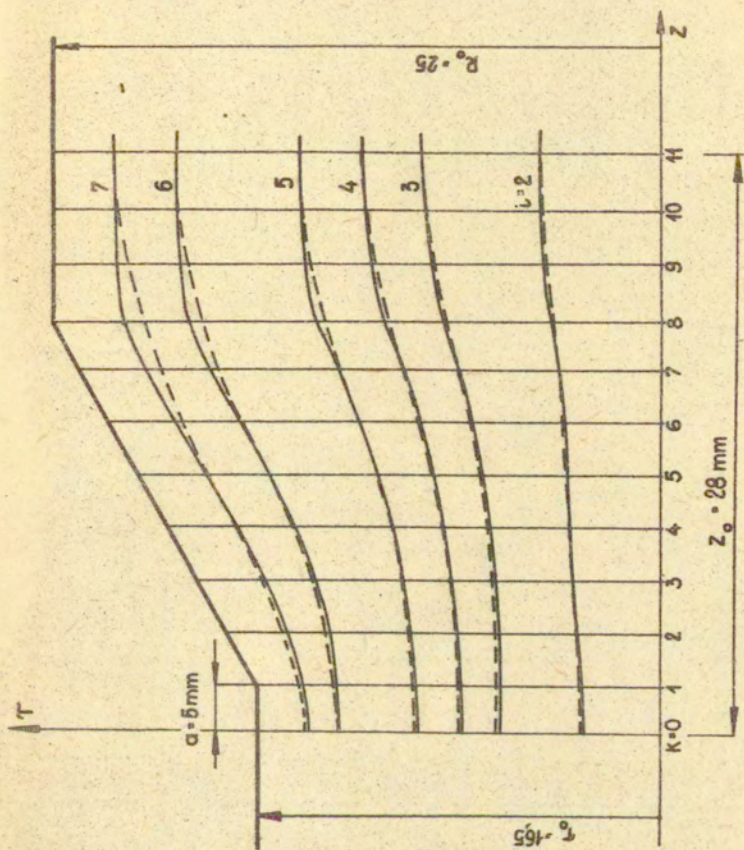
żenie linii prądu $\ell=3$ umiejscowiono na tle obszaru uplastycznienia w płaszczyźnie fizycznej próbki „T-Z”. Ten łatwy, graficzny sposób lokalizacji linii prądu wykorzystano do wyznaczenia rozkładu linii prądu w całym polu uplastycznienia rozpatrywanej próbki. Obrazuje to rys.4.10, na którym porównano teoretyczne i doświadczalne przebiegi ośmiu linii prądu w polu uplastycznienia. Teoretyczne linie prądu odbiegają swym kształtem od doświadczalnych w rejonie naroża przy wejściu w obszar płynięcia plastycznego. W pozostałym polu obserwujemy dobrą zgodność obydwu przebiegów.

Teoretyczne linie prądu otrzymano z rozkładu $\Phi(\tau, Z)$ będącego przybliżonym rozwiązaniem (4.4) przy warunkach brzegowych odpowiadających doświadczalnym liniom prądu. Stąd adekwatność powyższego porównania, które wskazuje na poprawność i dużą dokładność rozwiązania odnośnie sposobu lokalizacji linii prądu w polu uplastycznienia wyciskanej próbki.

Pola prędkości przemieszczeń $V_r(\tau, Z)$ i $V_z(\tau, Z)$ obliczano z wzorów (4.23) i (4.24). Funkcje: $A_1^t(z)$, $A_2^t(z)$, $A_3^t(z)$ określano ze wzorów (4.35), (4.36), (4.37). Składową promieniową V_r na osi symetrii obliczano jako granicę wyrażenia (4.23) przy $\tau \rightarrow 0$, która jest równa zeru. Przebieg składowej $V_r(\tau, Z)$ w polu uplastycznienia rozpatrywanej próbki obrazuje rys.4.11. Górna część rys.4.11 przedstawia fizyczną płaszczyznę „T-Z” pola uplastycznienia próbki. W dolnej części rys.4.11 na osi pionowej odłożono wartości V_r a na osi poziomej bezwymiarowe wartości τ/R_0 . Liniami ciągłymi zaznaczono teoretyczne przebiegi $V_r - \tau/R_0$ w k-przekrojach współrzędnej „Z”. Największą nierównomierność przebiegu $V_r(\tau, Z)$



Rys. 4.9



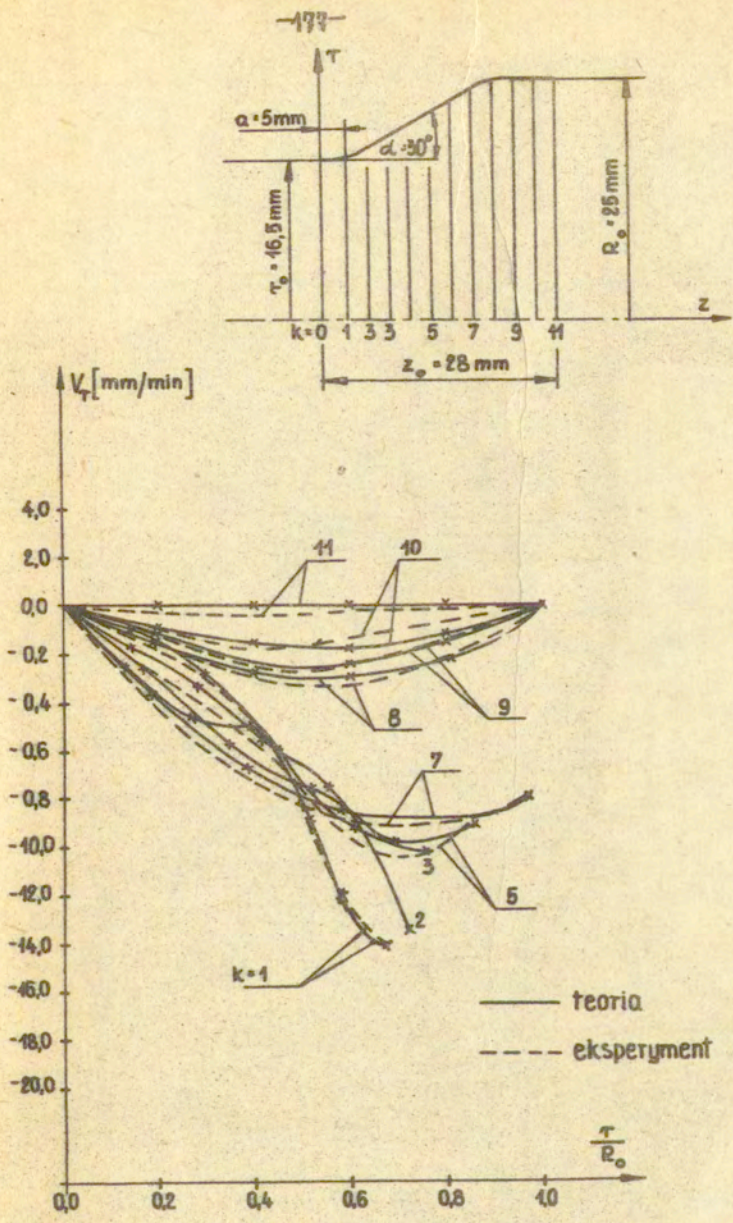
- Teoretyczne linie prądu
- - - Linie prądu otrzymane z doświadczenia

Rys. 4.10

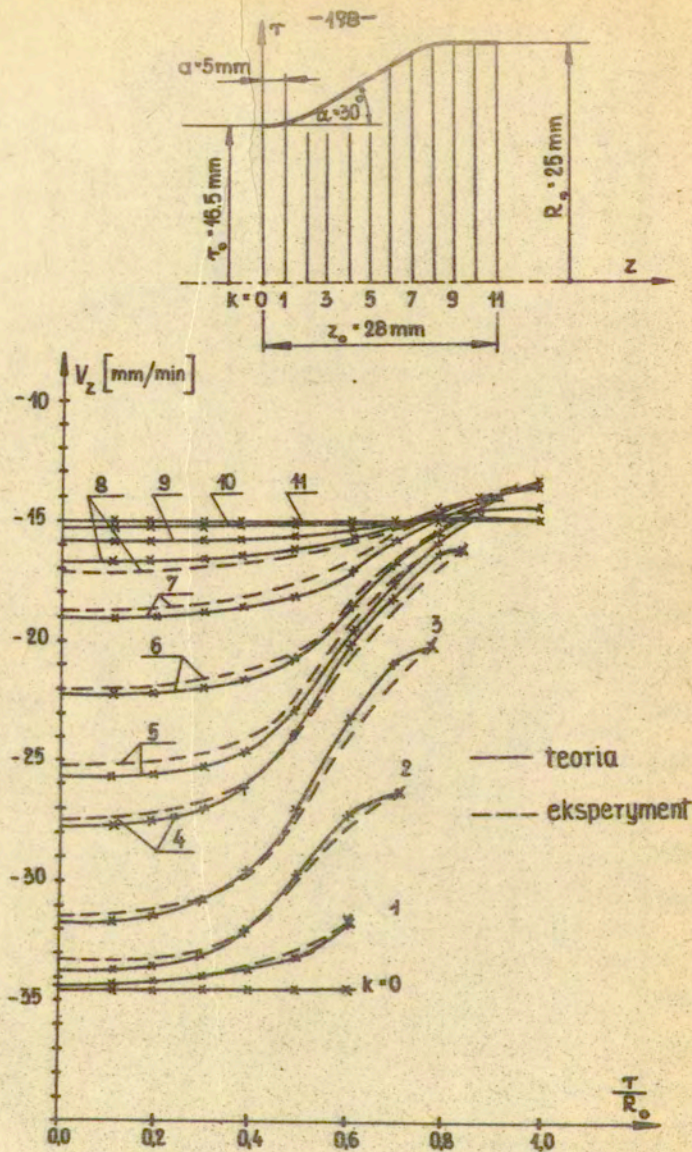
obserwujemy w warstwie materiału przylegającej do konturu matrycy i w przekroju wyjściowym matrycy. Na tym samym rysunku i w tych samych przekrojach „k” współrzędnej „z” linią przerywaną pokazano doświadczalne przebiegi $V_T - \tau/R_0$. Zestawienie teoretycznych i doświadczalnych przebiegów $V_T(\tau, Z)$ wskazuje na dużą zgodność zarówno co do wartości jak i kształtu tych funkcji.

Przebieg składowej osiowej $V_Z(\tau, Z)$ zobrazowano na rys.4.12. Na osi pionowej zaznaczono wartości V_Z , na osi poziomej bezwymiarowy stosunek τ/R_0 . Liniami ciągłymi poprowadzono teoretyczne przebiegi $V_Z - \tau/R_0$ w ustalonych k-przekrojach współrzędnej „z”, które zlokalizowano na płaszczyźnie fizycznej próbki „ $\tau - Z$ ” (górną część rys.4.12). Przebiegi teoretycznej składowej $V_Z - \tau/R_0$ w k-przekrojach „z” odznaczają się znaczną nierównomiernością w warstwach materiału przylegających do matrycy. Składowe $V_Z(\tau, Z)$ maleją gwałtownie w otoczeniu naroży przy wejściu w obszar uplastycznienia i są mniejsze od prędkości stempla V_0 . Największą równomierność składowej osiowej prędkości V_Z wzdłuż promieni obserwujemy w obszarze przyległym do osi symetrii. Znaczna nierównomierność przebiegu $V_Z - \tau/R_0$ jest widoczna w rejonie otworu matrycy. Również na rys.4.12 linią przerywaną zaznaczono przebiegi doświadczalne $V_Z - \tau/R_0$ w tych samych co i teoretyczne k-przekrojach zmiennej „z”. Różnice w położeniu teoretycznych i doświadczalnych przebiegów $V_Z - \tau/R_0$ w tych samych przekrojach „k” współrzędnej „z” są niewielkie.

Otrzymane na drodze teoretycznej z $\Phi(\tau, Z)$ składowe pręd-



Rys. 4.11

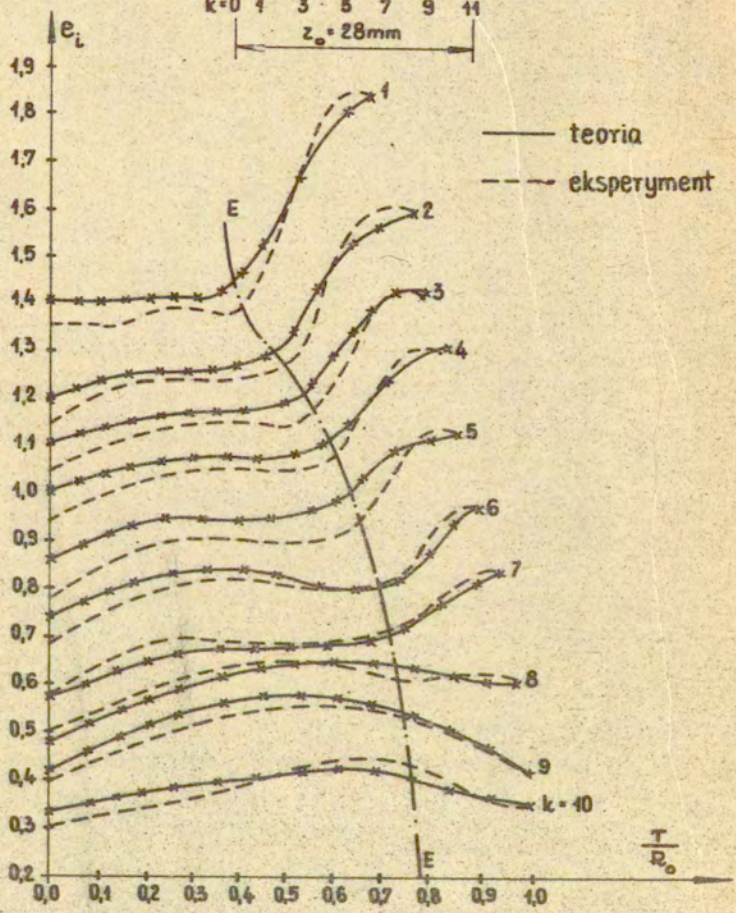
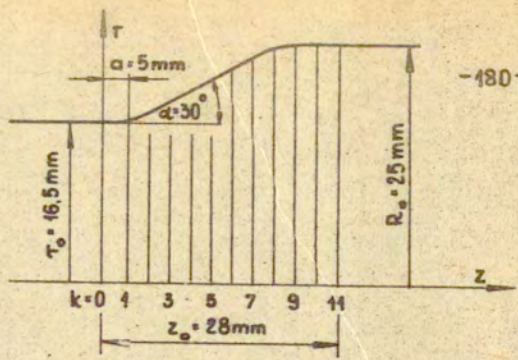


Rys. 4.12.

kości przemieszczeń $V_r(r, z)$ i $V_z(r, z)$ spełniają te same warunki brzegowe co ich doświadczalne odpowiedniki. Dobra zgodność doświadczalnych i teoretycznych funkcji: $V_r(r, z)$, $V_z(r, z)$ oznacza, że teoria plastycznego płynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału może nadawać się do wyznaczania pól prędkości przemieszczeń w polu uplastycznionym wyciskanego cylindrycznego pręta.

Kolejno obliczono z wzorów: (4.25), (4.26), (4.27), (4.28) składowe tensora prędkości odkształceń. Wartości funkcji: $\dot{E}_r(r, z)$, $\dot{E}_z(r, z)$, $\dot{\gamma}_{rz}(r, z)$ na osi symetrii tj. przy $r=0$ brano jako ich granicę przy $r \rightarrow 0$. Następnie ze wzoru (3.16) tak jak w rozdziale trzecim obliczono rozkład intensywności odkształceń $E_i(r, z)$, który dla rozpatrywanej próbki pokazano na rys.4.13. Na osi pionowej odłożono wartości E_i natomiast na osi poziomej bezwymiarowy stosunek r/R_0 . Linia ciągłą zaznaczono na rys.4.13 teoretyczne przebiegi $E_i - r/R_0$ w k-przekrojach zmiennej „z”. Przekroje „k” zlokalizowano na fizycznej płaszczyźnie „r-z” próbki nad wykresami $E_i - r/R_0$. Z teoretycznych przebiegów $E_i - r/R_0$ w k-przekrojach współrzędnej „z” widzimy dużą nierównomierność rozkładu intensywności odkształceń E_i w warstwach bezpośrednio przyległych do powierzchni styku materiału z matrycą. Największe przyrosty teoretycznej funkcji $E_i(r, z)$ wzdłuż promienia lokalizują się w rejonie otworu matrycy. Niejednorodnie zdeformowany materiał w tym obszarze przechodzi do wyrobu końcowego i wpływa bezpośrednio na jego własności mechaniczne.

Przebiegi doświadczalne $E_i - r/R_0$ w tych samych co



Rys. 4.13

teoretyczne k-przekrojach współrzędnej „Z” pokazano za pomocą linii przerywanej na rys.4.13. Porównanie linii przerywanych z ciągłymi wskazuje na dobrą jakościowo i zadawalającą ilościową zgodność teoretycznej i doświadczalnej funkcji $\epsilon_i(\tau, Z)$ w polu uplastycznienia wyciskanej próbki.

Linia E-E na rys.4.13 rozdziela obszar uplastycznienia na dwie strefy różniące się stopniem niejednorodności intensywności odkształceń wzdłuż promienia przy ustalonym przekroju „K” współrzędnej „Z”. Pole z lewej strony linii E-E odznacza się stosunkowo małą niejednorodnością rozkładu $\epsilon_i - \frac{T}{R_0}$. W punktach, przez które przebiega linia E-E występują największe przyrosty intensywności odkształceń wzdłuż promienia T we wszystkich k-przekrojach współrzędnej „Z”. Pole znajdujące się z prawej strony linii E-E odznacza się dużą nierównomiernością przebiegów $\epsilon_i - \frac{T}{R_0}$ wzdłuż linii konturu matrycy. Odzworowanie linii E-E na płaszczyznę fizyczną próbki pokazano w następnym punkcie. Można przypuszczać, że linia E-E odpowiada najkorzystniejszemu profilowi matrycy ze względu na jednorodność $\epsilon_i(\tau, Z)$ w polu uplastycznienia.

Teoretyczne i doświadczalne przebiegi funkcji $\epsilon_i(\tau, Z)$ w rozpatrywanej próbce spełniają analogiczne warunki brzegowe. Porównanie tych przebiegów na rys.4.13 wskazuje na dużą przydatność proponowanego rozwiązania opartego na teorii plastycznego płynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału. Jak zaznaczano, rozwiązania dla wielkości kinematycznych przedstawione na rys.: 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 uzyskano przy założeniu rzeczywistych warunków brzegowych opi-

sywanych przez doświadczalny rozkład funkcji prądu $\phi_B(\tau, z)$. Stąd kształt i zasięg obszaru uplastycznionego wzięto również z doświadczenia. Zatem teoretyczne i doświadczalne wielkości kinematyczne spełniają te same warunki brzegowe odnośnie tarcia i mają wspólny obszar określoności. Przedstawione porównania dają ścisłą, doświadczalną weryfikację teorii plastycznego pżynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału. Weryfikacja ta dotyczy wielkości mierzalnych w doświadczeniu. Z pokazanych porównań wielkości kinematycznych wynika duża przydatność rozpatrywanej teorii technicznej pod warunkiem, że posiadamy rzeczywiste dane brzegowe. Pełna analiza procesu wyciskania wymaga wyznaczenia pól naprężeń w deformowanym plastycznie materiale. Problem ten rozpatrzono w następnym punkcie.

4.7. Wyniki obliczeń pól naprężeń

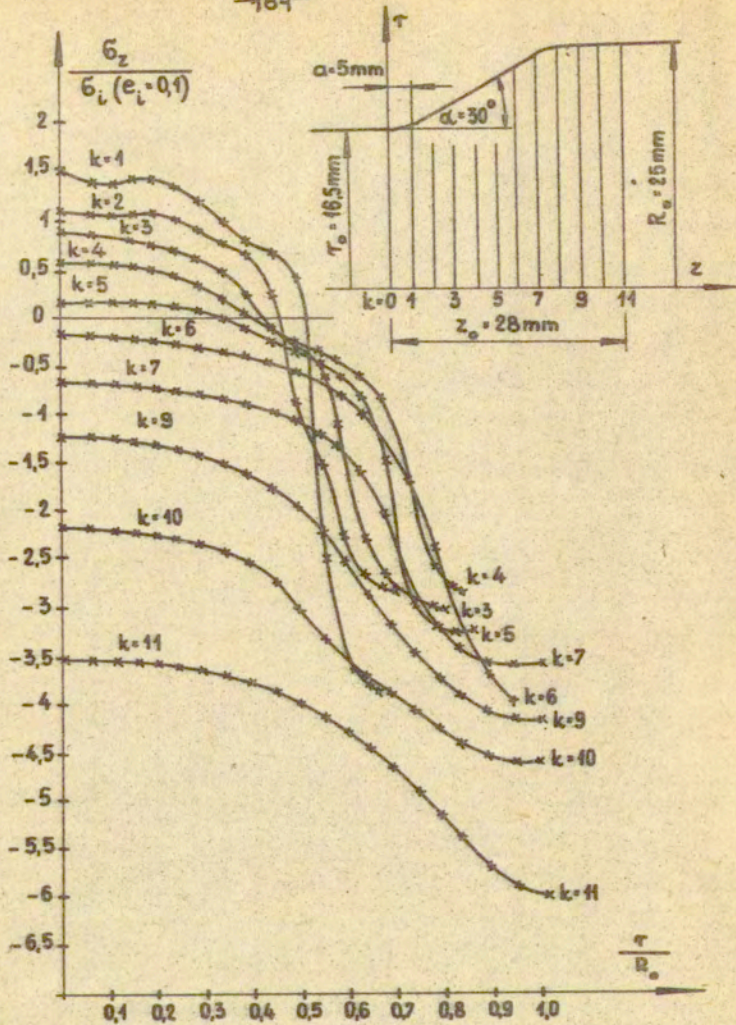
Znając teoretyczną funkcję $\phi(\tau, z)$ i jej pochodne możemy wyznaczyć pola naprężeń w obszarze uplastycznienia wyciskanego cylindrycznego pręta. Metoda znajdowania pól naprężeń przy znanych polach prędkości odkształceń i wzmocnieniu określonym krzywą materiałową $\sigma_i(\epsilon_i)$ jest identyczna jak w metodzie „wizjoplastyczności” omówionej szczegółowo w punkcie 2.3.

W tym celu obliczamy najpierw składową osiową tensora

naprężenia $\sigma_z(r, z)$ z wzoru (2.3.18). Pochodne składowych prędkości odkształceń znamy, ponieważ wiadome są doświadczalne funkcje: $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ oraz ich pierwsze, drugie i trzecie pochodne numeryczne względem zmiennej, z' . Funkcja $G(z)$ oraz jej, występujące w (3.3.18), pochodne są zadane analitycznym wzorem (4.64). Stałą całkowania występującą we wzorze (2.3.18) obliczamy numerycznie z warunku zerowania się siły osiowej w przekroju wyjściowym próbki określonym współrzędną $z = a$ (rys.4.5). Warunek ten ma postać

$$(4.65) \quad \int \sigma_z(r, z) 2\pi r dr = 0$$

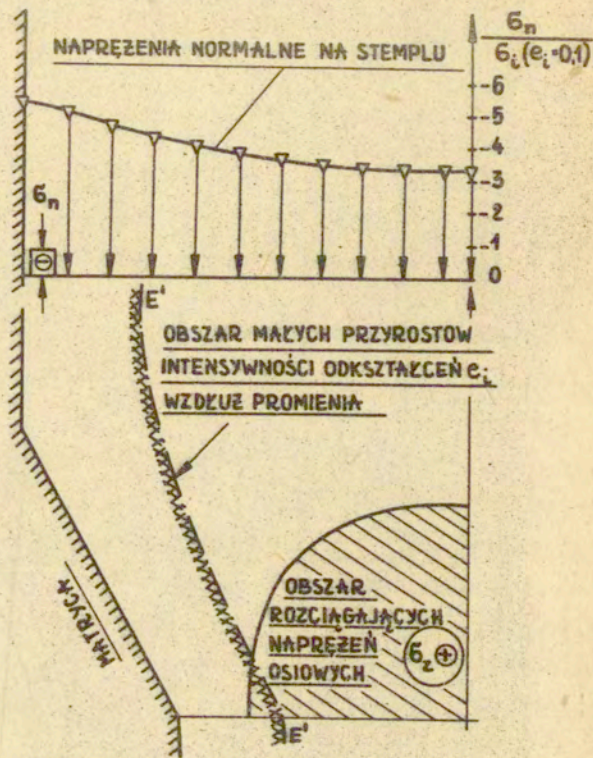
Numeryczne wyniki obliczeń rozkładu składowej osiowej $\sigma_z(r, z)$ tensora naprężenia w polu uplastycznienia rozpatrywanej próbki pokazano w postaci graficznej na rys.4.14. Na osi pionowej odłożono bezwymiarowe wartości stosunku naprężenia osiowego σ_z do wartości umownej granicy plastyczności materiału branej przy odkształceniu $\epsilon_i = 0,1$. Oś pozioma z rys.4.14 posłużyła do zaznaczenia bezwymiarowej wielkości r/R_0 . Liniami ciągłymi na rys.4.14 poprowadzono przebiegi bezwymiarowej wielkości naprężeń osiowych wzdłuż promienia r w ustalonych k -przekrojach współrzędnej „ z ”. Linia pozioma w punkcie $\sigma_z/\sigma_i(\epsilon_i=0,1)=0$ rozdziela pole naprężeń osiowych na strefę naprężeń rozciągających i ścis-kających. Szczególnie ważną informacją jest kształt i zasięg strefy rozciągających naprężeń osiowych w płaszczyźnie fizycznej przekroju próbki. Ilustruje to rys.4.15, na którym



Rys. 4.14

między innymi zaznaczono obszar dodatnich czyli rozciągających naprężeń $\sigma_z(r,z)$ za pomocą zakreskowanego pola. W polu tym mogą wystąpić pęknięcia materiału mało odpornego na rozciąganie, ponieważ naprężenia rozciągające przekraczają tu o 50% wartość granicy plastyczności. W pozostałym obszarze tj. poza polem zakreskowanym z rys.4.15 naprężenia osiowe $\sigma_z(r,z)$ są ujemne, czyli ściskające. Bezwzględna wartość naprężeń osiowych rośnie w kierunku warstw materiału przylegających do powierzchni styku z matrycą i stemplem. Znajomość rozkładu naprężeń osiowych $\sigma_z(r,z)$ jest najważniejszą informacją dotyczącą stanu naprężenia, ponieważ z rozkładu $\sigma_z(r,z)$ możemy przewidzieć możliwość powstawania lokalnych pęknięć objawiających się pustkami wzdłuż osi symetrii gotowego wyrobu [76,115]. Z drugiej strony przebieg naprężeń osiowych $\sigma_z(r,z)$ w najbliższym otoczeniu linii ograniczającej pole uplastycznione od strony stempla umożliwia określenie rozkładu naprężeń normalnych na stemple. W rozważanym przypadku normalne naprężenia na stemple odpowiadają na rys.4.14 przebiegowi $\sigma_z - \tau$ przy $k=11$.

Rozkład bezwymiarowych naprężeń normalnych na stemple σ_n/σ_i ($\sigma_i = 0,1$) wzdłuż promienia r pokazano na rys.4.15. Widzimy, że maksymalne naprężenia ściskające materiał stempla przekraczają pięciokrotną wartość granicy plastyczności. Rozkład naprężeń normalnych na powierzchni stempla odznacza się znaczną nierównomiernością. Naprężenia $\sigma_z(r)$ w $k=11$ z rys.4.14 utożsamione z $\sigma_n(r)$ na rys.4.15 pozwalają wyznaczyć siłę wyciskania. Jest interesującym, że obliczona numerycznie siła wyciskania jako :



Rys. 4.15

$$(4.66) \quad P = \int \sigma_r 2\pi r dr$$

daje 10% nadwyżki w stosunku do rzeczywistej jej wartości.

Dodatkowo na rys.4.15 pokazano odwzorowanie linii $E-E$ z rys.4.13. Obszar zawarty pomiędzy linią konturu matrycy i linią $E'-E'$ cechuje się dużą nierównomiernością intensywności odkształceń. W pozostałym polu obserwujemy stosunkowo małą niejednorodność odkształceń. Można przypuszczać, że przy konturze matrycy odpowiadającemu linii $E'-E'$ zakresowane pole naprężeń rozciągających $\sigma_z^+(\tau, z)$ na rys.4.15 byłoby minimalne. Stąd być może linia $E'-E'$ byłaby najkorzystniejszym profilem matrycy ze względu zarówno na jednorodny rozkład odkształceń w wyrobie jak też minimalny obszar osiowych naprężeń rozciągających. Wyjaśnienie tego problemu, poruszanego też w pracach [46,76], wymaga złożonych badań doświadczalnych procesu wyciskania. Wydaje się jednak, że pokazany sposób poszukiwania najkorzystniejszego profilu matrycy może prowadzić do efektywnych wyników.

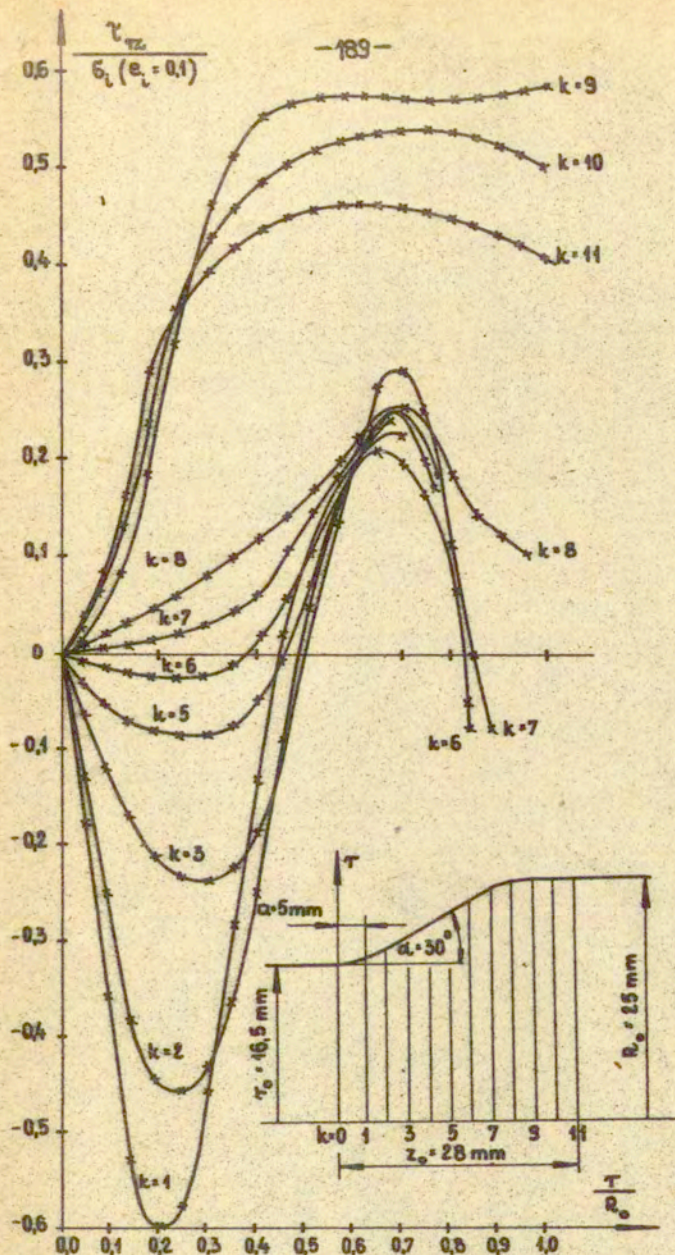
Rozkład naprężeń stycznych $T_{rz}(\tau, z)$ w polu płynięcia plastycznego rozpatrywanej próbki pokazano na rys.4.16. Naprężenia $T_{rz}(\tau, z)$ obliczono numerycznie ze wzoru (2.3.12.d) z uwzględnieniem wzmocnienia izotropowego. Na osi pionowej rys.4.16 odłożono bezwymiarowe wartości T_{rz}/σ_i ($\sigma_i = 0, 1$) a na osi poziomej bezwymiarowe wartości τ/R_0 . Liniami ciągłymi oznaczono przebiegi bezwymiarowych naprężeń stycznych wzdłuż bezwymiarowego promienia w k -przekrojach współrzędnej z' . Położenie przekrojów k' zmiennej z'' pokazano na płaszczyźnie

fizycznej próbki. Z przebiegów naprężeń stycznych wzdłuż promienia w ustalonych położeniach współrzędnej „z” wynika duża niejednorodność rozkładu naprężeń stycznych w obszarze uplastycznienia. Przebiegi naprężeń stycznych wzdłuż promienia charakteryzują się zmianą znaku w znacznej części pola uplastycznienia przyległego do otworu matrycy. Maksymalne wartości naprężeń stycznych występują w materiale na wejściu do obszaru intensywnych odkształceń plastycznych. W rejonie tym mogą wystąpić pęknięcia w wypadku, gdy deformowany materiał ma niską wytrzymałość na ścinanie. Pęknięcia w wyciskanym materiale na wejściu do obszaru uplastycznienia obserwowano w pracach [115, 116].

Składowe tensora naprężeń $\sigma_r(r,z)$ i $\sigma_\theta(r,z)$ obliczano z wzorów (2.3.12.b) i (2.3.12.c). Były one ujemne, czyli ściskające w całym polu uplastycznienia. Charakter ich przebiegów był zbliżony do siebie. Największe bezwzględne wartości naprężeń promieniowych i obwodowych otrzymano na wejściu do obszaru uplastycznienia i w warstwie materiału bezpośrednio przylegającej do powierzchni styku z matrycą.

Obliczone rozkłady składowych tensora naprężenia wskazują, że większość zdeformowanego plastycznie materiału rozpatrywanej próbki znajduje się w warunkach trójwymiarowego nierównomiernego ściskania. Maksymalne wartości ściskającego naprężenia hydrostatycznego osiągały blisko czterokrotną wartość granicy plastyczności. Ogólny schemat stanu naprężenia w zakreskowanym polu z rys.4.15 charakteryzuje się dwuosiowym ściskaniem i jednoosiowym rozciąganiem.

Bardzo ważną informacją dotyczącą technicznej analizy

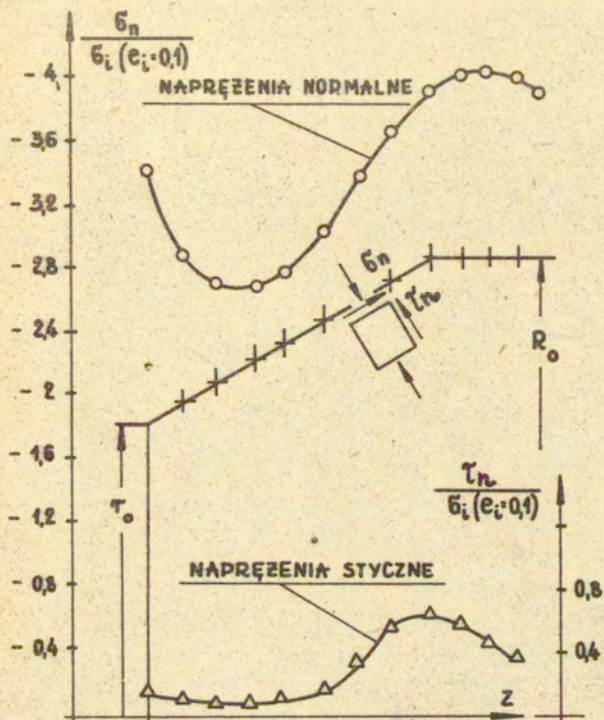


procesu wyciskania jest znajomość naprężeń kontaktowych na powierzchni styku materiału z matrycą. Rozkład naprężeń normalnych $\sigma_n(z)$ i stycznych $\tau_n(z)$ wzdłuż linii konturu matrycy w rozpatrywanej próbce pokazano na rys.4.17. Naprężenia styczne obliczono z wzoru (4.39), w którym uwzględniono izotropowe wzmocnienie materiału. Przebieg $\tau_n(z)$ określa jednoznacznie rozkład naprężeń stycznych od sił tarcia i utożsamia się z warunkiem brzegowym określonym tylko doświadczalną funkcją $\phi_B(\tau, z)$. Na rys.4.17 z prawej strony na osi pionowej odłożono bezwymiarową wartość τ_n/σ_i ($\sigma_i = 0, 1$). Punkty oznaczone trójkątami na wykresie odpowiadają wartościom naprężeń stycznych przyporządkowanych miejscom z linii konturu oznaczonych krzyżykami. Widzimy, że naprężenia tarcia $\tau_n(z)$ na rys. 4.17 obliczone związkami pąnięcia (2.3.12) przyjmują największe wartości w rejonie naroży matrycy na wejściu do obszaru uplastycznienia. Rozkład naprężeń $\tau_n(z)$ wzdłuż linii konturu matrycy jest nierównomierny i jakościowo odbiega od powszechnie przyjmowanych założeń odnośnie tarcia w obróbce plastycznej wyrażonych wzorami (4.43) i (4.44).

Naprężenia normalne σ_n obliczono jako:

$$(4.67) \quad \sigma_n = \sigma_z \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + 2\tau_{rz} \sin \alpha \cos \alpha,$$

gdzie 2α jest kątem rozwarcia tworzących matrycy. Przebieg bezwymiarowych naprężeń normalnych σ_n/σ_i ($\sigma_i = 0, 1$) wzdłuż linii konturu matrycy oznaczono na rys.4.17 kółeczkami. Wartościom naprężeń normalnych oznaczonych kółeczkami odpowiadają punkty linii konturu matrycy zaznaczone krzyżykami. Wi-



Rys. 4.17

dzimy, że naprężenia normalne osiągają maksima bliskie czterokrotnej wartości granicy plastyczności w rejonach naroży matrycy na wejściu i wyjściu z obszaru uplastycznienia. Ich przebieg jest bardzo nierównomierny.

Przebiegi naprężeń stycznych $T_n(z)$ i $\sigma_n(z)$ wzdłuż linii konturu matrycy określają we wzorze (4.44) współczynnik tarcia μ , który w rozpatrywanym przykładzie jest funkcją zależną od współrzędnej „Z” i jakościowo odbiega od zakładanych w literaturze stałych wartości tej wielkości na powierzchni kontaktu materiału z matrycą.

Znajomość rozkładów pól naprężeń umożliwia sprawdzenie hipotezy Haara-Kármána stosowanej w obliczeniach zagadnień osiowo-symetrycznych metodą charakterystyk. Jak wiadomo zakłada się w niej równość dwóch spośród trzech naprężeń głównych w obszarze uplastycznienia. Wobec założeń o braku przynięcia w kierunku obwodowym tj. $V_\theta = 0$ jednym z naprężeń głównych jest naprężenie obwodowe σ_θ . Pozostałe dwa naprężenia główne σ_1 i σ_3 obliczono z zależności

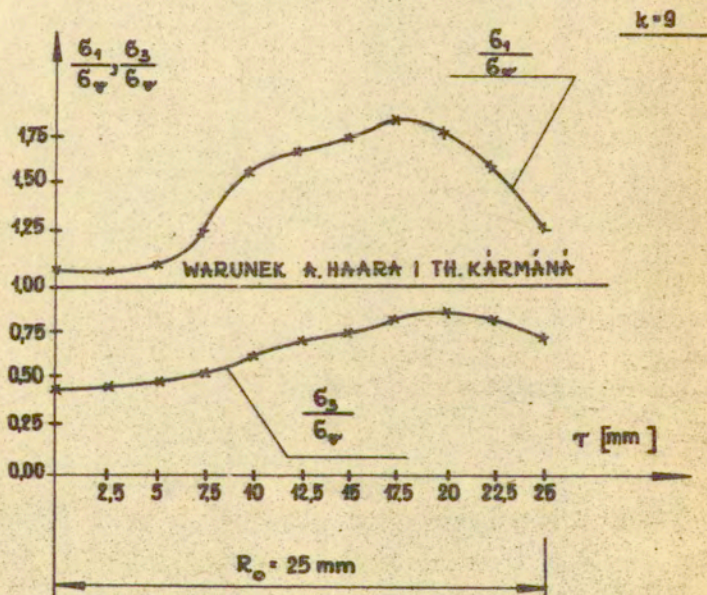
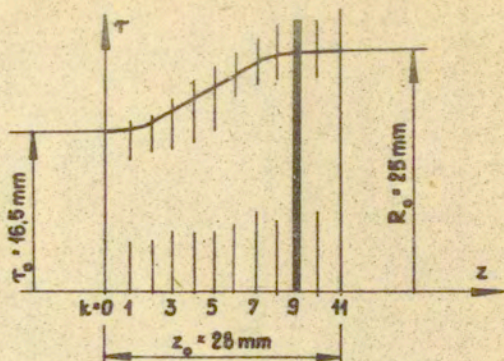
$$(4.68) \quad \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + T_{rz}^2}.$$

Na rys.4.18 pokazano charakter przebiegów stosunków σ_1/σ_θ i σ_3/σ_θ w funkcji promienia „T” w 9-tym przekroju współrzędnej „Z”, którego lokalizację zaznaczono na płaszczyźnie fizycznej „T-Z” próbki. Jednocześnie na rys.4.18 zaznaczono linię odpowiadającą warunkowi Haara-Kármána. Warunek ten oznacza, że stosunek σ_1/σ_θ lub σ_3/σ_θ wzdłuż promienia w do-

wolnym przekroju k^u współrzędnej z^u jest równy jedności. Odpowiada to linii prostej na wykresach z rys.4.18. Przekrój $k=9$ z rys.4.18 leży w obszarze nierównomiernego trójwymiarowego ściskania. Widzimy, że nawet w tych warunkach odstępstwa przebiegów σ_1/σ_0 i σ_3/σ_0 w stosunku do przebiegu odpowiadającego założeniu Haara-Kármána są znaczące i osiągają kilkadziesiąt procent. Założenie Haara-Kármána jest bardzo mocnym ograniczeniem nałożonym na pola naprężeń w rozwiązaniach zagadnień osiowo-symetrycznych z mieszanymi warunkami brzegowymi.

Analizując pokazaną powyżej metodę wyznaczania pól naprężeń nietrudno zauważyć, że może ona być użyta do ujednocznienia obliczeń pól naprężeń w przypadku, gdy pola prędkości odkształceń są wzięte z doświadczenia. Jak podano w punkcie 2.3 mamy wtedy pięć równań niezależnych a niewiadomych: σ_z , σ_r , σ_u , τ_{rz} cztery. Stąd otrzymujemy pięć różnych rozwiązań dla naprężeń w zależności od wybranych dróg całkowania podstawowego układu równań (2.3.12). Występująca w proponowanym rozwiązaniu funkcja $\phi(rz)$ w postaci (4.33) zawiera nieznaną funkcję $Q(rz)$, która w danym przypadku może być traktowana jako piąta niewiadoma układu równań (2.3.12). Zatem wyznaczenie funkcji $Q(rz)$ może być traktowane jako znalezienie brakującej piątej niewiadomej układu (2.3.12) i przez to ujednocznienie rozwiązania dla naprężeń. Funkcja $Q(rz)$ nie wpływa przy tym na warunki brzegowe odnośnie tarcia.

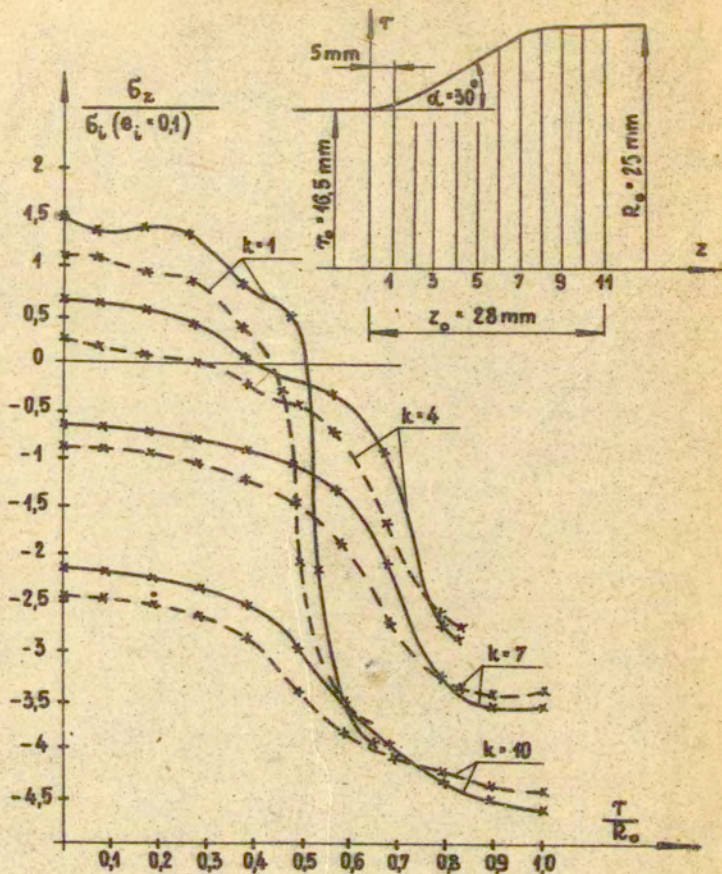
Celem zilustrowania różnic w przebiegach naprężeń otrzymanych z teoretycznych i doświadczalnych przebiegów funkcji prądu pokazano na rys.4.19 przebiegi bezwymiarowych naprężeń



Rys. 4.18

osiowych σ_z/σ_i ($\epsilon_i = 0, 1$) wzdłuż promienia r/R_0 w czterech przekrojach współrzędnej „z” zlokalizowanych w różnych miejscach płaszczyzny fizycznej „T - Z” próbki. Naprężenia osiowe dla doświadczalnej funkcji prądu obliczano numerycznie ze wzoru (2.3.18), w którym stałą całkowania określono zależnością (2.3.19). Prędkości odkształceń i wzmocnienie określone krzywą umocnienia obliczono wyłącznie z doświadczalnych przebiegów funkcji prądu $\phi_B(\tau, z)$. Otrzymane w ten sposób pole naprężeń $\sigma_z(\tau, z)$ jest jednym z pięciu możliwych rozwiązań dla tej wielkości. Przebieg tych naprężeń w postaci bezwymiarowej σ_z/σ_i ($\epsilon_i = 0, 1$) zaznaczono na rys. 4.19 liniami przerywanymi. Liniami ciągłymi poprowadzono w tych samych przekrojach współrzędnej „z” przebiegi σ_z/σ_i ($\epsilon_i = 0, 1$) obliczone z uwzględnieniem $\phi(\tau, z)$ w postaci (4.33) tj. z uwzględnieniem piątej niewiadomej $Q(z)$. Z porównania tych przebiegów widzimy, że największe różnice dochodzące nawet do 50% lokalizują się w warstwach przylegających do osi symetrii i w rejonie przyległym do oczka matrycy.

Metoda wyznaczania jednoznacznych pól naprężeń z danych doświadczalnie pól prędkości wymaga więc w zasadzie rozwiązania podstawowego układu równań (2.3.12). Można to realizować przez rozwiązanie nieliniowego równania (4.4) w formie omówionej w tym rozdziale. Stąd proponowany sposób podejścia do rozwiązania nieliniowego równania stanu plastycznego (4.4) może posłużyć do ulepszenia metod obliczania pól naprężeń w obszarze uplastycznienia, gdy pola prędkości i niejednorodność plastyczna jest zadana eksperymentem.



— NAPRĘŻENIA OSIOWE OBLICZONE DLA TEORETYCZNEJ FUNKCJI PRĄDU

--- NAPRĘŻENIA OSIOWE OBLICZONE DLA DOŚWIADCZALNEJ FUNKCJI PRĄDU

Rys 4.19

4.8. Podsumowanie i wnioski

Aktualnie nie posiadamy rozwiązania problemu brzegowego teorii plastycznego płynięcia umożliwiającego obliczenia pól prędkości, odkształceń i naprężeń w obszarze uplastycznienia wyciskanego, cylindrycznego pręta. Trudności wynikają z niehiperboliczności podstawowego układu równań stanu plastycznego w osiowej symetrii jak też z braku danych brzegowych odnośnie tarcia.

Proponowane w pracy rozwiązanie rozpatrywanego problemu osiowo-symetrycznego polega na przybliżonym rozwiązaniu równań stanu plastycznego sprowadzonych do jednego, wyrażonego nieznaną funkcją prądu $\phi(r,z)$. Postać tej nieznannej funkcji przewidujemy kierując się ogólnymi wymogami związanymi z nieliniową formą równania wyjściowego i warunkami brzegowymi. Opieramy się też na doświadczalnych przebiegach tej wielkości i intuicji. Proponowana konstrukcja $\phi(r,z)$ ma analityczną postać i zbudowana jest z dwóch separowalnych względem zmiennej „Z” podwójnych szeregów trygonometrycznych. Jeden z nich wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi względem zmiennych „r” i „Z” opisuje warunki brzegowe odnośnie tarcia na powierzchni styku materiału z matrycą. Ten szereg uważamy za dany i można go określić jakimś związkem na naprężenia tarcia. Jednak lepiej jest szereg ten utożsamiać z doświadczalnym rozkładem funkcji prądu w polu uplastycznionym wyciskanej próbki. Opierając się na wynikach doświadczeń zaproponowano empiryczne wzory opisujące rozkłady doświadczalnej fun-

kcji prądu $\Phi_B(\tau, z)$ w rozpatrywanych przykładach wyciskania na zimno. Mogą one posłużyć do analizy odkształceń i naprężeń w procesach wyciskania stopów aluminium na zimno. Przedstawiono również dyskusję ograniczeń tych wzorów.

Nieznane funkcje w drugim szeregu ze względu na ich separowalność względem zmiennej „ z ” można wyznaczyć rozwiązując nieliniowe równanie wyjściowe stanu plastycznego w ustalonych wartościach zmiennej „ τ ”. Przybliżone rozwiązanie dla nieznanej funkcji $\Phi(\tau, z)$ otrzymano metodą iteracji. Pierwszym szeregiem w $\Phi(\tau, z)$ była funkcja $\Phi_B(\tau, z)$ oznaczająca doświadczalny rozkład wydatku przepływu w polu płynięcia plastycznego. Obszar uplastycznienia jest tu znany i odpowiada $\Phi_B(\tau, z)$. Określenie przez doświadczalny rozkład $\Phi_B(\tau, z)$ rzeczywistych warunków brzegowych umożliwiło ścisłą weryfikację doświadczalną obliczonych z technicznej teorii rozkładów linii prądu, pól prędkości przemieszczeń i intensywności odkształceń. Pola te spełniają takie same warunki brzegowe jak ich doświadczalne odpowiedniki. Okazało się, że teoria plastycznego płynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału dokładnie opisuje przebiegi pól kinematycznych jeżeli zadamy rzeczywiste dane brzegowe.

Otrzymane rozwiązania odnośnie pól naprężeń uwzględniają izotropowe wzmocnienie materiału i mogą posłużyć do przewidywania zjawisk związanych z utratą spójności materiału w obszarze uplastycznienia. Mogą być też przydatne do przewidywania profilu matrycy.

Proponowane, przybliżone rozwiązanie problemu osiowo-symetrycznego może być przydatne do ujednoznaczniania obliczeń

pól naprężeń w metodzie „wizjoplastyczności”.

Weryfikacja założenia Haara-Kármána wykazała, że uproszczenie to jest bardzo zgrubnym przybliżeniem wprowadzanym przy przewidywaniu pól naprężeń w procesie wyciskania osiowo-symetrycznego.

Przedstawiony sposób podejścia do rozwiązania osiowo-symetrycznego procesu wyciskania umożliwia efektywne obliczenia pól naprężeń i odkształceń w deformowanym materiale.

Pola prędkości przemieszczeń i odkształceń są ciągłe i różniczkowalne w całym obszarze uplastycznienia. Pokazane przykłady obliczeń dotyczą zadania z doświadczalnie zadanymi warunkami brzegowymi, ale proponowana metoda umożliwia też wyznaczenie pól naprężeń i odkształceń z innymi warunkami brzegowymi odnośnie tarcia. Wydaje się, że proponowana techniczna teoria rozwiązania zadania osiowo-symetrycznego z mieszanymi warunkami brzegowymi może posłużyć do dokładnej analizy procesów wyciskania metali na zimno.

5. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w pracy metody i wyniki analizy procesu wyciskania osiowo-symetrycznego można podzielić na dwie grupy.

W pierwszej postaci rozwiązania dla wielkości kinematycznych i niejednorodności plastycznej określamy z doświadczenia i obliczamy następnie pola naprężeń. Metoda doświadczalno-obliczeniowa analizy procesu wyciskania osiowo-symetrycznego ma samodzielne znaczenie poznawcze i praktyczne. Jest typowym przykładem inżynierii eksperymentalnej, której zadaniem jest rozwiązywanie problemów brzegowych z uwzględnieniem rzeczywistych cech deformowanego plastycznie metalu.

W drugiej grupie zakładamy postać rozwiązania dla wielkości kinematycznych i drogą iteracji poszukujemy rozwiązania właściwego. Dane brzegowe odnośnie tarcia mogą być zadane doświadczeniem lub założone jakimś związkami. Rozwiązanie nie nakłada silnych założeń na kształt linii prądu ani na profil matrycy. Pomija się silne uproszczenie Haara-Kármána. Uwzględnia się też wzmocnienie izotropowe materiału. Rozwiązanie jest z konieczności przybliżone, ale umożliwia obliczenie pól odkształceń i naprężeń w obszarze uplastycznienia wyciskanego materiału.

Każda z opisanych szczegółowo metod ma różne możliwości zastosowań i inne są też ich ograniczenia. Metody te uzupełniają się i rozszerzają możliwości teorii plastycznej

go płynięcia jako narzędzia racjonalnej analizy procesów
obróbki plastycznej.

6. LITERATURA

1. J.Piwnik: Doświadczalna weryfikacja teorii obliczeń sił w procesie wyciskania, Rozprawy Inżynierskie 29, 2, 1981, str. 343 - 349.
2. J.Piwnik: Geometria obszaru uplastycznienia w procesie wyciskania, Rozprawy Inżynierskie 30, 1, 1982, str.121-128.
3. J.Piwnik: Experimentelle Verifikation von Lösungen der Kinematik des Vorganges, Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule „N.K.K.“ Halle XIX (1981), Heft 1.
4. J.F.Bell: The experimental foundations of solid mechanics, Tom VIa 1 encyklopedii Handbuch der Physik, Springer Verlag, 1973.
5. E.G.Thomsen, C.T.Yang, S.Kobayshi: Mechanics of plastic deformation in metal processing, New York: MacMillan, 1965.
6. W.Johnson, H.Kudo: The Mechanics of Metal Extrusion, Manchester University Press 1962.
7. Mechanika techniczna tom X, metody doświadczalne mechaniki ciała stałego pod redakcją W.Szczepińskiego, Warszawa: PWN 1984.
8. P.S.Theocaris: Moire Fringes in Strain Analysis, Pergamon Press, 1969.
9. Н.Чиченев, А.Е.Кудрин, П.И.Полухин: Методы исследования процессов обработки металлов давлением, Москва: Металлургия 1977.
10. В.М.Сегал, Е.М.Макушок, В.И.Резников: Исследование пла-

пластического формоизменения металлов давлением, Москва:

Металлургия 1974.

11. Г.Д.Дель: Технологическая механика, Москва: Машиностроение 1978.
12. Г.Д.Дель, Н.А.Новиков: Метод делительных сеток, Москва: Машиностроение 1979.
13. R.Hill: The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford at the Clarendon Press 1956.
14. W.Szczepiński: Introduction to the mechanics of plastic forming of metals, Warszawa: PWN - Polish Scientific Publishers 1979.
15. В.В.Соколовский: Теория пластичности, Москва: Высшая школа 1969.
16. Е.П.Унксов, У.Лонсон, В.Л.Колмогоров: Теория пластических деформаций металлов, Москва: Машиностроение, 1983.
17. R.T.Shield: On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry, Proc. Roy. Soc., ser. A.233, 1955, str. 267 - 287.
18. Lippman: Principal line theory of axially symmetric plastic deformation, Journ. Mech. Phys. Solids, 10, 1962, str. 111 - 123.
19. Z.Mróz: Graphical solution axially symmetric problems of plastic flow, Journ. Appl Math. Phys. (ZAMP), 18, 1967, str. 219 - 236.
20. L.Dietrich, J.Miastkowski, W.Szczepiński: Nośność graniczna elementów konstrukcji, Warszawa: PWN 1970.
21. M.Grzymkowski: Ściskanie pierścieni, Archiwum Hutnictwa, Tom XXIII, 1978, Zeszyt 1, str. 187 - 209.

22. B.Avitzur: Metal forming: The application of limit analysis, *Arm. Rev. Mater. Sci.* 1977, 7, str. 261 - 300.
23. А.Г.Обвинников: Основы теории штамповки выдавливанием на прессах, Москва: Машиностроение 1983.
24. V.Nagpal: General kinematically admissible velocity fields for some axisymmetric metal forming problems, *Trans. ASME*, 96, 1974, Ser.B, str. 1197.
25. K.T.Chang, J.C.Choi: Upper bound solutions to tube extrusion problems through curved dies, *Trans. ASME*, 94, 1972, Ser.B, str. 1108.
26. E.R.Lambert, H.S.Mehta, S.Kobayashi: A new upper-bound method for analysis of some steady-state plastic deformation processes, *Trans. ASME*, 91, 1969, Ser.B, str. 731.
27. V.Nagpal: On the solution of three-dimensional metal-forming processes, *Trans. ASME*, 99, 1977, Ser.B, str. 624.
28. V.Nagpal: Analysis of plane-strain extrusion through arbitrarily shaped dies using flow function, *Trans. ASME*, 99, 1977, Ser.B, str. 754.
29. В.Л.Колмогоров: Пластичность и разрушение, Москва: Металлургия 1981.
30. N.N.Malinin, J.Rýsko: *Mechanika materiałów*, Warszawa: PWN 1981.
31. A.Baltow, A.Sawczuk: A rule of anisotropic hardening, *Acta Mechanica*, 1965, Vol.1, N2, str. 81 - 92.
32. G.Backhaus: Zur analytischen Darstellung des Materialverhaltens im plastischen Bereich, *ZAMM*, 51, 1971, str. 471 - 477.

33. J.Chakrabarty: A hypothesis of strain-hardening in anisotropic plasticity, *Int. J. Mech. Sci.*, 1970, Vol.12, N2, str. 169 - 176.
34. А.Н.Леванов, В.Л.Колмогоров, В.Л.Буркин: Контактное трение в процессах обработки металлов давлением, Москва: Металлургия 1976.
35. M.Gierżyńska: Tarcie, zużycie i smarowanie w obróbce plastycznej, Warszawa: WNT 1983.
36. А.П.Груднев, Е.В.Зильберг, В.Т.Тилик: Трение и смазки при обработке металлов давлением, Москва: Металлургия 1982.
37. D.P.Unksov, Yu.S.Safarov: Experimental investigation of contact stresses in extrusion processes, *Archiwum Budowy Maszyn*, T. XX, zeszyt 1, 1973, str. 55 - 66.
38. L.M.Kachenov: Fundamentals of the theory of plasticity, Mir Publishers Moscow, 1974.
39. W.Szczepiński: Mechanika plastycznego pęknięcia, Warszawa: PWN 1978.
40. Г.А.Друянов: Метод решения статически неопределённых задач плоского течения идеально-пластических тел, Докл. А.Н. СССР, 1962, N.4.
41. M.J.Hiller: Slip line fields for extrusion through looped or curved dies, *I. J. Mech. Sci.*, 1962, 4, №6.
42. А.Д.Томленов: Граничные условия в задачах плоского пластического течения, Пластическое течение металлов, Москва: Наука 1968.
43. J.M.Alexander: On complete solutions for frictionless extrusion in plane strain, *Q.Appl.Math.*, vol.19, 1961, str.31-37.

44. G. Bason, R. T. Shield: The plastic indentation of a semi infinite solid by a perfectly rough circular punch, ZAMP, XI, 1, 1960.
45. Р. И. Непершин: Осесимметричное прессование с малыми и большими обмятиями, Расчёты процессов пластического течения металлов, Москва: Наука 1978, стр. 71-85.
46. J. Piwnik: Metody obliczeń złożonych procesów obróbki plastycznej w świetle badań doświadczalnych, Prace IPPT PAN 14, 1979.
47. J. Piwnik: Experimental analysis of the kinematics of the extrusion process, Archiwum Hutnictwa, T. 30, 1985, Z. 1, str. 105 - 110.
48. K. Iwata, K. Osakada, S. Fujino: Analysis of hydrostatic extrusion by the finite element method, Trans. ASME, Ser. E, 94, 1972, str. 697 - 703.
49. E. H. Lee, R. L. Mallet, W. H. Yang: Stress and deformation analysis of the metal extrusion process, Computer Methods in Appl. Mech. Engg., 10, 1977, str. 339 - 353.
50. S. Kobayashi, S. N. Shah: The matrix method for the analysis of metal forming processes, Advances in deformation processing, ed. J. J. Burke and V. Veiss, Plenum, New York 1978, str. 51-98.
51. C. C. Chen, S. J. Oh, S. Kobayashi: Ductile fracture in axisymmetric extrusion and drawing, Trans. ASME, J. Engg. Ind., 101, 1979, str. 23-4.
52. Ken-ichiro Mori, Susumo Ghima, Kozo Osakada: Some improvements of the rigid-plastic finite element method, Journ. of the Japan society for Technologie of Plasticity, № 234, 1980 - 7, str. 593.
53. Е. П. Унксов: Выбор метода расчёта технологических процессов при обработке металлов давлением, Кузн. Штам. Произ.,

№8, 1982, стр. 24 - 26.

54. С.И.Ковалев, Н.И.Корягин, И.В.Ширко: Напряжения и деформации при плоской прокатке, Москва: Металлургия 1982.
55. И.Я.Тарновский, А.А.Поздеев, В.Л.Колмогоров: Вариационные Принципы механики в теории обработки металлов давлением, Москва: ГТИ литературы по чёрной и цветной металлургии, 1963.
56. Л.Г.Степанский: Расчёты процессов обработки металлов давлением, Москва: Машиностроение 1979.
57. А.Г.Гун: Теория обработки металлов давлением, Москва: Металлургия 1980.
58. Dimitar T.Dimitrow: Applied mechanics of the plasticity, Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1981.
59. S.Erbel, K.Kuczyński, Z.Marciniak: Obróbka plastyczna, Warszawa: PWN 1981.
60. W.Johnson, P.V.Mellor: Engineering plasticity, Van Nostrand Reinhold Company, London 1973.
61. O.Hoffman, C.Sachs: Wprowadzenie do teorii plastyczności, Warszawa: PWT 1959.
62. Е.П.Унксов: Инженерная теория пластичности, Москва: Машиностроение 1959.
63. P.Wasiuńyk: Kucie matrycowe, Warszawa: WNT 1975.
64. B.Avitzur: Metal forming processes and analysis, New York: Robert E.Krieger Publishing Company Huntigton, 1979.
65. М.В.Сторожев, Е.А.Попов: Теория обработки металлов давлением, Москва: Машиностроение 1977.

66. E.Avitzur: Metal forming, Interrelation between theory and practice, Plenum Press, New York - London 1971.
67. W.Szczepiński: Axially symmetric plane stress problem of a plastic strain - hardening body, Arch. Mech. Stos., 15, 5, 1963.
68. Z.Marciniak: Analysis of the process of forming axially symmetrical draw pieces with a hole at the bottom, Arch. Mech. Stos., 15, 6, 1963.
69. J.Biażkiewicz: Iterative methods in the analysis of dynamic processes of plastic forming of metals, Arch. Mech. Stos., 28, 4, 1976.
70. D.Besdo: Principal and slip - line methods of numerical analysis in plane and axially symmetric deformations of rigid plastic media, J.Mech.Phys. Solids, 19, 6, 1971.
71. L.Dietrich: Uwzględnienie wzmocnienia materiału w analizie złożonych procesów plastycznego płynięcia, Prace IPPT PAN, 53 1977.
72. E.G.Thomsen, C.T.Yang, J.B.Bierbower: An experimental investigation of the mechanics of plastic deformation of metals, Univ. of California Publications in Engineering, 5,4,1954.
73. E.G.Thomsen, J.T.Lapsley: Experimental stress determination within a metal during plastic flow, Proce. ASES, 11,2,1954.
74. A.H.Shabaik, S.Kobayashi: Computer application to the visioelasticity method, Trans. ASME J.Eng.Ind.,89,ser.B, 2,1967.
75. A.H.Shabaik, F.G.Thomsen: Flow studies in extrusions, Annals of the C.I.R.P. XVII,1969.

76. A.H.Shabaik, E.G.Thomsen: Computer aided visioelasticity solution of some deformation problems, Proce. Symp. on foundations of plasticity, Warsaw 1972.
77. S.A.Mohamed, A.H.Shabaik: Stress and strain distributions beyond general yield in the Charpy V-notched specimen, J.Mech.Phys.Solids 22,6,1974.
78. T.H.C.Childs: A new visio-plasticity technique and a study of curly chip formation, Int.J.Mech.Sci. 13, 4 1971.
79. L.E.Farmer,P.L.B.Oxley: A slip-line field for plane-strain extrusion of a strain hardening material, J.Mech. Phys.Solids, 19, 6, 1971.
80. L.E.Farmer, S.W.Corming: Numerical smoothing of flow patterns, Int.J.Mech.Sci., Vol.21, 1979, str. 577-597.
81. L.E.Farmer, R.F.Fowle: An experimental procedure for studying the flow in plane strain extrusion, Int.J.Mech.Sci., Vol.21, 1979, str. 599-608.
82. R.Medrano,P.Gillis, C.Hinesley, H.Conrad: Application of visioelasticity techniques to axisymmetric extrusions, Metal forming, Interrelation between theory and practice, Plenum Press, New York - London, 1971, str. 85 - 107.
83. K.Lange: Lehrbuch der Umformtechnik, Band 1, 2, Springer Verlag, 1975.
84. F.Bredendick: Visioelastische Deformationen und Spannungsermittlung, Die Technik, Nr 4, 1969.
85. R.Kreißig,K.D.Drey,J.Naumann: Methoden der Plastizität, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1980.
86. П.И.Полухин, В.К.Воронцов, А.Г.Кудрин, Н.А.Чиченев: Деформации и напряжения при обработке металлов давлением,

Москва: Металлургия 1974.

87. В.М.Сегал: Технологические задачи теории пластичности, Минск: Наука и техника 1977.
88. Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń pod redakcją Zbigniewa Orłosia, Warszawa, PWN 1977.
89. А.Я.Александров, М.Х.Ахметзянов: Поляризационно - оптические методы механики деформируемого тела, Москва: Наука 1973.
90. А.И.Лисицын, В.Я.Остренко: Моделирование процессов обработки металлов давлением, Киев: Техника 1976.
91. T. Pełczyński: O krzywych umocnienia, Obróbka Plastyczna, XIV, 1, 1975, str.5-34.
92. Г.Д.Дель: Определение напряжений в пластической области по распределению твердости, Москва: Машиностроение 1971.
93. Z. Jasieński: Wpływ nierównomierności odkształcenia na zależność naprężenia właściwego od stopnia deformacji w szyjce rozciąganej próbki metalowej, Arch. Hut., X, 2, 1965, str.189-239.
94. J.N.Robinson, A.H.Shabaik: The determination of the relationship between strain and microhardness by means of viscoplasticity, Metallurgical Trans., 4, 9, 1973, str. 2091-2095.
95. А.К.Ишлинский: Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля, Прикл. Мат. Мех., 8, 3, 1944.
96. J. Piwnik: An experimental and numerical analysis of stresses, velocities and work - hardening in axially symmetric extrusion process of an aluminum alloys, 24th Polish Solid Mechanics Conference, Jachranka, 22-27 August 1983, str. 131-132.

97. В.И.Уральскиц, В.С.Плахотин, Н.И.Шейтель и др.: Деформация металлов жидкостью высокого давления, Москва: Металлургия 1976.
98. Н.И.Давиденков, Н.И.Спиридонова: Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца, Заводская лаборатория, 6, 1945, стр.583-593.
99. Г.Д.Дель, Ф.Т.Томилов, В.А.Огородников: Напряженное состояние при теплом пресовании стали, Изв. ВУЗ, Чёрная металлургия, 4, 1975, стр.105-103.
100. J.Gronostajski, A.Niechajowicz: Zastosowanie wizjoplastyczności do badania rozkładu odkształceń w procesach niestacjonarnych, Obróbka Plastyczna 79, Materiały Konferencji Komitetu Metalurgii PAN i IMŻ, Kazimierz Dolny 1979.
101. T.Bednarski: Przyrostowa metoda analizy siatek w badaniach kinematyki procesów obróbki plastycznej, Metalurgia i Odlewnictwo, T.8, Z.2, 1982.
102. F.Mawunda, J.Zasadziński: Strefy martwe w procesie współbieżnego wyciskania metali, Archiwum Hutnictwa, T.28, Z.3, 1983.
103. A.U.Suljoadikusumo, O.W.Dillon: Temperature Distribution for a steady axisymmetric extrusion, with an application to Ti-6 Al-4 V, part: 1,2,3, Journal of Thermal Stresses, 2:97 - 281, 1979.
104. A.Bjorck, G.Dahlquist: Metody numeryczne, PWN, W-wa 1983.
105. J.Stoer: Wstęp do metod numerycznych, tom pierwszy, PWN, W-wa 1979.
106. A.Ralston: Wstęp do analizy numerycznej, PWN, W-wa 1983.

107. G.E.Forsythe, M.A.Malcolm, C.E.Moler: Computer methods for mathematical computations, Prentise - Haal Inc. Englewood Cliffs, N.J. - 07632, 1977.
108. Б.В.Василенко: Сплавы - функции: теория, алгоритмы, программы, Наука, Сибирское Отделение, Новосибирск 1983.
109. J.Piwnik: Niejednorodność plastyczna stopu PA2 w procesie wyciskania, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, T. XXX, 3-4, 22, 1984.
110. Р.И.Непершин: О решении задач плоского пластического течения жесткопластического тела с кинематическими граничными условиями, Расчёты пластического течения, Наука, Москва 1975.
111. J.Piwnik: Teoretyczna analiza procesów wyciskania rur z uwzględnieniem wzmocnienia materiału, Rudy Metale, R29, 1984, nr 9, str. 382-386.
112. J.Piwnik: Wykorzystanie doświadczeń modelowych do analizy odkształceń w złożonych procesach obróbki plastycznej, Materiały X Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, W-wa 3-4 grudnia 1982.
113. J.Piwnik: Modelowania procesów wyciskania promieniowego, Materiały XI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, W-wa 6-8 września 1984.
114. J.Piwnik: Uproszczona metoda obliczeń pól prędkości i naprężeń w procesach wyciskania osiowo-symetrycznego, (w przygotowaniu).

115. И.Л.Перлин, Л.Х.Райтбарг: Теория прессования металлов, Москва, Металлургия 1975.
116. Advances in Déformation Processing. Edited by John. Burke and Volker Weiss. Plenum Press. New York and London 1978.

SPIS TREŚCI

	str.
1. WPROWADZENIE	3
1.1. Uwagi ogólne	3
1.2. Cel i zakres pracy	7
2. METODY OBLICZENIOWE PROCESÓW OBRÓBKII PLASTYCZNEJ UWZGLĘDNIAJĄCE WZMOCNIENIE MATERIAŁU	12
2.1. Formułowanie zagadnień brzegowych i uwagi o metodach ich rozwiązywania	12
2.2. Iteracyjne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych z uwzględnieniem wzmocnienia materiału	22
2.3. Doświadczalno-obliczeniowe metody rozwiązy- wania zagadnień brzegowych z uwzględnieniem wzmocnienia materiału	28
2.4. Podsumowanie	54
3. DOŚWIADCZALNA ANALIZA PROCESU WYCISKANIA OSIOWO - SYMETRYCZNEGO	56
3.1. Uwagi ogólne	56
3.2. Kinematyka procesu wyciskania	57
3.3. Niejednorodność plastyczna	117
3.4. Podsumowanie i wnioski	125
4. TEORETYCZNA ANALIZA PROCESU WYCISKANIA OSIOWO - SYMETRYCZNEGO /teoria techniczna/	128
4.1. Uwagi wstępne	128
4.2. Założenia i zależności podstawowe	130
4.3. Konstrukcja teoretycznej funkcji prądu	138

4.4. Opis rzeczywistych warunków brzegowych	153
4.5. Wyznaczanie funkcji prądu	162
4.6. Obliczenia wielkości kinematycznych w świetle wyników doświadczalnych	171
4.7. Wyniki obliczeń pól naprężeń	182
4.8. Podsumowanie i wnioski	197
5. ZAKOŃCZENIE	200
6. LITERATURA	202