

6.65 — konsolidacja

Ryszard Uklejewski

ZASTOSOWANIE METOD TEORII
ELEKTRYCZNYCH LINII PRZESYŁOWYCH
DO ANALIZY JEDNOWYMIAROWYCH
ZAGADNIEN DYNAMICZNYCH
TEORII KONSOLIDACJI

p. 269

23/1983



WARSZAWA 1983

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 lutego 1983 r.

57014



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd. 0,6. Ark.druk. 1,5.

Oddano do drukarni w maju 1983 r.

Nr zamówienia 445/83 M-13.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

ZASTOSOWANIE METOD TEORII ELEKTRYCZNYCH LINII PRZESYŁOWYCH
DO ANALIZY JEDNOWYMIAROWYCH ZAGADNIĘĆ DYNAMICZNYCH
TEORII KONSOLIDACJI

1. Wstęp

W pracach [9],[10] przedstawiono system analogii elektromechanicznych pomiędzy jednoosiowym stanem odkształcenia ośrodków porowatych, opisanym równaniami teorii konsolidacji M.A. Biot'a [1], a układem dwóch elektrycznych linii przesyłowych. Szczegółowiej przedstawiono tam analogie dla zagadnień quasiostatycznych; zasygnalizowano też możliwość rozszerzenia tych analogii na zagadnienia dynamiczne. Niniejsza praca dotyczy właśnie owego rozszerzenia. Przedstawiono tu elektryczny analog jednoosiowego dynamicznego stanu odkształcenia ośrodków porowatych. Stwierdzono, że analogie można rozszerzyć na zagadnienia dynamiczne w ramach tego samego systemu analogii elektromechanicznych /systemu Firestone'a/, w którym przeprowadzono porównanie zagadnień quasiostatycznych. Za pomocą metod i pojęć teorii elektrycznych linii przesyłowych zbudowano rozwiązanie ogólne dla jednoosiowego stanu odkształcenia ośrodków porowatych, w przypadku przebiegów sinusoidalnych o dowolnie dużej pulsacji. Stwierdzono występowanie dwóch rodzajów fal, związanych z różnymi stałymi propagacji. Rozwiązanie ogólne dla dowolnych pulsacji sprowadza się /przy założeniach odpowiadających przejściu do małych pulsacji/ do rozwiązania dla zagadnień quasiostatycznych, przedstawionego w pracach [9],[10].

2. Elektryczny analog jednoosiowego dynamicznego stanu odkształcenia ośrodka porowatego

2.1. Jednoosiowy dynamiczny stan odkształcenia ośrodka porowatego

Jednoosiowy dynamiczny stan odkształcenia ośrodka porowatego opisują następujące równania w teorii M.A.Biota [1],[2]

- związki fizyczne:

$$(2.1) \quad \sigma_{11} = (2N+A) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + Q \frac{\partial w_1}{\partial x_1}$$

$$(2.2) \quad \sigma = Q \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + R \frac{\partial w_1}{\partial x_1}$$

gdzie :

σ_{11} - naprężenia szkieletu

σ - naprężenia cieczy

u_1 - współrzędna wektora przemieszczenia szkieletu w kierunku x_1

w_1 - współrzędna wektora przemieszczenia cieczy w kierunku x_1

N, A, Q, R - stałe Biota-Willias ;

- równania ruchu :

$$(2.3) \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = (S_1 + S_2) \frac{\partial v_1}{\partial t} + b(v_1 - v_2) - S_2 \frac{\partial V_1}{\partial t}$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = (S_2 + S_2) \frac{\partial V_1}{\partial t} - b(V_1 - v_2) - S_2 \frac{\partial v_1}{\partial t}$$

$$(2.5) \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = S_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + S_2 \frac{\partial V_1}{\partial t}$$

gdzie: S_1, S_2, S_2 - są to dodatnio określone współczynniki masowe; S_1 - dotyczy szkieletu, S_2 - cieczy, zaś S_2 interpretowany jest jako parametr sprzężenia dynamicznego pomiędzy cieczą a szkieletem [2] ;

$V_1 = \frac{\partial W_1}{\partial t}$ - współrzędna wektora prędkości szkieletu w kier. x_1

$V_2 = \frac{\partial W_2}{\partial t}$ - współrzędna wektora prędkości cieczy w kier. x_1

$b = \frac{g}{c}$; C - współczynnik przepuszczalności ośrodka porowatego.

Zbierczy układ równań otrzymuje się w postaci:

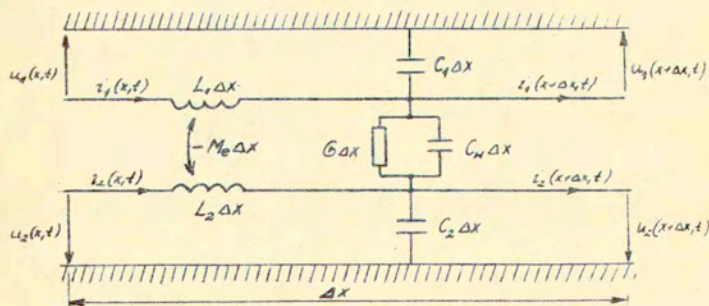
$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_1^2} - \frac{g_1}{2N+M} \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} = - \frac{H}{R(2N+M)} \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{g_2}{2N+M} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}$$

$$(2.7) \quad \frac{1}{b} \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{H}{R} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{g_2 + g_1}{b} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_1 \partial t^2} - \frac{g_1}{b} \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1 \partial t^3}$$

gdzie: $M = A - \frac{Q^2}{R}$; $H = Q + R$.

2.2. Sprzężone elektryczne linie przesyłowe

Rozważamy układ dwóch elektrycznych linii przesyłowych, sprzężonych magnetycznie, konduktancyjnie i pojemnościowo. Odcinek elementarny Δx tego układu przedstawi rysunek 1.



Rys.1. Sprzężone elektryczne linie przesyłowe, odcinek elementarny o długości Δx

Dla układu z Rys.1, na podstawie teorii elektrycznych linii długich [5], otrzymuje się następujące równania:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M_e \frac{\partial i_2}{\partial t} \\ \frac{\partial i_1}{\partial x} &= -C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - C_M \frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2) - G(u_1 - u_2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M_e \frac{\partial i_1}{\partial t} \\ \frac{\partial i_2}{\partial x} &= -C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - C_M \frac{\partial}{\partial t} (u_2 - u_1) - G(u_2 - u_1), \end{aligned}$$

- gdzie:
- $u_1, (u_2)$ - napięcie przewodowe linii 1 (2)
 - $i_1, (i_2)$ - prąd w linii 1 (2)
 - L_1 - indukcyjność własna linii 1 na jednostkę długości
 - L_2 - indukcyjność własna linii 2 na jednostkę długości
 - M_e - indukcyjność wzajemna pomiędzy liniami 1 i 2
 - C_1 - pojemność własna linii 1 na jednostkę długości
 - C_2 - pojemność własna linii 2 na jednostkę długości
 - C_M - pojemność wzajemna pomiędzy liniami 1 i 2 na jednostkę długości.

Uwzględniając zależność pomiędzy strumieniem magnetycznym skojarzonym \mathcal{H} i napięciem u [5]

$$(2.9) \quad u(x,t) = \frac{\partial \mathcal{H}(x,t)}{\partial t},$$

na podstawie równań (2.8) otrzymuje się ważne dla ustalenia analogii związku:

$$(2.10) \quad i_1 = \int_1 S = \frac{L_2}{L^2} \frac{\partial (-\mathcal{H}_1)}{\partial x} + \frac{M_e}{L^2} \frac{\partial (-\mathcal{H}_2)}{\partial x}$$

$$(2.11) \quad \dot{i}_2 = \int_2 \cdot S = \frac{M_e}{L^2} \frac{\partial(-\mathcal{H}_1)}{\partial x} + \frac{L_1}{L^2} \frac{\partial(-\mathcal{H}_2)}{\partial x}$$

gdzie:

$$L^2 = L_1 L_2 - M_e^2$$

S - powierzchnia przekroju przewodu linii

$j = \frac{1}{S}$ - gęstość prądu w przewodzie ;

$$(2.12) \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = (C_1 + C_M) \frac{\partial(-u_1)}{\partial t} + G[(-u_1) - (-u_2)] - C_M \frac{\partial(-u_2)}{\partial t}$$

$$(2.13) \quad \frac{\partial i_2}{\partial x} = (C_2 + C_M) \frac{\partial(-u_2)}{\partial t} + G[(-u_2) - (-u_1)] - C_M \frac{\partial(-u_1)}{\partial t}$$

$$(2.14) \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} + \frac{\partial i_2}{\partial x} = C_1 \frac{\partial(-u_1)}{\partial t} + C_2 \frac{\partial(-u_2)}{\partial t} ,$$

a ponadto :

$$(2.15) \quad \frac{\partial^2(-\mathcal{H}_1)}{\partial x^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2(-\mathcal{H}_1)}{\partial t^2} = -(L_1 + M_e) \frac{\partial i_1}{\partial x} + L_1 C_2 \frac{\partial^2(-\mathcal{H}_2)}{\partial x^2}$$

$$(2.16) \quad \frac{1}{G} \frac{\partial^2 i_1}{\partial x^2} = \frac{L_1 L_2 - M_e^2}{L_1} \frac{\partial i_2}{\partial t} - \frac{L_1 + M_e}{L_1} \frac{\partial^2(-\mathcal{H}_1)}{\partial x \partial t} + \frac{C_2 + C_M}{G} \frac{\partial^2(-\mathcal{H}_2)}{\partial x \partial t^2} - \frac{C_M}{G} \frac{\partial^3(-\mathcal{H}_2)}{\partial x \partial t^2} .$$

2.3. Analogie

Równania (2.10) i (2.11) odpowiadają związki fizyczne (2.1) i (2.2) ; równania (2.12) ÷ (2.14) - równania ruchu (2.3) ÷ (2.5), zaś równaniom (2.15) i (2.16) - odpowiede zbiorczy układ równań (2.6) i (2.7) .

Układ z Rys.1 jest więc elektrycznym analogiem jednoosiowego dynamicznego stanu odkształcenia ośrodka porowatego.

Tabela 1. Zestawienie wielkości podobnych

Wielkości mechaniczne	Wielkości elektryczne
σ_{11} - naprężenia szkieletu	$J_1 = \frac{I_1}{S}$ - gęstość prądu w linii 1
σ - naprężenia cieczy	$J_2 = \frac{I_2}{S}$ - gęstość prądu w linii 2
W_1 - przemieszczenie szkieletu	$- \mathcal{H}_1$ - strumień magnetyczny linii 1
W_2 - przemieszczenie cieczy	$- \mathcal{H}_2$ - strumień magnetyczny linii 2
$b = \frac{1}{C}$	G/S
$2N+A$	$\frac{L_2}{I_2^2} / S$
Q	$\frac{M_e}{I_2^2} / S$
R	$\frac{L_1}{I_1^2} / S$
S_1	C_1 / S
S_2	C_2 / S
S_a	C_n / S

Z Tabeli 1 wynika, że omawiana analogia należy do systemu analogii elektromechanicznych Firestone'a /por. [11],[12],[6] /.

Zanotujemy jeszcze odpowiedniości:

$$\begin{aligned}
 L_1 \cdot S &\longleftrightarrow \frac{1}{2N+M} \\
 (2.17) \quad L_2 \cdot S &\longleftrightarrow \frac{2N+A}{R(M+2N)} = \frac{1}{R} + \frac{Q^2}{R^2(M+2N)} \\
 M_e \cdot S &\longleftrightarrow \frac{Q}{R(M+2N)} .
 \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie ogólne równań podobnych, przy przebiegach sinusoidalnych o dowolnej pulsacji

Będąmy układ sprzężonych linii długich z Rys.1, w stanie ustalonym przy wymuszeniu prądem sinusoidalnie zmiennym o dowolnej pulsacji ω . Przyjmujemy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} i_k &= \text{Im} (I_k e^{j\omega t}) \\ u_k &= \text{Im} (U_k e^{j\omega t}) \quad k=1,2. \end{aligned}$$

Wielkości U_k, I_k są amplitudami zespolonymi napięć i prądów / $U_k = |U_k| e^{j\varphi_k}$, $I_k = |I_k| e^{j\psi_k} /$, $j = \sqrt{-1}$ - jest jednostką urojoną.

Wprowadzamy impedancje zespolone:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} Z_1^{(e)} &= j\omega L_1 & Y_1^{(e)} &= j\omega C_1 \\ Z_2^{(e)} &= j\omega L_2 & Y_2^{(e)} &= j\omega C_2 \\ Z_H^{(e)} &= -j\omega M_0 & Y_H^{(e)} &= G + j\omega C_M \dots \end{aligned}$$

Z równań (2.8) opisujących elektryczny analog jednoosiowego stanu odkształcenia ośrodka porowatego, wprowadzając (3.1) oraz (3.2), otrzymujemy /popodzieleniu stronami przez $e^{j\omega t}$ / następujący układ równań, zapisany w postaci macierzowej

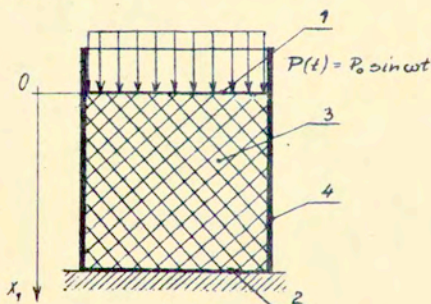
$$(3.3) \quad \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Z_1^{(e)} & -Z_H^{(e)} \\ 0 & 0 & -Z_H^{(e)} & -Z_2^{(e)} \\ -\tilde{Y}_1^{(e)} & Y_H^{(e)} & 0 & 0 \\ Y_H^{(e)} & -\tilde{Y}_2^{(e)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{Y}_4^{(e)} &= Y_4^{(e)} + Y_M^{(e)} \\ \tilde{Y}_2^{(e)} &= Y_2^{(e)} + Y_M^{(e)} \end{aligned}$$

Równanie macierzowe (3.3) jest to tzw. jednorodne równanie stanu / [7], [3] /.

Badaniu układu sprzężonych linii długich z Rys.1, przy wymuszeniu prądem sinusoidalnie zmiennym, odpowiada — przez analogię — badanie jednoosiowego stanu odkształcenia ośrodka porowatego przy równomiernym obciążeniu go siłą P/t , sinusoidalnie zmienną o dowolnej pulsacji ω /Rys.2/.



Rys.2. Jednoosiowy stan odkształcenia ośrodka porowatego, 1,2- powierzchnie: górna i dolna ośrodka porowatego 3 /przepuszczalne dla cieczy, bądź nie/, 4 - nieodkształcalna tuleja.

Jednoosiowy stan odkształcenia ośrodka porowatego przy przebiegach sinusoidalnych o dowolnej pulsacji ω można zatem opisać następującym macierzowym równaniem stanu:

$$(3.5) \quad \frac{d}{dx_1} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{V}_1 \\ \underline{G}_{11} \\ \underline{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Z_1 & -Z_N \\ 0 & 0 & -Z_N & -Z_2 \\ -\tilde{Y}_1 & Y_N & 0 & 0 \\ Y_N & -\tilde{Y}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{V}_1 \\ \underline{G}_{11} \\ \underline{G} \end{bmatrix}$$

gdzie: $\underline{v}_1, \underline{V}_1$ - amplitudy zespolone prędkości szkieletu i ciecży w kierunku x_1

$\underline{G}_{11}, \underline{G}$ - amplitudy zespolone naprężeń szkieletu i ciecży w kierunku x_1 .

Określono następujące impedancje zespolone ośrodka porowatego:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} Z_1 &= j\omega \frac{1}{M+2N} \\ Z_2 &= j\omega \frac{2N-A}{R(M+2N)} = j\omega \left[\frac{1}{R} + \frac{A^2}{R^2(M+2N)} \right] \\ Z_N &= -j\omega \frac{A}{R(M+2N)} \\ Y_N &= b + j\omega S_a \\ Y_1 &= j\omega S_1, \quad Y_2 = j\omega S_2 \\ \tilde{Y}_1 &= Y_1 + Y_N \\ \tilde{Y}_2 &= Y_2 + Y_N \end{aligned}$$

Równanie stanu (3.5) można zapisać w zwartej postaci

$$(3.7) \quad \frac{d \underline{S}(x_1)}{dx_1} = \underline{A} \underline{S}(x_1)$$

$$(3.8) \quad \mathbf{S}(x_1) = \begin{bmatrix} \underline{V}_1(x_1) \\ \underline{V}_2(x_1) \\ \underline{G}_1(x_1) \\ \underline{G}_2(x_1) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Z_1 & -Z_M \\ 0 & 0 & -Z_M & -Z_2 \\ -\tilde{Y}_1 & Y_M & 0 & 0 \\ Y_M & -\tilde{Y}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{S}(x)$ - wektor stanu, \mathbf{A} - macierz układu.

Rozwiązaniem równania (3.7) jest wektor

$$(3.9) \quad \mathbf{S}(x_1) = e^{\mathbf{A}x_1} \mathbf{S}(0)$$

gdzie $e^{\mathbf{A}x_1}$ jest tzw. macierzą transmisyjną /transycyjną/ układu [7], $\mathbf{S}(0)$ - jest wektorem stanu na wejściu układu / $x_1=0$ /.

W ten sposób rozwiązanie równania (3.5), przy znajomości wektora stanu $\mathbf{S}(0)$, sprowadza się do wyznaczenia macierzy transmisyjnej $e^{\mathbf{A}x_1}$ /por. Zał. I/. W tym celu należy najpierw rozwiązać równanie charakterystyczne macierzy \mathbf{A}

$$(3.10) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

i wyznaczyć jej wartości własne.

Rozwiązanie wyznacznika w równ. (3.10) daje w wyniku następujące dwukwadratowe równanie charakterystyczne

$$(3.11) \quad \lambda^4 - \lambda^2(P_1 + P_2) + P_1 P_2 - Q_1 Q_2 = 0,$$

w którym oznaczono:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} P_1 &= Z_1 \tilde{Y}_1 - Z_M Y_M & P_2 &= Z_2 \tilde{Y}_2 - Z_M Y_M \\ Q_1 &= Z_M \tilde{Y}_2 - Z_1 Y_M & Q_2 &= Z_M \tilde{Y}_1 - Z_2 Y_M \end{aligned}$$

Pierwiastki równania (3.11)

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \gamma_1 \\ \lambda_{3,4} &= \pm \gamma_2 \end{aligned}$$

są wartościami własnymi macierzy A , przy czym

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{\bar{P} + K} \\ \gamma_2 &= \sqrt{\bar{P} - K} \end{aligned}$$

gdzie:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \bar{P} &= \frac{P_1 + P_2}{2}, & K &= \sqrt{(\Delta P)^2 + Q^2} \\ \Delta P &= \frac{P_1 - P_2}{2}; & Q^2 &= Q_1 Q_2. \end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia Cayley'a - Hamiltona /Zał.I, tw-o 2/ spełnione jest następujące równanie macierzowe

$$(3.16) \quad A^4 - (P_1 + P_2)A^2 + (P_1 P_2 - Q_1 Q_2) \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

Dowolną potęgę A^k , $k \geq 4$, można więc przedstawić w postaci wielomianu macierzowego stopnia nie większego niż 3.

Na podstawie twierdzenia I.3 /Zał.I/ piszemy

$$(3.17) \quad f(A) = e^{A x_1} = g_0 \mathbf{1} + g_1 A + g_2 A^2 + g_3 A^3$$

gdzie $g_i(x_1)$, $i=0,1,2,3$ są współczynnikami tzw. wielomianu tworzącego zmienną zespoloną s

$$(3.18) \quad g(s) = g_0 + g_1 s + g_2 s^2 + g_3 s^3.$$

Na podstawie równ.(I.14) /Zał.I/ otrzymuje się następujący

układ równań

$$(3.19) \quad g_0 + g_1 \lambda_k + g_2 \lambda_k^2 + g_3 \lambda_k^3 = e^{\lambda_k x_1}, \quad k=1,2,3,4.$$

Równania (3.19) i (3.17), przy wykorzystaniu związków (3.13), mogą być połączone za pomocą wyznacznika

$$(3.20) \quad \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 & e^{\gamma_1 x_1} \\ 1 & -\gamma_1 & \gamma_1^2 & -\gamma_1^3 & e^{-\gamma_1 x_1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \gamma_2^3 & e^{\gamma_2 x_1} \\ 1 & -\gamma_2 & \gamma_2^2 & -\gamma_2^3 & e^{-\gamma_2 x_1} \\ 1 & A & A^2 & A^3 & e^{A x_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwijając ten wyznacznik według ostatniej kolumny, otrzymuje się

$$(3.21) \quad e^{A x_1} = \left[\frac{\text{sh}(\gamma_1 x_1)}{\gamma_1(\gamma_1^4 - \gamma_2^4)} - \frac{\text{sh}(\gamma_2 x_1)}{\gamma_2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \right] A^3 +$$

$$+ \frac{\text{ch}(\gamma_1 x_1) - \text{ch}(\gamma_2 x_1)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} A^2 +$$

$$+ \left[\frac{\gamma_1^2 \text{sh}(\gamma_2 x_1)}{\gamma_2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \quad \gamma_2 \text{sh}(\gamma_1 x_1) \right] A +$$

$$+ \frac{\gamma_1^2 \text{ch}(\gamma_2 x_1) - \gamma_2^2 \text{ch}(\gamma_1 x_1)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \mathbf{1}.$$

Wprowadzamy oznaczenia literowe wyrazów macierzy $e^{A x_1}$ według wzoru

$$(3.22) \quad e^{A x_1} = \left[a_{kl} \right]_{\substack{1 \leq k \leq 4 \\ 1 \leq l \leq 4}}$$

Po wykonaniu operacji występujących w równ. (3.21), otrzymuje się:

$$a_{11} = \frac{K+\Delta P}{2K} \operatorname{ch}(j_1 x_1) + \frac{K-\Delta P}{2K} \operatorname{ch}(j_2 x_1)$$

$$a_{12} = \frac{Q_1}{2K} [\operatorname{ch}(j_1 x_1) - \operatorname{ch}(j_2 x_1)]$$

$$a_{13} = \frac{Z_M Q_1 - Z_1(K-\Delta P)}{2K j_2} \operatorname{sh}(j_2 x_1) - \frac{Z_M Q_1 + Z_1(K+\Delta P)}{2K j_1} \operatorname{sh}(j_1 x_1)$$

$$a_{14} = \frac{Z_2 Q_1 - Z_M(K-\Delta P)}{2K j_2} \operatorname{sh}(j_2 x_1) - \frac{Z_2 Q_1 + Z_M(K+\Delta P)}{2K j_1} \operatorname{sh}(j_1 x_1)$$

$$a_{21} = \frac{Q_2}{2K} [\operatorname{ch}(j_1 x_1) - \operatorname{ch}(j_2 x_1)]$$

$$a_{22} = \frac{Z_M Q_2 - Z_2(K+\Delta P)}{2K j_2} \operatorname{sh}(j_2 x_1) - \frac{Z_M Q_2 + Z_2(K-\Delta P)}{2K j_1} \operatorname{sh}(j_1 x_1)$$

$$a_{31} = \frac{Y_M Q_2 - \tilde{Y}_1(K+\Delta P)}{2K j_1} \operatorname{sh}(j_1 x_1) - \frac{Y_M Q_2 + \tilde{Y}_1(K-\Delta P)}{2K j_2} \operatorname{sh}(j_2 x_1)$$

$$a_{32} = \frac{\tilde{Y}_2 Q_2 + Y_M(K-\Delta P)}{2K j_2} \operatorname{sh}(j_2 x_1) - \frac{\tilde{Y}_2 Q_2 - Y_M(K+\Delta P)}{2K j_1} \operatorname{sh}(j_1 x_1)$$

$$a_{33} = a_{11}$$

$$a_{34} = a_{21}$$

$$Q_{41} = \frac{\tilde{Y}_1 Q_1 + Y_M (K + \Delta P)}{2K \gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 x_1) - \frac{\tilde{Y}_1 Q_1 - Y_M (K + \Delta P)}{2K \gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 x_1)$$

$$Q_{42} = \frac{Y_M Q_1 - \tilde{Y}_2 (K + \Delta P)}{2K \gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 x_1) - \frac{Y_M Q_1 + \tilde{Y}_2 (K + \Delta P)}{2K \gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 x_1)$$

$$Q_{43} = Q_{12}$$

$$(3.23) \quad Q_{44} = Q_{22}$$

Znaję macierz transmisyjną $e^{A x_1}$, na podstawie równ. (3.9), możemy przedstawić rozwiązanie równania stanu:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \underline{v}_1(x_1) = & \frac{(K + \Delta P) v_1(0) + Q_1 v_1(0)}{2K} \operatorname{ch}(\gamma_1 x_1) - \frac{(K + \Delta P) A_1^* + Q_1 A_2^*}{2K \gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 x_1) + \\ & + \frac{(K - \Delta P) v_1(0) - Q_1 v_1(0)}{2K} \operatorname{ch}(\gamma_2 x_1) - \frac{(K - \Delta P) A_1^* - Q_1 A_2^*}{2K \gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 x_1); \end{aligned}$$

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \underline{V}_1(x_1) = & \frac{(K - \Delta P) V_1(0) + Q_2 v_1(0)}{2K} \operatorname{ch}(\gamma_1 x_1) - \frac{(K - \Delta P) A_2^* + Q_2 A_1^*}{2K \gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 x_1) + \\ & + \frac{(K + \Delta P) V_1(0) - Q_2 v_1(0)}{2K} \operatorname{ch}(\gamma_2 x_1) - \frac{(K + \Delta P) A_2^* - Q_2 A_1^*}{2K \gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 x_1); \end{aligned}$$

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \underline{\sigma}_{11}(x_1) = & \frac{(K + \Delta P) \sigma_{11}(0) + Q_2 \sigma(0)}{2K} \operatorname{ch}(\gamma_1 x_1) - \frac{(K + \Delta P) B_1^* + Q_2 B_2^*}{2K \gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 x_1) + \\ & + \frac{(K - \Delta P) \sigma_{11}(0) - Q_2 \sigma(0)}{2K} \operatorname{ch}(\gamma_2 x_1) - \frac{(K - \Delta P) B_1^* - Q_2 B_2^*}{2K \gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 x_1); \end{aligned}$$

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \underline{\sigma}(x_1) = & \frac{(K - \Delta P) \sigma(0) + Q_1 \sigma_{11}(0)}{2K} \operatorname{ch}(\gamma_1 x_1) - \frac{(K - \Delta P) B_2^* + Q_1 B_1^*}{2K \gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 x_1) + \\ & + \frac{(K + \Delta P) \sigma(0) - Q_1 \sigma_{11}(0)}{2K} \operatorname{ch}(\gamma_2 x_1) - \frac{(K + \Delta P) B_2^* - Q_1 B_1^*}{2K \gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 x_1). \end{aligned}$$

Zastosowano następujące oznaczenia:

$$(3.28) \quad \begin{aligned} Z_1 \underline{\sigma}_{n1}(0) + Z_M \underline{\sigma}(0) &= A_1^{\circ} \\ Z_2 \underline{\sigma}(0) + Z_M \underline{\sigma}_{n1}(0) &= A_2^{\circ} \\ \tilde{Y}_1 \underline{v}_1(0) - Y_M \underline{V}_1(0) &= B_1^{\circ} \\ \tilde{Y}_2 \underline{V}_1(0) - Y_M \underline{v}_1(0) &= B_2^{\circ} \end{aligned}$$

Funkcje (3.24) ÷ (3.27) spełniają układ równań (3.5) oraz warunki brzegowe dla $x_1=0$.

Z postaci rozwiązania wynika, że mamy do czynienia z dwoma rodzajami fal, związanych ze stałymi propagacji γ_1 i γ_2 . Fale te nazywać będziemy odpowiednio falami pierwszego i drugiego rodzaju /por.[2]/.

Jeżeli w otrzymanym rozwiązaniu przedstawimy funkcje hiperboliczne w zależności od funkcji wykładniczych, czyli

$$(3.29) \quad sh(\gamma x_1) = \frac{e^{\gamma x_1} - e^{-\gamma x_1}}{2}; \quad ch(\gamma x_1) = \frac{e^{\gamma x_1} + e^{-\gamma x_1}}{2}$$

to można będzie wyodrębnić fale padające i odbite. Fale padające związane są z czynnikiem $e^{-\gamma x_1}$, zaś odbite z $e^{\gamma x_1}$. Rozróżnienie to dotyczy zarówno fal pierwszego jak i drugiego rodzaju.

4. Przejście do rozwiązania dla małych pulsacji

Zbadamy przejście od rozwiązania ogólnego (3.24)÷(3.27) dla dowolnie dużych pulsacji ω , do rozwiązania dla przebiegów quasistacyjnych przedstawionego w pracach [9],[10].

W przypadku małych pulsacji ω można pominąć siły bezwładności

w stosunku do sił oporu przy ruchu względnym /opór filtracji/ —
- równania ruchu (2.3) ÷ (2.5) przechodzą w równania równowagi wewnętrznej

$$(4.1) \quad \frac{\partial \mathcal{S}_M}{\partial x_1} = b (v_1 - V_1)$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_2} = b (V_1 - v_1)$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial \mathcal{S}_M}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_1} = 0$$

Formalnie, oznacza to przyjęcie

$$(4.4) \quad S_1 = S_2 = S_a = 0$$

W schemacie elektrycznym na Rys.1 pominięte zostają pojemności / $C_1 = C_2 = C_w = 0$ / — otrzymuje się w ten sposób elektryczny analog jednoosiowego quasistatycznego stanu odkształcenia ośrodka porowatego / por. [9], [10] /.

Założenie (4.4) implikuje następujące warunki:

- z równania (3.6)

$$(4.5) \quad Y_1 = Y_2 = 0, \quad Y_M = b$$

$$Y_1 = Y_2 = Y_M = b ;$$

- z równania (3.12)

$$(4.6) \quad P_1 = Y_M p \quad ; \quad P_2 = Y_M q$$

$$Q_1 = -P_1 \quad ; \quad Q_2 = -P_2 ,$$

gdzie:

$$(4.7) \quad p = Z_1 - Z_M \quad ; \quad q = Z_2 - Z_M ;$$

- z równania (3.15)

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{Y_M (p+q)}{2} \\ (4.8) \quad \Delta P &= \frac{Y_M (p-q)}{2} \\ K &= \bar{P} \quad ; \quad Q^2 = Y_M^2 p q \quad ; \end{aligned}$$

- z równania (3.14)

$$\begin{aligned} (4.9) \quad \gamma_1 &= \sqrt{Y_M (p+q)} = \gamma \\ \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

Oznaczamy :

$$\begin{aligned} pZ_2 + qZ_M = qZ_1 + pZ_M = Z_1 Z_2 - Z_M^2 = k \\ (4.10) \quad \frac{Z_1}{Y_M} = \sqrt{\frac{p+q}{Y_M}} = Z_0 \end{aligned}$$

Z_0 nazwano impedancją charakterystyczną ośrodka porowatego [9], [10] .

Podstawiając powyższe zależności do równań (3.24) ÷ (3.27) otrzymuje się

$$\begin{aligned} (4.11) \quad \underline{y}_1(x_1) &= \frac{p[\underline{y}_1(0) - \underline{y}_2(0)]}{p+q} \operatorname{ch}(\gamma x_1) - \frac{p[p\underline{\sigma}_{M1}(0) - q\underline{\sigma}(0)]}{(p+q)\gamma} \operatorname{sh}(\gamma x_1) + \\ &+ \frac{q\underline{y}_2 + p\underline{y}_1(0)}{p+q} - \frac{k[\underline{\sigma}_{M1}(0) + \underline{\sigma}(0)]}{p+q} x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.12) \quad \underline{v}_1(x_1) &= -\frac{q[\underline{v}_1(0) - \underline{v}_2(0)]}{p+q} \operatorname{ch}(\gamma x_1) + \frac{q[p\underline{\sigma}_{M1}(0) - q\underline{\sigma}(0)]}{(p+q)\gamma} \operatorname{sh}(\gamma x_1) + \\ &+ \frac{q\underline{v}_2(0) + p\underline{v}_1(0)}{p+q} - \frac{k[\underline{\sigma}_{M1}(0) + \underline{\sigma}(0)]}{p+q} x_1 \end{aligned}$$

$$(4.13) \quad \underline{S}_{11}(x_1) = \frac{p \underline{S}_{11}(0) - q \underline{S}(0)}{p+q} \operatorname{ch}(\gamma x_1) - \frac{v_1(0) - \underline{V}_1(0)}{Z_0} \operatorname{sh}(\gamma x_1) + \\ + \frac{q[\underline{S}_{11}(0) + \underline{S}(0)]}{p+q} - O \cdot x_1$$

$$(4.14) \quad \underline{S}(x_1) = - \frac{p \underline{S}_{11}(0) - q \underline{S}(0)}{p+q} \operatorname{ch}(\gamma x_1) + \frac{v_1(0) - \underline{V}_1(0)}{Z_0} \operatorname{sh}(\gamma x_1) + \\ + \frac{p[\underline{S}_{11}(0) + \underline{S}(0)]}{p+q} - O \cdot x_1$$

Równania (4.11) ÷ (4.14) są identyczne z równaniami otrzymanymi w pracach [9], [10]; występuje tu tylko jeden rodzaj fal / $\beta = 0$ na mocy (4.9) / .

LITERATURA

- [1] Biot M.A., General theory of three-dimensional consolidation, J.Appl.Phys., 12, p.115, 1941.
- [2] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, Part I,II, J.Acoust.Soc. of America, 28, 2, 1956.
- [3] Cholewicki T., Elektryczne linie długie i układy drabinkowe niejednorodne, PWN, Warszawa 1974.
- [4] Kowalczyk B., Macierze i ich zastosowania, WNT, Warszawa 1976.
- [5] Krakowski M., Elektrotechnika teoretyczna t.1, PWN, Warszawa-Poznań 1979.
- [6] Małecki I., Rozszerzenie poprawionego systemu analogii elektromechanicznych na ośrodki ciągłe, izotropowe, Arch.Elektrot. 2, 1953.
- [7] Ogata K., Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania, WNT Warszawa 1974 /tłum. z ang./ .
- [8] Opiał Z., Algebra wyższa, wyd.9, PWN Warszawa 1976.

- [9] Uklejewski R., Zastosowanie analogii elektromechanicznych w teorii konsolidacji, Prace IPPT PAN 61/1979 .
- [10] Uklejewski R., Krakowski M., Electromechanical analogies for the theory of consolidation, Rozpr.Inż./w druku/
- [11] Wejs K., Analogie ; Poradnik Inżyniera Elektryka, t.1, WNT ,
Warszawa 1973.
- [12] Wehr J., Analogie elektro-mechaniczno-akustyczne dla układów o stałych skupionych i rozłożonych w świetle analizy wymiarowej, Arch.Akust., 2,3, str.211 - 226, 1967.

Z A Ł A C Z N I K I

/ dot. wyznaczenia macierzy e^{Ax} [7],[8],[4] /

Dane jest macierzowe równanie różniczkowe

$$(I.1) \quad \frac{dS(x)}{dx} = AS(x),$$

gdzie $S(x)$ jest wektorem o n współrzędnych, A - stałą macierzę kwadratową stopnia n .

Rozwiązaniem równania (I.1) jest wektor

$$(I.2) \quad S(x) = e^{Ax} S(0),$$

gdzie funkcja wykładnicza e^{Ax} macierzy A zdefiniowana jest następującym szeregiem potęgowym tej macierzy

$$(I.3) \quad e^{Ax} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!}.$$

Funkcja e^{Ax} jest wzorem (I.3) dobrze określona, o czym przekonuje

Twierdzenie I.1 /zbieżność szeregu potęgowego macierzy/

Jeżeli szereg potęgowy

$$(I.4) \quad f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$$

zmiennej zespolonej s / c_k - współczynniki zespolone / jest wszędzie zbieżny, to szereg potęgowy macierzowy

$$(I.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

macierzy kwadratowej A jest bezwzględnie zbieżny dla dowolnej macierzy /kwadratowej/.

Wniosek. Poniżej szereg potęgowy

$$(I.6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^k$$

zmiennej zespolonej s , jest wszędzie zbieżny, więc macierzowy szereg potęgowy

$$(I.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}x)^k$$

jest bezwzględnie zbieżny dla dowolnej macierzy kwadratowej \mathbf{A} , przy ustalonym x . ■

Efektywne wyznaczenie macierzy $e^{\mathbf{A}x}$ umożliwiające:

Twierdzenie I.2 / Cayley'a - Hamiltona /

Każda macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia n spełnia swe równanie charakterystyczne, tzn. jeśli

$$(I.8) \quad d(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = (-1)^n (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n) = 0$$

jest równaniem charakterystycznym macierzy \mathbf{A} , to również

$$(I.9) \quad \mathbf{A}^n + c_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + c_{n-1} \mathbf{A} + c_n \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Wniosek. Jeśli $k \gg n$, gdzie n jest stopniem macierzy kwadratowej \mathbf{A} , to

$$(I.10) \quad \mathbf{A}^k = l_1 \mathbf{A}^{n-1} + l_2 \mathbf{A}^{n-2} + \dots + l_{n-1} \mathbf{A} + l_n \mathbf{1},$$

przy czym l_1, \dots, l_n są współczynnikami zespolonymi. ■

Twierdzenie I.3

Zbieżny szereg potęgowy $f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{A}^k$ macierzy \mathbf{A} o wymiarach $n \times n$, można przedstawić w postaci jednoznacznie określonego wielomianu macierzy \mathbf{A} stopnia $n - 1$, tj.

$$(I.11) \quad f(A) = g_0 I + g_1 A + \dots + g_{n-1} A^{n-1}$$

Wielomian

$$(I.12) \quad g(s) = g_0 + g_1 s + \dots + g_{n-1} s^{n-1}$$

zmiennej zespolonej s , nazywamy wielomianem tworzącym, ponieważ

$$(I.13) \quad f(A) = g(A)$$

Współczynniki wielomianu tworzącego wyznacza się z równości

$$(I.14) \quad f(\lambda_k) = g(\lambda_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

dla dowolnych wartości własnych, oraz z przyrównania pochodnych

$$(I.15) \quad f^{(r)}(\lambda_k) = g^{(r)}(\lambda_k), \quad r = 1, 2, \dots, p_k - 1$$

dla wielokrotnych wartości własnych / p_k - krotność wartości własnej λ_k / . ■