

Cao Van Phuong

**SZTYWNO-PLASTYCZNA POWŁOKA
OBCIĄŻONA
ZŁOŻONYM CIŚNIENIEM DYNAMICZNYM
PRZY DUŻYCH UCIĘCIACH**

48/1985

P.269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 13 maja 1985 r.

56901



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,45 Ark.druk. 1
Oddano do drukarni w listopadzie 1985 r.
Nr zamówienia 693/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

SZTYWNO-PLASTYCZNA POWŁOKA OBCIĄŻONA ZŁOŻONYM
CIŚNIENIEM DYNAMICZNYM PRZY DUŻYCH UGIĘCIACH

Streszczenie

Przedstawiono rozwiązanie zagadnienia sztywno-plastycznej powłoki walcowej obciążonej złożonym ciśnieniem dynamicznym. Przeprowadzono analizę wpływu zmian geometrii oraz zmian warunku plastyczności na postać równań ruchu powłoki. Podano relacje między teoriami, liniową i nieliniową. Wyprowadzono równania zapewniające możliwość śledzenia rzeczywistego procesu deformacji oraz wyznaczenia rzeczywistego czasu trwania ruchu powłoki.

1. WSTĘP

Rozwiązywanie nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych opisujących zagadnienia dynamiki konstrukcji plastycznych, ścisłymi metodami analitycznymi należy do zadań bardzo trudnych, a w przeważającej części przypadków wręcz niemożliwych. Z tego względu wielu autorów [5], [6], [7], [8] opracowało przybliżone metody rozwiązań umożliwiające podanie granicy przedziału, w którym znajduje się ścisłe rozwiązanie. W przytoczonych pracach formułowano pojęcie dopuszczalnego pola prędkości przemieszczeń, które jest generowane w konstrukcji w procesie jej deformacji. Ponieważ dopuszczalne pole prędkości badano niezależnie od rzeczywistego ruchu konstrukcji, zatem wyznaczony w ten sposób czas trwania procesu deformacji był parametrem dowolnym. Prezentowane w literaturze rozwiązania przybliżone pozwalają jedynie oszacować dolną lub górną gra-

nieę przedziału, w którym znajduje się rzeczywiste rozwiązanie. Przybliżone metody szacujące nie pozwalają śledzić procesu deformacji rozważanej konstrukcji, nie umożliwiają również badania wpływu warunku plastyczności oraz charakteru siły dynamicznej na końcowe ugięcia i czas trwania procesu. Metody przybliżone nie dają również odpowiedzi na pytanie o relacje między teorią liniową, a nieliniową.

W prezentowanej pracy wykorzystujemy poprzednią metodę liniaryzacji do rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych opisujących proces deformacji sztywno-plastycznej powłoki walcowej obciążonej złożonym ciśnieniem dynamicznym. Metoda ta umożliwia analizę wpływu zmian geometrii oraz zmian warunku plastyczności na postać równań ruchu powłoki. Przeprowadzono również analizę równań problemu podając relacje między teoriami, liniową i nieliniową. Przedstawiona metoda rozwiązania umożliwia śledzenie całego procesu deformacji powłoki oraz pozwala wyznaczyć rzeczywisty czas trwania tego procesu.

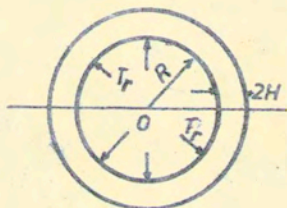
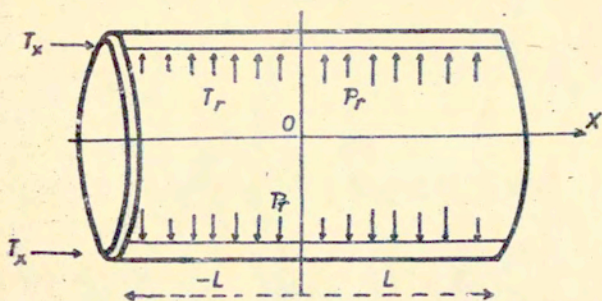
2. MATEMATYCZNE SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważamy cylindryczną powłokę o długości $2l$, promieniu R i grubości $2H$, obciążoną złożonym ciśnieniem dynamicznym (rys. 1). Ugięcia w realizowane w procesie deformacji powłoki spełniają warunek

$$2.1 \quad w \cong H \ll R$$

Rozważając równowagę sił i momentów działających na element powłoki otrzymujemy po przekształceniach następujące bezwymiarowe równania równowagi:

$$2.2 \quad \begin{aligned} n_{x,x} - \alpha_1 \ddot{u} &= \alpha_2 t_x \\ m_{x,xx} + \beta_1 (n_x w_{,x})_{,x} + \beta_2 n_\varphi - \beta_3 \ddot{w} &= \beta_4 t_r \end{aligned}$$



Rys. 1.

Funkcje bezwymiarowe występujące w równaniach (2.2) zdefiniowane zależnościami

$$m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad n_x = \frac{N_x}{N_0}, \quad n_\varphi = \frac{N_\varphi}{N_0}$$

$$M_0 = \sigma_0 H^2, \quad N_0 = 2\sigma_0 H, \quad T_x = T_{0x} t_x; \quad T_r = T_{0r} t_r$$

$$w = \frac{W}{R}, \quad u = \frac{U}{L}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}$$

Współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ określone są zależnościami

$$\alpha_1 = \frac{\rho_0 L^2 t^2}{2\sigma_0 H t_0^2}, \quad \alpha_2 = \frac{T_{ex} L}{2\sigma_0 H}$$

$$2\&4 \quad \beta_1 = \frac{N_0 R}{M_0}, \quad \beta_2 = \frac{N_0 L^2}{M_0 R}$$

$$\beta_3 = \frac{\sigma_0 R L^2 t^2}{M_0 t_0^2}, \quad \beta_4 = \frac{T_{or} L^2}{M_0}$$

Poszczególne symbole występujące w równaniach (2.2) oraz w zależnościach (2.3), (2.4) oznaczają:

ρ_0 - gęstość,

σ_0 - granica plastyczności na rozciąganie,

M_0 - moment uplastyczniający, $M_0 = \sigma_0 H^2$

N_0 - uplastyczniająca siła membranowa, $N_0 = 2 \sigma_0 H$,

M_x - moment gnący w kierunku osi x,

N_x, N_φ - składowe siły rozciągającej odpowiednio, osiowa i obwodowa,

T_x, T_r - zewnętrzne siły powierzchniowe,

W, U - składowe przemieszczenia odpowiednio, promieniowa i osiowa,

t_0 - czas trwania obciążenia.

Przyjmujemy następującą postać związków odkształceniowo-przemieszczeniowych

$$2\&5 \quad \epsilon_x^0 = \dot{u}_x + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \dot{w}_x' w_x'$$

$$K_x^0 = -\left(\frac{R}{L}\right) \dot{w}_{,xx}$$

$$\epsilon_\varphi^0 = \dot{w} \quad K_\varphi^0 = 0$$

Ogólną postać stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego przedstawimy zależnościami

$$\begin{aligned} 2:6 \quad \epsilon_x &= \mu \frac{\partial f}{\partial n_x} \quad , \quad \epsilon_\varphi = \mu \frac{\partial f}{\partial n_\varphi} \\ K_x &= \mu \frac{\partial f}{\partial m_x} \quad , \quad \mu > 0 \end{aligned}$$

w których funkcja f określa warunek plastyczności

$$2:7 \quad f(m_x, n_x, n_\varphi) = 0$$

Wykorzystujemy do rozważań warunku plastyczności zaproponowany przez Drucker'a i Sheell'a część którego wyraża się w sposób rys. 2 :

$$\begin{aligned} m_x &= \pm (1 - n_x^2) \\ 2:8 \quad n_\varphi &= 1 \end{aligned}$$

Równania równowagi rozwiązujemy spełniając następujące warunki brzegowe i początkowe

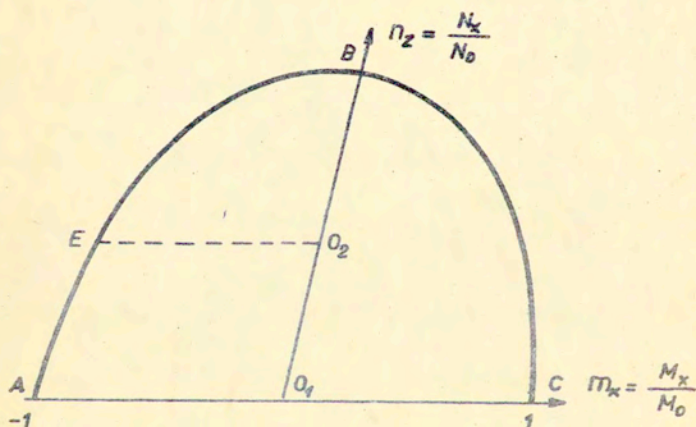
$$\begin{aligned} W(\pm 1, \tau) &= 0 \quad , \quad U(\pm 1, \tau) = 0 \\ W(x, 0) &= \dot{W}(x, 0) = 0 \\ 2:9 \quad U(x, 0) &= \dot{U}(x, 0) = 0 \\ m_x(\pm 1) &= 0 \end{aligned}$$

Ze względu na symetrię powłoki rozważamy tylko tę jej część, dla której $0 \leq x \leq 1$.

Całkowite przemieszczenie W^* dowolnego punktu powłoki posiadające dwie składowe, promieniową w oraz osiową

wyznaczamy z zależności

$$2.10 \quad W^*(x, \tau) = [u^2(x, \tau) + W^2(x, \tau)]^{\frac{1}{2}}$$



Rys. 2b

Spełniając warunek ustania ruchu powłoki żądamy, aby prędkość całkowitego przemieszczenia punktów była równa zero, tzn.

aby

$$2.11 \quad \dot{W}^*(x, \tau) = 0$$

Równania problemu rozwiązujemy rozdzielając zmienne niezależne w funkcji ugięcia $u = u_0(\tau)u_c(x)$, $W(x, \tau) = W_0(\tau)W_c(x)$ oraz w funkcjach obciążenia $t_r = t_r(\tau)t_r^0(x)$; $t_x = t_x(\tau)t_x^0(x)$

3. RÓWNANIA RUCHU

Równania ruchu powłoki określamy wykorzystując warunek plastyczności Drucker'a i Sheell'a (2.8).

W przypadku gdy w trakcie deformacji realizowany jest w powłoce stan naprężeń bez sił błonowych, co odpowiada punktowi A na warunku plastyczności rys.2, w którym $n_x=0$, $m_x=-1$, $n = -1$, równania problemu sprowadzą się do następujących bezwymiarowych równań ruchu

$$3.1 \quad \begin{aligned} \ddot{u}_0(\tau) &= \gamma_1 t_x(\tau) \\ \dot{w}_0(\tau) &= \gamma_2 (t_r(\tau) - \frac{A}{t_r}) \end{aligned}$$

gdzie:
$$\gamma_1 = \frac{\alpha_2 t_r^0}{\alpha_1 u_c}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2 t_r^0}{\beta_1 W_c}, \quad A = \frac{\beta_2}{\beta_4}$$

W przypadku, gdy powłoka znajduje się w stanie naprężeń bezmomentowych, co odpowiada punktowi B na warunku plastyczności rys.2, w którym $m_x=0$, $n_x=1$, $n = -1$, równania problemu sprowadzą się do następujących bezwymiarowych równań ruchu

$$3.2 \quad \begin{aligned} \ddot{u}_0(\tau) &= \gamma_1 t_x(\tau) \\ \dot{w}_0(\tau) &= \gamma_2 [t_r(\tau) - t_{rst}] \end{aligned}$$

gdzie
$$t_{rst} = \frac{\beta_2 - \beta_1 W_{,xx}}{\beta_4 t_r^0}$$

W przypadku, gdy powłoka znajduje się w błonowo-momentowym stanie naprężeń, co odpowiada punktowi E na warunku plas-

tyczności rys.2, w którym $m_x = \pm (1 - m_x^2)$, $n = 1$, równania problemu sprowadzą się do następujących równań ruchu

$$3\%3 \quad \ddot{U}_0(\tau) = \gamma_1 [t_x(\tau) - t_{xst}]$$

$$\ddot{W}_0(\tau) = \gamma_2 [t_r(\tau) - t_{rst}]$$

gdzie
$$t_{rst} = \frac{\beta_2 - \beta_1 (n_x W_x)_{,x}}{\beta_1 t_r^0} ; t_{xst} = \frac{n_{x,x}}{\alpha_2 t_x^0}$$

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Przedstawimy kolejno rozwiązanie równań ruchu dynamicznie obciążonej powłoki walcowej znajdującej się w stanach naprężeń opisanych wyżej.

4.1. Powłoka w stanie naprężeń bez sił błonowych

Rozważymy przypadek obciążenia, w którym siły wymuszające opisane są zależnościami

$$4\%1 \quad t_x = t_x^0 \cos \omega \tau$$

$$t_r = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 0 \leq \tau < 1 \\ 0 & \text{jeśli } \tau > 1 \end{cases}$$

Żądamy ponadto spełnienia dodatkowych warunków na granicy faz ruchu określonych równaniem (4%1), mianowicie

$$4\%2 \quad W^{*I} = W^{*II} ; \dot{W}^{*I} = \dot{W}^{*II} \quad \text{dla } \tau = 1$$

W równaniu (4%2), W^{*I} i W^{*II} są całkowitymi przemieszczeniami punktu powłoki obliczonymi na granicy faz określonych skokiem wartości t_r i czasem $\tau = 1$.

Podstawiając (4%1) do (3%1) i wykorzystując warunek (4%2) otrzymujemy po całkowaniu

$$4\%3 \quad U_0(\tau) = \frac{\gamma_1}{U_c} \left[\tau - \frac{1}{\omega} \omega_3 \omega \tau \right] = B \left[\tau - \frac{1}{\omega} \omega_3 \omega \tau \right]$$

$$W_0(\tau) = \frac{\gamma_2}{2} (A \tau^2 - \tau)$$

Podstawiając (4%3) do wyrażenia (2%10) otrzymujemy zależność określającą całkowite przemieszczenie punktu powłoki

$$4\%4 \quad W_0^*(\tau) = \left[B^2 \left(\tau - \frac{\omega_3 \omega \tau}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{2} \right)^2 (A \tau^2 - \tau)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Korzystając z warunku (2%11) otrzymujemy równanie z którego wyznaczamy czas trwania ruchu powłoki

$$4\%5 \quad \Phi(\tau_f) = \gamma_2 A \tau_f^3 - \gamma_2 A \tau_f^2 - B \tau_f + B = 0$$

Zależność $\Phi(\tau_f)$ określoną wzorem (4%5) oraz podobne zależności otrzymane przez innych autorów przedstawiono na rys. 3 gdzie:

$$4\%6 \quad A = \frac{P_2}{P_4}, \quad B = \frac{\gamma_1}{U_c}$$

Końcowe przemieszczenia powłoki wyznaczmy z zależności

$$4\%7 \quad W^*(\tau_f) = \left\{ B^2 \left(\tau_f - \frac{\omega_3 \omega \tau_f}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{2} \right)^2 (A \tau_f^2 - \tau_f)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

4%2. Powłoka w stanie naprężeń bez momentów.

Podstawiając (4%1) do (3%2) oraz spełniając warunki ciągłości (4%2) otrzymujemy po całkowaniu

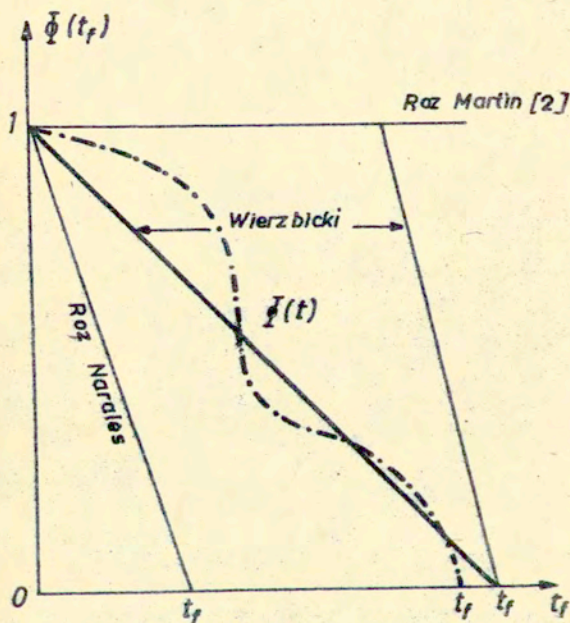
4.8

$$U_0(\tau) = B \left[\tau - \frac{W_0 W_c}{\omega} \right]$$

gdzie

$$W_0(\tau) = \frac{y_2}{M} \left[\omega \mu \cos \mu \tau + \sin \mu \tau \sin \mu \tau + \frac{A}{t_f} (1 - \cos \mu (\tau - 1)) \right]$$

$$\mu = \left(\frac{B_1 \beta^{-1} W_c / x x}{W_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$



Rys. 36

Podstawiając (4.8) do wyrażenia (2.10) i wykorzystując warunek (2.11), w którym przyjęto pierwszy człon rozwinięcia funkcji trygonometrycznych w szereg Taylora wyznaczamy czas

trwania ruchu powłoki

$$4\&9 \quad \tau_f = \frac{\omega \gamma_1 + \frac{A\omega}{t_f^0} (\cos \mu - 1)}{\left\{ \sin \mu \left[\omega \gamma_2 + \frac{A\omega}{t_f} \right] \left[\gamma_2 \omega (\operatorname{tg} \mu + 1) \sin \mu + \frac{A\omega}{t_f} \right] + \gamma_2^2 \omega^2 \right\}}$$

Końcowa ugięcie powłoki w punkcie o współrzędnej $x=0$ wyznaczamy z zależności

$$4\&10 \quad W_0^*(\tau_f) = \left\{ \left[\frac{\gamma_2}{\mu} (\cos \mu \cos \mu \tau_f + \sin \mu \sin \mu \tau_f + \frac{A}{t_f} (1 - \cos \mu (\tau_f - 1)) \right]^2 \right. \\ \left. \left[\gamma_1 \left(\tau_f + \frac{\cos \omega \tau_f}{\omega} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

4.3. Powłoka w błonowo-momentowym stanie naprężen

Podstawiając warunek plastyczności (2&8) do stowarzyszonego prawa płynięcia (2&6), a następnie do równań równowagi (3&3) otrzymujemy po rozdzieleniu zmiennych następujące równanie ruchu powłoki

$$4\&11 \quad \ddot{W}_0(\tau) + \alpha^2 W_0^2(\tau) = F(\tau)$$

w którym:

$$\alpha^2 = \frac{\beta_1 \gamma_2 (W_{c,x})^2}{\beta_4 W_c t_f^0}$$

$$4\&12 \quad F(\tau) = \frac{A \gamma_2 t_f(\tau)}{t_f^0}$$

Wyprowadzając równanie ruchu powłoki (4&11) założono, że składowa przemieszczenia $U(x, \tau) = 0$.

Przekształcając odpowiednie równanie (4&11) otrzymujemy funkcję pozwalającą określić czas τ , w którym ugięcie powłoki jest równe W_0 .

$$4.13 \quad \tau = 2 \int_{W_0(0)}^{W_0(1)} \frac{1}{\left[\int_{W_0(0)}^{W_0(1)} [f_n(\tau) - \lambda^2 W_0^2(\tau)] dW_0 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

gdzie

$$f_n = \frac{F(\tau) \int_{W_0(0)}^{W_0(1)} W_c(\xi) d\xi}{\int_{-1}^1 W_c(\xi) W_c(\xi) d\xi}$$

Zakładając niezerowe wartości składowych przemieszczenia $W \neq 0$, $u \neq 0$ oraz przyjmując $U(x, \tau) = u_0 \cos \omega \tau$, otrzymujemy po rozdzieleniu zmiennych niezależnych w funkcjach ugięcia i po odpowiednich przekształceniach następujące równanie ruchu

$$4.14 \quad \ddot{W}_0(\tau) - \lambda^2 W_0^2(\tau) = \gamma_2 t_r(\tau) - \frac{A}{t_r^0}$$

gdzie λ^2 jest wartością własną rozważanego zagadnienia brzegowego

Nieliniowe równanie ruchu (4.14) powłoki rozwiązujemy metodą linearyzacji, przedstawioną w [13], otrzymując następującą postać funkcji ruchu

$$4.15 \quad W_0(\tau) = W_0^0 \cos \omega_2 \tau + \frac{W_0^0}{\omega_2} \sin \omega_2 \tau + \frac{1}{\omega_2} \int_0^1 \left[\gamma_2 t_r(\tau) - \frac{A}{t_r^0} \right] \times \sin \omega_2 (\tau - \tau) d\tau$$

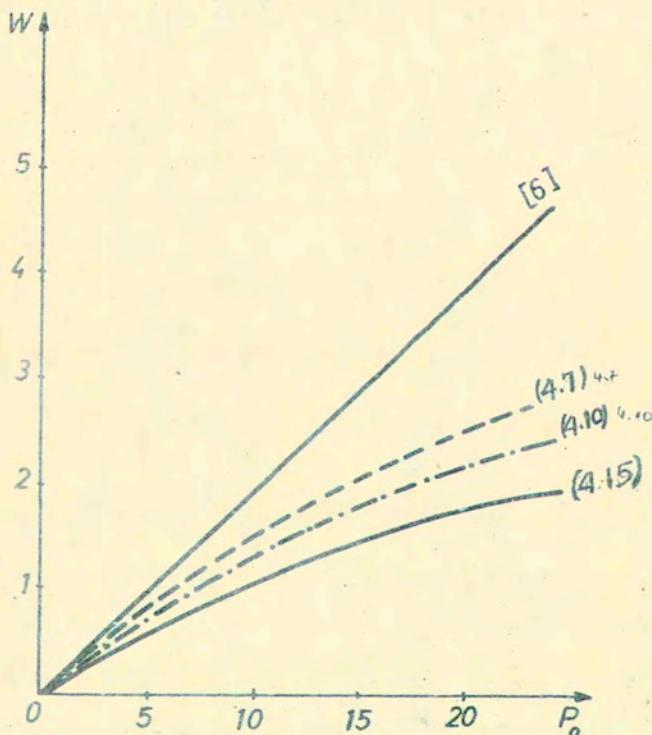
gdzie:

$$4.16 \quad \omega_2 = \frac{5}{6} \lambda^2, \quad \lambda^2 = \frac{A(W_{c,x})^2}{t_r W_c}$$

Wykorzystując warunek (2.11) otrzymujemy zależność określającą bezwymiarowy czas trwania ruchu powłoki

$$4.17 \quad T_f = \frac{1}{\omega_2} \operatorname{arctg} \frac{\int_0^1 [\gamma_2 t_r(z) - \frac{A}{T_r}] \sin \omega_2 z dz + \dot{w}_0^s}{\int_0^1 [\gamma_2 t_r(z) - \frac{A}{T_r}] \cos \omega_2 z dz + W_0^c \omega_2}$$

Wykresy końcowych ugięć powłoki otrzymane na podstawie zależności (4.7), (4.10), (4.15) oraz uzyskane inną metodą [6] przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

LITERATURA

1. A.Sawczuk.: Large deflections of rigid-plastic plates
Proc. 11-th Congress of Appl.Mech. 1964.
2. A.Sawczuk.: P.G.Hodge Comparison of yield Conditions for
Circular Cylindrical Shells; J.Franklin. 5. 269. 1960.
3. A.Sawczuk.,M.K.Duszek.: O związkach podstawowych teorii
powłok plastycznych. Rozp.Inż. 4, 18, 1970.
4. M.K.Duszek.: Plastic analysis of shallow spherical shells
at moderately large deflections. Proc. IUTAM Symposium
Copenhagen 1967 Ed. F. Niordson Springer 1969.
5. J.B.Martin: Time and displacement bound theorems for
viscous and rigid - visco plastic Continua subjected to
impulsive Loading. Proc. 3 rd Southeastern Conf Columbia
1966.
6. C.T.Chen.:P.S.Symonds.: Large dynamics deflection of
plates by mode method, of Eng Mech Div proc ASCE 103 M1,
1977.
7. P.S.Symonds.,T.Wierzbicki.: On an extremum principle for
mode form solution in plastic structural dynamics. J Appl
Mech 42:3,1975. .
8. S.Kaliszky.:Large deformations of rigid - viscoplastic
structures under impulsive and pressure Loading. J.Struct.
Mech. 1:3,295-317, 1973.
9. Д. Лепик: Оптимальное проектирование жёско-пластических
балок под действием динамических нагрузок. ТРУД. ПО МАТ.
И ТБХН. XXIII, Гаргу., 1979.
10. T.Wierzbicki.: Impulsive loading of rigid - viscoplastic
plates; Int. J.Soldis Struct 3 635-647, 1967.
11. T.Wierzbicki.: A theoretical and experimental investigation
of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates
Int.J.Solids Struct 6 553-568, 1970.

12. Cao van Phuong.: Duże ugięcia sztywno-plastycznych powłok poddanych impulsowemu ciśnieniu. Praca IPPT 43/1984.
13. Cao van Phuong.: Metoda linearyzacji w dynamice plastycznej konstrukcji. Prace IPPT w druku. 1985.