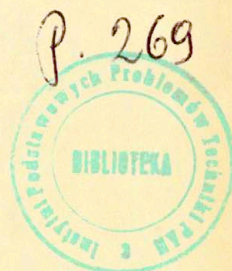


7/1982

Wanda Paprocka-Garlicka

ANALIZA WYTRZYMAŁOŚCIOWA
PODDANEJ DZIAŁANIU
OBCIĄŻENIA RUCHOMEGO
STALOWEJ BELKI CIĄGŁEJ
NA PODPORZE SPRĘŻYSTEJ



WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 stycznia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 7/1982



57067



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd.0,9. Ark.druk. 1,5 .

Oddano do drukarni w lutym 1982 r.

Nr zamówienia 105/0/82 Z-107.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

ANALIZA WYTRZYMAŁOŚCIOWA PODDANEJ DZIAŁANIU
OBCIĄŻENIA RUCHOMEGO STALOWEJ BELKI CIĄGLEJ
NA PODPORZE SPRĘŻYSTEJ

1. Wstęp

Belki stalowe na podporach sprężystych, sprężysto-plastycznych, bądź sprężysto-kruchych są elementami często spotykanymi w konstrukcjach inżynierskich. Podporami tych belek są np: podłoża sprężyste, belki poprzeczne, słupy, podwieszenia na prętach stalowych, itp. Jeśli spełniony jest warunek sprężystej pracy podpór do chwili wyczerpania nośności belki, schematem statycznym tych konstrukcji jest belka na podporach sprężystych. Gdy podpory tracą sprężystość lub ulegają zniszczeniu bądź deformacji przed wyczerpaniem nośności samej belki wytrzymałość konstrukcji należy wyznaczać rozpatrując układ belka-podpory.

W pracy przeprowadzono analizę stanów granicznych belki dwuprzęsłowej na środkowej podporze sprężystej /por.[7] / dla dwu przypadków obciążenia belki siłą skupioną: obciążenia działającego w sposób zmienny w czasie oraz obciążenia stałego.

Uwzględnienie wpływu zmienności obciążenia jest w wielu przypadkach konieczne, bowiem konstrukcja wykonana z materiału o własnościach sprężysto-plastycznych może ulec zniszczeniu przed osiągnięciem wartości granicznego obciążenia nośności wyznaczonego metodami nośności granicznej [8]. Dzieje się tak dlatego, że w każdym cyklu obciążeń może wystąpić nowe odkształcenie plastyczne i po dostatecznie wielu cyklach albo odkształcenia te narastają i nadmierne ugięcia czynią konstrukcję bezużyteczną, albo też przy występowaniu przyrostów odkształceń plastycznych przeciwnych znaków może nastąpić zniszczenie kruche wskutek zmęczenia materiału.

Pierwszy rodzaj zniszczenia nazywamy zniszczeniem przyrostowym, drugi - zniszczeniem wskutek zmęczenia niskocyklowego.

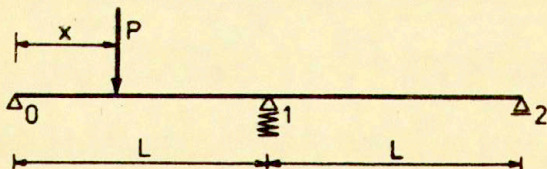
Odształceniom plastycznym towarzyszy zazwyczaj powstanie stanu samozrównoważonych naprężeń resztkowych, dzięki czemu konstrukcja może na kolejne cykle obciążeń reagować czysto sprężysto, czyli przystosować się do obciążeń mniejszych od wywołujących wyżej wymienione stany zniszczenia.

Wartości granicznych obciążeń przystosowania powodujących występowanie tych stanów zniszczenia wyznaczamy korzystając z twierdzeń teorii przystosowania [1,2,3,4,5,6].

W pracy wykazano, że o ile wyznaczona dla przypadku obciążenia stałego graniczna siła nośności nie zależy od wartości współczynnika k sprężystości podpory, to w przypadku zmienności tego obciążenia można operując wielkością współczynnika k zwiększyć wartość granicznej siły przystosowania. Inaczej mówiąc można rozszerzyć zakres obciążenia, do którego konstrukcja może się przystosować, aż do osiągnięcia jego wartości maksymalnej, równej w rozpatrywanym przypadku wartości granicznego obciążenia nośności.

2. Założenia, cel i zakres pracy

Celem opracowania jest wyznaczenie i porównanie obciążeń granicznych nośności i przystosowania przedstawionej na rys.1 stalowej belki dwuprzęsłowej na środkowej podporze sprężystej o zmiennej podatności. Przekrój belki stały na całej długości jest idealnym przekrojem sandwichowym, bądź dwuteownikiem walcowanym. Pręsia mają jednakowe rozpiętości.



Rys.1. Schemat statyczny belki dwuprzęsłowej na środkowej podporze sprężystej obciążonej dowolnie ustawioną, bądź przesuwającą się w sposób quasi-statyczny siłą P .

Stal z jakiej wykonana jest konstrukcja jest to stal miękka o wyraźnie zarysowanej granicy plastyczności /równej $\pm R_e$ przy rozciąganiu i ściskaniu/, dla której można przyjąć model ciała idealnie plastycznego oraz wykresy zależności momentów od krzywizn nie uwzględniające wzmocnienia materiału, a dalej stosować wyprowadzone między innymi w oparciu o te założenia twierdzenia teorii nośności granicznej i teorii przystosowania.

Nie wprowadzając ograniczeń na ugięcia przeprowadzono, zgodnie z nomenklaturą PN-76/B-03200, jedynie analizę stanów granicznych nośności.

Zakładając zmienność podatności sprężystej podpory rozpatrzono i porównano stany graniczne belki dla dwu przypadków obciążeń o praktycznym znaczeniu:

1. obciążenia stałego w postaci siły P , która może być ustawiona na belce w dowolnym miejscu /np. ciężar urządzenia/ i która wzrasta monotonicznie od zera do swej maksymalnej wartości równej granicznej sile nośności $P_g = P_{no}$.
2. obciążenia zmiennego w czasie w postaci siły P , która może być ustawiona na belce w dowolnym miejscu i która zmienia się w granicach $0 \leq P \leq P_g$ /np. obciążenie magazynu/, bądź, co daje tę samą wartość granicznej siły przystosowania $P_g = P_p$, siły P przesuwającej się wielokrotnie po belce w sposób quasi-statyczny /np. obciążenie wózkami o napędzie ręcznym, por. [9] /, która również może się zmieniać w granicach $0 \leq P \leq P_g$.

Praca zawiera:

- A. Wyznaczenie wartości granicznych obciążeń P_g nośności i przystosowania, czyli sił P_{no} i P_p z twierdzeń teorii nośności granicznej i twierdzeń teorii przystosowania.
- B. Wyznaczenie nośności sprężystej $P_g = P_s$ przy przyjęciu kryterium nieprzekroczenia odkształceń sprężystych.
- C. Analizę wpływu podatności sprężystej $\frac{1}{k}$ podpory na wartości granicznych sił P_g .

D. Optymalizację charakterystyki sprężystej podpory, polegającą na wyznaczeniu wartości współczynnika k sprężystości podpory, dla którego nośność przystosowania belki o stałym EJ jest największa.

E. Analizę otrzymanych wyników oraz określenie warunków jakim winny odpowiadać podpory, aby przyjęty w pracy schemat belki na sprężystej podporze był właściwym schematem statycznym rozpatrywanej konstrukcji.

Przedstawione rozwiązanie jest w przypadku określenia granicznych obciążeń P_{no} i P_p słuszne jedynie dla belek, których ugięcia są dostatecznie małe, aby można było stosować obowiązującą w teorii nośności granicznej i teorii przystosowania zasadę zeszywnienia. Na wielkość ugięć ma między innymi wpływ podatność sprężysta podpory $\frac{1}{k}$. Gdy jest ona nadmierna może powodować zbyt duże przemieszczenia belek. Dlatego też przedstawionego rozwiązania nie można stosować do belek na podporach o nadmiernej sprężystej podatności. Zastosowanie zasady zeszywnienia w przypadku takich dużych przemieszczeń prowadzi do paradoksu przypominającego paradoks Stüssi-Kollbrunnera [10], [11]. Okazuje się bowiem, że dla belki dwuprzęsłowej na środkowej podporze o podatności sprężystej $\frac{1}{k} \rightarrow \infty$ i o rozpiętości pręseł L wyznaczone z przedstawionych rozwiązań graniczne obciążenia wynoszą: graniczna siła nośności $P_{no} = 5,8284 \frac{M}{L}$, graniczna siła przystosowania dla przekroju idealnie sandwiczowego $P_p = P_{pp} = 3,7321 \frac{M}{L}$ oraz graniczna siła przystosowania dla dwuteownika walcowanego $P_p = P_{pz} = 3,400 \frac{M}{L}$, podczas gdy w przypadku pominięcia tej podpory i zastosowania schematu belki jednoprzęsłowej o rozpiętości $2L$ otrzymujemy $P_{no} = P_p = \frac{2M}{L}$, choć pozornie oba te schematy statyczne niczym się nie różnią /jest to prawdziwe w zakresie odkształceń sprężystych konstrukcji/. Rzeczywiste wartości sił P_{no} i P_p dla belki na podporze będącej sprężyną Winklerowską mieszczą się między tymi rozwiązaniami.

W praktyce inżynierskiej nie stosuje się podpór o dużej podatności sprężystej ponieważ podpory takie nie posiadają dostatecz-

nej wytrzymałości ulegają zniszczeniu przed zniszczeniem belki. Dlatego też przeprowadzenie analizy stanów granicznych belek na podporach o dużej podatności sprężystej uznano za niecelowe.

Przedstawione wykresy oraz stabelaryzowane wyniki rozwiązań dotyczą jedynie przypadków praktycznych, tj. belek na podporach, których podatność nie jest nadmierna.

3. Oznaczenia

- L - rozpiętość przęseł belki
x - zmienna odległość siły P od podpory 0
W - wskaźnik wytrzymałości przekroju
 W_{pl} - wskaźnik oporu plastycznego
 $c = W/W_{pl}$ - równe 2/3 dla przekroju prostokątnego, 0,85 dla dwuteowników walcowanych, 1 dla idealnego przekroju sandwiczowego
 $\max M_s$ - największy sprężysty moment zginający jaki przekrój belki może przenieść
 M_0 - moment graniczny równy $R_e W_{pl}$
 R_e - granica plastyczności stali
 R_s - granica sprężystości stali
 M_x^1 - moment zginający w przęśle 0-1 pod siłą P w odległości x od podpory 0 wywołany przez siłę P = 1
 M_1^1 - moment zginający na podporze 1 wywołany przez siłę P = 1
 $\max |M^1|$ - największa z bezwzględnych wartości występujących w belce sprężystych momentów zginających od siły P = 1
E - współczynnik sprężystości stali
I - moment bezwładności przekroju belki
k - współczynnik sprężystości środkowej podpory
 $d = \frac{6EI}{kL^3}$

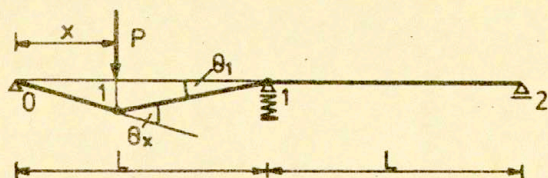
- P_g - obciążenie graniczne
 P_n, P_{no} - graniczne obciążenia nośności wyznaczone wg teorii nośności granicznej
 P_{ppo} - graniczne obciążenie przystosowania wyznaczone wg teorii przystosowania odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu
 P_{pz} - graniczne obciążenie przystosowania wyznaczone wg teorii przystosowania odpowiadające zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego
 P_s - nośność sprężysta, czyli obciążenie odpowiadające granicy odkształceń sprężystych
 x_0 - odległość od podpory 0 przekroju, w którym występuje $\max M_x^1$
 x_1 - odległość siły $P = 1$ od podpory 0, przy której moment M_1^1 osiąga minimum
 x_n - odległość od podpory 0 przegubu plastycznego oraz niszczącej siły P_{no} w przypadku zniszczenia belki siłą stałą
 x_p - odległość od podpory 0 przegubu plastycznego oraz niszczącej siły P_{ppo} w przypadku zniszczenia belki siłą zmienną

$$\alpha = \frac{x}{L}, \quad \alpha_0 = \frac{x_0}{L}, \quad \alpha_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \alpha_p = \frac{x_p}{L}$$

4. Wyznaczenie granicznej wartości P_{no} siły obciążającej belkę w sposób stały.

Graniczną wartość P_{no} siły P ustawionej w dowolnym miejscu na belce i wzrastającej monotonicznie od zera do wartości maksymalnej wyznaczmy korzystając z twierdzenia kinematycznego teorii nośności granicznej [8]. Twierdzenie to mówi, że jeżeli dla kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia wyznaczmy odpowiadające im wartości obciążeń niszczących, to najmniejsza z otrzymanych wartości będzie najlepszą górną oceną nośności granicznej konstrukcji. Ponieważ miejsce ustawienia siły P na belce nie jest z góry określone założymy, że siła oddalona jest o x od podpory 0. Ze względu na stały przekrój belki jedynym dopuszczalnym mechanizmem jej zniszczenia odpowiadającym ustalonemu położeniu siły jest

mechanizm przedstawiony na rys.2, w którym przeguby tworzą się pod siłą 1 na podporze 1.



Rys.2. Mechanizm zniszczenia belki

Odpowiadające temu mechanizmowi obciążenie niszczące P_n wyznaczmy z równania:

$$P_n \cdot 1 = M_0 |\theta_x| + M_0 |\theta_1| \quad /1/$$

stanowiącego zapis zasady prac przygotowanych. Wstawiając do /1/ wielkości kątów obrotu przekrojów w przegubach plastycznych określonych wzorami:

$$\theta_x = \frac{L}{x/L - x}, \quad \theta_1 = -\frac{1}{L-x} \quad /2/$$

otrzymamy wzór na obciążenie niszczące P_n w postaci:

$$P_n = \frac{L+x}{x/L - x} M_0 \quad /3/$$

Ze względu na dowolność ustawienia siły P na belce przedstawionych na rys.2 mechanizmów zniszczenia jest nieskończenie wiele. Szukając najniekorzystniejszego ustawienia siły P na belce wyznaczmy jej położenie i jednocześnie odległość x_n przegubu plastycznego mechanizmu zniszczenia, dla którego siła P_n jest najmniejsza, minimalizując /3/ względem x. Odległość ta wyniesie:

$$x_n = 0,414214 L \quad /4/$$

Podstawiając /4/ do /3/ otrzymamy wielkość siły granicznej P_{no} dla przypadku dowolnego położenia siły P na belce. Będzie ona równa:

$$P_{no} = 5,828427 \frac{M_0}{L} \quad /5/$$

5. Wyznaczenie granicznej wartości P_p siły obciążającej belkę w sposób zmienny.

W przypadku obciążenia belki siłą o wartości zmieniającej się w granicach $0 \leq P \leq P_g$ i przesuwaną się wielokrotnie po belce w sposób quasi-statyczny graniczną wartość $P_g = P_p$ tej siły wyznaczmy korzystając z rozwiązań teorii przystosowania.

Zniszczenie przyrostowe

Graniczną siłę $P_p = P_{ppo}$ odpowiadającą zniszczeniu przyrostowemu belki wyznaczmy korzystając z twierdzenia kinematycznego Neala, które dla płaskich konstrukcji prętowych /ramy, belki/ brzmi następująco:

" Jeżeli dla danego mechanizmu o "n" przegubach plastycznych "i" oraz kątach " θ_i " obrotu w tych przegubach zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^n M_{oi} |\theta_i| \leq \sum_{i=1}^n M_i^* \theta_i \quad /6/$$

gdzie:

$$M_i^* = \begin{cases} \max M_i & \theta_i > 0 \\ \min M_i & \theta_i < 0 \end{cases} \quad \text{jeżeli} \quad /7/$$

to przystosowanie konstrukcji nie nastąpi:"

Dowolny z nieskończenie wielu /ze względu na zmienność x / dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia belki przedstawia rys.2. Równanie /6/ zapisane dla takiego mechanizmu ma postać:

$$M_0 |\theta_x| + M_0 |\theta_1| = M_x^1 P_{pp} \theta_x + \min M_1^1 P_{pp} \theta_1 \quad /8/$$

Kąty obrotu przekrojów w przegubach plastycznych są odpowiednio równe:

$$\theta_x = \frac{L}{x/L-x}, \quad \theta_1 = -\frac{1}{L-x} \quad /9/$$

Podstawiając do równania /8/ wzory /9/ oraz oznaczenie:

$$\alpha = \frac{x}{L} \quad /10/$$

otrzymujemy wyrażenie na siłę P_{pp} w postaci:

$$P_{pp} = \frac{1 + \alpha}{M_x^1 - \min M_1^1 \alpha} M_0 \quad /11/$$

Zniszczenie belki nastąpi po wielokrotnym obciążeniu belki najmniejszą z sił P_{pp} zapisanych wzorem /11/, a odpowiadających nieskończenie wielu dopuszczalnym mechanizmom zniszczenia belki. Zatem obciążenie P_{ppo} niszczące opisaną konstrukcję wyznaczmy minimalizując względem α siłę P_{pp} .

Wyznamy najpierw występujące we wzorze /11/ wielkości M_x^1 i $\min M_1^1$.

Równanie wiążące momenty podporowe belki na podporze sprężystej będzie miało postać:

$$4 M_1^1 L = -\frac{P}{L} / L_x^2 - x^3 / + 6EI \frac{2}{L} \frac{1}{k} / \frac{P_x}{L} - \frac{2M_1^1}{L} / \quad /12/$$

Wprowadzając do /12/ $P = 1$, oznaczenie /10/ oraz oznaczenie:

$$d = \frac{6EI}{kL^3} \quad /13/$$

otrzymujemy wyrażenie na moment zginający na podporze 1 w postaci:

$$M_1^1 = \left[\alpha^3 + /2d-1/\alpha \right] \cdot \frac{L}{4/1 + d/}, \quad /14/$$

a następną reakcję podpory 1 równą:

$$R_1 = \frac{\alpha /3 - \alpha^2/}{2/1 + d/} P \quad /15/$$

Minimalizując /14/ względem α , czyli znajdując $\frac{dM_1^1}{d\alpha} = 0$, otrzymujemy bezwymiarową odległość α_1 siły P od podpory 0, przy której moment na podporze osiąga wartość najmniejszą, w postaci:

Tablica 1

$d = \frac{6EJ}{kL^3}$	$\frac{kL^3}{EJ}$	α_1	$\min M_1^1$	α_0	$\max M_X^1$
0,0	∞	0,5773	-0,0982L	0,4323	0,2074L
0,1	60	0,5164	-0,0626L	0,4607	0,2201L
0,2	30	0,4472	-0,0373L	0,4873	0,2319L
0,3	20	0,3650	-0,0187L	0,5123	0,2429L
0,4	15	0,2582	-0,0061L	0,5358	0,2532L
0,5	12	0,0	0,0	0,5578	0,2628L
0,6	10	0,0	0,0	0,5786	0,2718L
0,75	8	0,0	0,0	0,6074	0,2843L
0,857	7	0,0	0,0	0,6264	0,2925L
1	6	0,0	0,0	0,6498	0,3026L
1,2	5	0,0	0,0	0,6793	0,3155L
∞	0	0,0	0,0	1,0000	0,5000L

Tablica 2

$d = \frac{6EJ}{kL^3}$	$\frac{kL^3}{EJ}$	P_s		α_p	$P_p = P_{ppo}$ I =	P_{no}
		$c = 0,85$ I	$c = 1,0$ =			
0,0	∞	4,1063 $\frac{M_0}{L}$	4,8216 $\frac{M_0}{L}$	0,3927	5,7158 $\frac{M_0}{L}$	
0,1	60	3,8619 "	4,5434 "	0,4014	5,7906 "	
0,2	30	3,6854 "	4,3122 "	0,4103	5,8248 "	
0,24264	24,728			0,4142	$\max P_{ppo} = 5,8284$ "	5,8284 $\frac{M_0}{L}$
0,3	20	3,4994 "	4,1169 "	0,4196	5,8228 "	
0,4	15	3,3570 "	3,9494 "	0,4296	5,7842 "	
0,5	12	3,2344 "	3,8052 "	0,4408	5,6996 "	
0,6	10	3,1273 "	3,6792 "	0,4536	5,5717 "	
0,75	8	2,9898 "	3,5174 "	0,4710	5,4074 "	
0,857	7	2,9060 "	3,4188 "	0,4824	5,3065 "	
1	6	2,8090 "	3,3047 "	0,4962	5,1890 "	
1,2	5	2,6941 "	3,1696 "	0,5135	5,0506 "	

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} d} \quad /16/$$

Z wzoru /16/ wynika, że gdy:

$$0 \leq d \leq \frac{1}{2}, \text{ czyli } \frac{12EI}{L^3} \leq k < \infty, \text{ to}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} d} \quad \text{oraz} \quad /17/$$

$$\min M_1^1 = \left[\sqrt{2d-1} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} d \right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3} d \right] \frac{L}{4/1+d}$$

Dla $d > \frac{1}{2}$, tj. dla belek na podporach bardziej podatnych sprężystości, pojawia się na podporze sprężystej moment dodatni. Za minimum momentu podporowego przyjmujemy moment równy zeru, tj. moment odpowiadający $x = 0$, czyli przypadek braku obciążenia na belce.

Możemy zatem zapisać, że gdy:

$$d \geq \frac{1}{2}, \text{ czyli } 0 \leq k \leq \frac{12EI}{L^3}, \text{ to } \min M_1^1 = 0 \quad /18/$$

Wartości α_1 oraz odpowiadające im wartości $\min M_1^1$ wyznaczone dla poszczególnych k zestawiono w tabelicy 1.

Zależności momentów $\min M_1^1$ oraz α_1 od współczynnika k przedstawiono w postaci wykresów na rys.3.

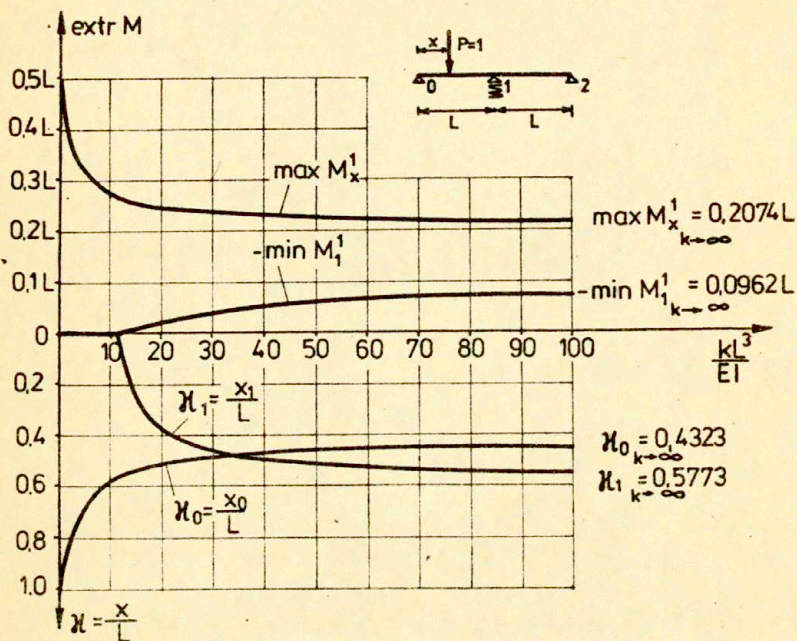
Moment przęsłowy pod siłą, przy jej ustawieniu w odległości x od podpory 0 jest równy:

$$M_x^1 = \left[\alpha^4 - \frac{1}{5+2d} \alpha^2 + \frac{4}{1+d} \alpha \right] \frac{L}{4/1+d} \quad /19/$$

Dla ustalonego d i zmiennego α równanie /19/ jest jednocześnie równaniem obwiedni maksymalnych sprężystych momentów zginających występujących w przęśle 0-1.

Podstawiając /19/ do /11/ otrzymamy:

$$P_{pp} = \frac{4/1+d \cdot /1+\alpha/}{\alpha^4 - /5+2d/ \alpha^2 + [4/1+d/- \frac{4/1+d/}{L} \min M_1^1] \alpha} \frac{M_0}{L} \quad /20/$$



Nys.3. Wykresy ekstremalnych momentów zginających $\text{max } M_x^1$ i $\text{min } M_1^1$ oraz odpowiadających im położeń x siły P w zależności od współczynnika k sprężystości podpory.

$\text{max } M_x^1$ - maksymalny moment zginający w przęśle 0-1 od siły $P=1$ ustawionej w odległości $x=x_0$ od podpory 0;

$\text{min } M_1^1$ - minimalny moment zginający na podporze 1 od siły $P=1$ wstawionej w odległości $x=x_1$ od podpory 0.

Podstawiając następnie do /20/ wzory /17/ bądź /18/ i wprowadzając dalej oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 B &= 4 / 1+d / & C &= 5 + 2d \\
 D &= 4 / 1+d / = B \text{ dla } d \gg \frac{1}{2} \\
 D &= 4 / 1+d / - / 2d-1 // \frac{1}{3} - \frac{2}{3} d / \frac{1}{2} - / \frac{1}{3} - \frac{2}{3} d / \frac{3}{2} \\
 & & & \text{dla } d \ll \frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} B \\ D \\ D \end{aligned}} \right\} /21/$$

otrzymujemy wyrażenie na siłę P_{pp} w postaci:

$$P_{pp} = B / 1 + \alpha / \cdot / \alpha^4 - C \alpha^2 + D \alpha / -1 \frac{M_0}{L} \quad /22/$$

Jak już powiedzieliśmy uprzednio graniczną siłą odpowiadającą zniszczeniu przyrostowemu belki o danej w postaci współczynnika k sprężystości podpory i otrzymamy minimalizując siłę P_{pp} względem α , tj. obliczając:

$$\frac{dP_{pp}}{d\alpha} = 0 \quad /23/$$

Otrzymamy równanie:

$$3 \alpha^4 + 4 \alpha^3 - C \alpha^2 - 2C \alpha + D = 0 \quad /24/$$

z którego dla przyjętego k wyznaczmy α_p , tj. bezwymiarową odległość od podpory O przegubu plastycznego oraz niszczącej siły P_{ppo} będącej najmniejszą z sił P_{pp} zapisanych wzorem /22/. Podstawiając następnie α_p do /22/ wyznaczmy wartość siły P_{ppo} . Wartości P_{ppo} oraz α_p dla $k = 0$, tj. dla $d \rightarrow \infty$ otrzymano pomijając w występujących we wzorach /22/ i /24/ wielomianach wyrazy małe w porównaniu z d .

Wzory /22/ i /24/ przyjęły postać:

$$P_{pp} = \frac{2 / 1 + \alpha / M_0}{\alpha / 2 - \alpha / L} \quad /25/$$

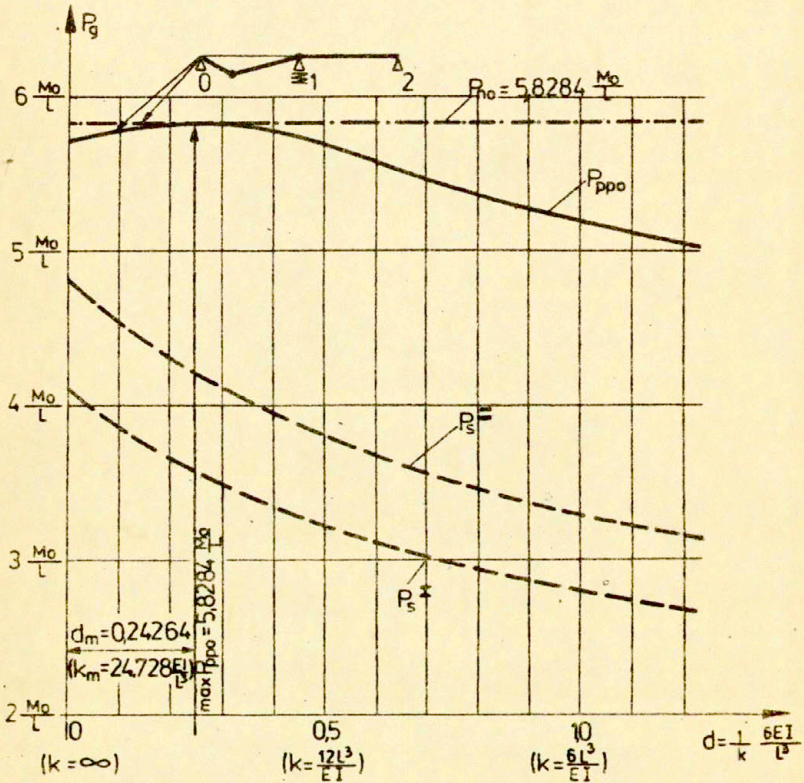
$$\alpha^2 + 2 \alpha - 2 = 0 \quad /26/$$

a wyznaczone z nich wartości α_p i P_{ppo} dla $k = 0$ wyniosły:

$$\alpha_p = 0,73205 \quad \text{oraz} \quad P_{ppo} = 3,73205 \frac{M_0}{L} \quad /27/$$

Wartości α_p oraz sił P_{ppo} wyznaczonych dla $0 \leq d \leq 1,2$ t.j. $\frac{5EJ}{L^3} \leq k \leq \infty$ zestawiono w tabelicy 2.

Zależności sił P_{ppo} od współczynnika d przedstawiono na rys.4.



Rys.4. Wykresy obciążeń granicznych P_g wyznaczonych metodami:

- naprężeń dopuszczalnych
- teorii przystosowania
- · - · - · - teorii nośności granicznej

Zniszczenie wskutek zmęczenia ułaskocyklowego

Graniczną siłę P_{pz} powodującą ten typ zniszczenia wyznaczymy korzystając z 3-ej nierówności twierdzenia statycznego Bleicha, które można sformułować następująco:

Stan przystosowania płaskiej konstrukcji prętowej wystąpi, jeżeli istnieje stały rozkład momentów resztkowych \bar{M}_1 takich, że w każdym przekroju będą zachowane nierówności:

$$\begin{aligned} \max M_1 + \bar{M}_1 &\leq M_{0i} \\ -M_{0i} &\leq \min M_1 + \bar{M}_1 & /28// \\ \max M_1 - \min M_1 &\leq 2 \max M_{s1} \end{aligned}$$

Wprowadzając momenty M_1^1 od sił $P = 1$ przedstawimy nierówności /28/ w postaci:

$$/\max M_1^1 - \min M_1^1/ P_{pz} \leq 2 \max M_{s1} \quad /29//$$

Maksymalny moment zginający w przekroju "i" przęsła 0-1 oddalonym o x od podpory 0 występuje, gdy siła znajduje się nad przekrojem "i" i dla $P = 1$ wyraża się wzorem /19/.

Minimalny moment zginający w przekroju "i" przęsła 0-1 występuje, gdy przy obciążeniu przęsła 1-2 moment na podporze 1 jest najmniejszy i dla $P = 1$ wynosi:

$$\min M_1^1 = \frac{x}{L} \min M_1^1 \quad /30//$$

Podstawiając do równania /30/ $\min M_1^1$ wyrażone przez /17/, bądź /18/ można dla ustalonego d i zmiennego α otrzymać równanie obwiedni minimalnych sprężystych momentów zginających występujących w przęśle 0-1.

Uwzględniając /19/, /30/ i /18/ otrzymujemy dla $d \geq \frac{1}{2}$, czyli $0 \leq k \leq \frac{12EI}{L^3}$:

$$\begin{aligned} \max M_1^1 - \min M_1^1 = M_x^1 &= \left[\alpha^4 - \frac{5+2d}{\alpha^2} + \frac{4}{1+d} \right] \cdot \frac{L}{4(1+d)} & /31// \end{aligned}$$

Uwzględniając /19/, /30/ i /17/ otrzymujemy dla $d \ll \frac{1}{2}$,
czyli $\frac{12EI}{L^3} \ll k \ll \infty$:

$$\begin{aligned} \max M_1^1 - \min M_1^1 &= \left[\alpha^4 - \frac{5+2d}{\alpha^2} + \frac{4}{1+d} + \frac{d}{\alpha} \right] \cdot \\ &\cdot \frac{L}{4(1+d)} - \alpha \left[\frac{2d}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} d^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} d^{\frac{3}{2}} \right] \cdot \quad /32/ \\ &\cdot \frac{L}{4(1+d)} \end{aligned}$$

Ponieważ belka ma przekrój stały / $\max M_1 = \text{const}$ / wystarczy sprawdzić nierówność /29/ w przekroju, w którym różnica / $\max M_1^1 - \min M_1^1$ / osiąga maksimum. Dla $0 \leq k \leq \frac{12EI}{L^3}$ maksimum tej różnicy wyznaczmy różniczkując równanie /31/ względem α , czyli znajdując :

$$\frac{d M_x^1}{d \alpha} = 0 \quad /33/$$

Otrzymamy równanie:

$$\alpha^3 - \frac{1}{2,5} + \frac{d}{\alpha} + 1 + d = 0 \quad /34/$$

z którego dla założonego k wyznaczmy bezwymiarową odległość α_0 od podpory 0 przekroju, w którym występuje $\max M_x^1$, a następnie podstawiając α_0 do /31/ wartość $\max M_x^1$. Wartości α_0 oraz odpowiadające im wartości $\max M_x^1$ wyznaczono dla współczynników k wybranych z całego zbioru k i zestawiono w tabelicy 1. Zależności między momentami $\max M_x^1$ oraz α_0 a współczynnikami k przedstawiono również w postaci wykresów na rys.3.

Dla $k \geq \frac{12EI}{L^3}$ porzeczano na wyznaczeniu granicznych sił P_{ppo} , dla tych bowiem k siły P_{ppo} , jako mniejsze, decydują o zniszczeniu belki.

Dla $0 \leq k \leq \frac{12EI}{L^3}$ wyznaczmy siły P_{pz} z wzoru /29/ po pewnym jego przekształceniu. Wykorzystamy tu fakt, że dla stali o silnie zarysowanej granicy plastyczności granica sprężystości stali R_s jest równa w przybliżeniu granicy plastyczności R_0 i przyjmujemy:

$$R_s = R_0 \quad /35/$$

W związku z /35/ maksymalny sprężysty moment zginający, jaki przekrój belki może przenieść, zapiszemy w postaci:

$$\max M_s = R_e W \quad /36/$$

Zastępując wskaźnik przekroju W przez wskaźnik oporu plastycznego W_{pl} , czyli wprowadzając $W = c W_{pl}$ oraz podstawiając dalej $R_e W_{pl} = M_0$ otrzymamy:

$$\max M_s = c M_0 \quad /37/$$

Graniczną siłę P_{pz} dla $0 \leq k \leq \frac{12EI}{L^3}$ otrzymamy ze wzoru /29/ po podstawieniu do niego /37/ oraz uwzględnieniu warunku maksimum funkcji określonej wzorem /31/ w postaci:

$$P_{pz} = \frac{2c}{\max M_x^1} M_0 \quad /38/$$

Wykorzystując zestawione w tabelicy 1 wartości $\max M_x^1$ wyznaczone dla $0 \leq k \leq \frac{12EI}{L^3}$ oraz przekrojów belki idealnie sandwiczowego i dwuteownika walcowanego wartości sił P_{pz} . Okazało się, że są one mniejsze od sił P_{ppo} jedynie dla belki będącej dwuteownikiem walcowanym i wspartej na podporze o dużej podatności sprężystej / $d > 2/$. Ostatecznie więc stwierdzono, że w rozpatrywanym zakresie zmienności k , zawierającym belki na podporach o nie nadmiernej podatności sprężystej, o przystosowaniu się tak belek o przekroju sandwiczowym, jak i dwuteowym decyduje zniszczenie przyrostowe.

6. Wyznaczenie nośności sprężystej, czyli granicznej siły

$$P_g = P_s.$$

Siłę tej odpowiada pojawienie się w skrajnym włóknie najbardziej wyjątkowego przekroju naprężeń równych granicy sprężystości materiału. W związku z tym siłę tę wyznaczmy z równania:

$$\max |M^1| P_g \leq \max M_s \quad /39/,$$

w którym $\max |M^1|$ jest największą z bezwzględnych wartości występujących w konstrukcji sprężystych momentów zginających od siły $P = 1$.

Podstawiając /37/ do /39/ otrzymujemy graniczną siłę P_g w postaci:

$$P_s = \frac{c}{\max |M^1|} M_0 \quad /40/$$

Ponieważ siła P może być ustawiona na belce w dowolnej odległości x od podpory O więc dla zadanego współczynnika k podatności sprężystej podpory środkowej otrzymamy położenie x_0 siły $P = 1$, przy którym moment przęsłowy będzie największy /będzie to moment pod siłą/ oraz położenie x_1 siły $P = 1$, przy którym moment na podporze 1 będzie najmniejszy.

Ekstremalne wartości momentów przęsłowego i podporowego dla $0 \leq k < \infty$ zostały wyznaczone w p.5 pracy i zestawione w tabelicy 1. Z tabelicy tej wynika, że dla całego zbioru k większe z bezwzględnych maksymalnych wartości momentów zginających są wartości maksymalnych momentów przęsłowych. Te też wartości zostały wprowadzone do wzoru /40/ w trakcie wyznaczania zestawionych w tabelicy 2 oraz przedstawionych na rys.4 w postaci wykresów granicznych sił P_s .

7. Optymalizacja sprężystego podparcia belki obciążonej przesuwającą się po niej siłą.

Postawione zagadnienie optymalizacji przedstawionej konstrukcji polega na znalezieniu takiej wartości współczynnika k sprężystości podpory, dla którego nośność belki jest największa. Prowadzi to do wyznaczenia spośród granicznych sił przystosowania P_{ppo} wyznaczonych dla różnych k siły największej.

Ponieważ siły P_{ppo} nie zostały wyznaczone w sposób jawny w postaci funkcji $P_{ppo} = f(k)$, a są jedynie wyrażone przez równania /22/ i /24/, największą z sił P_{ppo} wyznaczmy różniczkując równanie /22/ względem d , czyli znajdując:

$$\frac{d P_{ppo}}{d d} = 0 \quad /41/$$

a następnie rozwiązując je łącznie z równaniem /24/. Należy przy tym pamiętać, że ponieważ ekstremum siły P_{ppo} występuje dla $k > \frac{12EI}{3}$, czyli $d < \frac{1}{2}$, to występujący w równaniach współczynnik $\frac{1}{b}$ określony wzorem /21/ musi odpowiadać temu zakresowi zmienności d .

W równaniu /22/ występują współczynniki B, C i D. Są one funkcjami d. Funkcją d jest również α , gdyż jest on pierwiastkiem równania /24/. Równanie /41/ zapiszemy zatem w postaci:

$$\frac{\partial P_{PP}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dd} + \frac{\partial P_{PP}}{\partial B} \frac{dB}{dd} + \frac{\partial P_{PP}}{\partial C} \frac{dC}{dd} + \frac{\partial P_{PP}}{\partial D} \frac{dD}{dd} = 0 \quad /42/$$

Uwzględniając, że:

$$\frac{\partial P_{PP}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dd} = 0 \quad /43/$$

co wynika z /23/, otrzymamy, po przeprowadzeniu różniczkowania, w miejsce /42/ równanie:

$$4\alpha^3 - 12\alpha - \frac{4}{3} / 1 + d // 2d - 1 // \frac{1}{3} - \frac{2}{3} d / \frac{-1}{2} + \\ + 4 / 2 - d // \frac{1}{3} - \frac{2}{3} d / \frac{1}{2} - 4 / \frac{1}{3} - \frac{2}{3} d / \frac{3}{2} = 0 \quad /44/$$

Równanie /44/ rozwiązane łącznie z /24/ względem α i d prowadzi do wyników:

$$\alpha_m = 0,414214, \quad d_m = 0,24264 \quad /45/$$

Z podstawienia /45/ do /22/ otrzymujemy:

$$\max P_{ppo} = 5,828427 \frac{M_0}{L} \quad /46/$$

Maksymalną nośność belki otrzymaliśmy więc dla współczynnika k równego:

$$k_m = \frac{6EI}{d_m L^3} = 24,728 \frac{EI}{L^3} \quad /47/$$

Zastosowanie podpory o współczynniku sprężystości określonym przez /47/ będzie zatem optymalnym rozwiązaniem omawianej konstrukcji.

8. Analiza otrzymanych rozwiązań.

Na rys.4 przedstawiono wyniki otrzymanych rozwiązań w postaci wykresów zależności sił granicznych P_g od współczynnika k sprężystości podpory środkowej dla belki o idealnym przekroju sandwiczowym $/c = 1,0/$ oraz będącej dwuteownikiem walcowanym $/c = 0,85/$.

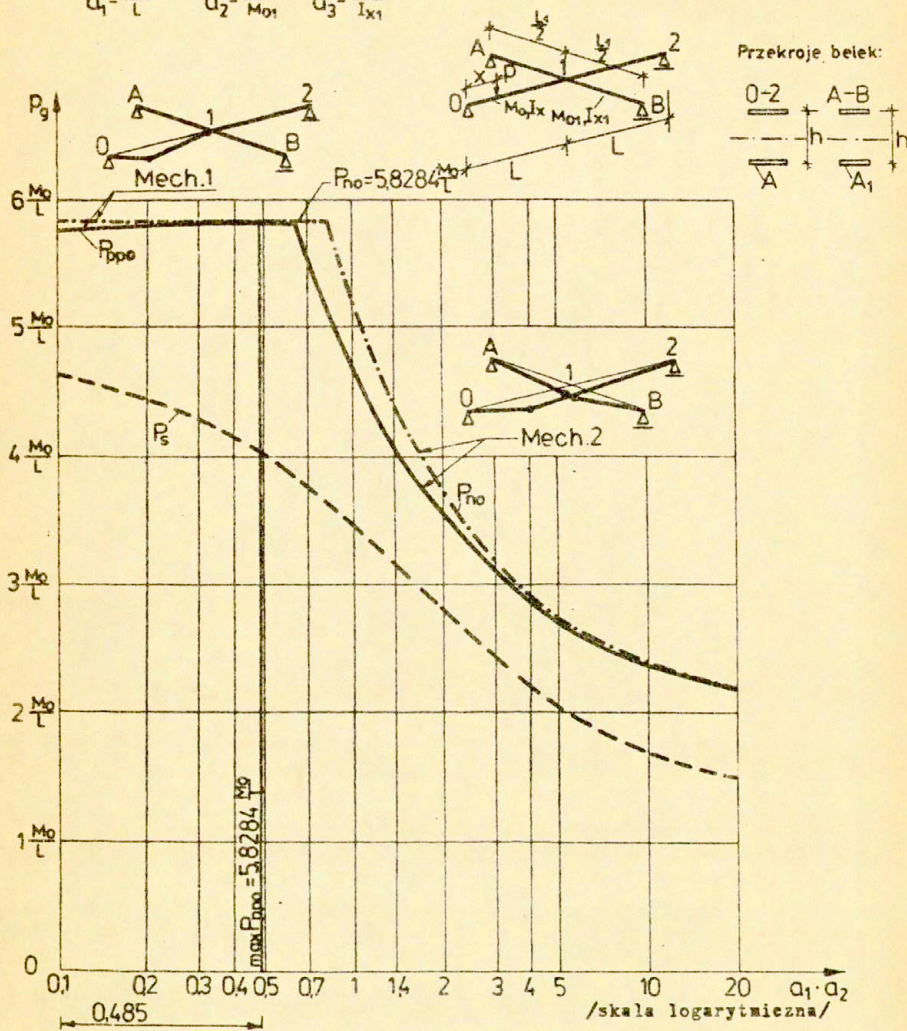
Z analizy przedstawionych wykresów wynikają następujące wnioski:

1. W przypadku występowania obciążenia w postaci siły P , której położenie na belce może się dowolnie zmieniać, ale która wzrasta monotonicznie od zera do ostatecznej wartości, graniczna wartość P_{no} tej siły jest niezależna od sprężystości podpory i dla wszystkich k wynosi $P_{no} = 5,8284 \frac{M^0}{L}$.
2. Gdy obciążenie stanowi siła o zmiennej intensywności $0 \leq P \leq P_g$ przesuująca się wielokrotnie po belce wartość graniczna $P_g = P_p$ tej siły zmienia się w zależności od współczynnika k sprężystości podpory. Zarówno dla belek o przekroju sandwiczowym jak i dwuteowym o przystosowaniu, bądź nieprzystosowaniu się konstrukcji do zmiennego obciążenia decyduje w rozpatrywanym zakresie, tj. dla $\frac{5EI}{L^3} \leq k \leq \infty$, zniszczenie przyrostowe.

Do $k = \frac{12EI}{L^3}$ siła P_{ppo} znacznie wzrasta wraz ze wzrostem k . W przedziale $\frac{12EI}{L^3} \leq k \leq \infty$ wpływ sprężystości podpory na różnice w wartościach sił P_{ppo} jest nieznaczny. W przedziale tym występuje maksimum odpowiadające $k = 24,728 \frac{EI}{L^3}$, równe $\max P_{ppo} = 5,8284 \frac{M^0}{L}$ i równe granicznej sile P_{no} . Współczynnik $k = \frac{12EI}{L^3}$ rozdzielający omawiane zakresy odpowiada sprężystości podpory środkowej, dla której moment zginający na tej podporze równy jest zeru.
3. Graniczne siły P_g odpowiadające nośności sprężystej belki wzrastają wraz ze wzrostem k osiągając dla $k \rightarrow \infty$, tj. dla podpory sztywnej, wartości maksymalne.

$$a_2 = a_3 \quad a_1 = 2$$

$$a_1 = \frac{L_1}{L} \quad a_2 = \frac{M_0}{M_{01}} \quad a_3 = \frac{I_x}{I_{x1}}$$



Rys.5. Wykresy obciążeń granicznych P_g w zależności od stosunku sztywności belki podłużnej 0-1-2 do belki poprzecznej A-B ruszty wyznaczonych metodami:

- naprężeń dopuszczalnych
- teorii przystosowania
- · - · - teorii nośności granicznej

Z porównania wartości granicznych sił P_{no} i P_p wynika, że dla $\frac{12EI}{3L} \leq k \leq \infty$, tj. dla podpór dostatecznie sztywnych, można dla obciążenia zmiennego w czasie stosować rozwiązanie teorii nośności granicznej przyjmując $P_p = P_{no} = 5,8284 \frac{M^0}{L}$. W tym bowiem zakresie różnice między P_p i P_{no} nie przekraczają 2,2%. W pozostałym zakresie zmienności k różnice w wartościach sił P_p i P_{no} są znaczne i graniczne siły P_p dla obciążeń zmiennych należy wyznaczać z teorii przystosowania. Łatwo zauważyć, że dla $\frac{12EI}{3L} \leq k \leq \infty$ również i różnice między wartościami samych sił P są L nieznaczne, nie przekraczające 2,2%. Wynika z tego, że dla $k \geq \frac{12EI}{3L}$ można z dostateczną dokładnością przyjmować, że podpora jest sztywna, a obciążenie graniczne wynosi $P_{ppo} = 5,7158 \frac{M^0}{L}$, co odpowiada $k = \infty$.

Aby można było stosować przedstawione rozwiązanie podpora aż do chwili wyczerpania nośności belki musi pozostać sprężysta. Inaczej mówiąc ustawiona na belce w dowolnym miejscu, bądź też przesuwająca się quasi-statycznie po belce siła $P < P_g$ nie może powodować wystąpienia w konstrukcji podpory naprężeń większych od R_g . Gdy podpora jest słupem siła ta nie może również spowodować jego wyboczenia. W przypadku stwierdzenia, że przy obciążeniu belki siłą $P < P_g$ podpora przestaje być sprężysta, należy wyznaczyć obciążenie graniczne traktujące układ belka-podpora jako całość.

Rys.5 [12] stanowi ilustrację rozwiązania przeprowadzonego dla belki 0-1-2, której podpora jest belka poprzeczna AB. W zależności od stosunku sztywności belki 0-1-2 do belki A-B zniszczenie konstrukcji następuje zgodnie z jednym z dwu przedstawionych na tym rysunku mechanizmów. Zgodnie z mechanizmem 1 ulegają zniszczeniu ruszty o mniejszym stosunku sztywności belki 0-2 do belki A-B, zgodnie z mechanizmem 2 o większej. Odpowiadające mechanizmowi 1 wartości granicznych sił P_{no} i P_{ppo} , odwzorowane na rys.5 lewymi gałęziami krzywych, wyznaczone wykorzystując przedstawione w niniejszej pracy rozwiązanie, wyprowadzone dla schematu statycznego belki na sprężystej podporze. Odpowiednie zależności graniczne potrzebne do wyznaczenia prawych gałęzi krzywych P_{no} i P_{ppo} , odpowiadających mechanizmowi 2 zniszczenia ruszty, zostały wyprowadzone w pracy [12].

L i t e r a t u r a

1. Bleich H.: ⁿÜber die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes. Bauingenieur, nr 19-20/1932.
2. Neal B.G.: The behavior of framed structures under repeated loading. Quart.J.Mech.Appl.Math. nr 78/1951.
3. Koiter W.T.: General theprems for elastic-plastic solids. Progres in Solid Mechanics, 2. North-Holland, Amsterdam 1960.
4. Sawczuk A., Janas M., König J.A.: Analiza plastyczna konstrukcji. Ossolineum. Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk 1972.
5. König J.A., Sawczuk A., Paprocka-Grabczyńska W.: Obliczanie ram i belek na przystosowanie. Zesz.Probl. Mostostalu, 5, 1974.
6. Paprocka-Garlicka W., König J.A.: Projektowanie metodami teorii plastyczności belek ciągłych poddanych obciążeniom wielokrotnym. Inżynieria i Budownictwo, 4, 1979.
7. Ciampi V., Gavarini C.: Optimal choise of plastic parameters for systems in conditions of static or dynamic shakedown. XXth Polish Solid Mechanics Conference, Sept. 1978.
8. Hodge P.G.: Plastic analysis of structure. McGraw Hill, New York 1959.
9. Paprocka-Garlicka W.: Zasady i metoda projektowania sprężysto-plastycznych belek ciągłych poddanych obciążeniom ruchomym. Rozprawy Inżynierskie. 27, 1, 1979.
10. Stüssi F., Kollbrunner C.F.: Beitrag zum Traglastverfahren. Bautechnik 13, 1935, 264.
11. Życzkowski M.: Obciążenia złożone w teorii plastyczności, PWN, Warszawa, 1973.
12. Paprocka-Garlicka W.: Analiza stanów granicznych nośności sprężysto-plastycznych rusztów. /W przygotowaniu do prac IPPT/.