

Adam Clarkowski

JEDNOLITE I NIEJEDNOLITE  
ROZWIĄZANIE ASYMPTOTYCZNE  
ZAGADNIENIA DYFRAKCJI  
FALI PŁASKIEJ TYPU E  
NA GRANICY DWÓCH OŚRODKÓW

9/1985

P.269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 grudnia 1984 r.



56940



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,30 Ark.druk. 2

Oddano do drukarni w marcu 1985 r.

Nr zamówienia 163/85

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

Adam Ciarkowski

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

JEDNOLITE I NIEJEDNOLITE ROZWIĄZANIE  
ASYMPTOTYCZNE ZAGADNIENIA DYFRAKcji  
FALI PŁASKIEJ TYPU E NA GRANICY DWÓCH  
OŚRODKÓW

Streszczenie

W pracy rozważono dwuwymiarowe zagadnienie dyfrakcji fali płaskiej typu E na doskonale przewodzącym ekranie umieszczonym na granicy dwóch różnych ośrodków dielektrycznych. W ośrodku rzadszym optycznie, w którym propaguje się fala padająca, skonstruowano jednolite i niejednolite rozwinięcia asymptotyczne dla ścisłego rozwiązania tego problemu. Podano interpretację fizyczną rozwiązania.

Wstęp

W niniejszej pracy konstruujemy wysokoczęstotliwościowe, jednolite rozwinięcie asymptotyczne dla ścisłego rozwiązania problemu dyfrakcji na granicy dwóch różnych ośrodków dielektrycznych. Problem ten precyzujemy w następnym paragrafie. Przez rozwinięcie wysokoczęstotliwościowe rozumiemy takie rozwinięcie, którego dużym parametrem jest  $kq$ .  $k$  jest liczbą falową proporcjonalną do częstotliwości, a  $q$  odległością od ostrza, na którym zachodzi dyfrakcja. Określenie "jednolite" w rozważanym obszarze oznacza, że rozwinięcie jest słuszne w całym obszarze z wyjątkiem tej jego części, gdzie parametr rozwinięcia nie może być uważany za duży. W danym przypadku rozwinięcie konstruujemy w ośrodku rzadszym optycznie. Rozwinięcie to obowiązuje w całym ośrodku, w tym również w pobliżu i na granicach cienia występujących w zagadnieniu

fal, z wyłączeniem otoczenia ostrza, gdzie  $k_0 \leq 1$ .

Innym rodzajem rozwinięcia asymptotycznego jest rozwinięcie niejednolite. W danym przypadku rozwinięcie to zawodzi na wspomnianych wyżej granicach cienia fal. Z drugiej strony struktura tego rozwinięcia jest dużo prostsza, niż struktura rozwinięcia jednolitego i umożliwia ona interpretację fizyczną rozpatrywanego zagadnienia dyfrakcyjnego. W tej pracy pokazujemy, jak z uzyskanego rozwinięcia jednolitego można otrzymać rozwinięcie niejednolite.

To ostatnie rozwinięcie wykorzystujemy do fizycznego zinterpretowania rozwiązania problemu.

Rozważane zagadnienie dyfrakcyjne może być traktowane jako modelowe w problemie telekomunikacji w pobliżu brzegu morskiego [1], [2] lub w problematyce anten dielektrycznych.

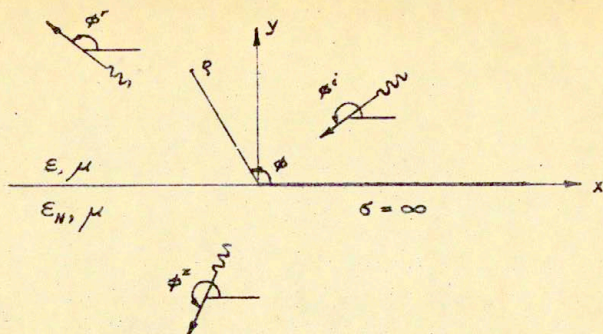
#### Sformułowanie zagadnienia dyfrakcyjnego i jego rozwiązanie ścisłe

Rozważmy następujący problem dyfrakcyjny. Niech półprzestrzeń  $y > 0$  będzie wypełniona ośrodkiem dielektrycznym o stałej dielektrycznej  $\epsilon$  i przenikalności magnetycznej  $\mu$ , zaś półprzestrzeń  $y < 0$  - innym ośrodkiem dielektrycznym o stałej dielektrycznej  $\epsilon_n$  i tej samej przenikalności magnetycznej. Załóżmy, że  $\epsilon_n > \epsilon$  a więc pierwszy ośrodek jest optycznie rzadszy, zaś drugi optycznie gęstszy. Niechaj na granicy obu ośrodków znajduje się ekran doskonale przewodzący  $x \geq 0$ ,  $y = 0$  na którym ulega dyfrakcji elektromagnetyczna fala płaska typu E, propagująca się w rzadszym ośrodku /Rys.1/. Pole elektryczne tej fali jest opisane wzorami

$$\underline{E}^i = (0, 0, u^i) e^{-i\omega t}$$

$$u^i(x, y) = e^{ik(x \cos \phi^i + y \sin \phi^i)} \quad \pi < \phi^i < 2\pi$$

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \text{ — rzeczywiste}$$



Rys.1

Poszukiwane jest elektromagnetyczne pole całkowite  $\underline{E}^t, \underline{H}^t$  spełniające:

- równania Maxwella w obszarach  $y < 0$  i  $y > 0$
- warunki ciągłości dla składowych stycznych  $\underline{E}_s^t, \underline{H}_s^t$  w aperturze:  $x < 0, y = 0$
- warunek brzegowy  $\underline{E}_s^t = 0$  na powierzchni ekranu  $x > 0, y = 0$
- warunek skończoności energii w dowolnym ograniczonym otoczeniu krawędzi ekranu  $x = 0, y = 0$
- warunek wypromieniania: poza falą podającą pozostałe fale "wybiegają" od ekranu.

Ponieważ problem jest w istocie dwuwymiarowy, zagadnienie znalezienia pola  $\underline{E}^t, \underline{H}^t$  redukuje się do rozwiązania odpowiadającego mu problemu skalarnego dla funkcji  $u^t(x, y)$ , spełniającej:

- równanie Helmholtza: 
$$\Delta u + k^2 n^2 u = 0 \quad n = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ N & y < 0 \end{cases}$$

$$N = \sqrt{\frac{\epsilon_N}{\epsilon}}$$

- warunki ciągłości dla  $u^t$  i  $\frac{\partial u^t}{\partial y}$  w aperturze
- warunek brzegowy:  $u^t = 0$  na ekranie
- warunek Meixnera całkowitalności  $|\nabla u|^2$  w otoczeniu krawędzi

- warunek wybiegania dla pola  $u^t - \theta(y)u^i$ , gdzie  $\theta(y)$  jest funkcją jednostkową Heaviside'a.

Znalazłszy  $u^t$  łatwo sprawdzić, że pole  $\underline{E}^t = (0, 0, u^t)$ ,  $\underline{H}^t = \frac{1}{i\omega\mu}(u_y^t, -u_x^t, 0)$  jest istotnie poszukiwanym polem elektromagnetycznym.

Podobny problem był rozpatrywany przez Stöckela [3] z tym że tam fala padająca rozchodziła się w ośrodku optycznie gęstszym. Do rozwiązania tego problemu autor posłużył się metodą sprzężonych równań całkowych.

W celu rozwiązania problemu postawionego w tej pracy została użyta metoda Jones'a, będąca jednym ze szczególnych podejść, opartych na ogólnej metodzie Wienera-Hopfa [4]. Pominiemy szczegóły wyprowadzenia rozwiązania ścisłego, podamy jedynie krótki opis jego konstrukcji. Składa się ono z dwóch kroków. W pierwszym kroku zakładamy nieobecność ekranu i w ten sposób rozwiązujemy problem transmisji pola  $u^i$  z ośrodka optycznie rzadszego do ośrodka gęstszego. Rozwiązanie tego zagadnienia pomocniczego nazwiemy polem pierwotnym  $u^p$ . Korzystając z warunków ciągłości dla  $u^p$  i  $\frac{\partial u^p}{\partial y}$  na  $y = 0$  dostajemy

$$u^p = \begin{cases} u^i + u^r & y > 0 \\ u^z & y < 0 \end{cases}$$

gdzie

$$u^i = e^{-i\omega_0 x - i\nu_0 y} \quad /1/$$

$$u^r = R e^{-i\omega_0 x + i\nu_0 y} \quad R = \frac{\nu_0 - \nu_{N_0}}{\nu_0 + \nu_{N_0}} \quad /2/$$

$$u^z = Z e^{-i\omega_0 x - i\nu_{N_0} y} \quad Z = \frac{2\nu_0}{\nu_0 + \nu_{N_0}} \quad /3/$$

oraz

$$w_0 = -k \cos \phi^r = -kN \cos \phi^z \quad /4/$$

$$v_0 = -k \sin \phi^i = \sqrt{k^2 - w_0^2} \quad /5/$$

$$v_{w_0} = -kN \sin \phi^z = \sqrt{(kN)^2 - w_0^2} \quad /6/$$

W tych wzorach  $u^i$  jest polem padającym,  $u^r$  - polem odbitym od granicy nieciągłości ośrodków ze współczynnikiem odbicia R i  $u^z$  - polem załamany na tej granicy ze współczynnikiem załamania Z. Kąty padania  $\phi^i$ , odbicia  $\phi^r$  i załamania  $\phi^z$  są przedstawione na rys.1.

W drugim kroku umieszczamy na granicy ośrodków doskonale przewodzący ekran  $x \geq 0, y = 0$  i poszukujemy pola dyfrakcyjnego  $u$ , zdefiniowanego jako różnica między polem całkowitym  $u^t$  i polem pierwotnym  $u^p$ :

$$u = u^t - u^p$$

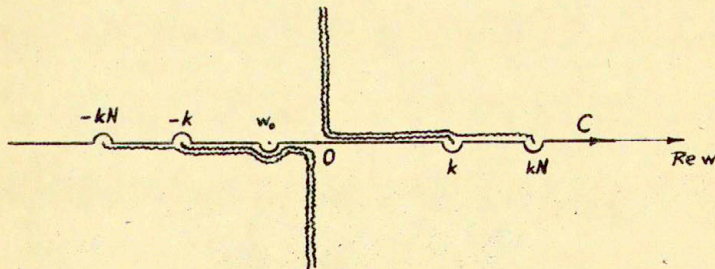
Ta część problemu jest znacznie trudniejsza do rozwiązania, a zasadnicza trudność zasadza się w faktoryzacji [4] funkcji

$$F(w) = \frac{1}{v + v_N}$$

gdzie konsekwentnie z /4/ - /6/

$$v = \sqrt{k^2 - w^2} \quad v_N = \sqrt{(kN)^2 - w^2}$$

Przyjmujemy, że na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $w$  z cięciami jak na rys.2 ma miejsce  $\text{Im } v > 0$  i  $\text{Im } v_N > 0$ .



Rys.2

Podobnie jak to uczynił Stöckel, korzystamy z pomysłu Amenta [5] użycia odwzorowań konforemnych do faktoryzacji funkcji  $F$  i w wyniku dostajemy

$$F_+(w) = F^{1/2}(0) e^{\int_0^w P_+(w) dw} \quad /7/$$

gdzie

$$P_+(w) = P(w) \frac{Q_1 - Q(w)}{2Q_1} + \frac{1}{2Q_1 k}$$

$$P(w) = [\ln F(w)]' = \frac{w}{v v_N}$$

$$Q(w) = \frac{1}{k} \int_0^w dw \frac{(kb)^2 - w^2}{v v_N}$$

$$b^2 = N^2 \frac{E'}{K'} ; \quad Q_1 = Q(k) = Q(kN)$$

Przy czym  $E$  i  $K$  są całkami eliptycznymi

$$E' = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\beta \quad K' = \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-x^2\beta^2}} \quad x = \sqrt{1-\frac{1}{N^2}}$$

Funkcja  $F_+(w)$  jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie  $\text{Im} w > 0$  zmiennej zespolonej  $w$ . Punkty  $w = -k$  i  $w = -kN$  są punktami rozgałęzienia tej funkcji rzędu 1.

Metoda Jonesa prowadzi do następującej postaci rozwiązania ścisłego dla pola  $u$

$$u = - \frac{1}{2\pi i} \frac{2v_0}{v_0 + v_{N0}} \int_C \frac{dw}{w-w_0} \frac{F_+(w)}{F_+(w_0)} e^{iwx + i \left\{ \frac{v}{v_N} \right\} |y|} \quad /8/$$

gdzie kontur  $C$  jest przedstawiony na rys.2, a w nawiasie klamrowym należy wziąć  $v$  gdy  $y > 0$  albo  $v_N$  gdy  $y < 0$ . W ten sposób rozważany problem brzegowy został rozwiązany.

Warto zauważyć, że gdy współczynniki załamania obu ośrodków stają się jednakowe, tj. gdy  $N = 1$ , wówczas

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2(k+w)}} \quad v_{N0} = v_0 \quad /9/$$



W konsekwencji  $u^p = u^i$  dla dowolnego  $y$  i /8/ przechodzi w znane rozwiązanie

$$u = -\frac{\sqrt{k+w_0}}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{\sqrt{k+w}(w-w_0)} e^{iwx+iv|y|}$$

problemu Sommerfelda dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie umieszczonej w ośrodku jednorodnym.

### Sprowadzenie funkcji $F_+$ do postaci wymaganej przez metodę Bleisteina

Ze względu na swą skomplikowaną postać wzór /8/ jest w praktycznych zastosowaniach mało przydatny. Jeśli jednak ograniczymy się do dużych częstotliwości, a więc dużych  $k$ , wówczas wyrażenie /8/ możemy rozwinąć asymptotycznie, korzystając w tym celu z którejś ze standardowych technik, np. metody najszybszego spadku lub metody fazy stacjonarnej. Tak otrzymane rozwinięcie ma jednak ograniczony zakres stosowności - zawodzi ono w przypadkach, gdy punkt siodłowy pokrywa się z którymś z pozostałych punktów krytycznych. Tego rodzaju sytuacje zdarzają się wówczas, gdy punkt obserwacji przechodzi przez granice cienia występujących w zagadnieniu fal. Niejednorodność otrzymanego rozwinięcia manifestuje się wtedy nieciągłościami /skokowymi lub narastaniem do nieskończoności/ poszczególnych członów rozwinięcia na tej granicy.

W niniejszej pracy stawiamy sobie za cel skonstruowanie rozwinięcia asymptotycznego pola  $u$ , które będzie obowiązywało zarówno z dala, jak i w otoczeniu granic cienia występujących fal. Posłużymy się w tym celu metodą zaproponowaną przez Bleisteina [6].

Metoda Bleisteina rozwijania asymptotycznego całek konturowych stosuje się do takiej klasy całek, w której funkcję podcałkową daje się przedstawić w postaci iloczynu funkcji analitycznej w otoczeniu konturu całkowania - oznaczymy ją

przez  $G(w)$  - oraz wyrażenia postaci  $\prod_{i=1}^N (w-w_i)^{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i$  - stałe wymierne, zbierającego w sobie wszystkie osobliwości funkcji podcałkowej w tym otoczeniu. Zanalizujemy teraz funkcję  $F_+(w)$  pod kątem sprowadzenia jej do takiej postaci. W tym celu można wystartować od wyrażenia /7/, jednak szybciej dochodzi się do wyniku inną drogą. Zauważmy, że funkcję  $F(w)$  można przedstawić w postaci /por. /7/ z definicją funkcji  $F(w)$  /

$$F = F_+ F_- \quad /10/$$

gdzie  $F_-(w) = F_+(-w)$ . Punkty rozgałęzienia  $w = -kN$  i  $w = -k$  funkcji  $F$  są również punktami rozgałęzienia funkcji  $F_+$ , natomiast funkcja  $F_-$  jest w tych punktach analityczna. Odpowiednio punkty rozgałęzienia  $w = k$  i  $w = kN$  funkcji  $F$  są punktami rozgałęzienia funkcji  $F_-$ , zaś funkcja  $F_+$  jest w nich analityczna. Ponieważ pod całką /8/ występuje tylko funkcja  $F_+$ , przeto interesujące dla nas są tylko punkty  $w = -kN$  i  $w = -k$ . Rozpatrzmy dwa przypadki:  $N > 1$  i  $N = 1$ .

Gdy  $N > 1$ , wówczas funkcję  $F$  możemy zapisać w postaci

$$F = \frac{\sqrt{N} - \sqrt{v}}{k^2(N^2 - 1)}$$

Stąd i z /10/ dostajemy

$$F_+ = \frac{\sqrt{N}}{k^2(N^2 - 1)E} - \frac{\sqrt{v}}{k^2(N^2 - 1)E} \quad /11/$$

Każdy ze składników w tej sumie ma postać zbliżoną do tej, jakiej szukamy. Istotnie, pierwszy składnik jest iloczynem  $\sqrt{kN+w}$  i funkcji regularnej w punktach  $w = -kN$  i  $w = -k$ , drugi zaś składnik jest iloczynem  $\sqrt{k+w}$  i funkcji regularnej w tych punktach. Pojawia się jednak następująca trudność. Mimo, że funkcja  $F_+$  jest regularna w punktach  $w = k$  i  $w = kN$ , nie jest to prawdziwe dla jej składników.

Rzeczywiście, natychmiast widać, że funkcja  $F_-$  wnosi w pierwszym składniku punkt rozgałęzienia w  $w = k$ , a w drugim składniku punkt rozgałęzienia w  $w = kN$ . Ponieważ funkcja  $F_+$  jest w tych punktach regularna, więc każdy ze składników ma osobliwość typu punktu rozgałęzienia zarówno w  $w = k$ , jak i

w = kN. Aby pokonać tę trudność rozbijamy pierwotny kontur całkowania na sumę dwóch konturów, łączących się ze sobą w pewnym punkcie odcinka (-k, k).

Na tym konturze, który przebiega w pobliżu punktów w = -kN i w = -k będziemy posługiwali się reprezentacją /11/ funkcji  $F_+$ , a na drugim konturze będziemy korzystali z postaci /7/ tej funkcji.

W ten sposób spełniamy warunki wymagane do użycia teorii Bleisteina.

W przypadku, gdy  $N = 1$ , reprezentacja /11/ przestaje obowiązywać w tym sensie, że oba składniki dążą do nieskończoności. Sama funkcja  $F_+$  upraszcza się do postaci /9/, gdzie  $\sqrt{k+w}$  występuje w potęgze -1. Można by oczekiwać, że ta postać jest granicznym przypadkiem reprezentacji  $F_+ = \frac{G_1(w)}{\sqrt{w+kN}} + G_2(w)$  w otoczeniu w = -kN, słusznej dla dowolnego  $N > 1$ , gdzie  $G_1(w)$  i  $G_2(w)$  są w tym punkcie regularne. Reprezentacja ta również dopuszcza użycie teorii Bleisteina. Łatwo stwierdzić, że taka reprezentacja nie istnieje, w przeciwnym bowiem przypadku pierwszy jej składnik dążyłby do nieskończoności w punkcie w = -kN, podczas gdy drugi składnik i sama funkcja  $F_+$  są w tym punkcie ograniczone.

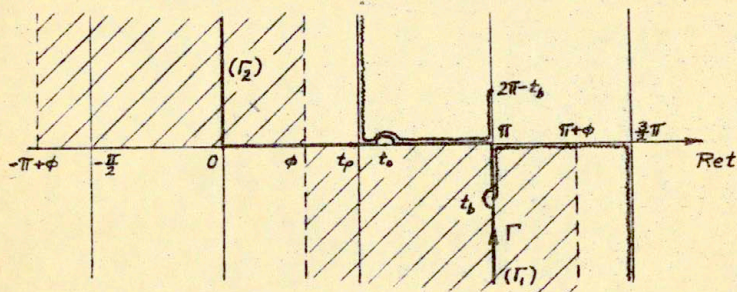
Wskutek niemożności znalezienia jednej reprezentacji funkcji  $F_+$  spełniającej założenia teorii Bleisteina tak przy  $N > 1$ , jak i przy  $N = 1$ , nie udaje się nam skonstruować rozwinięcia jednolitego pola u, słusznego dla obu tych przypadków równocześnie. Rozwinięcie jednolite dla  $N = 1$  jest znane /7/. W niniejszej pracy skoncentrujemy się na przypadku  $N > 1$ .

### Transformacja z płaszczyzny zmiennej zespolonej w do płaszczyzny zespolonych kątów t.

We wzorze /8/ dokonajmy transformacji zmiennych w-t:

$$w = k \cos t$$

odwzorowującej płaszczyznę zmiennej zespolonej w w dwa pół- nieskończone pasy:  $\text{Im}t > 0, -\frac{\pi}{2} < \text{Re}t < \frac{\pi}{2}$  i  $\text{Im}t < 0, \frac{\pi}{2} < \text{Re}t < \frac{3\pi}{2}$ . W wyniku tej transformacji dostajemy  $v = k \sin t$ , a kontur C przechodzi w kontur  $\Gamma$  /rys.3/.



Rys.3

Pole  $u$  w obszarze  $y > 0$  przyjmuje postać

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

gdzie

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi i} \frac{v_0}{v_0 + v_{n0}} \int_{\Gamma} \cot \frac{t - t_0}{2} \frac{F_+(k \cos t)}{F_+(k \cos t_0)} e^{ikq \cos(t - \phi)} dt$$

$$u_2 = -\frac{1}{2\pi i} \frac{v_0}{v_0 + v_{n0}} \int_{\Gamma} \cot \frac{t - (2\pi - t_0)}{2} \frac{F_+(k \cos t)}{F_+(k \cos t_0)} e^{ikq \cos(t - \phi)} dt$$

i

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Zauważmy, że  $t_0 = \phi^r$ ,  $2\pi - t_0 = \phi^i$ . Kąt  $\phi$  i odległość  $\varrho$  są współrzędnymi cylindrycznymi punktu obserwacji  $(x, y)$ . Punkt  $t_p$  rozdziela kontury  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , których suma daje kontur  $\Gamma$ . Kąt  $t_b$  jest obrazem punktu  $w = -kN$ , zaś kąt  $2\pi - t_b$  jest obrazem tego punktu, wziętego z dolnego płatu dwupłatewej powierzchni Riemanna  $w$ . W obszarach zakreskowanych na rys.3 zachodzi  $\text{Im}[ikq \cos(t - \phi)] < 0$ , a więc przy ewentualnych deformacjach konturu  $\Gamma$  jego końce muszą pozostawać w tych obszarach.

Zauważmy, że w wyniku transformacji zmiennych punkty rozgałęzienia  $w = -k$  i  $w = k$  przechodzą w punkty regularne  $t = \pi$  i  $t = 0$ .

Zgodnie z tym co zapowiedziano w poprzednim paragrafie, każde z pól  $u_1$  i  $u_2$  rozbijamy na sumę trzech składników. W przypadku pola  $u_1$  mamy

$$u_1 = u_{10} + u_{11} + u_{12}$$

gdzie

$$u_{10} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \int_{\Gamma_2} \cot \frac{t-t_0}{2} \frac{F_2(k \cos t)}{F_+(k \cos t_0)} e^{ikq \cos(t-\phi)} dt$$

$$u_{11} = \frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \int_{\Gamma_1} \cot \frac{t-t_0}{2} \frac{V(k \cos t) e^{ikq \cos(t-\phi)}}{k^2(N^2-1)F_+(k \cos t)E(k \cos t)} dt$$

$$u_{12} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \int_{\Gamma_1} \cot \frac{t-t_0}{2} \frac{V_N(k \cos t) e^{ikq \cos(t-\phi)}}{k^2(N^2-1)F_+(k \cos t)E(k \cos t)} dt$$

Podobnie rozbijamy pole  $u_2$  na sumę

$$u_2 = u_{20} + u_{21} + u_{22}$$

gdzie kolejne składniki  $u_{2i}$   $i=0,1,2$  otrzymujemy z  $u_{1i}$  zastępując  $\cot \frac{t-t_0}{2}$  przez  $\cot \frac{t-(2\pi-t_0)}{2}$ .

#### Rozwinięcia asymptotyczne całek metodą Bleisteina

Wszystkie występujące tu całki są postaci

$$I = \int_{\Gamma_i} f(t) e^{-\lambda w(t;\phi)} dt$$

gdzie

$$\lambda = kq$$

jest dużym parametrem, a funkcja  $w(t;\phi)$  ma prosty punkt siodłowy w  $t=\phi$ , tj.  $w'(\phi;\phi)=0$ ,  $w''(\phi;\phi) \neq 0$ . Zgodnie z metodą Bleisteina, na drodze zamiany zmiennych  $t \rightarrow z$  przeprowadzimy funkcję  $w(t;\phi)$  w najprostszą funkcję również mającą prosty punkt siodłowy w  $z = z(\phi)$ .

Taką funkcją jest wielomian drugiego stopnia, który oznaczymy

przez  $p(z; \delta)$ . Żądamy więc, aby

$$w(t; \phi) = p(z; \delta) \quad /12/$$

gdzie

$$p(z; \delta) = \frac{z^2}{2} + \delta z + \beta$$

Stąd

$$\frac{dt}{dz} = \frac{z + \delta}{w'(t; \phi)}$$

Dla wzajemnej jednoznaczności odwzorowania trzeba, aby ta pochodna była ograniczona i niezerowa, co prowadzi do odpowiedniości punktów

$$t = \phi \longleftrightarrow z = -\delta$$

Ponadto zażądajmy, by

$$t = 0 \longleftrightarrow z = 0.$$

Te dwa warunki pozwolą wyznaczyć  $\delta$  i  $\beta$ . Z /12/ dostajemy

$$z^2 + 2\delta z + 2(\beta - w) = 0$$

skąd

$$z = -\delta + \sqrt{\delta^2 - 2(\beta - w)} \quad /13/$$

Ponieważ

$$\beta = w(0, \phi)$$

więc

$$z = -\delta + \sqrt{\delta^2 + 2[w(t; \phi) - w(0; \phi)]}$$

Podstawiając w tej równości  $t=0$  i  $z=0$  stwierdzamy, że  $\delta = +\sqrt{\delta^2}$ . Z drugiej strony z równości

$$p(-\delta; \delta) = -\frac{\delta^2}{2} + \beta = w(\phi; \phi)$$

dostajemy

$$\delta^2 = 2[\beta - w(\phi; \phi)] = 2[w(0; \phi) - w(\phi; \phi)]$$

czyli

$$\delta = \sqrt{2[w(0; \phi) - w(\phi; \phi)]}$$

Korzystając z /13/ otrzymujemy

$$z + \delta = \sqrt{2[w(t; \phi) - w(\phi; \phi)]} \quad /14/$$

a stąd po podniesieniu obu stron do kwadratu ostatecznie dostajemy

$$w(t; \phi) = \frac{(z+\delta)^2}{2} + w(\phi; \phi) = \rho(z; \delta)$$

W naszym przypadku

$$w(t; \phi) = -i \cos(t - \phi)$$

zatem

$$\delta = \sqrt{2i(1 - \cos \phi)} = 2e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \quad /15/$$

oraz

$$z + \delta = \sqrt{2i[1 - \cos(t - \phi)]} = -2e^{i\frac{t-\phi}{2}} \sin \frac{t-\phi}{2} \quad /16/$$

Bierzemy tu znak "-", aby przy  $z = 0$  i  $t = 0$  wzór ten nie był sprzeczny z /15/. Określa on szukaną transformację zmiennych, przeprowadzającą całkę I do postaci

$$I = \int_{L_i} f[t(z)] \frac{dz}{z} e^{-\lambda \rho(z; \delta)} dz$$

gdzie  $L_i$ ,  $i = 1, 2$  są obrazami konturów  $\Gamma_i$  na płaszczyźnie  $z$ .

Odnotujemy następujące fakty:

1. Z /14/ wynika, że kontur najszybszego spadku SDP, w płaszczyźnie  $t$  określony warunkiem  $\text{Im}[w(t; \phi)] = \text{Im}[w(\phi; \phi)]$ , przechodzi na płaszczyźnie  $z$  w prostą  $\text{Im}(z + \delta) = 0$ , równoległą do osi rzeczywistej.
2. Z /16/ widać, że gdy  $t_i \equiv \text{Im } t \rightarrow \pm \infty$  wówczas

$$\arg z(t) \rightarrow \frac{\pi}{4} \mp \frac{t - \phi + \pi}{2}$$

gdzie  $t_r \equiv \text{Re } t$ . Wynika stąd, że asymptotyczne położenie końców konturów całkowania w płaszczyźnie  $z$  zależy od kąta  $\phi$ .

3. Całka I jest zbieżna, jeśli  $\text{Re } \rho(z; \delta) > 0$  przy  $|z| \rightarrow \infty$ .

Oznaczmy:  $z + \delta = R e^{i\varphi}$

Warunek zbieżności całki sprowadza się do wymagania, aby końce konturów całkowania leżały w nieskończoności w sektorach:

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4} \quad \text{albo} \quad \frac{3}{4}\pi < \varphi < \frac{5}{4}\pi.$$

Przejdziemy teraz do konstrukcji rozwinięć asymptotycznych poszczególnych składników pól.

Pole  $u_{10}$

Pole  $u_{10}$  możemy skrótowo zapisać w postaci

$$u_{10} = \int_{\Gamma_2} \frac{g(t)}{t-t_0} e^{-\lambda w(t; \phi)} dt \quad /17/$$

gdzie funkcja

$$g(t) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + \sqrt{N_0}} (t-t_0) \cot \frac{t-t_0}{2} \frac{F_+(k \cos t)}{F_+(k \cos t_0)}$$

jest regularna w otoczeniu konturu  $\Gamma_2$ .

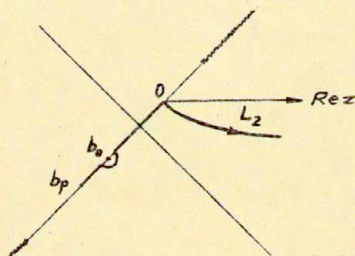
W wyniku zamiany zmiennej całkowania  $t \rightarrow z$  pole  $u_{10}$  przyjmuje postać

$$u_{10} = \int_{L_2} \frac{G(z)}{z-b_0} e^{-\lambda p(z; \delta)} dz \quad /18/$$

gdzie

$$G(z) = \frac{z-b_0}{t-t_0} g[t(z)] \frac{dt}{dz} \quad /19/$$

Funkcja  $G(z)$  jest regularna w otoczeniu konturu  $L_2$  przedstawionego na rys.4. Zgodnie z teorią Bleisteina rozbijamy tę funkcję na dwa



Rys.4

składniki

$$G(z) = H_0(z) + (z+\delta)(z-b_0)(z-b_p) F_0(z) \quad /20/$$

gdzie

$$b_0 = z(t_0), \quad b_p = z(t_p),$$

$F_0(z)$  jest wynikiem dzielenia  $G(z)$  przez  $(z+\delta)(z-b_0)(z-b_p)$ , a  $H_0(z)$  - resztą tego dzielenia. Wynika stąd, że  $H_0(z)$  jest wielomianem drugiego stopnia.

Motywacją takiego rozbitcia funkcji  $G(z)$  jest fakt, że drugi



składnik znika we wszystkich trzech punktach krytycznych całki: w punkcie siodłowym  $z = -\delta$ , biegunie  $z = b_0$  i punkcie początkowym całkowania  $z = b_p$ .

Jak wiadomo, główne przyczynki do rozwinięć asymptotycznych całek pochodzą właśnie od ich punktów krytycznych. Stąd możemy wnosić, że dominujące człony w rozwinięciu asymptotycznym  $u_{10}$  będą pochodziły od składnika  $H_0(z)$ , zaś drugi składnik generuje wyższe człony.

Przedstawmy funkcję  $H_0(z)$  w postaci

$$H_0(z) = c_0 + c_1(z - b_0) + c_2(z - b_0)(z + \delta) \quad /21/$$

Postać ta różni się od postaci  $\hat{c}_0 + \hat{c}_1 z + \hat{c}_2 z^2$  wynikającej z ogólnego schematu teorii Bleisteina. W danym przypadku nasz wybór szybciej prowadzi do wyniku końcowego.

W wyniku kolejnych podstawień  $z = -\delta$ ,  $z = b_0$  i  $z = b_p$  do /20/ i /21/ dostajemy układ 3 równań, z których wyliczamy współczynniki

$$c_0 = G(b_0) \quad /22/$$

$$c_1 = \frac{G(b_0) - G(-\delta)}{b_0 + \delta} \quad /23/$$

$$c_2 = \frac{1}{b_p + \delta} \left[ \frac{G(b_p) - G(b_0)}{b_p - b_0} - \frac{G(b_0) - G(-\delta)}{b_0 + \delta} \right] \quad /24/$$

Podstawiając teraz /20/ i /21/ do /18/, a następnie całkując przez części dostajemy

$$u_{10} = c_0 \int_{L_2} \frac{e^{-\lambda p}}{z - b_0} dz + c_1 \int_{L_2} e^{-\lambda p} dz + c_2 \frac{e^{-\lambda p(b_p + \delta)}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_2} \{ [F_0 + (z - b_p)F_0'] e^{-\lambda p} \} dz /25/$$

Wyrażenie to jest szukanym rozwinięciem jednolitym pola  $u_{10}$  z dokładnością do członu rzędu  $\lambda^{-1}$ . Ostatnia całka jest resztą rozwinięcia. Można jej użyć do konstrukcji wyższych członów rozwinięcia. Całka ta jest  $O(\lambda^{-3/2})$ , ponieważ główny przyczynik do rozwinięcia asymptotycznego tej całki pochodzi od punktu siodłowego i jest on  $O(\lambda^{-1/2})$ .

Jednolitość rozwinięcia względem kąta obserwacji  $\phi$  lub równoważnie względem parametru  $\delta$ , wynika z faktu, że wszystkie występujące w tym rozwinięciu funkcje są regularnymi funkcjami  $\delta$ .

W [8] pokazano, że funkcje stojące w /25/ przy współczynnikach  $c_i$  są ze sobą wzajemnie powiązane. Przytoczmy końcowe wyniki. Oznaczmy

$$J(v) = -\sqrt{2i} e^{\frac{v^2}{2}} \int_{\frac{v+p}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu$$

gdzie

$$v = \sqrt{\lambda} (b_0 + \delta) \quad p = \sqrt{\lambda} (b_p - b_0)$$

Wówczas

$$\int_{L_2} \frac{e^{-\lambda p}}{z - b_0} dz = e^{-\lambda p(b_0; \delta)} \int_{-\infty e^{i\frac{\pi}{4}}}^{\infty} J(t) dt = 2i e^{-\lambda p(b_0; \delta)} \int_{\frac{v}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{i\mu^2} d\mu \int_{\frac{v+p}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu$$

$$\int_{L_2} e^{-\lambda p} dz = -\frac{e^{-\lambda p(b_0; \delta)}}{\lambda} J(v) = \sqrt{\frac{2i}{\lambda}} e^{i\lambda} \int_{\frac{v+p}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu$$

oraz

$$\frac{e^{-\lambda p(b_0; \delta)}}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\delta} \int_{L_2} e^{-\lambda p} dz$$

Widzimy, że istotnie kolejne wyrazy rozwinięcia /25/ są generowane przez tą samą funkcję  $J(v)$ .

Jeśli punkty  $z = -\delta$ ,  $z = b_0$  i  $z = b_p$  /odpowiednio  $t = \phi$ ,  $t = t_0$  i  $t = t_p$ / leżą z dala od siebie, wówczas rozwinięcie jednolite /25/ możemy dalej uprościć, rozwijając je niejednolicie.

W [8] pokazano, że

$$\int_{L_2} \frac{e^{-\lambda p}}{z - b_0} dz = 2\pi i e^{i\lambda - ia^2} \theta(-a)\theta(-b) - \frac{\sqrt{-i\pi} e^{i\lambda} \theta[-(a+b)]}{a} + \frac{e^{i\lambda - i(a+b)^2}}{2i(a+b)} + O(a^{-3}) + O[(a+b)^{-3}]$$

$$\int_{L_2} e^{-\lambda p} dz = \sqrt{\frac{2i}{\lambda}} e^{i\lambda} [\sqrt{-i\pi} \theta[-(a+b)] + \frac{e^{-i(a+b)^2}}{2i(a+b)} + O[(a+b)^{-3}]] \quad /26/$$

gdzie

$$a = \sqrt{\frac{\lambda}{2i}} (b_0 + \delta), \quad b_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{2i}} (b_p - b_0),$$

a  $\Theta(x)$  jest funkcją jednostkową Heavisida.

Podstawiając te wyrażenia do /25/, a następnie przechodząc do współrzędnych kątowych otrzymujemy następujące rozwinięcie niejednolite pola  $u_{10}$

$$\begin{aligned} u_{10} = & - \frac{2V_0}{V_0 + V_{N0}} e^{i\lambda \cos(\phi - t_0)} \Theta(t_0 - \phi) \Theta(t_p - t_0) + \\ & + \frac{iV_0}{\sqrt{2\pi\lambda}(V_0 + V_{N0})} \cot \frac{\phi - t_0}{2} \frac{F_+(k \cos \phi)}{F_+(k \cos t_0)} e^{i\lambda - i\frac{\pi}{4}} \Theta(t_p - \phi) + \\ & - \frac{V_0}{2\pi\lambda(V_0 + V_{N0})} \cot \frac{t_p - t_0}{2} \frac{F_+(k \cos t_p)}{F_+(k \cos t_0) \sin(\phi - t_p)} e^{i\lambda \cos(\phi - t_p)} + O(\lambda^{-3/2}) \end{aligned}$$

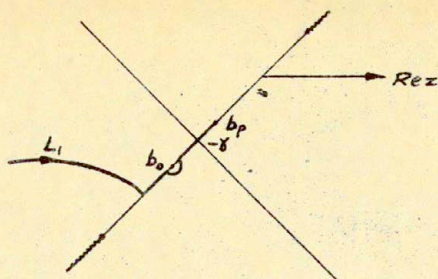
Poszczególnym członom tego rozwinięcia /jak i rozwinięć następnych składowych pól  $u_1$  i  $u_2$ / możemy przypisać sens fizyczny. Wygodnie jednak jest odłożyć interpretację fizyczną wyników do czasu analizy pola całkowitego.

Pole  $u_{11}$

Konstrukcja jednorodnego rozwinięcia asymptotycznego pola  $u_{11}$  przebiega podobnie jak w przypadku pola  $u_{10}$ . Jest to konsekwencją faktu, że całka opisująca to pole ma takie same punkty krytyczne: punkt siodłowy  $t = \phi$  biegun  $t = t_0$  i /w tym przypadku/ końcowy punkt całkowania  $t = t_p$ . To co różni oba pola, to inny kontur całkowania i odmienna postać funkcji  $g(t)$ , regularnej w otoczeniu tego konturu. Tu funkcja ta jest opisana wzorem

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + V_{N0}} \frac{1}{k^2(N^2 - 1)} (t - t_0) \cot \frac{t - t_0}{2} \frac{v(k \cos t)}{F_+(k \cos t_0) F_+(k \cos t)}$$

W rezultacie wzory /17/-/24/ pozostają słuszne i w tym przypadku z tym, że w dwu pierwszych należy zastąpić  $\Gamma_2$  i  $L_2$  przez  $\Gamma_1$  i  $L_1$  /Rys.5/.



Rys. 5

Końcowy wzór na rozwinięcie jednolite pola  $u_{11}$  ma postać

$$u_{11} = c_0 \int_{L_1} \frac{e^{-\lambda p}}{z-b_0} dz + c_1 \int_{L_1} e^{-\lambda p} dz - c_2 \frac{e^{-\lambda p(b_p; \delta)}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_1} [F_0 + (z-b_p)F_0'] e^{-\lambda p} dz$$
 Jeśli punkty krytyczne  $z = -\delta$ ,  $z = b_0$  i  $z = b_p$  leżą z dala od siebie, wzór ten jak poprzednio możemy rozwinąć niejednolicie. W tym celu korzystamy z zależności [8]

$$\int_{L_1} \frac{e^{-\lambda p}}{z-b_0} dz = e^{-\lambda p(b_0; \delta)} [2\pi i \Theta(\frac{p}{\lambda}) - 2i \int_{-\frac{p+\delta}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\eta^2} d\eta \int_{-\frac{p}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\eta^2} d\eta =$$

$$= 2\pi i e^{i\lambda - ia^2} \Theta(-a) \Theta(b) - \frac{\sqrt{-i\pi} e^{i\lambda} \Theta(a+b)}{a} - \frac{e^{i\lambda - i(a+b)^2}}{2ib(a+b)} + O(a^{-3}) + O[(a+b)^{-3}] \quad /27/$$

$$\int_{L_1} e^{-\lambda p} dz = \sqrt{\frac{2i}{\lambda}} e^{i\lambda} \int_{-\frac{p+\delta}{\sqrt{2i}}}^{\infty} e^{-i\eta^2} d\eta = \sqrt{\frac{2i}{\lambda}} e^{i\lambda} [-i\pi \Theta(a+b) - \frac{e^{-i(a+b)^2}}{2i(a+b)} + O[(a+b)^{-3}]] \quad /28/$$

Podstawiając je do rozwinięcia jednolitego pola  $u_{11}$  i przechodząc do współrzędnych kątowych dostajemy szukane rozwinięcie niejednolite tego pola

$$u_{11} = \frac{2V_0^2}{k^2(N^2-1)} e^{i\lambda \cos(\phi-t_0)} \Theta(t_0 - \phi) \Theta(t_0 - t_p) +$$

$$+ \frac{V_0}{\sqrt{2\pi\lambda}(V_0 + V_{H0})} \cot \frac{\phi - t_0}{2} \frac{v(k \cos \phi)}{k^2(N^2-1)F_+(k \cos \phi)F_+(k \cos t_0)} e^{i\lambda + i\frac{\pi}{4}} \Theta(\phi - t_p) +$$

$$- \frac{V_0}{2\pi\lambda(V_0 + V_{H0})} \cot \frac{t_p - t_0}{2} \frac{v(k \cos t_p) e^{i\lambda \cos(\phi - t_p)}}{k^2(N^2-1)F_+(k \cos t_p)F_+(k \cos t_0) \sin(\phi - t_p)} + O(\lambda^{-3/2}).$$

Pole  $u_{12}$

Określmy zespolony kąt  $t_b$  przy pomocy zależności

$$-N = \cos t_b, \quad \operatorname{Re} t_b = \pi, \quad \operatorname{Im} t_b \leq 0$$

Punkt  $t = t_b$  na płaszczyźnie zmiennej  $t$  jest obrazem punktu  $w = -kN$  na płaszczyźnie  $w$ .

Funkcję  $V_N(k \cos t)$  możemy napisać w postaci

$$V_N(k \cos t) = k \sqrt{-(\cos t + \cos t_b)} \sqrt{\cos t - \cos t_b}$$

W otoczeniu konturu  $\Gamma_1$  pierwszy pierwiastek jest funkcją regularną.

Drugi pierwiastek możemy przedstawić w postaci iloczynu

$$\sqrt{\cos t - \cos t_b} = \sqrt{t - t_b} \sqrt{t - (2\pi - t_b)} \sqrt{\frac{\sin \frac{t - t_b}{2}}{t - t_b} \cdot \frac{\sin \frac{t - (2\pi - t_b)}{2}}{t - (2\pi - t_b)}},$$

gdzie dwa pierwsze pierwiastki mają punkty rozgałęzienia odpowiednio w  $t = t_b$  i  $t = 2\pi - t_b$ , zaś trzeci pierwiastek jest w tych punktach regularny. Punkt  $t = t_b$  leży zawsze w otoczeniu konturu  $\Gamma_1$ , natomiast punkt  $t = 2\pi - t_b$  może znajdować się blisko tego konturu, jeśli  $N$  jest bliskie jedności. Pole  $u_{12}$  możemy zatem przedstawić w postaci

$$u_{12} = \int_{\Gamma_1} \frac{\sqrt{t - t_b} \sqrt{t - (2\pi - t_b)}}{t - t_0} g(t) e^{-\lambda w(t; \phi)} dt$$

gdzie

$$g(t) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \frac{V_N(k \cos t) \cot \frac{t - t_0}{2}}{k^2(N^2 - 1) E(k \cos t) F_2(k \cos t_0)} \frac{t - t_0}{\sqrt{t - t_b} \sqrt{t - (2\pi - t_b)}}$$

jest funkcją regularną w otoczeniu konturu  $\Gamma_1$ .

W wyniku zamiany zmiennej całkowania  $t \rightarrow z$  dostajemy

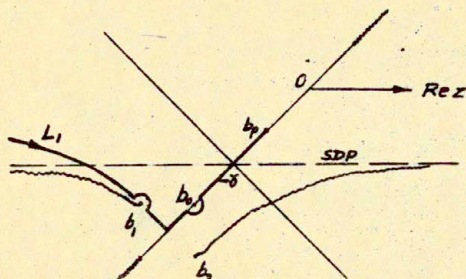
$$u_{12} = \int_{L_1} \frac{\sqrt{z - b_1} \sqrt{z - b_2}}{z - b_0} \Theta(z) e^{-\lambda p(z; \delta)} dz \quad /29/$$

gdzie

$$G(z) = \frac{z - b_0}{t - t_0} \frac{\sqrt{t - t_b} \sqrt{t - (2\pi - t_b)}}{\sqrt{z - b_1} \sqrt{z - b_2}} g[t(z)] \frac{dt}{dz}$$

jest funkcją regularną w otoczeniu konturu  $L_1$ , a  $b_1 = z(t_b)$ ,  $b_2 = z(2\pi - t_b)$  są punktami rozgałęzienia funkcji podcałkowej w /29/. Cięcia wychodzące z tych punktów prowadzimy wzdłuż linii najszybszego spadku funkcji podcałkowej, asymptotycznie dążącej do prostej  $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(-\delta)$ . Ta ostatnia prosta jest linią naj-

szybszego spadku przechodzącą przez punkt  $z = -\delta$  /rys.6/.  
 Kontur  $L_1$  biegnie zawsze ponad cięciem wychodzącym z



Rys. 6

punktu  $z = b_1$ .

Całką /29/ ma pięć punktów krytycznych: punkt siodłowy  $z = -\delta$ , biegun  $z = b_0$ , punkty rozgałęzienia  $z = b_1$  i  $z = b_2$  oraz końcowy punkt całkowania  $z = b_p$ . Stosownie do tego funkcję  $G(z)$  rozbijamy na sumę

$$G(z) = c_0 + c_1(z-b_0) + c_2(z-b_0)(z+\delta) + c_3(z-b_1)(z+\delta)^2 + c_4(z-b_0)(z+\delta)^3 + (z+\delta)(z-b_0)(z-b_1)(z-b_2)(z-b_p)F_0(z) \quad /30/$$

Stąd wyznaczamy współczynniki

$$c_0 = G(b_0) \quad /31/$$

$$c_1 = \frac{G(b_0) - G(-\delta)}{b_0 + \delta} \quad /32/$$

$$c_2 = \frac{A(b_2 + \delta)(b_p + \delta)}{(b_1 + \delta)(b_2 - b_1)(b_p - b_1)} - \frac{B(b_p + \delta)(b_1 + \delta)}{(b_2 + \delta)(b_p - b_2)(b_2 - b_1)} + \frac{C(b_1 + \delta)(b_2 + \delta)}{(b_p + \delta)(b_p - b_2)(b_p - b_1)} \quad /33/$$

$$c_3 = -\frac{A(b_2 + b_p + 2\delta)}{(b_1 + \delta)(b_2 - b_1)(b_p - b_1)} + \frac{B(b_p + b_1 + 2\delta)}{(b_2 + \delta)(b_p - b_2)(b_2 - b_1)} - \frac{C(b_1 + b_2 + 2\delta)}{(b_p + \delta)(b_p - b_2)(b_p - b_1)} \quad /34/$$

$$c_4 = \frac{A}{(b_1 + \delta)(b_2 - b_1)(b_p - b_1)} - \frac{B}{(b_2 + \delta)(b_p - b_2)(b_2 - b_1)} + \frac{C}{(b_p + \delta)(b_p - b_2)(b_p - b_1)} \quad /35/$$

gdzie

$$A = \frac{G(b_1) - G(b_0)}{b_1 - b_0} - \frac{G(b_0) - G(-\delta)}{b_0 + \delta} \quad /36/$$

$$B = \frac{G(b_2) - G(b_0)}{b_2 - b_0} - \frac{G(b_0) - G(-\delta)}{b_0 + \delta} \quad /37/$$

$$C = \frac{G(b_p) - G(b_0)}{b_p - b_0} - \frac{G(b_0) - G(-\delta)}{b_0 + \delta} \quad /38/$$

Podstawiając /30/ do /29/ i stosując oznaczenie

$$h(x) = \sqrt{x-b_1} \sqrt{x-b_2}$$

dostajemy wyrażenie

$$u_{12} = c_0 \int_{L_1} \frac{h}{x-b_0} e^{-\lambda p} dz + c_1 \int_{L_1} h e^{-\lambda p} dz + c_2 \int_{L_1} (z+\delta) h e^{-\lambda p} dz + \quad /39/$$

$$+ c_3 \int_{L_1} (z+\delta)^2 h e^{-\lambda p} dz + c_4 \int_{L_1} (z+\delta)^3 h e^{-\lambda p} dz + \int_{L_1} (x-b_p)(z+\delta)(x-b_1)(x-b_2) h E e^{-\lambda p} dz,$$

które jest jednolitym rozwinięciem asymptotycznym pola  $u_{12}$ . Ostatnia całka w tym wyrażeniu, będąca resztą rozwinięcia jest  $O(\lambda^{-3/2})$ . Nietrudno zauważyć, że funkcje stojące przy współczynnikach  $c_i$ ,  $i = 2, 3, 4$  są wynikiem zadziałania operatora różniczkowego  $(-\lambda)^{-j} \frac{d^j}{d\delta^j}$ ,  $j = i-1$  na funkcję stojącą przy współczynniku  $c_1$ .

Wychodząc z powyższego rozwinięcia wyprowadzimy rozwinięcie niejednolite pola  $u_{12}$ , słuszne dla przypadku gdy punkty krytyczne są wzajemnie odległe.

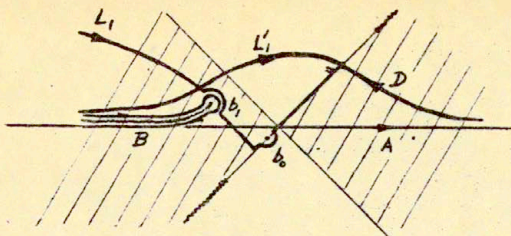
W tym celu wprowadźmy następujące kontury biegnące po drogach najszybszego spadku: kontur A przechodzący przez punkt  $z = -\delta$ , kontur B otaczający cięcie poprowadzone z punktu  $z = b_1$ , kontur D biegnący w prawej ćwiartce płaszczyzny z i kończący się w punkcie  $z = b_p$  i kontur  $L'_1$ , który wybiega z lewej ćwiartki i kończy się w tym samym punkcie  $z = b_p$ .

/rys.7/

Sposób szacowania asymptotycznego całek zademonstrujemy na przykładzie całki  $\int_{L_1} \frac{h(x)}{x-b_0} e^{-\lambda p(x;\delta)} dz$ .

Zauważmy

$$\int_{L_1} \frac{h}{x-b_0} e^{-\lambda p} dz = \theta \left( \frac{b_p - b_0}{\sqrt{\tau}} \right) 2\pi i h(b_0) e^{-\lambda p(b_0;\delta)} + \int_{L_1} \frac{h}{x-b_0} e^{-\lambda p} dz.$$



Rys. 7

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki

a/  $\text{Im}(-\delta) > \text{Im} b_p$

Kontur  $L'_1$  leży całkowicie w obszarze zakreskowanym i funkcja  $e^{-\lambda p(z; \delta)}$  zanika wykładniczo przy poruszaniu się w kierunku przeciwnym do obiegu  $L'_1$ . Dlatego główny przyczynek do całki daje otoczenie punktu  $z = b_p$ . Przyczynek ten znajdujemy na drodze całkowania przez części

$$\int_{L'_1} \frac{h}{z-b_0} e^{-\lambda p} dz = -\frac{e^{-\lambda p(b_p; \delta)}}{\lambda} \frac{h(b_p)}{(b_p + \delta)(b_p - b_0)} [1 + O(\lambda^{-1})]$$

b/  $\text{Im}(-\delta) < \text{Im} b_p$

Tego rodzaju sytuacja przedstawiona jest na rys. 7. Obecnie część konturu  $L'_1$  przebiega w górnej, niezakreskowanej ćwiartce, gdzie funkcja eksponencjalna rośnie z  $\lambda$ . Zatem szacowanie jak w poprzednim przypadku nie jest słuszne. Zamiast niego skorzystajmy z twierdzenia Cauchy'ego i napiszmy

$$\int_{L'_1} = \int_A + \theta(b_{1i} + \delta_i) \int_B + \int_D - \theta\left(\frac{b_p - b_0}{r_i}\right) \theta\left(\frac{b_p + r}{r_i}\right) 2\pi i h(b_0) e^{-\lambda p(b_0; \delta)}$$

gdzie  $b_{1i} = \text{Im} b_1$  i  $\delta_i = \text{Im} \delta$ .

Policzmy asymptotycznie występujące tu całki. Stosując metodę najszybszego spadku otrzymujemy

$$\int_A \frac{h}{z-b_0} e^{-\lambda p} dz = -e^{-\lambda p(-\delta; \delta)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{h(-\delta)}{\delta + b_0} [1 + O(\lambda^{-1})]$$

a z całkowania przez części dostajemy

$$\int_D \frac{h}{z-b_0} e^{-\lambda p} dz = -\frac{e^{-\lambda p(b_p; \delta)}}{\lambda} \frac{h(b_p)}{(b_p + \delta)(b_p - b_0)} [1 + O(\lambda^{-1})]$$



W celu oszacowania całki wokół cięcia stosujemy procedurę opisaną w [9] otrzymując w wyniku

$$\int_B \frac{h}{z-b_0} e^{-\lambda p} dz = \frac{2\sqrt{\pi} \left( \sqrt{z-b_1} \frac{h'}{z-b_0} \right) \Big|_{z=b_1}}{[\lambda(b_1+\delta)]^{3/2}} e^{-\lambda p(b_1;\delta)} [1+O(\lambda^{-1})]$$

Zbierając te wyniki razem dostajemy następujące wyrażenie asymptotyczne dla rozważanej całki, słuszne dla obu przypadków a/ i b/:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \frac{h}{z-b_0} e^{-\lambda p} dz = & \theta\left(\frac{b_p+\delta}{\sqrt{i}}\right) \theta\left(-\frac{b_p+\delta}{\sqrt{i}}\right) 2\pi i h(b_0) e^{-\lambda p(b_0;\delta)} + \\ & - \theta\left(\frac{b_p+\delta}{\sqrt{i}}\right) e^{-\lambda p(-\delta;\delta)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{h(-\delta)}{b_0+\delta} [1+O(\lambda^{-1})] + \\ & - \frac{e^{-\lambda p(b_p;\delta)}}{\lambda} \frac{h(b_p)}{(b_p+\delta)(b_p-b_0)} [1+O(\lambda^{-1})] + \\ & + \theta\left(\frac{b_p+\delta}{\sqrt{i}}\right) \theta(b_{ii}+\delta_i) \frac{2\sqrt{\pi} \left( \sqrt{z-b_1} \frac{h'}{z-b_0} \right) \Big|_{z=b_1}}{[\lambda(b_1+\delta)]^{3/2}} e^{-\lambda p(b_1;\delta)} \quad /40/ \end{aligned}$$

Analiza asymptotyczna pozostałych całek przebiega w podobny sposób.

W wyniku tej analizy dostajemy:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} h e^{-\lambda p} dz = & \theta\left(\frac{b_p+\delta}{\sqrt{i}}\right) e^{-\lambda p(-\delta;\delta)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} h(-\delta) [1+O(\lambda^{-1})] + \\ & - \frac{e^{-\lambda p(b_p;\delta)}}{\lambda} \frac{h(b_p)}{b_p+\delta} [1+O(\lambda^{-1})] + \\ & + \theta\left(\frac{b_p+\delta}{\sqrt{i}}\right) \theta(b_{ii}+\delta_i) \frac{2\sqrt{\pi} \left( \sqrt{z-b_1} \frac{h'}{z-b_0} \right) \Big|_{z=b_1}}{[\lambda(b_1+\delta)]^{3/2}} e^{-\lambda p(b_1;\delta)} \quad /41/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (z+\delta) h e^{-\lambda p} dz = & - \frac{e^{-\lambda p(b_p;\delta)}}{\lambda} (b_p+\delta) h(b_p) [1+O(\lambda^{-1})] + \\ & - \theta\left(\frac{b_p+\delta}{\sqrt{i}}\right) \frac{e^{-\lambda p(-\delta;\delta)}}{\lambda^{3/2}} \sqrt{2\pi} h'(-\delta) [1+O(\lambda^{-1})] + \\ & + \theta\left(\frac{b_p+\delta}{\sqrt{i}}\right) \theta(b_{ii}+\delta_i) \frac{2\sqrt{\pi} \left( \sqrt{z-b_1} (z+\delta) h' \right) \Big|_{z=b_1}}{[\lambda(b_1+\delta)]^{3/2}} e^{-\lambda p(b_1;\delta)} [1+O(\lambda^{-1})] \quad /42/ \end{aligned}$$

$$\int_{L_4} (z+\delta)^2 h e^{-\lambda p} dz = - \frac{e^{-\lambda p(b_p; \delta)}}{\lambda} (b_p + \delta) h(b_p) [1 + O(\lambda^{-1})] +$$

$$- \theta\left(\frac{b_p + \delta}{\sqrt{i}}\right) \frac{e^{-\lambda p(-\delta; \delta)}}{\lambda^{3/2}} \sqrt{2\pi} h(-\delta) [1 + O(\lambda^{-1})] +$$

$$+ \theta\left(\frac{b_p + \delta}{\sqrt{i}}\right) \theta(b_{ii} + \delta_i) \frac{2\sqrt{\pi} [\sqrt{x-b_i}(z+\delta)^2 h']|_{z=b_i} e^{-\lambda p(b_i; \delta)}}{[\lambda(b_i + \delta)]^{3/2}} [1 + O(\lambda^{-1})] \quad /43/$$

$$\int_{L_4} (z+\delta)^3 h e^{-\lambda p} dz = - \frac{e^{-\lambda p(b_p; \delta)}}{\lambda} (b_p + \delta)^2 h(b_p) [1 + O(\lambda^{-1})] +$$

$$+ \theta\left(\frac{b_p + \delta}{\sqrt{i}}\right) \theta(b_{ii} + \delta_i) \frac{2\sqrt{\pi} [\sqrt{x-b_i}(z+\delta)^3 h']|_{z=b_i} e^{-\lambda p(b_i; \delta)}}{[\lambda(b_i + \delta)]^{3/2}} [1 + O(\lambda^{-1})] +$$

$$- \theta\left(\frac{b_p + \delta}{\sqrt{i}}\right) 3 \frac{e^{-\lambda p(-\delta; \delta)}}{\lambda^{5/2}} \sqrt{2\pi} h'(-\delta) [1 + O(\lambda^{-1})]. \quad /44/$$

Podstawiając te wyrażenia do /39/, przechodząc do zmiennych kątowych i ograniczając się do wyrazów rzędu nie wyższego niż  $\lambda^{-1}$  dostajemy

$$u_{12} = \frac{2V_0 V_{N0}}{k^2(N^2-1)} e^{i\lambda \cos(\phi - t_0)} \theta(t_0 - t_p) \theta(t_0 - \phi) +$$

$$- \frac{V_0 \cot \frac{\phi - t_0}{2}}{\sqrt{2\pi} \lambda (V_0 + V_{N0})} \frac{V_N(k \cos \phi) e^{i\lambda + i\frac{\pi}{4}} \theta(\phi - t_p)}{k^2(N^2-1) E(k \cos \phi) F_2(k \cos t_0)} +$$

$$+ \frac{V_0 \cot \frac{t_p - t_0}{2}}{\sqrt{2\pi} \lambda (V_0 + V_{N0})} \frac{V_N(k \cos t_p) e^{i\lambda \cos(\phi - t_p)}}{k^2(N^2-1) E(k \cos t_p) F_2(k \cos t_0)} + O(\lambda^{-3/2})$$

Pole  $u_{20}$

Pole  $u_{20}$  możemy napisać w postaci

$$u_{20} = \int_{\Gamma_2} g(t) e^{-\lambda w(t; \phi)} dt$$

gdzie funkcja

$$g(t) = - \frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + V_{N0}} \cot \frac{t - \hat{t}_0}{2} \frac{F_2(k \cos t)}{F_2(k \cos t_0)}$$

jest regularna w otoczeniu konturu  $\Gamma_2$ , a kąt

$$\hat{t}_0 = \phi^i = 2\pi - t_0 \quad \pi \leq \hat{t}_0 \leq 2\pi$$

leży z dala od tego konturu.

Po zamianie zmiennych  $t \rightarrow z$  dostajemy

$$u_{20} = \int_{L_2} G(z) e^{-\lambda P(z; \delta)} dz \quad /45/$$

gdzie

$$G(z) = g[t(z)] \frac{dt}{dz}$$

jest funkcją regularną w otoczeniu konturu  $L_2$ .

W danym przypadku są tylko dwa punkty krytyczne: punkt siodłowy  $z = -\delta$  i punkt początkowy całkowania  $z = b_p$ . Stosownie do tego przedstawiamy funkcję  $G(z)$  w postaci sumy

$$G(z) = c_0 + c_1(z+\delta) + (z-b_p)(z+\delta) F_0(z) \quad /46/$$

skąd  $c_0 = G(-\delta)$

$$c_1 = \frac{G(b_p) - G(-\delta)}{b_p + \delta}$$

Podstawiając /46/ do /45/ dostajemy rozwinięcie jednolite pola  $u_{20}$

$$u_{20} = c_0 \int_{L_2} e^{-\lambda P} dz + c_1 \frac{e^{-\lambda P(b_p; \delta)}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_2} [F_0(z) + (z-b_p)F_0'(z)] e^{-\lambda P} dz$$

Ostatnia całka, będąca  $O(\lambda^{-3/2})$  jest resztą rozwinięcia. W celu znalezienia rozwinięcia niejednolitego pola  $u_{20}$  korzystamy z /26/ i przechodząc do współrzędnych kątowych dostajemy

$$u_{20} = -\mathcal{O}(t_p - \phi) \frac{e^{i\lambda + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}\lambda} \frac{v_0}{v_0 + v_{N_0}} \cot \frac{\phi - \hat{t}_0}{2} \frac{F_2(k \cos \phi)}{F_2(k \cos t_0)} + \frac{e^{i\lambda \cos(\phi - t_p)}}{2\pi\lambda \sin(t_p - \phi)} \frac{v_0}{v_0 + v_{N_0}} \cot \frac{t_p - \hat{t}_0}{2} \frac{F_2(k \cos t_p)}{F_2(k \cos t_0)} + O(\lambda^{-3/2}).$$

Pole  $u_{21}$

Pole to możemy napisać w postaci

$$u_{21} = \int_{r_1} \frac{q(t)}{t - \hat{t}_0} e^{-\lambda w(t; \phi)} dt$$

gdzie

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + V_{N0}} (t - \hat{t}_0) \cot \frac{t - \hat{t}_0}{2} = \frac{v(k \cos t)}{k^2(N^2 - 1) E(k \cos t) F_+(k \cos t)}$$

jest funkcją regularną w otoczeniu  $\Gamma_1$ , a biegun  $t = \hat{t}_0$  leży po prawej stronie konturu  $\Gamma_1$ . Po uwzględnieniu tych różnic w porównaniu z przypadkiem pola  $u_{11}$  pozostała część analizy asymptotycznej będzie jak w tamtym przypadku. W rezultacie dostajemy

$$u_{21} = c_0 \int_{L_1} \frac{e^{-\lambda p}}{z - \hat{b}_0} dz + c_1 \int_{L_1} e^{-\lambda p} dz - c_2 \frac{e^{-\lambda p(b_p; \delta)}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_1} [F_0 + (z - b_p) F_0'] e^{-\lambda p} dz$$

gdzie

$$\hat{b}_0 = z(\hat{t}_0)$$

oraz

$$c_0 = G(\hat{b}_0)$$

$$c_1 = \frac{G(\hat{b}_0) - G(-\delta)}{\hat{b}_0 + \delta}$$

$$c_2 = \frac{1}{b_p + \delta} \left[ \frac{G(b_p) - G(\hat{b}_0)}{b_p - \hat{b}_0} - \frac{G(\hat{b}_0) - G(-\delta)}{\hat{b}_0 + \delta} \right]$$

Ostatnia całka w rozwinięciu jest  $O(\lambda^{-3/2})$ .

W celu skonstruowania rozwinięcia niejednorodnego pola  $u_{21}$  korzystamy z [28] i z [8]

$$\int_{L_1} \frac{e^{-\lambda p}}{z - \hat{b}_0} dz = -2\pi i e^{i\lambda - ia^2} \theta(a) \theta(b) - \frac{\sqrt{-1} \pi e^{i\lambda} \theta(a+b)}{a} +$$

$$+ \frac{e^{i\lambda - i(a+b)^2}}{2ib(a+b)} + O(a^{-3}) + O[(a+b)^{-3}].$$

Ponieważ w naszym przypadku  $\theta(a) = \theta(\phi - \hat{t}_0) = 0$  więc rozwinięcie niejednorodnego pola  $u_{21}$  redukuje się do

$$u_{21} = \frac{V_0}{\sqrt{2\pi\lambda}(V_0 + V_{N0})} \cot \frac{\phi - \hat{t}_0}{2} \frac{v(k \cos \phi)}{k^2(N^2 - 1) E(k \cos \phi) F_+(k \cos t_0)} e^{i\lambda + i\frac{\pi}{4}} \theta(\phi - t_p) +$$

$$- \frac{V_0}{2\pi\lambda(V_0 + V_{N0})} \cot \frac{t_p - \hat{t}_0}{2} \frac{v(k \cos t_p) e^{i\lambda \cos(\phi - t_p)}}{k^2(N^2 - 1) E(k \cos t_p) F_+(k \cos t_0) \sin(\phi - t_p)} + O(\lambda^{-3/2})$$

Pole  $u_{22}$

Analiza asymptotyczna pola  $u_{22}$  przebiega w podobny sposób jak w przypadku pola  $u_{12}$ . Różnica polega na tym, że obecnie

$$g(t) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \frac{V_N(k \cos t) \cot \frac{t - \hat{t}_0}{2}}{k^2(N^2 - 1) E_-(k \cos t) F_+(k \cos t_0)} \frac{t - \hat{t}_0}{\sqrt{t - \hat{t}_0} \sqrt{t - (2\pi - \hat{t}_0)}}$$

i biegun  $t = \hat{t}_0$  leży na prawo od konturu  $\Gamma_1$ . W konsekwencji dostajemy następujące rozwinięcie jednolite pola  $u_{22}$

$$u_{22} = c_0 \int_{L_1} \frac{h}{z - \hat{a}_0} e^{-\lambda p} dz + c_1 \int_{L_1} h e^{-\lambda p} dz + c_2 \int_{L_1} (z + \delta) h e^{-\lambda p} dz + c_3 \int_{L_1} (z + \delta)^2 h e^{-\lambda p} dz + \\ + c_4 \int_{L_1} (z + \delta)^3 h e^{-\lambda p} dz + \int_{L_1} (z - b_p)(z + \delta)(z - b_1)(z - b_2) h F_0 e^{-\lambda p} dz$$

gdzie współczynniki rozwinięcia są opisane wzorami /31/-/38/, w których  $b_0$  zastąpione jest przez  $\hat{b}_0$ .

Analiza niejednolita przebiega również w podobny sposób. Dlatego ograniczymy się do podania końcowego wzoru na rozwinięcie niejednolite pola  $u_{22}$

$$u_{22} = -O(\phi - t_p) \frac{e^{i\lambda + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\lambda}} \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \cot \frac{\phi - \hat{t}_0}{2} \frac{V_N(k \cos \phi)}{k^2(N^2 - 1) E_-(k \cos \phi) F_+(k \cos t_0)} + \\ - \frac{e^{i\lambda \cos(\phi - t_p)}}{2\sqrt{\lambda} \sin(t_p - \phi)} \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \frac{V_N(k \cos t_p) \cot \frac{t_p - \hat{t}_0}{2}}{k^2(N^2 - 1) E_-(k \cos t_p) F_+(k \cos t_0)} + O(\lambda^{-3/2})$$

### Rozwinięcie asymptotyczne pola całkowitego $u^+$ . Interpretacja fizyczna tego pola

Rozwinięcia jednolite i niejednolite pól  $u_1$  i  $u_2$  są równe sumom rozwinięć poszczególnych składników tych pól. W przypadku rozwinięć niejednolitych niektóre człony rozwinięć cząstkowych wzajemnie się kompensują, co w wyniku prowadzi do prostych wzorów dla pól  $u_1$  i  $u_2$

$$u_1 = u_{10} + u_{11} + u_{12} = -\frac{2V_0}{V_0 + V_{N_0}} e^{i\lambda \cos(\phi - t_0)} \Theta(t_0 - \phi) +$$

$$- \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \cot \frac{\phi - t_0}{2} \frac{F_+(k \cos \phi)}{F_+(k \cos t_0)} \frac{e^{i\lambda + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\lambda}} + O(\lambda^{-3/2})$$

oraz

$$u_2 = u_{20} + u_{21} + u_{22} = - \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \cot \frac{\phi - t_0}{2} \frac{F_+(k \cos \phi)}{F_+(k \cos t_0)} \frac{e^{i\lambda + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\lambda}} + O(\lambda^{-3/2})$$

Jak pamiętamy, pole całkowite  $u^t$  jest sumą pola pierwotnego  $u^r$  i pola rozproszonego  $u$ . To ostatnie pole jest sumą pól  $u_1$  i  $u_2$ . Korzystając z /1/-/3/ możemy napisać

$$u^t = u^i + u^r \theta(\phi^r - \phi) + u^r \theta(\phi - \phi^r) + u^d \quad /47/$$

gdzie

$$u^i = e^{ikq \cos(\phi - \phi^i)}$$

$$u^r = - e^{ikq \cos(\phi - \phi^r)}$$

$$u^r = \frac{V_0 - V_{N_0}}{V_0 + V_{N_0}} e^{ikq \cos(\phi - \phi^r)}$$

$$u^d = - \frac{V_0}{V_0 + V_{N_0}} \frac{F_+(k \cos \phi)}{F_+(k \cos \phi^r)} \left( \cot \frac{\phi - \phi^r}{2} + \cot \frac{\phi - \phi^i}{2} \right) \frac{e^{ikq + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kq}} + O[(kq)^{-3/2}]$$

W oparciu o /47/ pole  $u^t$  w przestrzeni  $y > 0$  możemy zinterpretować w następujący sposób:

Cały optycznie rzadszy ośrodek jest oświetlony padającą falą płaską  $u^i$ , będącą  $O(1)$ . W obszarze  $\phi < \phi^r$  /rys.1/ występuje fala płaska  $u^r$ , odbita od doskonale przewodzącego ekranu  $x \geq 0, y = 0$ .

W obszarze komplementarnym  $\pi \gg \phi > \phi^r$  propaguje się fala płaska  $u^r$ , odbita od granicy nieciągłości ośrodków  $x < 0, y = 0$ .

Obie te fale są  $O(1)$ . Prócz tego występuje cylindryczna fala dyfrakcyjna  $u^d$ , rozchodząca się od krawędzi ekranu. Fala ta jest  $O[(kq)^{-1/2}]$ .

Zauważmy, że w rozwinięciu asymptotycznym pól  $u_1$  i  $u_2$  nie ma fali typu  $\frac{e^{ikq \cos(\phi - t_p)}}{kq}$ , pojawiającej się we

wszystkich składnikach pól  $u_1$  i  $u_2$ . Również nie ma tu funkcji jednostkowych z argumentami zależnymi od  $t_p$ , co miało miejsce we wspomnianych składnikach. Oba te fakty są wynikiem tego, że parametr  $t_p$  został narzucony sztucznie wskutek podziału konturu  $\Gamma$  na dwie części  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  i nie ma on żadnego znaczenia fizycznego.

Odnotujmy jeszcze, że w rozwinięciu /47/ ograniczyliśmy się do głównych członów, pomijając wyrazy wyższe niż  $O[(kq)^{-1}]$ . W ten sposób pominęliśmy falę typu  $\frac{e^{ikq \cos(\phi - t_b)}}{[kq \sin(t_b - \phi)]^{1/2}}$ .

Ponieważ  $t_b = \pi - i\delta$ ,  $\delta > 0$ , łatwo pokazać, że w przestrzeni  $y > 0$  fala ta jest tłumiona wykładniczo, niezależnie od malenia jej amplitudy jak  $(kq)^{-3/2}$ .

W związku z tym, w rozważanym obszarze fala ta może być pominięta w porównaniu z falami wymienionymi w /47/.

Na zakończenie zauważmy jeszcze, że zarówno rozwinięcie jednolite pola  $u^{\pm}$  jak i jego rozwinięcie niejednolite istotnie upraszczają strukturę ścisłego rozwiązania. W obu rozwinięciach dosyć skomplikowana funkcja  $F_{\pm}$  brana jest jedynie w kilku punktach krytycznych, podczas gdy w rozwiązaniu ścisłym liczona jest w każdym punkcie całkowania na konturze  $\Gamma$ .

## Literatura

- [1] Clemmow P.C., The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields, New York, Pergamon Press, 1965
- [2] Millar R.F., Propagation of Electromagnetic Waves Near a Coastline on a Flat Earth, Radio Science, 2, no 3, 261, March 1967.
- [3] Stöckel H., Die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einer bzw. zwei idealleitenden Halbebenen in der Trennebene zwischen zwei homogenen, isotropen Medien, Annalen der Physik, 12, no 3-4, 283, 1963
- [4] Mittra R., Lee S.W., Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan, New York, 1971
- [5] Ament W.S., NRL Report 4334, Washington, 1954
- [6] Bleistein N., Uniform asymptotic evaluation of integrals with many nearby stationary points and algebraic singularities, J.Math. Mech. 17, 533, 1967
- [7] Ciarkowski A., Uniform Asymptotic Expression for the Scattered Field in the Problem of Plane Wave Diffraction by a Half - Plane, Bull. l Acad. Polon. Sci., Ser. techn., XXVIII, no. 9-10, 397, 1980.
- [8] Ciarkowski A., Jednolite rozwinięcie asymptotyczne niepełnej całki dyfrakcyjnej, Prace IPPT, w druku.
- [9] Felsen L.B., Marcuvitz N., Radiation and Scattering of Waves, Prentice Hall, 1973