

4.41 — optymalizacja konstrukcji

18/1984

Jan Holniewski-Szulec

O OPTYMALNYM MODELOWANIU
NA MINIMUM LOKALNEGO UGIĘCIA

18/1984

P. 269



WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 marca 1984 r.



56966



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,7. Ark.druk. 1 .

Oddano do drukarni w kwietniu 1984 r.

Nr zamówienia 281/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

O OPTYMALNYM MODELOWANIU NA MINIMUM LOKALNEGO
UGIĘCIA

I. Wstęp

Znany jest w literaturze szereg prac na temat globalnej optymalizacji konstrukcji np. ze względu na minimalizację globalnej energii deformacji czy minimalizację ciężaru struktury [np. 1, 2, 4÷7]. Niniejsza praca prezentuje zagadnienie projektowania optymalnego ze względu na lokalne cechy ustroju - a mianowicie ugięcie w określonym punkcie konstrukcji. Rozważania prowadzone są na przykładzie ustroju kratowego, aczkolwiek łatwo mogą być uogólnione na inne ustroje (np. ramowe). Zaprezentowane na zakończenie rozważań zastosowanie metody "remodeling" [6] daje możliwość komputerowej analizy zagadnienia. Inne znane podejścia możliwe do zastosowania oparte są na wykorzystaniu układów sprzężonych i analizie wrażliwości (por. [8,9]).

Zakładając, że określona jest konfiguracja wyjściowa struktury kratowej i układ obciążenia zewnętrznego, poszukiwane jest takie rozmieszczenie danej objętości c materiału (opisywane przekrojami A_i prętów układu, przy czym $\sum_i A_i l_i = c$, gdzie l_i - długości prętów) aby wartość bezwzględna ugięcia $|u|$ w danym węźle D struktury i w obranym kierunku \underline{d} osiągnęła minimum.

W rozważaniach dopuszcza się zerowanie poszczególnych przekrojów A_i prętów (znikanie elementów) a zatem zmianę topologii układu. Zwróćmy uwagę na fakt, że minimalizując ugięcie w węźle D , który może zostać usunięty z układu przy pozostałej części zdolnej do przenoszenia obciążenia zewnętrznego otrzymamy rozwiązanie trywialne, w którym węzeł ten

pozostanie nieruchomy ($u=0$) lecz izolowany od konstrukcji (znikanie prętów z nim sąsiadujących). W celu uzyskania rozwiązań inżyniersko interesujących można tu posłużyć się pewnym chwytem formalnym i wprowadzić dodatkową siłę obciążenia zewnętrznego w węzle D. Siła ta, na tyle mała, aby nie zaburzała wartości liczbowych rozwiązania, zapewni nam współpracę w uzyskanym rozwiązaniu obranego węzła D z resztą ustroju. Zakładać zatem będziemy dalej, że węzeł D, w którym ugięcie jest minimalizowane, jest węzłem obciążonym.

W rozważaniach nie wprowadzamy lokalnych ograniczeń wytrzymałości materiału i uzyskujemy w rozwiązaniu struktury izostatyczne. Analizę można oczywiście uzupełnić dodatkowymi ograniczeniami nierównościowymi narzuconymi na wyężenia w poszczególnych prętach lub na ich przekroje. Zatraca to jednak pewną cechę jakościową rozwiązania optymalnego, której interpretacja jest celem tej pracy.

W części II pracy sformułowano zagadnienie optymalizacji i przeanalizowano jego warunki stacjonarności. Rozwiązaniami optymalnymi okazują się być struktury izostatyczne o wyrównanej pracy wzajemnej sił wewnętrznych (od obciążeń zewnętrznych) na deformacjach wywołanych obciążeniem siłą $\underline{d} = \underline{1}$ w węzle D.

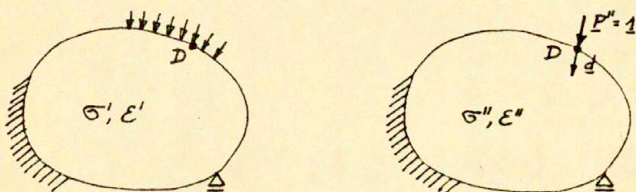
W części III omówiono przykład wspornika kratowego zaś w części końcowej IV podsumowano rozważania proponując pewną procedurę obliczeniową opartą na koncepcji modelowania optymalnego [6].

II. Sformułowanie zagadnienia i warunki stacjonarności

Rozważmy dwa stany obciążenia. Jeden z nich (I) jest stanem obciążeń zewnętrznych określonym w zadaniu, podczas gdy drugi (II) jest stanem zastępczym obciążenia siłą jednostkową $\underline{P}'' = \underline{1}$ przyłożoną w punkcie D (rys.1). Siła \underline{P}'' jest zgodna co do kierunku z wektorem \underline{d} .

Z zasady prac wirtualnych wynika następująca zależność:

$$1) \quad \underline{P}'' \underline{u}'_D = \int \underline{\epsilon}'' \underline{\epsilon}' dV$$



Rys. 1.

Ze względu na jednostkowość siły \underline{P}'' , miara skalarna przemieszczenia w punkcie D i w kierunku \underline{d} może być przedstawiona dla struktury kratowej następująco:

$$2) \quad u = \int_V \underline{\underline{\epsilon}}'' \underline{\underline{\epsilon}}' dV = \sum_i \frac{L_i}{E_i A_i} X_i' X_i'' = \sum_i \frac{E_i A_i}{L_i} V_i^J V_i^{J'}$$

gdzie:

- X_i', X_i'' - siły w pręcie "i" odpowiednio w stanach obciążenia I i II,
- V_i', V_i'' - wydłużenia pręta "i" odpowiednio w stanach I i II,
- E_i, A_i - moduł sprężystości i pole przekroju poprzecznego pręta "i".

Można teraz sformułować problem modelowania optymalnego:

$$3) \quad \min |u| = \min \left| \sum_i \frac{E_i A_i}{L_i} V_i' V_i'' \right|$$

przy następujących ograniczeniach:

- stała objętość materiału konstrukcji

$$4) \quad \sum_l A_i t_i = c$$

- warunki równowagi ustroju (w obu stanach obciążeń)

$$\underline{P}' + \underline{H} \underline{\Lambda} \underline{V}' = \underline{0}$$

$$5) \quad \underline{P}'' + \underline{H} \underline{\Lambda} \underline{V}'' = \underline{0}$$

- warunki nierozdzielności deformacji (w obu stanach obciążeń)

$$\underline{V}' - \underline{H}^T \underline{U}' \underline{t} = \underline{0}$$

$$6) \quad \underline{V}'' - \underline{H}^T \underline{U}'' \underline{t} = \underline{0}$$

gdzie:

$\underline{P}', \underline{P}''$ - wektory obciążeń zewnętrznych $[k, 1]$; k-liczba węzłów

\underline{H} - macierz koincydencji $[k, l]$; l-liczba prętów struktury

$\underline{V}', \underline{V}''$ - wektory $[1, 1]$ wydłużeń bezwzględnych prętów

$\underline{U}', \underline{U}''$ - wektory $[k, 3]$ przemieszczeń węzłów

$\underline{\Lambda}$ - macierz diagonalna $[1, 1]$ z następującymi elementami przekątniowymi $\Lambda_{ii} = \frac{E_i A_i}{l_i} \underline{t}_i$

\underline{t}_i - wersory kierunkowe prętów.

Związki (5), (6) używane są do opisu struktur kratowych w sformułowaniu analizy sieciowej (np. [3]).

Rozpatrzmy dwa przypadki. W pierwszym z nich stany \underline{V}' i \underline{V}'' są podobne, to znaczy, że dla każdego pręta "i" $\text{sign } \underline{V}'_i = \text{sign } \underline{V}''_i$ lub dla każdego pręta "i" $\text{sign } \underline{V}'_i = - \text{sign } \underline{V}''_i$.

Można wtedy przeprowadzić następujące rozważania.

Definiują funkcjonał zmodyfikowany:

$$\begin{aligned}
 F = & \left| \sum_i \frac{E_i A_i}{L_i} V_i' V_i'' \right| + \lambda (\sum_i A_i L_i - c) + \mathcal{L}'_j (P'_j + H_{ji} \frac{E(i) A(i)}{L(i)} \\
 & \cdot \underline{z}(i) V_i') + \mathcal{L}''_j (P''_j + H_{ji} \frac{E(i) A(i)}{L(i)} \underline{z}(i) V_i'') + \\
 7) & + \beta_i' (V_i' - U_j' H_{(ij)} \underline{z}(i)) + \beta_i'' (V_i'' - U_j'' H_{(ij)} \underline{z}(i))
 \end{aligned}$$

gdzie:

$\lambda, \mathcal{L}'_j, \mathcal{L}''_j (j=1, \dots, k), \beta_i', \beta_i'' (i=1, \dots, l)$ - skalarnie i wektorowe współczynniki Lagrange'a.

$\frac{E(i) A(i)}{L(i)} \underline{z}(i), H_{(ij)} \underline{z}(i)$ - nie sumować względem indeksu "i".

Warunki stacjonarności przyjmują postać:

$$8) F_{;A_i} = 0 = \left| \frac{E_i}{L_i} V_i' V_i'' \right| + \lambda L_i + \mathcal{L}'_j H_{ji} \frac{E_i}{L_i} \underline{z}_i V_i' + \mathcal{L}''_j H_{ji} \frac{E_i}{L_i} \underline{z}_i V_i''$$

$$9) F_{;V_i'} = 0 = \left(\frac{E_i A_i}{L_i} V_i'' \right) \eta + \mathcal{L}'_j H_{ji} \frac{E_i A_i}{L_i} \underline{z}_i + \beta_i'$$

$$F_{;V_i''} = 0 = \left(\frac{E_i A_i}{L_i} V_i' \right) \eta + \mathcal{L}''_j H_{ji} \frac{E_i A_i}{L_i} \underline{z}_i + \beta_i''$$

$$10) F_{;U_j'} = 0 = -\beta_i' H_{ij} \underline{z}(i)$$

$$F_{;U_j''} = 0 = -\beta_i'' H_{ij} \underline{z}(i)$$

wraz z równaniami (4), (5), (6).

gdzie:

$$\eta = 1 \text{ jeśli dla każdego "i" } \text{sign } V_i' = \text{sign } V_i''$$

$$\eta = -1 \text{ jeśli dla każdego "i" } \text{sign } V_i' = -\text{sign } V_i''$$

Związki powyższe opisują $5l + 2k \cdot 3 + 1$ równań z $5l + 2k \cdot 3 + 1$ niewiadomymi: $A_i, V_i', V_i'', U_j', U_j'', \lambda, \alpha_j', \alpha_j'', \beta_i', \beta_i''$.
Można sprawdzić, że podstawiając:

$$11) \left. \begin{aligned} \alpha_j' &= -U_j'' \\ \alpha_j'' &= -U_j' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{jeśli dla każdego} \\ &\text{"i" } \text{sign } V_i' = \\ &= \text{sign } V_i'' \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j' &= U_j'' \\ \alpha_j'' &= U_j' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{jeśli dla każdego "i"} \\ &\text{sign } V_i' \neq \text{sign } V_i'' \end{aligned}$$

$$\beta_i' = 0$$

$$\beta_i'' = 0$$

do warunków stacjonarności (4) ÷ (6), (8) ÷ (10) otrzymujemy:

$$12) \left| \frac{V_i' V_i''}{l_i^2} E_i \right| = \lambda$$

(wraz z warunkami (4), (5), (6)). Związki (10) są spełnione tożsamościowo, związki (9) przyjmują postać identyczną do (6) zaś warunek (8) prowadzi do żądania równomiernie rozłożonej pracy wzajemnej $\underline{\Sigma}'' \underline{\xi}'$. Zespół powyższych warunków może być spełniony w klasie układów statycznie wyznaczalnych.

Można stwierdzić, że każda izostatyczna, statycznie dopuszczalna struktura kratowa z równomiernie rozłożoną gęstością pracy wzajemnej $\underline{\Sigma}'' \underline{\xi}'$ realizuje rozwiązanie stacjonarne.

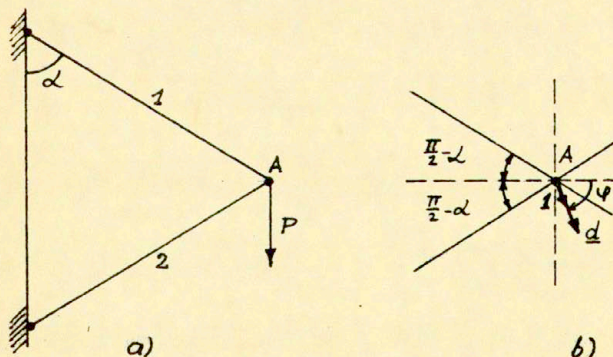
Rozwiązanie optymalne odpowiada temu spośród rozwiązań stacjonarnych, które minimalizuje parametr λ (minimalizuje zatem także wielkość $u = \sum_i A_i l_i \varepsilon_i \sigma_i'' = c\lambda$).

Pozostaje do rozważenia drugi z zapowiedzianych wcześniej przypadków, gdy stany deformacji \underline{V}' i \underline{V}'' nie są podobne, czyli gdy wyrażenie $V_i' V_i''$ nie posiada stałego znaku dla wszystkich elementów "i". Rozwiązanie optymalne prowadzi wtedy do znikania przemieszczenia $u=0$ i związane jest z rozkładem materiału opisanym warunkami (4) oraz (por. (2)):

$$13) \quad \sum_i \frac{E_i A_i}{l_i} V_i' V_i'' = 0.$$

III. Przykład wspornika kratowego

Zilustrujemy powyższe rozważania przykładem kratownicy obciążonej siłą P (rys.2). Problem sprowadza się do optymalnego rozłożenia objętości c materiału w celu zminimalizowania przemieszczenia węzła A w danym kierunku \underline{d} (opisanym kątem φ).



Rys. 2.

Pierwszy stan obciążenia (I) siłą zewnętrzną P związany jest z następującym rozkładem sił wewnętrznych:

$$14) \quad X_1' = -X_2' = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

podczas gdy drugi stan obciążenia (II) siłą jednostkową $\underline{1}$ prowadzi do rozkładu:

$$15) \quad X_1'' = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin 2\alpha}$$
$$X_2'' = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\sin 2\alpha}$$

Można sprawdzić, że dla $-\frac{\pi}{2} + \alpha < \varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha$ opisane stany I i II nie są podobne, zatem rozwiązanie optymalne jest warunkiem (por. (13)):

$$16) \quad u = \frac{L_1}{E_1 A_1} X_1' X_1'' + \frac{L_2}{E_2 A_2} X_2' X_2'' = 0$$

Podstawiając (14), (15) do (16) otrzymujemy optymalne proporcje pomiędzy polami przekrojów A_1 i A_2 :

$$17) \quad A_2 \cos(\alpha - \varphi) = A_1 \cos(\alpha + \varphi)$$

gwarantujące znikanie przemieszczenia u węzła A w kierunku φ .

Dla $\frac{\pi}{2} - \alpha < \varphi < \frac{\pi}{2} + \alpha$ stany I i II są podobne, zatem rozwiązanie optymalne opisane jest warunkiem równomiernego rozkładu pracy wzajemnej (por. (12)):

$$18) \quad \frac{1}{E_1 A_1^2} X_1' X_1'' = \frac{1}{E_2 A_2^2} X_2' X_2''$$

Podstawiając (14), (15) do (18) otrzymujemy optymalne proporcje pomiędzy polami przekrojów A_1 i A_2 :

$$19) \quad A_2^2 \cos(\alpha - \varphi) = -A_1^2 \cos(\alpha + \varphi)$$

gwarantujące, że przemieszczenie u węzła A w kierunku φ osiąga wartość minimalną:

$$20) \quad U = \frac{Pl}{2E \cos \alpha \sin 2\alpha} \left(\frac{\cos(\alpha - \varphi)}{A_1} - \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{A_2} \right).$$

Dołączając warunek stałej objętości materiału $l(A_1 + A_2) = C$, otrzymujemy następujące rozwiązania końcowe:

- dla przypadku pierwszego (por. (17)) :

$$A_1 = \frac{C}{l} \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha + \varphi)}$$

21)

$$A_2 = \frac{C}{l} \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha + \varphi)}$$

- dla przypadku drugiego (por. (19)) :

$$A_1 = \frac{C}{l} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{-\cos(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}}}$$

22)

$$A_2 = \frac{C}{l} \frac{\sqrt{\frac{-\cos(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}}}{1 + \sqrt{\frac{-\cos(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}}}$$

Przemieszczenie minimalne (20) przyjmuje dla rozwiązania (22) postać:

$$23) \quad u = \frac{Pl^2}{2Ec \cos \alpha \sin 2\alpha} [\cos(\alpha - \varphi) - \cos(\alpha + \varphi)]$$

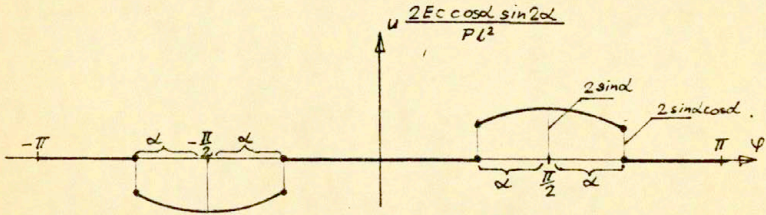
Zależność wartości przemieszczenia minimalnego u od kąta φ pokazano na rys. 3, zaś odpowiadający rozkład optymalny materiału przedstawiono na rys. 4.

Punkty charakterystyczne rozkładu materiału dla $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} + \alpha$, odpowiadają przypadkom szczególnym układów geometrycznie zmiennych o znikających elementach 1 lub 2.

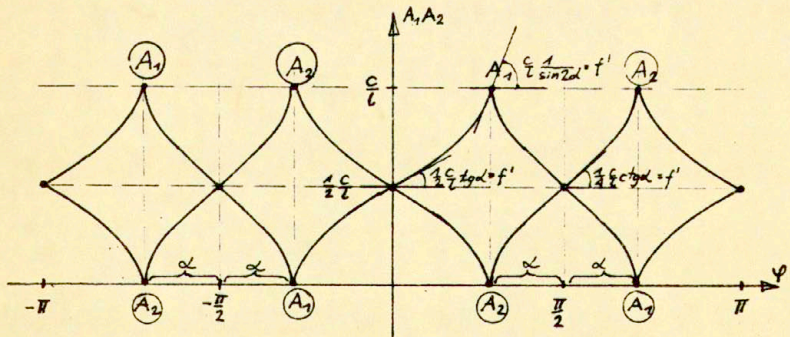
IV. Konkluzje

Aczkolwiek przykład prezentowany powyżej dotyczył prostego przypadku kratownicy izostatycznej, to można zaprezentować ogólną procedurę modelowania optymalnego w przypadku dowolnej struktury prętowej. Opierając się na rozważaniach prowadzonych w pracy [7] można zauważyć, że ujmując lokalnie materiał (redukując przekrój A_1 pręta "1" do wartości $(1-\alpha)A_i$ gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$) powodujemy lokalny wzrost deformacji w stanie I (ε') oraz naprężenia w stanie II (σ'') do wartości odpowiednio:

$$24) \quad \begin{aligned} \varepsilon'_i &= \varepsilon_i \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \beta_i - \alpha} \right) \\ \sigma''_i &= \sigma_i'' \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \beta_i - \alpha} \right) \end{aligned}$$



Rys. 3.



Rys. 4 .

gdzie:

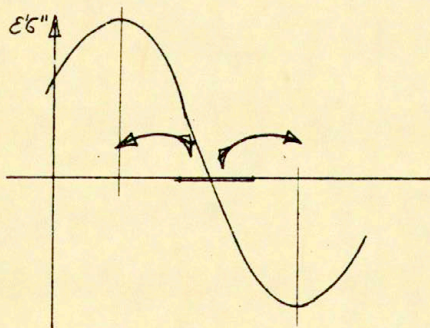
$$\xi_i = \frac{\eta_i}{\epsilon_i A_i - \eta_i} \quad - \text{charakteryzuje oddziaływanie elementu "i" z jego otoczeniem (zdefiniowane w pracy [7])}$$

$$\eta_i \quad - \text{siła w elemencie "i" wywołana jednostkową dystorsją } \tilde{\epsilon}_i = 1 \text{ tego pręta.}$$

Ze związków (24) wynika, że wartość bezwzględna lokalnej gęstości pracy wzajemnej $|\mathcal{E}'\mathcal{G}''|$ naprężeń stanu II na deformacjach stanu I wzrośnie na skutek osłabienia przekroju o αA_i do wartości:

$$25) \quad |\widetilde{\mathcal{E}'\mathcal{G}''}| = |\mathcal{E}'\mathcal{G}''| \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \xi_i - \alpha} \right)^2.$$

Wzmocnienie przekroju pręta wywołuje skutek przeciwny. Można dalej pokazać, że kontynuując proces transportu materiału z miejsc niedociążonych (o małej gęstości pracy wzajemnej $|\mathcal{E}'\mathcal{G}''|$) do miejsc przeciążonych (o dużej gęstości pracy wzajemnej $|\mathcal{E}'\mathcal{G}''|$) - por. rys. 5 - dochodzimy w wyniku (na skutek znikania niektórych prętów) do struktury izostatycznej o równomiernie rozłożonej gęstości bezwzględnej pracy wzajemnej $|\mathcal{E}'\mathcal{G}''|$.

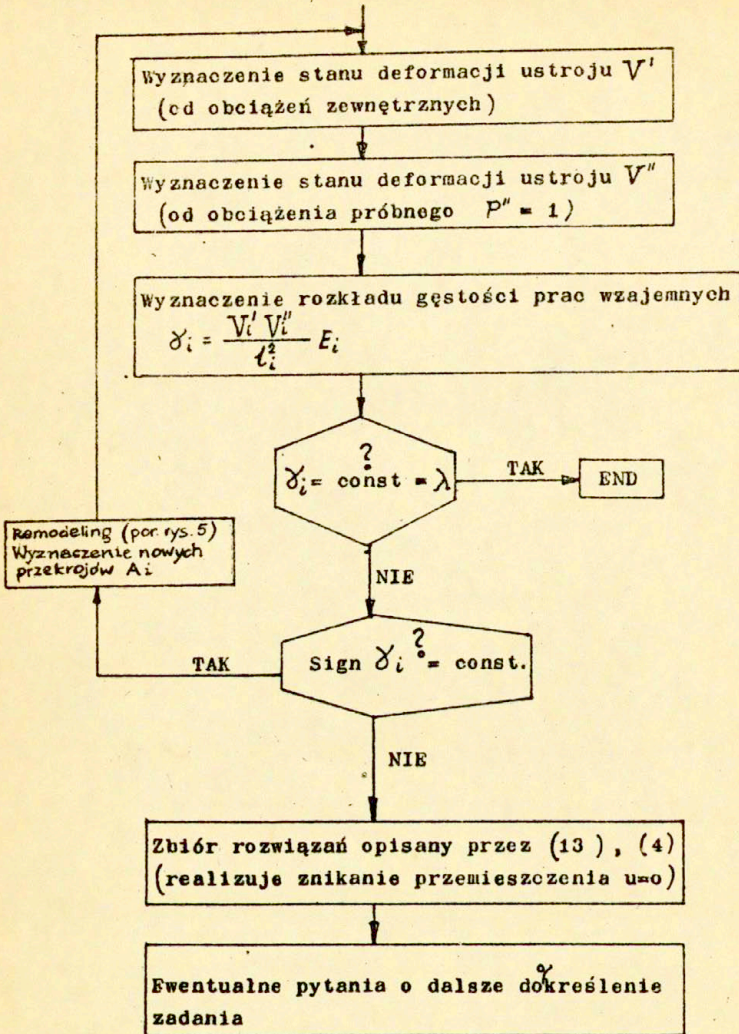


Rys. 5 .

W przypadku gdy stany I i II są podobne (gęstość pracy $\varepsilon' \sigma''$ jest wszędzie tego samego znaku) uzyskana struktura jest rozwiązaniem optymalnym. W przypadku natomiast, gdy stany I i II nie są podobne (gęstość pracy $\varepsilon' \sigma''$ przyjmuje różne znaki dla różnych elementów) można tak skorygować rozmieszczenie materiału, aby globalna wartość pracy dodatnio określonej $\int_{V^+} \varepsilon' \sigma'' dV$ (sumowanie po elementach dla których $\varepsilon' \sigma'' > 0$) oraz pracy ujemnie określonej $\int_{V^-} \varepsilon' \sigma'' dV$ (sumowanie po elementach dla których $\varepsilon' \sigma'' < 0$) równoważyły się. Wtedy uzyskane zostanie minimum absolutne odpowiadające zerowaniu przemieszczeń (3) $u=0$.

W przypadku, gdy obciążenie zewnętrzne zredukowane jest do siły P działającej w punkcie D w kierunku \underline{d} (por. rys. 1) wtedy rozpatrywany tu problem sprowadza się do przypadku modelowania optymalnego ze względu na minimalizację wyłączenia globalnego ustroju (por. [6], [7]).

Podsumowując rozważania można zaproponować zmodyfikowaną metodę przeprojektowywania dostosowaną do komputerowego rozwiązywania zagadnienia minimalizacji wartości lokalnej ugięcia pod siłą. Jej schemat blokowy przyjmuje następującą postać:



Literatura

1. H.L.Cox The Design of Structures of Least Weight, Pergamon Press, Oxford 1965
2. F.Levi Sulla valutazione degli effetti dell'elasticità ritardata nei solidi iperstatici, Giorn.Gen.Civ. 7/8 1949
3. N.C.Lind Analysis of Structures by System Theory, Journ. Struct.Div. ASCE vol.88 No ST2 April 1962
4. J.C.Maxwell On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames, The Sci.Pap. of J.C.Maxwell, Cambridge Univ. Press 1890
5. A.G.Michell The Limits of Economy of Material in Frame Structures, Phil.Mag.Series vol.8 No 47 London 1904
6. N.E.Crhoff, J.E.Taylor On Optimal Structural Remodeling J.Opt.Th.Applic. vol.27 No4 April 1979
7. J.Holnicki-Szulc Struktury najszywniejsze, najlżejsze i najmocniejsze, Prace IPPT-PAN 35/1983
8. K.Dems, Z.Mróz Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis, Int.J.Solid.Struct. vol. 19 No 8, 1983
9. E.J.Haug Optymalizacja kształtu sprężystych elementów konstrukcyjnych, w: Optymalizacja wytrzymałościowa konstrukcji, Cossolineum 1983