

7.71 -- teoria drgań, rezonans

23/1984

Józef Bajkowski, W. Szeplińska-Stupnicka

REZONANSE WEWNĘTRZNE
W NIELINIOWYCH UKŁADACH DRGAJĄCYCH

Część II

23/1984

P. 269



WARSZAWA 1984

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 kwietnia 1984 r.

Opracowanie wykonano w ramach programu prac
problemu węzłowego 05.12 - "Analiza i optymalna
synteza nieliniowych układów drgających"



56971



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark. wyd. 1. Ark. druk. 1,5.

Oddano do drukarni w maju 1984 r.

Nr zamówienia 389/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Józef Bajkowski
Wanda Szemplińska-Stupnicka
Zakład Układów Mechanicznych

REZONANSE WEWNĘTRZNE
W NIELINIOWYCH UKŁADACH DRGAJĄCYCH
CZĘŚĆ II

1. Wstęp.

Terminem "rezonans wewnętrzny" przyjęto określać te szczególne zjawiska, które pojawiają się w nieliniowych układach drgających o n stopniach swobody wtedy, gdy istnieją liczby całkowite k_s , $s = 1, 2, \dots, p$, nie wszystkie równe zero takie, że między częstotliwościami własnymi układu $\omega_1, \dots, \omega_p$ zachodzi związek typu:

$$/1.1/ \quad \sum_{s=1}^p k_s \omega_s = 0, \quad p \leq n,$$

tzn. gdy częstotliwości te są współmierne. W teorii pierwszego przybliżenia są to częstotliwości własne układu liniowego.

W poprzedniej pracy [1] analizowano odpowiedź nieliniowego układu drgającego o dwóch stopniach swobody, w przypadku istnienia rezonansu wewnętrznego $\omega_2 = 3\omega_1$, gdy częstota wymuszenia jest w pobliżu wyższego rezonansu głównego. Analizę przeprowadzono wykorzystując jedną z ogólnie znanych metod badania nieliniowych układów drgających tj. metodę uśredniania. Stwierdzono możliwość wystąpienia dwóch typów rozwiązań, a/ jednoczęstotliwościowego harmonicznego o częstotliwości wymuszenia) i amplitudzie a_2 ,

$$\begin{aligned} q_1 &= a_2 \cos \sqrt{t} + \psi /, \\ /1.2/ \\ q_2 &= a_2 b_{22} \cos \sqrt{t} + \psi /, \end{aligned}$$

a więc takiego jak bez rezonansu wewnętrznego,
b/ dwuczęstościowego o częstościach $\sqrt{3}$ i $\sqrt{}$, będącego efektem rezonansu wewnętrznego,

$$\begin{aligned} /1.3/ \\ q_1 &= a_1 \cos \left[\frac{1}{3} \sqrt{t} + \psi_1 \right] + a_2 \cos \left[\sqrt{t} + \psi_2 \right], \\ q_2 &= a_1 b_{21} \cos \left[\frac{1}{3} \sqrt{t} + \psi_1 \right] + a_2 b_{22} \cos \left[\sqrt{t} + \psi_2 \right]. \end{aligned}$$

Rozwiązanie /1.3/ jakościowo i ilościowo odmienne od /1.2/ występuje w szerokim zakresie częstości i osiąga bardzo duże amplitudy, nawet dziewięciokrotnie większe od tych bez rezonansu wewnętrznego, a dominującą w rozwiązaniu jest składowa o częstości równej niższej częstości własnej.

Jak już wspomniano, w pracy [1] wykorzystano metodę uśredniania. Metoda ta chociaż pozwala na badanie stanów ustalonych jak i nieustalonych może dawać jednak poważne rozbieżności z wynikami eksperymentalnymi bądź uzyskanymi na maszynie analogowej, a jednym z głównych powodów tych rozbieżności jest przyjęcie postaci drgań układu nieliniowego takich jak dla układu liniowego.

Dlatego też celowym wydaje się zweryfikować wyniki uzyskane przy pomocy tej metody poprzez analizę układu na maszynie analogowej, a w dalszej kolejności w przypadku stwierdzenia rozbieżności w uzyskanych wynikach, jeszcze raz przeprowadzić analizę teoretyczną wykorzystując metodę Ritza lub Ritz-uśredniania.

2. Badania analogowe.

Badany układ jest opisany we współrzędnych uogólnionych q_1 i q_2 następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} /2.1/ \quad & \ddot{q}_1 + \gamma^2 q_1 + \gamma / q_1 - q_2 / + \mu \dot{q}_1 / \dot{q}_1 - \dot{q}_2 / + \mu \dot{q}_1 / q_1 - q_2 / ^3 = P \cos \omega t, \\ & \ddot{q}_2 - / q_1 - q_2 / - \mu \dot{q}_1 / \dot{q}_1 - \dot{q}_2 / - \mu / q_1 - q_2 / ^3 = 0. \end{aligned}$$

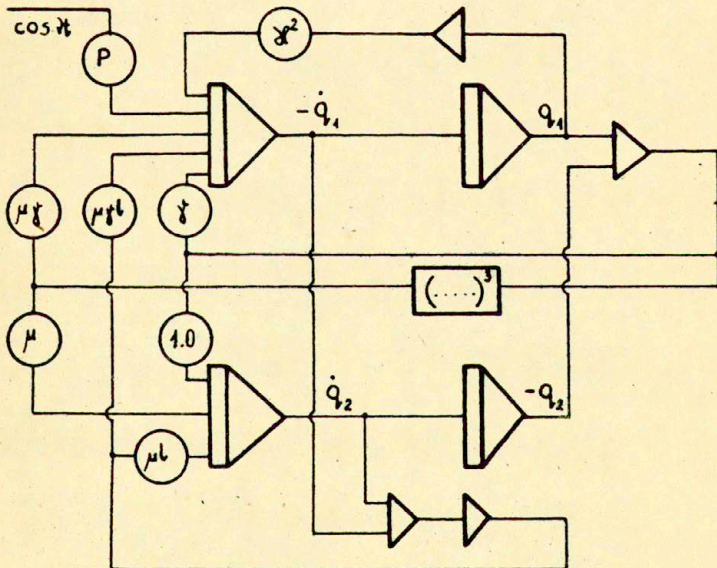
Do badań przyjęto następujące dane liczbowe:

$$/2.2/ \quad \gamma^2 = 1.5, \quad \gamma = 1.582, \quad \mu = 0.01, \quad l = 2.0, \quad P = 2.0.$$

Dla tak przyjętych γ^2 i γ , na częstości i postaci własne układu liniowego mamy następujące wartości:

$$\begin{aligned} /2.3/ \quad & \omega_{01} = 0.639, \quad b_{021} = 1.6898, \\ & \omega_{02} = 1.917, \quad b_{022} = -0.3739. \end{aligned}$$

Schemat analogowy układu równań /2.1/ pokazano na rys.2.1. Badania analogowe skoncentrowano na przypadku, kiedy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej.

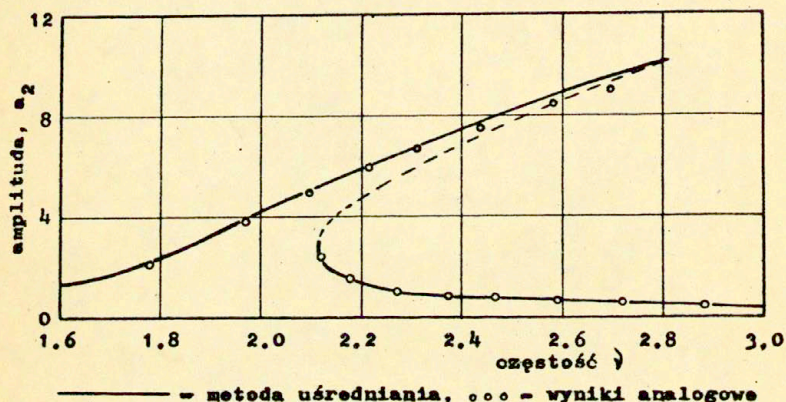


Rys. 2.1. Schemat analogowy układu równań /2.1/.

2.1. Drugi rezonans główny - rozwiązanie jednoczęstościowe

$$a_1 = 0 \text{ i } a_2 \neq 0.$$

W pierwszej kolejności znajdziemy krzywą rezonansową $a_2 = a_2/\sqrt{\nu}$ dla drugiego rezonansu głównego, w przypadku $a_1 = 0$, a więc bez rezonansu wewnętrznego. Na rys. 2.2 pokazano krzywą rezonansową znaną na maszynie analogowej. Na rysunku tym pokazano także wyniki metody uśredniania dla rozwiązania jednoczęstościowego.



Rys. 2.2. Krzywa rezonansowa $a_2 = a_2/\sqrt{\nu}$ dla drugiego rezonansu głównego w przypadku kiedy $a_1 = 0$.

Jak widać wyniki teoretyczne bliskie są analogowym i potwierdzają w tym przypadku słuszność zastosowania metody uśredniania.

2.2. Rozwiązanie dwuczęstościowe - $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$, w obszarze występowania drugiego rezonansu głównego.

Z analizy teoretycznej przeprowadzonej w pracy [1] wynika, że w przypadku gdy częstość wymuszenia ν jest w pobliżu wyższej częstości własnej, oprócz drgań harmonicznyc

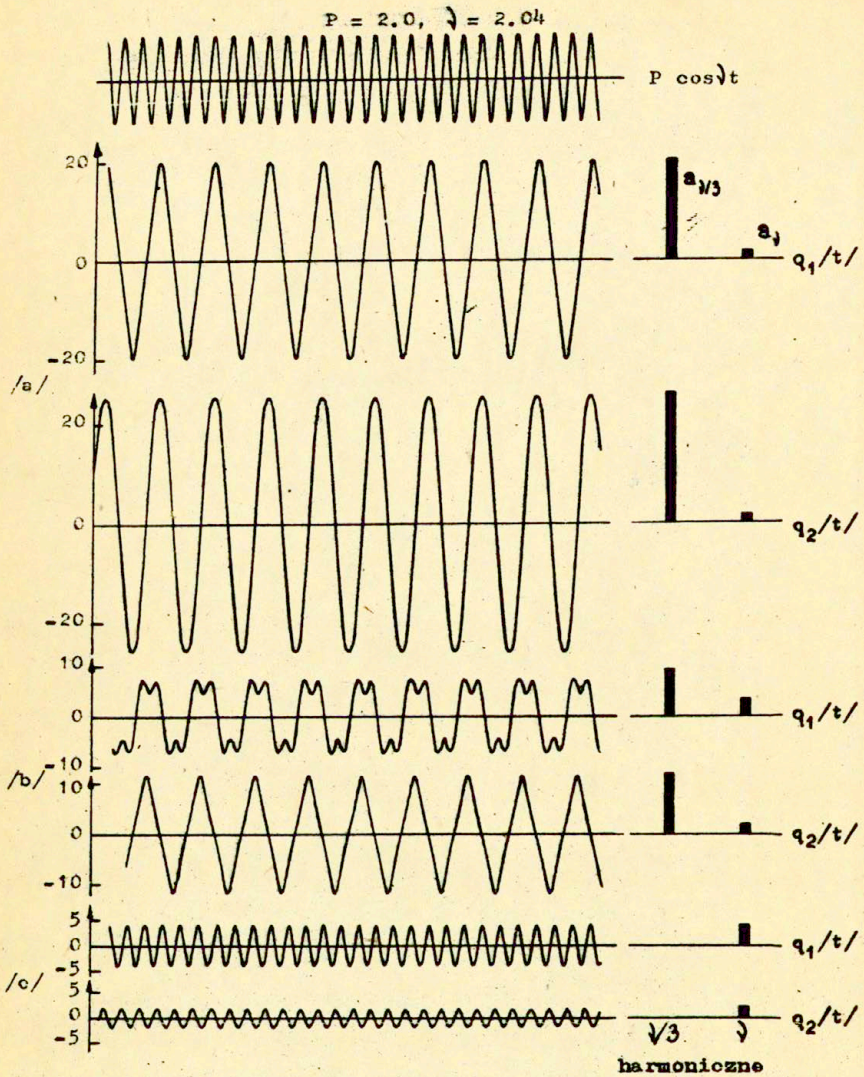
o częstości wymuszenia ν , możliwe są dwa typy drgań okresowych dwuczęstościowych.

Badania analogowe potwierdziły istnienie dwóch typów drgań okresowych dwuczęstościowych - ilustruje to rys.2.3, na którym pokazano przebiegi czasowe $q_1/t/$ i $q_2/t/$ oraz analizę harmoniczną przy częstości wymuszenia $\nu = 2.04$.

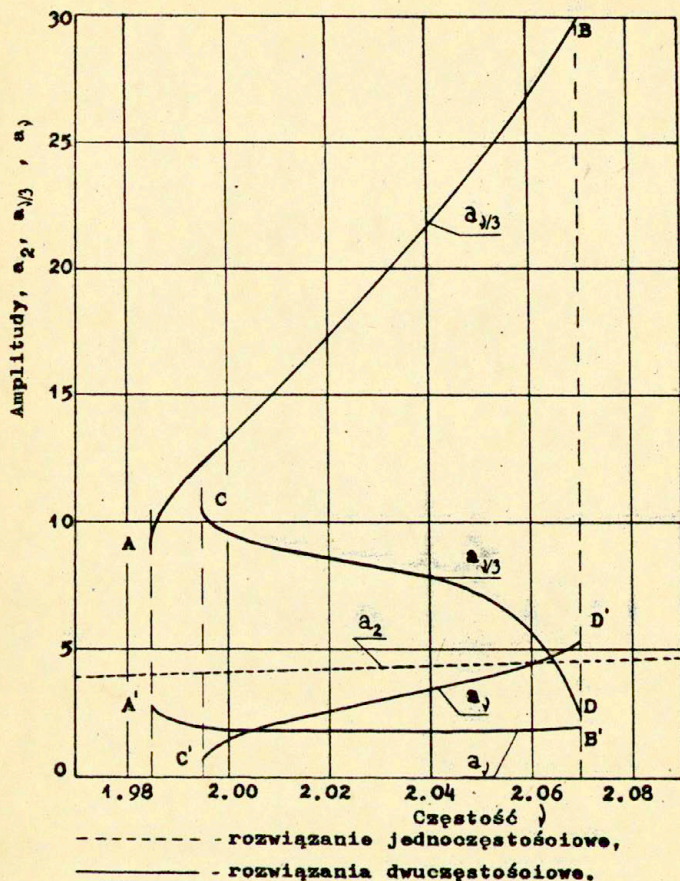
Pierwszy typ odpowiedzi przedstawiony na rys.2.3a charakteryzuje się bardzo dużymi amplitudami, a dominującą w odpowiedzi jest pierwsza postać z amplitudą $a_{\nu/3}$. Wpływ drugiej postaci na odpowiedź jest nieznaczny i układ drga tak jakby był w okolicach pierwszego rezonansu głównego. Drugi typ odpowiedzi przedstawiony na rys.2.3b, charakteryzuje się mniejszymi amplitudami, występują te same składowe harmoniczne co i poprzednio a_{ν} - składowa o częstości wymuszenia, $a_{\nu/3}$ - składowa o częstości $\nu/3$, z tym, że udział składowej o częstości wymuszenia jest w tym przypadku znaczniejszy. Na rys.2.3c pokazano przebiegi czasowe dla rozwiązania rezonansowego jednoczęstościowego. Jak widzimy amplitudy drgań są znacznie niższe niż w przypadku drgań dwuczęstościowych.

Na rys.2.4 pokazano krzywe rezonansowe $a_{\nu/3} = a_{\nu/3}/\nu/$ i $a_{\nu} = a_{\nu}/\nu/$ dla rozwiązań dwuczęstościowych, tj. w przypadku występowania rezonansu wewnętrznego. Pierwsze z rozwiązań, reprezentowane przez gałąź A - B dla składowej o częstości $\nu/3$ i przez gałąź A' - B' dla składowej o częstości ν , występuje w zakresie częstości $\nu \in (1.985, 2.070)$. Dominującą w tym rozwiązaniu jest pierwsza postać i ze wzrostem częstości wymuszenia ν amplituda jej gwałtownie rośnie osiągając wartość maksymalną przy częstości $\nu = 2.07$, a po jej przekroczeniu amplituda gwałtownie spada. Amplituda drugiej składowej nie ulega większym zmianom i w całym zakresie częstości występowania tego rozwiązania jest bliska wartości 2.0.

Drugie z rozwiązań dwuczęstościowych, gałąź C - D dla składowej o częstości $\nu/3$ i C' - D' dla składowej o częstości ν , występuje w zakresie częstości $\nu \in (1.995, 2.070)$. Rozwiązanie to osiąga także duże amplitudy, zachowuje się jednak odmiennie od poprzedniego. Ze wzrostem częstości ν amplituda $a_{\nu/3}$ maleje, by przy $\nu = 2.070$ osiągnąć ~ 2.5 .



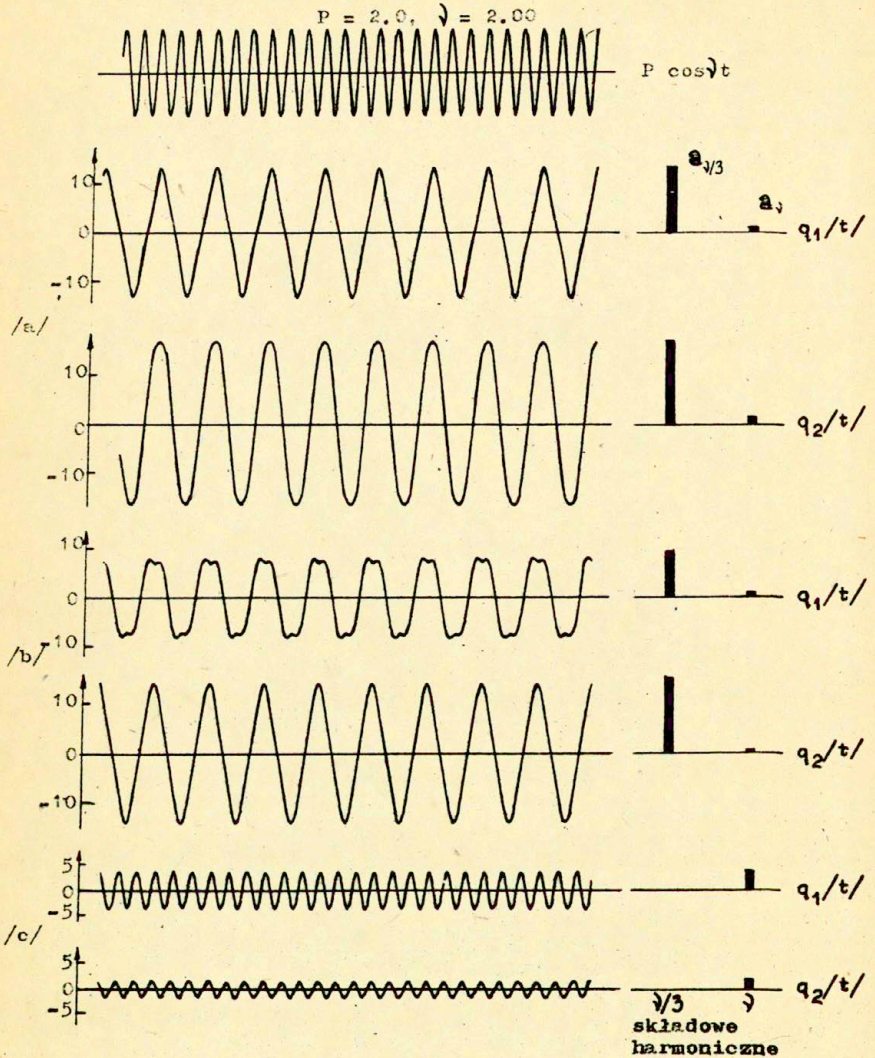
Rys.2.3. Przebiegi czasowe $q_1/t/$ i $q_2/t/$ oraz analiza harmoniczna odpowiedzi dla częstotności wymuszenia $\gamma = 2.040$,
 /a/ - rozwiązanie dwuczęstościowe z amplitudą wyższą,
 /b/ - rozwiązanie dwuczęstościowe z amplitudą niższą,
 /c/ - rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe.



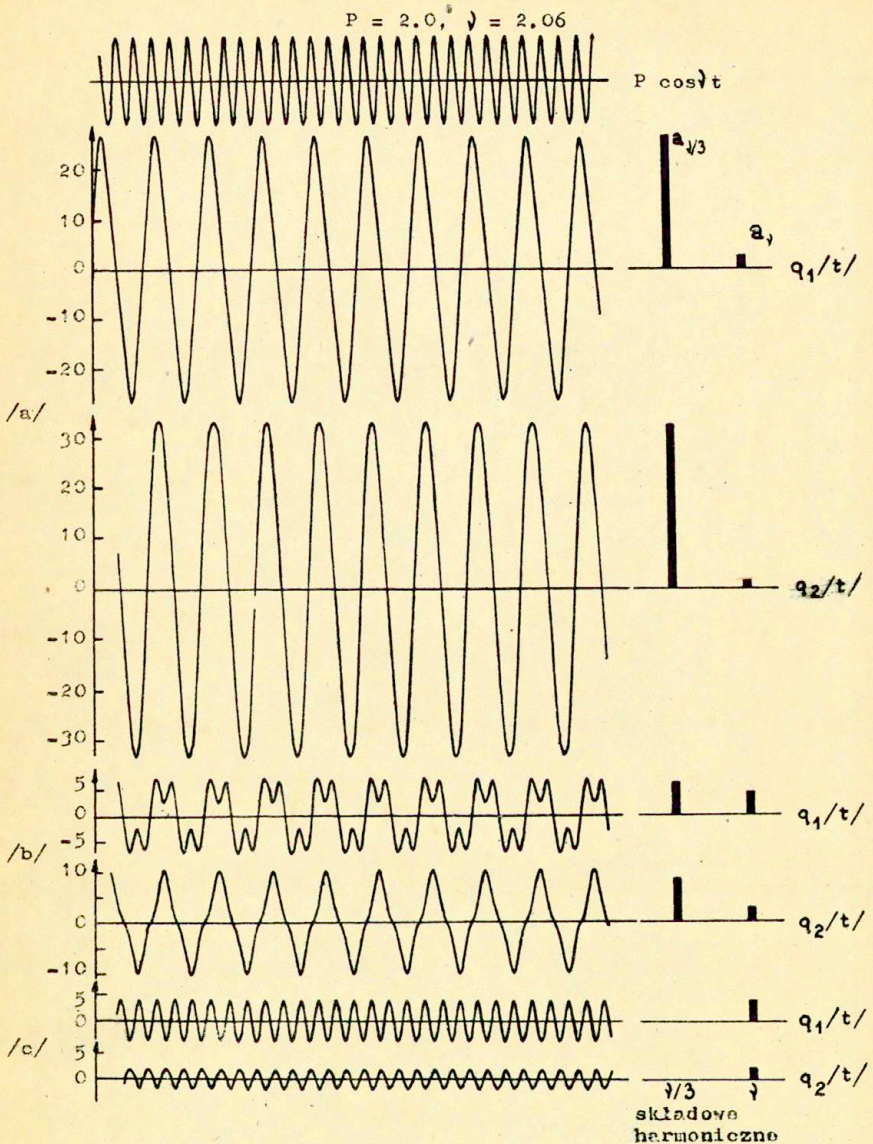
Rys. 2.4. Krzywe rezonansowe $a_{1/3} = a_{1/3}(\nu)$ i $a_1 = a_1(\nu)$ dla rozwiązań dwuczęstościowych oraz $a_2 = a_2(\nu)$ dla rozwiązania jednoczęstościowego.

Amplituda a_1 rośnie i na końcu przedziału staje się bliska amplitudy rozwiązania rezonansowego jednoczęstościowego.

Na rys. 2.5 i 2.6 pokazano przebiegi czasowe wraz z analizą harmoniczną odpowiedzi dla częstotliwości $\nu = 2.00$ i $\nu = 2.060$, a więc dla częstotliwości bliskich skrajnym dla tego typu rozwiązania.



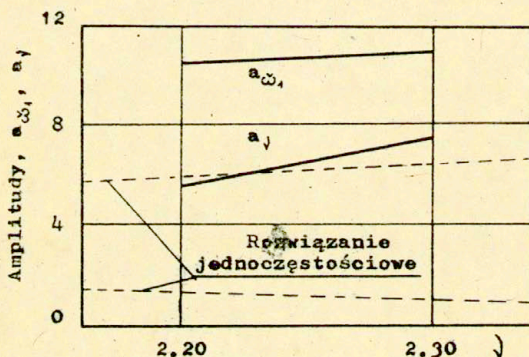
Rys.2.5. Przebiegi czasowe q_1/τ i q_2/τ oraz analiza harmoniczna odpowiedzi dla częstości wymuszenia $\gamma = 2.0$,
 /a/ - rozwiązanie dwuczęstościowe - gałąź A-B,
 /b/ - rozwiązanie dwuczęstościowe - gałąź C-D,
 /c/ - rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe.



Rys.2.6. Przebiegi czasowe $q_1/t/$ i $q_2/t/$ oraz analiza harmoniczna odpowiedzi dla częstotliwości wymuszenia $\gamma = 2.06$,
 /a/ - rozwiązanie dwuczęstościowe - gałąź A-B,
 /b/ - rozwiązanie dwuczęstościowe - gałąź C-D,
 /c/ - rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe.

2.3. Drgania prawie-okresowe.

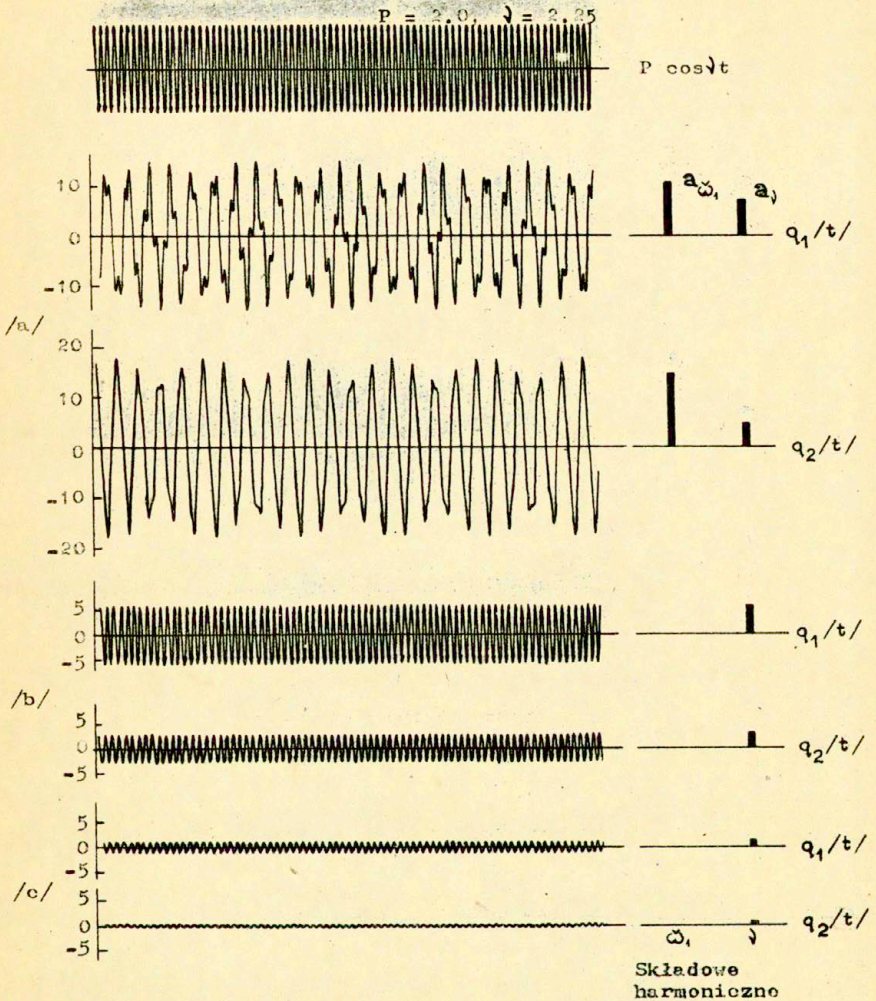
W trakcie badań analogowych okazało się, że dla częstości $\nu \in \langle 2.20, 2.30 \rangle$, oprócz drgań harmonicznycch odpowiadających drugiemu rezonansowi głównemu, mogą pojawić się drgania prawie-okresowe o znacznych amplitudach. Z przeprowadzonej analizy harmonicznycch wynika, że w odpowiedzi dominują dwie składowe harmonicznycch: jedna, podobnie jak poprzednio - o częstości ν i druga o częstości nieco niższej niż $\nu/3$, którą oznaczymy symbolem $\tilde{\omega}_1$. Częstości te nie są współmierne, stąd odpowiedź układu jest prawie-okresowa. Na rys.2.7 pokazano wykresy - amplitudy o częstości ν - $a_\nu \approx a_\nu/\nu$ i amplitudy o częstości $\tilde{\omega}_1$, $a_{\tilde{\omega}_1} \approx a_{\tilde{\omega}_1}/\nu$.



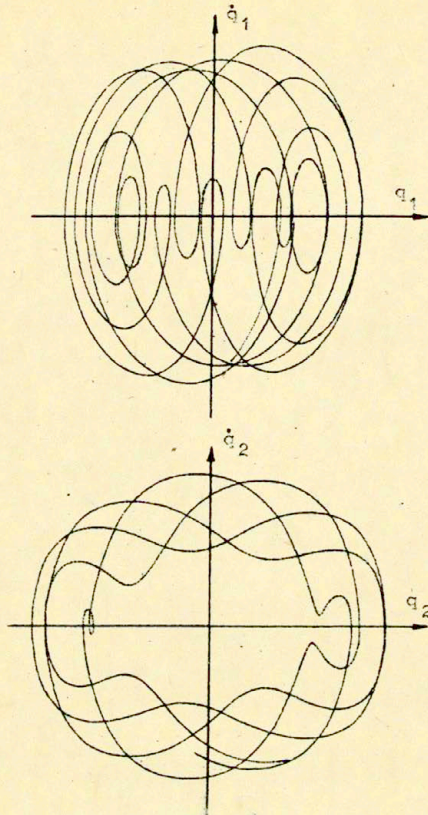
Rys.2.7. Zmiany amplitud składowycch o częstościach ν i $\tilde{\omega}_1$ dla rozwiązania prawie-okresowego.

Dla ustalonej częstości wymuszenia $\nu = 2.25$ zarejestrowano przebiegi czasowe, które pokazano na rys.2.8. Na rys.2.9 pokazano trajektorie w stanie ustalonym na płaszczyznach fazowych $[q_1, \dot{q}_1]$ i $[q_2, \dot{q}_2]$.

Wzmianki o drganiach prawie-okresowych w układach z rezonansem wewnętrznym wykrytych na drodze symulacji analogowej i cyfrowej znaleźć można w pracach [2,7], lecz nie podjęto jeszcze prób teoretycznego wyjaśnienia tego zjawiska i zagadnienie to wymaga dalszych badań.



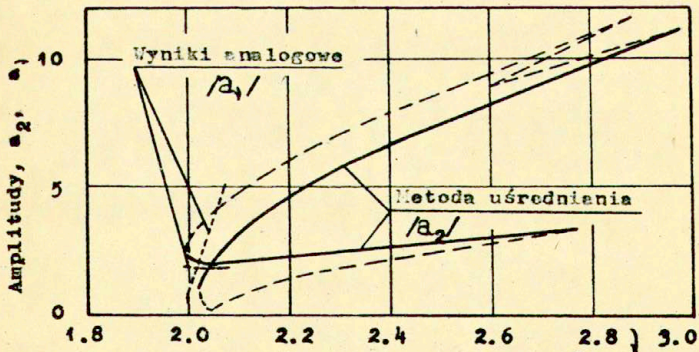
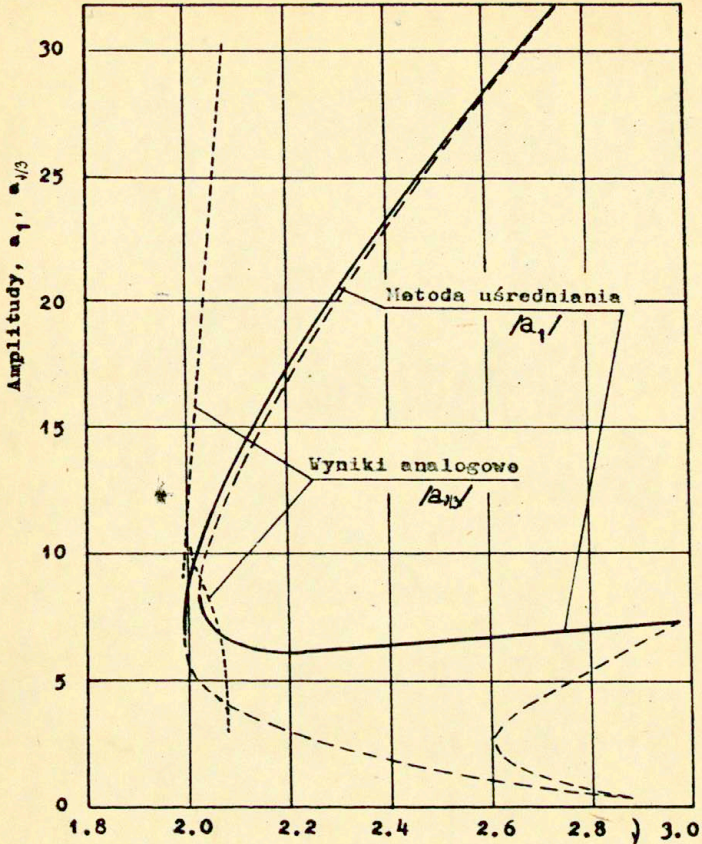
Rys. 2.8. Przebiegi czasowe q_1/t i q_2/t oraz analiza harmoniczna odpowiedzi dla częstotliwości wymuszenia $\gamma = 2.25$,
/a/ - rozwiązanie prawie-okresowe,
/b/ - rozwiązanie rezonansowe jednoczęstotściowe,
/c/ - rozwiązanie nierezonansowe jednoczęstotściowe.



Rys. 2.9. Trajektorie w stanie ustalonym dla rozwiązania prawie-okresowego przy częstotliwości $\nu = 2.25$.

2.4. Porównanie wyników uzyskanych metodą uśredniania z metodą analogową oraz wnioski.

Na rys. 2.10 pokazano wyniki analogowe oraz uzyskane przy wykorzystaniu metody uśredniania dla rozwiązań dwuczęstościowych. Jak łatwo zauważyć wyniki obu metod nie zgadzają się ani nie są sobie bliskie. Dotyczy to zwłaszcza zakresów częstotliwości w których występują drgania dwuczęstościowe: dla metody uśred-



Rys.2.10. Krzywe rezonansowe dla rozwiązań dwuczęstościowych uzyskane metodami: uśredniania i analogową

niania $\nu \in \langle 1.99, 2.98 \rangle$, podczas gdy z badań analogowych mamy $\nu \in \langle 1.985, 2.070 \rangle$. Jeśli przyjmiemy, że bliskie rzeczywistym są wyniki analogowe / a tak możemy sądzić, gdyż w symulacji analogowej nie robimy żadnych założeń upraszczających ani nie mamy żadnych ograniczeń jeśli chodzi o parametry układu/, to musimy stwierdzić, że wyniki uzyskane metodą uśredniania są nie do przyjęcia.

Zastanówmy się w czym należy upatrywać błędnych wyników jakie dała metoda uśredniania.

Jak już wspomniano w pracy [1], wykorzystując metodę uśredniania rozwiązanie układu równań /2.1/ przyjmujemy w postaci:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \cos\left[\frac{1}{3}\nu t + \psi_1\right] + a_2 \cos[\nu t + \psi_2], \\ q_2 &= a_1^{b_{021}} \cos\left[\frac{1}{3}\nu t + \psi_1\right] + a_2^{b_{022}} \cos[\nu t + \psi_2], \end{aligned} \quad /2.4/$$

gdzie b_{021} i b_{022} są współczynnikami postaci własnych układu liniowego tj. układu /2.1/ przy $\mu = 0$.

Już we wcześniejszych pracach na temat drgań układów o wielu stopniach swobody wykazano, że założenie to może prowadzić do poważnych błędów [3,4,5].

Przeprowadzimy więc ponownie obliczenia analityczne przy wykorzystaniu metody, która nie wprowadza żadnych założeń upraszczających odnośnie postaci drgań układu - metody Ritza.

3. Metoda Ritza do badania drgań dwuczęstościowych.

Przepiszemy jeszcze raz równania /2.1/ w nieco przekształconej formie:

$$\begin{aligned} \xi_1/t/ &\equiv \ddot{q}_2 - \nu/q_1 - q_2/ - \mu 1/\dot{q}_1 - \dot{q}_2/ - \mu/q_1 - q_2/{}^3 = 0, \\ \xi_2/t/ &\equiv \ddot{q}_1 + \delta \ddot{q}_2 + \delta^2 q_1 - P \cos \nu t = 0. \end{aligned} \quad /3.1/$$

i poszukujemy rozwiązania w postaci:

$$\begin{aligned}
 /3.2/ \quad q_1 &= a_1 \cos \left[\frac{1}{3} \omega t + \psi_{11} \right] + a_2 \cos \left[\omega t + \psi_{12} \right], \\
 q_2 &= a_1 b_{21} \cos \left[\frac{1}{3} \omega t + \psi_{21} \right] + a_2 b_{22} \cos \left[\omega t + \psi_{22} \right],
 \end{aligned}$$

gdzie oprócz $a_1, a_2, \psi_{ij}, i, j=1, 2$, również współczynniki b_{21} i b_{22} są nieznanymi, które chcemy wyznaczyć.

Dla uproszczenia zapisu rozwiązanie /3.2/ przepiszemy w formie:

$$\begin{aligned}
 /3.3/ \quad q_1 &= a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2, \\
 q_2 &= a_1 b_{21} \cos [\theta_1 + \delta_1] + a_2 b_{22} \cos [\theta_2 + \delta_2],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 /3.4/ \quad \theta_1 &= \frac{1}{3} \omega t + \psi_{11}, \\
 \theta_2 &= \omega t + \psi_{12}, \\
 \delta_1 &= \psi_{21} - \psi_{11}, \\
 \delta_2 &= \psi_{22} - \psi_{12}.
 \end{aligned}$$

Nieznane - $a_1, a_2, b_{21}, b_{22}, \psi_{11}, \psi_{12}, \delta_1$ i δ_2 wyznaczmy z zależności:

$$\begin{aligned}
 /3.5/ \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\xi}_i / t / \cos \theta_j \, dt &= 0, \\
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\xi}_i / t / \sin \theta_j \, dt &= 0, \quad i, j = 1, 2,
 \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\xi}_i / t /$, $i = 1, 2$, są "pozostałościami" równań /3.1/ po podstawieniu przybliżonego rozwiązania /3.3/.

Wykorzystując /3.2/ i /3.5/ otrzymamy :

$$\left[\delta^2 - \frac{1}{9} \nu^2 (1 + b_{21}) \right] a_1 = 0,$$

$$\left[\delta^2 - \nu^2 (1 + \gamma b_{22} \cos \delta_2) \right] a_2 - P \cos \psi_{12} = 0,$$

$$\frac{1}{9} \nu^2 a_1 b_{21} \sin \delta_1 = 0,$$

$$\gamma \nu^2 a_2 b_{22} \sin \delta_2 - P \sin \psi_{12} = 0,$$

$$\left\{ 1 + b_{21} \left(\frac{1}{9} \nu^2 - 1 \right) + \frac{3}{4} \mu (1 - b_{21}) \left[2a_2^2 (1 + b_{22}^2 - 2b_{22} \cos \delta_2) + a_1^2 (1 - b_{21})^2 - a_1 a_2 (1 - b_{21}) (b_{22} \cos(\psi - \delta_2) - \cos \psi) \right] \right\} a_1 = 0,$$

/3.6/

$$\left[1 + b_{22} \cos \delta_2 (\nu^2 - 1) + \nu b_{22} \sin \delta_2 \right] a_2 + \frac{3}{4} \mu \left\{ 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 - \left[a_2^2 (3 + b_{22}^2) + 2a_1^2 (1 - b_{21})^2 \right] a_2 b_{22} \cos \delta_2 + 3a_1^3 (1 - b_{21})^3 \cos \psi + a_2^3 b_{22}^2 \cos 2\delta_2 \right\} = 0,$$

$$\left\{ -\frac{1}{3} \mu \nu (1 - b_{21}) + \frac{3}{4} \mu a_1 a_2 (1 - b_{21})^2 \left[\sin \psi - b_{22} \sin(\psi - \delta_2) \right] \right\} a_1 = 0,$$

$$a_2 b_{22} \sin \delta_2 (1 - \nu^2) - \mu \nu a_2 (1 - b_{22} \cos \delta_2) + \frac{3}{4} \mu \left\{ a_2^3 b_{22} (1 + b_{22}^2) + 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 b_{22} \right\} \sin \delta_2 - \frac{1}{3} a_1^3 (1 - b_{21})^3 \sin \psi - a_2^3 b_{22}^2 \sin 2\delta_2 \left. \right\} = 0.$$

Z analizy równań /3.6/ wynika, że $\sin \delta_1 = 0$, gdyż równanie:

$$/3.7/ \quad \frac{1}{9} \nu^2 a_1 b_{21} \sin \delta_1 = 0,$$

jest spełnione tylko wtedy gdy $\sin \delta_1 = 0$, ponieważ dla rozwiązań dwuczęstościowych zarówno a_1 jak i b_{21} są różne od zera. Ostatecznie więc układ równań /3.6/ redukuje się do siedmiu równań z niewiadomymi $a_1, a_2, b_{21}, b_{22}, \psi, \psi_{12}$ i δ_2 , gdzie $\psi = 3\psi_{11} - \psi_{12}$. Równania /3.6/ wyprowadzono przy uwzględnieniu, że $\sin \delta_1 = 0$. Aby wyznaczyć parametry stanu ustalonego dla rozwiązań dwuczęstościowych należy rozwiązać układ równań /3.6/.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku, kiedy tłumienie jest równe zero. Uprości to nam znacznie obliczenia, a nie powinno mieć istotnego wpływu na otrzymane wyniki za wyjątkiem obszaru częstości, gdzie rozwiązanie osiąga maksymalne amplitudy.

Równania /3.6/ dla tłumienia równego zero redukują się do układu czterech algebraicznych równań nieliniowych z niewiadomymi : a_1, a_2, b_{21} i b_{22} ,

$$\left[\omega^2 - \frac{1}{9} \nu^2 (1 + \gamma b_{21}) \right] a_1 = 0,$$

$$\left[\omega^2 - \nu^2 (1 + \gamma b_{22}) \right] a_2 - P = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{9} \nu^2 b_{21} + 1 - b_{21} + \frac{3}{4} \mu (1 - b_{21}) \left[a_1^2 (1 - b_{21})^2 + 2a_2^2 (1 - b_{22})^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_1 a_2 (1 - b_{21}) (1 - b_{22}) \right] \right\} a_1 = 0, \end{aligned} \right\} /3.8/$$

$$\left[\nu^2 b_{22} + 1 - b_{22} \right] a_2 + \frac{3}{4} \mu \left[a_2^3 (1 - b_{22})^3 + \frac{1}{3} a_1^3 (1 - b_{21})^3 + \right. \\ \left. + 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 (1 - b_{22}) \right] = 0.$$

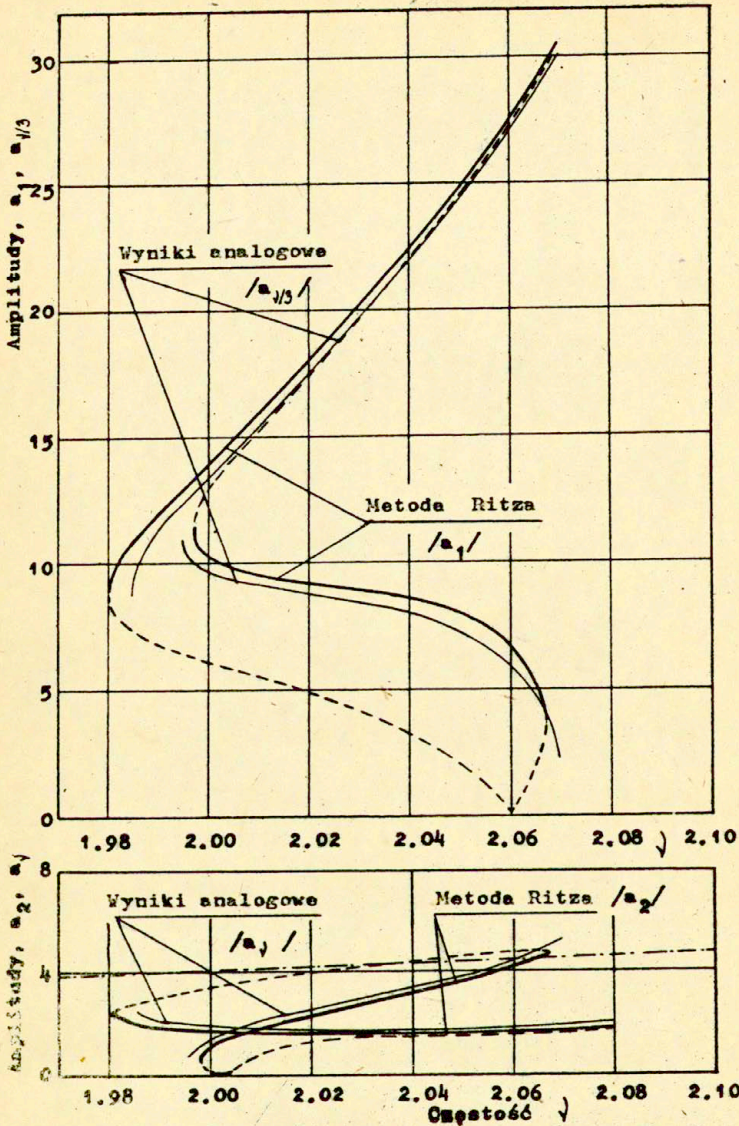
Widzimy, że możliwe są dwa typy rozwiązań:

/a/ jednoczęstościowe $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$ - równania /3.8/ redukują się wtedy do:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\omega^2 - \nu^2 (1 + \gamma b_{22}) \right] a_2 - P = 0, \\ & \nu^2 b_{22} + 1 - b_{22} + \frac{3}{4} \mu a_2^2 (1 - b_{22})^3 = 0. \end{aligned} \right\} /3.9/$$

/b/ dwuczęstościowe $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$.

Interesuje nas tylko rozwiązanie dwuczęstościowe. Rozwiążemy w tym celu równania /3.8/. Na rys.3.1 pokazano $a_1 = a_1(\omega)$ i $a_2 = a_2(\omega)$, które spełniają układ równań /3.8/. Dla porównania na rysunku tym przedstawiono także wyniki symulacji analogowej. Jak widać, wyniki z metody Ritza są bardzo bliskie analogowym, zarówno jeśli chodzi o zakres częstości w jakim występują rozwiązania dwuczęstościowe jak również i wielkość amplitud.



Rys. 3.8. Krzywe rezonansowe dla rozwiązań dwuczęstościowych,
 - - - - - rozwiązanie jednoczęstościowe } wyniki
 ——— rozwiązanie dwuczęstościowe } analogowe,
 - - - - - rozwiązanie dwuczęstościowe - metoda Ritzza.

4. Uwagi końcowe.

W niniejszej pracy zbadano drgania wymuszone nieliniowego układu drgającego o dwóch stopniach swobody, z nieliniowością sprężystą typu sześciennego, w przypadku występowania rezonansu wewnętrznego typu $\omega_2 = 3\omega_1$, przy częstotliwości wymuszenia w pobliżu wyższej częstotliwości własnej.

Badania przeprowadzono wykorzystując przybliżone metody: Ritza i uśredniania oraz poprzez symulację układu równań ruchu na maszynie analogowej. Otrzymane wyniki prowadzą do stwierdzeń:

/1/ W zależności od wartości częstotliwości γ siły wymuszającej, w układzie mogą wystąpić różne typy odpowiedzi w pobliżu wyższego rezonansu głównego. Jedną z nich jest odpowiedź harmoniczna o częstotliwości wymuszenia, taka jak w przypadku zwykłego rezonansu głównego. Oprócz niej mogą wystąpić dwa typy drgań okresowych dwuczęstościowych, ze składowymi harmonicznymi o częstotliwościach $\gamma/3$ i γ . Jedno z tych drgań ze wzrostem częstotliwości osiąga bardzo duże amplitudy, nawet dziewięciokrotnie wyższe od amplitudy drgań rezonansowych harmonicznymi, dominuje w nim pierwsza postać, a układ drga tak jak w pobliżu pierwszego rezonansu głównego. W drugim typie drgań dwuczęstościowych /o niższych amplitudach/, udział drugiej postaci jest widoczniejszy. O tym, który typ odpowiedzi wystąpi w układzie, decydują warunki początkowe.

/2/ Powszechnie stosowana metoda uśredniania, dająca dobre rezultaty dla układów o jednym stopniu swobody, daje wyniki różniące się z analogowymi dla rozwiązań dwuczęstościowych z rezonansem wewnętrznym, i nie nadaje się do badania tego typu drgań.

/3/ Zastosowana w tej pracy metoda Ritza dała wyniki bardzo bliskie wynikom symulacji analogowej. Jedynym jej ograniczeniem jest to, że nie pozwala na badanie stanów nieustalonych.

/4/ Badania analityczne /w metodzie Ritza/ przeprowadzono zakładając zerowe tłumienie w układzie, co znakomicie uprościło obliczenia. Widząc dobrą zgodność wyników analogowych i uzyska-

nych metodą Ritza można przypuszczać, że uwzględnienie tłumienia może jeszcze poprawić zgodność wyników i nie wydaje się aby mogło wpłynąć na jakościową i ilościową zmianę rozwiązania.

/5/ W badaniach analogowych stwierdzono także występowanie w zakresie częstości $\sqrt{6} \langle 2.20, 2.30 \rangle$, a więc w obszarze drugiego rezonansu głównego, drgań prawie-okresowych osiągających znaczne amplitudy. Wzmianki o drganiach prawie-okresowych w układach z rezonansem wewnętrznym można znaleźć w pracach [2,7]. Wykryto je na drodze symulacji analogowej bądź cyfrowej lecz nie podjęto jeszcze prób teoretycznego wyjaśnienia tego zjawiska i zagadnienie to wymaga dalszych badań.

L I T E R A T U R A

- [1] J. Bajkowski: Rezonanse wewnętrzne w nieliniowych układach drgających cz. I, Prace IPPT 15/1984.
- [2] S. L. Lau, Y. K. Cheung, S. Y. Wu: Incremental Harmonic Balance Method with Multiple Time Scales for Aperiodic Vibration of Nonlinear Systems, J. of Appl. Mech., December 1983, Vol. 50, pp. 871-876.
- [3] W. Szemplińska-Stupnicka: Współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych nieliniowych układów drgających o wielu stopniach swobody, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1, 11/1973/.
- [4] W. Szemplińska-Stupnicka: A study of main and secondary resonances in non-linear multi-degree-of-freedom vibrating systems, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 10, pp. 289-304.
- [5] W. Szemplińska-Stupnicka: The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems, J. of Sound and Vibration /1979/ 63/4/, 475-489.
- [6] А. Тонга: Нелинейные колебания механических систем, Изд. МГУ, Москва 1973.
- [7] T. Yamamoto, K. Yasuda, I. Nagasaka: On the Internal Resonance in a Non-linear Two-Degree-of-Freedom System, Bull. of the JSME, Vol. 20, No. 147, Sept. 1977, pp. 1093-1100.

S P I S T R E Ś C I

	str.
1. Wstęp	3
2. Badania analogowe	4
2.1. Drugi rezonans główny - rozwiązanie jednoczęstościowe $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$	6
2.2. Rozwiązanie dwuczęstościowe - $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$, w obszarze występowania drugiego rezonansu głównego	6
2.3. Drgania prawie-okresowe	12
2.4. Porównanie wyników uzyskanych metodą uśredniania i metodą analogową oraz wnioski	14
3. Metoda Ritza do badania drgań dwuczęstościowych	16
4. Uwagi końcowe	21
5. Literatura	22
6. Spis treści	23