

Materiau elastoplastique ecrouissable. Distribution de la contrainte dans une evolution quasi-statique

NGUYEN QUOC SON (PARIS)

METHODS proposed recently by J. J. MOREAU or G. DUVAUT and J. L. LIONS to characterize the stress-evolution in elastic-perfectly plastic medium are generalized to a class \mathcal{C} of strain hardening elastic plastic materials. It is shown here that the field of stresses and hidden parameters satisfies a parabolic inequation. The uniqueness theorem is deduced from this. One can prove easily that the class \mathcal{C} is sufficiently broad to cover usual laws of hardening (The Bauschinger effect, isotropic or kinematic hardening).

Metody, zaproponowane niedawno przez J. J. MOREAU oraz G. DUVAUT i J. L. LIONS dla opisu przebiegu stanu naprężenia w ośrodkach doskonale sprężysto-plastycznych, zostały uogólnione na przypadek materiałów sprężysto-plastycznych klasy \mathcal{C} ze wzmocnieniem. Wykazano, że pole naprężenia oraz parametry utajone spełniają pewną nierówność paraboliczną, skąd wyprowadzono twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania. Łatwo można dowiedzieć, że klasa \mathcal{C} jest dostatecznie szeroka, aby objąć zwykłe prawa wzmocnienia (zjawisko Bauschingera, hipoteza izotropowa i kinematyczna).

Для упруго-пластических упрочняющихся материалов класса \mathcal{C} дается обобщение методов построения напряженного состояния, предложенных недавно в работах Мору, Дюво и Лайсона для случая идеально-упруго-пластической среды. Показано, что поле напряжений и скрытые параметры удовлетворяют некоторому параболическому неравенству, откуда следует теорема об однозначности решения. Можно легко доказать, что класс \mathcal{C} является достаточно обширным и включает известные законы упрочнения (эффект Баушингера, изотропную и кинематическую гипотезы).

1. Quelques rappels de plasticité

On rappelle ici quelques notions utiles dans la suite. On considère un solide \mathcal{V} soumis à l'action des efforts de volume $F_i(x, t)$, des efforts de surface $T_i(x, t)$ sur une partie \mathcal{S}_{f_i} de sa frontière. Sur la partie complémentaire \mathcal{S}_{u_i} (qui forme avec \mathcal{S}_{f_i} une partition de $\mathcal{S}_{(i=1,3)}$) les déplacements sont imposés égaux à $u_{a_i}(x, t)$.

Pour simplifier, on va supposer $u_a(x, t) = 0$. Cette hypothèse n'est pas restrictive.

La donnée complète des fonctions $F_i(x, t)$, $T_i(x, t)$ définit dans ces conditions un trajet de charge; $t = 0$ est le début, $t = T$ est la fin du chargement; le déplacement $\mathbf{u}(x, t)$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$ sont les inconnues à déterminer.

La plasticité se traduit dans l'espace à six dimensions des contraintes (la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est alors représentée par un vecteur à six composantes) par le fait suivant: la contrainte se trouve à l'intérieur ou sur la frontière d'un domaine convexe (de $\boldsymbol{\sigma}$) $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0$; ce domaine dépend des paramètres cachés $\boldsymbol{\alpha}$. Lorsque la contrainte arrive sur la frontière de ce convexe avec une vitesse dirigée vers l'extérieur ou dans l'hyperplan tangent, des déformations plastiques peuvent se produire. Ces déformations modifient les propriétés du matériau, en particulier la frontière du convexe en question $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0$ est entraînée

avec σ , les paramètres α évoluent. Lorsque la vitesse de σ est dirigée vers l'intérieur, les déformations plastiques cessent, la frontière $F(\sigma, \alpha) = 0$ et les α restent alors fixes. Le matériau est dit parfaitement plastique lorsque la frontière $F(\sigma, \alpha) = 0$ ne se modifie pas et les α sont des constantes.

En plasticité classique, on se limite à l'étude de l'accroissement de la transformation entre les instants t et $t + dt$ en supposant connus à l'instant t la position de l'élément de matière, son état de contrainte $\sigma(x, t)$ et de l'écroutissage $\alpha(x, t)$. On ne s'intéresse ainsi qu'à un problème partiel. Il faut étudier la transformation subie par l'élément depuis l'instant $t = 0$ si l'on veut résoudre le problème complet de l'évolution d'un milieu élasto-plastique le long d'un trajet de charge. Lorsque les déformations sont grandes, l'évolution globale est un problème difficile. Si l'on se limite à la transformation infiniment petite, pour un matériau parfaitement plastique, \mathcal{L}_{u_i} et \mathcal{L}_{f_i} étant supposés invariables, l'évolution complète de la contrainte $\sigma(x, t)$ dans un intervalle de temps $(0, T)$ est caractérisée par une inéquation d'évolution parabolique. De cette manière J. J. MOREAU [1], G. DUVAUT et J. L. LIONS [2] ont obtenu quelques résultats nouveaux sur σ plus forts que ceux classiquement connus qui ne concernent que sa vitesse $\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \sigma(x, t)$: l'unicité et l'existence de $\sigma(x, t)$ dans un espace particulier.

On veut ici étendre certains de leurs résultats aux matériaux écroutissables. On suppose dans la suite:

- transformation infiniment petite;
- tenseur des compliances élastiques L constant et strictement défini positif;
- \mathcal{L}_{u_i} et \mathcal{L}_{f_i} indépendants du temps.

On étudie d'abord le cas d'un seul paramètre α : le critère de plasticité est de la forme $F(\sigma, \alpha) \equiv f(\sigma) - \psi(\alpha) \leq 0$. Ces résultats seront élargis ensuite lorsque l'on considérera une famille de paramètres.

2. Remarque sur l'évolution de l'écroutissage

Dans ce paragraphe, on discute certaines hypothèses concernant f , ψ et un choix préférentiel de α . Dans les pages suivantes, il suffit de supposer que f et ψ sont des fonctions données.

On suppose qu'il existe un potentiel plastique confondu avec le critère de plasticité: la vitesse de déformation plastique a la direction du vecteur normal extérieur à la surface de charge.

L'écroutissage est entièrement défini si l'on se donne le module $g(\sigma, \alpha)$. En effet $\dot{\epsilon}^P(x, t)$ désignant la vitesse de la déformation plastique à l'instant t en un point x situé dans la région en déformation plastique, on a:

$$(2.1) \quad \dot{\epsilon}^P = g(\sigma, \alpha) \langle \dot{f} \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma},$$

où

$$\langle \dot{f} \rangle = \begin{cases} \dot{f} & \text{si } \dot{f} > 0, \\ 0 & \text{si } \dot{f} \leq 0, \end{cases}$$

et $g(\sigma, \alpha) > 0$.

Pour un point x en charge plastique, la condition de plasticité s'écrit:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0, \quad \dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0.$$

Il en résulte que $\langle \dot{f} \rangle - \frac{d\psi}{d\alpha} \dot{\alpha} = 0$ et par suite:

$$\dot{\alpha} = \langle \dot{f} \rangle \frac{d\alpha}{d\psi}.$$

Lorsque l'on impose à α de vérifier une relation analogue à (2.1):

$$(2.2) \quad \dot{\alpha} = g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \langle \dot{f} \rangle \frac{d\psi}{d\alpha}$$

on trouve que:

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \{g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)\}^{-\frac{1}{2}}.$$

On peut résumer les relations (2.1) et (2.2) sous la forme:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad -\dot{\alpha} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad \text{avec} \quad \Lambda = g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \langle \dot{f} \rangle.$$

Considérons la fonction ψ définie par les conditions suivantes:

$$(2.3) \quad \psi(\alpha) = f(\sigma), \quad \frac{d\psi}{d\alpha} = \{g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)\}^{-\frac{1}{2}}, \quad \psi(0) = k;$$

$f(\boldsymbol{\sigma})$ et $\psi(\alpha)$ définissent alors une fonction $\mathcal{F}(\Sigma)$ de la variable à sept dimensions $\Sigma = (\sigma_{ij}, \alpha)$ que l'on suppose convexe. L'existence d'une fonction ψ vérifiant (2.3) est assurée par exemple lorsque le module $g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ peut se mettre sous la forme:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = g^*(f, \alpha).$$

En effet, prenant f comme variable, on a à partir de (2.1):

$$1 - \frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{df} = 0,$$

ou $d\alpha = \sqrt{g^*} df$ avec, pour $f = k$, $\alpha = 0$. C'est une équation différentielle du premier ordre en f avec une condition initiale donnée. Dans le plan (α, f) , on peut dessiner la courbe \mathcal{C} qui représente les variations de f en fonction de α : $f = \psi(\alpha)$. Si cette courbe est concave, $\mathcal{F}(\Sigma) \leq 0$ définit un domaine convexe de Σ . On suppose vérifiée cette condition.

En général, dans les problèmes pratiques, on fait l'hypothèse que $g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ dépend uniquement de $\boldsymbol{\sigma}$. L'ensemble $\mathcal{F}(\Sigma) \leq 0$ peut être obtenu à partir de la courbe expérimentale contrainte-déformation plastique en traction ou en compression simple. Par exemple avec le critère de Misès, on a la Fig. 1.

Dans les cas usuels, la convexité de $\mathcal{F}(\Sigma)$ n'est pas une hypothèse trop restrictive. Le point Σ se trouve à l'intérieur ou sur la frontière du domaine convexe $\mathcal{F}(\Sigma) \leq 0$ qui se réduit au segment fermé $0k$ si le matériau est parfaitement plastique.

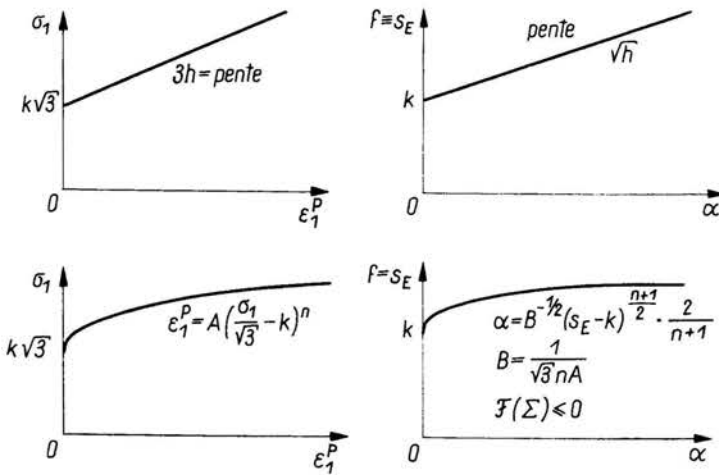


FIG. 1. Courbes contrainte-déformation plastique en traction simple et les domaines $F(\sigma, \alpha) \leq 0$ correspondants.

3. Formulation du problème global en contraintes

On se donne une fonction $\mathcal{F}(\Sigma) \equiv F(\sigma, \alpha)$ convexe de la variable Σ
 C désigne le convexe $\mathcal{F}(\Sigma) \leq 0$.

$S(t)$ désigne le convexe des champs de contraintes statique-admissibles c'est à dire vérifiant:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + \rho F(x, t) &= 0 \text{ dans } v, \\ \sigma n - T(x, t) &= 0 \text{ sur } \mathcal{S}_f. \end{aligned}$$

$K(t)$ désigne le convexe mobile:

$$K(t) = \{ \Sigma \in C \mid \Sigma = (\sigma, \alpha) \text{ avec } \sigma \in S(t) \};$$

$\varphi(\Sigma, t)$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $K(t)$, c'est à dire la fonction définie par:

$$\varphi(\Sigma, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Sigma \in K(t), \\ \infty & \text{si } \Sigma \notin K(t). \end{cases}$$

Désignons par:

$$(a, b) = \int_V a b dx,$$

$$[\Sigma, \Sigma^*] = \int_V L_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij}^* dx + \int_V \alpha \alpha^* dx;$$

L_{ijkl} sont les composantes du tenseur des compliances élastiques L . Nous avons:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} & \text{avec } \Lambda \geq 0 & \text{ si } \mathcal{F}(\Sigma) = 0, \\ -\dot{\alpha} &= \Lambda \frac{\partial F}{\partial \alpha} & \Lambda = 0 & \text{ si } \mathcal{F}(\Sigma) < 0; \end{aligned}$$

(3.1) montre que le vecteur $(\dot{\epsilon}^p, -\dot{\alpha})$ est une normale extérieure au convexe C . Il vérifie par conséquent:

$$(\dot{\epsilon}^p, \sigma^* - \sigma) + (-\dot{\alpha}, \alpha^* - \alpha) \leq 0 \quad \forall (\sigma^*, \alpha^*) \in C.$$

Or $\dot{\epsilon} = L\dot{\sigma} + \dot{\epsilon}^p$ est un champ de vitesse de déformation cinématiquement admissible, si $\Sigma^* \in K(t)$, $\sigma^* - \sigma$ est un champ de contrainte auto-équilibré, on a alors:

$$(L\dot{\sigma}, \sigma^* - \sigma) + (\dot{\epsilon}^p, \sigma^* - \sigma) = 0.$$

Il en résulte que, quel que soit $\Sigma^* \in K(t)$ on a:

$$(3.2) \quad (L\dot{\sigma}, \sigma^* - \sigma) + (\dot{\alpha}, \alpha^* - \alpha) \geq 0, \\ \text{avec } \sigma(x, 0) = \sigma_0(x), \quad \alpha(x, 0) = \alpha_0(x),$$

ou que

$$(3.2') \quad [\dot{\Sigma}, \Sigma^* - \Sigma] \geq 0 \quad \forall \Sigma^* \in K(t), \\ \Sigma(x, 0) = \Sigma_0(x);$$

(3.2') montre que $-\dot{\Sigma}$ est une normale extérieure au convexe $K(t)$ au point Σ ; on peut encore écrire:

$$(3.2'') \quad -\Sigma \in \partial\varphi(\dot{\Sigma}, t), \quad \Sigma(x, 0) = \Sigma_0(x),$$

où $\partial\varphi(\Sigma, t)$, multivoque, représente le sous-différentiel de φ ou le cône des normales extérieures au point Σ à $K(t)$. L'évolution de $\Sigma(x, t)$ est régie par l'inéquation parabolique (3.2). Pour la théorie des inéquations aux dérivées partielles, on peut consulter J. L. LIONS [3], G. DUVAUT et J. L. LIONS [2] ou H. BRÉZIS [4].

R e m a r q u e: la forme $[\cdot, \cdot]$ étant symétrique, à un instant t donné, la vitesse $\dot{\Sigma}$ vérifie le principe du minimum:

$\dot{\Sigma}$ minimise la fonctionnelle $\frac{1}{2} [\dot{\Sigma}^*, \dot{\Sigma}^*]$ parmi les champs $\dot{\Sigma}^*$ vérifiant:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma} \dot{\Sigma}^* \leq 0 \quad \text{lorsque } \mathcal{F}(\Sigma) = 0,$$

$$\dot{\Sigma}^* = (\dot{\sigma}^*, \dot{\alpha}^*) \text{ avec } \dot{\sigma}^* \in \dot{S}(t)^{(1)} (\text{statiq. admissible } (\dot{F}, \dot{T})).$$

Ce n'est autre que le principe du minimum classique concernant les vitesses de contrainte (on reconnaît dans $\frac{1}{2} \dot{\alpha}^{*2}$ la quantité $\frac{1}{2} \dot{\sigma}^* \dot{\epsilon}^{*p}$).

Pour démontrer qu'il s'agit d'une formulation équivalente du problème, il suffit de vérifier que le coefficient Λ vaut $g\langle \dot{f} \rangle$ avec $\dot{f} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma}$. Or pour un point de la surface de charge:

$$\mathcal{F}(\Sigma) = 0, \quad \dot{\mathcal{F}}(\Sigma) = 0, \quad \langle \dot{f} \rangle - \frac{d\psi}{d\alpha} \dot{\alpha} = 0, \\ \langle \dot{f} \rangle - \frac{d\psi}{d\alpha} \left(\Lambda \frac{d\psi}{d\alpha} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \Lambda = \langle \dot{f} \rangle \left(\frac{d\psi}{d\alpha} \right)^{-2}$$

(1) $\dot{S}(t)$ a la même signification que $S(t)$; il correspond au problème en vitesse.

d'après la construction de la fonction $\psi(\alpha)$ on a bien :

$$\Lambda = g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \langle \dot{f} \rangle.$$

La donnée du module d'érouissage permet de construire la fonction $\psi(\alpha)$, d'où le domaine $\mathcal{F}(\Sigma) \leq 0$. Le point essentiel est le suivant: il existe une fonction $\mathcal{F}(\Sigma)$ convexe de la variable Σ , jouant le rôle d'un potentiel plastique:

$$(3.3) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad -\dot{\alpha} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

$K(t)$ est un convexe variable, cela entraîne des difficultés pour l'étude de l'existence et de la régularité d'une solution éventuelle. Mais l'unicité d'une solution est immédiate.

4. L'unicité

Soient Σ_1 et Σ_2 deux solutions éventuelles vérifiant:

$$\Sigma_1(x, 0) = \Sigma_2(x, 0) = \Sigma_0(x)$$

en prenant successivement $\Sigma^* = \Sigma_1$, $\Sigma = \Sigma_2$ puis $\Sigma^* = \Sigma_2$, $\Sigma = \Sigma_1$, on a:

$$(\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) + (\dot{\alpha}_1, \alpha_2 - \alpha_1) \geq 0,$$

$$(\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2, \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) + (\dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0,$$

ou:

$$(\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 - \mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2, \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) + (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq 0 \quad \forall t \in (0, T].$$

En intégrant cette dernière expression sur l'intervalle $(0, T)$, on en déduit:

$$\{(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}_1 - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) + (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)\}_{t=0}^T \leq \{-\text{idem}\}_{t=0} \quad \text{car } \Sigma_1(x, 0) = \Sigma_2(x, 0)$$

on a donc:

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) dx + \int_V (\alpha_1 - \alpha_2)^2 dx \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

ou que

$$\boldsymbol{\sigma}_1(x, t) \equiv \boldsymbol{\sigma}_2(x, t)$$

$$\alpha_1(x, t) \equiv \alpha_2(x, t) \quad \text{c.q.f.d.}$$

La généralisation à plusieurs paramètres d'érouissage α_k , $k = 1, n$ à partir de (3.1) est immédiate lorsque l'on peut poser:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad -\dot{\alpha}_k = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \alpha_k}$$

$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ est une fonction convexe de la variable $\Sigma = (\sigma_{ij}, \alpha_k)$. La difficulté est plutôt d'ordre physique car il faut interpréter la signification des α ainsi que le choix correspondant de la fonction $F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$. Le module d'érouissage g vérifie:

$$\frac{1}{g} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \frac{\partial F}{\partial \alpha_k}.$$

L'évolution de Σ est caractérisée toujours par le système (3.2).

5. Problème régularisé — schéma viscoplastique associé

Une régularisation du problème consiste à remplacer la fonction indicatrice de C par une distance de Σ à C qu'on peut appeler potentiel viscoplastique $\Omega(\Sigma)$:

$$\Omega(\Sigma) = \frac{1}{2\eta} \langle \mathcal{F}(\Sigma) \rangle^2,$$

η est un paramètre destiné à tendre vers 0. On a:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^{vp} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{1}{\eta} \langle F(\sigma, \alpha) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \\ -\dot{\alpha} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \frac{1}{\eta} \langle F(\sigma, \alpha) \rangle \frac{\partial F}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

$\Omega(\Sigma)$ est une fonction convexe de Σ . Pour tout $t \in (0, T)$ on a à la place du système (2.3):

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \left(L\dot{\sigma} + \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}, \sigma^* - \sigma \right) &= 0 \quad \forall \sigma^* \in S(t), \\ \dot{\alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} &= 0, \quad \sigma(x, 0) = \sigma_0(x), \quad \alpha(x, 0) = \alpha_0(x); \end{aligned}$$

(5.1) est une équation d'évolution non linéaire. On remplace l'inéquation (3.2) par l'équation (5.1), puis on fait tendre η vers 0 pour retrouver la solution du système (3.2). Comme (3.2) la solution de (5.1) est unique, en effet on a:

$$(L\dot{\sigma}, \sigma^* - \sigma) + (\dot{\alpha}, \alpha^* - \alpha) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}, \sigma^* - \sigma \right) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}, \alpha^* - \alpha \right) = 0$$

or $\Omega(\Sigma)$ est convexe

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}, \sigma^* - \sigma \right) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}, \alpha^* - \alpha \right) \leq \int_V \Omega(\sigma^*, \alpha^*) - \Omega(\sigma, \alpha) dV$$

on a donc $\forall t \in (0, T)$ et $\forall \sigma^* \in S(t)$

$$(L\dot{\sigma}, \sigma^* - \sigma) + (\dot{\alpha}, \alpha^* - \alpha) + \int_V \Omega(\sigma^*, \alpha^*) - \int_V \Omega(\sigma, \alpha) dV \geq 0;$$

Σ_1, Σ_2 désignent deux solutions éventuelles, en prenant respectivement $\Sigma_1 = \Sigma^*, \Sigma_2 = \Sigma$ puis $\Sigma_1 = \Sigma, \Sigma_2 = \Sigma^*$ on en déduit l'unicité.

6. Conclusions

Pour les matériaux écrouissables, lorsque le critère de plasticité $F(\sigma, \alpha)$ est convexe et lorsque les vitesses de la déformation plastique et des paramètres d'écrouissage vérifient:

$$\dot{\epsilon}^p = A \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad -\dot{\alpha} = A \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

l'évolution de $\sigma(x, t)$ et de $\alpha(x, t)$ est caractérisée par une inéquation parabolique.

Remerciements

L'auteur remercie Monsieur le Professeur D. Radenkovic pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail et le Dr. J. Zarka pour ses remarques.

Bibliographie

1. J. J. MOREAU, *Séminaire d'analyse convexe*, Montpellier 1971.
2. G. DUVAUT et J. L. LIONS, *Les inéquations en physique et en mécanique*, Dunod, 1972.
3. J. L. LIONS, *Sur les inéquations aux dérivées partielles*, Article à paraître aux Ouspechi Mat. Nauk., 1970.
4. H. BREZIS, *Problèmes unilatéraux*, Thèse, Paris 1971.
5. P. PERZYNA et W. OLSZAK, Proc. 11th Cong. Appl. Mech. Munich, 1964.
6. Z. MRÓZ, *On the description of anisotropic work-hardening*, J. Mech. Phys. Solids, **15**, 163-175, 1967.

Reçu 4 Septembre 1972

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES SOLIDES, PARIS
