

7.73 — ośrodki niejednorodne,
kompozyty

Marek Kosmatka
Stefan Jan Kowalski

ANALIZA
STRUKTURALNEGO ROZDZIAŁU OBCIĄŻEŃ
NA POWIERZCHNI OŚRODKA POROWATEGO
WYPEŁNIONEGO CIECZĄ

2/1986

P. 269



WARSZAWA 1986

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 13 sierpnia 1985 r.



56869



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 0,63 Ark.druk. 1

Oddano do drukarni w styczniu 1986 r.

Nr zamówienia 119/86

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Marek Kosmatka
Stefan Jan Kowalski

Pracownia Mechaniki Ośrodków Porowatych
IPPT PAN - Poznań

ANALIZA STRUKTURALNEGO ROZDZIAŁU OBCIĄŻEŃ
NA POWIERZCHNI OŚRODKA POROWATEGO
WYPEŁNIONEGO CIECZĄ

Streszczenie

Przedmiotem rozważań jest ośrodek porowaty wypełniony cieczą. Celem pracy jest analiza rozkładu na poszczególne składniki obciążenia przyłożonego na nieprzepuszczalnym brzegu (np. nagłe obciążenie półprzestrzeni konsolidującej sztywnej płyty). Jak wynika z rozważań rozkład taki zależy od własności fizycznych, a w zagadnieniach dynamicznych także od inercji poszczególnych składników, a nie tylko od funkcji porowatości jak to się sugeruje niekiedy w literaturze. W pracy podano ogólne warunki ciągłości kinematycznej i dynamicznej na powierzchni nieciągłości, które są pomocne przy formułowaniu warunków brzegowych. Rozważania zilustrowano przykładem.

Oznaczenia

x_i, t - współrzędne miejsca i czasu,
 $u_i(x_i, t); U_i(x_i, t)$ - przemieszczenia szkieletu i cieczy,
 v_i, w_i - prędkości przemieszczeń szkieletu wraz z uciążoną cieczą oraz cieczy swobodnej,
 a_i - prędkość sztywnej translacji,
 $t_i^{(1)}, t_i^{(2)}$ - wektory naprężeń w szkielecie i cieczy,
 $\sigma_{ij}(x_i, t); \delta(x_i, t)$ - naprężenia w szkielecie i cieczy odniesione do powierzchni całkowitej,

- ρ_s, ρ_c - gęstości rzeczywiste szkieletu i cieczy,
 $(\rho - \bar{\rho}), \bar{\rho}$ - gęstości szkieletu z cieczą unoszoną oraz cieczy swobodnej odniesione do jednostki objętości ośrodka dwuskładnikowego,
 f_v, f_A - porowatości objętościowa i powierzchniowa,
 A, N, Q, R - stałe materiałowe teorii konsolidacji,
 b - współczynnik oporów przepływu cieczy lepkiej przez ośrodek,
 C_w, C_s - prędkości fal podłużnych "wolnej" i szybkiej",
 C - prędkość fali podłużnej w przypadku braku ruchu względnych składników,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad - \text{ pochodne materialne,}$$

$$\bar{f}(x, s) = \int_0^{\infty} f(x, t) e^{-st} dt \quad - \text{ transformacja całkowa Laplace'a względem czasu.}$$

1. Wstęp

Przedmiot niniejszej pracy wiąże się z zagadnieniem formułowania warunków brzegowych dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Naszym celem jest odpowiedź na pytanie: jakie udziały w przenoszeniu obciążeń przypadają na poszczególne składniki rozważanego dwuskładnikowego ośrodka. Wadnimy, że mamy tu na uwadze ośrodek o dużych rozmiarach por (choć niekoniecznie dużych porowatościach) w którym ruch cieczy występuje jedynie w wyniku oddziaływań zewnętrznych, a nie np. sił kapilarnych. Przykład takiego ośrodka można znaleźć np. w pracy [1].

Interesują nas przede wszystkim zagadnienia dynamiczne. Pewne sugestie odnośnie formułowania warunków brzegowych dla takich zagadnień nasuwają warunki ciągłości kinematycznej i dynamicznej na powierzchni nieciągłości, (jest nią m.in. powierzchnia brzegowa). Z warunków tych wynika np. że obciążenie przyłożone do brzegu nieprzepuszczalnego nie rozkłada się na poszczególne składniki proporcjonalnie do ich udziału powierzchniowego, jak sugeruje się to niekiedy w literaturze np. [4], a o rozkładzie tym decydują przede wszystkim impedancja poszczególnych składników i ich niektóre własności fizyczne.

Nasze rozważania zilustrujemy przykładem. Podamy mianowicie rozwiązania dla brzegu półprzestrzeni konsolidującej obciążonej nieprzepuszczalną płytą. Podane rozwiązania wyraźnie ilustruje jakie parametry decydują o strukturalnym rozkładzie globalnego obciążenia na poszczególne składniki.

2. Warunki ciągłości kinematycznej i dynamicznej na powierzchni nieciągłości.

W pracy [2] wyprowadzono równania ciągłości masy i równania ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą, korzystając z zasady niezmienniczości. Skorzystamy z przedstawionych tam wyników i metod wyvodu dla wyprowadzenia równań ciągłości kinematycznej i dynamicznej na powierzchni nieciągłości.

Jeśli rozważany obszar \mathcal{B} jest ciągły, to z zasady niezmienniczości energii wewnętrznej względem sztywnej translacji układu odniesienia z prędkością α_k wynika następująca zależność, [2] :

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \frac{1}{2} \alpha_k \alpha_k \int_{\mathcal{B}} \left[\left(\frac{\partial(s-\bar{s})}{\partial t} + \frac{\partial(s-\bar{s})v_i}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{s} w_i}{\partial x_i} \right) \right] dV + \\
 & + \alpha_k \int_{\mathcal{B}} \left[\left(\frac{\partial(s-\bar{s})}{\partial t} + \frac{\partial(s-\bar{s})v_i}{\partial x_i} \right) v_k + \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{s} w_i}{\partial x_i} \right) w_k + \right. \\
 & \left. + \left[(s-\bar{s}) \frac{dv_k}{dt} - (s-\bar{s}) \chi_k - \bar{\sigma}_{jk,i} \right] + \left[\bar{s} \frac{Dw_k}{Dt} - \bar{s} \chi_k - \bar{\sigma}_{jk} \right] \right] dV = 0.
 \end{aligned}$$

Jeżeli podstawimy $\alpha_k = \delta \alpha_k^*$, to wtedy równanie (2.1) będzie spełnione dla dowolnego δ , jeśli całki stojące przy $\alpha_k \alpha_k$ i α_k będą równe zeru niezależnie. Stąd wynikają równania ciągłości masy:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \frac{\partial(s-\bar{s})}{\partial t} + \frac{\partial(s-\bar{s})v_i}{\partial x_i} = : M^{(1)}, \\
 & \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{s} w_i}{\partial x_i} = : M^{(2)},
 \end{aligned}$$

oraz równania ruchu:

$$(2.3) \quad M^{(4)} v_i + (\bar{s} - \bar{s}) \left(\frac{dv_i}{dt} - X_i \right) - \bar{\sigma}_{j,i,j} = : K_i^{(4)},$$

$$M^{(2)} w_i + \bar{s} \left(\frac{Dw_i}{Dt} - X_i \right) - \bar{\sigma}_{i,i} = : K_i^{(2)},$$

przy czym:

$$(2.4) \quad \int_{\mathcal{B}} (M^{(4)} + M^{(2)}) dV = 0,$$

$$\int_{\mathcal{B}} (K_i^{(4)} + K_i^{(2)}) dV = 0.$$

Wielkości $M^{(4)}, M^{(2)}$ oraz $K_i^{(4)}, K_i^{(2)}$ mają określony sens fizyczny. Te pierwsze oznaczają wzajemną wymianę masy cieczy unoszonej przez szkielet i cieczy swobodnej, a te drugie oznaczają siły wzajemnych oddziaływań w ruchu względnym (mogą to być w szczególności siły dyfuzji, siły oporu ruchu wynikające z lepkości cieczy itp.).

Jeżeli w rozważanym obszarze \mathcal{B} znajduje się powierzchnia nieciągłości S poruszająca się z prędkością C_i , to zależność pomiędzy wielkościami kinematycznymi i dynamicznymi odpowiadająca (2.1) napisana dla takiego obszaru, a następnie ściągnięta do powierzchni S zorientowanej jednostkowym wektorem normalnym e_i przedstawia się następująco:

$$(2.5) \quad \frac{1}{2} a_{\alpha} a_{\alpha} \int_S \left\{ \left[\left[(\bar{s} - \bar{s})(v_i - c_i) \right] + \left[\bar{s}(w_i - c_i) \right] e_i \right] da + \right.$$

$$\left. + a_{\alpha} \int_S \left\{ \left[\left[(\bar{s} - \bar{s}) v_{\alpha} (v_i - c_i) e_i - t_{\alpha}^{(4)} \right] + \left[\bar{s} w_{\alpha} (w_i - c_i) e_i - t_{\alpha}^{(2)} \right] \right\} da = 0,$$

gdzie klamra $\left[\cdot \right]$ oznacza skok zawartej w niej wielkości na powierzchni S .

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak wyżej otrzymujemy na podstawie (2.5) następujące warunki

- ciągłości kinematycznej

$$(2.6) \quad \left[\left[(\bar{s} - \bar{s})(v_i - c_i) \right] e_i = : m^{(4)}, \right.$$

$$\left. \left[\bar{s}(w_i - c_i) \right] e_i = : m^{(2)}, \right.$$

- ciągłości dynamicznej

$$(2.7) \quad \left[t_{\alpha}^{(4)} \right] - \left[\left[(\bar{s} - \bar{s}) v_{\alpha} (v_i - c_i) \right] e_i = : k_{\alpha}^{(4)}, \right.$$

$$\left. \left[t_{\alpha}^{(2)} \right] - \left[\bar{s} w_{\alpha} (w_i - c_i) \right] e_i = : k_{\alpha}^{(2)}, \right.$$

przy czym

$$(2.8) \quad \int_S (m^{(1)} + m^{(2)}) da = 0 \quad ,$$

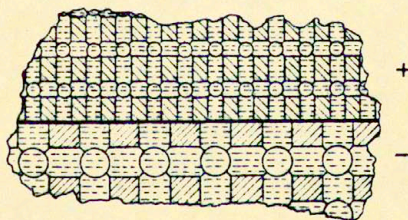
$$\int_S (k_i^{(1)} + k_i^{(2)}) da = 0 \quad .$$

Wielkościom $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ oraz $k_i^{(1)}$, $k_i^{(2)}$ można nadać podobnie jak wyżej, określony sens fizyczny odpowiednio prędkości wymiany masy cieczy unoszonej i cieczy swobodnej oraz źródeł sił na powierzchni S .

Równania (2.6) i (2.7) , o których założymy, że są spełnione także lokalnie, wykorzystamy do analizy niektórych warunków brzegowych. Założymy najpierw, że powierzchnia S jest powierzchnią materialną związaną ze szkieletem, np. jest powierzchnią kontaktu dwóch ośrodków porowatych (rys. 1).

Wtedy

$$(2.9) \quad v_i = c_i$$



Rys. 1

i warunki (2.6) przyjmują postać równania ciągłości strumienia masy cieczy:

$$(2.10) \quad \bar{\xi}^{(+)} (w_i - v_i)^{(+)} e_i = \bar{\xi}^{(-)} (w_i - v_i)^{(-)} e_i = \bar{\xi} (w_i - v_i) e_i$$

natomiast warunki (2.7) wyrażają bilans sił na powierzchni S

$$(2.11) \quad t_i^{(1)(+)} = t_i^{(1)(-)} + k_i^{(1)} \quad ,$$

$$t_i^{(2)(+)} = t_i^{(2)(-)} + \bar{\xi} (w_k - v_k) e_k \llbracket w_i \rrbracket + k_i^{(2)} \quad .$$

Warto zwrócić uwagę, że jeśli występuje skok prędkości cieczy

te w bilansie sił występuje również ciśnienie dynamiczne cieczy $\bar{\xi}(w_k - v_k)e_k \llbracket w_k \rrbracket$. Skok prędkości cieczy w tym przypadku wynika z różnicy porowatości kontaktujących się ośrodków porowatych. Łatwo to zauważyć na podstawie (2.10) przyjmując $v_i^{(+)} = v_i^{(-)}$ i wiedząc, że $\bar{\xi}$ jest iloczynem rzeczywistej gęstości cieczy ξ_c i porowatości powierzchniowej f_A . Różnica porowatości jest też przyczyną skoku parcjalnego naprężenia w cieczy, jako że moduł wektora tego naprężenia jest iloczynem rzeczywistej gęstości cieczy ρ i porowatości powierzchniowej f_A .

Jeżeli obszar oznaczony „+” będzie zewnętrzem, czyli $t_i^{(+) (+)}$ i $t_i^{(2) (+)}$ są znane, to (2.11) przedstawiają warunki brzegowe dla obszaru wewnętrznego „-”, Podstawiamy wtedy $t_i^{(+) (-)} = \delta_{ij} m_j$, $t_i^{(2) (-)} = \delta_{mi}$. Ciśnienie dynamiczne znika, gdy nie ma skoku prędkości cieczy (brak skoku porowatości) bądź też brzeg jest nieprzepuszczalny, wtedy $(w_k - v_k)e_k = 0$. W pierwszym przypadku powinno być $t_i^{(2) (+)} = t_i^{(2) (-)}$ lub $k_i^{(2)} = 0$. W drugim przypadku t.j. dla brzegu nieprzepuszczalnego warunki (2.11) redukują się do postaci

$$(2.12) \quad \begin{aligned} t_i^{(+) (+)} &= \delta_{ij} m_j + k_i^{(+)}, \\ 0 &= \delta_{mi} + k_i^{(2)} \quad (w_k - v_k)e_k = 0. \end{aligned}$$

Takie warunki odpowiadają np. obciążeniu brzegu nieprzepuszczalną płytą (przykład z takimi warunkami brzegowymi rozwiązany jest w następnym punkcie). Tak więc rozważając różne warianty warunków brzegowych dochodzimy do wniosku, iż siły źródłowe $k_i^{(+)}$ i $-k_i^{(2)}$ mogą oznaczać np. napór cieczy na szkielec, istniejący w wyniku różnicy porowatości powierzchniowej pomiędzy obszarem „+” i „-” (rys. 1).

Założymy obecnie, że powierzchnia S jest powierzchnią materialną związaną z cieczą np. powierzchnią rozdzielającą dwie różne pod względem własności fizycznych i niemieszające się ciecze znajdujące się w porach ośrodka. Wtedy

$$(2.13) \quad w_i = c_i$$

Nie popełnimy tu większego błędu jeśli założymy również $v_i^{(+)} = v_i^{(-)}$. Równania ciągłości dynamicznej przyjmują wtedy postać

$$(2.14) \quad \begin{aligned} t_i^{(1)(+)} &= \sigma_j c_{mj} + k_i^{(1)} \\ t_i^{(2)(+)} &= \sigma m_i + k_i^{(2)} \end{aligned}$$

Siły źródłowe mogą tu wynikać z napięcia powierzchniowego na interpowierzchni i zgodnie z formułą Laplace'a wyrażać się wzorem

$$(2.15) \quad k_i^{(1)} = -k_i^{(2)} = \frac{2\delta}{R},$$

gdzie δ oznacza wypadkowe napięcie powierzchniowe, a R jest krzywizną interpowierzchni dwóch cieczy.

Konkludując stwierdzamy, że pisząc warunki brzegowe dla poszczególnych składników oddzielnie należy uwzględnić ich wzajemne powierzchniowe interakcje $k_i^{(1)} = -k_i^{(2)}$, które tylko w szczególnych przypadkach mogą być równe zeru.

3. Strukturalny rozkład obciążeń na nieprzepuszczalnej powierzchni półprzestrzeni nagle obciążonej.

Rozważamy półprzestrzeń ośrodka porowatego wypełnionego cieczą, której powierzchnia brzegowa jest nagle obciążona nieprzepuszczalną płytą. Zakładamy, że półprzestrzeń przed przyłożeniem obciążenia znajdowała się w spoczynku tj. przyjmujemy jednorodne warunki początkowe.

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u(x,0) &= 0, & v(x,0) &= \dot{u}(x,0) = 0, \\ U(x,0) &= 0, & W(x,0) &= \dot{U}(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Współrzędna x jest miarą odległości od powierzchni brzegowej natomiast u i U oznaczają odpowiednie przemieszczenia szkieletu i cieczy w kierunku x . Warunki brzegowe dla naprężeń przedstawia wzór (2.12), przy czym ponieważ siły interakcji są nieznanne a priori przyjmujemy globalny warunek dla sił

$$(3.2) \quad t_x^{(1)(+)}(0,t) = [\sigma_{xx}(0,t) + \delta(0,t)] = q_r(t) = \text{funkcja znana}$$

oraz dodatkowe warunki kinematyczny wyrażający równość prędkości i przemieszczeń szkieletu i cieczy na nieprzepuszczalnym brzegu

$$(3.3) \quad \dot{u}(0,t) = \dot{U}(0,t)$$

oraz warunki ograniczoneści przemieszczeń w nieskończoności

$$(3.4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x,t) = 0$$

Równania ruchu (2.3) z wyspecyfikowaną funkcją sił dyfuzji, (por. [3]):

$$(3.5) \quad K_i^{(1)} = -K_i^{(2)} = b(w_i - v_i), \quad b \geq 0$$

oraz po pominięciu członów $M^{(1)}v_i$, $M^{(2)}w_i$ przyjmują dla zagadnienia jednowymiarowego postać

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx,x} &= b(\dot{u} - \dot{U}) + (s - \bar{s})\ddot{u}, \\ \bar{\sigma}_{,x} &= -b(\dot{u} - \dot{U}) + \bar{s}\ddot{U}. \end{aligned}$$

Związki fizyczne teorii konsolidacji są sprzężone, [3], a dla zagadnienia jednowymiarowego wyrażają się jak następująco

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= (2N + A)u_{,x} + Qu_{,x}, \\ \bar{\sigma} &= Qu_{,x} + Ru_{,x}. \end{aligned}$$

Penieważ zarówno zmienna przestrzenna jak i czasowa przebiegają zbiór półnieskończony, tj. $0 \leq x \leq \infty$; $0 \leq t \leq \infty$, wykorzystamy do rozwiązań naszego zagadnienia transformację Laplace'a względem obu tych zmiennych. Rozwiązanie ogólne naszego zagadnienia wyrażone za pomocą transformacji przemieszczeń względem czasu i po wykorzystaniu warunków ograniczoneści w nieskończoności przedstawia się następująco:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{u}(x,s) &= C_1 e^{-P_1 x} + C_2 e^{-P_2 x}, \\ \bar{U}(x,s) &= C_3 e^{-P_1 x} + C_4 e^{-P_2 x}, \end{aligned}$$

przy czym

$$C_1 = - \frac{1}{P_I(P_I^2 - P_{II}^2)[(2N+A)R - Q^2]} \left\{ \bar{\theta}_{xx}(0,s) R \left(P_I^2 - \frac{s^2}{a_1^2} \right) + \right. \\ \left. - \bar{\theta}(0,s) Q P_I^2 - bs [\bar{\theta}_{xx}(0,s) + \bar{\theta}(0,s)] \right\},$$

$$C_2 = \frac{1}{P_{II}(P_I^2 - P_{II}^2)[(2N+A)R - Q^2]} \left\{ \bar{\theta}_{xx}(0,s) R \left(P_{II}^2 - \frac{s^2}{a_2^2} \right) + \right. \\ \left. - \bar{\theta}(0,s) Q P_{II}^2 - bs [\bar{\theta}_{xx}(0,s) + \bar{\theta}(0,s)] \right\},$$

$$C_3 = - \frac{1}{P_I(P_I^2 - P_{II}^2)[(2N+A)R - Q^2]} \left\{ \bar{\theta}(0,s)(2N+A) \left(P_I^2 - \frac{s^2}{a_1^2} \right) + \right. \\ \left. - \bar{\theta}_{xx}(0,s) Q P_I^2 - bs [\bar{\theta}_{xx}(0,s) + \bar{\theta}(0,s)] \right\},$$

$$C_4 = \frac{1}{P_{II}(P_I^2 - P_{II}^2)[(2N+A)R - Q^2]} \left\{ \bar{\theta}(0,s)(2N+A) \left(P_{II}^2 - \frac{s^2}{a_2^2} \right) + \right. \\ \left. - \bar{\theta}_{xx}(0,s) Q P_{II}^2 - bs [\bar{\theta}_{xx}(0,s) + \bar{\theta}(0,s)] \right\},$$

$$P_{I,II} = \left\{ \frac{s}{2} \left[\left(\frac{1}{c_w^2} + \frac{1}{c_s^2} \right) s + \frac{2N+A+R+2Q}{(2N+A)R - Q^2} b + \left(\frac{1}{c_w^2} - \frac{1}{c_s^2} \right) \sqrt{(s-5s)(s-5s)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{I,II} = \frac{bs}{(2N+A)R - Q^2} \cdot \frac{1 - \frac{c^2}{c_w^2} + 1 - \frac{c^2}{c_s^2} + 2 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_w^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)}}{\left(\frac{1}{c_w^2} - \frac{1}{c_s^2}\right)^2},$$

$$c_{s,w}^2 = \frac{a_s^2 + a_t^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_s^2 - a_t^2}{2}\right)^2 + a_1 a_2 a_s^2 a_t^2}$$

$$c^2 = \frac{2N+A+R+2Q}{s}, \quad a_s^2 = \frac{2N+A}{s-3}, \quad a_t^2 = \frac{R}{3},$$

$$a_1 = \frac{Q}{2N+A}, \quad a_2 = \frac{Q}{R}.$$

Nas interesuje jedynie strukturalny rozkład obciążenia na powierzchni brzegowej. Rozwiążemy to zagadnienie dla możliwie prostej postaci funkcji obciążenia występującej w warunku (3.2) a mianowicie

$$(3.9) \quad q(t) = q_0 \eta(t)$$

gdzie $\eta(t)$ jest funkcją Heaviside'a, a q_0 wielkością stałą. Naprężenia na brzegu w poszczególnych składnikach wyrażone w transformatach przedstawiają się następująco:

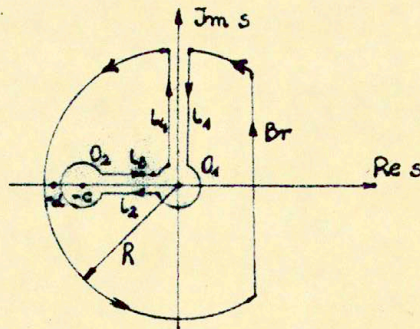
$$(3.10) \quad \bar{\sigma}_{xx}(0,s) = \frac{q_0}{s} \frac{\sqrt{s + \frac{qb}{3(s-\bar{s})}} (2N+A+Q) + (s-\bar{s}) \sqrt{(2N+A)R-Q^2} \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{s + \frac{qb}{3(s-\bar{s})}} (2N+A+R+2Q) + \bar{s} \sqrt{(2N+A)R-Q^2} \cdot \sqrt{s}}$$

$$\bar{\sigma}(0,s) = \frac{q_0}{s} \frac{\sqrt{s + \frac{qb}{3(s-\bar{s})}} (Q+R) + \bar{s} \sqrt{(2N+A)R-Q^2} \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{s + \frac{qb}{3(s-\bar{s})}} (2N+A+R+2Q) + \bar{s} \sqrt{(2N+A)R-Q^2} \cdot \sqrt{s}}$$

Powyższe transformaty można przekształcić tak, aby występował w nich człon w postaci

$$(3.11) \quad f(s) = \frac{\sqrt{s+c}}{\sqrt{s}(s+d)}$$

Jego odwrócenia dokonujemy poprzez całkowanie po konturze Bromwich'a-Wagnera przedstawionym na rys. 2.



Rys. 2.

Jak można zauważyć funkcja $f(s)$ ma pojedynczy biegun w punkcie $s = -d$ i dwa punkty rozgałęzienia $s = 0$ i $s = -c$. Tak więc odwrotna całka Laplace'a na łuku c promieniu R dąży do zera, gdy promień ten dąży do nieskończoności (twierdzenie Jordana). Ponadto suma całek po drodze L_1 i L_4 jest równa zero, gdyż drogi te leżą na tym samym płacie powierzchni Riemanna, po okrążeniu dwóch punktów rozgałęzienia. Również całki po drogach O_1 i O_2 dążą do zera, gdy promienie tych okręgów dążą do zera. Całka Laplace'a jest więc równa całkom po drodze L_2 i L_3 tj.

$$(3.12) \quad f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\sqrt{c-\xi}}{\sqrt{\xi}(d-\xi)} e^{-\xi t} d\xi + \sqrt{\frac{d-c}{d}} e^{-dt}.$$

Ostatecznie funkcje naprężeń na brzegu wyrażają się następująco:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}(0,t) &= \frac{q_0}{D_3^2 - D_4^2} \left\{ (D_1 D_3 - D_2 D_4) e^{-\bar{A}t} + \right. \\ &+ (D_2 D_3 - D_1 D_4) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^B \frac{\sqrt{B-\xi}}{\sqrt{\xi}(A-\xi)} e^{-\xi t} d\xi + \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{\frac{A-B}{A}} e^{-\bar{A}t} \right] + D_1 D_3 B \frac{1}{A} (1 - e^{-\bar{A}t}) \right\}, \\ \sigma(0,t) &= \frac{q_0}{D_3^2 - D_4^2} \left\{ (D_3 D_5 - D_4 D_6) e^{-\bar{A}t} + \right. \\ &+ (D_3 D_6 - D_4 D_5) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^B \frac{\sqrt{B-\xi}}{\sqrt{\xi}(A-\xi)} e^{-\xi t} d\xi + \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{\frac{A-B}{A}} e^{-\bar{A}t} \right] + D_3 D_5 B \frac{1}{A} (1 - e^{-\bar{A}t}) \right\} \end{aligned}$$

$$D_1 = 2N + A + Q \quad ; \quad D_2 = (s - \bar{s}) c w c s \quad ; \quad D_3 = 2N + A + R + 2Q ;$$

$$D_4 = s c w c s \quad ; \quad D_5 = Q + R \quad ; \quad D_6 = \bar{s} c w c s \quad ;$$

$$\bar{A} = \frac{D_3^2 B}{D_3^2 - D_4^2} \quad ; \quad B = \frac{b s}{\bar{s}(s - \bar{s})}$$

W chwili przyłożenia obciążenia jego rozkład na poszczególne składniki przedstawia się następująco:

$$\sigma_{xx}(0,t) \Big|_{t=0^+} = \frac{2N+A+Q+(S-\bar{S})C_w C_s}{2N+A+R+2Q+S C_w C_s} q_0 \quad (3.14)$$

$$\sigma(0,t) \Big|_{t=0^+} = \frac{Q+R+\bar{S} C_w C_s}{2N+A+R+2Q+S C_w C_s} q_0$$

Widzimy, że w wyrażeniach (3.14) nie ingeruje lepkość cieczy. Przechodząc z kolei z czasem do nieskończoności otrzymujemy rozkład obciążenia odpowiadający zagadnieniu statycznemu, czyli

$$\sigma_{xx}(0,t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{2N+A+Q}{2N+A+R+2Q} q_0 \quad (3.15)$$

$$\sigma(0,t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{Q+R}{2N+A+R+2Q} q_0$$

Rozkład obciążenia w tym przypadku nie jest prostą funkcją udziałów powierzchniowych składników, a interwenują również stałe materiałowe poszczególnych składników.

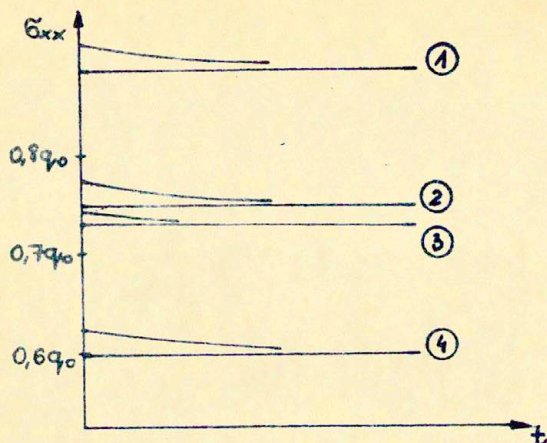
Na rysunkach 3 i 4 przedstawiono poglądowy przebieg zmian naprężeń w poszczególnych składnikach w czasie dla niektórych ośrodków na podstawie danych dostępnych w literaturze [5], [6], [7], [8] i [9].

Z rysunków wynika, że dla wszystkich analizowanych materiałów naprężenia w szkielecie w chwili początkowej są większe od naprężeń dla przypadków statycznych. Odwrotna sytuacja występuje w cieczy tzn. zachodzą relacje

$$\sigma_{xx}(0,0) \geq \sigma_{xx}(0,\infty) \quad (3.16)$$

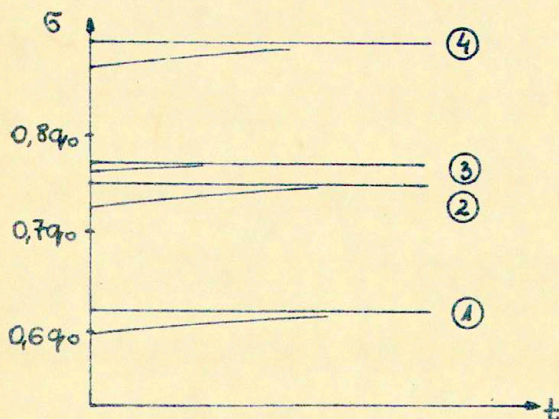
$$\sigma(0,0) \leq \sigma(0,\infty)$$

$$\text{gdz} \quad \frac{R+Q}{2N+A+Q} \geq \frac{S_c f A}{S_s(1-f)}$$



Rys. 3. Rozkład naprężeń w szkielecie na powierzchni brzegowej półprzestrzeni dla różnych ośrodków porowatych w zależności od czasu.

- 1 - piaskowiec Berea + woda [5],
- 2 - piasek gruboziarnisty + woda [6],
- 3 - glina pylista + woda [7],
- 4 - il kaolinowy + woda [8],



Rys. 4. Rozkład naprężeń w cieczy na powierzchni brzegowej półprzestrzeni dla różnych ośrodków porowatych w zależności od czasu (oznaczenia jak na rys. 3)

Teoretycznie możliwe są również relacje odwrotne tzn.

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}(0,0) &< \sigma_{xx}(0,\infty) , \\ \sigma(0,0) &> \sigma(0,\infty) , \end{aligned}$$

gdą $\frac{R+Q}{2N+A+Q} < \frac{scfA}{\beta_s(1-fv)}$.

4. Wnioski końcowe.

Przytoczona analiza wartości granicznych na powierzchniach brzegowych i interpowierzchniach środka porowatego wypełnionego cieczą prowadzi do kilku wniosków:

Po pierwsze, na powierzchniach brzegowych i interpowierzchniach występują na ogół powierzchniowe oddziaływania wewnętrzne, które powinny być uwzględnione przy pisaniu warunków dla poszczególnych składników oddzielnie.

Po drugie, w zagadnieniach dynamicznych przy analizie zjawisk na interpowierzchniach powinno być uwzględniane ciśnienie dynamiczne cieczy.

Po trzecie, strukturalny rozkład globalnego obciążenia brzegowego nie jest, jak to pokazuje przykład, tylko funkcją udziałów powierzchniowych poszczególnych składników, ale zależy także od własności mechanicznych, a w przypadku dynamicznym także własności inercyjnych poszczególnych składników.

Literatura

- [1] CHYŻY W., Wibreizelater bezrezenansowy, Praca doktorska, Politechnika Poznańska, 1977,
- [2] DERSKI W., KOWALSKI S.J., On the Motion and Mass Continuity Equations in a Poreus Fluid-Saturated Medium, *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol. II, No 2, 1980,
- [3] DERSKI W., KOWALSKI S.J., Equations of linear thermocconsolidation, *Archives of Mechanics*, 31, 3, 1979,

- [4] PRACA ZBIOROWA, *Mechanika skał i gruntów*, ser. *Mechanika techniczna*, t. VII, PWN, Warszawa 1982,
- [5] YEW C.H., JOGI P.N., *The Determination of Biot's Parameters for Sandstones, Part 1: Static Tests. Experimental Mechanics*, May, 1978, 167-172 ,
- [6] KIM Y.K., KINGSBURY H.B., *Dynamic Characterization of Poroelastic Materials, Experimental Mechanics*, 19, 7, 1979,
- [7] DOMSKI J., *Problemy konsolidacji gruntów w świetle pewnych eksperymentów doświadczalnych i numerycznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej*, Nr 3, 1980,
- [8] STRZELECKI T., *Elektrokinetyczna konsolidacja gruntu, Prace Naukowe Instytutu Geotechniki Politechniki Wrocławskiej*, Nr 37, 1982,
- [9] KACZMAREK M., KUBIK J., *O metodach określania stałych materiałowych dla ośrodków porowatych wypełnionych cieczą, Prace IPPT nr 35*, 1984.

Analysis of structural distribution of loadings
on fluid saturated porous body interfaces.

The paper deal with the boundary conditions problem for a fluid-saturated porous solid. Its aim is to consider how a loading on an impermeable boundary interface /e.g. instant loading with a rigid plate/ is shared between the components.

It follows from the present considerations that the share of a component in the carrying of loading depends on its physical properties /elasticity, inertia/ and not only on the porosity of medium as it is suggested in some literature.

The kinematical and dynamical conditions /jump conditions at interface boundaries/ are given. They can be applied for various special cases and helpful by the boundary condition formulation. The considerations are illustrated with an example.

Анализ структурального распределения нагрузок на поверхности пористой среды насыщенной жидкостью.

Резюме

Предметом изучения является пористая среда насыщенная жидкостью. В работе анализируется распределение нагрузки, по компонентом среды, для непроницаемого берега ип. внезапное приложение твердой плиты к границе полубесконечного пористого полупространства. Как показано в работе, распределение нагрузки зависит от физических свойств компонентов среды. В случае динамических процессов зависит тоже от инерции частных компонентов, а не только от функции пористости как это обычно внушается в литературе.

Показаны обобщенные условия кинематической и динамической непрерывности на особенной поверхности, которые облегчают формулировку граничных условий. Исследования представлены примерами.