

7.72 — reologia

5.53 — polimery

Mieczysław Gosiewski

**PRZEPLYW
LEPKOSPREŻYSTEJ CIECZY PROSTEJ
W CIENKIEJ WARSTWIE SMARUJĄCEJ**

6/1983

g. 269

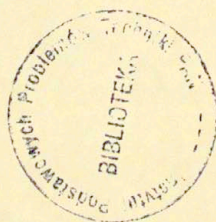


WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5698

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 stycznia 1983 r.

57030



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark.druk. 1,75

Oddano do drukarni w lutym 1983 r.

Nr zamówienia 163/o/83 M-13

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Hienryszław Gosiewski
Pracownia Fizyki Polimerów
IzPT PAN, Warszawa

PRZEPŁYW LEPKOSPĘŻYSTEJ CIECZY PROSTEJ
W CIENKIEJ WARSTWIE SMARUJĄCEJ

1. WSTĘP

W pracy rozpatrujemy przepływ cieczy lepkospężystej w szczelinie pomiędzy płaszczyzną i nieskończoną powierzchnią płaską nierównoległą do płaszczyzny.

Pomiędzy tymi powierzchniami, które poruszają się względem siebie ze stałą prędkością, jest ciecz lepkospężysta, której własności reologiczne można opisać funkcjonalnym równaniem konstytutywnym nieściśliwej cieczy prostej. Zastosowanie tak ogólnego modelu reologicznego staje się możliwe po wykazaniu, że przepływ cieczy w warstwie jest, przynajmniej w konsekwentnym przybliżeniu, przepływem wiskozymetrycznym i wówczas własności reologiczne cieczy są opisywane przez trzy funkcje wiskozymetryczne.

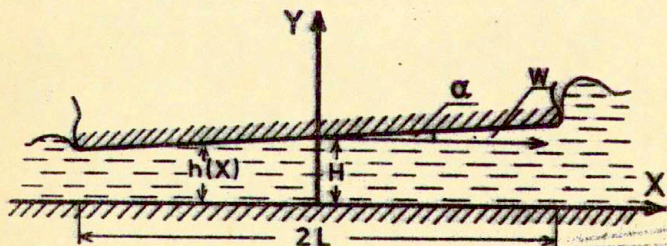
Rozwiązania równań ruchu uzyskane rekurencyjną metodą perturbacyjną zależą od parametru, który jest kombinacją funkcji materiałowych i parametrów geometrycznych. Zastosowana metoda rozwiązania wprowadza pewne ograniczenia na własności cieczy, dla których może być zastosowana. Ograniczenia te nie dotyczą szybkości ścinania i w tym sensie mają charakter ogólny. W praktycznych zastosowaniach często istotna jest możliwość opisu przepływu cieczy lepkospężystej w warstwie smarującej dla dużych szybkości ścinania, dla których wiele modeli

szczegółowych (np. model cieczy Reintera-Rivlina), będących przybliżeniem ogólnego modelu cieczy prostej, nie stosuje się.

W pracy przedyskutowano ponadto wpływ warunków brzegowych dla naprężeń na końcach szczeliny na siłę nośną warstwy smarującej. Ten ostatni problem został potraktowany tylko parametrycznie, a jego związek z własnościami reologicznymi cieczy wymaga dalszych szczegółowych badań.

Ogólny sposób postępowania przedstawiony w pracy pozwala porównać otrzymane wyniki z rezultatami innych autorów [1,2], otrzymanymi dla modeli szczegółowych, w tym z wynikami tzw. teorii smarowania dla cieczy Newtona, por. [3].

2. GEOMETRIA WARSTWY I KINEMATYKA PRZEPŁYWU CIECZY W WARSTWIE



Rys. 1.
 $h(X) = H + h'X$, $h' = \operatorname{tg} \alpha$, α - kąt nachylenia

W ramach przedstawionej na rysunku geometrii interesujemy się przypadkiem, gdy stosunek charakterystycznego wymiaru opisującego grubość warstwy H do charakterystycznego wymiaru opisującego jej długość L jest wielkością znacznie mniejszą od 1.

$$\varepsilon_t = \frac{H}{L}, \quad \varepsilon_t \ll 1 \quad (2.1)$$

$\text{tg } \alpha$ jest w sposób naturalny ograniczony przez parametr ε_t , a mianowicie

$$\text{tg } \alpha < \varepsilon_t. \quad (2.2)$$

Główna powierzchnia porusza się ze stałą prędkością W w kierunku równoległym do powierzchni dolnej. Przyjęte założenia geometryczne i kinematyczne sugerują, że pole prędkości cieczy w warstwie będzie zbliżone do pola prędkości jakie miało-
by miejsce w przypadku $\varepsilon_t = 0$. Z powodów, o których mowa powyżej postulujemy, że pole prędkości można przedstawić w postaci:

$$\underline{v}^t = \underline{v}^o + \underline{v}^s, \text{ gdzie} \quad (2.3)$$

$$[\underline{v}^o] = v \left[\frac{Y}{H}, 0, 0 \right], [\underline{v}^t] = [u^t, v^t, 0]$$

gdzie \underline{v}^o jest polem prędkości dla prostego ścinania, zaś \underline{v}^s zaburzeniem przepływu prostego ścinania, $[\underline{v}^t]$ oznacza reprezentację pola prędkości. Zakładamy^{a)}, że pomiędzy \underline{v}^o i \underline{v}^s zachodzi związek:

$$\|\text{grad } \underline{v}^s\| \ll \|\text{grad } \underline{v}^o\|, \quad (2.4)$$

gdzie $\|\underline{A}\|$ oznacza normę tensora \underline{A} zdefiniowaną przez

$$\|\underline{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\underline{A}^T \underline{A})}, \text{ gdzie} \quad (2.5)$$

$$\text{tr}(\underline{A}^T \underline{A}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 A_{ji} A_{ij},$$

A_{ij} są składowymi tensora \underline{A} w układzie współrzędnych XYZ.

^{a)} Analogiczne założenie zrobił O. Weir w pracy [4], w której badał przepływ cieczy lepkosprężystej wokół obracającej się kuli. W sformułowaniu analizowanym w pracy [4] nałożony przepływ nie jest wiskozymetryczny, zatem dalsza analiza jest odmienna od naszej.

Równanie ciągłości dla cieczy nieściśliwej o kinematyce określonej przez (2.3) ma postać

$$\operatorname{div} \underline{v}^t = \operatorname{div} \underline{v}^s = 0 \quad (2.6)$$

Wprowadzamy bezwymiarowe współrzędne i bezwymiarowe pola prędkości

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{L}, & y &= \frac{Y}{H} \\ \underline{v}^t &= \frac{\underline{v}^t}{W}, & \underline{v}^s &= \frac{\underline{v}^s}{W} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pole prędkości \underline{v}^s możemy ponadto przedstawić w postaci

$$[\underline{v}^s] = [\bar{U} \bar{u}^s, \bar{V} \bar{v}^s] \quad (2.8)$$

gdzie \bar{U} , \bar{V} są charakterystycznymi prędkościami dla pola prędkości \underline{v}^s w kierunku ruchu powierzchni górnej i w kierunku prostopadłym, odpowiednio.

Na podstawie (2.7) i (2.8) równanie ciągłości (2.6) możemy zapisać w postaci

$$\varepsilon_t \bar{u}_{,x}^s + \varepsilon_{k_t} \bar{v}_{,y}^s = 0 \quad (2.9)$$

gdzie $\varepsilon_{k_t} = \frac{\bar{V}}{\bar{U}}$.

Jeśli założymy, że $\bar{u}_{,x}^s$ i $\bar{v}_{,y}^s$ są wielkościami tego samego rzędu, to wobec (2.9), otrzymujemy

$$O(\varepsilon_{k_t}) = O(\varepsilon_t), \quad (2.10)$$

gdzie $O(\varepsilon_t)$ oznacza rząd parametru ε_t .

Z nierówności (2.4) otrzymujemy:

$$\varepsilon_K \ll 1, \quad (2.11)$$

gdzie $\varepsilon_K = \frac{W}{V}$.

Bezwymiarowa reprezentacja pola przepływu prostego ściana ma postać

$$\left[\frac{v^0}{W} \right] = [y, 0, 0]. \quad (2.12)$$

Przez ε_1 będziemy oznaczali którykolwiek z parametrów ε_K , ε_{K_1} lub ε_{K_2} . Dotychczasowe rozważania możemy sprowadzić do wniosku, że $\varepsilon_1 \ll 1$. Bezwymiarowe składowe pola prędkości możemy obecnie zapisać w postaci

$$\underline{v}^t = \underline{v}^0 + \underline{v}^s, \quad \text{gdzie} \quad (2.13)$$

$$[\underline{v}^0] = [y, 0, 0]$$

$$[\underline{v}^s] = \varepsilon_K [\bar{u}^s, \varepsilon_{K_1} \bar{v}^s, 0] = [u^s, \varepsilon_{K_1} v^s, 0]$$

gdzie $u^s = \varepsilon_K \bar{u}^s$, $v^s = \varepsilon_{K_1} \bar{v}^s$ i $O(u^s) = O(\varepsilon_K)$.

Z definicji przepływu wiazosymetrycznego, por.[5], wynika, że na to aby wykazać, że jakiś przepływ jest wiazosymetryczny potrzeba i wystarcza pokazać, że różne od zera są tylko dwa tensory kinematyczne Rivlina-Ericksena i że wyrażają się w jednoznaczny sposób przez jeden tensor parametryczny. Do wyliczenia tensorów kinematycznych R-E, z ogólnej postaci pola prędkości, posłużymy się znanymi, por.[5], wzorami rekurencyjnymi

$$A_1 = (\underline{k} + \underline{L}^T)$$

(2.14)

$$A_{n+1} = \dot{A}_n + A_n \underline{L} + \underline{L}^T A_n$$

gdzie $\underline{L} = \nabla \underline{v}^T$, ∇ jest operatorem różniczkowym "nabla" i \underline{v}^T oznacza tensor gradientu pola prędkości, zaś "·" oznacza pochodną substancjalną po czasie.

Na podstawie (2.12) otrzymamy

$$\underline{L} = \alpha_0 (\underline{L}_1 + \underline{L}_1 + \underline{L}_2), \quad (2.15)$$

gdzie $\alpha_0 = \frac{W}{H}$, zaś tensory \underline{L}_1 , \underline{L}_1 , \underline{L}_2 mają reprezentacje:

$$[\underline{L}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1+\alpha_0 u_{,y}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{L}_1] = \begin{bmatrix} \varepsilon_t u_{,x}^s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_k v_{,y}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{L}_2] = \varepsilon_t \varepsilon_k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_{,x}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Z postaci reprezentacji tensorów \underline{L}_1 , \underline{L}_1 , \underline{L}_2 widać, że liniowa część tensora \underline{L} , tzn. tensor \underline{L}_1 , opisuje przepływ wiskozymetryczny. Następnymi przybliżeniami są odpowiednio nałożony dodatkowy przepływ rozciągający i ścinający, których normy są rzędu $\varepsilon_1 \varepsilon_j$ i $\varepsilon_1 \varepsilon_j \varepsilon_1$, odpowiednio.

Jawna postać reprezentacji pełnego tensora \underline{L} wkasuje

Kierunek ewentualnego dalszego przybliżenia rozwiązań problemu na tym etapie.

Na podstawie (2.13), (2.14) i (2.15) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\underline{A}_1)_1 &= \underline{L}_1 + \underline{L}_1^{\text{II}} , \\ (\underline{A}_2)_1 &= 2\kappa_0^2 (\underline{L}_1^{\text{II}} \underline{L}_1)_1 , \\ (\underline{A}_n)_1 &= 0 \text{ dla } n > 3 , \end{aligned} \quad (2.16)$$

gdzie $(\underline{A}_n)_1$ oznacza slinearyzowaną względem ϵ_1 część tensora \underline{A}_n .

Wyniki linearyzacji tensorów kinematycznych R - E dane przez (2.16) oraz możliwość przedstawienia ich przez tensor \underline{L}_1 uzasadniają tezę o wiskozymetrycznym, w przybliżeniu, charakterze przepływu cieczy w warstwie. Szybkość ścinania rozważanego przepływu wiskozymetrycznego ma postać:

$$\kappa^t = \kappa^0 (1 + u_{,y}^s) = \kappa^0 + \kappa^s \quad (2.17)$$

gdzie $0(u_{,y}^s) = 0(\epsilon_R \bar{u}_{,y}^s) = 0(\epsilon_R)$, $\kappa^s = \kappa_0 u_{,y}^s$

3. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE I RÓWNANIA ZACHOWANIA PĘDU

Stan naprężenia w nieściśliwej cieczy prostej opisywany jest przez funkcjonalne równanie konstytutywne

$$\underline{T} = -P \underline{I} + \mathcal{F} \left[\underline{C}_t^t(s) \right] \quad (3.1)$$

gdzie P jest ciśnieniem, \underline{I} tensorem jednostkowym, \mathcal{F} funkcjonałem,

zaś $\underline{C}_t^t(s)$ jest historią prawego względnego tensora deformacji Cauchy-Green'a, por. np. [5].

Część wiskosymetryczna rozpatrywanego przepływu opisywana jest przez zlinearyzowane tensory kinematyczne R-E (2.15). Historia deformacji przybiera w tym przypadku postać

$$(\underline{C}_t^t(s))_1 = \underline{1} - (\underline{A}_1)_1 s + \frac{1}{2} (\underline{A}_2)_1 s^2 \quad (3.2)$$

Na podstawie (3.1) i (3.2) równanie konstytutywne nieściśliwej cieczy prostej w warstwie smarującej możemy zapisać w postaci:

$$\underline{T}_E = \underline{T} + P \underline{I} = \underline{g}[(\underline{A}_1)_1, (\underline{A}_2)_1] = \underline{T}_E(\kappa^t), \quad (3.3)$$

gdzie nieszerowe składowe tensora naprężeń wyrażają się przez funkcje wiskosymetryczne $\sigma_1(\kappa^t)$, $\sigma_2(\kappa^t)$ i $\tau(\kappa^t)$, por. np. [5], wzorami

$$\begin{aligned} T_E^{11} &= \frac{1}{3} (2\sigma_1^t - \sigma_2^t), \\ T_E^{22} &= \frac{1}{3} (2\sigma_2^t - \sigma_1^t), \\ T_E^{33} &= -\frac{1}{3} (\sigma_1^t + \sigma_2^t), \\ T_E^{12} &= T_E^{21} = T_E^{21} = \tau^t, \quad \text{gdzie } \sigma_1^t = \sigma_1(\kappa^t) \text{ itd.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ponieważ $\kappa^t = \kappa^0 + \kappa^s$ i $\kappa^s \ll \kappa^0$ funkcje wiskosymetryczne przedstawimy w postaci przybliżonej:

$$\begin{aligned} \sigma_1^t &= \sigma_1^0 + \sigma_1^s \kappa^s, \\ \sigma_2^t &= \sigma_2^0 + \sigma_2^s \kappa^s, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\tau^t = \tau^0 + \tau^i \kappa^0,$$

gdzie $\sigma_1^0 = \sigma_1(x_0)$, $\sigma_1^i = \left. \frac{d\sigma_1^t}{dx^t} \right|_{x^t=x_0}$ itd.

W ten sposób stan naprężenia opisywany jest przez sześć funkcji materiałowych zależnych od κ^0 , która jest stałą w szczelinie oraz przez κ^0 , która jest funkcją zmiennych przestrzennych x i y .

Równania zachowania pędu dla (3.4) z uwzględnieniem (3.5) mają postać

$$\begin{aligned} -P_{,X} + \frac{1}{3}(2\sigma_1^i - \sigma_2^i) \kappa_{,X}^0 + \tau^i \kappa_{,Y}^0 &= \rho a_1, \\ -P_{,Y} + \frac{1}{3}(2\sigma_2^i - \sigma_1^i) \kappa_{,Y}^0 + \tau^i \kappa_{,X}^0 &= \rho a_2, \\ +P_{,Z} &= -\frac{1}{3}(\sigma_1^i + \sigma_2^i) \kappa_{,Z}^0 = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie a_1 , a_2 są składowymi pola przyspieszenia

$$\begin{aligned} a_1 &= (U^t \frac{\partial}{\partial X} + V^t \frac{\partial}{\partial Y}) U^t \\ a_2 &= (U^t \frac{\partial}{\partial X} + V^t \frac{\partial}{\partial Y}) V^t \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wyrażenia na składowe przyspieszenia możemy zapisać przez bezwymiarowe składowe pola prędkości i pochodne po bezwymiarowych zmiennych w postaci:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{V^2}{H} [\xi_{t,yu,x} + \xi_{k,v} + (\xi_{t,uu,x} + \xi_{k,vu,y})], \\ a_2 &= \frac{V^2}{H} \xi_{k,v} [\xi_{t,yv,x} + \xi_{t,uv,x} + \xi_{k,vv,y}]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Równania zachowania pędu (3.6) w postaci bezwymiarowej są następujące

$$-\varepsilon_t p_{,x} + \varepsilon_t \alpha_1 u_{,xy}^s + u_{,yy}^s = Re^b [\varepsilon_t \gamma u_{,x} + \varepsilon_k v + \varepsilon_t \mu u_{,x} + \varepsilon_k \nu u_{,y}] , \quad (3.9)$$

$$-p_{,y} + \alpha_2 u_{,yy}^s + \varepsilon_t u_{,y}^s = Re^b \varepsilon_k [\varepsilon_t \gamma v_{,x} + \varepsilon_t \mu v_{,x} + \varepsilon_k \nu v_{,y}] ,$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{1}{3} \frac{2\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\tau'}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3} \frac{2\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\tau'}$, $p = \frac{P}{\kappa_0 \tau'}$,

$$Re^b = \frac{QWH}{\tau'}$$
 .

Jeśli uwzględnimy rząd wielkości występujących po prawej stronie równań (3.9), to dla przepływów charakteryzujących się liczbą Reynolds'a $Re^b \ll 1$ równania (3.9) możemy przybliżyć równaniami:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_t p_{,x} + \varepsilon_t \alpha_1 u_{,xy}^s + u_{,yy}^s &= 0 , \\ -p_{,y} + \alpha_2 u_{,yy}^s + \varepsilon_t u_{,y}^s &= 0 . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Rozszerzenie rozważań na większe liczby Reynolds'a może stanowić kierunek dalszego rozwoju analizy przepływu cieczy lepko-sprężystej w warstwie smarującej.

Eliminując z układu równań (3.10) ciśnienie otrzymujemy

$$\alpha u_{,xyy}^s + u_{,yyy}^s + \varepsilon_t^2 u_{,xxy}^s = 0 , \quad (3.11)$$

gdzie $\alpha = \varepsilon_t \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\tau'}$.

Równanie (3.11) uprościmy pomijając w nim człon proporcjonalny

do ε_t^2 i otrzymujemy

$$\alpha u_{,xyy}^{\alpha} + u_{,yyy}^{\alpha} = 0 \quad (3.12)$$

Równanie (3.12) stanowi podstawowy wynik dotychczasowych rozwiązań i stanowi podstawę do uzyskania rozwiązania dla rozkładu pola prędkości cieczy w warstwie.

Możliwość uzyskania rozwiązania równania (3.12) wiąże się z wartością parametru α , która wynika z geometrii warstwy poprzez parametr ξ , oraz z własności reologicznych cieczy przez czynnik $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\tau}$.

W dalszej części pracy uzyskaliśmy rozwiązania dla parametru α spełniającego nierówność

$$\alpha < 1 \quad (3.13)$$

Dla potwierdzenia zasadności założenia dotyczącego parametru α wyliczymy jego wartość na podstawie wyników pomiarów wiskosymetrycznych dla 1% roztworu poliizobutyleny w dekalinie [6]. Wyniki doświadczalne, mogą być na podstawie wykresów, przedstawione w postaci

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_1 - \sigma_2) &= \frac{43}{53} \ln \kappa - 1 \frac{136}{319} \\ \ln \tau &= \frac{2}{3} \ln \kappa - \frac{19}{29} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Parametr α obliczony dla tych wyników doświadczalnych dla $\varepsilon_t = 10^{-3}$ przybiera wartość dla $\kappa = 10^3$

$$\alpha = \varepsilon_t \frac{\sigma_1' - \sigma_2'}{\tau'} = 10^{-3} \frac{43 \cdot 31}{49} \approx 27.2 \cdot 10^{-3} \quad (3.15)$$

Jak wynika z (3.15) parametr α przybiera wartość, dla tego konkretnego materiału, rzędu 10^{-2} i jest znacznie mniejszy od 1, spełniając tym samym nierówność (3.13).

Ponieważ wyniki pomiarów wiskozymetrycznych są najczęściej przedstawiane w skali podwójnie logarytmicznej, pokażemy jak parametr α wyraża się przez parametry linearyzujące lokalnie wyniki doświadczalne

$$\log(\sigma_1 - \sigma_2) = a \log \kappa + b \quad , \quad (3.16)$$

$$\log \tau = c \log \kappa + d \quad ,$$

gdzie wartości liczbowe a, b, c , i d odczytujemy z wykresu przedstawiającego wyniki pomiarów dla pewnego otoczenia interesującej nas wartości szybkości ścinania κ_0 . Na podstawie (3.16) otrzymujemy

$$\alpha|_{\kappa=\kappa_0} = \varepsilon_t \frac{\sigma_1' - \sigma_2'}{\tau'} = \varepsilon_t \frac{a}{c} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{\tau} = \varepsilon_t 10^{b-d} \kappa_0^{a-c} \cdot \frac{a}{c} \quad (3.17)$$

Wzór na α przedstawia się szczególnie prosto, jeśli krzywe opisujące naprężenia normalne i ścinające są równoległe, wówczas otrzymujemy

$$\alpha = \varepsilon_t \cdot 10^{b-d} \quad . \quad (3.18)$$

Brak pełnych danych doświadczalnych utrudnia omówienie

sytuacji, dla których nierówność (3.13) dla parametru α jest spełniona, natomiast jak wynika z danych opublikowanych w pracy [6] dla olei maszynowych stosunek $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\tau}$ jest nie większy niż 0,36, co wobec (3.17) potwierdza istnienie szerokiej klasy problemów smarowania, dla których nierówność (3.13) jest spełniona.

4. ROZKŁAD PRĘDKOŚCI CIĘCZY W WARSTWIE

Prędkość całkowita cieczy w warstwie opisywana jest przez \underline{v}^t i dla niej są określone kinematyczne warunki brzegowe

$$\underline{v}^t \Big|_{Y=0} = [0, 0, 0] \quad (4.1)$$

$$\underline{v}^t \Big|_{Y=h(X)} = [W, 0, 0]$$

Ponieważ pole prędkości składa się z sumy zastopulowanego przepływu prostego ścinania i przepływu dodatkowego \underline{v}^s , zatem z warunków brzegowych (4.1) dla \underline{v}^t wynikają jednoznacznie warunki brzegowe dla \underline{v}^s .

Z (4.1) i (2.13) otrzymujemy warunki brzegowe dla funkcji u^s , która jest funkcją bezwymiarowych zmiennych x i y

$$u^s \Big|_{y=0} = 0, \quad (4.2)$$

$$u^s \Big|_{y=1+\varepsilon x} = -\varepsilon x,$$

gdzie $\varepsilon = \frac{h'}{\varepsilon_t}$, gdyż $\frac{h(X)}{H} = 1 + h' \frac{X}{H} = 1 + \frac{h'L}{H} \frac{X}{L} = 1 + \varepsilon x$

Pole prędkości dodatkowej powinno spełniać równanie ciągłości (2.9), które zastąpimy równaniem stałości wydatku przepływu w kierunku Ox .

$$\int_0^{h(X)} w^t dy = HWQ, \quad (4.3)$$

gdzie $\frac{dQ}{dx} = 0$.

Warunek (4.3) zapisany dla funkcji u^s przybiera postać:

$$\int_0^{1+\varepsilon x} u^s dy = Q - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon x)^2 \quad (4.4)$$

Rozkład prędkości dodatkowej powinien spełniać równanie (3.12) oraz warunki (4.2) i (4.4). Własności reologiczne cieczy opisywane są przez parametr bezwymiarowy α , o którym zakładamy, że spełnia nierówność (3.13).

Rozwiązania równania (3.12) spełniającego warunki (4.2) i (4.4) będziemy poszukiwali w postaci szeregu funkcyjnego

$$u^s = u_1^s + \alpha u_2^s + \alpha^2 u_3^s + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} u_n^s \quad (4.5)$$

Kładąc (4.5) w (3.12) i przyrównując do zera wyrażenia przy wszystkich potęgach parametru α otrzymujemy nieskończony układ równań dla nieskończonego ciągu funkcji u_n^s opisującego rozwiązanie naszego problemu

$$\begin{aligned} u_{1,yyy}^s &= 0 \\ u_{2,yyy}^s &= -u_{1,xyy}^s \\ u_{n,yyy}^s &= -u_{n-1,xyy}^s \end{aligned} \quad (4.6)$$

Układ równań różniczkowych cząstkowych (4.6) jest układem rekurencyjnym równań trzeciego rzędu i wymaga odpowiedniej ilości warunków brzegowych.

Warunki brzegowe (4.2) na funkcję u^n w postaci (4.5) nie zależą od parametru materiałowego α , a zatem powinny być spełnione przez u_1^n . u_n^n dla $n \geq 2$ powinny zatem spełniać zerowe warunki brzegowe

$$u_n^n \Big|_{y=0} = u_n^n \Big|_{y=1+\epsilon x} = 0 \quad (4.7)$$

Inaczej jest z wydatkiem przepływu Q , który zależy od geometrii przepływu oraz od własności reologicznych cieczy, co uzasadnia przedstawienie wydatku w postaci szeregu potęgowego od parametru α

$$Q = Q_1 + \alpha Q_2 + \alpha^2 Q_3 + \dots \quad (4.8)$$

Otrzymujemy w ten sposób zamiast warunku (4.4) dla funkcji u^B ciąg warunków w postaci

$$\int_0^{1+\epsilon x} u_1^B dy = Q - \frac{1}{2}(1 + \epsilon x)^2, \quad (4.9)$$

$$\int_0^{1+\epsilon x} u_n^B dy = Q_n, \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Całkując równanie (4.6)₁ otrzymujemy

$$u_1^B = \frac{1}{2} \varphi_1(x) y^2 + \varphi_2(x) y + \varphi_3(x) \quad (4.10)$$

Funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$ wyznaczamy z warunków brzegowych (4.2) oraz warunku na stałość wydatku w postaci (4.9). Wykorzystując warunki, o których mowa powyżej, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 6(1 + \varepsilon x)^{-2} - 12Q_1(1 + \varepsilon x)^{-3}, \\ \varphi_2(x) &= -1 - 2(1 + \varepsilon x)^{-1} + 6Q_1(1 + \varepsilon x)^{-2}, \\ \varphi_3(x) &= 0.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Kładąc (4.11) w (4.10) otrzymujemy

$$u_1^s = 3s^2 - 2s - \frac{6Q_1}{(1 + \varepsilon x)} (s^2 - s) - s(1 + \varepsilon x), \quad (4.12)$$

gdzie $s = \frac{y}{1 + \varepsilon x}$.

Całkowite bezwymiarowe pole prędkości w tym przybliżeniu wobec (2.13) i (4.12) ma postać

$$u_1^t = 3s^2 - 2s - \frac{6Q_1}{(1 + \varepsilon x)} (s^2 - s), \quad (4.13)$$

gdzie $u_1^t = y + u_1^s$.

Odnajdujemy, że pole prędkości u_1^t odpowiada przepływowi cieczy, która nie wykazuje efektów naprężeń normalnych ($\alpha = 0$), a w szczególności przepływowi nieściśliwej cieczy lepkiej Newtona, por. [3].

Uwzględniając (4.10) równanie (4.6)₂ przybiera postać:

$$u_{2,yyy}^s = -\varphi_1^t(x) \quad (4.14)$$

gdzie $'$ oznacza pochodną funkcji φ_1 po zmiennej x .

Całkując (4.14) otrzymamy

$$u_2^s = -\frac{1}{6}\varphi_1^s(x)y^3 + \frac{1}{2}\varphi_4(x)y^2 + \varphi_5(x)y + \varphi_6(x). \quad (4.15)$$

Do wyznaczenia funkcji $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$ i $\varphi_6(x)$ posłużymy się równaniami (4.7) i (4.9)₂ i otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varphi_4(x) &= -6\varepsilon(1 + \varepsilon x)^{-2} + (18\varepsilon Q_1 - 12Q_2)(1 + \varepsilon x)^{-3}, \\ \varphi_5(x) &= \varepsilon(1 + \varepsilon x)^{-1} - (12\varepsilon Q_1 - 6Q_2)(1 + \varepsilon x)^{-2}, \\ \varphi_6(x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Funkcję u_2^s w postaci (4.15) po uwzględnieniu (4.16) możemy wyrazić w jawnej postaci z dokładnością do stałych Q_1 i Q_2 :

$$u_2^s = \varepsilon\left(1 - \frac{3Q_1}{1 + \varepsilon x}\right)(2s^3 - 3s^2 + s) + \frac{6Q_2}{1 + \varepsilon x}(s - s^2). \quad (4.17)$$

Zaproponowana w niniejszej pracy procedura znajdowania pola prędkości może być w zasadzie kontynuowana z dowolną dokładnością, przy czym z uwagi na fakt, że w naszych rozważaniach pomijamy składową prędkości v^s , która spełnia warunek $O(v^s) = O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$ racjonalne jest poszukiwanie rozwiązania spełniającego warunek

$$\alpha^n \tilde{u}_{n+1}^s > v^s. \quad (4.18)$$

Dla przypadku, który prowadzi do wartości parametru α danego wzorem (3.15) uwzględnienie w rozwiązaniu równania (3.12) w postaci (4.5) całkowanie spełnia żądanie wymaganej dokładności.

Wyznaczeniem stałych Q_1 i Q_2 zajmujemy się w następnym rozdziale, w którym rozważamy rozkład naprężeń w warstwie.

5. ROZKŁAD NACISKU CIECZY NA PODKOŁE - SIŁA NOŚNA WARSTWY SMARUJĄCEJ

Rozpatrzmy ponownie równanie zachowania pędu bez sił inercji

$$\begin{aligned}T_E^{11}, X + T_E^{12}, Y &= P, X, \\ T_E^{22}, Y + T_E^{12}, X &= P, Y.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Wprowadźmy funkcję nacisku T wzorem

$$T = -T^{22} = P - \frac{T^{22}}{E},\tag{5.2}$$

wówczas

$$-T^{11} = T - N, \quad \text{gdzie } N = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Wykorzystując funkcje T i N równanie (5.1) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned}T, X &= N, X + T_E^{12}, Y, \\ T, Y &= T_E^{12}, X.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Korzystając z przybliżonych wyrażeń dla funkcji wiskozymetrycznych (3.5) oraz przechodząc do współrzędnych bezwymiarowych otrzymamy

$$\varepsilon_t \bar{t}_{,x} = \alpha u_{,xy}^s + u_{,yy}^s, \quad (5.4)$$

$$\bar{t}_{,y} = \varepsilon_t u_{,xy}^s$$

gdzie $\bar{t} = \frac{t}{n_0 r^2}$.

Z równań (5.12) i (5.4) wynika, że w ramach przyjętych przybliżeń funkcja \bar{t} zależy tylko od zmiennej x i równanie (5.4)₂ może być zaniedbane wobec (5.4)₁.

Wprowadzimy funkcję t

$$t = \varepsilon_t (\bar{t} - \bar{t}_0) \quad (5.5)$$

gdzie $\bar{t}_0 = \bar{t}|_{\varepsilon_t=0}$ jest rozkładem nacisku dla przepływu prostego ścinania i nie zależy od współrzędnych.

Z powyższych faktów wynika, że bezwymiarowy rozkład nacisków t jest opisywany równaniem różniczkowym (5.4)₁ z uwzględnieniem (5.5), a mianowicie

$$t'(x) = \alpha u_{,xy}^s + u_{,yy}^s \quad (5.6)$$

Funkcja $t(x)$ zależy, podobnie jak funkcja u^s , od parametru α i rozwiązania równania (5.6) będziemy poszukiwali w postaci

$$t = t_1(x) + \alpha t_2(x) + \dots \quad (5.7)$$

Wstawiając (5.7) i (4.5) w równaniu (5.6), a następnie przyrównując obustronnie wyrażenia przy tych samych potęgach α otrzymamy nieskończony ciąg równań różniczkowych

$$\begin{aligned}t_1'(x) &= u_{1,yy}^0, \\t_2'(x) &= u_{1,xy}^0 + u_{2,yy}^0, \\&\vdots \\t_n'(x) &= u_{n-1,xy}^0 + u_{n,yy}^0.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Uwzględniając (4.10), równanie (5.8)₁ przybiera postać

$$t_1'(x) = \varphi_1(x) .\tag{5.9}$$

Całkując to równanie otrzymamy

$$t_1(x) = \bar{s}_1(x) + C_1 ,$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania, zaś

$$\bar{s}_1 = \int \varphi_1(x) dx = \frac{-6}{(1+\varepsilon x)} + \frac{3 + 6Q_1}{(1+\varepsilon x)^2}$$

W ten sposób funkcja $t_1(x)$ jest wyznaczona z dokładnością do stałych C_1 i Q_1 , które wyznaczamy z warunków brzegowych

$$t_1(-1) = t_1(1) = t_1^0 ,\tag{5.10}$$

gdzie t_1^0 jest odpowiednio zmodyfikowanym bezwymiarowym ciśnieniem atmosferycznym z przeciwnym znakiem.

Z warunków brzegowych (5.10) dla rozkładu nacisku danego przez (5.9) otrzymamy

$$Q_1 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2) , \quad C_1 = \frac{3}{\varepsilon}\tag{5.11}$$

Kładąc (5.11) w (5.9) otrzymamy

$$t_1(x) = t_1^0 + 3\varepsilon \frac{x^2 - 1}{(1 + \varepsilon x)^2} \quad (5.12)$$

Rozkład nacisku $t_1(x)$, otrzymany dla $\alpha = 0$, odpowiada rozkładowi ciśnienia dla przypadku przepływu cieczy Newtona.

Z (5.12) otrzymujemy wartość zmiennej bezwymiarowej x , dla której gradient ciśnienia (nacisku) znika.

$$t_1'(x) = 0 \quad \text{dla } x = -\varepsilon \quad (5.13)$$

Bezwymiarowa grubość warstwy, dla której $t_1'(x) = 0$ wynosi

$$\frac{h(X)}{H} = 1 + \varepsilon x \Big|_{x=-\varepsilon} = 1 - \varepsilon^2, \quad (5.14)$$

co odpowiada dokładnie wynikowi klasycznemu, por. [3]*).

Wyznaczenie wartości stałej Q_1 przez parametr ε wzorem (5.11), możemy podać jawną postać rozkładu prędkości. Kładąc w (4.13) wyrażenie dla Q_1 otrzymamy dla u_1^t :

$$\begin{aligned} u_1^t &= 3s^2 - 2s - \frac{3(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon x)^2} (s^2 - s) = \\ &= 3\left(\frac{1}{h^2(X)} - \frac{\bar{h}}{h^3(X)}\right) Y^2 + \left(\frac{3\bar{h}}{h^2(X)} - \frac{2}{h(X)}\right) Y. \end{aligned} \quad (5.15)$$

*) W klasycznych rozważaniach rozkład ciśnienia opisywany jest jako funkcja $h(X)$. Jeśli przez \bar{h} oznaczymy wartość $h(X)$, dla której $\frac{\partial p}{\partial h} = 0$, otrzymujemy $\bar{h} = \frac{2h(-L)h(L)}{h(-L) + h(L)}$. Wykorzystując oznaczenia stosowane w niniejszej pracy otrzymamy $\bar{h} = H(1 - \varepsilon^2)$. Podobnie można pokazać, że otrzymaliśmy identyczny rozkład ciśnienia.

Beswymiarową siłę nośną warstwy smarującej wyliczamy z różnicy pomiędzy naciskiem wywieranym przez równomierny rozkład ciśnienia atmosferycznego i naciskiem wywieranym przez ciecz.

Dla rozkładu nacisku opisywanego przez $t_1(x)$ otrzymamy

$$f_1 = \int_{-1}^1 t_1^0 dx - \int_{-1}^1 t_1(x) dx \quad (5.16)$$

Uwzględniając (5.12) wyliczamy siłę nośną warstwy smarującej dla cieczy lepkiej

$$f_1 = \frac{3}{\varepsilon^2} (2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 4\varepsilon) = 12\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-2}}{2n+1} \quad (5.17)$$

Uwzględniając (4.10) i (4.14) równanie (5.8)₂ przyjme postać:

$$t_2^t(x) = \varphi_2^t(x) + \varphi_4(x) \quad , \quad (5.18)$$

stąd otrzymujemy

$$t_2(x) = \varphi_2(x) + \varphi_4(x) + C_2 \quad ,$$

gdzie C_2 jest stałą całkowania, zaś $\varphi_4(x) = \int \varphi_4(x) dx$.

Całkowity nacisk z uwzględnieniem odpowiedniego przybliżenia możemy zapisać w postaci:

$$t_n^t = t_1 + \varepsilon t_2 + \dots + \varepsilon^{n-1} t_n \quad (5.19)$$

Wykorzystując (5.9) i (5.18) otrzymamy

$$t_2^t = t_1 + \alpha(\varphi_2 + \varphi_4) + \bar{C}_2, \quad (5.20)$$

gdzie $\bar{C}_2 = C_1 + \alpha C_2$.

Jeśli rozkład nacisku zależy od parametru α , to warunki brzegowe również mogą zależeć od parametru α i otrzymujemy dla t_2^t :

$$t_2^t(-1) = t_1^0 + \alpha t_2^0, \quad t_2^t(1) = t_1^0 + \alpha t_2^1, \quad (5.21)$$

przy czym w odróżnieniu od warunków brzegowych dla ciśnienia $t_1(x)$, warunki brzegowe dla nacisków wywołanych przez ciecz lepkosprężystą ($\alpha \neq 0$) mogą być na obu końcach szczeliny różne. Warunki brzegowe dla t_2^t w postaci (5.21) będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $t_2(x)$ spełnia warunki brzegowe

$$t_2(-1) = t_2^0, \quad t_2(1) = t_2^1 \quad (5.22)$$

Wkładając (4.11)₂ i (4.16)₁ do (5.8) otrzymujemy z (5.22)

$$Q_2 = -\frac{1}{12} \varepsilon(1 - \varepsilon^2) + \frac{\Delta t_2^{01}(1 - \varepsilon^2)^2}{24} \quad (5.23)$$

$$C_2 = t_2^0 - 1 - \frac{\Delta t_2^{01}(1 + \varepsilon)^2}{4\varepsilon}$$

Wykorzystując (5.23) i (5.11) do wyznaczenia jawnej postaci funkcji $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ i $\varphi_4(x)$ z (5.9), (4.11)₂, (5.18) na podstawie (4.16) odpowiednio otrzymamy z (5.20)

$$\begin{aligned}
 t_2^t(x) = t_1^0 + \alpha t_2^0 + \\
 + [3\varepsilon - 2\alpha\varepsilon^2 - \alpha \frac{\Delta t_2^{01}}{4} (1 + \varepsilon)^2] \frac{x^2 - 1}{(1 + \varepsilon x)^2} - \\
 - \frac{\alpha \Delta t_2^{01} (1 + \varepsilon)^2}{2} \frac{x + 1}{(1 + \varepsilon x)^2} \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

Siła nośna wynikająca z rozkładu nacisku $t_2^t(x)$ wyraża się wzorem

$$f_2 = \int_{-1}^1 [t_1^0 - t_2^t(x)] dx \quad (5.25)$$

i wynosi

$$f_2 = f_1 + \Delta f_2 \quad (5.26)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \Delta f = \alpha \left\{ \Delta t_2^{01} - (t_2^0 + t_2^1) - \right. \\
 \left. - \left[2 + \frac{\Delta t_2^{01}}{8} (1 + \varepsilon)^2 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-2}}{2n+1} \right\} \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Ze wszystkich czynników określających wzrost siły nośnej Δf wzorem (5.27) dominujący jest czynnik $-(t_2^0 + t_2^1)$, który ma wartość dodatnią gdyż nacisk cieczy na podłoże w przyjętym układzie współrzędnych jest wielkością ujemną.

6. WNIOSKI

W wyniku analizy zagadnienia przepływu cieczy lepkościennej w otwartej szczelinie smarującej wykazaliśmy, że w przypadku cienkich szczelin możliwe jest uzyskanie analitycznego rozwiązania zarówno dla rozkładu prędkości cieczy

jak i dla rozkładu nacisków dla modelu cieczy prostej.

Z analizy wypadkowej siły nośnej cieczy lepkosprężystej wynika potrzeba dokładnego sbadania nacisków na końcach szczeliny i powiązania ich z własnościami reologicznymi cieczy.

Z uwagi na małą zmienność szybkości ścinania w szczelinie ($\kappa^s \ll \kappa^0$), istotnym dla zagadnienia jest parametr α , który określamy poprzez geometrię (f_+) oraz pochodną różnicy naprężeń normalnych względem naprężeń ścinających.

Istotną cechą prowadzonych badań jest zastosowanie ogólnego modelu reologicznego i możliwość interpretacji uzyskanych rezultatów dla dowolnych szybkości ścinania. Przedstawiona w pracy metoda rozwiązania rokuje nadzieję na pomyslnie rozwiązanie innych zagadnień przepływów cieczy lepkosprężystych w cienkich warstwach typowych dla układów smarujących.

Metoda rozwiązania zastosowana w pracy może stanowić punkt wyjścia do dalszego osłabienia założeń i uwzględnienia siły inercji lub efektów wynikających z przepływu rociągającego opisywanego przez L_1 o reprezentacji (2.15).

Dziękuję Panu Prof.dr S.Zahorskiemu za dyskusję pomocną przy opracowaniu niniejszej pracy.

Literatura

1. K.Walters, Polymers as additives in lubricating oils. Colloques Internationaux du C.E.R.S. Nr 233 - Polymers et lubrification, 1976.
2. A.Harnoy, Stress relaxation effect in elasto-viscous lubricants in gears and rollers. J.Fluid Mech.(1976); vol.76, part 3, pp.501-517.
3. A.Cameron, Basic lubrication theory. Ellis Horwood Limited 1976.
4. O.Wein, Rotational quasi-viscometric flows around a rotating sphere. IUTAM Symposium on Non-Newtonian Fluid Mechanics 1978.
5. S.Zaborski, Mechanics of viscoelastic fluids. PWN - Warszawa 1982.
6. J.P.Hutton, Recent advances in lubricant rheology. 7th International Congress on Rheology 1976.