

3.31 — falowody, warunki impedancyjne

Maciej Sowiński

FUNKCJA GREENA
DLA DIELEKTRYCZNEGO FALOWODU
WYPEŁNIONEGO
OŚRODKIEM DYSPERSYJNYM

8/1983

P-269



WARSZAWA 1983

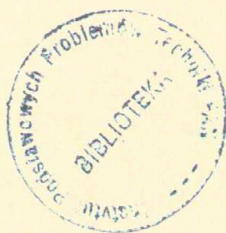
ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 197

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 grudnia 1982 r.

57029



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 1. Ark. druk. 1,75..

Oddano do drukarni w marcu 1983 r.

Nr zamówienia 190/83 M-13.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

Maciej Sowiński
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych
IPPT PAN

FUNKCJA GREENA DLA DIELEKTRYCZNEGO FALOWODU WYPEŁNIONEGO OŚRODKIEM DISPERSYJNYM

1. Streszczenie

Pole elektromagnetyczne pochodzące od liniowego prądu o dowolnej zależności czasowej jest rozpatrzone dla modelu falowodu płaskiego utworzonego z trzech warstw jednorodnych i izotropowych ośrodków dyspersyjnych, przy czym dla warstw zewnętrznych, w pobliżu warstwy środkowej, zakłada się brak pola odbitego od granic struktury. Jako przypadek szczególny możliwe jest zastąpienie zewnętrznych warstw przez powierzchnie admitancyjne, bądź przez idealne przewodniki.

Dla opisanego modelu wprowadzono wektorowe funkcje Greena, a następnie, w oparciu o teorię wektorów Hertza, skalarną funkcję Greena. Posługując się transformacjami Fouriera, zagadnienie poszukiwania skalarnej funkcji Greena sprowadzono do zagadnienia poszukiwania rozwiązania jednowymiarowego równania Helmholtza, dla którego sformułowano warunki graniczne, spełniane przez częściową transformatę Fouriera skalarnej funkcji Greena w punktach styczności warstw. Równanie to rozwiązano w oparciu o metodę podaną przez Felsena i Marcuvitza w [2] i zastosowaną w pracy [5], otrzymując ściśle wyrażenie na skalarną funkcję Greena w postaci podwójnej całki czasowo-przestrzennej. Pokazano możliwości dalszego wykorzystania otrzymanego wyrażenia całkowego prowadzące do rozważań nad modami przestrzenno-czasowymi i czasowo-przestrzennymi, oraz możliwość zastosowania opisanego postępowania dla innych, niż prąd liniowy, pobudzeń rozważanego falowodu.

2. Wstęp

Od kilku dziesięcioleci trwają już badania nad różnymi, szczególnie określanymi modelami struktur, na przykładzie których badane jest zjawisko rozchodzenia się fal radiowych w atmosferze Ziemi na bardzo duże odległości. Pierwszy etap tych badań zakończył się wkrótce po opublikowaniu przez A. Sommerfelda fundamentalnej w tym temacie pracy [7]. Stwierdzono, że w oparciu o model dwuwarstwowy - stratna powierzchnia Ziemi i atmosfera - nie można wyjaśnić doświadczalnie obserwowanych zjawisk. W drugim etapie badań oparto się na modelu trójwarstwowym, zakładającym istnienie pewnej powierzchni odbijającej w górnych warstwach atmosfery. Jako model matematyczny przyjmowano na przykład falowód płaski o ściankach impedancyjnych, to jest powierzchniach, na których propagujące się w środkowej warstwie pole elektromagnetyczne spełnia tak zwane warunki Leontowicza. Tego typu podejście możemy znaleźć w pracy [8]. Jakkolwiek w oparciu o ten model można wyjaśnić jakościowo samo zjawisko rozchodzenia się fal na bardzo duże odległości, sam model nie jest zgodny z dzisiejszym stanem wiedzy o budowie atmosfery Ziemskiej i budzi poważne wątpliwości. Znacznie bardziej przekonujące, są rozważania nad modelem zakładającym istnienie w atmosferze dwu warstw dielektrycznych o różnych stałych materiałowych ϵ , μ , δ , które możemy znaleźć w pracy [6]. Wspomniane prace nie biorą jednak pod uwagę jednego ważnego faktu, a mianowicie tego, że górne warstwy atmosfery Ziemskiej są silnie zjonizowane, skąd otrzymały nazwę jonosfery i w rzeczywistości mamy tu do czynienia z ośrodkiem zwanym plazmą a nie z klasycznymi warstwami dielektryków. Opis propagacji w plazmie jonosferycznej możemy znaleźć na przykład w [4], gdzie autor opisuje właściwości poszczególnych jonosferycznych warstw i porównuje teoretyczne opisy plazmy z danymi doświadczalnymi. Jedną z najbardziej charakterystycznych właściwości ośrodka określanego jako plazma jest silna dyspersja ^{czasowa} czyli zmienność parametrów ośrodka w zależności od propagowanej częstotliwości fal radiowych. Powoduje to niemożność badania rozchodzenia się w jonosferze zaburzeń, o innej niż harmoniczna, zależności czasowej, bez uwzględnienia wspomnianej dyspersji ośrodka, a jak

wiadomo, w praktyce mamy do czynienia z falami, które nigdy nie są ściśle harmoniczne z powodu stosowania modulacji.

Celem tej pracy, jest znalezienie opisu pola elektromagnetycznego w strukturze trójwarstwowej, w takiej formie aby zjawisko dyspersji było automatycznie i w sposób ścisły wbudowane w ten opis. Dopiero na następnym etapie badań przewiduje się robienie pewnych uproszczeń modelu w zależności od celów jakim mają one służyć.

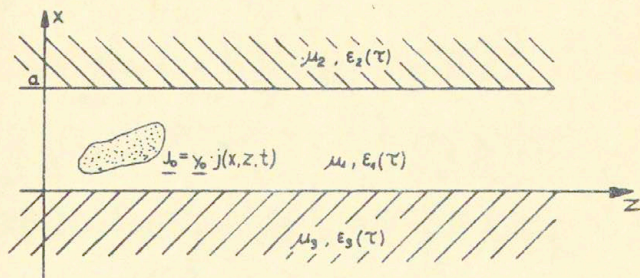
Metoda znalezienia takiego opisu oparta została na metodach i pomysłach zawartych w [1], [2], [3] i [5], oraz na własnych przemyśleniach autora. Jej zaletą jest duża ogólność, jak również możliwość stosowania jej do dowolnych pobudzeń, a nie tylko do liniowego prądu, rozważonego w niniejszej pracy.

W dalszym etapie, przewiduje się przeprowadzenie szczegółowych analiz propagacji w opisanej strukturze, szczególnie w oparciu o metodę hybrydową zawartą w pracy [5].

3. Określenie funkcji Greena.

3.1. Postawienie zagadnienia

Problem, który doprowadzi nas do zagadnienia poszukiwania funkcji Greena formuluje się następująco: Pomiędzy dwiema równoległymi płaszczyznami znajduje się dyspersyjny, jednorodny i izotropowy ośrodek opisany stałymi μ_1 , $\epsilon_1(\tau)$, rys.1.



Rys. 1

Ośrodki nad płaszczyzną $x = a$ i pod płaszczyzną $x = 0$ są bądź tego samego typu co dyspersyjny ośrodek wypełniający falowód ale o innych stałych materiałowych, bądź są zbudowane w ten sposób /stratny metal, metal z napyłoną warstwą dielektryka/, że na płaszczyznach $x = a$ i $x = 0$ można dla harmonicznych pól elektromagnetycznych zastosować warunki Leontowicza, por. [1] w których impedancje powierzchniowe będą niezależne od zmiennych przestrzennych. Poszukujemy pola elektromagnetycznego w falowodzie, które wzbudzone jest przez prąd zewnętrzny $\underline{J}_0 = \underline{y}_0 j(x,z,t)$ skierowany wzdłuż osi y , rys. 1

Problem poszukiwania takiego pola jest problemem przestrzennie płaskim i sprowadza się do poszukiwania dwóch wektorowych funkcji Greena, por. [2];

$$(1) \quad \underline{D}(x,z,t) = \iiint_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{G}_D(x,x',z,z',t,t') \cdot j(x',z',t') dx'dz'dt'$$

$$(2) \quad \underline{H}(x,z,t) = \iiint_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{G}_H(x,x',z,z',t,t') \cdot j(x',z',t') dx'dz'dt'$$

gdzie funkcja \underline{G}_D jest tożsama z wektorem indukcji elektrycznej \underline{D} zaś \underline{G}_H z polem \underline{H} w opisanym falowodzie przy pobudzeniu prądem $\underline{J}_0 = \underline{y}_0 \delta(x-x') \delta(z-z') \delta(t-t')$.

O warstwach zewnętrznych zakłada się, że są albo półprzestrzenniami, albo że ich stratność jest na tyle duża, iż w pobliże płaszczyzn $x = 0$ i $x = a$ nie dochodzi żadne pole pochodzące z odbić od zewnętrznych granic tych warstw.

3.2. Wektorowe funkcje Greena

Wektorowe funkcje Greena \underline{G}_D i \underline{G}_H będą spełniały w ośrodku wypełniającym falowód te same równania Maxwella co indukcja \underline{D} i pole magnetyczne \underline{H} przy pobudzeniu prądem

$$\underline{J}_\delta = \underline{y}_0 \delta(x-x') \delta(z-z') \delta(t-t') ;$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \nabla \times \underline{G}_H &= \dot{\underline{G}}_D + \underline{J}_\delta \\ \nabla \times \underline{G}_D &= -\mu \varepsilon * \dot{\underline{G}}_H \\ \nabla \circ \underline{G}_H &= 0 \\ \nabla \circ \underline{G}_D &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon(\tau)$ nie zależy od zmiennych przestrzennych

Podobnie jak w książce [3] możemy sprowadzić zagadnienie poszukiwania wektorów \underline{G}_D i \underline{G}_H do zagadnienia poszukiwania jednego tylko wektora, z tym, że dla innej pary pól niż w [3], i dla dowolnej zależności czasowej. Z trzeciego równania (3) wynika, że istnieje wektor $\underline{\Pi}_0$, taki, że;

$$\underline{G}_H = \nabla \times \underline{\Pi}_0$$

zaś z drugiego równania (3) wynika, że istnieje taka funkcja φ , że;

$$\underline{G}_D = -\mu \varepsilon * \ddot{\underline{\Pi}}_0 - \nabla \varphi$$

Z pierwszego równania (3) otrzymujemy, całkując je po czasie;

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\Pi}_0 + \mu \varepsilon * \ddot{\underline{\Pi}}_0 + \nabla \varphi = \int_{-\infty}^t \underline{J}_\delta d\tau + \underline{A}_0$$

gdzie \underline{A}_0 - stały wektor całkowania. Wprowadźmy teraz nową funkcję wektorową;

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi}_0 - \nabla \Psi$$

i wybierzmy Ψ w ten sposób, aby;

$$\nabla^2 \Psi - \mu \varepsilon * \ddot{\Psi} = \varphi + \nabla \circ \underline{\Pi}_0$$

Wektor $\underline{\Pi}$ spełniać będzie teraz równanie;

$$(4) \quad \nabla^2 \underline{\Pi} - \mu \varepsilon * \ddot{\underline{\Pi}} = - \int_{-\infty}^t \underline{J}_d d\tau - \underline{A}_0$$

zaś funkcje Greena \underline{G}_D i \underline{G}_H wyrażą się wzorami;

$$(5) \quad \underline{G}_D = \nabla(\nabla \circ \underline{\Pi}) - \mu \varepsilon * \ddot{\underline{\Pi}} = \nabla \times \nabla \times \underline{\Pi} - \int_{-\infty}^t \underline{J}_d d\tau - \underline{A}_0$$

$$(6) \quad \underline{G}_H = \nabla \times \underline{\dot{\Pi}}$$

3.3. Określenie skalarnej funkcji Greena

Dowolne rozwiązanie równania falowego (4) składa się z rozwiązania równania jednorodnego zwanego rozwiązaniem ogólnym oraz z rozwiązania szczególnego, równania o prawej stronie równej funkcji pobudzenia. Część rozwiązania szczególnego odpowiadająca stałemu wektorowi całkowania \underline{A}_0 będzie funkcją niezależną od czasu i z uwagi na wzór (6) nie wniesie żadnego wkładu do pola magnetycznego. Wkład, który \underline{A}_0 wniesie do pola indukcji elektrycznej, wzór (5), będzie także niezależny od czasu.

Tak więc wektor \underline{A}_0 jest odpowiedzialny tylko za pole elektrostatyczne i możemy wybrać go dowolnie. Dla wygody dalszych obliczeń przyjmijmy $\underline{A}_0 = [0, +\frac{1}{2}, 0] \delta(x-x') \delta(z-z')$ a stąd;

$$\int_{-\infty}^t d\tau \underline{A}_0 = \underline{y}_0 \delta(x-x') \delta(z-z') [\mathcal{U}(t-t) - \frac{1}{2}] = \underline{y}_0 \frac{1}{2} \delta(x-x') \delta(z-z') \operatorname{sgn}(t-t')$$

gdzie: \mathcal{U} - funkcja Heavisidera

W ośrodku jednorodnym, pole generowane prądem \underline{j}_d , spełniające warunki wypromieniowania dla $\varrho \rightarrow \infty$, gdzie $\varrho = \sqrt{x^2 + z^2}$ oraz niezależne od współrzędnej "y" będzie miało postać $[\underline{D}, \underline{H}] = [(0, D_y, 0), (H_x, 0, H_z)]$, por. [2]. Ponieważ rozpatrywany falowód jest ograniczony płaszczyznami $x = 0$ i $x = a$, zaś wszystkie trzy ośrodki są jednorodne, każde, otrzymane dla tej struktury warunki graniczne będą jednorodne wzdłuż osi "y" i pole wewnątrz jak i na zewnątrz falowodu będzie miało opisaną postać. Pole takie może być generowane przez składową $\Pi_y = V$ wektora $\underline{\Pi}$. Funkcję $v(x, x', z, z', t, t')$ przyjmijmy jako skalarną funkcję Greena rozważanego zagadnienia. Spełnia ona równanie;

$$(7) \quad \nabla_t^2 v - \mu \epsilon * \ddot{v} = -\delta(x-x') \delta(z-z') \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t-t')$$

gdzie: $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Wektorowe funkcje Greena \underline{G}_D i \underline{G}_H wyrażają się wzorami;

$$(8a) \quad (G_D)_y = -\mu \epsilon * \ddot{v} = -\nabla_t^2 v - \frac{1}{2} \delta(x-x') \delta(z-z') \operatorname{sgn}(t-t')$$

$$(8b) \quad (G_D)_x = (G_D)_z = 0$$

gdzie: $\underline{G}_D = [(G_D)_x, (G_D)_y, (G_D)_z]$

$$(8c) \quad \underline{G}_H = \nabla \times (0, \dot{v}, 0)$$

Warunki graniczne spełnione przez v dla $x = 0$ i $x = a$ omówione będą w dalszej części.

4. Warunki graniczne na płaszczyznach rozdziału

4.1. Postać pola w jednorodnym, nieograniczonym ośrodku

Dokonajmy transformacji Fouriera F^{-1} równania (7) po zmiennych z, t ;

$$(9) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 + \omega^2 \mu \tilde{\epsilon}(\omega) \right) \tilde{v} = \delta(x-x') \cdot \frac{1}{\omega} \cdot e^{-it'\omega} \cdot e^{-iz'\beta}$$

i wprowadźmy funkcję $V(x, x', \omega, \beta)$ taką, że;

$$(10) \quad V \triangleq i\omega e^{it'\omega} \cdot e^{iz'\beta} \tilde{v}$$

Funkcja V spełnia teraz równanie;

$$(11) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + h^2(\omega, \beta) \right) V = \delta(x-x') \quad ; \quad h^2(\omega, \beta) = \mu \omega^2 \tilde{\epsilon}(\omega) - \beta^2$$

W ośrodku jednorodnym względem x , równanie to posiada rozwiązanie dane wzorem;

$$(12) \quad V(x, x', \omega, \beta) = \frac{-ie^{ih(\omega, \beta)|x-x'|}}{2h(\omega, \beta)}$$

co można sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie do (11).
Skalarna funkcja Greena takiego zagadnienia wyrazi się;

$$(13) \quad v(x, x', z, z', t, t') = -\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ih(\omega, \beta)|x-x'|} \cdot e^{i(z-z')\beta} \cdot e^{i(t-t')\omega}}{2\omega h(\omega, \beta)} d\omega d\beta$$

Tak więc w nieograniczonym ośrodku dyspersyjnym, opisanym przez związek $\underline{D} = \epsilon * \underline{E}$ pole elektromagnetyczne pochodzące od pobudzenia prądem $\underline{j} = \underline{y}_0 \delta(x-x') \delta(z-z') \delta(t-t')$ jest sumą po ω i β fal płaskich postaci;

$$A(x', z', t', \beta, \omega) e^{i(\xi x + \beta z)} e^{i\omega t}$$

spełniających związek dyspersyjny

$$(14) \quad \xi^2 + \beta^2 = k^2 \quad \text{gdzie: } k^2 = \mu \omega^2 \epsilon(\omega)$$

zaś ξ jest funkcją zmiennych β i ω , określoną przez (14).
Ze wzorów (8a + 8c) wynika, że są to fale typu TE, gdzie płaszczyzną padania każdej z tych fal jest płaszczyzna XZ, rys.1.

4.2. Dyspersja w plazmie jonosferycznej

Zastanówmy się teraz nad postacią transformaty funkcji $\epsilon(\tau)$, oznaczonej przez $\tilde{\epsilon}(\omega)$. Dla małej koncentracji N elektronów w zimnej plazmie można stosować wzór nie uwzględniający zderzeń, por. [4];

$$(15) \quad \tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

I tak w przestrzeni międzygwiazdnej ω_p waha się w granicach $\omega_p \in 2\pi \cdot (10^8 \text{ Hz} \div 10^6 \text{ Hz})$, w jonosferze ziemskiej $\omega_p \in 2\pi \cdot (0,3 \text{ MHz} + 20 \text{ MHz})$. Uwzględnienie zderzeń elektronów z drobinami, jonami i samymi elektronami prowadzi do zależności;

$$(16) \quad \tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)} \right) = \epsilon_0 \left[1 - \left(1 + \frac{i\nu}{\omega} \right) \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \right]$$

gdzie, ν - efektywna liczba zderzeń.

W tym przypadku uwzględniona jest stratność ośrodka spowodowana zderzeniami, co wprowadza do $\tilde{\epsilon}(\omega)$ część urojoną.

W jonosferze ziemskiej, w warstwie F, ν waha się w granicach $\nu \in 2\pi (200 \text{ Hz} + 2 \text{ kHz})$, w warstwie E $\nu \in 2\pi (2 \text{ kHz} + 20 \text{ kHz})$ zaś w warstwie D $\nu \in 2\pi (2 \text{ MHz} + 20 \text{ MHz})$. Z podanych liczb widoczny jest zakres stosowalności wzoru (15), który dla plazmy w najniższej warstwie D, jonosfery ziemskiej należy zastąpić dokładniejszym wzorem (16). Dla $\nu = 0$ wzór (16) przechodzi we wzór (15).

Również wzór (16) przestaje być słuszny dla $\omega \ll \nu$. Wtedy należałoby go zastąpić wzorem:

$$(16a) \quad \tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \left[1 - \left(K_\epsilon \left(\frac{\omega}{\nu} \right) + \frac{i\nu}{\omega} K_\sigma \left(\frac{\omega}{\nu} \right) \right) \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \right]$$

gdzie: K_ϵ , K_σ - funkcje rzeczywiste ilorazu ω/ν , zwane miarą odstępstwa od teorii elementarnej.

Dla $\omega/\nu \rightarrow \infty$ mamy $K_\epsilon = K_\sigma = 1$, a więc obowiązuje wzór (16). Dla $\omega/\nu = 1$ mamy $K_\epsilon \approx K_\sigma \approx 1$, ale tutaj mogą pojawiać się pewne różnice pomiędzy wzorami (16) i (16a). Dla $\omega/\nu \rightarrow 0$, $K_\epsilon \rightarrow 1,5$; $K_\sigma \rightarrow 1,13$ przy uwzględnieniu zderzeń swobodnych elektronów tylko z drobinami, por. [4].

4.3. Padanie niejednorodnej fali płaskiej TE na płaszczyznę rozdziału dwóch ośrodków dyspersyjnych

Załóżmy teraz, że rozważany ośrodek jest trójwymiarową przestrzenią rozdzieloną płaszczyzną $x = a$ na dwie półprzestrzenie. W górnej półprzestrzeni ośrodek opisany jest stałymi μ_2 , $\tilde{\epsilon}_2(\omega)$ zaś w dolnej μ_1 , $\tilde{\epsilon}_1(\omega)$. Z dolnego ośrodka pada na płaszczyznę rozdziału niejednorodna fala płaska o polaryzacji typu TE;

$$E_y^I = e^{-i(\xi x + \beta z)} e^{i\omega t} \quad ; \quad E_x^I = E_z^I = 0$$

(17)

$$H_x^I = \frac{-\beta}{\mu_1 \omega} e^{-i(\xi x + \beta z)} \quad ; \quad H_z^I = +\frac{\xi}{\mu_1 \omega} e^{-i(\xi x + \beta z)} e^{i\omega t} \quad ; \quad H_y^I = 0$$

gdzie ξ i β dowolne liczby zespolone spełniające związek dyspersyjny;

$$(14a) \quad \xi^2 + \beta^2 = k_1^2 \quad ; \quad k_1 = \omega^+ \mu_1 \cdot \tilde{\epsilon}_1(\omega)$$

W literaturze, fale opisanego typu nazywane są często uogólnionymi falami płaskimi.

Podobnie jak dla jednorodnych fal płaskich, por. [1], fala postaci [17] ulega na płaszczyźnie rozdziału częściowemu odbiciu;

$$E_y^R = R e^{-i(-\xi x + \beta z)} e^{i\omega t} \quad ; \quad E_x^R = E_z^R = 0$$

(18)

$$H_x^R = \frac{-\beta}{\mu_1 \omega} \cdot R e^{-i(-\xi x + \beta z)} e^{i\omega t} \quad ; \quad H_z^R = \frac{-\xi}{\mu_1 \omega} \cdot R e^{-i(-\xi x + \beta z)} e^{i\omega t} \quad ; \quad H_y^R = 0$$

a częściowo przechodzi w postaci fali transmitowanej do górnej półprzestrzeni;

$$(19) \quad E_y^T = T e^{-i(\xi_T x + \beta z)} e^{i\omega t}; \quad E_x^T = E_z^T = 0$$

$$H_x^T = \frac{-\beta}{\mu_2 \omega} T e^{-i(\xi_T x + \beta z)} e^{i\omega t}; \quad H_z^T = \frac{\xi_T}{\mu_2 \omega} T e^{-i(\xi_T x + \beta z)} e^{i\omega t}; \quad H_y^T = 0$$

gdzie: $\xi_T^2 + \beta^2 = k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \tilde{\epsilon}_2(\omega)$

Z ciągłości składowych stycznych pola \underline{E} i \underline{H} na płaszczyźnie rozdziału, otrzymujemy, podobnie jak dla jednorodnej fali płaskiej;

$$(20) \quad R = \frac{\mu_2 \xi - \mu_1 \xi_T}{\mu_2 \xi + \mu_1 \xi_T} e^{-2i\xi a} = \frac{\mu_2 \cos\varphi - \mu_1 \nu}{\mu_2 \cos\varphi + \mu_1 \nu} e^{-2iak_1 \cos\varphi}$$

$$(21) \quad T = \frac{2\xi\mu_2}{\mu_2 \xi + \mu_1 \xi_T} e^{-ia(\xi - \xi_T)} = \frac{2\mu_2 \cos\varphi}{\mu_2 \cos\varphi + \mu_1 \nu} e^{-iak_1(\cos\varphi - \nu)}$$

gdzie: φ jest zespolonym kątem padania określonym przez;

$$(22) \quad \sin\varphi \triangleq \frac{\beta}{k_1}; \quad \nu \triangleq n \cos\Theta = \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} \quad n \triangleq k_2/k_1$$

Θ - jest zespolonym kątem załamania; $\sin\Theta \triangleq \beta/k_2$

W przypadku uogólnionych fal płaskich zawsze istnieje taki zespolony kąt padania φ , że jeśli tylko $k_1^2 \neq k_2^2$, następuje odbicie, gdzie $|R| = 1$. Niech $\mu_1 = \mu_2$ i $k_1^2 - k_2^2 \neq 0$. Dla fali padającej, określonej przez

$$(23) \quad \xi = \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}}, \quad \xi^2 + \beta^2 = k_1^2, \quad \text{Im} \xi, \beta, \xi_T \leq 0$$

otrzymamy $\xi_T = \sqrt{\frac{k_2^2 - k_1^2}{2}}$, stąd; $\xi_T = \xi \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow |\xi - \xi_T| = |\xi + \xi_T|$

Czynnik fazowo-tłumieniowy $e^{2ia\xi}$ nie był brany pod uwagę, gdyż wybór stałej a jest tutaj dowolny i możemy płaszczyznę rozdziału wybrać dla $x = a = 0$.

Rozważonego przypadku nie można nazywać całkowitym odbiciem, co czasami robione jest w literaturze, gdyż o ile tylko $\beta \neq 0$, to znaczy fala nie rozchodzi się równolegle do płaszczyzny rozdziału, $T \neq 0$ i w górnej półprzestrzeni istnieje pole elektromagnetyczne w postaci pewnej uogólnionej fali płaskiej.

W przypadku kiedy $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, można znaleźć taki zespolony kąt padania φ dla którego $R = 0$ i $T = 1$. Będzie to miało miejsce dla fali;

$$(24) \quad \xi = \sqrt{\frac{k_2^2 - k_1^2}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 - 1}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)k_1^2 - k_2^2}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 - 1}}, \quad \begin{aligned} \xi, \beta, \xi_T \in \mathbb{R} &\Rightarrow \xi, \beta, \xi_T \geq 0 \\ \xi, \beta, \xi_T \in \mathbb{C} &\Rightarrow \text{Im} \xi, \beta, \xi_T \leq 0 \end{aligned}$$

Wtedy dla fali transmitowanej mamy;

$$(25) \quad \xi_T = \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - k_1^2)}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 - 1}} \quad ; \quad \mu_1 \xi_T = \mu_2 \xi$$

W przypadku kiedy we wzorze (24) wybierzemy przeciwny znak pierwiastka określającego ξ , inaczej mówiąc zamiast kąta φ określonego przez (24) wybierzemy kąt $-\varphi$, będziemy mieli przypadek kiedy $\mu_1 \varepsilon_T = -\mu_2 \varepsilon$ i wtedy $R = \infty$ oraz $T = \infty$. Jest to przypadek kiedy wzdłuż powierzchni rozdziału propaguje się fala powierzchniowa.

Na koniec należałoby rozważyć przypadek zer i biegunów współczynnika załamania n . Może mieć to miejsce tylko w przypadku zastosowania przybliżonego wzoru (15) dla $\tilde{\varepsilon}(\omega)$. W przypadku stosowania wzorów dokładniejszych (16) lub (16a) zerować może się tylko rzeczywista część $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, co powoduje, że dla ω , dla których n ma zero lub biegun w oparciu o wzór (15), w rzeczywistości n będzie skończoną liczbą zespoloną o module posiadającym względne minimum lub maksimum w tym punkcie. Założmy jednak, że stosujemy wzór:

$$\tilde{\varepsilon}_i(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\right), \quad i = 1, 2.$$

Dla $\omega = \omega_{p2}^*$ mamy $k_2(\omega_{p2}) = 0$, $n(\omega_{p2}) = 0$ i wtedy;

$$(26) \quad R = \frac{\mu_2 \cos \varphi - i \mu_1 \sin \varphi}{\mu_2 \cos \varphi + i \mu_1 \sin \varphi} e^{-2ia k_1 \cos \varphi}; \quad T = \frac{2\mu_2 \cos \varphi}{\mu_2 \cos \varphi + i \mu_1 \sin \varphi} e^{-ia k_1 (\cos \varphi - i \sin \varphi)}$$

W tym przypadku dla $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ zarówno $R \neq 0$ jak i $T \neq 0$.

Dla $\omega = \omega_{p1}$; $k_1(\omega_{p1}) = 0$, $n(\omega_{p1}) = \pm \infty$ i wtedy;

$$(27) \quad R = \pm 1 e^{-2ia k_1 \cos \varphi}; \quad T = 0$$

Jest to przypadek, zwany duktem jonosferycznym, dla którego pole propaguje się tylko w tej części przestrzeni w której $k_1(\omega) = 0$, nie wychodząc na zewnątrz.

Jest to jedyny przypadek dla którego uzyskaliśmy zerowanie współczynnika T , to znaczy brak pola w górnej półprzestrzeni.

Przypadek ten nie wystąpi, kiedy zastosujemy wzory (16) lub (16a) opisujące plazmę dla dowolnych wartości ω , ω_p i ν . Dla $\nu \ll \omega_p$ zjawisko duktu wystąpi przy stosowaniu wzorów (16) lub (16a) w postaci silnego minimum modułu współczynnika transmisji T.

4.4. Warunki graniczne spełniane przez częściową transformatę Fouriera skalarnej funkcji Greena

Jak wynika z analizy przeprowadzonej w poprzednim podpunkcie, poza przypadkiem (27), kiedy w dolnej półprzestrzeni zeruje się $\tilde{\epsilon}_1(\omega)$, który występuje tylko przy stosowaniu wzoru przybliżonego (15), w górnej półprzestrzeni, $x \gg a$, zawsze istnieje pewne pole elektromagnetyczne, o ile z dolnej pada na płaszczyznę rozdziału niejednorodna fala płaska. Pole to jest niejednorodną falą płaską postaci;

$$(28) \quad \begin{aligned} E_x^T &= 0, \quad E_y^T = T \cdot f(x, z, t), \quad E_z^T = 0 \\ H_x^T &= \frac{-3}{\mu_2 \omega} \cdot T \cdot f(x, z, t), \quad H_y^T = 0, \quad H_z^T = \frac{9T}{\mu_2 \omega} \cdot T \cdot f(x, z, t) \end{aligned}$$

gdzie; $f(x, z, t) = e^{-i(\beta_1 x + \beta_3 z)} e^{i\omega t}$

Pole to spełnia na płaszczyźnie rozdziału, $x = a$, warunki impedancyjne

$$(29) \quad \underline{n} \times \underline{E}^T = -\underline{z}_0 \underline{E}_y^T = -\underline{z}_0 \underline{Z}'_a \underline{H}_z^T = \underline{Z}'_a \underline{n} \times \underline{n} \times \underline{H}^T; \quad \underline{n} = [-1, 0, 0]$$

Impedancja Z'_a , określona przez (29), jest funkcją β i wynosi;

$$(30) \quad Z'_a(\beta) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\tilde{\epsilon}_2(\omega)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2 \tilde{\epsilon}_2(\omega) \mu_2}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\tilde{\epsilon}_2(\omega) - \frac{\beta^2}{\omega^2 \mu_2}}}; \quad \text{Im } Z'_a \geq 0$$

Z ciągłości składowych stycznych pola na płaszczyźnie rozdziału otrzymujemy, że całkowite pole $\underline{E} = \underline{E}' + \underline{E}^R$, $\underline{H} = \underline{H}' + \underline{H}^R$ w dolnej półprzestrzeni spełnia na płaszczyźnie $x = a$, warunki;

$$(31) \quad \underline{n} \times \underline{E} = Z_a'(\beta) \cdot \underline{n} \times \underline{n} \times \underline{H} \quad \text{dla } x = a.$$

Powróćmy teraz do rozważań podpunktu 4.1, gdzie pokazaliśmy, że w nieograniczonym ośrodku dyspersyjnym, opisanym przez związek $\underline{D} = \epsilon_1 \times \underline{E}$ pole elektromagnetyczne pochodzące od prądu \underline{J}_d jest nieskończoną sumą po ω i β niejednorodnych fal płaskich. Korzystając z zależności (8) otrzymamy dla interesujących nas składowych, wektorowych funkcji Greena;

$$(G_D)_y = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\epsilon}_i(\omega) \mu_i \omega^2 \tilde{v}(\omega, \beta, x; t', x', z') e^{i\beta z} e^{i\omega t} d\beta d\omega$$

(32)

$$(G_H)_z = \frac{i}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \omega \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(\omega, \beta, x; t', x', z') e^{i\beta z} e^{i\omega t} d\beta d\omega$$

Umieścimy teraz powyżej płaszczyzny $x = a$ ośrodek dyspersyjny scharakteryzowany przez μ_2 , $\underline{D} = \epsilon_2 \times \underline{E}$. Każda z fal sum (32) docierając do płaszczyzny $x = a$ ulegnie odbiciu i załamaniu, zgodnie z rozważaniami podpunktu 4.3, będzie więc dla ustalonego β i ω spełniała warunek impedancyjny (31) na tej płaszczyźnie. Stąd, dla transformaty po z i t skalarnej funkcji Greena \tilde{v} , otrzymamy dla $x = a$ warunek, dla $a > x'$;

$$(33) \quad -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = i\mu_2 \cdot \omega \cdot Y_a'(\omega, \beta) \cdot \tilde{v} \quad ; \quad x = a > x'$$

gdzie admitancja $Y_a' = 1/Z_a'$ wyrazi się wzorem;

$$(34) \quad Y'_0(\omega, \beta) = \sqrt{\frac{\epsilon_2(\omega)}{\mu_2}} \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2 \epsilon_2(\omega) \mu_2}} \quad ; \quad \text{Im } Y'_0 \leq 0$$

Założmy, że punkt $x' > 0$ i umieścimy poniżej płaszczyzny $x = 0$ jeszcze jeden ośrodek dyspersyjny scharakteryzowany przez μ_3 , $\underline{D} = \epsilon_3 * \underline{E}$.

Przeprowadzając analogiczne rozważania nad odbiciem i transmisją fali postaci $e^{-i(\beta \cdot x + \beta_3 z)} e^{i\omega t}$ otrzymamy;

$$(29a) \quad \underline{n} \cdot \underline{x} \underline{E}^T = \underline{z}_0 \cdot \underline{E}_y^T = -\underline{z}_0 \underline{Z}'_0 H_z^T = + \underline{Z}'_0 \underline{n} \cdot \underline{n} \cdot \underline{x} \underline{H}^T \quad \text{dla } \underline{n} = [1.0.0]$$

a stąd warunek dla funkcji \tilde{v} na płaszczyźnie $x = 0 < x'$;

$$(33a) \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = i \mu_1 \omega \cdot Y'_0(\omega, \beta) \tilde{v} \quad ; \quad x=0, x' > 0$$

gdzie admitancja $Y'_0 = 1/z'_0$ wyrazi się wzorem;

$$(34a) \quad Y'_0(\omega, \beta) = \sqrt{\frac{\epsilon_2(\omega)}{\mu_3}} \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2 \epsilon_2(\omega) \mu_3}} \quad ; \quad \text{Im } Y'_0 \leq 0$$

Na koniec należy zauważyć, że słuszność warunków (33) i (33a) jest uwarunkowana przyjętym w 3.1. założeniem, że całkowite pole na płaszczyznach $x = 0$, a jest sumą tylko trzech pól; padającego, odbitego i transmitowanego. Znaczy to, że albo ośrodki 2 i 3 są nieograniczone w kierunku x lub $-x$, albo jeśli są to warstwy o skończonej grubości, to tłumienie ich jest na tyle silne, że do płaszczyzn $x = 0$, a nie dociera praktycznie żadna inna fala /na przykład odbita od granic tych warstw/. Dla przypadku kiedy ośrodek 2 lub 3 jest metalem, np: $\tilde{\epsilon}_3(\omega) = \frac{i6}{\omega}$ wzór (34a) można uprościć, por. [1], otrzymując tzw. warunki Leontowicza;

$$Y_0'(\omega, \beta) = \sqrt{\frac{i\beta}{\omega\mu_2}} \sqrt{1 + \frac{i\beta^2}{\omega\epsilon\mu_2}} \cong \sqrt{\frac{i\beta}{\omega\mu_2}} = Y_0'(\omega)$$

ze względu na bardzo duże wartości jakie przyjmuje β . Należy tutaj pamiętać, że zarówno warunki Leontowicza dla metali, jak i inne warunki impedancyjne, wyprowadzane na przykład dla struktur metal-cienka warstwa dielektryka, a nie zależące od kąta padania fali, są w odróżnieniu od warunków (33) i (33a), dla których admitancje określone są przez (34) i (34a), warunkami przybliżonymi.

5. Skalarna funkcja Greena

5.1. Całkowa postać skalarnej funkcji Greena

Powróćmy do płaskiego falowodu, pokazanego na rys.1.

W punkcie 3 wprowadzona została skalarna funkcja Greena v , spełniająca równanie (7) i generująca za pomocą wzorów (8) poszukiwane wektorowe funkcje Greena rozważanego falowodu.

W punkcie 4 wyprowadzone zostały warunki brzegowe (33) jakie transformata Fouriera F^{-1} , po współrzędnych t i z funkcji v spełnia na płaszczyznach $x = 0, a$. Korzystając z oznaczeń wprowadzonych w 4.1 sprowadziliśmy zagadnienie do następującego; poszukujemy funkcji $V(\omega, \beta, x; x')$ spełniającej równanie;

$$(11a) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + h_1^2(\omega, \beta) V = -\delta(x-x') ; \quad h_1^2(\omega, \beta) = \mu_1 \omega^2 \epsilon_1(\omega) - \beta^2$$

i spełniającej na brzegu falowodu warunki admitancyjne;

$$(33b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= +i\mu_1 \omega \cdot Y_0'(\omega, \beta) V = +i k_1(\omega) Y_0'(\omega, \beta) V & \text{dla } x=0 \\ &= -i\mu_1 \omega \cdot Y_a'(\omega, \beta) V = -i k_a(\omega) Y_a'(\omega, \beta) V & \text{dla } x=a \end{aligned}$$

gdzie funkcje V i \tilde{V} związane są ze sobą zależnością (10), zaś admitancje Y_0 i Y_a są powierzchniowymi admitancjami unormowanymi do admitancji falowej ośrodka wypełniającego falowód.

$$(35) \quad Y_0 = \frac{Y_0'}{Y_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\tilde{\epsilon}_1(\omega)}} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_2(\omega)}{\mu_3}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\mu_2 \tilde{\epsilon}_2(\omega) \omega^2}} \quad ; \quad \text{Im } Y_0 \leq 0$$

$$(35a) \quad Y_a = \frac{Y_a'}{Y_1} = \sqrt{\frac{\mu_4}{\tilde{\epsilon}_1(\omega)}} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_2(\omega)}{\mu_2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\mu_2 \tilde{\epsilon}_2(\omega) \omega^2}} \quad ; \quad \text{Im } Y_a \leq 0$$

Rozwiązanie równania (11a) przy warunkach (33b) dane jest następującym wzorem, por. [2] i [5];

$$(36) \quad V = \frac{\tilde{g}(x_1, \beta, \omega) \cdot \tilde{g}(x_2, \beta, \omega)}{-W(\tilde{g}, \tilde{g})}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia;

$$(36a) \quad \tilde{g}(x, \beta, \omega) = e^{ik_1 \beta x} + R_0 e^{-ik_1 \beta x} \quad ; \quad \beta = -\sqrt{1 - \delta^2} \quad ; \quad \delta = \frac{\beta}{k_1(\omega)}$$

$$(36b) \quad \tilde{g}(x, \beta, \omega) = e^{-ik_1 \beta x} + R_a e^{ik_1 \beta x} \quad \text{Im } \beta \leq 0$$

$$(36c) \quad R_0 = \frac{\beta - Y_0}{\beta + Y_0} \quad ; \quad R_a = \frac{\beta - Y_a}{\beta + Y_a} e^{-2ik_1 a \cdot \beta}$$

Mianownik (36) jest wronskianem funkcji \tilde{g} i \tilde{g} ;

$$(36d) \quad W(\bar{g}, \bar{g}) = \left(\bar{g} \frac{d\bar{g}}{dx} - \bar{g} \frac{d\bar{g}}{dx} \right) = 2i \cdot k_1 \xi (R_0 \cdot R_a - 1)$$

zaś $x_{<}$ i $x_{>}$ oznaczają mniejszą lub większą ze współrzędnych x i x' .

Wprowadzając oznaczenia (36) musieliśmy dopuścić dzielenie przez $k_1(\omega)$ robiąc milczące założenie, że $k_1(\omega) \neq 0$, co nie jest spełnione dla wszystkich $\omega \neq 0$ jeśli użyjemy wzoru (15). Postać funkcji V , koresponduje jednak dzięki temu z rozwiązaniem podanym w pracy [5].

Rozwiązanie (36) jest uogólnieniem rozwiązania (12), na przedziale $[0, a]$. Sprawdzamy to kładąc $k_1(\omega) = k_2(\omega) = k_3(\omega)$,

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ - ośrodek jednorodny. Wtedy;

$$Y_0 = Y_a = \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{k_1^2(\omega)}} = \xi \Rightarrow R_0 = R_a = 0$$

i funkcja V określona przez (36) staje się identyczna z rozwiązaniem określonym przez (12).

Stosując zależności (10), (36) oraz odwrotne transformacje Fouriera $F^{(+)}$ po z i ω otrzymujemy następujące całkowe przedstawienie skalarnej funkcji Greena v ;

$$(37) \quad v(x, x', z, z', t, t') = \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{g}(x, z, \omega) \cdot \bar{g}(x', z', \omega) e^{i\omega(t-t')} e^{i z(z-z')}}{2\omega \sqrt{k_1^2(\omega) - z^2} (R_0 \cdot R_a - 1)} dz d\omega$$

Postać funkcji Greena (37) jest słuszna również w przypadku, kiedy zamiast dwóch półprzestrzeni $x \geq a$ i $x \leq 0$, które są przezroczyste dla fal umieścić dla $x = a$ i $x = 0$ dwie nieprzezroczyste płaszczyzny, scharakteryzowane admitancjami powierzchniowymi Y_0 i Y_a , niezależnymi od kąta padania fali, to znaczy będącymi funkcjami jedynie częstości ω .

5.2. Mody przestrzenno-czasowe i czasowo-przestrzenne

Wyrażenia o podobnej postaci ω (37) można znaleźć w pracach [5] i [6], gdzie dla ustalonego ω - pobudzenie harmoniczne - autorzy opisują dla pewnych przypadków szczególnych, położenia biegunów i punktów rozgałęzienia z_i , wyrażenia podcałkowego (37), aby korzystając następnie z twierdzenia całkowego Cauchy obliczyć całką po $d\zeta$ w postaci sumy residuów. Postępując analogicznie w przypadku wyrażenia całkowego (37) otrzymamy;

$$\begin{aligned}
 v(x, x', z, z', t, t') = & \frac{i}{4\pi} \sum_{j=0}^N \int_{-\infty}^{\infty} \text{res}_{z_j} I(x, x', z, \omega, z', t') d\omega + \\
 (38) \quad & + \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\dot{L}_j} I(x, x', z, \omega, z', t') d\zeta
 \end{aligned}$$

gdzie przez $I(\cdot)$ oznaczone zostało wyrażenie podcałkowe (37), N - liczba biegunów, które należy uwzględnić w (37) zaś przez L_j - pewne kontury na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ζ , które należy uwzględnić z uwagi na istnienie punktów rozgałęzienia wyrażenia podcałkowego I .

W rozważanym przez nas zagadnieniu rysuje się jeszcze jedna możliwość liczenia całek wyrażenia (37), a mianowicie korzystając z całkowego twierdzenia Cauchy obliczenie całki po $d\omega$ w postaci sumy residuów w punktach ω_i , gdzie ω_i - bieguny wyrażenia I na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω .
Doprowadzi nas to do wzoru;

$$(39) \quad \mathcal{V}(x, x', z, z', t, t') = \frac{i}{4\pi} \sum_{j=0}^M \int_{-\infty}^{\infty} \text{res}_{\omega_j} I(x, x', z, \omega, z', t') dz + \\ + \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{\bigcup_{j=1}^P K_j} I(x, x', z, \omega, z', t') d\omega$$

gdzie przez M oznaczona została liczba biegunów ω_j , które należy uwzględnić w (37), P - liczba punktów rozgałęzienia wyrażenia I na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω , K_j -kontury związane z punktami rozgałęzienia, które należy uwzględnić w obliczeniach.

W przypadku zastąpienia zewnętrznych warstw przez powierzchnie opisane warunkami admitancyjnymi, całki po konturach L_j w wyrażeniu (38) znikają, /brak punktów rozgałęzienia związanych z pierwiastkami kwadratowymi występującymi w wyrażeniach na γ_0 i γ_a /, za to liczba biegunów N staje się nieskończona, por. [5], [6]. Całki po konturach K_j nie muszą zniknąć, gdyż nawet w przypadku płaszczyzn admitancyjnych, admitancje γ_0 i γ_a wchodzące do wyrażenia podcałkowego I są określone jako pierwiastki kwadratowe pewnych funkcji zmiennej ω . Znikną one w przypadku idealnie przewodzących płaszczyzn, gdyż wtedy $\gamma_0 = \gamma_a = \infty$.

Osobnym problemem jest znalezienie biegunów wyrażenia podcałkowego I na płaszczyznach zmiennych zespolonych z i ω . W przypadku płaszczyzn admitancyjnych bieguny z_i zostały znalezione analitycznie dla γ_0 , γ_a czysto rzeczywistych bądź czysto urojonych, por. [5]. Analityczne znalezienie biegunów ω_j jest jeszcze trudniejsze z uwagi na dość skomplikowany charakter funkcji $\tilde{\epsilon}_i(\omega)$. Tak więc w ogólnym przypadku pozostaje nam numeryczne szukanie biegunów funkcji I .

Jeszcze trudniejszym problemem jest interpretacja otrzymanych wyników z fizycznego punktu widzenia, na co zwrócił uwagę autor pracy [8]. Poszczególne składniki sumy występującej w (38) przyjęto w literaturze nazywać modami przestrzenno-czasowymi, choć nie dla wszystkich, mogących wystąpić w (38) biegunów ζ ; charakter modowy tych wyrażeń jest jednakowo oczywisty. Przez analogię, składniki sumy występującej w (39) można by nazwać modami czasowo-przestrzennymi, ale badaniom charakteru określonych tak modów poświęcić należy osobną pracę, z uwagi na obszerność tematu.

6. Uwagi końcowe

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na możliwość zastosowania pokazanej w pracy drogi do wyprowadzenia wyrażenia (37) dla innych pobudeń, niż prąd J_{δ} przyjęty w 3.1. Wstawiając na przykład do równań (3) prąd $J_{\alpha} = Z_0 \delta(x-x') \delta(z-z') \delta(t-t')$ lub $J_{\alpha} = X_0 \delta(x-x') \delta(z-z') \delta(t-t')$ otrzymamy możliwość generowania pola wektorem-Hertza $\Pi = (0, 0, \psi_z)$ lub $\Pi = (\psi_x, 0, 0)$ gdzie ψ_z lub ψ_x należy przyjąć jako skalarną funkcję Greena. Opisane pobudzenie odpowiada liniowemu dipolowi, który rozważany jest w pracach [5] i [6]. Chcąc wyprowadzić warunki graniczne dla tak określonej funkcji Greena, należy rozważyć odbicie i załamane się niejednorodnej fali płaskiej typu TM na granicy dwóch ośrodków, podobnie jak dla fali typu TE zrobiono w podpunkcie 4.3.

Tym razem otrzymamy dla skalarnej funkcji Greena warunki impedancyjne z impedancjami Z_0 i Z_a zależnymi od zmiennych ζ i ω . Konstrukcja wyrażenia całkowego pozostanie bez zmian, z tym że admitancje Y_0 i Y_a będzie należało zastąpić impedancjami Z_0 i Z_a z warunków granicznych dla częściowej transformaty Fouriera nowo określonej, skalarnej funkcji Greena.

Literatura

- [1] L.A. Wainstein - "Fale elektromagnetyczne" - Warszawa, PWN, 1963.
- [2] L.B. Felsen, N. Marcovitz - "Radiation and Scattering of Waves" - Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [3] K. Bochenek - "Metody analizy pól elektromagnetycznych" - Warszawa-Wrocław, PWN, 1961.
- [4] W.L. Ginzburg - "Fale elektromagnetyczne w plazmie" - Warszawa, PWN, 1964.
- [5] L.B. Felsen, A. Kamel - "Hybrid Ray - Mode Formulation of Parallel Plane Waveguide Green's Functions" - Department of Electrical Engineering Polytechnic Institute of New York, N.Y. 11735, 1980.
- [6] S. Przeździecki - "Podstawy falowodowej teorii propagacji" - praca zbiorowa "Rozchodzenie się fal bardzo długich", Zakład Narodowy Imienia Ossolińskich, Wydawnictwo PAN, 1966.
- [7] A. Sommerfeld - "Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie" - Ann.Phys., 28, s.665, 1909.
- [8] A.E. Karbowiak - "Radiation and guided Waves" - IRE Trans. on Antennas and Propagation, Vol.AP-7, Special Supplement, p.191, 1959.

Spis treści

1. Streszczenie.....	3
2. Wstęp.....	4
3. Określenie funkcji Greena.....	5
3.1. Postawienie zagadnienia.....	5
3.2. Wektorowe funkcje Greena.....	7
3.3. Określenie skalarnej funkcji Greena.....	8
4. Warunki graniczne na płaszczyznach rozdziału.....	10
4.1. Postać pola w jednorodnym, nieograniczonym ośrodku.....	10
4.2. Dyspersja w plazmie jonosferycznej.....	11
4.3. Padanie niejednorodnej fali płaskiej TE na płaszczyznę rozdziału dwóch ośrodków dysper- syjnych.....	13
4.4. Warunki graniczne spełniane przez częściową transformatę Fouriera skalarnej funkcji Greena	17
5. Skalarna funkcja Greena.....	20
5.1. Całkowa postać skalarnej funkcji Greena.....	20
5.2. Mody przestrzenno-czasowe i czasowo-prze- strzenne.....	23
6. Uwagi końcowe.....	25
Literatura.....	26