

Andrzej J. Turski

**WPLYW GĘSTOŚCI
CZĄSTEK ZJONIZOWANYCH
NA ODPOWIEDŹ PLAZMOWĄ
W PLAZMOSFERZE**

9/1983

P.269



WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 199

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 stycznia 1983 r.

57028



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark.druk. 1,5.

Oddano do drukarni w marcu 1983 r.

Nr zamówienia 191/83 M-13.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Andrzej J. Turski
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych
IPPT - PAN

WPLYW GĘSTOŚCI CZĄSTEK ZJONIZOWANYCH NA
ODPOWIEDŹ PLAZMOWĄ W PLAZMOSFERZE

1. Wstęp

Badanie zjawisk falowych w plazmie przestrzeni kosmicznej może służyć do określania parametrów plazmy, np. gęstości i temperatury. Z drugiej strony znajomość tych parametrów może prowadzić do przewidywania odpowiednich zjawisk falowych.

Zadaniem pracy jest:

- Wyznaczenie pola dalekiego czyli odpowiedzi w pełni nieliniowej plazmy na zaburzenie stanu równowagowego. Zaburzenie to jest odległe w czasie i przestrzeni od obserwowanego pola.
- Określenie wpływu gęstości cząstek i temperatury na pole dalekie.
- Wybór odpowiedniego modelu plazmy i metody postępowania.

Niniejsza praca jest w ścisłej relacji do pracy [3], w której przedstawiono metodę hierarchizacji nieliniowych równań Własowa-Poissona!

Opis plazmy przy pomocy równań Własowa-Poissona oraz zastosowana metoda hierarchizacji tych równań daje zależność rozwiązań od rozkładów równowagowych składników plazmy w odróżnieniu od opisu hydrodynamicznego. Opis ten zastosowano do "gorących" i "zimnych" składników plazmy i nadaje się on również do opisu efektów rezonansowych - w tej pracy jeszcze nie wykorzystanych. W pracy [3] wyznaczono odpowiedź plazmy w postaci fal solitonowych w przypadku gorących jonów i elektronów ($T_e = T_i$), przy założeniu odpowiednio dużego stosunku masy jonów do masy elektronów. Takich fal nie otrzymano przy pomocy opisu hydrodyna-

micznego. Przyjęty model jest bardzo przydatny do wyodrębnienia wpływu różnych parametrów plazmy na fale solitonowe. Wreszcie można tu otrzymać rozwiązanie dla pełnej nieliniowości - jak wykazano w pracy [3] - pozwala to na ustalenie struktury solitonu, tj. przebiegu jego potencjału, pola elektrycznego, gęstości ładunku i gęstości poszczególnych składników plazmy. Na tej podstawie omówiono również w pracy [3] jakościowy obraz zderzeń solitonów.

Wyniki pracy przedstawione są według następującego planu. W rozdziale 2 równania Własowa opisujące dwuskładnikową plazmę w zewnętrznym stałym polu magnetycznym sprowadzono do równań jednowymiarowych, tj. zależnych tylko od składowej x-owej prędkości i zmiennej przestrzennej x .

W przypadku "zimnych" jonów i "gorących" elektronów istnieje taki zakres wielkości pola magnetycznego, dla którego odpowiednio ciężkie jony mają zaniedbywalnie małą częstość cyklotronową /słabe namagnesowanie - jony izotropowe/ natomiast gorące i lekkie elektrony mają bardzo dużą częstość cyklotronową /silne namagnesowanie - elektrony jedno-osioowo-anizotropowe/.

W następnych dwu rozdziałach sprowadzono równanie Własowa do nieskończonego układu liniowych równań hierarchii. W przypadku "adiabatyicznego włączenia pola w nieskończoności" otrzymano rozwiązanie dla każdego równania hierarchii i suma tych rozwiązań stanowi rozwiązanie w pełni nieliniowego równania Własowa - odniesione do rozkładu równowagowego. Mając funkcję rozkładu dla poszczególnych składników plazmy wyznacza się gęstość prądu i na podstawie równania Ampera otrzymano równanie typu abstrakcyjnego szeregu potęgowego na pole elektryczne. Równanie to sprowadzono do równania nieliniowego oscylatora dla potencjału elektrycznego. Solitonowe rozwiązania tego równania stanowią "pole dalekie" wieloskładnikowej plazmy. W rozdziale 5, zbadano wpływ gęstości i temperatury elektronów stanu równowagowego na kształt fali solitonowej.

2. Wpływ pola magnetycznego

Równania Własowa opisujące plazmę w zewnętrznym polu magnetycznym składającą się z jonów i elektronów mają postać

$$(2.1) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \underline{x}} + \left[\frac{q_i B_0}{m_i} (\underline{v} \times \hat{x}) + \frac{q_i}{m_i} \underline{E} \right] \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \underline{v}} = 0$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial f_e}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \underline{x}} + \left[\frac{q_e B_0}{m_e} (\underline{v} \times \hat{x}) + \frac{q_e}{m_e} \underline{E} \right] \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \underline{v}} = 0$$

gdzie $\underline{B}_0 = \hat{x} B_0$ jest zewnętrznym stałym polem magnetycznym, f_i , f_e , q_i , q_e , m_i i m_e są odpowiednio - funkcja rozkładu prędkości jonów i elektronów, ładunek jonu i elektronu oraz masa jonu i elektronu. W przypadku gorących elektronów i zimnych jonów można wyznaczyć taki zakres pola magnetycznego, który będzie miał zaniedbywalny wpływ na zimne i ciężkie jony natomiast dla gorących i znacznie lżejszych elektronów będzie miał zasadnicze znaczenie. W tym ostatnim przypadku, tj. w przypadku elektronów o zaniedbywalnej bezwładności, stanowiąc one będą ośrodek jednoosiowo anizotropowy i będą opisywane przez takie równanie Własowa jak plazma izotropowa jednowymiarowa, tzn. zależna tylko od jednej składowej prędkości i jednej współrzędnej w kierunku zewnętrznego pola magnetycznego. Ponieważ, $m_e \ll m_i$ więc częstość cyklotronowa

$$(2.3) \quad \Omega_e \gg \Omega_i$$

gdzie $\Omega_\alpha = \frac{q_\alpha B_0}{m_\alpha}$ $\alpha = e, i$

oraz przyjmuje się, że $q_i = -q_e = q$.

Dalsze warunki, np. [1], przy spełnieniu których ma miejsce opisany przypadek, są

$$(2.4) \quad \frac{v_A}{c} \ll \lambda_e k \quad c - \text{prędkość światła w próżni}$$

$$(2.5) \quad \frac{v_A}{c} \gg \lambda_e k \frac{m_e}{m_i}$$

gdzie prędkość Alfvéna i długość Debye'a są odpowiednio

$$v_A = \frac{B_0}{(\mu_0 N_{oi} m_i)^{1/2}}, \quad \lambda_e = \frac{q_e}{\omega_{oe}}$$

oraz częstość plazmowa elektronów i prędkość termiczna elektronów są

$$\omega_{oe} = \left(\frac{N_{oe} q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2}, \quad a_e = \left(\frac{x T_e}{m_e} \right)^{1/2}, \quad x - \text{stała Boltzmana}$$

natomiast N_{oe} , N_{oi} są odpowiednio gęstością elektronów i jonów i k^{-1} jest długością, na której zachodzą zmiany pola. Warunek (2.4) oznacza słaby wpływ pola magnetycznego na jony natomiast (2.5) oznacza silne namagnesowanie elektronów.

W pierwszym przypadku pomijamy w rów. (2.1) człon z polem magnetycznym i jony opisujemy jak w plazmie izotropowej. Przyjmując, że rozpatrujemy zaburzenie zależne tylko od zmiennej x , tj. jednowymiarowe zaburzenie, mamy

$$\underline{E} = \underline{E}(x, t), \quad f_i = f_i(y, x, t)$$

i rów. (2.1) przyjmuje postać

$$(2.6) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + u \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{q_i}{m_i} (E_x \frac{\partial f_i}{\partial u} + E_y \frac{\partial f_i}{\partial v_y} + E_z \frac{\partial f_i}{\partial v_z}) = 0$$

Całkując to równanie względem v_y i v_z mamy

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x} + \frac{q_i}{m_i} E_x \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial u} = 0$$

gdzie

$$\tilde{f}_i(u, x, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_i(u, v_y, v_z, x, t) dv_y dv_z$$

Rozpatrzmy teraz przypadek bardzo dużej częstości cyklotronowej elektronów, będącej wynikiem silnego pola magnetycznego skierowanego wzdłuż osi x -ów

$$\underline{B}_0 = \hat{x} B_0$$

i małej masy elektronowej. Funkcję rozkładu elektronów spełniającą rów. (2.2), przedstawimy w postaci następującego rozwinięcia

$$f_e = f^{(0)} + \frac{f^{(1)}}{\Omega_e} + \frac{f^{(2)}}{\Omega_e^2} + \dots$$

które podstawimy do rów. (2.2) i przyrównując do zera wyrazy zawierające Ω_e w pierwszej potędze, mamy

$$\Omega_e (\underline{v} \times \hat{x}) \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \underline{v}} \equiv \Omega_e (v_z \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_y} - v_y \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z}) = 0$$

a zatem $f^{(0)} = f^{(0)}(v_y^2 + v_z^2, u, \underline{x}, t)$. Przyrównując do zera wyrazy zerowego rzędu względem Ω_e otrzymuje się;

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \underline{x}} + \frac{q_e}{m_e} \underline{E} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \underline{v}} = -(\underline{v} \times \hat{x}) \cdot \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \underline{v}}$$

Całkując ostatnie równanie względem v_y i v_z i korzystając z własności parzystości funkcji $f^{(0)}$ względem v_y i v_z , mamy

$$(2.7) \quad \frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial x} + \frac{q_e}{m_e} E_x \frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial u} = 0$$

gdzie

$$\tilde{f}_e(u, \underline{x}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} f^{(0)}(v_y^2 + v_z^2, u, \underline{x}, t) dv_y dv_z$$

oraz u jest składową prędkości wzdłuż osi $-x$. Rów. (2.7) dla silnie namagnesowanych elektronów jest takie jak dla jednowymiarowej izotropowej plazmy, gdy zaburzenia plazmy zadane są na osi równoległej do pola magnetycznego i propagują się w tym kierunku.

Należy spodziewać się, że w plazmosferze istnieją takie obszary, w których spełnione są warunki (2.4) i (2.5).

3. Równanie abstrakcyjnego szeregu potęgowego opisujące odpowiedź wieloskładnikowej plazmy

Nieliniowe równania Własowa-Poissona dla wieloskładnikowej plazmy, mają postać

$$(3.1) \quad \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + u \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u} = 0 \quad (\text{Własow})$$

$$(3.2) \quad \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u f_{\alpha} du = 0 \quad (\text{Amper})$$

$$(3.3) \quad \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} = \varrho \equiv \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha} du, \quad (\text{Poisson})$$

$$E = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

gdzie; x , u i t są zmiennymi niezależnymi przestrzeni, prędkości i czasu oraz

$$E = E(x, t), \quad \varphi = \varphi(x, t), \quad f_{\alpha} = f_{\alpha}(u, x, t), \quad q_{\alpha} \text{ i } m_{\alpha}$$

są odpowiednio polem elektrycznym i potencjałem oraz funkcją rozkładu prędkości, ładunkiem i masą cząstek składnika plazmy. Równania (3.2) i (3.3) są wzajemnie zależne, ze względu na równanie zachowania ładunku

$$(3.4) \quad \dot{\varrho} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad J = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u f_{\alpha} du,$$

które otrzymuje się całkując rów. (3.1) względem prędkości u . Równoważność równań (3.2) i (3.3) otrzymuje się zakładając odpowiednie więzy na warunek początkowy dla rów. (3.2). Jak wspomniano w rozdziale poprzednim rów. (3.1) - (3.3) opisują nie tylko plazmę izotropową ale również taką, dla której lekkie elek-

trony pod wpływem stałego pola magnetycznego w kierunku osi x-ów stanowią ośrodek jednoosiowo anizotropowy tzn. są pod silnym wpływem tego pola. Natomiast ciężkie jony podlegają znacznie mniejszemu wpływowi tego pola i można przyjąć, że stanowią one ośrodek izotropowy.

Zakładamy następującą postać rozkładu prędkości;

$$(3.5) \quad f_{\alpha} = N_{\alpha} f_{0,\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}$$

gdzie; N_{α} i $f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(u)$ są odpowiednio koncentracją składnika α i rozkładem równowagowym gdy $E=0$, $f_{n,\alpha} = f(u, x, t)$ jest nieliniowym funkcjonałem rzędu n względem E , tzn.

$$(3.6) \quad f_{n,\alpha}(kE) = k^n f_{n,\alpha}(E) \quad \text{i} \quad f_{n,\alpha} \cdot f_{m,\alpha} = f_{n+m,\alpha}$$

$$\text{lub} \quad \|f_{n,\alpha}\|_1 = C_n \|E\|_2^n$$

gdzie C_n jest stałą a $\|\cdot\|_{1,2}$ oznacza odpowiednie normy przestrzeni funkcyjnych. Podstawiając (3.5) do (3.1) i porządkując wyrazy jednakowego rzędu otrzymuje się następującą hierarchię równań:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{1,\alpha} + \left(\frac{N_{\alpha}}{m_{\alpha}} q_{\alpha}\right) E \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial u} = 0$$

$$(3.7) \quad \dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{n,\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E \frac{\partial f_{n-1,\alpha}}{\partial u} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

Rozwiązanie tych liniowych niejednorodnych równań można wyznaczyć zadając warunki początkowe na funkcje rozkładu $f_{n,\alpha}(u, x, 0)$.

Dla wyznaczenia odpowiedzi plazmy, zależnej od stanu równowagowego a niezależnej od warunków początkowych poszukujemy rozwiązań rów. (3.7) w następującej postaci

$$(3.8) \quad f_{1,\alpha} = -\frac{N_{0\alpha}}{m_\alpha} q_\alpha \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial u} \int_{-\infty}^t E(1) dt_1$$

$$f_{n,\alpha} = (-1)^n N_{0\alpha} \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^n \int_{-\infty}^t E(1) \frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{t_1} E(2) \frac{\partial}{\partial u} \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} E(n) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial u} dt_1 \dots dt_n$$

gdzie $E(1)=E(x-u(t-t_1), t_1) \dots E(n)=E(x-u(t-t_n), t_n)$

Rozwiązania na $f_{n,\alpha}$ spełniają warunki (3.6) i stanowią rozwiązanie asymptotyczne, które nazywa się odpowiedzią plazmy na "adiabaticzne włączenie pola w nieskończoności". Rozwiązania te można interpretować jako "pole dalekie" będące ewolucją zaburzenia początkowego zadanego w odległej chwili czasowej i w odległej przestrzeni.

Wstawiając (3.8) do rów. (3.2) otrzymujemy następujące równanie abstrakcyjnego szeregu potęgowego, opisujące pole elektryczne będące odpowiedzią wieloskładnikowej plazmy:

$$(3.9) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} P(E)^n$$

gdzie $P(E)^n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t_1} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_{n-1} u E(1) \frac{\partial}{\partial u} \left\{ E(2) \dots \frac{\partial}{\partial u} [E(n) K_n] \right\}$

oraz $K_n = \sum_{\alpha} \frac{N_{0\alpha}}{\epsilon_0} q_\alpha \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^n f'_{0\alpha}(u)$

Całkując rów. (3.9) względem czasu t i przenosząc na lewą stronę równania wyrazy liniowe względem pola E , mamy

$$(3.10) \quad E(x_1, t) + \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x_1, t-t_1) E(x_1, t_1) dx_1 = P(x_1^t)$$

gdzie
$$K(x, t) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 f_{\alpha}(\frac{x}{t}), \quad \omega_{\alpha}^2 = \frac{N_{\alpha} Q_{\alpha}^2}{\epsilon_0 m_{\alpha}}$$

oraz
$$P(x_1^t) = \int_{-\infty}^t dt_1 \sum_{n=2}^{\infty} P_n(x_1^t)$$

Wyraz liniowy przekształcono,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u f'_{\alpha}(u) \int_{-\infty}^t E(x-u(t-t_1), t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} [f_{\alpha}(\frac{x-x_1}{t-t_1})] E(x_1, t_1) dt_1,$$

zmieniając zmienne całkowania

$$x_1 = x - u(t-t_1)$$

oraz korzystając z relacji

$$\int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} [f_{\alpha}(\frac{x-x_1}{t_1-t_2})] E(x_1, t_2) = \int_{-\infty}^t dx_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \frac{dt_2}{dt_1} f_{\alpha}(\frac{x-x_1}{t-t_1}) E(x_1, t_1) dt_1,$$

gdzie
$$f_{\alpha}(\pm \infty) = 0, \quad E(x, -\infty) = 0$$

4. Sprowadzenie równania abstrakcyjnego szeregu potęgowego do równania nieliniowego oscylatora

Rozwiązanie rów. (3.10) stanowi odpowiedź plazmy na zaburzenie w odległej przeszłości i w odległej przestrzeni. Jedynym rozwiązaniem, które jest bardzo łatwo otrzymać to rozwiązanie zerowe, tzn. $E = 0$. W celu wyznaczenia niezerowego rozwiązania skorzystamy z następującej własności wyrazów abstrakcyjnego szeregu przyjmując, że

$$E(x,t) = E(x-Ut), \quad \xi = x-Ut$$

możemy napisać

$$f_{n,\alpha} = C_{n,\alpha} \int_{\xi}^{\infty} \dots \int_{\xi_{n-1}}^{\infty} E(\xi_1) \dots E(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

i ponieważ potencjał pola elektrycznego

$$\varphi(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} E(\xi_1) d\xi_1$$

zatem

$$f_{n,\alpha} = \frac{C_{n,\alpha}}{n!} \varphi^n(\xi)$$

gdzie

$$C_{n,\alpha}(u) = (-1)^n N_{\alpha\alpha} \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}}\right)^n (u-U)^{-1} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \dots \frac{\partial}{\partial u} [(u-U)^{-1} f_{0,\alpha}(u)] \right\}$$

a więc

$$(4.1) \quad f_{\alpha}(u, \xi) = N_{\alpha\alpha} f_{0,\alpha}(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{n,\alpha}(u)}{n!} \varphi^n(\xi)$$

Natomiast rów. (3.10) przyjmuje postać

$$(4.2) \quad E(\xi) = - \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\alpha} \int_{\xi}^{\infty} (\xi - \xi_1) \int_{\xi_1}^{\infty} \dots \int_{\xi_{n-1}}^{\infty} E(\xi_1) \dots E(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

gdzie

$$(4.3) \quad A_n^{\alpha} = (-1)^n \frac{N_{\alpha}}{\epsilon_0} \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^n q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial}{\partial u} (u-U)^{-1} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \dots \frac{\partial}{\partial u} [(u-U)^{-1} f'_{\alpha}(u)] \right\} du$$

Różniczkując jednokrotnie rów. (4.2) otrzymujemy równanie nieliniowego oscylatora

$$(4.4) \quad \varphi_{\xi\xi} = \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n^{\alpha} \varphi^n(\xi) = \sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}}{\epsilon_0}$$

gdzie q_{α} jest gęstością składnika α oraz $E = -\varphi_{\xi}$.

W pracy [3] przedstawiono solitonowe rozwiązania dla tego równania w przypadku "zimnych" jonów i "gorących" elektronów - tzw. fale jonowo-dźwiękowe, "gorących" jonów i elektronów oraz trójskładnikowej plazmy, tzn. w przypadku dwóch rodzajów zimnych jonów i gorących elektronów. W tym ostatnim przypadku otrzymano fale gęstości - solitonowe i antysolitonowe. Warto podkreślić, że w rozpatrywanych tu przypadkach szereg potęgowy

prawej strony rów. (4.4) został zsumowany do odpowiednich funkcjonałów funkcji $\varphi(\xi)$ zależnych od sumy energii potencjalnej pola elektrycznego i kinetycznej cząstek składników α plazmy. Rozwiązania rów. (4.4) są rozwiązaniami rów. (3.10) i stanowią odpowiedź plazmy na "adiabaticzne włączenie

pola w nieskończoności". Możemy więc zauważyć, że "pole dalekie" w pełni nieliniowej plazmy może być falą solitonową.

Rozwiązanie rów. (4.4) otrzymuje się metodą płaszczyzny fazowej, tzn. mnożąc lewą i prawą stronę (4.4) przez φ_ξ i całkując, otrzymuje się równanie

$$(4.5) \quad \varphi_\xi^2 = 2 \sum_{\alpha} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} A_{m-1}^{\alpha} \varphi^m$$

dla którego sporządza się odpowiednie wykresy fazowe.

5. Wpływ gęstości cząstek składników plazmy na kształt fali solitonowej

W pracy [3] rozpatrzono przypadek solitonu jonowo-dźwiękowego małej lecz skończonej amplitudy, który jest taki jak soliton otrzymany przy pomocy opisu hydrodynamicznego plazmy w przybliżeniu równania Kortewega de Vries'a. Należy zauważyć, że przyjęty tu opis przy pomocy równań hierarchii dla nieliniowości drugiego rzędu sprowadza się do opisu hydrodynamicznego. Soliton ten jest

$$(5.1) \quad \varphi = \frac{3\delta}{\beta_0} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\delta} (\xi - \xi_0) \right]$$

gdzie $\delta = A_1^e + A_1^i$ oraz $\beta_0 = -(A_2^e + A_2^i)$

Zgodnie z wzorem (4.3) i przyjętym w [3] rozkładem równowagowym dla jonów i elektronów, mamy

$$(5.2) \quad \begin{aligned} A_1^e &= \frac{\omega_{pe}^2}{a_e^2 - U^2}, & A_2^e &= 3\omega_{pe}^2 \frac{q}{m_e} \frac{a_e^2 + 3U^2}{(a_e^2 - U^2)^2} \\ A_1^i &= \frac{\omega_{pi}^2}{U^2}, & A_2^i &= 3\omega_{pi}^2 \frac{q}{m_i} \frac{1}{U^4} \end{aligned}$$

gdzie przyjęto $N_{oe} = N_{oi} = N_0$ oraz $q_i = -q_e = q$ co zapewnia globalną neutralność plazmy, oraz

$$\omega_{oe}^2 = \frac{N_0 q^2}{\epsilon_0 m_e} \quad \alpha = e, i$$

$$a_e^2 = \frac{\chi T_e}{m_e}$$

χ - stała Boltzmann

T_e - temperatura elektronów

A więc

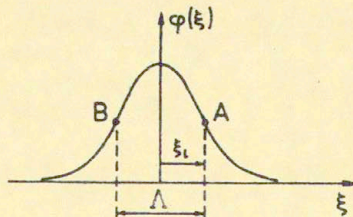
$$(5.3) \quad \delta = A_1^e + A_1^i = \frac{U^2 \omega_{oe}^2 + \omega_{oi}^2 c_e^2 - \omega_{oi}^2 U^2}{U^2 (a_e^2 - U^2)} \approx \frac{1 - c_e^2 / U^2}{\lambda_e^2}$$

gdzie $\lambda_e^2 = a_e^2 / \omega_{oe}^2 = k T_e \epsilon_0 / N_0 q^2$ oraz $a_e^2 \gg U^2$

$$c_e^2 = a_e^2 \left(\frac{\omega_{oi}}{\omega_{oe}} \right)^2 = \frac{\chi T_e}{m_i}, \quad \omega_{oe}^2 \gg \omega_{oi}^2$$

lub $\delta \approx \frac{N_0 q^2}{\epsilon_0} \frac{U^2 / m_e - a_e^2 / m_i}{a_e^2 U^2} \text{ [m}^{-2}\text{]}$

Szerokość solitonu (5.1) jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z gęstości plazmy. Wyznamy długość fali solitonowej Λ pokazanej na Rys.1, gdzie Λ jest odległością między punktami przegięcia A i B.



Rys. 1

Oznaczenie długości fali solitonowej.

Dla rozpatrywanego przypadku równ. (4.4) przyjmuje postać

$$\varphi_{\xi_1} = \delta\varphi - \frac{1}{2}\beta\varphi^2$$

Rozwiązanie tego równania dane jest wzorem (5.1). Punkty przegięcia występują dla takich ξ_1 , dla których $\varphi_{\xi_1} = 0$, tj.

$$\delta\varphi - \frac{1}{2}\beta\varphi^2 = 0$$

lub

$$\varphi = \frac{3\delta}{\beta} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta}\xi_1\right) = \frac{2\delta}{\beta}$$

czyli

$$\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta}\xi_1\right) = \frac{2}{3}$$

skąd otrzymujemy

$$(5.4) \quad \Lambda = 2\xi_1 = \frac{2.634}{\sqrt{\delta}}$$

Im większa gęstość plazmy tym jest smuklejszy kształt fali solitonowej. Następnie zbadamy wpływ koncentracji N_0 na amplitudę solitonu. W tym celu wyznaczmy zależność współczynnika β_0 od N_0 .

$$\beta_0 = -(A_2^e + A_2^i) \approx 3 \frac{\omega_{pe}^2}{\alpha_e^4} \frac{q}{m_e} \left(1 + \frac{c_s^2}{U^2}\right)$$

a zatem amplituda solitonu wynosi

$$(5.5) \quad \frac{3\delta}{\beta_0} \approx \alpha_e^2 \frac{m_e}{q} \frac{1 - c_s^2/U^2}{1 + c_s^2/U^2} \text{ [Volt]}$$

i niezależny od gęstości plazmy. Natomiast zależy wprost proporcjonalnie od temperatury gazu elektronowego przy ustalonym

stosunku $z = c_s/U$. Zgodnie z wzorem (5.3) możemy napisać, że

$$(5.6) \quad \delta = \frac{\omega_p^2}{\Omega_e^2} (1 - c_s^2/U^2)$$

a zatem zgodnie z (5.4) długość fali solitonowej jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z temperatury T_e przy ustalonym $z = c_s/U$.

W celu wyznaczenia zależności kształtu solitonu od gęstości w przypadku pełnej nieliniowości rozważmy plazmę dwuskładnikową, dla której $N_{oe} = N_{oi} = N_0$ oraz $q_i = -q_e = q$, wtedy rów. (4.4) przyjmie postać

$$(5.7) \quad \varphi_{\xi\xi} = \frac{N_0 q}{\epsilon_0} V(\varphi)$$

gdzie $V(\varphi)$ jest bezwymiarową funkcją niezależną od koncentracji N_0 i wynosi:

$$V(\varphi) = \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n^{\alpha} \left(\frac{q_{\alpha} \varphi}{m_{\alpha}} \right)^n, \quad \alpha = e, i$$

gdzie

$$B_n^{\alpha} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial}{\partial u} (u-U)^{-1} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \dots \frac{\partial}{\partial u} [(u-U)^{-1} f'_{\alpha, \alpha}(u)] \right\} du$$

Amplituda solitonu określona jest $\varphi_{\xi} = 0$ i wyznaczana na podstawie rów. (4.5), tj.

$$\varphi_{\xi}^2 = 2 \frac{N_0 q}{\epsilon_0} V(\varphi)$$

czyli

$$V(\varphi_{\max})=0, \quad \varphi_{\max} \neq 0$$

a zatem nie zależy od N_0 ponieważ $V(\varphi)$ nie zależy od N_0 .

W pracy [3] dla rozpatrzonych przypadków dwuskładnikowej plazmy wyznaczono funkcję $V(y)$, gdzie

$$y = \frac{2q\varphi(\xi)}{m_e a_e^2}$$

$$(5.8) \quad y^2 = 4 \frac{\omega_{pe}^2}{a_e^2} V(y)$$

Funkcja $y(\xi)$ oraz funkcja $V(y)$, którą nie zależy od N_0 , są wielkościami bezwymiarowymi. Możemy napisać, że

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{a_e}{\omega_e} \frac{1}{\sqrt{V(y)}}$$

następnie całkując ostatnie równanie, mamy

$$2 \frac{\omega_e}{a_e} (\xi - \xi_0) = \int_0^y \frac{dy_1}{\sqrt{V(y_1)}} = S^{-1}(y)$$

a zatem

$$(5.9) \quad y = S \left[2 \frac{\omega_e}{a_e} (\xi - \xi_0) \right]$$

gdzie S jest odwrotną funkcją względem S^{-1} . Jak wynika z ostatniego wyrażenia długość solitonu jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratowego pierwiastka z koncentracji N_0 i wprost proporcjonalna do prędkości termicznej a_e . Dla ustalonej wartości stosunku $z = c_s/U$ wyznacza się wartość amplitudy

$$(5.10) \quad y_a(\xi) = \frac{2q\varphi_a(\xi)}{m_e a_e^2}$$

i amplituda y_a nie zależy od temperatury, ponieważ $V(y)$ zależy od temperatury tylko za pośrednictwem $z = c_s/U$. Zgodnie z (5.10) amplituda solitonu y_a jest proporcjonalna do a_e^2 czyli proporcjonalna do temperatury elektronów.

6. Wnioski końcowe

Rozpatrzone pole dalekie czyli odpowiedź plazmy na zaburzenie odległe w czasie i przestrzeni, zależy od rozkładu równowagowego składników plazmy. Dla przyjętych rozkładów równowagowych, dla których mogą pojawić się solitony jako odpowiedź plazmy, kształt potencjału fali solitonowej o dowolnej amplitudzie, przy uwzględnieniu pełnej nieliniowości, zależy od gęstości plazmy. Zależność ta wyraża się związaniem impulsu solitonowego przy wzroście gęstości i zachowaniem wielkości amplitudy. Kształt solitonu w plazmie jonowo-dźwiękowej zależy od temperatury gorących elektronów w sposób bardziej skomplikowany. W rów. (5.8) temperatura elektronów występuje w samej funkcji y , w funkcji

$V(y)$ poprzez stosunek prędkości dźwięku jonowego ($c_s = (\kappa T_e / m_i)^{1/2}$) do prędkości solitonu U ($z = c_s/U$) oraz tam gdzie koncentracja N_0 , tj. w fazie fali, rów. (5.9).

Ustalając stosunek c_s/U możemy zauważyć, że ze wzrostem temperatury elektronów proporcjonalnie rośnie amplituda i szerokość impulsu solitonowego. Oczywiście zmiany koncentracji i temperatury plazmy mogą odbywać się w zakresach, dla których ważny jest opis plazmy przy pomocy równań Własowa-Poissona, tzn. w kuli Debye'a musi znajdować się dostateczna ilość cząstek naładowanych.

Omówiliśmy tu zmiany kształtu potencjału elektrycznego $\varphi(\xi)$ fali solitonowej pod wpływem koncentracji i temperatury. Z tymi zmianami związane są również zmiany pola elektrycznego

$$(6.1) \quad E(\xi) = -\frac{d\varphi}{d\xi}$$

gęstości ładunku elektrycznego

$$(6.2) \quad \rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = -\epsilon_0 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}, \quad \alpha = e, i$$

oraz zmiany gęstości poszczególnych składników ρ_{α} . Tak na przykład, można zauważyć, że ze wzrostem koncentracji równowagowej N_0 , gęstość ładunku ρ solitonu rośnie, tzn. rośnie jego amplituda, ale zmniejsza się obszar skupienia tego ładunku. Jakościowy przebieg funkcji $\rho(\xi)$ pokazany jest na Rys.3 w pracy [3].

7. Literatura

- [1] A.I. Achiezer - Elektrodynamika Plazmy, Izdat. "Nauka" Moskwa, 1974.
- [2] G.B. Whitham - Linear and Non linear Waves. J. Wiley & Sons 1974, N. York.
- [3] A.J. Turski - Prace IPPT, Nr 11/1982. Solitonowe i anty-solitonowe fale ładunku przestrzennego wieloskładnikowej w pełni nieliniowej plazmy Własowa.
- [4] W.I. Karpman - Nielinejne wołny w dispergirujuszocznych sredach, Izdat. "Nauka" Moskwa 1973.

Spis rzeczy

1. Wstęp
2. Wpływ pola magnetycznego
3. Równanie abstrakcyjnego szeregu potęgowego opisujące odpowiedź wieloskładnikowej plazmy
4. Sprowadzenie równania abstrakcyjnego szeregu potęgowego do równania oscylatora nieliniowego
5. Wpływ gęstości cząstek składników plazmy na kształt fali solitonowej
6. Wnioski końcowe
7. Literatura