

- 3.31 — pobudzenie i propagacja fal elektro-
— magnetycznych, falowody
3.32 — plazma

11 / 1984

Anna Brahmner-Kacprzyńska

POLE W POBLIŻU CZOŁA SYGNAŁU
W FALOWODZIE WYPEŁNIONYM
PLAZMĄ DYSPERSYJNĄ

11/1984

P. 269



WARSZAWA 1984

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 206

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1984 r.



56959



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 0,4. Ark. druk.0,75

Oddano do drukarni w lutym 1984 r.

Nr zamówienia 151/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Anna Brahmer-Kacprzyńska

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

POLE W POBLIZU CZOŁA SYGNAŁU W FALOWODZIE WYPEŁNIONYM
PLAZMĄ DYSPERSYJNĄ

Streszczenie

Dla płaskiego falowodu o ściankach doskonale przewodzących wypełnionego jednorodną plazmą elektronową skonstruowano funkcję Greena w postaci sumy funkcji Bessla J_0 (ściśle rozwiązanie). Traktując problem ten jako problem kanoniczny, dla przypadku plazmy niejednorodnej przedstawiono pole w pobliżu czoła sygnału jako odpowiednio dobraną sumę funkcji Bessla.

1/Wstęp

Dla określenia własności propagacji w ośrodku dyspersyjnym, tzn. takim, w którym przenikalność dielektryczna jest funkcją częstotliwości fali, nie wystarczy zbadać ruchu falowego w stanie ustalonym, innymi słowy nieograniczonego w czasie i przestrzeni. Ustalenie wspomnianych własności możliwe jest dopiero po zbadaniu propagacji sygnału ograniczonego w czasie. Sygnał taki bowiem, o danej w chwili początkowej postaci, rozchodząc się w ośrodku dyspersyjnym ulega deformacji, gdyż każda z jego harmonicznych składowych rozchodzi się z inną prędkością. Propagacja sygnałów nieustalonych w ośrodkach dyspersyjnych była od dawna przedmiotem wielu prac, por. np. [1]. Problem ten ostatnio znów budzi zainteresowanie ze względu na zastosowania praktyczne takie jak impulsowe pobudzenie falowodów, propagacja świstów w duktach magne-

tosferycznych, propagacja sygnałów VLF w jonosferze, diagnostyka plazmy.

Opracowanie niniejsze dotyczy propagacji sygnału elektromagnetycznego w strukturze prowadzącej jaką stanowi falowód płaski o dwu ściankach doskonale przewodzących, wypełniony izotropową, zimną plazmą elektronową posiadającą własność dyspersji. Pole elektromagnetyczne promieniowane przez źródło umieszczone wewnątrz falowodu można przedstawić albo jako sumę prowadzonych modów (rodzajów falowodowych), albo jako sumę pól wzdłuż promieni dochodzących do punktu obserwacji drogą kolejnych odbić od ścian [2]. W ośrodku charakteryzującym się dyspersją czasową nieużyteczna staje się zwykła metoda optyki geometrycznej, a do asymptotycznej analizy pola należy stosować koncepcję promieni przestrzenno-czasowych, wprowadzonych po raz pierwszy przez R. Lewisa. [3].

W wielu problemach fizycznych pojawia się pytanie jak wiele modów czy wielokrotnie odbitych promieni należy uwzględnić przy obliczaniu pola w strukturze prowadzącej. Odpowiedź można znaleźć stosując metodę hybrydową, promieniowo-modową, opracowaną w grupie L.B. Felsena [4], [5]. Jak wykazano w dotychczas przeanalizowanych problemach prowadzenia pól, zastosowanie kombinacji hybrydowej: pola wzdłuż promieni + mody wymaga uwzględnienia o wiele mniejszej ilości zarówno promieni jak i modów, aniżeli opis rozkładu pola tylko przez sumę modów lub tylko przez sumę pól wzdłuż promieni. Sformułowanie hybrydowe daje też możliwość rozwiązania konkretnych zadań dla ośrodków niejednorodnych, dla półprzepuszczalnych ścianek czy przeszkód wewnątrz falowodu. W rozwiązanych dotąd metodą hybrydową problemach nie rozpatrywano struktur wypełnionych ośrodkiem dyspersyjnym. Autorka tej pracy pracuje nad tym ostatnim zagadnieniem poszukując sformułowania hybrydowego dla modów i promieni przestrzenno-czasowych [6].

Asymptotyczny opis pola metodą promieni przestrzenno-czasowych zawodzi w pobliżu czoła sygnału (frontu fali). Pole w tym obszarze czasowym tzn. dla $t \approx \frac{r}{c}$, gdzie r - współrzędna punktu obserwacji, przedstawia się przez funkcję przejściową

dobraną stosownie do badanego problemu. Temu zadaniu poświęcone będą dalsze rozważania niniejszej pracy. Przedstawione wyniki obejmują kolejno: 1. funkcję Greena dla płaskiego falowodu wypełnionego ośrodkiem niedyspersyjnym, 2. funkcję Greena dla płaskiego falowodu wypełnionego jednorodną plazmą elektronową 3. funkcję przejściową - opisującą pole w pobliżu czoła sygnału w falowodzie wypełnionym niejednorodną plazmą elektronową.

II/ Funkcja Greena dla płaskiego falowodu wypełnionego ośrodkiem niedyspersyjnym.

Dążąc do określenia pola w falowodzie wypełnionym ośrodkiem plazmowym rozwiązywać będziemy zadanie dwuwymiarowe: jedna zmienna przestrzenna i zmienna czasowa. Zadanie takie, choć uproszczone, zawiera najbardziej istotny dla nas element - dowolną zależność od czasu, a rozwiązywane równania są równaniami hiperbolicznymi. Jako etap wstępny do dalszych rozważań przeanalizujemy przypadek wypełnienia niedyspersyjnego między dwiema płaszczyznami. Poszukujemy funkcji Greena dla równania falowego z warunkami brzegowymi typu Neumanna. Funkcja G (potencjał skalarny przez który można wyrazić pole) spełnia następujące równanie :

$$/1/ \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(z, z_0; t) = - \delta(t) \delta(z - z_0)$$

gdzie c - prędkość światła, źródło o charakterystyce impulsowej $\delta(t)$ umieszczone jest na płaszczyźnie $z = z_0$ pomiędzy dwiema doskonale przewodzącymi płaszczyznami $z = 0$ oraz $z = a$, na których funkcja G spełnia warunki brzegowe typu Neumanna :

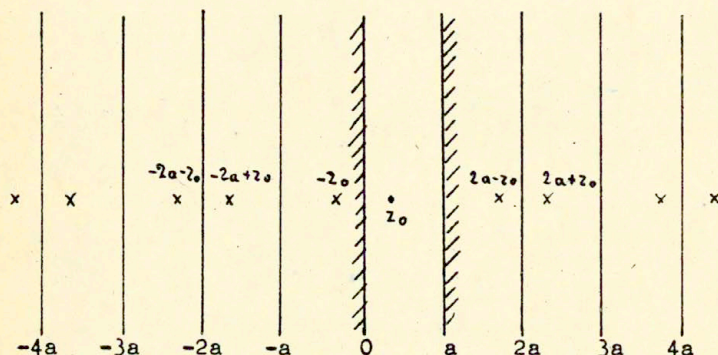
$$/2/ \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = 0 \text{ oraz } z = a$$

Rozwiązaniem równania /1/ jest funkcja Heaviside'a (np. [7])

$\frac{c}{2}U(ct - |z|)$, zdefiniowana następująco:

$$/3/ \quad U(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Rozwiązania /1/ z warunkami /2/ poszukujemy metodą obrazów, dodając fikcyjne źródła, które w sumie powodują spełnienie warunku brzegowego. Rozkład tych źródeł ilustruje schematycznie rysunek 1.



Rys.1: Rozkład źródeł (do $n=2$) w rozwiązaniu /4/.

W rezultacie otrzymujemy następującą sumę:

$$/4/ \quad G = (G_0 + G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \frac{c}{2}$$

gdzie oznaczono:

$$G_0 = U(ct - |z - z_0|)$$

$$G_1 = \sum_{n=0}^{\infty} U(ct - |z - 2an + z_0|)$$

$$G_2 = \sum_{n=1}^{\infty} U(ct - |z - 2an - z_0|)$$

$$G_3 = \sum_{n=1}^{\infty} U(ct - |z + 2an - z_0|)$$

$$G_4 = \sum_1^{\infty} U(ct - |z + 2an + z_0|)$$

Ponieważ interesuje nas rozwiązanie dla punktu obserwacji między płaszczyznami tzn. dla $0 < z < a$, można w kolejnych funkcjach G moduł zastąpić odpowiednimi znakami. Funkcję G_0 można, przesuwając wskaźnik sumowania n , włączyć do odpowiedniej sumy w zależności od tego jaki jest znak $|z - z_0|$. Interesuje nas pole w konkretnej chwili czasu $t < \infty$. Przyjmując, iż np. $ct = z - z_0 + 2aM$, gdzie M - maksymalna liczba odbić, otrzymamy w każdej z sum $G_{1,2,3,4}$ - poczynając od $M + 1$ - wszystkie funkcje $U [ct - (z - z_0 + 2an)] = 0$ dla $n \gg M + 1$.

Przeprowadzone rozumowanie, choć dotyczy elementarnie prostego problemu, wskazuje na ważny aspekt mechanizmu propagacji - w wybranym układzie prowadzącym rozchodzą się cztery czoła (fronty) falowe.

III/ Funkcja Greena dla płaskiego falowodu wypełnionego jednorodną plazmą elektronową.

Funkcja Greena dla zimnej plazmy elektronowej spełnia, w przypadku jednej zmiennej przestrzennej, następujące równanie typu Kleina-Gordona :

$$/9/ \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \right] G(z, z_0; t) = -\delta(t) \delta(z - z_0)$$

gdzie ω_p oznacza częstość plazmową charakteryzującą ośrodek.

Żądamy, aby funkcja G spełniała zasadę przyczynowości:

$$/10/ \quad G = 0 \quad \text{dla } t < 0$$

Rozwiązaniem ścisłym tego problemu jest funkcja Bessla J_0 :

$$G = \frac{c}{2} \int_0 \left(\frac{\omega_p}{c} \sqrt{ct^2 - (z - z_0)^2} \right) U(ct - |z - z_0|)$$

Zakładamy, że plazmą ograniczona jest dwoma doskonale przewodzącymi płaszczyznami, na których są spełnione warunki /2/.

Rozwiązanie równania /9/ z warunkami brzegowymi typu Neumana /2/ można otrzymać tak jak w punkcie II/ metodą kolejnych odbić. W wyniku otrzymujemy :

$$/11/ \quad G = (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \frac{c}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{gdzie} \quad G_1 &= \sum_0^{\infty} J_0 \left(\frac{\omega p}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (z - z_0 + 2a\pi)^2} \right) U [ct - (z - z_0 + 2a\pi)] \\ G_2 &= \sum_0^{\infty} J_0 \left(\frac{\omega p}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (z + z_0 + 2a\pi)^2} \right) U [ct - (z + z_0 + 2a\pi)] \\ G_3 &= \sum_0^{\infty} J_0 \left(\frac{\omega p}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (z - z_0 - 2a\pi)^2} \right) U [ct - (z - z_0 - 2a\pi)] \\ G_4 &= \sum_0^{\infty} J_0 \left(\frac{\omega p}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (z + z_0 - 2a\pi)^2} \right) U [ct - (z + z_0 - 2a\pi)] \end{aligned}$$

Uzyskane rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym, opisującym pole w całej przestrzeni (z, t) , a więc również w pobliżu czoła sygnału. W zapisie /11/ uwzględniono iż interesują nas punkty obserwacji dla których zachodzi $0 < z < a$ oraz dla ustalenia uwagi przyjęto $z - z_0 > 0$. Interesuje nas konkretny czas obserwacji $t < \infty$. Przyjmijmy, że $ct < z - z_0 + 2a\pi(1)$, wobec tego w kolejnych sumach prowadzimy sumowanie do M - maksymalnej liczby odbić. Stosując wzór sumacyjny Poissona [8], [9], można powyższe rozwiązanie zapisać w postaci sumy odpowiednich modów.

Wzór ten, w postaci "częściowej" przybiera postać (por. [9], [5])

$$/12/ \quad \sum_{n=0}^M g_n = -\frac{1}{2} g_0 - \frac{1}{2} g_M + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi M} g_x e^{-ixl} dx ; \quad \text{gdzie } n = \frac{x}{2\pi}$$

Wzór /13/ można zastosować kolejno do G_1, G_2, G_3, G_4 .

Po przekształceniach można pokazać, że zachodzi :

$$\int_0^{2\pi M} J_0 \left(\frac{\omega p}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (z - z_0 + \frac{ax}{\pi})^2} \right) e^{-ixl} dx = \frac{\sin t \sqrt{\omega p^2 + (\frac{l}{a\pi})^2}}{\sqrt{\omega p^2 + (\frac{l}{a\pi})^2}} e^{-il \frac{z}{a\pi}}$$

dla $ct > z - z_0 + \frac{ax}{\pi}$

Po skorzystaniu z danych w tablicach [11], [12], wzorów, otrzymamy n.p. dla pierwszej sumy :

$$/13/ G_1 = -\frac{1}{2} \int_0 \left(\frac{\omega p}{c} \sqrt{z^2 t^2 - (z-z_0)^2} U(ct-z+z_0) + \left[\frac{1}{2} \int_0 \left(\frac{\omega p}{c} \sqrt{z^2 t^2 - (z-z_0-2\alpha M)^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{L=-\infty}^{+\infty} d_L \right] \right) \times$$

$$\text{gdzie } d_L = \frac{\sin t \sqrt{\omega p^2 + \left(\frac{L}{\alpha n}\right)^2}}{\sqrt{\omega p^2 + \left(\frac{L}{\alpha n}\right)^2}} e^{-iL \frac{z}{\alpha n}} \left| \times U \left[ct - (z-z_0-2\alpha M) \right] \right.$$

IV/ Pole w pobliżu czoła sygnału w falowodzie wypełnionym niejednorodną plazmą.

W pewnych, specjalnych przypadkach, jak rozpatrywane powyższej równanie Kleina-Gordona ze stałymi współczynnikami, pole nieustalonego sygnału można wyrazić w zamkniętej postaci przez znane funkcje, lecz ogólnie przedstawia się je w postaci całkowej; reprezentację całkową otrzymuje się przez całkowanie rozwiązań harmonicznych względem częstości. Często, dla ośrodków

niejednorodnych, rozwiązania harmoniczne równań falowych są możliwe do znalezienia jedynie w postaci całek lub szeregów. Dlatego też dla uzyskania informacji o sygnałach nieustalonych sięga się po metody asymptotyczne. Owocną i dającą fizyczną interpretację zjawiska metodą jest wspomniana już procedura promieni przestrzenno-czasowych wiążąca się z techniką punktu siódkowego [3], [10], [13].

Typowe przedstawienie całkowe pola sygnału nieustalonego, na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω ma postać:

$$/14/ I = \int_{-\infty + i\alpha}^{\infty + i\alpha} f(\omega) e^{iq(\omega)} d\omega, \quad \alpha > 0$$

gdzie $q(\omega) = k(\omega)z - \omega t$,

$k(\omega)$ oznacza zależną od częstości liczbę falową lokalnej fali płaskiej, z - parametr związany z odległością, $f(\omega, z)$ jest amplitudą lokalnej fali płaskiej. Droga całkowania jest tak dobrana, aby przechodziła ponad osobliwościami wyrażenia podcałkowego, co zapewni spełnienie zasady przyczynowości. Zakłada się, że $k(\omega) \sim \frac{\omega}{c}$ dla $\omega \rightarrow \infty$, gdzie c - prędkość światła w próżni.

Własności asymptotyczne całki /14/ bada się przy założeniu, iż parametr z jest duży. Po odpowiednim przeskalowaniu można alternatywnie wprowadzić duży parametr związany z własnościami ośrodka np. dużą częstotliwością plazmową. Główny przyczynek do całki typu /14/ pochodzi od punktów siodłowych ω_s , określonych przez :

$$/15/ \quad \left. \frac{d q}{d \omega} \right|_{\omega_s} = 0 \quad \text{lub} \quad k'(\omega_s) = \frac{t}{z} = \frac{1}{v_g(\omega_s)}$$

gdzie v_g oznacza prędkość grupową "paczki" falowej wokół ω_s . Krzywe, na których ω_s jest stałe, definiują promienie przestrzenno-czasowe. Pole opisane równaniami zwyczajnymi wzdłuż tych promieni odpowiada części głównej sygnału, rozchodzącej się z prędkością grupową. Ten wynik asymptotyczny przestaje obowiązywać dla punktów obserwacji w pobliżu czoła sygnału, odpowiadających pierwszemu prekursorowi, gdzie zachodzi $z \sim ct$. Dla częstotliwości odpowiadających największej prędkości - c - rozchodzenia się początkowego zaburzenia, ośrodek traci własność dyspersji. Równanie dyspersyjne, wiążące wektor falowy z częstotliwością, ma dla $\omega \rightarrow \infty$ postać taką jak dla próżni: $\omega = kc$. Pole w pobliżu czoła sygnału jest tworzone przez składowe wysokoczęstotliwościowe [10], [13]. Metoda punktu siodłowego staje się wtedy bezużyteczna, gdyż $q'' \rightarrow 0$ i promienie nie opisują tej części sygnału. Dla opisu pola w omawianym zakresie wprowadza się funkcję przejściową.

Ponieważ główny przyczynek do /14/ dla $t \approx \frac{z}{c}$ pochodzi od zakresu wysokich częstotliwości, można przyjąć, że zachodzi :

$$/16/ \quad k(\omega, z) \sim \frac{\omega}{c} - \frac{\omega_a(z)}{c\omega} \quad \omega \rightarrow \infty$$

gdzie ω_a wielkość związana z parametrami ośrodka.

W przypadku rozpatrywanego modelu plazmy elektronowej, w której pole jest opisane równaniem Kleina-Gordona, związek dyspersyjny ma postać

$$/17/ \quad ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

z wzoru /17/ otrzymujemy

$$/17a/ \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \frac{\omega}{c} - \frac{\omega_p^2}{c\omega^2} \quad \text{dla } \omega \rightarrow \infty.$$

Następnym założeniem jest:

$$/18/ \quad f(\omega, z) \sim B(z) \left(\frac{\omega}{c}\right)^{\beta}$$

gdzie $B(z)$ -wielozmienna funkcja z niezależna od częstości. Korzystając z założeń /16/ i /17/ można dla $t \approx \frac{z}{c}$ całkę /14/ sprowadzić do postaci odpowiadającej transformacie Laplace'a dla funkcji J_{ν} [10], [11]:

$$/19/ \quad I_{\rho} \sim B\left(\frac{\tau}{a}\right)^{-(1+\beta)/2} J_{-1-\beta} \left[2(a\tau)^{1/2}\right]$$

gdzie $J(x)$ jest funkcją Bessla argumentu x , $\tau \approx t - \frac{z}{c}$ (małe),

$a = \frac{\omega_a^2 z}{c}$ dla ośrodka jednorodnego, lub

$$a = \frac{1}{c} \int_0^z \omega_a^2(z) dz \quad \text{dla ośrodka niejednorodnego.}$$

W przypadku rozpatrywanego modelu plazmy elektronowej $\omega_a = \frac{\omega_p}{2}$ (por./17/). Ponieważ dla tego przypadku ścisłym rozwiązaniem równania /9/ jest funkcja $J_0\left(\omega_p \sqrt{t^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2}\right)$, to jeśli dla $ct \approx z$ zastąpimy $\sqrt{t^2 - z^2/c^2}$ wielkością $\sqrt{1 - \frac{z}{c}} \left(t - \frac{z}{c}\right)$, otrzymamy funkcję przejściową typu /19/ kładąc $\beta = -1$.

Wobec tego dla badanego ośrodka funkcja I_{ρ} przybiera postać

$$/20/ \quad I_{\rho} \sim B \int_0 \left(2(a\tau)^{1/2}\right)$$

Dla źródła umieszczonego w niejednorodnej plazmie między dwoma płaszczyznami doskonale przewodzącymi (problem /9/ /2/ dla $\omega_p = \omega_p(z)$) przez analogię z przypadkiem wypełnienia jednorodnego funkcję Greena można zapisać jako sumę czterech rodzajów funkcji G_1 /11/. Czoło sygnału dla każdej z funkcji G_1 jest opisane funkcją przejściową /20/. Funkcję G za czołem

sygnału można przedstawić jako sumę pól wzdłuż czterech rodzajów promieni. W tym opisie asymptotycznym znane, ściśle rozwiązania (dla $\omega_p = \text{const.}$) służą jako rozwiązania problemu kanonicznego i dostarczają początkowych wartości pola w otoczeniu źródła, a metodą promieni przestrzenno-czasowych znajduje się rozwiązanie w innych punktach (z, t).

Literatura

- [1] L.Brillouin : Wave propagation and group velocity, Acad. Press, New York, 1960.
- [2] D.Batorsky, L.B.Felsen: Radio Science, 6,/1971/, pp911-923.
- [3] R.Lewis: Asymptotic methods for the solution of dispersive hyperbolic equations. W tomie: Asymptotic solutions of differential equations and their applications, Wilcox, N.York 1964.
- [4] L.B.Felsen, T.Ishihara: J.Acoust.Soc.Am. 65, /1979/, pp595-607
- [5] L.B.Felsen, A.Kamel: Hybrid ray-mode formulation of parallel plane waveguide Greens functions, PINY Report*, 1980.
- [6] A.Brahmer-Kacprzyńska: Funkcja Greena dla płaskiego falowodu wypełnionego plazmą elektronową, Prace IPPT, 1982
- [7] P.Morse, H.Feshbach: Methods of theoretical physics, Mc Graw Hill Co, 1953
- [8] M.J.Lighthill: Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji, PWN, Warszawa, 1963.
- [9] A.Papoulis: Signal analysis, Mc Graw Hill Co. N.York, 1977.
- [10] L.B.Felsen, N.Marcuvitz : Radiation and scattering of waves, Prentice Hall, N.J. 1973.
- [11] Tables of integral transforms, A.Erdelyi editor, Mc.Graw-Hill Co. , 1954, V.I. wzór 48
- [12] Gradsztejn, Ryzik I.M. Tablicy integralow... Moskwa, 1962
- [13] L.B.Felsen: IEEE Trans., Vol.AP -17, N.2, 1969. p191
- [14] L.B.Felsen : IEEE Trans. Vol.AP - 20, N.2., 1972p.219