

3.31 — pobudzanie i propagacja
fal elektromagnetycznych,
falowody

3.32 — plazma

Anna Brahmer-Kacprzyńska

**POLE W FALOWODZIE PŁASKIM
WYPEŁNIONYM PLAZMĄ**

19/1985

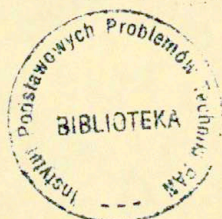
P. 269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 grudnia 1984 r.



56929



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,15 Ark.druk. 1,75
Oddano do drukarni w kwietniu 1985 r.
Nr zamówienia 280/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa ,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Anna Brahmer-Kacprzyńska
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

POLE W FALOWODZIE PŁASKIM WYPEŁNIONYM PLAZMĄ

Streszczenie

Otrzymano reprezentację pola elektromagnetycznego promieniowanego przez źródło harmoniczne umieszczone w płaskim falowodzie wypełnionym zimną plazmą elektronową. Przedyskutowano hybrydowe, promieniowo-modowe przedstawienie tego pola w zależności od częstości źródła.

I. Wstęp

W ośrodku dyspersyjnym prędkość rozchodzenia się fal zależy od ich częstości. Zależny od czasu sygnał wejściowy można rozłożyć na widmo składowych fourierowskich, prześledzić przejście każdej z składowych przez ośrodek, a otrzymany wynik złożyć w punkcie odbioru. W zależności od profilu częstotliwościowego sygnału wejściowego i od własności dyspersji ośrodka, otrzymany sygnał wyjściowy może być rozmyty, ulec kompresji czy innym zniekształceniom. Efekt dyspersji nie odgrywa roli dla czasów obserwacji bliskich czasom przejścia pierwszej odpowiedzi /czoła sygnału rozchodzącego się w każdym ośrodku z prędkością światła w próżni/. Dzieje się to dlatego, iż synteza przejścia od pola zerowego przed sygnałem do pola o skończonej amplitudzie po przejściu czoła wymaga składowych wysokiej częstości.

Dla dostatecznie wysokich częstotliwości fali, cząstki składowe ośrodka fizycznego nie mogą odpowiedzieć na padające pobudzenie i nie wywołują dyspersji. Natomiast dla dużych czasów obserwacji, kiedy niskie częstotliwości dają największy przyczynek do pola, sygnał wyjściowy jest określony przez częstotliwości rezonansowe ośrodka. Pomiędzy czołem sygnału i odpowiedzią wywołaną pobudzeniem częstotliwości rezonansowych, proces propagacji może być opisany przez tzw. paczki falowe [1], [2], z ustaloną częstotliwością główną i małym rozmyciem w koło niej.

W ośrodku jednorodnym paczki falowe przesuwają się ze stałą prędkością grupową \underline{v}_g . Przez nieruchomy punkt obserwacji przechodzą paczki falowe z coraz to niższymi prędkościami. Mierzac pole w nieruchomym punkcie notujemy zmiany częstotliwości w czasie.

Pole elektromagnetyczne promieniowane przez źródło umieszczone wewnątrz falowodu można przedstawić albo jako sumę prowadzonych modów /rodzajów/ falowodowych, albo jako sumę pól promieni optyki geometrycznej dochodzących do punktu obserwacji drogą kolejnych odbić. W wielu problemach fizycznych pojawia się pytanie jak wiele modów czy promieni należy uwzględnić przy obliczaniu rozkładu pola. Odpowiedź można znaleźć stosując metodę hybrydową, promieniowo-modową, opracowaną w grupie L.B. Felsena [3], [4]. Jak sprawdzono w dotychczas przeanalizowanych problemach prowadzenia pól, zastosowanie kombinacji hybrydowej: promienie + mody wymaga uwzględnienia o wiele mniejszej ilości zarówno promieni jak i modów niż opis pola tylko przez mody lub tylko przez promienie. Sformułowanie hybrydowe daje też możliwość rozwiązania problemów dla ośrodków niejednorodnych, dla półprzepuszczalnych ścianek czy przeszkód wewnątrz falowodu. Dobór kombinacji promieni i modów uzasadnia się kryteriami matematycznymi i fizycznymi. Dla każdej wybranej kombinacji, pola modalne są efektem wypadkowym pól nieuwzględnionych promieni i na odwrót: pola promieni powstają z odrzuconych modów. W pewnych przypadkach do sumy modów i promieni należy dodać resztę w postaci całki. Innymi słowy, przez mody /+ reszta jeśli jest to konieczne/ wyrażamy błąd powstały z urwania na pewnym wyrazie sumy promieni i na odwrót promie-

nie /+ reszta, jeśli to konieczne/ określają poprawkę do niekompletnej sumy modów.

W niniejszej pracy zajmiemy się przedstawieniem w postaci hybrydowej pola promieniowanego przez źródło umieszczone w falowodzie wypełnionym ośrodkiem dyspersyjnym. Jest to kontynuacja tematu podjętego w opracowaniu [5].

W porównaniu z dotąd rozwiązywanymi metodą hybrydową zagadnieniami, nowym elementem jest wprowadzenie do struktury prowadzącej ośrodka dyspersyjnego jakim jest plazma.

II. Postawienie problemu. Przedstawienie całkowite rozwiązanie

Między dwiema doskonale przewodzącymi płaszczyznami znajduje się ośrodek dyspersyjny, plazma elektronowa. Wewnątrz plazmy promieniuje źródło o harmonicznej zależności czasowej. Rozważamy przypadek dwuwymiarowy: jedna zmienna przestrzenna z oraz czas t . Przypadek rozpatrywany, choć nie opisuje jeszcze realnego falowodu, zawiera element dyspersji czasowej. Analiza wpływu dyspersji ośrodka na propagację sygnału elektromagnetycznego w falowodzie jest celem niniejszej pracy.

Propagację fal elektromagnetycznych w zimnej plazmie elektronowej opisuje układ równań teorii magnetojonowej. Przy przyjętych założeniach, układ ten można sprowadzić do równania typu Kleina-Gordona:

$$/1/ \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \right] u(z, t) = f(z, t)$$

Oznaczono: u - potencjał skalarny przez który można wyrazić pole

ω_p - częstość plazmowa

c - prędkość światła w próżni

Funkcja źródła w rozwiązywanym zadaniu ma postać:

$$/2/ \quad \ddot{u}(z, t) = \delta(z) e^{-i\omega_0 t} U(t)$$

gdzie funkcja $U(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Źródło umieszczono w punkcie $z = 0$.

Warunki brzegowe dla $z = 0$ oraz dla $z = a$ są jednorodnymi warunkami typu Neumanna:

$$/3/ \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = 0 \text{ i } z = a$$

Żądamy, aby rozwiązanie spełniało zasadę przyczynowości:

$$/4/ \quad u(z, t) = 0 \quad \text{dla } t < \frac{z}{c}$$

Korzystamy z wyników pracy [5], w której otrzymano reprezentację całkową funkcji Greena dla problemu /1/, /3/, /4/:

$$/5/ \quad g(z, 0; t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{e^{-i\omega t} [e^{i\kappa z} + e^{-i\kappa(z-2a)}]}{\kappa (1 - e^{i\kappa a})} d\omega$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

Kontur całkowania na płaszczyźnie zmiennej zespolonej $\omega = \omega_r + i\omega_i$, wybieramy równoległe do osi rzeczywistej, ponad osiowościami wyrażenia podcałkowego. Funkcja podcałkowa jest parzystą funkcją ω , więc nie posiada punktów rozgałęzienia. Przy takim doborze konturu zasada przyczynowości jest spełniona: jeśli zamknijemy kontur dużym półokręgiem $|\omega| \rightarrow \infty$ w górnej półpłaszczyźnie dla $t < \frac{z}{c}$ otrzymamy $g = 0$, a natomiast dla $t > \frac{z}{c}$ kontur zamykamy w dolnej półpłaszczyźnie otrzymując wynik różny od zera.

Transformata Fouriera funkcji $f_1(t)$ ma postać

$$/6/ \quad F_1(\omega) = \frac{1}{i(\omega - \omega_0)}$$

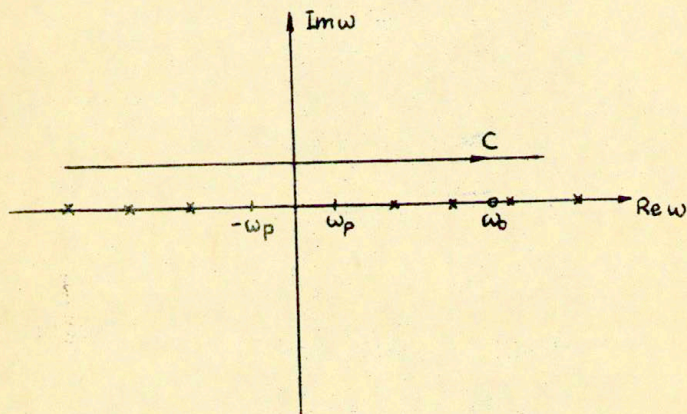
Wobec tego rozwiązanie problemu /1/ - /3/ z funkcją źródła /2/ można w postaci całkowej zapisać następująco:

$$/7/ \quad u(z, t) = \frac{-i}{2\pi} \int_C \frac{e^{-i\omega t} [e^{ikz} + e^{-ik(z-2a)}]}{(\omega - \omega_0) K(1 - e^{2ika})} d\omega \equiv \int_C G(\omega) d\omega$$

gdzie dla uproszczenia funkcję podcałkową oznaczamy przez $G(\omega)$

C - kontur całkowania na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω .

Rys.1.



Rys.1. Droga całkowania i bieguny na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, dla całki /7/.
Oznaczono x - bieguny ω_m
o - biegun ω_0

Dla $t > \frac{z}{c}$ kontur całkowania zamykamy w dolnej półpłaszczyźnie półokręgiem o dużym promieniu $|\omega| \rightarrow \infty$ bez zmiany wartości całki i stosujemy wzór całkowy Cauchy'ego.

Funkcja podcałkowa posiada bieguny w punktach gdzie zachodzi

$$/8/ \quad 1 - e^{i k a} = 0$$

$$\text{czyli } \omega_m = \pm \sqrt{\omega_p^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} c^2, \quad m - \text{liczba całkowita}$$

oraz w punktach $\omega = \omega_0$ i $\omega = \pm \omega_p$

Stosując twierdzenie o residuach otrzymujemy przedstawienie następujące:

$$/9/ \quad u(z, t) = 2\pi i \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \text{Res } G(\omega_m) + \text{Res } G(\omega_0) + \text{Res } G(\pm \omega_p) \right)$$

Wyrażenie /9/ odpowiada reprezentacji rozwiązania jako sumy modów /przestrzenno-czasowych/ czyli rozwiązań typu fali stojącej. Rozwiązania tego typu spełniają bezźródłowe równanie pola z warunkami brzegowymi. Nie zależą od położenia źródła i punktu obserwacji.

Obliczając residua w odpowiednich punktach $\omega_{m,p}$ otrzymujemy kolejno:

$$/10/ \quad \text{Res } G(\pm \omega_m) \sim \pm \frac{1}{\omega_m (\pm \omega_m - \omega_p)} \cos \left[(z-a) \frac{m\pi}{a} \right] e^{\pm i \omega_m t}$$

$$/11/ \quad \text{Res } G(\omega_p) = -\text{Res } G(-\omega_p) \quad \text{residua te redukują się}$$

$$/12/ \quad \text{Res } G(\omega_0) = \frac{\cos \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2} (z-a)}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2} a} e^{-i \omega_0 t}$$

Zauważmy, że jeśli zajdzie równość $\omega_0 = \omega_m$, to w punkcie tym wyrażenie podcałkowe ma biegun rzędu drugiego i odpowiednie residuum wynosi

$$/13/ \quad \text{Res } G(\omega_0) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{d}{d\omega} |G(\omega)(\omega - \omega_0)^2|$$

III. Promienie przestrzenno-czasowe między dwoma płaszczyznami

Asymptotyczną metodą analizy pola w ośrodkach z dyspersją czasową jest metoda promieni przestrzenno-czasowych wprowadzona po raz pierwszy przez R. Lewisa [6]. Będziemy dążyć do hybrydowego, promieniowo-modowego, przedstawienia pola przy użyciu tych promieni. W opracowaniu [5] wykazano drogą bezpośredniej konstrukcji, że sumowanie pól wzdłuż promieni przestrzenno-czasowych można zastąpić sumowaniem modów. W niniejszym opracowaniu wskażemy na kryteria matematyczno-fizyczne doboru hybrydowego.

Przypomnijmy krótko własności omawianych promieni. Rozwiązania równania Kleina-Gordona /1/ poszukuje się w postaci rozwinięcia asymptotycznego

$$/14/ \quad u(\underline{R}, t) \approx e^{i\gamma\Psi(\underline{R}, t)} \sum_{m=0}^{\infty} (i\gamma)^{-m} u_m(\underline{R}, t)$$

Duży parametr γ wprowadza się przez skalaryzację zmiennych. Promieniami przestrzenno-czasowymi /dalej zwanymi promieniami/ są charakterystyki równania dyspersyjnego, odpowiadającego równaniu /1/.

Jeśli oznaczymy

$$/15a/ \quad \omega = - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$/15b/ \quad \underline{k} = \nabla_{\underline{R}} \Psi$$

Równanie dyspersyjne możemy zapisać jak następuje

$$/16/ \quad \omega(\underline{k}, \underline{R}) = \pm [k^2 c^2 + \omega_p^2(\underline{R})]^{1/2}$$

Promienie definiuje się przez równania charakterystyczne równania /16/. W przypadku jednej zmiennej przestrzennej i czasu promienie są określone przez równania następujące:

$$/17a/ \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \equiv v_g.$$

$$/17b/ \quad \frac{dk}{dt} = - \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$/17c/ \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

Chwilowa częstość ω jest stała wzdłuż promieni. W ośrodku jednorodnym promienie są liniami prostymi, wzdłuż których również v_g oraz k są wielkościami stałymi. W przestrzeni (z, t) promienie są zawsze styczne do wektora prędkości grupowej $\underline{v}_g = [v_g, c]$. Końce tego wektora określają położenie paczki falowej, o średniej częstości ω , w danym punkcie (z, t) .

Głównym argumentem za przyjęciem postaci asymptotycznej rozwiązania /14/ była znajomość rozwiązań odpowiednich problemów kanonicznych. Typowe przedstawienie całkowe pola sygnału nieustalonego, ma na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω postać następującą:

$$/18/ \quad I = \int_{-\infty + i\delta}^{\infty + i\delta} f(\omega) e^{i\tilde{q}(\omega)} d\omega \quad ; \quad \alpha > 0$$

gdzie $\tilde{q}(\omega) = h(\omega)z - \omega t$

$h(\omega)$ - oznacza zależną od częstości liczbę falową lokalnej fali płaskiej, z - parametr związany z odległością /duży/, $f(\omega)$ jest amplitudą lokalnej fali płaskiej.

Główny przyczynek do całki /18/ pochodzi od sąsiedztwa punktów siodłowych, określonych przez

$$/19/ \quad \left. \frac{d\hat{g}}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_3} = 0 \quad \text{lub} \quad \left. \frac{dh}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_3} = \frac{t}{2} = \frac{1}{v_g(\omega_3)}$$

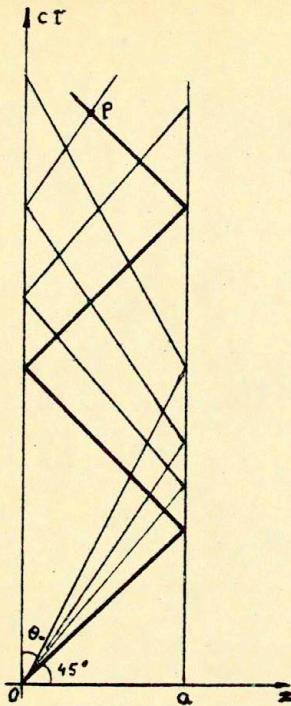
Wielkość $v_g = \frac{d\omega}{d\hat{h}}$ jest prędkością grupową paczki falowej o średniej częstotliwości ω .

Drogą analogii z przytoczonym rozwiązaniem problemu kanonicznego warunek na punkt siodłowy może służyć jako definicja prędkości wzdłuż promieni również dla ogólniejszej - niż w przedstawieniu /18/ - postaci funkcji (por./17/).

W przypadku źródła i punktu obserwacji umieszczonych między dwoma płaszczyznami, problem /1/ - /3/ , promienie trafią do punktu obserwacji P drogą wielokrotnych odbić. Promień odpowiadający większej prędkości v_g , aby osiągnąć punkt P, ulegnie większej ilości odbić niż promień o mniejszej prędkości. Zgodnie ze związkami /17/ oraz /16/ , każdej prędkości grupowej v_{g_n} odpowiada częstotliwość ω_n - czyli dla przedstawienia całkowego punkt siodłowy ω_{3n} - powiązane zależnością dyspersyjną :

$$/20/ \quad v_{g_n} = \frac{k_n c^2}{\omega_n} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_n^2}} c \quad ; \quad n - \text{numeruje promienie}$$

Zgodnie z zasadą przyczynowości $v_g < c$ dla ośrodków o normalnej dyspersji. Na płaszczyźnie (z, ct) kąt Θ_n , nachylenia promienia względem osi ct , spełnia warunek $\Theta_n < 45^\circ$. W naszym problemie mamy dwie grupy promieni, różniące się tym, od której płaszczyzny promień został ostatni raz odbity przed osiągnięciem punktu obserwacji P. Rys .2. Dla każdego z tych rodzajów promieni istnieje maksymalna liczba odbić, N_{\max} , którym może ulec promień idący z prędkością c do punktu obserwacji. Omówiona pokrótce metoda służy do analizy części głównej sygnału. W pobliżu czoła sygnału gdzie zachodzi $\frac{z}{t} \approx c$ oraz w obszarze częstotliwości bliskich częstotliwości plazmowej ośrodka ω_p , wprowadza się odpowiednie funkcje przejściowe por.[7].



$$\operatorname{tg} \theta_n = \frac{v_{gn}}{c} = \frac{k_n c^2}{\omega_n}$$

Rys.2. Wielokrotnie odbite promienie w falowodzie przestrzenno-czasowym.

IV. Hybrydowe przedstawienie rozwiązania

Reprezentację /7/ całkową rozwiązania można przedstawić jako sumę pól wzdłuż promieni plus pewna reszta.

Rozwinmy rezonansowy czynnik w mianowniku funkcji podcałkowej na szereg geometryczny:

$$/21/ \quad \frac{1}{1 - e^{i k a}} = \sum_{n=0}^N e^{2 i k a n} + \frac{e^{2 i k a N}}{1 - e^{i k a}}$$

Rozwinięcie prowadzimy do wyrazu N , gdzie N powinno spełniać warunek $N + 1 < N_{\max}$. Oznaczono: N_{\max} - maksymalna liczba odbić promieni w falowodzie.

Zmieniając porządek sumowania i całkowania otrzymamy sumę całek którym nadamy interpretację pola promieni dochodzących do obserwatora drogą bezpośrednią i drogą kolejnych odbić między ściankami falowodu.

W liczniku (7) występuje suma dwu wyrażen. Składniki tej sumy odpowiadają dwu rodzajom promieni: 1^0 - promienie docierające do punktu obserwacji po ostatnim odbiciu od ścianki $z = 0$; 2^0 - promienie dochodzące do punktu obserwacji po ostatnim odbiciu od ścianki $z = a$. Rozwinięcia (21) dokonujemy dla każdego rodzaju promieni, dążąc do przedstawienia w postaci sumy:

$$/22/ \quad u^{(j)} = \sum_{n=0}^{N^{(j)}} u_n^{(j)} + R_{N^{(j)}}^{(j)} \quad j = 1, 2$$

$$/23/ \quad u = u^{(1)} + u^{(2)}$$

Funkcje $u_n^{(j)}$ nie są już parzystymi funkcjami $k = \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ więc na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω musimy uwzględnić punkty rozgałęzienia $\omega = \pm \omega_p$.

Kolejne wyrazy sumy /22/ mają następującą postać

$$/24/ \quad u_n^{(j)} = A \int_C \frac{1}{k(\omega - \omega_0)} \exp[iV q_n^{(j)}(\omega)] d\omega$$

W wyrażeniu /7/ przeprowadzono skalowanie zmiennych, aby wprowadzić duży parametr V . Wszystkie stałe zebrano w stałej A .

Oznaczono:

$$q_n^{(1)} = -\omega t + k(z + 2an)$$

$$q_n^{(2)} = -\omega t - k[z - 2a(n+1)]$$

$R_{N^{(j)}}^{(j)}$ jest resztą w postaci całkowej:

$$/25/ R_{N_j}^{(j)} = A \int_C \exp[i v q_{2N+1}^{(j)}(\omega)] \frac{1}{K(\omega - \omega_0)(1 - e^{2i\omega_0})} d\omega$$

W dalszych rozważaniach pominiemy wskaźnik (j) gdyż dla obu rodzajów promieni droga rozumowania jest identyczna. Dla zbieżności całek musimy zażądać, aby zachodziło

$$\text{Im } k > 0 \quad \text{dla } |\omega| \rightarrow \infty$$

Każdą z całek u_n można obliczyć asymptotycznie metodą punktu siodłowego. Punkty siodłowe $\omega_{s,n}$ określone są zależnością /19/, która określa prędkość grupową dla wybranego promienia, ulegającego n odbiciom.

Pierwotny kontur całkowania C , zastępujemy drogą najszybszego spadku C_n /rys.3/.

Wyrażenia podcałkowe w /24/ ma osobliwości w punkcie ω_0 oraz ω_p . Przekształcając kontur C w drogę najszybszego spadku C_n przechodząc⁽²⁾ przez punkt siodłowy $\omega_{s,n}$, aby uzyskać poprawny wynik całkowania, musimy uwzględnić przyczynki do całki pochodzące od biegunów leżących pomiędzy oboma konturami. Residuum w punkcie $\omega = \omega_0$ należy uwzględnić przy wyliczaniu u_n , jeśli $\omega_{s,n} < \omega_0$ /rys.3/. Możemy zapisać

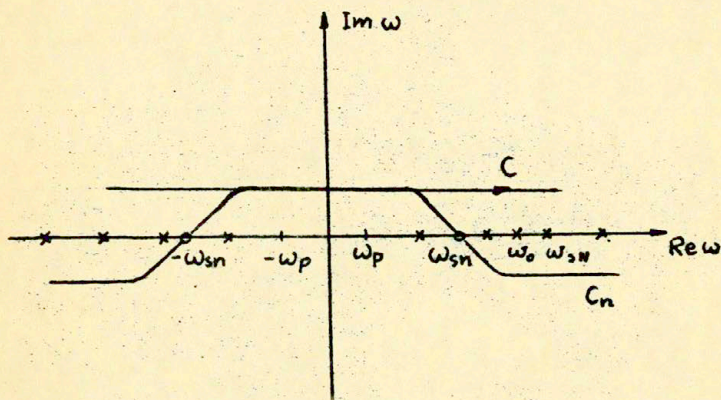
$$/26/ u_n \approx f(\omega_m) \exp[i v q_n(\omega_m)] + \text{Res}_{\omega=\omega_0} \left[\frac{\exp[i v q(\omega)]}{K(\omega - \omega_0)} \right] U(\omega_0 - \omega_{s,n})$$

gdzie U funkcja Heaviside'a,

$f(\omega_m)$ - amplituda pola wzdłuż promienia n

Wkład do całki pochodzący od bieguna ω_0 odpowiada polu modalnemu $\hat{u}(\omega_0)$.

Dla danego punktu obserwacji przy zadanym ω_0 , można ustalić od którego wyrazu sumy (n) należy uwzględnić w wyrażeniu /26/ przyczynkę od bieguna ω_0 . Mówiąc innymi słowami: ustalamy punkt obserwacji $P(z, t)$. Promień trafiający do punktu P drogą n -odbić ma prędkość grupową $v_{g,n} = \frac{z+2an}{t}$ /dla $j = 1/$.



Rys.3. Droga całkowania na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w dla zapisu hybrydowego.
 C - pierwotna droga całkowania
 C_n - droga najszybszego spadku
 x^n - bieguny funkcji podcałkowej
 o - punkty siodłowe.

Prędkości tej odpowiada częstość w_n , a więc punkt siodłowy w_{sN} .

W zależności od położenia punktu w_{sN} względem w_0 , możemy wydzielić w zapisie hybrydowym część przedstawienia pola wyłącznie przez promienie, wybierając w rozwiązaniu /21/ wskaźnik N do którego prowadzi się sumowanie, tak aby $w_{sN} > w_0$.

Kolejnym etapem tworzenia hybrydowego przedstawienia badanego rozwiązania jest przekształcenie reszty R_N do postaci prostszej dla interpretacji.

Reszta w wyrażeniu podcałkowym zawiera czynnik eksponencjalny, który można przyporządkować całkowemu przedstawieniu pola promienia u_n dla $n = N + 1$.

Zastępując drogę całkowania C drogą najszybszego spadku C_{N+1} przechodzącą przez punkt siodłowy $\omega_{s(N+1)}$ napotykamy na bieguny funkcji podcałkowej ω_m leżące między obiema drogami. Przyczynki od tych punktów dają sumę residuów, oznaczoną jako

$$/27/ \quad \sum_{m=M}^{\infty} \text{Res} G(\omega_m) = \sum_{m=M}^{\infty} \hat{u}_m \quad \omega_m \text{ pierwszy uwzględniony biegun}$$

Biegun ω_0 leży w tym przypadku między osią $\text{Im } \omega > 0$ oraz konturem C_{N+1} . Z pozostałości całkowej, obliczanej teraz wzdłuż drogi najszybszego spadku można otrzymać wyraz odpowiadający promieniowi $N+1$, lecz o mniejszej amplitudzie a , oraz pewną nową resztę R_{NM} . Zapisujemy więc:

$$/28/ \quad R_N = a \cdot u_{N+1} + \sum_{m=M}^{\infty} \hat{u}_m + R_{NM}$$

Reszta R_{NM} jest do zaniedbania pod warunkiem, iż punkt siodłowy $\omega_{s(N+1)}$ nie leży blisko biegunów ω_M lub ω_0 . W przypadku przeciwnym należy prowadzić dalsze oszacowania.

Sumując otrzymane wyniki otrzymamy postać hybrydową, promienio wo - modową, rozwiązania (dla jednego rodzaju promieni $j=1$):

$$/29/ \quad u^{(1)} = \sum_0^N u_n^{(1)} + a \cdot u_{N+1}^{(1)} + \sum_{m=M}^{\infty} \hat{u}_m^{(1)} + R_{NM}^{(1)}$$

Dobór wskaźnika N zależy od częstości źródła poprzez warunek $\omega_{s(N+1)} > \omega_0$.

Punkty siodłowe leżące na półosi $-\infty < \text{Re } \omega$ odpowiadają promieniom drugiego rodzaju ($j=2$) w formule /22/. Rozumowanie analogiczne do przedstawionego powyżej doprowadzi do przedstawienia hybrydowego dla $u^{(2)}$.

Zestaw hybrydowy dobrany jest dla ustalonego położenia źródła i punktu obserwacji. Zmieniając wzajemną odległość (w przestrzeni z, t) tych punktów, musimy zmienić dobór kombinacji promieni i modów, gdyż przy zadanym ω_0 zmieni się wtedy wskaźnik N .

Literatura

- [1] Krystyn Bochenek; Metody analizy pól elektromagnetycznych, PWN, Warszawa 1981
- [2] L.B. Felsen, N. Marcuvitz; Radiation and scattering of waves, Prentice Hall, N.I. 1973
- [3] L.B. Felsen, T. Ishihara; J. Acoust.Soc.Am 65 /1979/ pp. 595-607.
- [4] L.B. Felsen, A. Kamel; IEEE Trans.Anten.Prop. vol AP-29 /1981/ pp. 637-649.
- [5] A. Brahmer-Kacprzyńska; Funkcja Greena dla płaskiego falowodu wypełnionego plazmą elektronową. Prace IPPT PAN Warszawa 1982.
- [6] R. Lewis; Asymptotic methods for the solution of dispersive hyperbolic equations. W tomie: Asymptotic solutions of differential equations. Wilcox, N.York 1964.
- [7] A. Brahmer-Kacprzyńska; Pole w pobliżu czoła sygnału w falowodzie wypełnionym plazmą dyspersyjną, Prace IPPT PAN Warszawa 1984.

Anna Brahmer-Kacprzyńska

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

METODA PROMIENI DLA FALOWODÓW WYPEŁNIONYCH
OŚRODKIEM DISPERSYJNYM

Streszczenie °

Wyprowadzono warunki, które powinny spełniać rozwiązania asymptotyczne problemów własnych dla fal prowadzonych w falowodzie płaskim wypełnionym ośrodkiem dyspersyjnym /plazmą elektronową/. Wychodząc z założeń metody promieni otrzymano warunek na fazę i amplitudę modu falowodowego.

1. Wstęp

Asymptotyczne metody analizy pól elektromagnetycznych, akustycznych lub kombinacji obu rodzajów pól, mają ciągle rosnący zakres zastosowań. Ważną klasę tych metod stanowi optyka geometryczna wraz z dalszymi jej rozwinięciami, takimi jak wprowadzenie promieni przestrzenno-czasowych, promieni zespolonych, fal zanikających /"evanescent"/, rozbudowanie teorii kaustyk. Główna idea omówionego opisu zjawisk falowych polega na wprowadzeniu odpowiednich dla badanego zjawiska promieni, wzdłuż których funkcje fazy i amplitud pola spełniają pewne równania różniczkowe.

Zaletą metod opartych na wprowadzeniu promieni jest dostarczenie prostej fizycznej interpretacji takich zjawisk jak rozpraszanie, dyfrakcja, promieniowanie, a przede wszystkim stworzenie metod analizy zjawisk zachodzących w ośrodkach niejednorodnych i badaniu struktur o prawie dowolnych kształtach.

Poprawność przybliżenia optyki geometrycznej jest dobrze uzasadniona matematycznie w przypadkach pól "wysokiej częstości" dla których jest spełniony warunek $kL \gg 1$ ($k = 2\pi/\lambda$ oznacza

liczbę falową, L - odległość charakterystyczną dla danego problemu/. Jednak porównanie wyników asymptotycznych z rozwiązaniami ścisłymi, możliwymi do uzyskania w niektórych zadaniach, lub z wynikami eksperymentów, wskazuje na to, iż rezultaty otrzymane metodami promieni są poprawne nawet dla niezbyt dużych wartości kL .

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wartości własnych modów i asymptotycznych zależności dla amplitud pól w przypadku płaskiego falowodu wypełnionego ośrodkiem dyspersyjnym /zimną plazmą elektronową/. Punktem wyjścia będą równania eikonału na funkcję fazy i równania transportu amplitud spełnione wzdłuż odpowiednich promieni. Dla asymptotycznej analizy propagacji w ośrodku dyspersyjnym, to znaczy takim, w którym przenikalność dielektryczna jest funkcją częstości fali, wprowadza się promienie przestrzenno-czasowe [1], [2]. Powstaje pytanie jakie warunki należy nałożyć na układ promieni, aby uzyskać obraz zjawisk w układzie prowadzącym, czyli jak dla falowodu wygląda struktura promieni tworzących rozwiązania typu modów. Zmierzamy do uzyskania odpowiedzi na to pytanie.

Rozwiązanie postawionego problemu można również uzyskać przez odpowiednie przejście graniczne w rozwiązaniach ścisłych, ale zastosowanie metody promieni już od punktu wyjścia jest przydatne w analizie bardziej złożonych problemów: zakrzywionych falowodów, przeszkód wewnątrz struktury. Interpretacja pola modalnego przez opis promieniowy jest niezbędna do stosowania metod hybrydowych [3], [4].

Rozwiązanie typu modu /rodzaju/ w strukturze prowadzącej spełnia równania pola bez źródeł i odpowiednie warunki brzegowe. Dla modów rozchodzących się, pole falowe charakteryzuje się periodycznością występującą w płaszczyźnie prostopadłej do wybranego kierunku. Ta periodyczność zachowuje swój charakter w całej strukturze prowadzącej, odróżniając jeden mod od drugiego. Wymienione elementarne cechy modów związane są z separowalnością równań pola i warunków brzegowych.

Na układ promieni dobrany do analizy danego zadania nakładają się różne warunki w zależności od tego czy równania wyjściowe zawierają wyraz odpowiedzialny za źródło promieniowania, czy

są bezźródłowe z warunkami początkowymi lub brzegowymi. Aby opisać niezmiennicze własności modów-niezależne od położenia źródła i punktu obserwacji - na układ promieni należy nałożyć odpowiednie więzy dające związki zgodności dla fazy i amplitudy. Zagadnienie to dla przypadku modów rezonansowych przeanalizował J.Keller [5]. W pracy [6] rozwiązano je dla modów falowdowych w przypadku harmonicznej zależności od czasu. W przedstawionej pracy znajdziemy warunki odpowiednie dla rozwiązań nieustalonych w czasie przy dyspersyjnych własnościach ośrodka wypełniającego falowód. Rozwiążemy zagadnienie podstawowe: przypadek jednej zmiennej przestrzennej i czasu.

II. Promienie przestrzenno-czasowe dla zimnej plazmy

Jako przykład ośrodka dyspersyjnego rozpatrzmy zimną izotropową plazmę, charakteryzującą się częstością plazmową ω_p , która dla ośrodka niejednorodnego jest funkcją położenia. Skalarny potencjał elektromagnetyczny u spełnia wtedy równanie typu Kleina-Gordona:

$$/1/ \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2(r)}{c^2} \right] u(r, t) = 0$$

gdzie c - oznacza prędkość światła

Aby wprowadzić parametr ν względem którego dokonujemy rozwinięcia asymptotycznego, dokonuje się przeskalowania zmiennych:

$$/2/ \underline{R} = \frac{r}{\nu} ; \tau = \frac{t}{\nu}$$

i otrzymuje równanie nowych zmiennych:

$$/3/ \left[\nabla_R^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nu^2 \frac{\omega_p^2(R)}{c^2} \right] u(R, \tau) = 0$$

Parametr ν jest dużym parametrem, co oznacza iż niezerowe wartości \underline{R} , τ implikują duże wartości \underline{r} oraz t . Rozwiązania równania /3/ poszukuje się w postaci rozwinięcia asymptotycznego

$$/4/ \quad u(\underline{R}, \tau) = e^{i\nu\psi(\underline{R}, \tau)} \sum_0^{\infty} \frac{u_m(\underline{R}, \tau)}{(i\nu)^m}$$

Podstawiając założoną postać rozwiązania do równania /3/ i przyrównując kolejno do zera współczynniki przy równych potęgach ν otrzymujemy równanie dyspersyjne dla funkcji ψ /odpowiadające równaniu eikonala optyki geometrycznej/ oraz równania transportu dla kolejnych amplitud $u_m(\underline{R}, \tau)$.

Równanie dyspersyjne dla funkcji fazy ψ ma postać:

$$/5/ \quad (\nabla_{\underline{R}} \psi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\omega_p^2(\underline{R})}{c^2} = 0$$

Wprowadzając chwilową częstość ω

$$/6/ \quad \omega = - \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

oraz wektor falowy

$$/7/ \quad \underline{k} = \nabla_{\underline{R}} \psi$$

równanie dyspersyjne można zapisać następująco

$$/8/ \quad \omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$$

Charakterystyki równania /5/ są promieniami dla badanego problemu. Wzdłuż promieni spełnione są związki następujące /równania Hamiltona/

$$/9/ \quad \frac{d\underline{R}}{d\tau} = \nabla_{\underline{k}} \omega$$

$$/10/ \quad \frac{dk}{d\tau} = -\nabla_R \omega$$

$$/11/ \quad \frac{d\omega}{d\tau} = 0$$

Parametrem wzdłuż promienia jest czas τ . Tak określone krzywe noszą nazwę promieni przestrzenno-czasowych por. [2]. Funkcja Ψ jest stała na takim promieniu tylko w przypadku równań wyjściowych nie zawierających wyrazu wolnego związanego z dyspersją. Zauważmy iż wzdłuż tak określonych promieni częstość ω jest stała. Dla ośrodka jednorodnego promienie są prostymi, na których jest również stałe k oraz $\nabla_k \omega$. Tą ostatnią wielkość utożsamiamy z prędkością grupową, $\underline{v}_g = \nabla_k \omega$, odpowiadającą prędkości przenoszenia energii. Jest ona zwykle różna od prędkości fazowej $\underline{v}_f = \frac{\omega}{|k|} \underline{n}$, z którą przemieszcza się powierzchnia stałej fazy, $\Psi = \text{const}$, w kierunku normalnym \underline{n} . Prędkości te są równe jedynie w ośrodku niedispersyjnym. Funkcję fazy wzdłuż promieni przestrzenno-czasowych można przedstawić jak następuje:

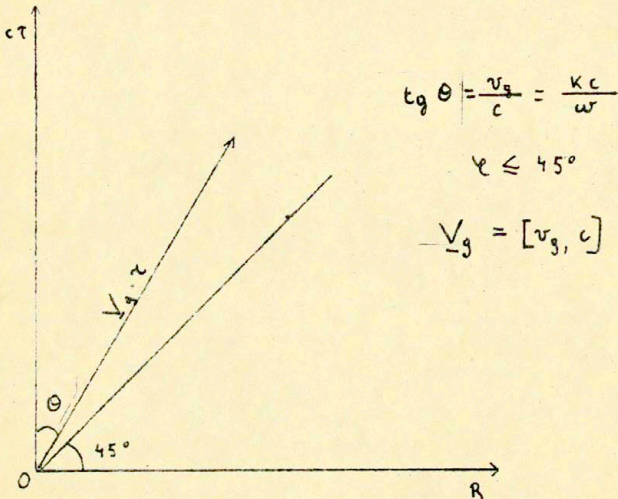
$$/12/ \quad \Psi(\underline{R}_2, \tau) - \Psi(\underline{R}_1, \tau_1) = \int_{R_1}^R k \cdot d\underline{R} - \omega(\tau - \tau_1)$$

Kolejne amplitudy u_m spełniają wzdłuż promieni równania transportu. Dla funkcji u_0 równanie to ma postać:

$$/13/ \quad \left(\nabla_R \cdot \underline{k} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + 2k \nabla_R + \frac{2}{c^2} \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \right) u_0 = 0$$

Równanie to można sprowadzić do postaci ekwiwalentnej wyrażającej zasadę zachowania strumienia energii; w dalszych rozważaniach nie będziemy korzystać z tego faktu. Graficznie promienie przestrzenno-czasowe przedstawia się zwykle w przestrzeni $(\underline{R}, c\tau)$. Wprowadźmy czterowymiarowy wektor prędkości grupowej $\underline{v}_g = \underline{v}_g + \underline{\tau}_0 c$ /gdzie $\underline{\tau}_0$ jest jednostkowym wektorem

wzdłuż osi $c\tau$. Wektor \underline{V}_g jest zawsze styczny do promieni przestrzenno-czasowych. (Rys.1)



Rys. 1. Promień przestrzenno-czasowy w ośrodku jednorodnym.

III. Płaski falowód wypełniony plazmą

Poszukuje się rozwiązania równania Kleina-Gordona /3/ z warunkami brzegowymi typu Neumanna:

$$/15/ \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=0, z=a$$

Zakładamy, iż u może być zapisane jako skończona superpozycja fal typu /4/ (dla $m=0$) czyli:

$$/16/ \quad u(z, \tau) \sim \sum_{p=1}^N e^{i v \Psi_p(z, \tau)} \left[u_{(p)}(z, \tau) + O\left(\frac{1}{v}\right) \right] ; \quad u_{(p)} = u_{o(p)}$$

Dla każdego ρ jest spełnione równanie eikonału /5/ i równanie transportu /13/.

Stosując warunek /15/ do rozwiązania /16/ otrzymamy:

$$/17/ \quad \sum_{\rho=1}^N \frac{\partial \Psi_{\rho}}{\partial z} e^{i\nu \Psi_{\rho}} u_{(\rho)} = 0 \quad \text{dla } z=0, z=a$$

Przyjmujemy, że na brzegu, wyrazy w rozwinięciu /17/ znikają parami, to znaczy jeśli $\frac{\partial \Psi_{\rho}}{\partial z} \neq 0$, to dla każdego wskaźnika ρ istnieje taki wskaźnik np. q , że

$$/18/ \quad \frac{\partial \Psi_{\rho}}{\partial z} e^{i\nu \Psi_{\rho}} u_{(\rho)} + \frac{\partial \Psi_q}{\partial z} e^{i\nu \Psi_q} u_{(q)} = 0$$

Fizycznie założenie to oznacza iż każda fala /lub promień/ który osiągnie brzeg ($z=0, z=a$) daje początek odbitej fali /lub promieniowi/. Poszukujemy warunku na "akumulację fazy" który zapewniłby spełnienie warunków brzegowych przez dobraną parę rozwiązań /o wskaźnikach ρ, q / z wyrażenia /16/. Ponieważ równość /18/ ma zachodzić dla wszystkich ν , to można założyć, że jest spełniony warunek

$$/19/ \quad \Psi_{\rho} = \Psi_q + \frac{2\pi m}{\nu} \quad \text{dla } z=0 \text{ i } z=a$$

gdzie: m - jest liczbą całkowitą.

Ostatni warunek, wraz z równaniem eikonału, prowadzi do wniosku, iż na brzegu jest też spełniona zależność

$$/20/ \quad \frac{\partial \Psi_{\rho}}{\partial z} = - \frac{\partial \Psi_q}{\partial z}$$

oraz dla amplitud /zerowego rzędu/

$$/21/ \quad u_{(\rho)} = u_{(q)}$$

/przyjęcie znaków przeciwnych prowadziłyby do trywialnych rozwiązań znikających parami w całym obszarze/
Warunki tego typu wyprowadził po raz pierwszy Keller dla promieni optyki geometrycznej [5].

Dla struktury prowadzącej o prostych kształtach geometrycznych równania eikonału i transportu można rozwiązać /dla każdej rodziny promieni p czy q / metodą separacji zmiennych z nałożenia warunków brzegowych /19/ i /21/.

Rozpatrzmy przypadek ośrodka jednorodnego, dla którego $\omega_p = \text{const}$. Równanie /5/ eikonału w zmiennych z, τ ma wtedy postać:

$$/22a/ \quad (\Psi_{,z})^2 - \frac{1}{c^2} (\Psi_{,\tau})^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2} = 0$$

co po normalizacji można zapisać jako

$$/22b/ \quad (\bar{\Psi}_{,t})^2 - (\bar{\Psi}_{,z})^2 = 1 \quad \text{gdzie} \quad \bar{\Psi} = \frac{c\Psi}{\omega_p} \quad ; \quad c\tau = t$$

Zakładamy, że zawsze jest spełniony warunek

$$/23/ \quad \bar{\Psi}_{,t} > 1 \quad \text{czyli} \quad \omega > \omega_p .$$

Przyjmijmy, iż funkcję fazy $\bar{\Psi}$ można przedstawić w postaci sumy następującej:

$$/24/ \quad \bar{\Psi}(z, t) = Z(z) + T(t)$$

Równanie /22b/ zredukuje się wtedy do postaci /primami oznaczono pochodne względem argumentu funkcji/

$$/25/ \quad (T')^2 - (Z')^2 = 1 \quad ,$$

oznaczając stałą separacji przez d^2 , otrzymamy

$$/26/ \quad (T')^2 = 1 + (Z')^2 = d^2$$

Przy przyjętych oznaczeniach otrzymamy cztery rozwiązania dla funkcji $\tilde{\Psi}$:

$$/27/ \quad \tilde{\Psi} = \pm \left(dt \mp \sqrt{\lambda^2 - 1} z \right)$$

Zakładając, iż mod rozchodzi się w kierunku $+t$, otrzymamy

$$\tilde{\Psi}_1 = dt - \sqrt{\lambda^2 - 1} z + C_1$$

$$/28/ \quad \tilde{\Psi}_2 = dt + \sqrt{\lambda^2 - 1} z + C_2$$

gdzie: C_1 i C_2 są stałymi addytywnymi.

Równania /28/ określają powierzchnie stałej fazy w ośrodku dyspersyjnym. Rozchodzą się one z prędkościami fazowymi:

$$/29/ \quad v_f = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

Proste prostopadłe do powierzchni stałej fazy nazywamy „promieniami fazowymi”. Nie są one równoległe do wprowadzonych uprzednio promieni przestrzenno-czasowych. Promienie przestrzenno-czasowe równoległe w przestrzeni (z, ct) do wektora prędkości grupowej $\underline{v}_g = [v_g, c]$ opisują proces propagacji paczek falowych, a więc energii, podczas gdy promienie fazowe związane są z przemieszczeniem się powierzchni stałej fazy. Odpowiada im prędkość fazowa, która może być większa od prędkości światła w próżni. Jedynie w ośrodku wolnym od dyspersji, którego idealnym przykładem jest próżnia, prędkość grupowa równa jest prędkości fazowej. Pojęcie „promienie fazowe” zostało wprowadzone w tym opracowaniu aby podkreślić, że do opisu przemieszczania się powierzchni stałej fazy w ośrodku dyspersyjnym należy każdemu promieniowi przestrzenno-czasowemu przypisać odpowiedni równoległy do wektora prędkości fazowej „promień fazowy”.

Rys. 2.

Powróćmy do równań /28/ aby wyznaczyć stałą separacji \mathcal{L} czyli wartość własną dla rozwiązywanego problemu. Zastosujemy warunek na akumulację fazy /19/. Warunki brzegowe dla dwóch

Literatura

- [1] R.Lewis : Asymptotic methods for the solution of dispersive hyperbolic equations. W tomie: Asymptotic solutions of differential equations ... Wilcox. New York 1964.
- [2] L.B.Felsen, N.Marcuwitz : Radiation and scattering of waves, Prentice Hall, N.J. 1973.
- [3] L.B.Felsen and A.H.Kamel, IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP-29, pp.637-649, /1981/.
- [4] A. Brahmer-Kacprzyńska: Funkcja Greena dla płaskiego falowodu wypełnionego plazmą elektronową. Prace IPPT PAN, Warszawa, 1982.
- [5] J.B.Keller, S.I.Rubinow: Ann.Phys., vol.9, pp.24-75, 1960.
- [6] S.J.Mauer, L.B.Felsen, Proc. IEEE. vol.55, No 10, pp.1718-1729, /1967/.