

Szymon Imielowski

WPLYW WARUNKÓW BRZEGOWYCH
NA STANY KRYTYCZNE
BELEK OBCIĄŻONYCH KONSERWATYWNIE

20/1987

P. 269



WARSZAWA 1987

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 16 stycznia 1987 r.



56837



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,6 Ark.druk. 2,75

Oddano do drukarni w maju 1987 r.

Nr zamówienia 309/87

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Szymon Imieliński
Samodzielna Pracownia
Teorii Materiałów Niesprężystych

WPLYW WARUNKÓW BRZEGOWYCH NA STANY KRYTYCZNE
BELEK OBCIĄŻONYCH KONSERWATYWNIE

Streszczenie

W pracy omawia się wpływ warunków brzegowych na stateczność belek jednoprzęsłowych o końcach zamocowanych sprężystości i wieloprzęsłowych o różnego typu podparciach sprężystych. Ze względu na zachowawczy charakter obciążeń zastosowano statyczne kryterium stateczności. Przyjęto podpory podatne umożliwiające sprężysty obrót oraz przemieszczenie w kierunku działania siły poprzecznej. Wykazano, że wpływ podatności sprężyn działających wzdłuż osi belki jest pomijalnie mały. Dla przypadku belki jednoprzęsłowej podano równanie przestępne, z którego w zależności od przyjętych podatności podpór można wyznaczyć wartości własne odpowiadające siłom krytycznym kolejnych postaci wyboczenia. W przypadku belek wieloprzęsłowych do badania wpływu lokalizacji oraz podatności podpór zastosowano metodę macierzy przeniesienia. Wyniki numeryczne przedstawiono w postaci wykresów.

1. Wstęp

Niniejszą pracę poświęcono problemowi wpływu warunków brzegowych na stateczność belek jednoprzęsłowych o końcach zamocowanych sprężystości lub wieloprzęsłowych o sprężystych podporach pośrednich. Lokalizacja i podatność dodatkowej podpory sprężystej jak wykazano w [1], [2] ma istotny, czasem destabilizujący wpływ na zachowanie się konstrukcji.

Rozważania zawarte w pracy dotyczyć będą przypadku obciążenia siłami zachowawczymi tzn. zachowującymi wartości a także kierunku i punkt przyłożenia w stanie wyjściowym i zdeformowanym. Do określenia wartości krytycznej siły zachowawczej wystarczy wykorzystanie statycznego kryterium stateczności [7], [8].

Zwiększenie sztywności sprężyn mocujących końce belek zwiększa jej wytrzymałość na wyboczenie natomiast wzrost siły krytycznej belek z pośrednimi podporami sprężystymi zależy od rodzaju podpory /obrotowa lub przesuwu boczno/ i jej położenia.

Do obliczeń wykorzystano podobnie jak w [1] metodę macierzy przeniesienia opisane w [5], [6] dogodną w obliczaniu belek wieloprzęsłowych lub wielosegmentowych z dowolnymi warunkami podparcia.

2. Belka o końcach zamocowanych sprężysto

Obliczanie siły krytycznej belek ściskanych w ogólnym przypadku statycznie niewyznaczalnych, sprowadza się do wyznaczenia wartości własnych równania różniczkowego czwartego rzędu

$$w^{IV} + k^2 w'' = 0, \quad (2.1)$$

przy jednorodnych warunkach brzegowych. W równaniu (2.1) $w = w(\xi)$ jest ugięciem belki, przyjmowanym dalej jako funkcja bezwymiarowej współrzędnej

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad (2.2)$$

natomiast

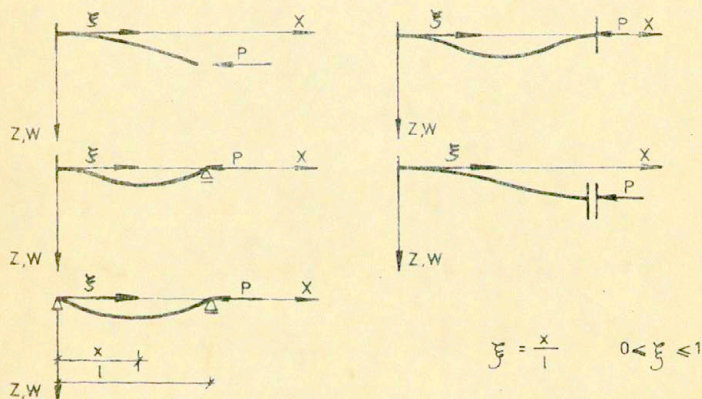
$$k^2 = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad (2.3)$$

gdzie :

- P - przyłożona siła zachowawcza
- l - długość przęsła belki
- EJ - sztywność na zginanie /w przypadku gdy wyboczenie jest możliwe w wielu kierunkach należy przyjąć minimalny moment bezwładności J/,

oznacza bezwymiarową siłę krytyczną, która odpowiada najmniejszej wartości własnej równania (2.1).

Rys. 2.1 ilustruje kilka przypadków podparcia i przyjęty układ współrzędnych.

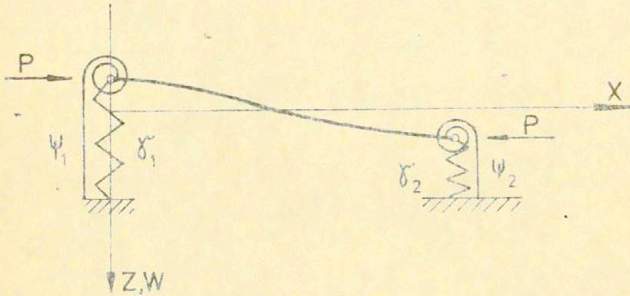


Rys. 2.1

Całkę ogólną równania (2.1) przyjęto w postaci

$$w(\xi) = C_1 \sin k\xi + C_2 \cos k\xi + C_3 k\xi + C_4 \quad (2.4)$$

Rozważmy przypadek pręta o końcach zamocowanych sprężysto, rys. 2.2, którego warunki brzegowe można zapisać w postaci (2.5)



Rys. 2.2.

$$\begin{aligned} w(0) &= \gamma_1 T(0) , \\ \varphi(0) &= -\psi_1 M(0) , \\ w(l) &= \gamma_2 T(l) , \\ \varphi(l) &= \psi_2 M(l) , \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie stałe ψ_1, ψ_2 charakteryzują podatności obrotowe, γ_1, γ_2 podatności translacyjne w kierunku siły poprzecznej T /nazywane dalej podatnościami przesuwu bocznego/ a przez $\varphi(\xi)$ oznaczono kąt obrotu przekroju belki. Siłę poprzeczną, moment zginający i kąt obrotu przekroju wyrażą wzory

$$T(\xi) = -\frac{EJ}{l^3} [w'''(\xi) + k^2 w'(\xi)] , \quad (2.6)$$

$$M(\xi) = -\frac{EJ}{l^2} w''(\xi) , \quad (2.7)$$

$$\varphi(\xi) = w'(\xi)/l . \quad (2.8)$$

Uwzględniając zależności (2.6), (2.7), (2.8) można zapisać warunki brzegowe (2.5) w postaci

$$\begin{aligned} w(0) &= -\gamma_1^* [w'''(0) + k^2 w'(0)], \\ w^I(0) &= \psi_1^* w''(0), \\ w(1) &= -\gamma_2^* [w'''(1) + k^2 w'(1)], \\ w^I(1) &= -\psi_2^* w''(1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

We wzorach tych wprowadzono bezwymiarowe podatności ψ_j^* , γ_j^* ($j=1,2$), które są związane z ψ_j , γ_j ($j=1,2$) zależnościami

$$\begin{aligned} \psi_j^* &= \psi_j \frac{EJ}{l}, & j &= 1, 2 \\ \gamma_j^* &= \gamma_j \frac{EJ}{l^3}, & j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wartości stałych ψ_j^* , γ_j^* oraz bezwymiarowe wartości sił krytycznych dla typowych przypadków zamocowania końców pręta podaje tabela 1.

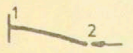




	ψ_1^*	ψ_2^*	γ_1^*	γ_2^*	Pl^2/EJ	μ
	0	∞	0	∞	$\pi/4$	2
	∞	∞	0	0	π^2	1
	0	0	0	∞	π^2	1
	0	∞	0	0	$\frac{\pi^2}{0,4934}$	0,6992
	0	0	0	0	$4\pi^2$	0,5

Tabela 1

Podstawiając rozwiązanie o postaci (2.4) do warunków (2.9) otrzymujemy układ czterech równań liniowych

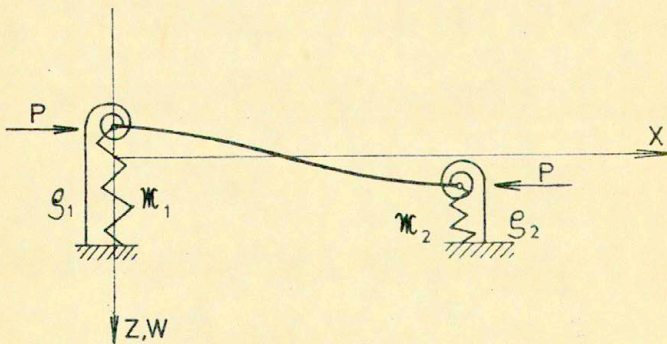
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \gamma_1^* k^3 & 1 \\ k & \psi_1^* k^2 & k & 0 \\ \text{sink} & \text{cos} k & k + \gamma_2^* k^3 & 1 \\ k \text{cos} k - \psi_2^* k^2 \text{sink} & -k \text{sink} - \psi_2^* k^2 \text{cos} k & k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Warunkiem osiągnięcia stanu krytycznego jest zerowanie się wyznacznika współczynników układu (2.11). Prowadzi to do następującego równania przestępnego na wartości własne $k^2 = P l^2 / EJ$

$$2 - [2 + (\psi_1^* + \psi_2^*)(1 + \gamma_2^* k^2 - \gamma_1^* k^2)] \text{cos} k + \quad (2.12)$$

$$+ \{-1 + \psi_1^* + \psi_2^* + k^2 [\psi_1^* \psi_2^* + (\gamma_2^* - \gamma_1^*)(\psi_1^* \psi_2^* k^2 - 1)]\} k \text{sink} = 0.$$

W niektórych przypadkach wygodniej jest charakteryzować sprężyste zamocowanie końców belki za pomocą sztywności sprężyn, rys. 2.3.



Rys.2.3

W tym przypadku warunki brzegowe belki, rys. 2.3, można zapisać

$$\begin{aligned} T(0) &= \kappa_1 w(0), \\ M(0) &= -S_1 \psi(0), \\ T(1) &= \kappa_2 w(1), \\ M(1) &= S_2 \psi(1), \end{aligned} \quad (2.13)$$

gdzie stałe S_j ($j=1,2$) charakteryzują sztywności obrotowe oraz κ_j ($j=1,2$) sztywności przesuwu bocznego.

Przyjmując bezwymiarowe charakterystyki sztywności

$$\begin{aligned} S_j^* &= S_j \frac{l}{EJ}, \quad j=1,2, \\ \kappa_j^* &= \kappa_j \frac{l^3}{EJ}, \quad j=1,2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

warunki (2.13) po uwzględnieniu (2.6), (2.7), (2.8), (2.14) przyjmują postać

$$\begin{aligned} -\kappa_1^* w(0) &= w^{III}(0) + k^2 w^I(0), \\ S_1^* w^I(0) &= w^{II}(0), \\ -\kappa_2^* w(1) &= w^{III}(1) + k^2 w^I(1), \\ -S_2^* w^I(1) &= w^{II}(1). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Łatwo zauważyć, że sztywności i podatności związane są zależnościami

$$\begin{aligned} S_j^* &= \frac{1}{\psi_j^*}, \quad j=1,2, \\ \kappa_j^* &= \frac{1}{\delta_j^*}, \quad j=1,2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

dlatego w tym przypadku równanie przestępne na wartości własne k^2 można otrzymać bezpośrednio ze związku (2.12) i ma ono postać

$$2 - \left[2 + \left(\frac{1}{S_1^*} + \frac{1}{S_2^*} \right) \left(1 + \frac{k^2}{\kappa_2^*} - \frac{k^2}{\kappa_1^*} \right) \right] \cos k l + \left\{ -1 + \frac{1}{S_1^*} + \frac{1}{S_2^*} + k^2 \left[\frac{1}{S_1^* S_2^*} + \left(\frac{1}{\kappa_2^*} - \frac{1}{\kappa_1^*} \right) \left(\frac{k^2}{S_1^* S_2^*} - 1 \right) \right] \right\} k \sin k l = 0 \quad (2.17)$$

Najmniejszą siłę krytyczną P_{kr} , zwaną siłą eulerowską F_E można ogólnie określić wzorem

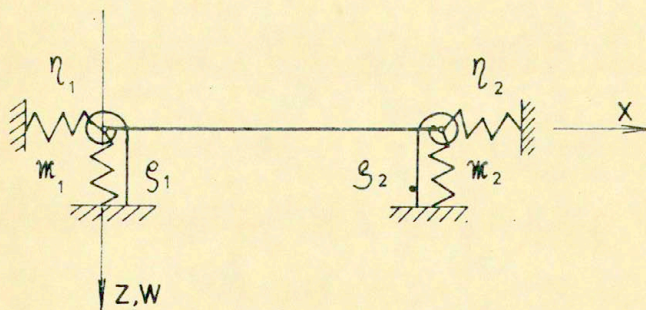
$$P_{kr} = F_E = k^2 = \frac{\pi^2}{l_r^2} = \frac{\pi^2}{(\mu l)^2}, \quad (2.18)$$

gdzie $l_r = \mu l$ oznacza długość zredukowaną, natomiast

$$\mu = \frac{\pi}{kl} \quad (2.19)$$

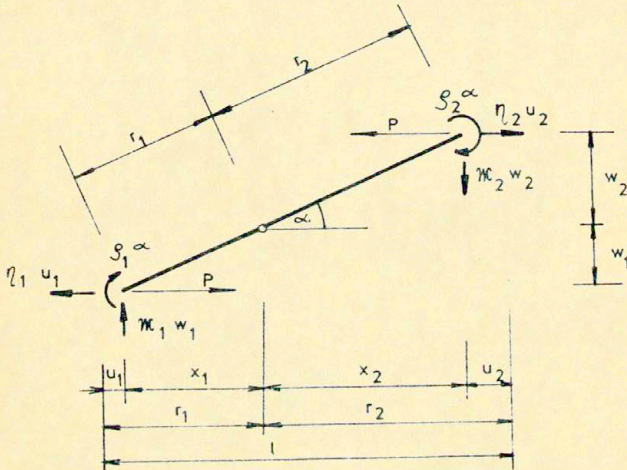
jest współczynnikiem zamocowania końców pręta, którego wartości zależą od podatności ψ_j^* , γ_j^* ($j = 1, 2$) (lub odpowiednio sztywności S_j^* , κ_j^*) i są określone przez związki (2.12) i (2.17). Przypadki szczególne współczynnika μ zamieszczone są w tabeli 1.

W ogólnym przypadku sprężystego podparcia belki, rys. 2.4, należałoby jej każdy koniec podeprzeć trzema sprężynami o parametrach κ_j , η_j , S_j ($j = 1, 2$), rys. 2.4



Rys. 2.4

Rozpatrując warunki równowagi belki wychylonej traktowanej jako element nieskończenie sztywny, rys. 2.5, w celu wyznaczenia w_j , u_j oraz r_j , ($j=1,2$)



Rys. 2.5

dysponujemy następującymi warunkami równowagi oraz zależnościami geometrycznymi

$$\sum M_0 = -Pw_2 + u_2 \eta_2 w_2 + w_2 \kappa_2 x_2 + \beta_2 \alpha - \quad (2.20)$$

$$Pw_1 + u_1 \eta_1 w_1 + w_1 \kappa_1 x_1 + \beta_1 \alpha = 0 ,$$

$$\sum N = \eta_1 u_1 - \eta_2 u_2 = 0 , \quad (2.21)$$

$$\sum T = \kappa_1 w_1 - \kappa_2 w_2 = 0 , \quad (2.22)$$

$$w_1 + w_2 = l \sin \alpha , \quad (2.23)$$

$$u_1 + u_2 = l (1 - \cos \alpha) , \quad (2.24)$$

$$r_1 + r_2 = l. \quad (2.25)$$

Uwzględniając w równaniu (2.20) związki (2.21) i (2.22) otrzymujemy

$$w_2 \left[-P \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) + u_1 \eta_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) + m_2 (x_1 + x_2) + \frac{d}{w_2} (\varrho_1 + \varrho_2) \right] = 0. \quad (2.26)$$

Mając na uwadze zależności wynikające bezpośrednio z rys. 2.5 oraz ze związków (2.21), (2.22)

$$x_1 + x_2 = l \cos \alpha, \quad (2.27)$$

$$u_1 + u_2 = u_1 \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2} \right), \quad (2.28)$$

$$l = \frac{w_1}{\sin \alpha} + \frac{w_2}{\sin \alpha} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{w_2}{\sin \alpha}, \quad (2.29)$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{w_2} = \frac{1 + \frac{m_2}{m_1}}{l \sin \alpha}, \quad (2.30)$$

$$u_1 = l \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}}. \quad (2.31)$$

Wykorzystując ostatecznie (2.26) oraz (2.27), (2.30), (2.31) otrzymujemy następującą zależność siły P od kąta wychylenia

$$P = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \left[(1 - \cos \alpha) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha + (\varrho_1 + \varrho_2) \frac{d}{l \sin \alpha} \right]. \quad (2.32)$$

Pierwszy składnik (2.32) uwzględnia wpływ sztywności sprężyn η_j ($j = 1, 2$) działających wzdłuż osi belki, drugi wpływ sztywności κ_j ($j = 1, 2$) sprężyn przesuwu bocznego, a trzeci wpływ sztywności S_j ($j = 1, 2$) sprężyn obrotowych. Belka zachowuje się statecznie tylko dla dostatecznie małych kątów α . Zauważmy, że wtedy $\cos \alpha \approx 1$ oraz $\frac{\alpha}{\sin \alpha} \approx 1$, a wzór (2.32) można przekształcić do postaci

$$P \approx \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} l + \frac{S_1 + S_2}{l} \quad (2.33)$$

Oznacza to, że wpływ sztywności η_j , ($j=1,2$) na wartość siły krytycznej jest mały i w przybliżeniu liniowym można to pominąć. Uzasadnia to przyjęcie do opisu wyboczenia belki, rys. 2.4, równania (2.1), w którym pomija się wpływ siły podłużnej i przyjęcie podparcia belki jak na rys. 2.2 i rys. 2.3.

Charakteryzując sprężyste podparcie belki za pomocą podatności wzór (2.33) przyjmie postać

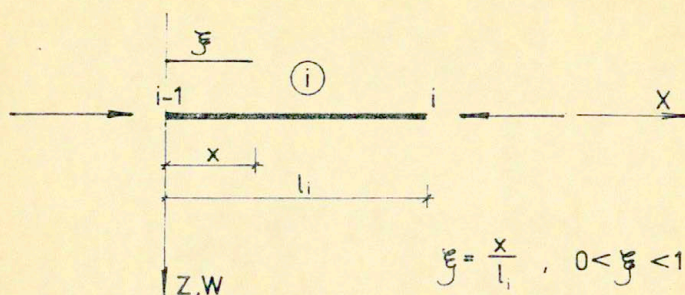
$$P \approx \frac{l}{\delta_1 + \delta_2} + \frac{1}{l} \left(\frac{1}{\psi_1} + \frac{1}{\psi_2} \right) \quad (2.34)$$

3. Belka wieloprzęsłowa na podatnych podporach

W obliczeniach belek wieloprzęsłowych lub wielosegmentowych wykorzystano, jak wspomniano we wstępie, metodę macierzy przeniesienia.

W metodzie macierzy przeniesienia określa się przekrój i -tego przęsła zapomocą bezwymiarowej współrzędnej ξ . rys. 3.1. Ugięcie, kąt ugięcia, moment i siłę poprzeczną w przekroju $\xi = 0$ oznaczamy następująco:

$$\begin{aligned} w_{i-1} = w(0) & \quad , \quad \psi_{i-1} = w'(0) / l_i \quad , \\ M_{i-1} = -\frac{EJ_i}{l_i^3} w''(0) & \quad , \quad T_{i-1} = -\frac{EJ_i}{l_i^3} [w'''(0) + k_i^2 w'(0)] \quad . \end{aligned} \quad (3.1)$$



Rys. 3.1

Korzystając ze związków (3.1) można wyrazić stałe w (2.4) poprzez w_{i-1} , φ_{i-1} , M_{i-1} , T_{i-1} otrzymując relację o postaci:

$$w(\xi) = w_{i-1} + \frac{1}{k_i} \varphi_{i-1} \operatorname{sink}_i \xi + \frac{1}{P} (\operatorname{cosk}_i \xi - 1) M_{i-1} + \frac{1}{P} \left(\frac{1}{k_i} \operatorname{sink}_i \xi - \xi l_i \right) T_{i-1} \quad (3.2)$$

Zależność (3.2) umożliwia wyrażenie wielkości geometrycznych i statycznych w przekroju $\xi = 1$ poprzez wielkości w przekroju $\xi = 0$

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ T \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \operatorname{sink} & \frac{1}{P} (\operatorname{cosk} - 1) & \frac{1}{P} \left(\frac{\operatorname{sink}}{k} - 1 \right) \\ 0 & \operatorname{cosk} & -\frac{k}{Pl} \operatorname{sink} & \frac{1}{P} (\operatorname{cosk} - 1) \\ 0 & \frac{Pl}{k} \operatorname{sink} & \operatorname{cosk} & \frac{1}{k} \operatorname{sink} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ T \end{bmatrix}_{i-1} \quad (3.3)$$

co w zapisie macierzowym przyjmie postać:

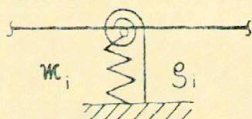
$$\underline{Z}_i = \underline{B}_i \underline{Z}_{i-1} , \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\underline{Z}_i = [w, \varphi, M, T]_i^T , \quad (3.5)$$

oznacza wektor stanu, natomiast macierz współczynników \underline{B}_i równań (3.3), (3.4) jest macierzą przeniesienia dla przęśła (i) .

Macierzą, która wiąże składowe wektora stanu po obu stronach węzła "i", jest macierz przeniesienia dla węzła, którą oznacza się \underline{H}_i . W przypadku podpory sprężystej o sztywności przesuwu bocznego κ_i i obrotowej ξ_i , rys. 3.2, macierz ta przyjmuje postać



Rys. 3.2

$$\underline{H}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & 1 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i . \quad (3.6)$$

Macierz przeniesienia \underline{A}_n belki złożonej z n segmentów ostatecznie zapisuje się

$$\underline{Z}_n^L = \underline{B}_n \underline{H}_{n-1} \underline{B}_{n-1} \dots \underline{H}_1 \underline{B}_1 \underline{Z}_0^P = \underline{A}_n \underline{Z}_0^P , \quad (3.7)$$

gdzie indeksy L i P oznaczają przekroje tuż na lewo i tuż na prawo od odpowiedniego węzła.

Wykorzystując warunki brzegowe otrzymamy równanie charakterystyczne pozwalające określić stan krytyczny rozpatrywanej belki.

W przypadku pośredniego sztywnego podparcia belki należy w macierzy węzła H_i (3.7) uwzględnić $\varrho_i \rightarrow \infty$ i $\kappa_i \rightarrow \infty$ oraz dochodzi dodatkowy warunek $w_i = 0$, co powoduje zwiększenie stopnia wyznacznika. Niedogodność tę usunięto wprowadzając tzw. macierze wyznacznikowe. Opis metody z wykorzystaniem macierzy wyznacznikowych można znaleźć w [3].

W dalszych rozważaniach przyjęto bezwymiarowe v^* , φ^* , T^* , M^* powiązane z wielkościami wymiarowymi następująco:

$$\begin{aligned} v &= v^* \frac{\bar{P}\bar{l}^3}{EJ} , \\ \varphi &= \varphi^* \frac{\bar{P}\bar{l}^2}{EJ} , \\ T &= T^* \bar{P} , \\ M &= M^* \bar{P}\bar{l} , \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie \bar{P} , \bar{l} , EJ wartości porównawcze. Macierz przęśla \underline{B}_i (3.3), w wielkościach bezwymiarowych, może mieć postać:

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{k} \operatorname{sinc} & \alpha_i (\operatorname{cosec} - 1) & \alpha_i \beta_i \left(\frac{\operatorname{sinc}}{k} - 1 \right) \\ 0 & \operatorname{cosec} & -k \frac{\alpha_i}{\beta_i} \operatorname{sinc} & \alpha_i (\operatorname{cosec} - 1) \\ 0 & \frac{\beta_i}{k \alpha_i} \operatorname{sinc} & \operatorname{cosec} & \frac{\beta_i}{k} \operatorname{sinc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (3.9)$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{EJ}{P_i^2} , \quad \beta_i = \frac{l_i}{l} , \quad \beta_i = \frac{EJ_i}{EJ} , \quad (3.10)$$

W macierzach przeniesienia dla węzłów H_1 uwzględniono również wielkości bezwymiarowe posługując się zależnościami (2.14).

4. Wyniki numeryczne dla belek jednoprzęsłowych

Obliczenia dla różnych wariantów sprężystego podparcia belki jednoprzęsłowej można wykonać posługując się bezpośrednio równaniem (2.12) lub (2.17) albo metodą macierzy przeniesienia.

4.1. Przypadek $\kappa_1 = \kappa_2 = \infty$ (rys. 4.1)

Przypadkami granicznymi obciążenia krytycznego dla krzywych przedstawionych na rys. 4.1 są:

a/ obustronne swobodne podparcie ($\xi_1^* = \xi_2^* = 0$)

$$k^2 = \pi^2 \approx 9,87 \quad (4.1)$$

b/ utwierdzenie - swobodne podparcie

$$(\xi_1^* = \infty, \xi_2^* = 0) \text{ lub } (\xi_1^* = 0, \xi_2^* = \infty) \quad (4.2)$$

$$k^2 = \frac{\pi^2}{0,4934} \approx 20,19$$

c/ obustronne utwierdzenie ($\xi_1^* = \xi_2^* = \infty$)

$$k^2 = 4\pi^2 \approx 39,48 \quad 4.3$$

4.2. Przypadek $\kappa_1^* = \infty$ (rys. 4.2, 4.3, 4.4)

Wykresy przedstawiają jedną z dwóch możliwości wpływu warunków brzegowych na wielkość siły, a mianowicie: dla wybranych wartości ξ_2^* przebieg zależności $k^2 = k^2(\kappa_2^*)$

rys. 4.2a , 4.3a , 4.4a lub dla wybranych wartości κ_2^* przebiegi zależności $k^2 = k^2(\mathcal{G}_2^*)$ rys. 4.2b, 4.3b, 4.4b . Jak widać wykresy dla tych dwóch przypadków mają różny charakter. W pierwszym obserwujemy intensywny wzrost siły krytycznej dla $\kappa_2^* \in (0, 10)$ lub zależnie od przyjętej sztywności \mathcal{G}_1^* dla $\kappa_2^* \in (0, 40)$, natomiast w drugim wzrost siły krytycznej obserwujemy tylko dla $\mathcal{G}_2^* \in (0, 8)$, przy czym wzrost ten w wartości bezwzględnej jest dużo mniejszy niż w przypadku pierwszym. Dla $\mathcal{G}_1 > 8$ siła krytyczna układu się blisko wartości granicznej.

W tym wariancie sprężystego podparcia występują dodatkowo dwa przypadki graniczne dla obciążenia krytycznego

- a/ belka wspornikowa ($\kappa_2^* = \mathcal{G}_2^* = 0$) (rys. 4.2)
 lub ($\kappa_2^* = 0, \mathcal{G}_2^* = \infty$) (rys. 4.4)

$$k^2 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.47 \quad (4.4)$$

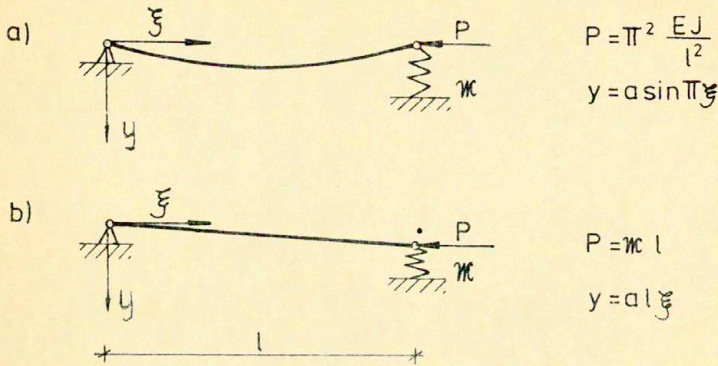
- b/ utwierdzenie - utwierdzenie z możliwością poprzecznego przesuwu ($\kappa_2^* = 0, \mathcal{G}_2^* = \infty$) (rys. 4.2) lub
 ($\mathcal{G}_2^* = 0, \kappa_2^* \geq \pi^2$) (rys. 4.4)

$$k^2 = \pi^2 \approx 9.87 \quad (4.5)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że wszystkie krzywe na rys. 4.4a przecinają się w punkcie $\kappa_2^* = \pi^2$. Oznacza to, że dla każdej wartości sztywności \mathcal{G}_1^* siła krytyczna jest taka sama i wynosi $k^2 = \pi^2$.

Rozważmy przypadek, kiedy sztywności obrotowe sprężyn mocujących są równe zero $/\mathcal{G}_i = 0, i=1,2 /$, wtedy zależnie od wartości parametrów układu możliwe są dwie postacie wybočenja pokazane na rys. 4.5.

Okazuje się, że dla sztywności $\kappa = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}, (\kappa^* = \pi^2)$ wartości siły krytycznej dla obu przypadków są jednakowe i wynoszą $P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}, (k^2 = \pi^2)$. W tym przypadku możliwa jest również każda liniowa kombinacja obydwu postaci wybočenja pokazanych na rys. 4.5a i 4.5b bez zmiany siły krytycznej. Kształt krzy-



Rys. 4.5

wej oraz zmianę kąta jej nachylenia można zapisać następująco:

$$y = a (\sin \pi \xi - \pi \xi) \quad , \quad (4.6)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \pi a (\cos \pi \xi - 1).$$

Jak widać nachylenie $\frac{dy}{dx}$ krzywej y opisanej równaniem (4.6) zarówno przy $\xi = 0$ jak i przy $\xi = 1$ jest równe zero, dlatego obecność sztywności obrotowej $\varrho_i \neq 0$, $i=1,2$ nie wnosi dodatkowego momentu.

Liniowy charakter dolnej krzywej, rys. 4.4a, wynika z faktu, że reprezentuje ona belkę podpartą jak na rys. 4.5, o sile krytycznej

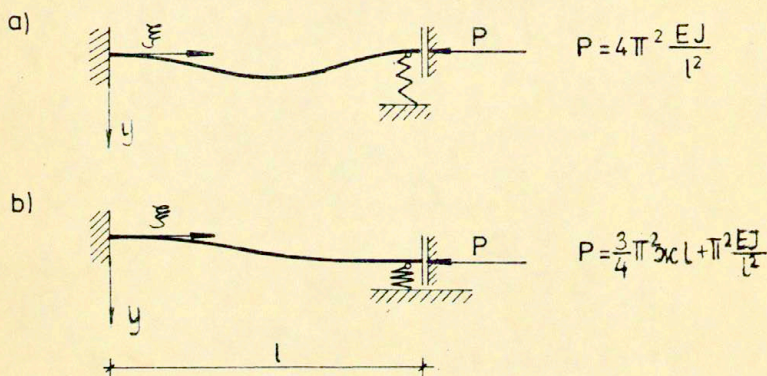
$$P = \begin{cases} \kappa l, & \kappa \in (0, \pi^2 \frac{EJ}{l^2}] \\ \pi^2 \frac{EJ}{l^2}, & \kappa \in (\pi^2 \frac{EJ}{l^2}, \infty) \end{cases} \quad , \quad (4.7)$$

lub w wielkościach bezwymiarowych

$$k^2 = \begin{cases} \kappa^* & , \quad \kappa^* \in (0, \pi^2] \\ \pi^2 & , \quad \kappa^* \in (\pi^2, \infty) . \end{cases} \quad (4.8)$$

Związki (4.7)₁, (4.8)₁ wynikają bezpośrednio ze wzoru (2.33) natomiast (4.7)₂, (4.8)₂ z faktu, że dla $\kappa > \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ ($\kappa^* > \pi^2$) belka przyjmuje symetryczną postać wyboczenia, rys. 4.5a.

Analogicznie w przypadku podparcia zilustrowanego na rys. 4.6



Rys. 4.6

obciążenie krytyczne przyjmuje wartości

$$P = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi^2 \kappa l + \pi^2 \frac{EJ}{l^2} & , \quad \kappa \in (0, 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}] \\ 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2} & , \quad \kappa \in (4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}, \infty) , \end{cases} \quad (4.9)$$

lub

$$k^2 = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi^2 \kappa^* + \pi^2 & , \quad \kappa^* \in (0, 4\pi^2] \\ 4\pi^2 & , \quad \kappa^* \in (4\pi^2, \infty) . \end{cases} \quad (4.10)$$

Wzory (4.10) reprezentują górną krzywą na rys. 4.2a.

4.3. Przypadek $\kappa_1^* = \infty$, $\xi_1^* = 0$ (rys. 4.7)

W tym przypadku należy zauważyć, że zgodnie z zależnością (4.6)₂ dla $\xi = 0$ wartość siły krytycznej przy $\kappa_2^* = \pi^2$ jest stała (krzywa $\kappa_2^* = 9$).

4.4. Przypadek $\kappa_1^* \in (0, \infty)$, $\xi_1^* = 0$ (rys. 4.8)

W tym przypadku krzywe są bardzo mało wrażliwe na zmianę sztywności obrotowej i układają się prawie równolegle dla kolejnych wartości κ_1^* .

5. Wyniki numeryczne dla belek wieloprzęsłowych na podanych podporach

Ta część pracy zajmuje się badaniem wpływu usytuowania jednej lub wielu podpór sprężystych o sztywnościach κ^* lub ξ^* na wartość obciążenia krytycznego. W obliczeniach wykorzystano, jak poprzednio, metodę macierzy przeniesienia.

Rozważmy belkę dwuprzęsłową o równych przęsłach (każda o długości 0.5 l) podpartą swobodnie na końcach i sprężystości w środku o bezwymiarowej sztywności środkowej podpory κ^* (rys. 5.1). Wraz ze wzrostem κ^* (od 0 do $16\pi^2$) belka przyjmuje pierwszą postać wybożenia a wartość bezwymiarowej siły krytycznej k^2 rośnie od π^2 do $4\pi^2$. Dla wartości $\kappa^* = 4\pi^2$ następuje podwójna bifurkacja równowagi, bowiem obok symetrycznej postaci równowagi możliwa jest również postać antysymetryczna. Przy dalszym wzroście wartości κ^* siła krytyczna jest stała i odpowiada wybożeniu o postaci dwóch

antysymetrycznych półfal jak w przypadku sztywnej podpory środkowej.

Przy większej liczbie podpór zachowanie belki jest podobne, i tak dla dwóch podpór sprężystych o bezwymiarowej sztywności κ^* siła krytyczna osiągnie wartość $k^2 = \pi^2 / (0,331 l)^2 \approx 88,23$ co odpowiada wyboczeniu o postaci trzech półfal. W przypadku trzech podpór $k^2 = \pi^2 / (0,25 l)^2 \approx 157,9$ (cztery półfale) itd., rys. 5.1.

Inny przebieg mają krzywe w przypadku belki z podatnymi podporami ograniczającymi tylko obrót, rys. 5.2. W przypadku jednej podpory umieszczonej w środku, gdy przekrój o współrzędnej $x = 0,5 l$ nie ulega obrotowi wartość sztywności ξ^* nie ma wpływu na siłę krytyczną. W każdym z pozostałych przypadków obserwuje się równomierny wzrost siły krytycznej do wartości podanej na krzywej.

Na rys. 5.3 podano wartości sił krytycznych kolejno dla $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ podpór sprężystych o bezwymiarowej sztywności κ^* , równomiernie rozłożonych na długości belki. Przy każdej liczbie podpór zakładamy warunek

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i^* = \kappa_0^* \quad , \quad (5.1)$$

gdzie:

n - liczba podpór

κ_0^* - sztywność (rys. 5.3)

Zwiększenie liczby podpór powoduje zmniejszenie siły krytycznej, która dla $n \rightarrow \infty$ dąży do wartości odpowiadającej podłożu sprężystemu o współczynniku κ_c / l . Przy bardzo dużych sztywnościach $\kappa_0^* \gg 120$ na wykresie pojawia się jedno maksimum, jednak ze wzrostem ilości podpór wielkość obciążenia krytycznego zawsze maleje do wielkości granicznej.

W przypadku zastosowania równomiernie rozłożonych sprężystych podpór obrotowych, rys. 5.4, o sztywnościach spełniających warunek

$$\sum_{i=1}^n S_i^* = S_0, \quad (5.2)$$

gdzie:

n - ilość podpór

S_0 - zadana sztywność rys. 5.4

przy zwiększającej się liczbie podpór obserwuje się wzrost siły krytycznej od wartości π^2 do wartości odpowiadającej podłożu sprężystemu o współczynniku $S_0/1$.

Kolejne wykresy pokazują w jaki sposób wzrasta siła krytyczna w przypadku pośredniego podparcia belki podporą sprężystą umieszczoną w dowolnym miejscu. W przypadku jednej podpory sprężystej przesuwu bocznego, rys. 5.5, siła wzrasta równomiernie od π^2 do $4\pi^2$, odpowiadającej swobodnemu podparciu w środku belki. Jeśli umieszczamy dwie takie podpory symetrycznie względem środka to max siła krytyczna $k^2 = 9\pi^2$ wystąpi gdy są one umieszczone w węzłach trzeciej postaci wyboczenia ($\xi = 0,333$, $\xi = 0,667$).

W przypadku jednej lub dwóch umieszczonych symetrycznie sprężystych podpór obrotowych, rys. 5.7, rys. 5.8, siła krytyczna rośnie osiągając przy $\xi = 0.1 \div 0.2$ lokalne maksimum by później zmaleć do wartości $k^2 = \pi^2$ odpowiadającej pierwszej postaci wyboczenia belki swobodnie podpartej.

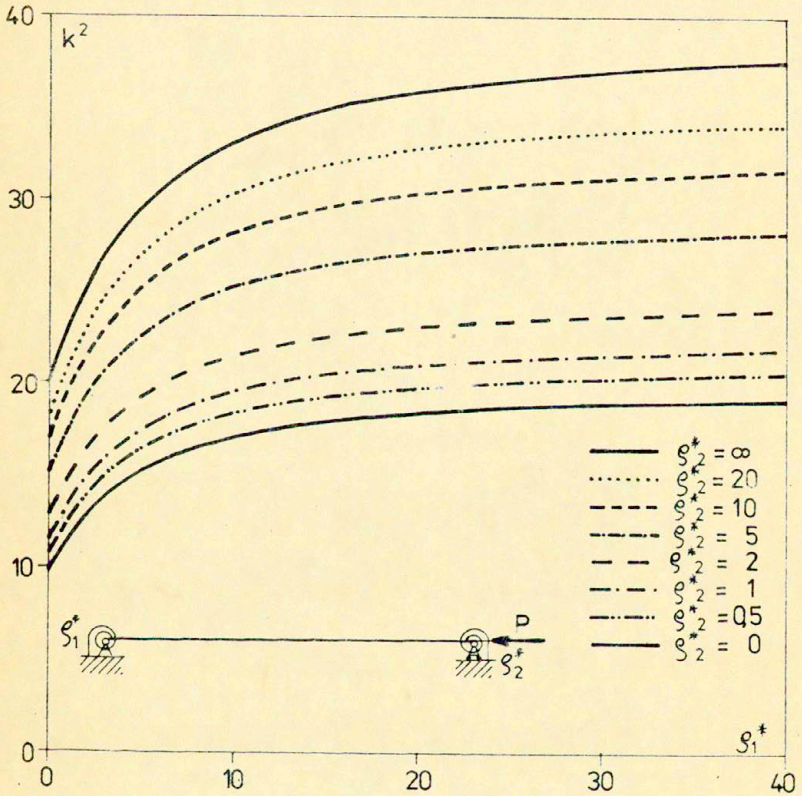
Ostatnim z rozpatrywanych przypadków jest belka z jednej strony utwierdzona a z drugiej na podporze sprężystej, podparta również pośrednio w dowolnym miejscu podporą sprężystą o sztywności \mathcal{K} , rys. 5.9, 5.10.

Podobnie jak w poprzednich przypadkach sprężystego zamocowania końca belki zwiększenie sztywności przesuwu bocznego \mathcal{K} powoduje znaczny wzrost siły krytycznej. Tym razem można to zaobserwować przy dowolnym położeniu podpory pośredniej. Jeżeli podpora znajduje się w węźle odkształconego

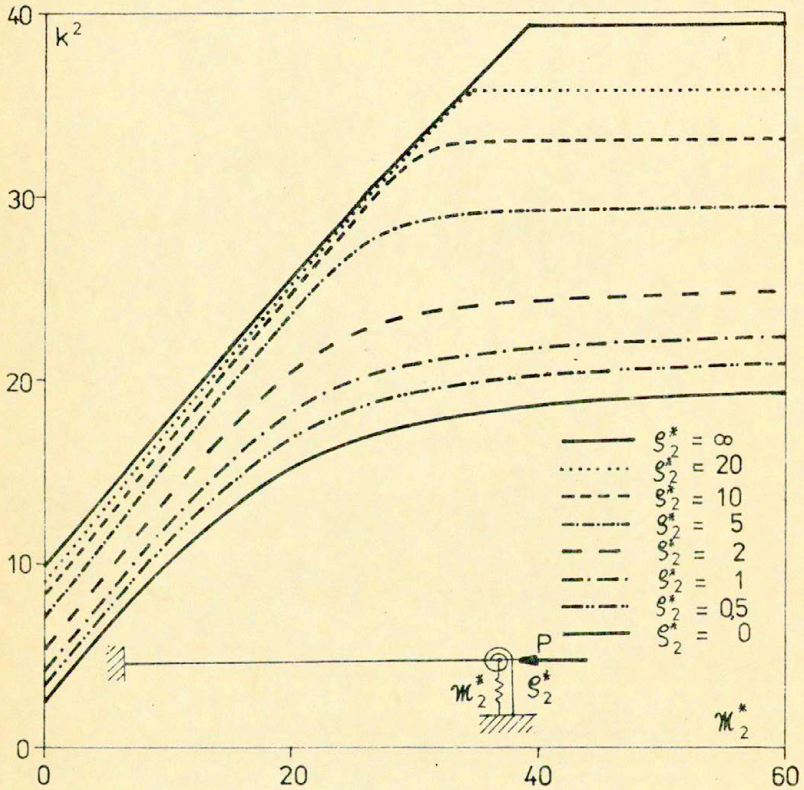
pręta zmiana jej sztywności nie wpływa na wartość siły krytycznej, rys. 5.10a.

Literatura

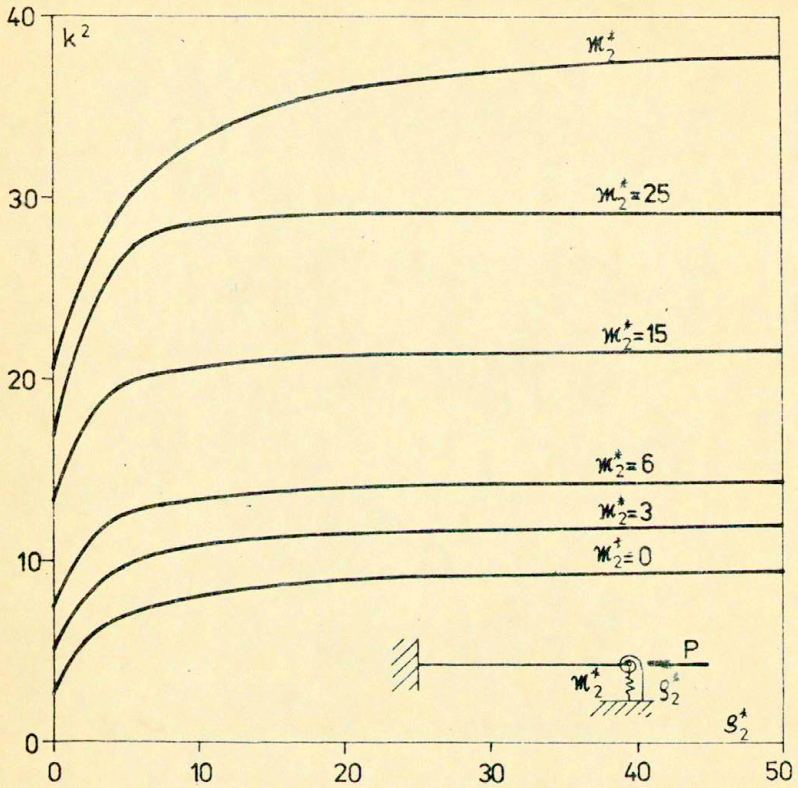
- [1] BOGACZ R., IRRETTIER H., NAHMENHOLZ O., Optimal design of structures under non-conservative forces with stability constrains, Proc. of EUROBECH 112 Coll., Hungary 1979
- [2] BOGACZ R., JANSZEWSKI Z., Zagadnienia analizy i syntezy kolumn obciążonych siłami śledzącymi ze względu na stateczności, Prace IPPT PAN 6/1986
- [3] ŻYCZKOWSKI M., Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych, część pierwsza pracy zbiorowej pt. "Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji", Ossolineum 1981
- [4] PEDERSEN P., Et notat om bjakesøjler og stabilitet af simple rammer, Danmarks Tekniske Højskole, 1984
- [5] PESTEL E.C. LECKIE F.A., Matrix methods in elastomechanics, McGraw-Hill, 1963
- [6] PIETRZAK J., RAKOWSKI G., WRZEŚNIEWSKI K., Macierzowa analiza konstrukcji, PWN 1979
- [7] TIMOSHENKO S.P., GERE J.M., Theory of elastic stability, McGraw-Hill, 1961
- [8] ZIEGLER H., Principles of Structural Stability, Blaisdell Publishing Co., 1968
- [9] GURFINKEL G., ROBINSON A.R., Buckling of elastically restrained columns, J. of Structural Div., vol 91, No STG, 1965



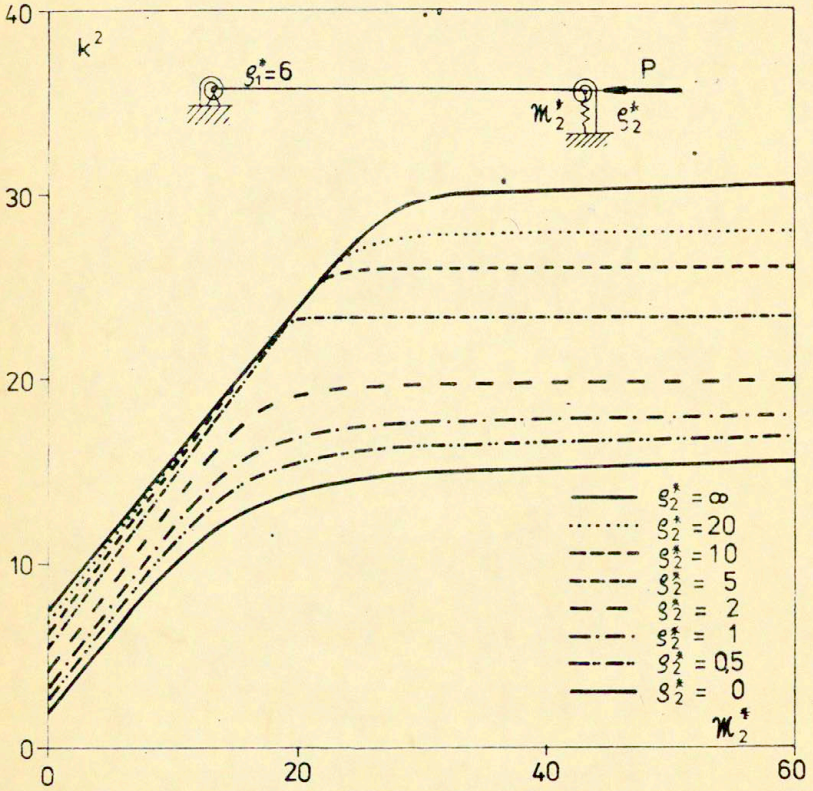
Rys. 4.1



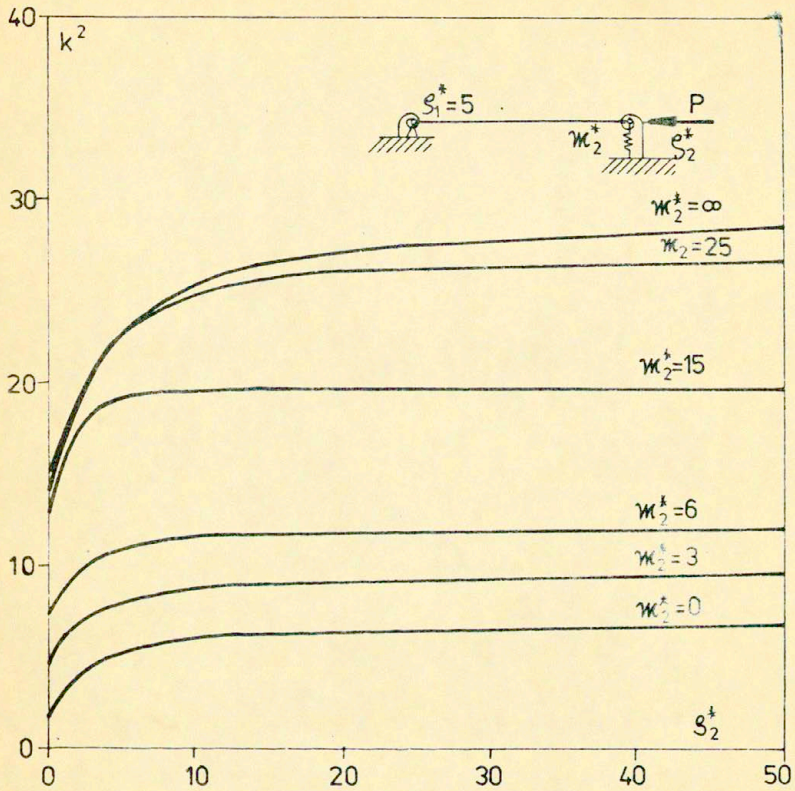
Rys. 4.2 a



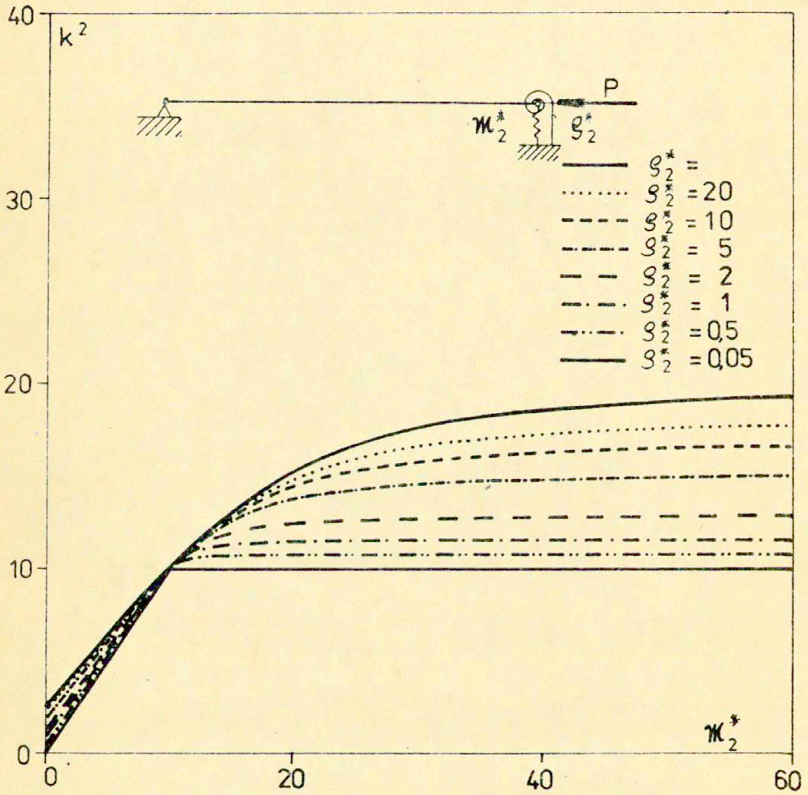
Rys. 4.2 b



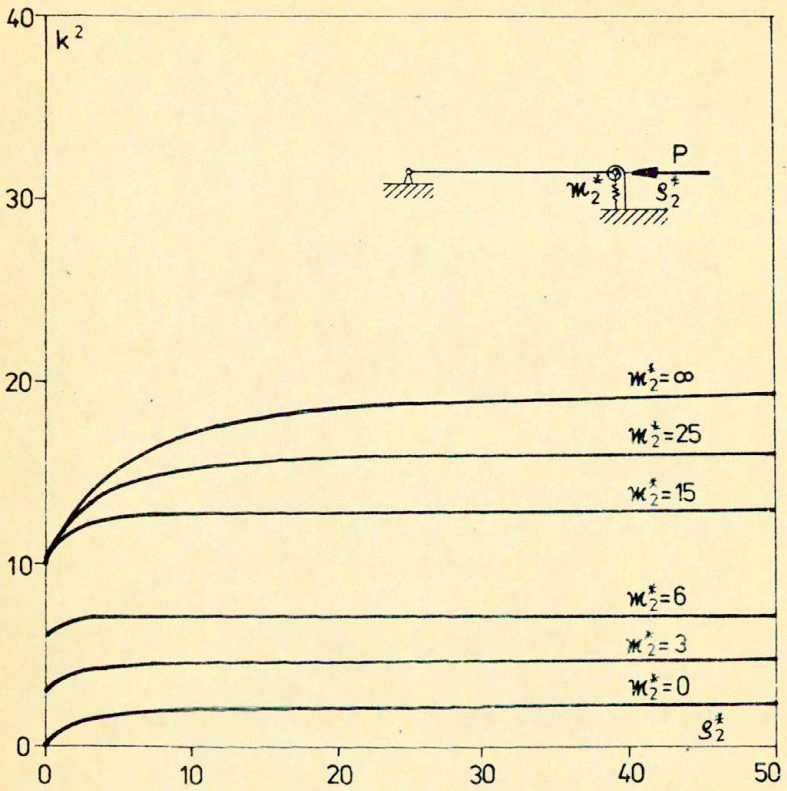
Rys. 4.3 a



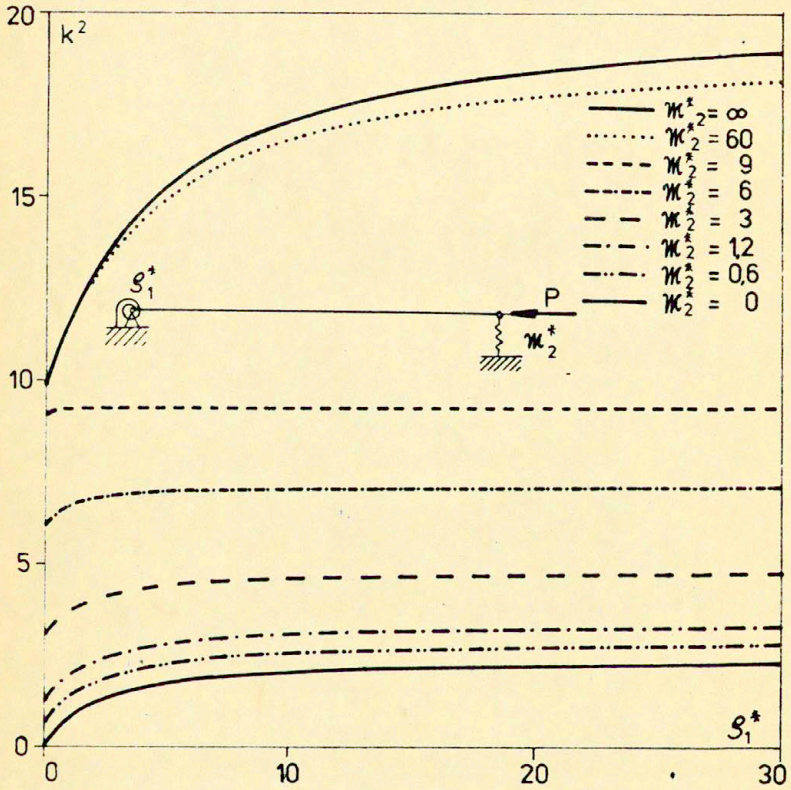
Rys. 4.3 b



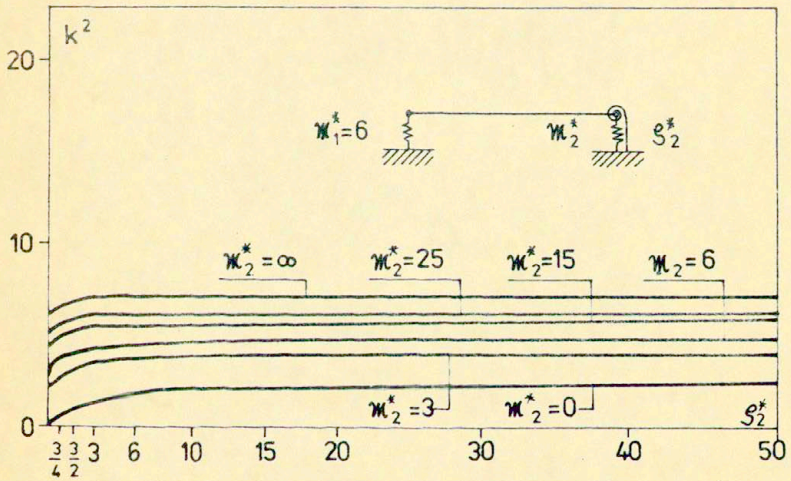
Rys. 4.4 a



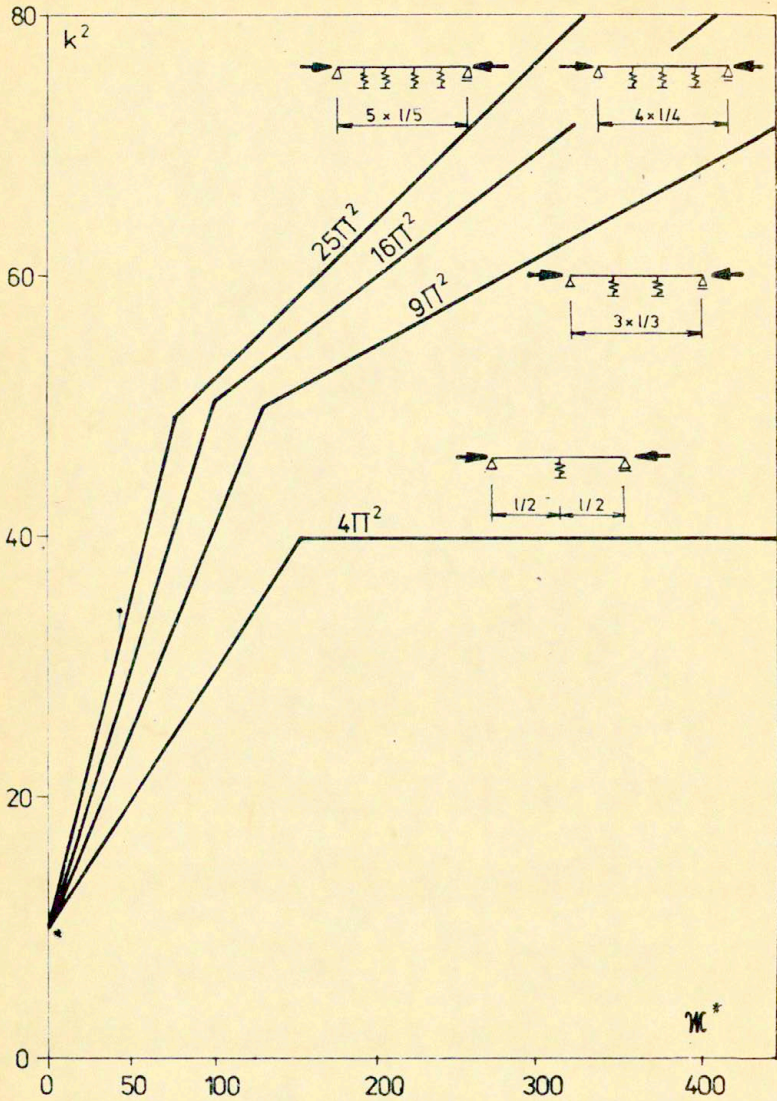
Rys. 44 b



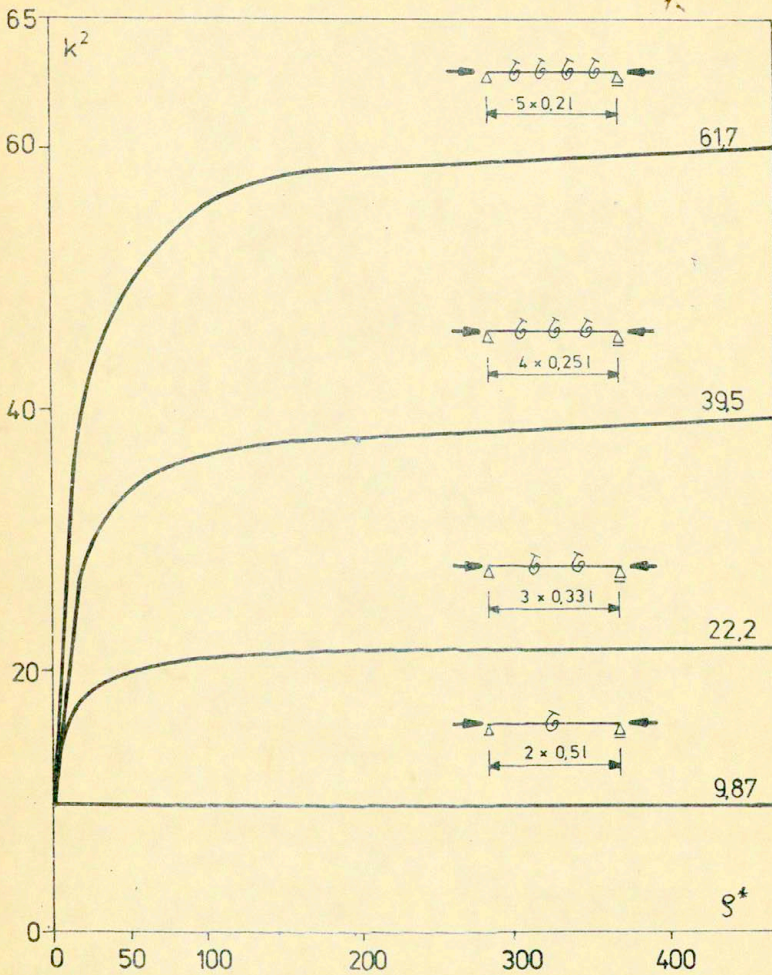
Rys. 4.7



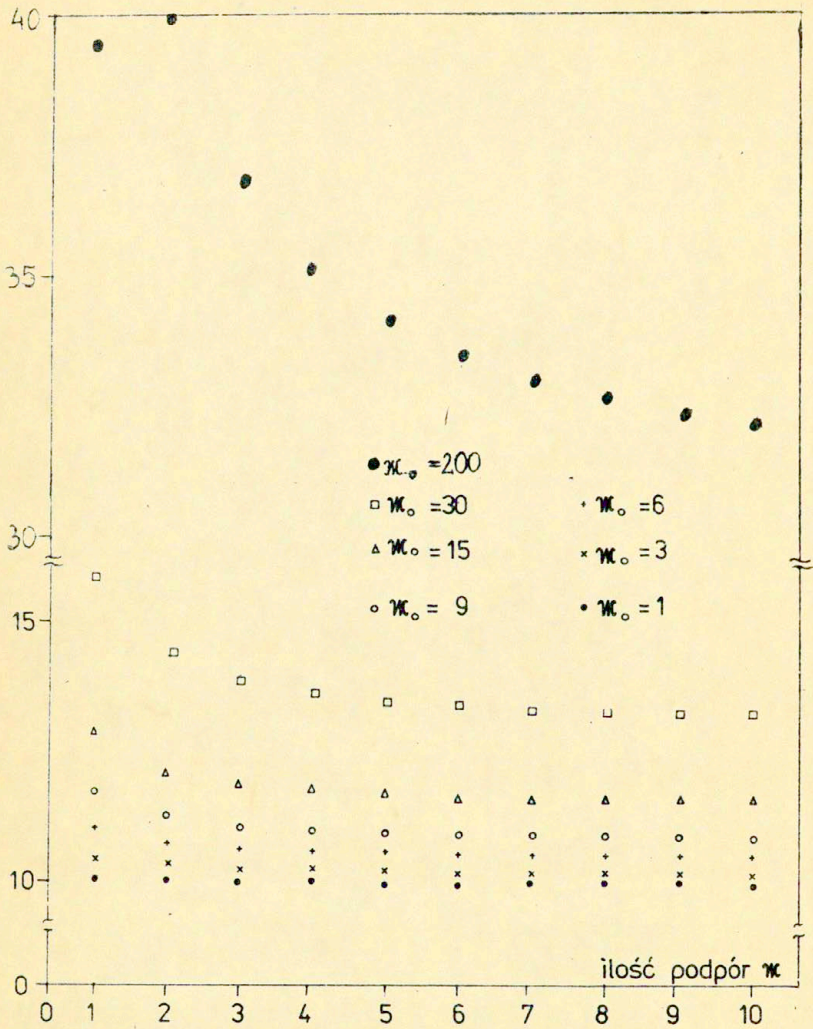
Rys. 4.8



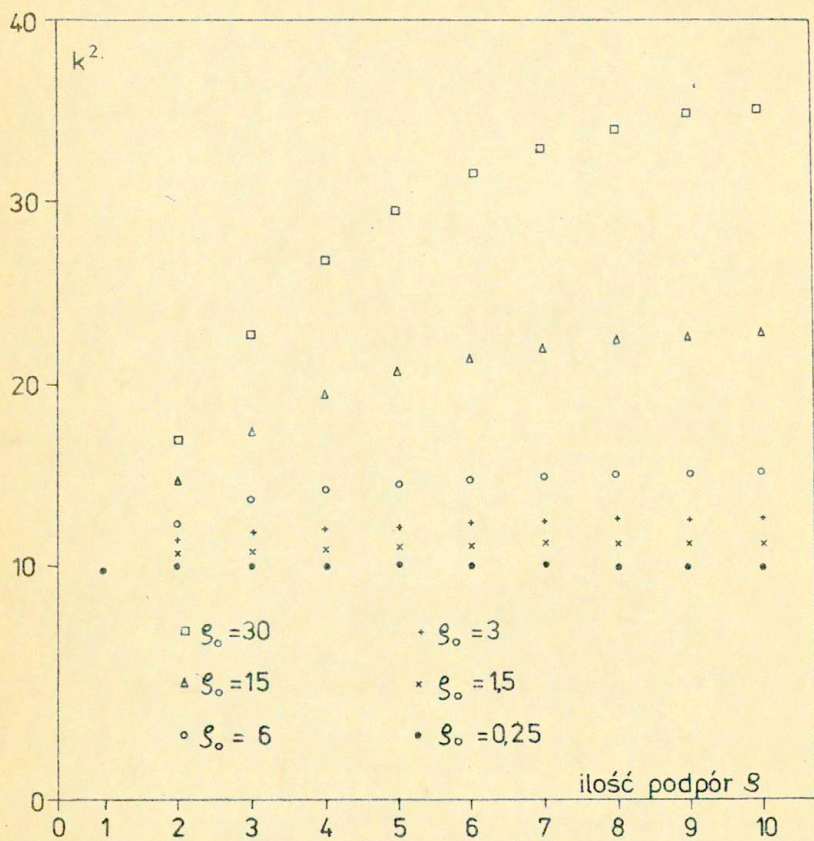
Rys. 5.1



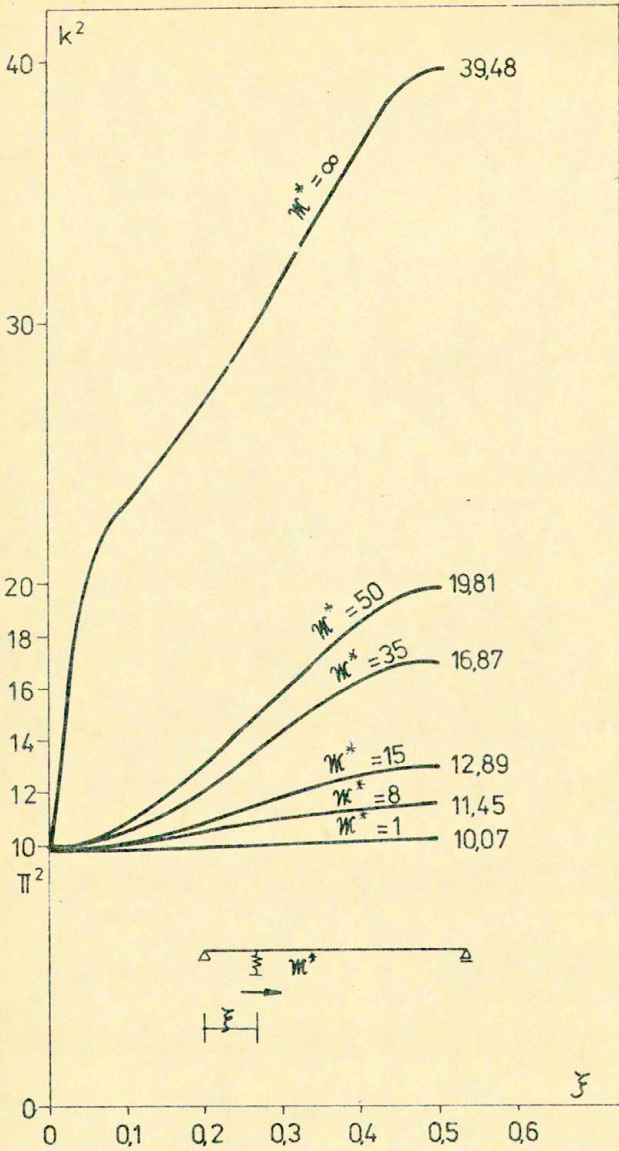
Rys. 5.2



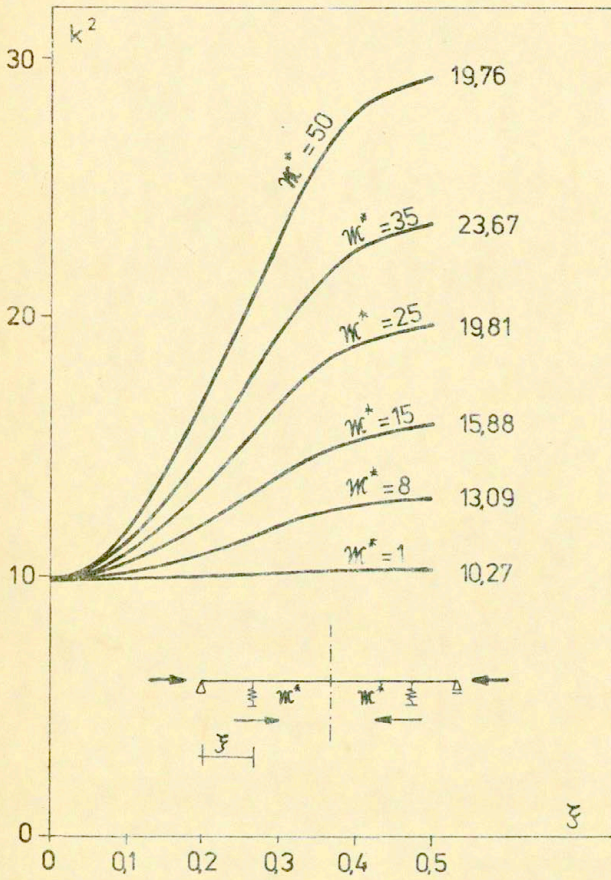
Rys. 5.3



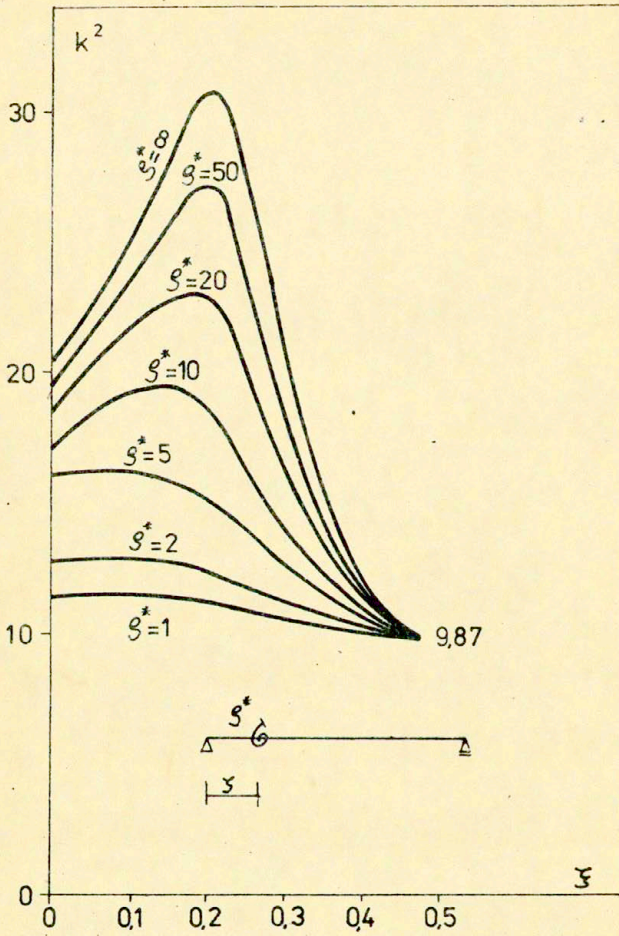
Rys. 5.4



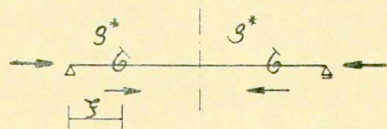
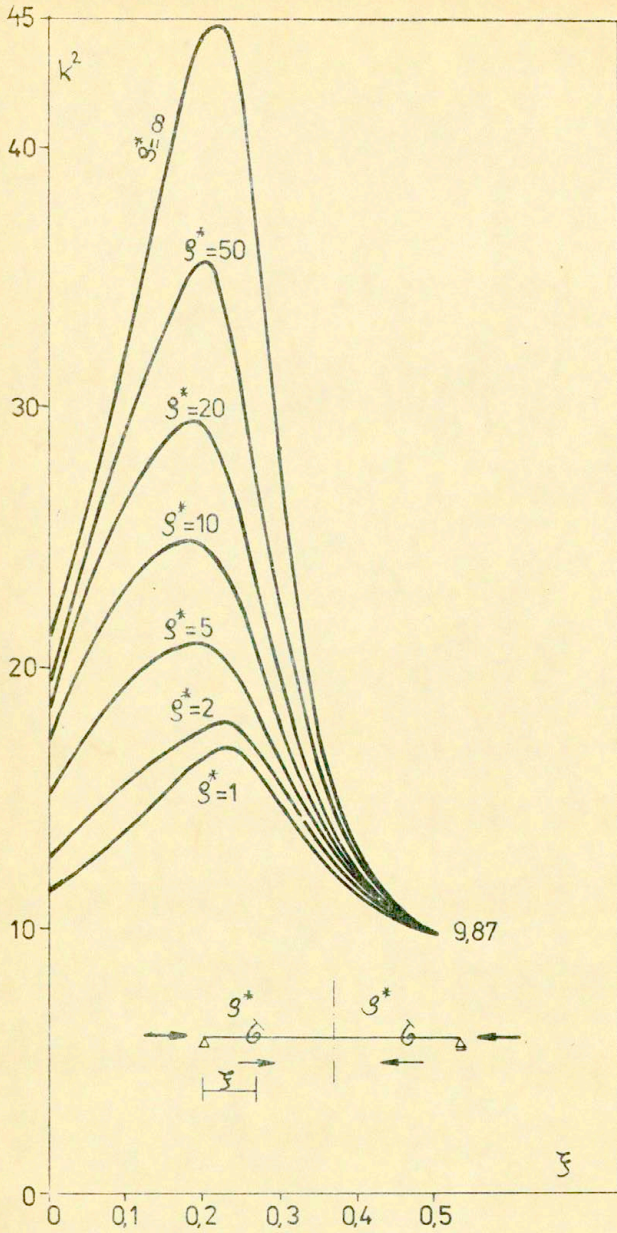
Rys. 5.5



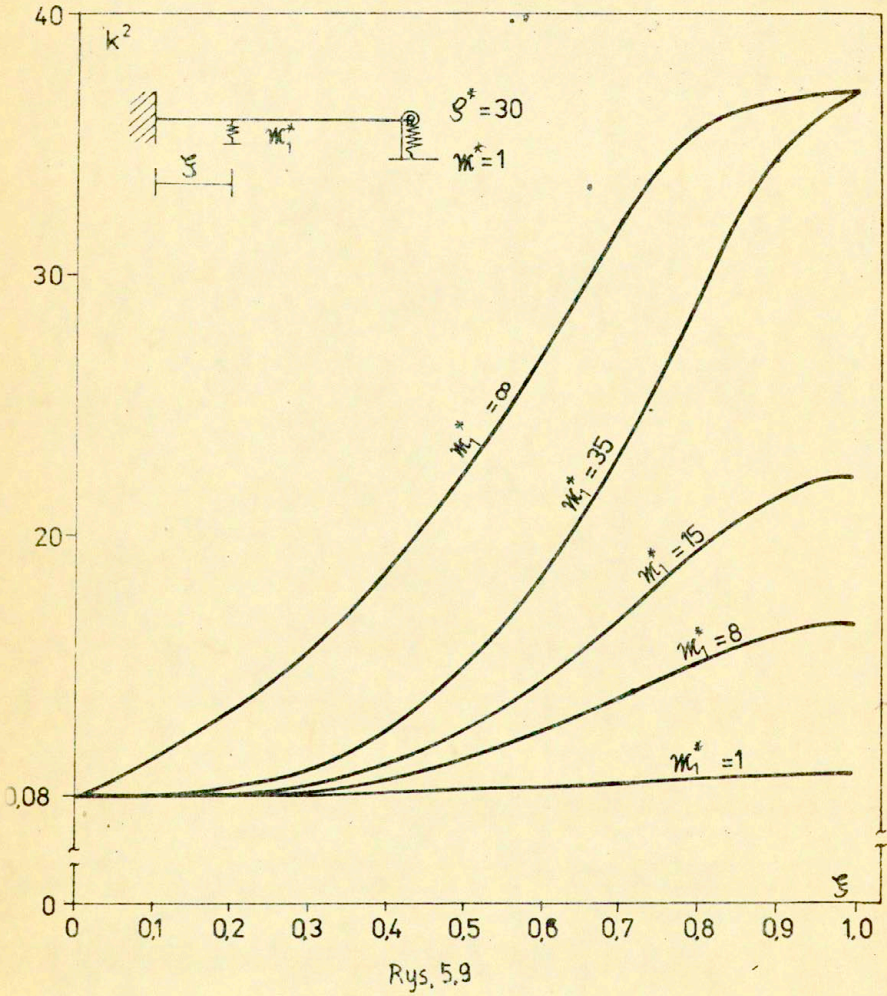
Rys. 5.6

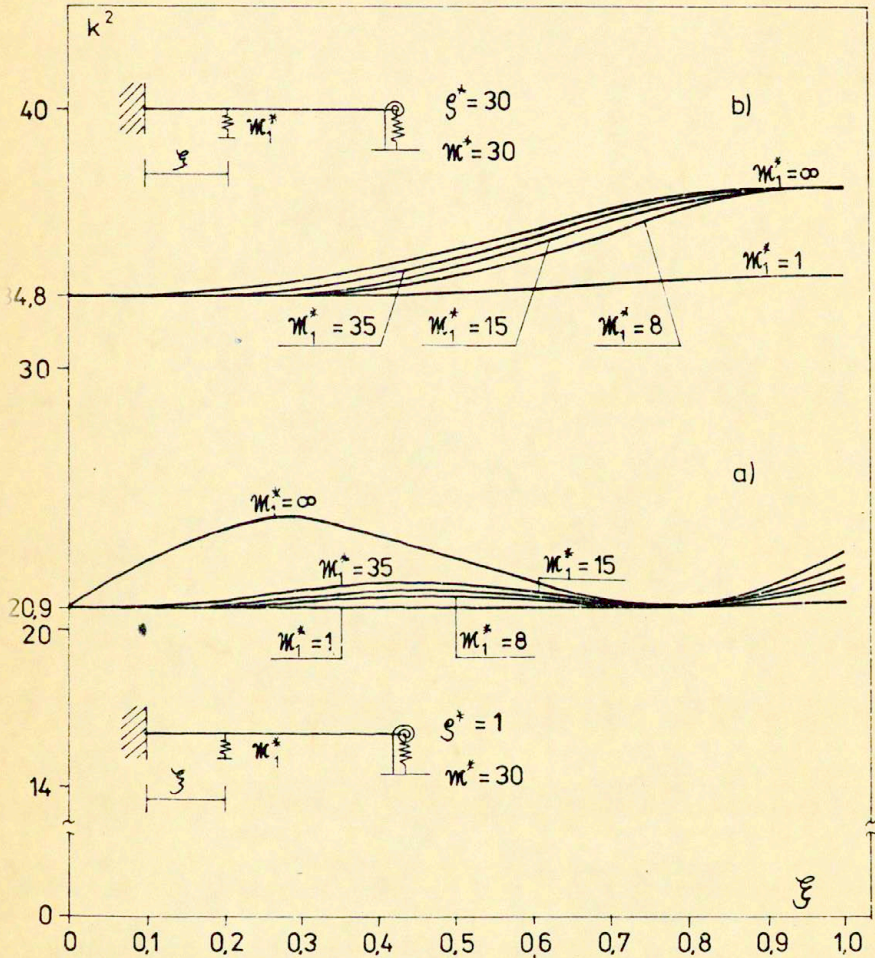


Rys. 5.7



Rys. 5.8





Rys. 5.10

Spis treści

	str.
1. Wstęp	3
2. Belka o końcach zamocowanych sprężystości	4
3. Belka wieloprzęśłowa na podatnych podporach	13
4. Wyniki numeryczne dla belek jednoprzęsłowych	17
5. Wyniki numeryczne dla belek wieloprzęśłowych na podatnych podporach	21
6. Wykaz literatury	24